DOI: 10.3842/umzh.v76i8.8210

УДК 517.925.51; 681.5.03

Олексій Мазко[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО РІВНЯ ГАСІННЯ ЗОВНІШНІХ І ПОЧАТКОВИХ ЗБУРЕНЬ У НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

We investigate the classes of nonlinear dynamical systems with bounded disturbances and functional uncertainties. Further, we develop the methods aimed at the evaluation of the generalized performance criterion for these systems, which characterizes the weighted levels of damping of external disturbances and the initial disturbances caused by an unknown initial vector. It is proposed to apply these methods in solving the generalized H_∞-control problem for the analyzed classes of systems. An illustrative example of a pseudolinear control system with disturbance is presented.

Досліджуються класи нелінійних динамічних систем з обмеженими збуреннями і функціональними невизначеностями. Розроблено методи оцінки узагальненого критерію якості таких систем, що характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених невідомим початковим вектором. Запропоновано застосування даних методів у задачі узагальненого H_∞-керування для досліджуваних класів систем. Наведено ілюстративний приклад псевдолінійної системи керування зі збуренням.

1. Вступ. У сучасній теорії керування велику увагу приділяють задачам оцінки та мінімізації рівня гасіння зовнішніх збурень динамічних систем (H_∞-оптимізації). Типовим критерієм якості в таких задачах для систем з нульовим початковим вектором є максимальне значення відношення L_2-норм векторів контрольованого виходу об’єкта і збурень (див., наприклад, $[1-3]$). Для класу лінійних автономних систем ця характеристика збігається з H_∞-нормою матричної передатної функції.

На практиці доцільно застосовувати узагальнені критерії якості систем вигляду [4, 5]

$$J_0 = \sup_{0<\|w\|_P<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \qquad J = \sup_{\{w,x_0\}\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}. \tag{1}$$

Тут $z(t)$, $w(t)$ і x_0 — вектори відповідно контрольованого виходу, обмежених збурень і початкового стану системи, $\mathcal{W}$ — множина допустимих пар $\{w(t), x_0\}$, для яких виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $\|z\|_Q$ і $\|w\|_P$ — зважені L_2-норми відповідних векторів z і w вигляду

$$\|z\|_Q = \sqrt{\int\limits_0^\infty z^\top Q z\, dt}, \qquad \|w\|_P = \sqrt{\int\limits_0^\infty w^\top P w\, dt},$$

де $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — задані вагові матриці (див. також $[6-8]$).

Зазначимо, що компонентами вектора $w(t)$ можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу. Цей вектор повинен бути обмеженим за вказаною нормою, інші припущення щодо збурень не використовуються.

Очевидно, що $J_0 \le J$. У випадку одиничних матриць $P = I_s$ і $Q = I_k$ характеристика J_0 збігається зі стандартним критерієм якості в теорії H_∞-керування. Значення J характеризує

[1] E-mails: mazkoag@gmail.com, mazko@imath.kiev.ua.

зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором системи. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор системи x_0 називатимемо *найгіршими* щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях в (1) досягається супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$. Вектор $w(t)$ є найгіршим щодо J_0, якщо $\|z\|_Q = J_0\|w\|_P$. В [6, 9, 10] запропоновано методи знаходження таких векторів для лінійних систем, які базуються на розв'язуванні квадратичних матричних рівнянь типу Ріккаті.

Відомі методи синтезу H_∞-керування для лінійних систем базуються на умовах виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь та нерівностей (твердження типу “bounded real lemmas” [1, 11 – 13]). Методи матричних рівнянь та нерівностей застосовуються також при дослідженні проблеми H_∞-оптимізації лінійних неавтономних систем [14, 15]. Для класів псевдолінійних та афінних систем розроблено методи оцінювання та пониження впливу зовнішніх збурень, що базуються на розв'язуванні складних співвідношень, залежних від стану системи (рівняння в частинних похідних або нерівності Гамільтона – Якобі – Ісаака, матричні рівняння Ріккаті, матричні нерівності тощо, див., наприклад, [16 – 22]).

Динамічну систему називають *внутрішньо стійкою*, якщо її нульовий стан $x \equiv 0$ при відсутності збурень $(w = 0)$ асимптотично стійкий. Відомо, що лінійна автономна система

$$\dot{x} = Ax + Bw, \qquad z = Cx + Dw, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

є внутрішньо стійкою і її критерій якості J_0 менший за γ тоді й лише тоді, коли лінійна матрична нерівність (ЛМН)

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$. Система (2) внутрішньо стійка і $J < \gamma$ тоді й лише тоді, коли сумісна система ЛМН $\Phi(X) < 0$ і $0 < X < \gamma^2 X_0$ [4]. Характеристики (1) системи (2) на основі цих тверджень можна обчислити як розв'язки оптимізаційних задач, зокрема $J = \inf\big\{\gamma : 0 < X < \gamma^2 X_0,\ \Phi(X) < 0\big\}$.

У цій статті продовжено дослідження [9, 23] задач оцінювання та пониження впливу обмежених збурень в лінійних системах керування. Вивчаються умови, що забезпечують внутрішню стійкість і задані верхні оцінки критеріїв якості (1) для деяких класів нелінійних систем з обмеженими збуреннями. Розглянуто випадок поліедральної невизначеності матричнозначних функцій, що описують клас псевдолінійних систем зі збуреннями. Наведено способи застосування отриманих результатів у задачах зваженої H_∞-оптимізації нелінійних систем зі статичними регуляторами за виходом та станом. Відмінна особливість отриманих результатів порівняно з відомими полягає у застосуванні зважених критеріїв якості, які дають нові можливості при досягненні бажаних характеристик керованих систем.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$; $\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\}$ — опуклий багатогранник (політоп) з вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць, тобто

$$\operatorname{Co}\big\{A_1,\ldots,A_\nu\big\}=\left\{\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_iA_i:\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=1,\ \ \alpha_i\geq 0,\ \ i=\overline{1,\nu}\right\}.$$

2. Нелінійні системи з невизначеними збуреннями. Визначимо локальні характеристики J та J_0 вигляду (1) для класу нелінійних афінних систем

$$\dot{x}=a(x,t)+B(x,t)\,w,\qquad z=c(x,t)+D(x,t)\,w,\qquad x(0)=x_0, \tag{4}$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, $w\in\mathbb{R}^s$ і $z\in\mathbb{R}^k$ — вектори стану, зовнішніх збурень та виходу системи, а a і c (B і D) — векторні (матричні) функції, неперервно залежні від x і t при $x\in\mathcal{S}_0$ і $t\geq 0$, $\mathcal{S}_0$ — деяка відкрита опукла обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$, що містить початок координат. Нехай $a(0,t)\equiv 0$, $c(0,t)\equiv 0$ і система (4) *внутрішньо стійка*, тобто її нульовий стан $x\equiv 0$ при відсутності збурень ($w\equiv 0$) асимптотично стійкий.

Якщо для деякої додатно визначеної функції $v(x,t)$ $(v(0,t)\equiv 0)$ і будь-якого $\tau>0$ виконуються співвідношення

$$v(x(\tau),\tau)-v(x_0,0)\leq\int_0^{\tau}\big(\gamma^2w^\top Pw-z^\top Qz\big)dt, \tag{5}$$

$$0<v(x,t)\leq\gamma^2x^\top X_0\,x,\quad x\in\mathcal{S}_0,\quad t\geq 0, \tag{6}$$

то $\|z\|_Q^2\leq\gamma^2\big(\|w\|_P^2+x_0^\top X_0\,x_0\big)$, тобто $J\leq\gamma$. У випадку фіксованого вектора $x_0=0$ із (5) і (6) випливає, що $J_0\leq\gamma$, при цьому верхня оцінка функції v в (6) з ваговою матрицею X_0 не використовується.

Якщо функція v диференційовна, то після інтегрування виразу

$$\dot{v}+z^\top Qz-\gamma^2w^\top Pw=\big[\,1,w^\top\,\big]\,\Psi(x,t)\begin{bmatrix}1\\ w\end{bmatrix} \tag{7}$$

на інтервалі $[0,\tau]$ за умови

$$\Psi(x,t)=\begin{bmatrix}\psi_{11}(x,t) & \psi_{12}(x,t)\\ \psi_{21}(x,t) & \psi_{22}(x,t)\end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

де $\dot{v}$ — похідна за часом функції v в силу системи (4),

$$\psi_{11}(x,t)=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}a+c^\top Qc,\qquad \psi_{22}(x,t)=D^\top QD-\gamma^2P,$$

$$\psi_{12}(x,t)=\psi_{21}^\top(x,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}B+c^\top QD,$$

отримаємо нерівність (5).

2.1. Псевдолінійна неавтономна система. Нехай у системі (4)

$$a(t) = A(x,t)x, \qquad c(t) = C(x,t)x, \tag{9}$$

де A і C — матриці, неперервно залежні від x і t при $x \in \mathcal{S}_0$ і $t \geq 0$. Тоді, розглядаючи псевдолінійну систему

$$\dot{x} = A(x,t)\,x + B(x,t)\,w, \qquad z = C(x,t)\,x + D(x,t)\,w, \qquad x(0) = x_0, \tag{10}$$

допоміжну функцію доцільно шукати у вигляді квадратичної форми $v(x,t) = x^\top X(t)x$, де X — додатно визначена симетрична матриця, неперервно залежна від t. При цьому замість (7) і (8) маємо відповідні співвідношення

$$\dot{v} + z^\top Qz - \gamma^2 w^\top Pw = \left[x^\top, w^\top\right]\Phi(x,t)\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\Phi(x,t) = \begin{bmatrix} \dot{X} + A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

Лема 1. *Система* (10) *є внутрішньо стійкою і її критерій якості* $J \leq \gamma$, *якщо для деяких* $\varepsilon > 0$ *і* $\delta > 0$ *система матричних нерівностей*

$$\varepsilon I_n \leq X \leq \gamma^2 X_0, \qquad \Phi(x,t) \leq -\delta I_{n+s} \tag{13}$$

має розв'язок $X(t) = X^\top(t) > 0$ *при* $x \in \mathcal{S}_0$ *і* $t \geq 0$.

Доведення. За умов (13) маємо

$$\dot{v}(x) = x^\top\big(\dot{X} + A^\top X + XA\big)x \leq -\delta\|x\|^2 - C^\top QC \leq -\delta\|x\|^2,$$

де $\dot{v}$ — похідна функції Ляпунова v в силу системи (10) при $w \equiv 0$. Отже, ця система внутрішньо стійка (див. наслідок 2.1 в [5]). Крім того, за цих умов виконуються співвідношення (5) і (6), які забезпечують задану оцінку критерію якості $J \leq \gamma$.

Лему доведено.

Розглянемо систему (10) за додаткових умов

$$\begin{aligned} &A(x,t) \in \mathrm{Co}\{A_1,\ldots,A_{\nu_1}\}, \qquad B(x,t) \in \mathrm{Co}\{B_1,\ldots,B_{\nu_2}\}, \\ &C(x,t) \in \mathrm{Co}\{C_1,\ldots,C_{\nu_3}\}, \qquad D(x,t) \in \mathrm{Co}\{D_1,\ldots,D_{\nu_4}\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Задані набори матриць $A_i,\ i = \overline{1,\nu_1},\ B_j,\ j = \overline{1,\nu_2},\ C_p,\ p = \overline{1,\nu_3}$ і $D_q,\ q = \overline{1,\nu_4}$, є вершинами деяких політопів у відповідних матричних просторах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times s}$, $\mathbb{R}^{k\times n}$ і $\mathbb{R}^{k\times s}$. При цьому значення цих матричних функцій можна вважати невизначеними і записаними у вигляді

$$A(x,t) = \sum_{i=1}^{\nu_1} a_i A_i,\ B(x,t) = \sum_{j=1}^{\nu_2} b_j B_j,\ C(x,t) = \sum_{p=1}^{\nu_3} c_p C_p,\ D(x,t) = \sum_{q=1}^{\nu_4} d_q D_q, \tag{15}$$

де невід'ємні скалярні функції a_i, b_j, c_p і d_q, залежні від x і t, задовольняють співвідношення

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} a_i = \sum_{j=1}^{\nu_2} b_j = \sum_{p=1}^{\nu_3} c_p = \sum_{q=1}^{\nu_4} d_q \equiv 1, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0. \tag{16}$$

Лема 2. *Якщо система ЛМН*

$$0 < X \leq \gamma^2 X_0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} A_i^\top X + XA_i + C_p^\top QC_p & XB_j + C_p^\top QD_q \\ B_j^\top X + D_q^\top QC_p & D_q^\top QD_q - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4},$$

сумісна щодо X, *то система* (10) *за умов* (14) *внутрішньо стійка і її критерій якості* $J \leq \gamma$.

Доведення. Застосовуючи лему Шура [1], записуємо матричні нерівності (18) у вигляді

$$\Omega_{ijpq} = \begin{bmatrix} A_i^\top X + XA_i & XB_j & C_p^\top \\ B_j^\top X & -\gamma^2 P & D_q^\top \\ C_p & D_q & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

при цьому

$$\Omega_{ijpq} < -\delta I_{n+k+s}, \qquad i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}, \tag{19}$$

де $0 < \delta < \mu$, $\mu = -\max_{i,j,p,q} \lambda_{\max}(\Omega_{ijpq})$, $\lambda_{\max}(\Omega_{ijpq})$ — максимальне власне значення матриці Ω_{ijpq}. Врахувавши лінійну залежність блокових матриць Ω_{ijpq} від вершин політопів (14), а також співвідношення (15) і (16), помножимо всі матричні нерівності (19) на добуток невід'ємних функцій $a_i b_j c_p d_q$ і підсумуємо ліві й праві частини отриманих нерівностей за всіма індексами. В результаті отримаємо матричну нерівність

$$\begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB & C^\top \\ B^\top X & -\gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < -\delta I_{n+k+s}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0,$$

звідки на основі леми Шура $\Phi(x,t) < -\delta I_{n+s}$. У цьому випадку $\dot{X} = 0$.

Оскільки $A^\top X + XA < -\delta I_n$, то квадратична форма $v(x,t) = x^\top X x$ зі сталою матрицею $X > 0$ є функцією Ляпунова для системи (10) при $w \equiv 0$. Отже, згідно з лемою 1, система (10) за умов (14) внутрішньо стійка і її критерій якості J не перевищує γ.

Лему доведено.

2.2. Псевдолінійна автономна система. Розглядаючи псевдолінійну автономну систему

$$\dot{x} = A(x)\,x + B(x)\,w, \qquad z = C(x)\,x + D(x)\,w, \qquad x(0) = x_0, \tag{20}$$

припускатимемо, що функція $v(x)$ задовольняє умову

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2x^\top X(x), \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{21}$$

де $X(x)$ — симетрична додатно визначена матриця, неперервно залежна від x. Тоді матриця Φ у співвідношеннях (11) і (12) не залежить від t і має вигляд

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C^\top QC & XB + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0. \tag{22}$$

За умови (22) $A^\top X + XA < 0$, при цьому лінійна система $\dot{x} = A(0)x$ асимптотично стійка і нульовий стан псевдолінійної системи $\dot{x} = A(x)x$ асимптотично стійкий.

Відомо [20, 24], що для заданої вектор-функції $h(x)\colon \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$ класу $\mathbf{C}^r$ існує скалярна функція $v \in \mathbf{C}^{r+1}$ така, що $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x} = 2h^\top(x)$, тоді й лише тоді, коли

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i}, \qquad x \in \mathcal{S}_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}. \tag{23}$$

При цьому функцію $v(x)$ можна визначити як

$$v(x) = 2x^\top \int_0^1 h(tx)dt, \quad v(0) = 0. \tag{24}$$

Крім того, якщо $h(x) = X(x)x$, де $X(x) = \big[X_1, \ldots, X_n\big]$ — додатно визначена диференційовна матриця, то функція (24) додатно визначена, а умови (23) еквівалентні системі співвідношень

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)^\top x \equiv 0, \qquad x \in \mathcal{S}_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Зокрема, для заданої матриці $X(x)$ існує функція $v(x)$, що задовольняє рівність (21), якщо

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \qquad x \in \mathcal{S}_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}. \tag{25}$$

Отже, маємо таке твердження.

Лема 3. *Якщо існує диференційовна матриця* $X(x) = \big[X_1, \ldots, X_n\big] > 0$, *що задовольняє співвідношення* (17), (22) *і* (25), *то система* (20) *внутрішньо стійка і має критерій якості* $J \le \gamma$.

Зауваження **1.** Умови леми 3 в загальному випадку складні для перевірки, але в деяких випадках їх можна спростити. Зокрема, якщо $\Phi(0) < 0$, то через припущення про неперервність матричних функцій в (20) матрична нерівність (22) буде виконуватись в деякому околі $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0$ нульового стану системи (20). У цьому випадку критерії якості J_0 і J лінеаризованої системи

$$\dot{x} = A(0)\,x + B(0)\,w, \qquad z = C(0)\,x + D(0)\,w, \qquad x(0) = x_0,$$

можна вважати локальними характеристиками системи (20) в даному околі. Якщо до того ж матрицю X шукати сталою, то рівності (25) виконуються автоматично. При цьому ЛМН $\Phi(0) < 0$ і $0 < X \le \gamma^2 X_0$ забезпечують внутрішню стійкість системи (20) і оцінку її локальної характеристики $J \le \gamma$.

Зауваження **2.** Твердження лем 1 – 3 без додаткового обмеження $X \le \gamma^2 X_0$ забезпечують внутрішню стійкість відповідних систем і задану оцінку їхніх критеріїв якості $J_0 \le \gamma$.

3. Узагальнена задача H_∞-керування для нелінійних систем. Розглянемо нелінійну систему керування

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)\,x + B_1(x)\,w + B_2(x)\,u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1(x)\,x + D_{11}(x)\,w + D_{12}(x)\,u, \\ y &= C_2(x)\,x + D_{21}(x)\,w + D_{22}(x)\,u, \end{aligned} \tag{26}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, контрольованого і спостережуваного виходів, а всі матриці неперервно залежні від $x \in \mathcal{S}_0$. Нехай J_0 і J — критерії якості цієї системи вигляду (1) щодо контрольованого виходу z при заданому керуванні u. Задача полягає у побудові стабілізовних J_0- та J-*оптимальних* регуляторів, які мінімізують відповідні значення J_0 і J для замкненої системи. Пошук таких узагальнених H_∞-*оптимальних* регуляторів можна проводити на основі досягнення відповідних оцінок $J_0 \le \gamma$ та $J \le \gamma$ при мінімально можливому значенні параметра $\gamma > 0$. Для спрощення подальших викладок покладемо $D_{22}(x) = 0$.

При застосуванні статичного регулятора за спостережуваним виходом

$$u = K(x)\, y, \quad K \in \mathbb{R}^{m\times l}, \tag{27}$$

замкнена система має вигляд

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \qquad z = C_*(x)x + D_*(x)w, \qquad x(0) = x_0, \tag{28}$$

де

$$A_* = A + B_2KC_2, \qquad B_* = B_1 + B_2KD_{21},$$

$$C_* = C_1 + D_{12}KC_2, \qquad D_* = D_{11} + D_{12}KD_{21}.$$

Запишемо матричну нерівність (22) для системи (28) на основі леми Шура як ЛМН щодо K (див. доведення теореми 5.1 в [5]):

$$L_0^\top K R_0 + R_0^\top K^\top L_0 + \Omega < 0, \tag{29}$$

де $R_0 = \begin{bmatrix} R & 0_{l\times k}\end{bmatrix}$, $L_0 = \begin{bmatrix} L & 0_{m\times s}\end{bmatrix}\widetilde{X}$, $R = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21}\end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} B_2^\top & D_{12}^\top\end{bmatrix}$,

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що матриці R і L мають сталий ранг. Нерівність (29) має розв'язок K лише тоді, коли виконуються умови [11]

$$W_{R_0}^\top \Omega W_{R_0} < 0, \qquad W_{L_0}^\top \Omega W_{L_0} < 0, \tag{30}$$

де W_{R_0} і W_{L_0} — матриці, що задовольняють рівності $R_0 W_{R_0} = 0$, $L_0 W_{L_0} = 0$, а їхні стовпці утворюють базиси ядер відповідних матриць R_0 і L_0. Оскільки

$$W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \qquad W_{L_0} = \widetilde{X}^{-1}\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то умови (30) набирають вигляду

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + XA + C_1^\top Q C_1 & XB_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{31}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + YA^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & YC_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0. \tag{32}$$

При цьому $X > 0$ і $XY = \gamma^2 I_n$, що еквівалентно співвідношенням

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \equiv n. \tag{33}$$

Отже, на основі леми 3 і критерію сумісності матричної нерівності (29) у вигляді (30) для системи (26) за наведених припущень маємо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай існують матриці* $X(x) = \begin{bmatrix} X_1, \ldots, X_n \end{bmatrix} > 0$ *і* $Y(x) > 0$, *що задовольняють співвідношення* (17), (25), (31)–(33). *Тоді регулятор* (27), *де* $K(x)$ *— розв'язок ЛМН* (29), *забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи* (28) *і задану оцінку її критерію якості* $J \leq \gamma$.

Наведемо наслідки теореми 1 за додаткових умов

$$C_2 = I_n, \qquad D_{21} = 0, \qquad D_{11}^\top(x) Q D_{11}(x) < \gamma^2 P, \quad x \in \mathcal{S}_0, \tag{34}$$

використавши співвідношення типу (25) для стовпців оберненої матриці

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}, \qquad x \in \mathcal{S}_0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \tag{35}$$

де $\begin{bmatrix} Y_1, \ldots, Y_n \end{bmatrix} = Y^{-1}(x)$.

Теорема 2. *Для системи* (26) *за умов* (34) *існує статичний регулятор за станом* $u = K(x)x$, *при якому замкнена система* (28) *внутрішньо стійка з критерієм якості* $J \leq \gamma$, *якщо виконується одне з таких тверджень*:

1) *існує матриця* $Y(x) > 0$, *що задовольняє співвідношення* (32), (35) *і*

$$Y \geq X_0^{-1}; \tag{36}$$

2) *існують матриці* $Y(x) > 0$ *і* $Z(x)$, *що задовольняють співвідношення* (35), (36) *і*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(AY + YA^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top) & \gamma^2 B_1 & YC_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ \gamma^2 B_1^\top & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{37}$$

При виконанні твердження 1 *матрицю такого регулятора можна знайти як розв'язок ЛМН* (29), *а при виконанні твердження* 2 *— у вигляді* $K(x) = ZY^{-1}$.

Твердження теореми 2 випливають із доведення теореми 1 за умов (34), при яких $W_R = \begin{bmatrix} 0 & I_s \end{bmatrix}^\top$ і нерівність (31) не залежить від X (твердження 1). Вираз (37) з'являється в результаті конгруентного перетворення матричної нерівності (29), якому відповідає множення першого блочного рядка зліва і першого блочного стовпця справа на $Y = \gamma^2 X^{-1}$ при $K = ZY^{-1}$ (твердження 2).

Наведемо важливий наслідок теореми 2 для нелінійної системи (26) за додаткових умов

$$\begin{aligned} A(x) &\in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, & B_1(x) &\in \mathrm{Co}\{B_{11}, \ldots, B_{1\nu_2}\}, \\ C_1(x) &\in \mathrm{Co}\{C_{11}, \ldots, C_{1\nu_3}\}, & D_{11}(x) &\in \mathrm{Co}\{D_{111}, \ldots, D_{11\nu_4}\}, \\ B_2(x) &\in \mathrm{Co}\{B_{21}, \ldots, B_{2\nu_5}\}, & D_{12}(x) &\in \mathrm{Co}\{D_{121}, \ldots, D_{12\nu_6}\}, \end{aligned} \tag{38}$$

використавши ЛМН, що не залежать від її стану x.

***Наслідок* 1.** *Нехай сталі матриці* $Y > 0$ *і* Z *задовольняють систему ЛМН* (36) *і*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(A_iY + YA_i^\top + B_{2r}Z + Z^\top B_{2r}^\top) & \gamma^2 B_{1j} & YC_{1p}^\top + Z^\top D_{12f}^\top \\ \gamma^2 B_{1j}^\top & -\gamma^2 P & D_{11q}^\top \\ C_{1p}Y + D_{12f}Z & D_{11q} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{39}$$

$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}, \quad r = \overline{1, \nu_5}, \quad f = \overline{1, \nu_6}.$$

Тоді статичний регулятор за станом $u = Kx$ *з матрицею* $K = ZY^{-1}$ *за умов невизначеності* (38) *забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи* (28) *з критерієм якості* $J \leq \gamma$.

***Зауваження* 3.** Умови теорем 1, 2 і наслідку 1 без використання співвідношень з ваговою матрицею X_0 забезпечують задану оцінку критерію якості $J_0 \leq \gamma$ відповідної замкненої системи. При цьому твердження наслідку 1 зберігає чинність для класу нелінійних неавтономних систем типу (26), якщо припустити, що матричні функції, значення яких належать заданим політопам у (38), залежать від x і t (див. лему 2).

***Зауваження* 4.** Можна сформулювати наслідок теореми 1 для системи (26) за умов (38) із застосуванням статичного регулятора за виходом. Для цього слід сформувати систему співвідношень вигляду (17), (25), (31) – (33) для всіх можливих комбінацій вершин політопів (38). Для пошуку невідомих матриць X і Y цієї системи можна скористатися засобами LMIRank і YALMIP системи MATLAB, які дозволяють розв'язувати системи ЛМН з ранговими обмеженнями [25, 26]. Якщо такі матриці знайдено, а система ЛМН (29) з набором матриць, якому відповідають можливі комбінації вершин політопів (38), сумісна щодо K, то регулятор $u = Ky$ забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи (28) і задану оцінку її критерію якості $J \leq \gamma$.

4. Приклад. Розглянемо нелінійну систему керування з невизначеним збуренням [27]

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = 2\sin x_1 - x_2 + 0{,}1w + u.$$

Нульовий стан цієї системи за відсутності керування і збурення нестійкий. Нехай $z = x_1$ і $y = x$ є відповідно контрольованим і спостережуваним виходами системи. Тоді рівняння системи можна подати у псевдолінійному вигляді (26), де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\varphi(x_1) & -1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = I_n, \qquad D_{11} = 0, \qquad D_{12} = 0, \qquad D_{21} = 0, \qquad D_{22} = 0.$$

Тут $\varphi(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ — скрізь неперервна функція, причому $\varphi(\theta_0) \leq \varphi(\theta) \leq \varphi(0) = 1$ для довільного θ і

$$A(x) \in \mathrm{Co}\{A_1, A_2\}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\varphi(\theta_0) & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

де $\theta_0 \approx 4{,}493409$ — корінь рівняння $\theta = \tan\theta$.

Виберемо вагові коефіцієнти функціоналів якості (1): $Q = 1,\ P = 0{,}5,\ X_0 = \mu I_2$, де $\mu > 0$. Покладаючи $\gamma = 0{,}5$ і $\mu = 3$, за допомогою засобів LMI Solvers системи MATLAB, знаходимо матриці

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}430727 & -0{,}772122 \\ -0{,}772122 & 7{,}112855 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} -6{,}832853 & 1{,}096420 \end{bmatrix},$$

які задовольняють систему ЛМН (36) і (39). При цьому статичний регулятор

$$u = Kx, \qquad K = ZY^{-1} = -\begin{bmatrix} 19{,}353213 & 1{,}946704 \end{bmatrix}, \tag{40}$$

забезпечує внутрішню стійкість замкненої системи і оцінку її критерію якості $J \le \gamma$.

Лінеаризована в околі нульового стану замкнена система

$$\dot{x} = A_* x + B_1 w,$$

де $A_* = A(0) + B_2 K$, $A(0) = A_2$ і $\sigma(A_*) = \{-1{,}473352 \pm 3{,}896466i\}$, має критерії якості $J_0 = 0{,}012317 < J = 0{,}293246 < \gamma$. Для цієї системи на основі леми 2 з [9] знайдено найгірше збурення у вигляді лінійного зворотного зв'язку за станом

$$w = K_* x, \qquad K_* = \begin{bmatrix} 0{,}067025 & 0{,}022755 \end{bmatrix}, \tag{41}$$

і найгірший нормалізований початковий вектор щодо J

$$x_{0*} = -\begin{bmatrix} 0{,}993326 & 0{,}115337 \end{bmatrix}^\top. \tag{42}$$

Замкнена нелінійна система за умов (40) – (42) має вигляд

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A(x) + B_2 K + B_1 K_* \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_{0*}. \tag{43}$$

На рис. 1 зображено поведінку розв'язку $x(t)$ системи (43), що описує рух керованого маятника, а на рис. 2 — збурення (41), де $x = x(t)$.

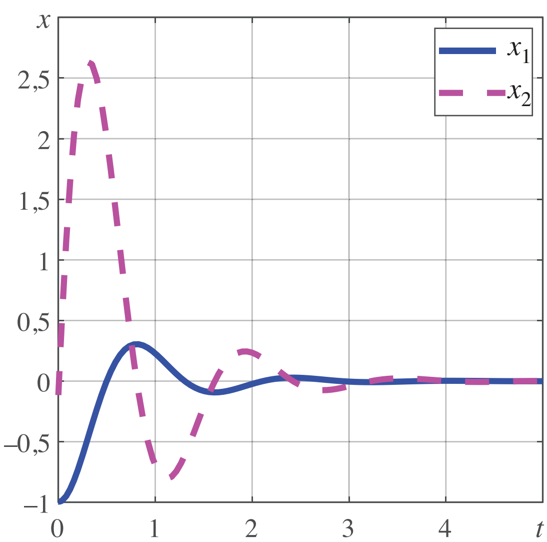

Рис. 1. Поведінка замкненої системи.

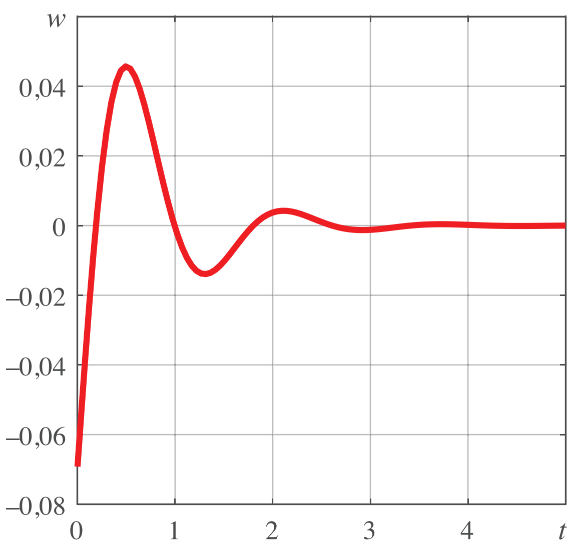

Рис. 2. Зовнішнє збурення.

5. Висновки. В роботі запропоновано нові методи оцінки критеріїв якості нелінійних систем, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Зокрема, якщо значення функціональних матриць псевдолінійної системи належать заданим політопам, то умови, що забезпечують внутрішню стійкість і бажану оцінку зваженого критерію якості цієї системи, зводяться до розв'язування системи ЛМН зі сталими матричними коефіцієнтами (лема 2). Для класу автономних псевдолінійних систем знайдено достатні умови внутрішньої стійкості, які гарантують бажану оцінку зваженого критерію якості (лема 3). Цей результат застосовано в задачі узагальненої H_∞-оптимізації псевдолінійних систем з контрольованими і спостережуваними виходами (теореми 1, 2). У випадку, коли значення функціональних матриць псевдолінійної системи належать заданим політопам, запропоновано конструктивний метод синтезу статичного регулятора за станом, який можна реалізувати за допомогою комп'ютерних засобів (наслідок 1). Новизна отриманих результатів порівняно з відомими роботами [14 – 22] ґрунтується, зокрема, на застосуванні зважених критеріїв якості для досліджуваних класів систем, а також додаткових обмежень (25) і (35) на шукані розв'язки відповідних матричних нерівностей.

Слід зазначити, що дослідження проблем узагальненої H_∞-оптимізації нелінійних систем доцільно продовжити із застосуванням статичних та динамічних регуляторів за виходом. Також доцільним є пошук додаткових умов, які дозволяють розробити і застосувати конструктивні алгоритми синтезу таких регуляторів для реальних керованих об'єктів, користуючись сучасними комп'ютерними засобами.

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Автор заявляє, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Література

1. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Stud. Appl. Math., **15** (1994).
2. K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Englewood, Prentice-Hall, Inc. (1996).
3. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
4. А. Г. Мазко, *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств*, Праці Інституту математики НАН України, **102** (2016).
5. О. Г. Мазко, *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*, Наук. думка, Київ (2023); https://doi.org/10.37863/6103136622-55.
6. D. V. Balandin, M. M. Kogan, *Generalized H_∞-optimal control as a trade-off between the H_∞-optimal and γ-optimal controls*, Autom. and Remote Control, **71**, № 6, 993 – 1010 (2010).
7. Z. Feng, J. Lam, S. Xu, S. Zhou, *H_∞ control with transients for singular systems*, Asian J. Control, **18**, № 3, 817 – 827 (2016).
8. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки*, Зб. праць Інституту математики НАН України, **15**, № 1, 88 – 99 (2018).
9. О. Г. Мазко, *Синтез статичних регуляторів для керованих об'єктів із екзогенними збуреннями*, Нелінійні коливання, **26**, № 4, 484 – 494 (2023).
10. О. Г. Мазко, *Зважена оцінка і пониження рівня впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1510 – 1523 (2020).
11. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Internat. J. Robust and Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
12. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits, Systems and Signal Process, **26**, 829 – 838 (2007).
13. I. R. Petersen, R. Tempo, *Robust control of uncertain systems: classical results and recent developments*, Automatica, **50**, № 5, 1315 – 1335 (2014).
14. F. Coloniusa, R. Fabbria, R. Johnson, *On non-autonomous H_∞ control with infinite horizon*, J. Different. Equat., **220**, 46 – 67 (2006).

15. R. Ravi, K. M. Nagpal, P. P. Khargonekar, *H_∞ control of linear time-varying systems: a state-space approach*, SIAM J. Control and Optim., **29**, № 6, 1394 – 1413 (1991).
16. A. J. van der Schaft, *L_2-Gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control*, IEEE Trans. Automat. Control, **37**, № 6, 770 – 784 (1992).
17. A. J. van der Schaft, *L_2-Gain and passivity techniques in nonlinear control*, third ed., Springer Intern. Publ. AG, Cham, Switzerland (2017).
18. A. Isidori, A. Astolfi, *Disturbance attenuation and H_∞-control via measurement feedback in nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **37**, № 9, 1283 – 1293 (1992).
19. Xin Wang, E. E. Yaz, S. C. Schneider, Y. I. Yaz, *$H_2 - H_\infty$ control of continuous-time nonlinear systems using the state-dependent Riccati equation approach*, Systems Science & Control Eng., **5**, 224 – 231 (2017).
20. Wei-Min Lu, J. C. Doyle, *H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization*, IEEE Trans. Automat. Control, **40**, № 9, 1668 – 1675 (1995).
21. D. F. Coutinho, A. Trofino, M. Fu, *Nonlinear H-infinity control: an LMI approach*, IFAC, 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain (2002).
22. Asep Najmurrokhman, *On solvability of output feedback nonlinear H_∞-control problem using nonlinear matrix inequalities approach*, J. Electr. Eng. and Inform. Technology, **1**, № 1, 33 – 39 (2003).
23. О. Г. Мазко, *Оцінка та досягнення зважених критеріїв якості у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **74**, № 7, 980 – 990 (2022).
24. M. S. Berger, M. Berger, *Perspective in nonlinearity: an introduction to nonlinear analysis*, W. A. Benjamin, New York (1968).
25. R. Orsi, U. Helmke, J. B. Moore, *A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities*, Automatica, **42**, № 11, 1875 – 1882 (2006).
26. J. Löfberg, *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*, IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 284 – 289 (2004).
27. D. F. Coutinho, A. Trofino, *H_∞ Output feedback control for a class of nonlinear systems*, Proc. of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts, June 30 – July 2, 3017 – 3022 (2004).

Одержано 04.03.24