Український математичний вісник

Том 15 (2018), № 2

Зміст

Адреса редакції:
Інститут прикладної математики і механіки
Національної академії наук України
вул. Добровольського, 1, 84100, Слов'янськ, Україна
Електронна пошта: **UMB.Submission@nas.gov.ua**
Тел.: **+38 (0626) 66 55 00**

Український Математичний Вісник

Том 15 (2018), № 2

ISSN 1810 - 3200

Український Математичний Вісник

Том 15 (2018), № 2

100 років
Національна академія наук України
1918

Українське математичне товариство

Український математичний вісник

Засновники:

Інститут математики НАН України,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Українське математичне товариство

“Український математичний вісник” публікує оригінальні та оглядові статті з основних напрямків теоретичної математики, переважно з теорії функцій та функціонального аналізу, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та рівнянь математичної фізики, алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики, геометрії та топології.

“Український математичний вісник” виходить чотири рази на рік. Журнал включено до Каталогу газет та журналів України “Укрпошта”, індекс 08165. Рекомендуємо оформляти передплату через поштові відділення або шляхом укладення прямих договорів з видавництвом журналу “Український математичний вісник” за адресою: Інститут прикладної математики і механіки НАН України, вул. Добровольського, 1, 84100, Слов’янськ, Україна

Англомовна версія журналу “Український математичний вісник” публікується видавництвом Springer US в окремих номерах Journal of Mathematical Sciences, ISSN: 1072-3374 (Print), 1573-8795 (Online), http://link.springer.com/journal/10958

Затверджено до друку Вченою радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України 10.12.2018, протокол № 12.

Свідоцтво про державну реєстрацію журналу - серія КВ № 10706, видане 6 грудня 2005 р.

Підписано до друку 10.12.2018. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 8,5. Замовлення № 10215. Тираж 100 прим.

Надруковано в типографії Техпринтцентр. Адреса: м. Слов’янськ, вул. Генерала Батюка, 19.
Телефон: +38 (06262) 3-20-99

Український математичний вісник

Адреси членів редакційної колегії:

Самойленко А. М.
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
01601, Київ-4, Україна
sam@imath.kiev.ua

Абдуллаєв Ф. Г.
Mersin University
Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics
33343 Yenisehir
Mersin, Turkey
fabdul@mersin.edu.tr

Березанський Ю. М.
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
01601, Київ-4, Україна
berezan@imath.kiev.ua

Гутлянський В. Я.
ІПММ НАН України
вул. Добровольського, 1
84100, Слов’янськ, Україна
vgutlyanskii@gmail.com

Деркач В. О.
Національний педагогічний
ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пірогова, 9
01001, Київ, Україна
derkach.v@gmail.com

Довгоший О.А.
ІПММ НАН України
вул. Добровольського, 1
84100, Слов’янськ, Україна
oleksiy.dovgoshey@gmail.com

Івасишен С. Д.
Національний технічний
ун-т України "КПІ"
ім. І. Сікорського
пр. Перемоги, 37
03056, Київ, Україна
ivasyshen_sd@mail.ru

Королюк В. С.
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
01601, Київ-4, Україна
korol@imath.kiev.ua

Курта В. В.
Американське математичне товариство
416 Fourth street, P. O. Box 8604
Ann Arbor, MI, 48107-8604, USA
vvk@ams.org

Луковський І. О.
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
01601, Київ-4, Україна
lukovsky@imath.kiev.ua

Марченко В. О.
ФТІНТ НАН України
пр. Леніна, 47
61103, Харків, Україна
marchenko@ilt.kharkov.ua

Моторний В. П.
Дніпровський національний
ун-т ім. Олеся Гончара
пр. Науковий, 13
49050, Дніпро, Україна
mmf@ff.dsu.dp.ua

Нікітін А. Г.
Інститут математики
НАН України
вул. Терещенківська, 3
01601, Київ-4, Україна
nikitin@imath.kiev.ua

Пастур Л. А.
ФТІНТ НАН України
пр. Леніна, 47
61103, Харків, Україна
lpastur@flint.ilt.kharkov.ua

Перестюк М. О.
Київський національний ун-т
ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64
01033, Київ, Україна
far@ukr.net

Протасов І. В.
Київський національний ун-т
ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64
01033, Київ, Україна
i.v.protasov@gmail.com

Скрипнік І. І.
ІПММ НАН України
вул. Добровольського, 1
84100, Слов’янськ, Україна
iskrypnik@iamm.donbass.com

Тригуб Р. М.
Сумський державний ун-т
вул. Римського-Корсакова, 2
40007, Суми, Україна
roald.trigub@gmail.com

Хруслов Є. Я.
ФТІНТ НАН України
пр. Леніна, 47
61103, Харків, Україна
khruslov@ilt.kharkov.ua

Шеремета М. М.
Львівський національний ун-т
вул. Університетська, 1
79000, Львів, Україна
m_m_sheremeta@list.ru

Шишков А. Є.
ІПММ НАН України
вул. Добровольського, 1
84100, Слов’янськ, Україна
aeshkv@yahoo.com

Технічний редактор: О. П. Ткаченко

Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 2, 194 – 209

Апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича

Станіслав О. Чайченко, Андрій Л. Шидліч

(*Представлена О. А. Довгоишием*)

Анотація. В роботі знайдено точні значення величин найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим деяких множин образів мультиплікаторів в модулярних просторах Орлича $l_{\mathbf{M}}$. Описано також простір $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ всіх мультиплікаторів з простору $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$.

2010 MSC. 47A58, 41A46, 46B45.

Ключові слова та фрази. Модулярі простори Орлича, найкраще наближення, базисний поперечник, поперечник за Колмогоровим, мультиплікатор.

1. Вступ

Модулярні простори Орлича $l_{\mathbf{M}}$ [1, розділ 4] досліджуються математиками з 40-х років минулого століття. Дані простори подібні до більш вивчених просторів l_M, введених В. Орличем в роботі [2], однак вони визначаються не однією фіксованою функцією Орлича M, а цілою послідовністю таких функцій $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$. Тому простори $l_{\mathbf{M}}$ володіють не лише основними властивостей просторів Орлича l_M, а й збігаються у випадку, коли функції $M_k(t) = t^{p_k}$, $p_k \geq 1$, з відомими просторами $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування, які були введені В. Орличем в роботі [3].

Робота [3] заклала початок цілій теорії просторів типу Орлича. У ній В. Орлич, окрім просторів послідовностей $l_{\mathbf{p}}$, ввів також аналогічні функціональні простори зі змінним показником $L^{p(\cdot)}$, які у випадку сталої функції p збігаються з відомими просторами Лебега.

Робота виконана за часткової підтримки гранту Президента України за конкурсним проектом (Ф78/206-2018) Державного фонду фундаментальних досліджень та гранту H2020-MSCA-RISE-2014, номер проекту 645672 (AMMODIT: Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools).

ISSN 1810 – 3200.

З того часу теорія таких просторів активно розробляється багатьма математиками у різних напрямах. Її результати знаходять своє застосування в теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів, варіаційному численні [4–8]. Значний внесок в дослідження функціональних просторів $L^{p(\cdot)}$ зі змінним показником було зроблено Л. Дінінгом, який зокрема, довів [9] обмеженість максимального оператора в цих просторах за природних і досить оптимальних умов (див. також [10, 11]). Простори $l_{\mathbf{p}}$ активно вивчалися А. Неквіндою [12–14]. Так в роботі [12] ним були знайдені необхідні та достатні умови еквівалентності норм у просторах $l_{\mathbf{p}}$ і $l_{\mathbf{q}}$ та умови обмеженості операторів зсуву, в [13] досліджувались властивості оператора усереднення та максимального оператора, а в [14] – знайдено умови вкладення для просторів $l_{\mathbf{p}}$. Властивості звичайних просторів Орлича l_M вивчалися, зокрема, в роботах [15–18] та ін., а модулярних просторів Орлича – зокрема, в роботах [7, 8, 19, 20] та ін. Окремо слід відзначити монографії [1, 21] та [22], в яких викладено основні результати теорії просторів типу Орлича та їх застосування, а також фундаментальну працю Ю. Мусєлака [23], присвячену модулярним просторам Орлича, в зв'язку з якою останні іноді також називають просторами Мусєлака–Орлича.

В даній роботі розглянуто апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича $l_{\mathbf{M}}$. Знайдено точні значення величин найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим деяких множин образів мультиплікаторів в цих просторах, а також описано простір $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ всіх мультиплікаторів з $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$. Одержані результати, зокрема, розповсюджують на простори $l_{\mathbf{M}}$ відповідні результати робіт [17, 24] та [25] для згаданих вище просторів l_M та $l_{\mathbf{p}}$.

2. Означення та деякі властивості просторів $l_{\mathbf{M}}$

Нехай $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \geq 0$, – довільна послідовність функцій Орлича, тобто, при кожному $k \in \mathbb{N}$ функція $M_k(t)$ є неспадною опуклою вниз функцією, для якої $M_k(0) = 0$ і $M_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Модулярним простором $l_{\mathbf{M}}$, що визначається даною послідовністю функцій $\mathbf{M}$, називають лінійний простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких є скінченною величина

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|/\alpha) \leq 1\right\}.$$

Зазначимо, що коли всі функції M_k однакові: $M_k(t) \equiv M(t)$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_{\mathbf{M}}$ збігаються з просторами Орлича l_M послідовностей $x =$

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких є скінченною величина

$$\|x\|_{l_M} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) \le 1\right\}.$$

Якщо $M_k(t) = t^{p_k}$, $p_k \ge 1$, то $l_{\mathbf{M}}$ збігаються з просторами $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування, норма у яких визначається рівністю

$$\|x\|_{l_{\mathbf{p}}} = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}(|x_k|/\alpha)^{p_k} \le 1\right\},$$

якщо ж всі $M_k(t) = t^p$, $p \ge 1$, то простори $l_{\mathbf{M}}$ є звичайними просторами l_p з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Система $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, де $e_i = \{e_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$, $e_{ik} = 0$ при $k \ne i$ і $e_{ii} = 1$, є базисом простору $l_{\mathbf{M}}$.

Важливим підпростором простору $l_{\mathbf{M}}$ є простір $h_{\mathbf{M}}$ послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$, для яких при будь-якому $\alpha > 0$ виконується співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|/\alpha) < \infty.$$

Кажуть, що послідовність функцій Орлича $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє в нулі рівномірну Δ_2-умову, якщо існують додатна стала $C > 0$ і натуральне число $k^* \in \mathbb{N}$ такі, що при всіх $k > k^*$ і $t \in (0, \frac{1}{2})$ справджується нерівність $M_k(2t) \le CM_k(t)$.

Як показано у [1, розділ 4], якщо послідовність $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє в нулі рівномірну Δ_2-умову, то має місце рівність $l_{\mathbf{M}} = h_{\mathbf{M}}$.

3. Найкращі наближення та базисні поперечники в просторах $l_{\mathbf{M}}$

Нехай $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ та $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — дві довільні послідовності функцій Орлича, $l_{\mathbf{M}}$ та $l_{\mathbf{N}}$ — простори Орлича, які відповідають цим послідовностям, і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел. Якщо для кожної послідовності $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$ маємо $\lambda x = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{N}}$, то кажуть, що послідовність λ визначає мультиплікатор, який діє з простору $l_{\mathbf{M}}$ у простір $l_{\mathbf{N}}$. Простір всіх послідовностей, які визначають мультиплікатори з $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$ позначають через $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$.

Нехай, далі, $B_{l_{\mathbf{M}}}$ — одинична куля простору $l_{\mathbf{M}}$, а $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ — образ цієї кулі під дією мультиплікатора λ. Для будь-якого фіксованого набору γ_n із $n \in \mathbb{N}$ різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) := E_{\gamma_n}(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}})$$
$$= \sup_{x \in B_{l_{\mathbf{M}}}} E_{\gamma_n}(\lambda x, l_{\mathbf{N}}) = \sup_{x \in B_{l_{\mathbf{M}}}} \inf_{a_i} \|\lambda x - P_{\gamma_n}\|_{l_{\mathbf{N}}}$$

найкращого наближення в просторі $l_{\mathbf{N}}$ множини $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів $P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i$, що відповідають набору γ_n, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли

$$0 < N_k(t) \le M_k(t), \quad t \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

а послідовність λ задовольняє умову

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0, \tag{3.2}$$

для довільного $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$ маємо $\lambda x \in l_{\mathbf{N}}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, поклавши $\lambda^* := \max\limits_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$, в такому випадку з урахуванням неспадання функцій $M_k(t)$ та $N_k(t)$ для довільного $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$ будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda^*}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|)$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|) \le \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \le 1.$$

Звідси випливає, що $\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \lambda^* < \infty$ і $\lambda x \in l_{\mathbf{N}}$.

Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності функції Орлича, що задовольняють співвідношення* (3.1) *і рівності*

$$\inf\{\alpha > 0 : M_k(1/\alpha) \le 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N_k(1/\alpha) \le 1\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2). *Тоді для довільного набору* γ_n *із* $n \in \mathbb{N}$ *різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{3.4}$$

Доведення. Нехай $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{N}}$. Оскільки для будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k\in\gamma_n} N_k(|x_k - a_i|/\alpha) + \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha) \geq \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha),$$

то

$$E_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{E}_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{N}}) := \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_{\mathbf{N}}}$$
$$= \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|/\alpha) \leq 1\Big\},$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k\in\gamma_n} x_k e_k$.

Покладемо $\lambda_{k^*} = \lambda_{k^*}(\gamma_n) = \max\limits_{k\notin\gamma_n} \lambda_k$. Тоді для будь-якої послідовності $x \in B_{l_{\mathbf{M}}}$

$$\sum_{k\notin\gamma_n} N_k\left(\frac{\lambda_k|x_k|}{\lambda_{k^*}}\right) \leq \sum_{k\notin\gamma_n} N_k(|x_k|)$$
$$\leq \sum_{k\notin\gamma_n} M_k(|x_k|) \leq \sum_{k\notin\gamma_n} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) \leq \lambda_{k^*} = \max_{k\notin\gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку, покладемо $x^* := e_{k^*}/\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}}$. Внаслідок (3.3)

$$\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\{\alpha > 0 : M_{k^*}(1/\alpha) \leq 1\}$$
$$= \inf\{\alpha > 0 : N_{k^*}(1/\alpha) \leq 1\} = \|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{N}}},$$

тому $\|x^*\|_{l_{\mathbf{M}}} = \|x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} = 1$ і $x^* \in B_{l_{\mathbf{M}}}$. Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(\lambda x^*, l_{\mathbf{N}}) = \inf\left\{\alpha > 0 : N_{k^*}\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{M}}}}\right) \leq 1\right\}$$
$$= \inf\left\{\alpha > 0 : N_{k^*}\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha\|e_{k^*}\|_{l_{\mathbf{N}}}}\right) \leq 1\right\} = \lambda_{k^*}.$$

Таким чином, дійсно має місце рівність (3.4). □

Зазначимо, що умова (3.3) еквівалентна тому, що норми векторів базисної системи $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ в просторах $l_{\mathbf{M}}$ та $l_{\mathbf{N}}$ однакові: $\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}} = \|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}$ або ж тому, що при кожному натуральному k функції M_k

та N_k досягають значення 1 в одних і тих самих точках: $M_k(t_k) = N_k(t_k) = 1$, де t_k — деякі додатні числа.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (3.4) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (3.4) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k, \ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – неспадна перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

Тому з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільні послідовності функцій Орлича, які задовольняють співвідношення* (3.1) *та* (3.3), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{D}_n(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— незростаюча перестановка чисел* λ_k.

Величину $\mathcal{D}_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{N}}) = \mathcal{D}_n(\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}}), l_{\mathbf{N}})$ називають базисним поперечником множини $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ в просторі $l_{\mathbf{N}}$.

Зазначимо, що для згаданих вище просторів Орлича l_M та просторів $l_{\mathbf{p}}$ зі змінним показником підсумовування твердження, аналогічні твердженням теореми 1 та наслідку 1, були отримані у роботах [24] та [25] відповідно. Для просторів l_p твердження теореми 1 та наслідку 1 випливають відповідно з теорем 4.1 та 4.3 роботи [26].

4. Колмогорівські поперечники

Конструкція апроксимативних агрегатів, які будуть нами далі використовуватися, визначаються характеристичними послідовностями $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, що визначаються наступним чином [26].

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (3.2). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність всіх значень величин λ_k, впорядковану за незростанням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ позначимо систему множин

$$g_n := g_n^{\lambda} = \{k \in \mathbb{N}: \ \lambda_k \geq \varepsilon_n\}, \tag{4.1}$$

а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Враховуючи умову (3.2), послідовності $\varepsilon(\lambda)$ та $g(\lambda)$ можна означити наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k, \quad g_1 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_1\}, \\ \varepsilon_n &= \sup_{k \bar{\in} g_{n-1}} \lambda_k, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_n\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що за такого означення кожне число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам g_n^λ з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

Надалі зручно через $g_0 = g_0^\lambda$ позначати порожню множину і вважати, що $\delta_0 = 0$.

Зазначимо також, що якщо $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ – незростаюча перестановка чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то справджується рівність

$$\bar{\lambda}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Тому з теореми 1 легко отримати наступний наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^\infty$ *– довільні послідовності функцій Орлича, які задовольняють співвідношення* (3.1) *і* (3.3)*,* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2)*. Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda : l_\mathbf{M} \to l_\mathbf{N}) &= \mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda : l_\mathbf{M} \to l_\mathbf{N}) := \\ &= \sup_{x\in B_{l_\mathbf{M}}} \mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(\lambda x, l_\mathbf{N}) = \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{4.2}$$

де ε_n *–* n*-й член характеристичної послідовності* $\varepsilon(\lambda)$*.*

Зауваження 1. Зазначимо, що коли послідовність $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ є строго спадною, при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ маємо $\varepsilon_n(\lambda) = \lambda_n$ і $g_n^\lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_n(\lambda) = n$, і тому для довільної послідовності $x \in l_\mathbf{M}$ величини $E_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_\mathbf{M})$ та $\mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_\mathbf{M})$ мають відповідно вигляд

$$E_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_\mathbf{M}) = E_{n-1}(x, l_\mathbf{M}) = \inf_{a_i} \Big\| x - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \Big\|_{l_\mathbf{M}}$$

та

$$\mathcal{E}_{g_{n-1}^\lambda}(x, l_\mathbf{M}) = \mathcal{E}_{n-1}(x, l_\mathbf{M}) = \Big\| x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \Big\|_{l_\mathbf{M}}.$$

Нехай, далі, X та Y – лінійні нормовані простори, B_X – замкнена одинична куля простору X і $\lambda : X \to Y$ – обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(\lambda : X \to Y) := d_n(\lambda(B_X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{u \in F_n} \|\lambda x - u\|_Y,$$

де $\mathcal{F}_n$ – множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають поперечником за Колмогоровим множини $\lambda(B_X)$ в просторі Y.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільна послідовність функцій Орлича,* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– будь-яка послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (3.2). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = \ldots$$
$$= d_{\delta_n - 1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = E_n(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) = \varepsilon_n, \qquad (4.3)$$

в яких δ_s *і* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *– елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доведення. Нехай спочатку $n > 1$. Підпростір Φ_{n-1}^{λ} поліномів

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^{\lambda}} a_k e_k \qquad (4.4)$$

має розмірність δ_{n-1}. З урахуванням (4.2) знаходимо

$$\varepsilon_n = E_{g_{n-1}^{\lambda}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq d_{\delta_{n-1}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}})$$
$$\geq d_{\delta_{n-2}}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq \ldots \geq d_{\delta_n - 1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}).$$

Тому для доведення рівності (4.3) залишається переконатися, що

$$d_{\delta_n - 1}(\lambda : l_{\mathbf{M}} \to l_{\mathbf{M}}) \geq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (4.5)$$

Для цього скористаємось відомою теоремою про поперечник кулі [27, §10.2], згідно з якою, якщо множина $\mathfrak{M}$ лінійного нормованого простору $\mathfrak{X}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ містить кулю $\gamma U_{\nu+1}$ радіуса γ деякого $(\nu+1)$-мірного підпростору $U_{\nu+1}$ з $\mathfrak{X}$, тобто, якщо

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y : \ y \in U_{\nu+1}, \ \|y\|_{\mathfrak{X}} \leq \gamma\},$$

то

$$d_{\nu}(\mathfrak{M})_{\mathfrak{X}} = \inf_{F_\nu \in G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} \|f - u\|_{\mathfrak{X}} \geq \gamma,$$

де G_ν – множина всіх ν-мірних підпросторів в $\mathfrak{X}$.

Нехай $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ – перетин кулі радіуса ε_n в $l_{\mathbf{M}}$ з простором Φ^λ_n (розмірності δ_n) поліномів вигляду (4.4):

$$\varepsilon_n U^\lambda_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^{(\lambda)}_n \ : \ \|\Phi_n\|_{l_{\mathbf{M}}} \le \varepsilon_n\}. \tag{4.6}$$

Тоді з урахуванням (4.1), (4.6) та монотонності функцій $M_k(t)$ для довільного полінома $\Phi_n = \sum_{k\in g^\lambda_n} a_k e_k \in \varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ маємо

$$\sum_{k\in g^\psi_n} M_k(|a_k|/\lambda_k) \le \sum_{k\in g^\psi_n} M_k(|a_k|/\varepsilon_n) \le 1.$$

Звідси випливає, що Φ_n є образом деякої послідовності з одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{M}}}$. Таким чином, куля $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ δ_n-мірного підпростору $\Phi_n(\lambda)$ з $l_{\mathbf{M}}$ міститься в образі $\lambda(B_{l_{\mathbf{M}}})$ одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{M}}}$ при дії мультиплікатора λ, що на підставі наведеної вище теореми і дає співвідношення (4.5). Таким чином, у випадку $n > 1$ теорему доведено. При $n = 1$ її доведення залишається без змін, якщо вважати, що підпростір $\Phi_0(\lambda)$ складається з нульової послідовності $\theta = (0, 0, \ldots)$ і його розмірність дорівнює нулю. □

Зазначимо, що для просторів l_M та $l_{\mathbf{p}}$ твердження наслідку 2 та теореми 2 отримані в роботах [24] та [25] відповідно. Для просторів l_p дані твердження випливають відповідно з теорем 1 та 2 роботи [28] (див. також [29, гл.11] теореми 3.1 та 3.2). У випадку скінченновимірних просторів l^d_p твердження, аналогічне до теореми 2, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії [30].

5. Мультиплікатори в модулярних просторах Орлича

Розглянемо послідовність функцій

$$Q_k(y) := \sup_{t\in[0,1]} \Big(N_k(yt) - M_k(t)\Big), \quad y \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

кожна з яких, відповідно до означення, є функцією Орлича і задовольняє нерівність

$$N_k(yt) \le M_k(t) + Q_k(y), \quad y \ge 0,\ t \in [0, 1], \tag{5.2}$$

що є аналогом класичної нерівності Юнга.

Лема 1. *Якщо $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$, де послідовність $\mathbf{Q} = \{Q_k(t)\}^\infty_{k=1}$ визначається співвідношенням (5.1), то $\lambda = \{\lambda_k(t)\}^\infty_{k=1}$ визначає мультиплікатор з простору $l_{\mathbf{M}}$ в $l_{\mathbf{N}}$. Крім того для всіх $x \in l_{\mathbf{M}}$ виконується нерівність*

$$\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \cdot \|x\|_{l_{\mathbf{M}}}. \tag{5.3}$$

Перед доведення даної леми встановимо таке допоміжне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\mathbf{M}=\{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність функцій Орлича, яка визначає простір* $l_{\mathbf{M}}$. *Якщо для деякої послідовності* $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *маємо* $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}>1$, *то*

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|), \tag{5.4}$$

якщо ж $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}<1$, *то*

$$\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \ge \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|). \tag{5.5}$$

Доведення. Дійсно, переконаємось, наприклад, в справедливості (5.4) за умови $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}>1$. Нерівність (5.5) за умови $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}<1$ доводиться аналогічно.

Виберемо число $\varepsilon>0$ так, щоб $\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon>1$. Тоді на підставі нерівності

$$M(\alpha t)\le \alpha M(t), \quad 0\le\alpha\le 1, \tag{5.6}$$

яка виконується для довільної функції Орлича (див., наприклад, [21, гл. 1], [17, 25]), а також означення норми у просторі $l_{\mathbf{M}}$, знаходимо

$$1<\sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon}\Big) \le \frac{1}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}-\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|).$$

Звідси, переходячи до границі при $\varepsilon\to 0$, отримуємо (5.4). □

Доведення леми 1. Нехай $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_{\mathbf{Q}}$ і $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in l_{\mathbf{M}}$ – довільні фіксовані послідовності і $\varepsilon>0$ — будь-яке число. Тоді внаслідок (5.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon}\cdot\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon}\Big)$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big(\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty} Q_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon}\Big)\le 2. \tag{5.7}$$

Розглянемо послідовності $\tilde\lambda=\{\tilde\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\tilde x=\{\tilde x_k\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$\tilde\lambda_k:=\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}+\varepsilon}, \quad \tilde x_k:=\frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}}+\varepsilon},$$

У випадку, коли $\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 1$, нерівність (5.3) очевидна. Тому далі вважаємо, що $\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} > 1$. Враховуючи нерівності (5.4) і (5.7), знаходимо

$$\|\tilde{\lambda}\tilde{x}\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \sum_{k=1}^{\infty} N_k\Big(\frac{|\lambda_k|}{\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} + \varepsilon} \cdot \frac{|x_k|}{\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} + \varepsilon}\Big) \le 2,$$

звідки одержуємо оцінку

$$\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 2\Big(\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} + \varepsilon\Big)\Big(\|x\|_{l_{\mathbf{M}}} + \varepsilon\Big),$$

яка з урахуванням довільності числа $\varepsilon > 0$ і доводить нерівність (5.3). □

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{M} = \{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *та* $\mathbf{N} = \{N_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна пара послідовностей функцій Орлича, які задовольняють умову*

$$\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}} \le K_1\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}} \le K_2, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.8}$$

де K_1 *та* K_2 *— деякі додатні сталі,* $K_2 \ge K_1 \ge 1$. *Тоді простори* $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ *і* $l_{\mathbf{Q}}$, *де* $\mathbf{Q} = \{Q_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, *визначається співвідношеннями* (5.1), *збігаються як множини, та крім того, є ізоморфними як банахові простори.*

Доведення. Розглянемо у просторі мультиплікаторів $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ норму

$$\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = \sup\Big\{\|\lambda x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \quad \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\}. \tag{5.9}$$

З леми 1 випливає, що $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}} \supset l_{\mathbf{Q}}$. Дійсно, якщо $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$, то з нерівності (5.3) отримуємо

$$\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \cdot \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 2\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}}.$$

Отже, для доведення теореми потрібно переконатися, що справджується обернене вкладення $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}} \subset l_{\mathbf{Q}}$ і виконується оцінка для норм

$$\|\lambda\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le 2K_2\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}. \tag{5.10}$$

Нехай k – будь-яке натуральне число. Візьмемо довільну послідовність невід'ємних чисел $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty} \in S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$, для якої $\|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/(2K_1)$ і позначимо $\lambda_k^{**} = \lambda_k^*/\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тоді

$$\lambda_k^* = \|\lambda^{**}e_k\|_{l_{\mathbf{N}}} = \frac{\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}}{\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}} \cdot \Big\|\lambda^* e_k/\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}\Big\|_{l_{\mathbf{N}}}$$

$$\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \ \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} = K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \tag{5.11}$$

Оскільки функції M_k та N_k є неперервними, то існує таке $x_k^* \in [0,1]$, що

$$Q_k(\lambda_k^{**}) := N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) - M_k(x_k^*). \tag{5.12}$$

Нехай $\mu := \lambda_k^{**} x_k^* e_k$. Оскільки

$$\|\mu\|_{l_{\mathbf{N}}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \ N_k\Big(\frac{\lambda_k^{**} x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} = \lambda_k^* x_k^* \le \frac{1}{2},$$

то на підставі твердження 1 $N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\mu\|_{l_{\mathbf{N}}} \le 1/2$. Таким чином, при довільному $k \in \mathbb{N}$

$$M_k(x_k^*) = N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) - Q_k(\lambda_k^{**}) \le \frac{1}{2}. \tag{5.13}$$

Далі, скориставшись методом математичної індукції, покажемо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k^*) \le \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Дійсно, при $n = 1$ співвідношення (5.14) випливає з (5.13). Припустимо, що (5.14) справджується при деякому $m = n$ і переконаємося в його справедливості при $m = n + 1$. Для цього позначимо $\tau := \sum_{k=1}^{n+1} x_k^* e_k$. Внаслідок співвідношення (5.13) та припущення індукції

$$\sum_{k=1}^{n+1} M_k(x_k^*) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k^*) + M_{n+1}(x_{n+1}^*) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

тому

$$\|\tau\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{n+1} M_k\Big(\frac{x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} \le 1.$$

і тоді з урахуванням (5.8) та (5.9) маємо

$$\|\lambda^{**}\tau\|_{l_{\mathbf{N}}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{n+1} N_k\Big(\frac{\lambda_k^{**} x_k^*}{\alpha}\Big) \le 1\Big\}$$

$$= \inf\Big\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{n+1} N_k\Big(\frac{\lambda_k^* x_k^*}{\alpha\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}} \cdot \frac{\|e_k\|_{l_{\mathbf{M}}}}{\|e_k\|_{l_{\mathbf{N}}}}\Big) \le 1\Big\}$$

$$\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \ \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} = K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \tag{5.15}$$

Об'єднуючи (5.12), (5.15) та використовуючи твердження 1, отримуємо необхідну нерівність:

$$\sum_{k=1}^{n+1} M_k(x_k^*) \le \sum_{k=1}^{n+1} N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\lambda^{**}\tau\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \frac{1}{2}.$$

Таким чином, нерівність (5.14) виконується для довільного натурального числа n, і тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(x_k^*) \le \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що $x^* = \{x_k^*\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{M}}$,

$$\|x^*\|_{l_{\mathbf{M}}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M_k\Big(\frac{|x_k^*|}{\alpha}\Big) \le 1\Big\} \le 1,$$

і при цьому

$$\begin{aligned}\|\lambda^{**}x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} &\le K_1 \cdot \sup\Big\{\|\lambda^* x\|_{l_{\mathbf{N}}} : \|x\|_{l_{\mathbf{M}}} \le 1\Big\} \\ &= K_1 \cdot \|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/2. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Використовуючи твердження 1, на підставі співвідношень (5.12) та (5.16) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(\lambda_k^{**}) \le \sum_{k=1}^{\infty} N_k(\lambda_k^{**} x_k^*) \le \|\lambda^{**}x^*\|_{l_{\mathbf{N}}} \le \frac{1}{2}.$$

Таким чином, послідовність λ^{**} належить $l_{\mathbf{Q}}$ і виконується нерівність $\|\lambda^{**}\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le 1$. Тоді з огляду на (5.8) послідовність λ^* теж належить $l_{\mathbf{Q}}$ і при цьому $\|\lambda^*\|_{l_{\mathbf{Q}}} \le K_2/K_1$.

Нехай тепер λ – довільна послідовність з множини $S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$. Покладемо $\lambda^* := \lambda/\Big(2K_1\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}\Big)$. Оскільки $\|\lambda^*\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}} = 1/(2K_1)$, то як показано вище, $\lambda^* \in l_{\mathbf{Q}}$ і справджується співвідношення

$$K_2/K_1 \ge \|\lambda^*\|_{l_{\mathbf{Q}}} = \Big\|\lambda/\Big(2K_1\|\lambda\|_{S_{\mathbf{M},\mathbf{N}}}\Big)\Big\|_{l_{\mathbf{Q}}},$$

з якого випливає, що $\lambda \in l_{\mathbf{Q}}$ і має місце нерівність (5.10). □

Зазначимо, що для звичайних просторів Орлича l_M твердження, аналогічні до тверджень леми 1 та теореми 3, отримано в роботі [17].

Нехай $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ і $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ – довільні послідовності додатних чисел, таких що

$$1 \le r_k < p_k \le K, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.17}$$

де K – додатна стала. Розглянемо послідовності функцій $\mathbf{P} = \{t^{p_k}/p_k\}_{k=1}^\infty$ і $\mathbf{R} = \{t^{r_k}/r_k\}_{k=1}^\infty$. Зрозуміло, що кожна функція з цих послідовностей є функцією Орлича і справджується співвідношення

$$1/K \le \|e_k\|_{l_\mathbf{P}} = \inf\Big\{\alpha > 0: \ \frac{1}{\alpha p_k} \le 1\Big\} = \frac{1}{p_k}$$
$$< \frac{1}{r_k} = \inf\Big\{\alpha > 0: \ \frac{1}{\alpha r_k} \le 1\Big\} = \|e_k\|_{l_\mathbf{R}} \le 1,$$

звідки випливає, що послідовності $\mathbf{P}$ і $\mathbf{R}$ задовольняють умову (5.8).

Оскільки при кожному фіксованому $y \in [0,1]$ різниця $\delta(t) := \frac{(yt)^{r_k}}{r_k} - \frac{t^{p_k}}{p_k}$ досягає свого максимального значення при $t = y^{r_k/(p_k-r_k)} \in [0,1]$, то

$$Q_k(y) = \sup_{t\in[0,1]} \Big|\frac{(yt)^{r_k}}{r_k} - \frac{t^{p_k}}{p_k}\Big| = \frac{y^{q_k}}{q_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де

$$q_k = \frac{p_k r_k}{p_k - r_k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

Тому з теореми 3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай* $\mathbf{P} = \{t^{p_k}/p_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbf{R} = \{t^{r_k}/r_k\}_{k=1}^\infty$, *де* $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ *і* $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ *— довільні послідовності, що задовольняють умову* (5.17). *Тоді простори* $S_{\mathbf{P},\mathbf{R}}$ *і* $l_\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \{t^{q_k}/q_k\}_{k=1}^\infty$, *де числа* q_k *визначаєтьcя співвідношенням* (5.18)*, співпадають як множини, та крім того, є ізоморфними як банахові простори.*

Література

[1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I: Sequence Spaces*, Berlin, 1977.

[2] W. Orlicz, *Über Räume* (L^M) // Bull. intern. de l'Acad. Pol., (1936), Serie A, Cracovie.

[3] W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentenfolgen* // Studia Math., (1931), No. 3, 200–211.

[4] L. Diening, M. Ružička, *Calderon-Zygmund operators on generelized Lebesgue spaces* $L^{p(x)}$ *and problems related to fluid dynamics* // J. Reine Angew. Math., **563** (2003), 197–220.

[5] M. Ružička, *Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory*, Lect. Notes Math. Springer, **1748**, 2000.

[6] S. G. Samko, *On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: Maximal and Singular operators* // Integral Transforms Spec. Funct., **16** (2005), No. 5–6, 461–482.

[7] P. Harjulehto, P. Hästö, R. Klén, *Generalized Orlicz spaces and related PDE* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **143** (2016), 155–173.

[8] P. Hästö, *The maximal operator on generalized Orlicz spaces* // J. Funct. Anal., **269** (2015), No. 12, 4038–4048.

[9] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$ // Math. Inequal. Appl., **7** (2004), No. 2, 245–253.

[10] L. Pick, M. Ružička, *An example of a space* $L^{p(x)}$ *on which the Hardy–Littlewood maximal operator is not bounded* // Expo. Math., **19** (2001), 369–371.

[11] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, C. Neugebauer, *The maximal function on variable* L^p *spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **28** (2003), 223–238; Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **29** (2004), 247–249.

[12] A. Nekvinda *Equivalence of* l^{p_n} *norms and shift operators* // Math. Inequal. Appl., **5** (2002), № 4, 711–723.

[13] A. Nekvinda, *A note on maximal operator on* l^{p_n} *and* $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ // J. Funct. Spaces Appl., **5** (2007), № 1, 49–88.

[14] A. Nekvinda, *Imbeddings between discrete weighted Lebesgue spaces* // Math. Inequal. Appl., **10** (2007), № 1, 165–172.

[15] Ю. И. Грибанов, *Нелинейные операторы в пространствах Орлича* // Уч. зап. Казанского ун-та, **115** (1955), кн. 7.

[16] Ю. И. Грибанов, *К теории пространств* l_M // Уч. зап. Казанского ун-та, **117** (1957), кн. 2.

[17] P. B. Djakov, M. S. Ramanujan, *Multipliers between Orlicz Sequence Spaces* // Truk. J. Math., (2000), No. 24, 313–319.

[18] M. Aiyub, *On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz function* // Proyecciones Journal of Mathematics, **32** (2013), No. 3, 267–280.

[19] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, *Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces* // Bull. Sci. Math., **137** (2013), 76–96.

[20] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, *Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces* // Czechoslovak Math. J.,**63(138)** (2013), No. 4, 933–948.

[21] M. A. Красносельский, Я. Б. Рутицкий *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Москва, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958.

[22] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Math., vol. 2017, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

[23] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Berlin: Springer, 1983.

[24] А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко, *Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах* $l_{\mathbf{p}}$ // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Інституту математики НАН України, **11** (2014), No. 4, 399–412.

[25] A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko, *Approximative Properties of Diagonal Operators in Orlicz Spaces* // Numerical Functional Analysis and Optimization, **36** (2015), No. 10, 1339–1352.

[26] А. И. Степанец, *Задачи теории приближений в линейных пространствах* // Укр. мат. журн., **58** (2006) No. 1, 47–92.

[27] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, М., Изд.-во Моск. ун-та, 1976.

[28] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p_φ // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 3, 392–416.

[29] А. И. Степанец, *Методы теории приближений:* В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, ч. 2, (2002) **40**, 468 с.

[30] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Springer–Verlag, 1985.

Відомості про авторів

Станіслав Олегович Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
E-Mail: `s.chaichenko@gmail.com`

Андрій Любомирович Шидліч

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-Mail: `shidlich@gmail.com`