НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШИДЛІЧ Андрій Любомирович

УДК 517.5

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ В ПРОСТОРАХ S^p_φ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2004

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
СТЕПАНЕЦЬ Олександр Іванович,
Інститут математики НАН України,
заступник директора з наукової роботи

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
Академія митної служби України,
проректор з наукової роботи;

кандидат фізико-математичних наук, професор
РУКАСОВ Володимир Іванович,
Слов'янський державний педагогічний університет,
ректор.

Провідна установа: Інститут прикладної математики і механіки НАН України (м. Донецьк).

Захист вібудеться " 1" червня 2004 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601 Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту математики НАН України

Автореферат розісланий "28" квітня 2004 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук **Романюк А.С.**

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. В роботі розробляються основи теорії підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ, аналогічної до теорії, добре відомої для рядів Фур'є за тригонометричною системою, і проводяться дослідження наближень елементів просторів S^p_φ агрегатами, які породжуються лінійними методами підсумовування рядів.

На даний час теорія лінійних методів підсумовування рядів сформувалась як самостійний підрозділ теорії функцій. В ній є власні поняття і власні постановки задач. До таких понять в першу чергу належать *поняття регулярності даного методу в даному просторі, поняття насичення методу, його порядку та класу насичення* тощо.

Питання регулярності лінійних методів підсумовування рядів в просторах 2π-періодичних функцій вивчалися, зокрема, у роботах С.М. Лозинського, С.М.Нікольського, Б. Надя та інших. Питання насичення методів $U_n(\Lambda)$ досліджувалися у роботах Д. Алексича, М.Заманського, Ж. Фавара, А. Зігмунда, П. Бутцера і Р.Несселя, В.Т. Гаврилюк і О.І.Степанця та інших.

Першою із задач, які розглядаються в даній роботі, і є вивчення згаданих понять у просторах S^p_φ.

Простори S^p_φ було введено у 2000 році О.І. Степанцем. Ці простори при $p = 2$ за умови їх повноти є гільбертовими. При інших $p \in (0, \infty)$ простори S^p_φ наслідують низку важливих властивостей гільбертових просторів, зокрема, рівність Парсеваля та мінімальну властивість частинних сум Фур'є.

Для таких просторів вводиться поняття, що відповідає поняттю класу функцій, іставляться задачі теорії наближень ті ж самі, які розглядаються в теорії наближення функцій. Зокрема, задача про найкраще наближення даного елемента поліномами, задача про знаходження верхніх граней найкращих наближень поліномами заданої підмножини — "класу" $\mathfrak{N}$ із S^p_φ, задача про знаходження поперечників множин $\mathfrak{N}$ в S^p_φ тощо. Друга задача, розглянута в дисертації, відноситься до даного кола питань і полягає у знаходженні точних значень найкращих n-членних наближень лінійними методами q-еліпсоїдів в просторах S^p_φ. У періодичному випадку такі величини відповідають найкращим n-членним тригонометричним наближенням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою: "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", номер державної реєстрації 0198 U 001990.

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є введення понять насичення та регулярності для загальних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ, встановлення достатніх умов насиченості та необхідних і достатніх умов регулярності таких методів в просторах S^p_φ, а також одержання точних значень найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU^q_φ в просторах S^p_φ.

Задачі дослідження:

1. Визначити поняття насичення лінійного методу в просторах S^p_φ, яке б не залежало від вибору параметрів X, φ та p, що визначають множину $S^p_\varphi(X)$.

2. Встановити достатні умови насиченості лінійного методу в S^p_φ.

3. Дослідити насиченість в просторах S^p_φ лінійних методів Фур'є, Зігмунда, Рогозинського, Фавара, Валле-Пуссена.

4. Знайти у випадках, коли $0 < q \le p$ і $0 < p < q$, точні значення найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU^q_φ в просторах S^p_φ, тобто точні значення величин $e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p$, що визначаються співвідношенням

$$e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p \overset{df}{=} \sup_{f \in \psi U^q_\varphi} e_n(f, \Lambda)_p = \sup_{f \in \psi U^q_\varphi} \inf_{\gamma} \|f - U_n(f; \Lambda; \gamma)\|_{S^p_\varphi} =$$

$$= \sup_{f \in \psi U^q_\varphi} \inf_{\gamma} \|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}_\varphi(i_k)\varphi_{i_k}\|_{S^p_\varphi}, \qquad (1)$$

де $\gamma = \{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна перестановка натурального ряду $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

5. Встановити чи існує трикутна матриця Λ, відмінна від матриці

$$\Lambda_1 = ||\lambda_k^{(n)}|| : \quad \lambda_k^{(n)} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n,$$

така, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ і $0 < q \leq p$ виконується рівність

$$e_n(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p = e_n(\psi U_\varphi^q)_p, \qquad (2)$$

де $e_n(\psi U_\varphi^q)_p$ — звичайне найкраще n-членне наближення класу ψU_φ^q в метриці простору S_φ^p:

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p \stackrel{df}{=} \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} e_n(f)_p = \sup_{f \in \psi U_\varphi^q} \inf_{a_k, \gamma_n} ||f - \sum_{k \in \gamma_n} a_k \varphi_k||_{S_\varphi^p},$$

γ_n — будь-який набір із n натуральних чисел, a_k — довільні комплексні числа.

6. Розглянути аналоги найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU_φ^q у випадку, коли матриці Λ прямокутні і знайти точні значення цих величин.

Об'єктом дослідження є лінійні методи підсумовування рядів, що задаються довільними числовими матрицями.

Предметом дослідження є апроксимаційні властивості лінійних методів підсумовування рядів у просторах S_φ^p.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Визначено поняття насичення лінійного методу у просторах $S_\varphi^p(X)$ так, що насиченість лінійного методу, а також порядок насичення, не залежать від усіх параметрів X, φ та p, що визначають ці простори.

2. Знайдено достатні умови насиченості лінійного методу в S_φ^p.

3. Знайдено точні значення величин $e_n(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p$, що визначаються рівністю (1), у випадках, коли $0 < q \leq p$ і $0 < p < q$, а також сформульовано відповідні наслідки для просторів функцій багатьох змінних.

4. Показано, що не існує трикутної матриці Λ, відмінної від Λ_1, яка б при кожному натуральному n задовольняла рівність (2).

5. Знайдено точні значення величин, що є аналогами найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU_φ^q у випадку, коли матриці Λ прямокутні.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи і методика їх отримання, можуть бути використані при вивченні різних питань теорії лінійних методів, а також при розв'язанні деяких екстремальних задач, що мають прикладний характер.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівникові — О.І. Степанцю. Всі результати, крім результатів підрозділів 3.2 та 3.3, отримано здобувачем самостійно. Результати підрозділів 3.2 та 3.3 отримано спільно з науковим керівником. Внесок обох авторів у ці результати є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України, керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, член-кореспондент НАН України О.І. Степанець);

— Міжнародній науковій конференції "Шості Боголюбовські чи-тання", Чернівці, 26-30 серпня 2003 року.

Публікації. Основні результати, які висвітлені в дисертації, опу-бліковані в роботах [1–4].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з пе-реліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 60 найменувань. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок машинописного тексту.

Основний зміст дисертації

У першому розділі дисертаційної роботи дано огляд літератури за її темою. Зокрема, у підрозділі 1.1 показано як означаються простори S^p_φ, розглянуто деякі відомі властивості цих просторів і проведено огляд робіт, присвячених вивченню апроксимаційних характеристик просторів S^p_φ.

Нехай X — деякий лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фіксована зліченна лінійно незалежна система в ньому, і нехай будь-якій парі $x, y \in X$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, поставлено у відповідність число (x, y) так, що виконуються умови

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Кожному елементу $f \in X$ ставиться у відповідність система чисел $\widehat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають множини

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(X) = \{f \in X : \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p < \infty\}.$$

При цьому елементи $x, y \in S^p_\varphi$ вважаються тотожними, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Таким чином, простори S^p_φ породжуються простором X, системою φ, операцією $(\cdot, \cdot)$ і числом $p \in (0, \infty)$.

Для довільних елементів $x, y \in S^p_\varphi$ покладемо

$$\rho(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_\varphi(k) - \widehat{y}_\varphi(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нульовим елементом простору S^p_φ називається елемент θ, для якого $\widehat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Величина $\rho(\theta, f)$, $f \in S^p_\varphi$, називається φ-нормою елемента f і позначається $||f||_p$. Тобто,

$$||f||_p = ||f||_{\varphi,p} = \rho(\theta, f)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}_\varphi(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3)$$

Відомо, що множина S^p_φ утворює лінійний простір. При $p \geq 1$ функціонал $||\cdot||$, означений рівністю (3), задовольняє всі аксіоми норми, а при $p \in (0; 1)$ — квазінорми. Тому при $p \geq 1$ S^p_φ — лінійний нормований простір, а при $p \in (0; 1)$ — простір з квазінормою.

У другому підрозділі першого розділу розглядаються деякі задачі з теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є. У третьому підрозділі висвітлюється історія питання за ематикою найкращих n-членних наближень, і зокрема, ставиться задача про дослідження величин $e_n(f, \Lambda)_p$, які називаються найкращими n-членними наближеннями елемента $f \in S^p_\varphi$ даним Λ-методом.

Другий розділ присвячено вивченню питань насичення та регулярності лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ.

Нехай f — довільний елемент простору S^p_φ, $p \in (0, \infty)$, і

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k) \varphi_k \qquad (4)$$

— його формальний ряд Фур'є за системою φ.

Нехай також

$$\Lambda = ||\lambda_k^{(n)}||,\ n = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,\quad \lambda_k^{(n)} = 0.\ k > n,$$

— нескінченна трикутна матриця чисел. Кожному елементу $f \in S^p_\varphi$ на основі його розкладу (4) в ряд Фур'є за системою φ поставимо у відповідність поліном $U_n(f;\Lambda)$ вигляду

$$U_n(f;\Lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k. \qquad (5)$$

Таким чином, довільна трикутна числова матриця Λ визначає конкретну послідовність поліноміальних операторів $U_n(f;\Lambda)$ заданих на S^p_φ. У цьому випадку також говорять, що матриця Λ визначає конкретний лінійний метод (Λ -метод) підсумовування рядів Фур'є.

При вивченні лінійних методів в S^p_φ, природно, виникає питання: які умови повинні задовольняти числа $\lambda_k^{(n)}$, щоб послідовність поліномів $U_n(f;\Lambda)$ вигляду (5) збігалася за "нормою" до $f \in S^p_\varphi(X)$? Відповідь на це питання дає наступне твердження (теорема 2.1.1), яке формулюється у підрозділі 2.1 і фактично випливає з відомої теореми Банаха–Штейнгауза:

Для того, щоб послідовність поліномів $U_n(f;\Lambda)$ збігалася до $f \in S^p_\varphi(X)$ достатньо, а за умови повноти простору $S^p_\varphi(X)$ і необхідно, щоб при кожному фіксованому k, $k = 1,2,\ldots,$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \qquad (6)$$

і крім того, щоб послідовність чисел

$$L_n(\Lambda) = \sup_{||f||_p \le 1} ||U_n(f;\Lambda)||_p = \max_{k=1,2,\ldots,n} |\lambda_k^{(n)}|$$

була обмеженою:

$$L_n(\Lambda) = O(1),\ n \to \infty.$$

Слід зазначити, що в термінах даного твердження умова (6) є необхідною і у випадку, коли простір $S^p_\varphi(X)$ є неповним.

У другому підрозділі розділу 2 означається поняття насичення лінійного методу в S^p_φ. У цьому означенні важливим є поняття *інваріантного елемента методу,* яке визначається таким чином.

Для даної матриці Λ розглянемо множину B_Λ всіх натуральних чисел k, для яких існує функція $n_\Lambda = n_\Lambda(k)$ така, що $\lambda_k^{(n)} = 1$, для всіх $n > n_\Lambda(k)$, тобто

$$B_\Lambda = \{k \in \mathbb{N} : \quad \exists n_\Lambda = n_\Lambda(k) : \quad \lambda_k^{(n)} = 1,\ n > n_\Lambda(k)\}.$$

Елемент f простору S^p_φ називається інваріантним елементом методу $U_n(\Lambda)$, якщо його коефіцієнти Фур'є $\widehat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$ дорівнюють нулеві принаймні для всіх $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$.

Множину всіх інваріантних елементів методу $U_n(\Lambda)$ в просторі S^p_φ позначимо через $F_\Lambda(S^p_\varphi)$. Легко бачити, що будь-який лінійний метод $U_n(\Lambda)$ має в просторі S^p_φ хоча б один інваріантний елемент. Таким є, зокрема, нульовий елемент простору S^p_φ.

Означення 1. *Лінійний метод $U_n(\Lambda)$ називається насиченим в просторі $S^p_\varphi(X)$, $p \in (0,\infty)$, якщо існує додатна монотонно спадна до нуля при $n \to \infty$ функція $\nu_\Lambda(n)$, для якої виконуються такі умови:*

1) із співвідношення

$$||f - U_n(f;\Lambda)||_p = o(\nu_\Lambda(n)),\ n \to \infty,$$

випливає, що $f \in F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$;

2) існує принаймні один елемент $f \in S^p_\varphi(X) \setminus F_\Lambda(S^p_\varphi(X))$, для ікого при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$||f - U_n(f;\Lambda)||_p \le K\nu_\Lambda(n)), \qquad (7)$$

де K — деяка стала. При цьому функція $\nu_\Lambda(n)$ називається порядком насичення, а множина $\Phi(\Lambda)_p$ всіх елементів простору S^p_φ, для яких виконується (7), — класом насичення методу $U_n(\Lambda)$.

Означення 2. *Якщо для даного методу не існує додатної монотонно спадної до нуля при $n \to \infty$ функції $\nu_\Lambda(n)$, що задовольняє умови означення 1, то кажуть, що цей метод не є насиченим в просторі S^p_φ.*

Зазначимо, що введене поняття насичення є аналогом відповідного поняття для лінійних методів підсумовування рядів Фур'є за тригонометричною системою.

Впроваджуючи поняття насичення лінійного методу в просторах $S^p_\varphi(X)$ природньо вимагати, щоб це поняття не залежало від вибору параметрів X, φ та p, що визначають ці простори. Наступна теорема показує, що поняття насичення, яке вводиться за допомогою означень 1 та 2, задовольняє саме таку вимогу, і що насиченість, а також порядок насичення лінійного методу в S^p_φ повністю визначаються елементами матриці Λ.

Теорема 2.2.1. *Якщо лінійний метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим в просторі $S^p_\varphi(X)$ при даних фіксованихпараметрах X, p, φ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$, то даний метод є насиченим і в просторах $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ для будь-яких інших параметрів X', p', φ' з тим самим порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$.*

Наприкінці підрозділу 2.2 вказано достатні умови насиченості в S^p_φ. Для формулювання цього результату введемо ще деякі позначення. Нехай ψ=ψ(k), k=1,2,..., — послідовність комплексних відмінних від нуля чисел, $\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо через ψS^p_φ множину всіх елементів $f \in S^p_\varphi$, для яких виконується умова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\psi(k)|^p} |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty$.

Теорема 2.2.2. *Якщо для даної матриці Λ множина B_Λ не співпадає з усією множиною $\mathbb{N}$, І існує додатна монотонно спадна до нуля при $n \to \infty$ функція $\nu_\Lambda(n)$ така, що при всіх $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{\nu_\Lambda(n)} = \frac{c}{\psi_0(k)}, \quad \text{де} \quad \psi_0(k) > 0, \quad |c| > 0,$$

то

1) метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(X)$, незалежно від вибору параметрів X, p, φ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$;

2) виконується вкладення

$$\Phi(\Lambda)_p \subseteq \psi S^p_\varphi,$$

де послідовність $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що для $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ $\psi(k) = \psi_0(k)$, а для $k \in B_\Lambda$ $|\psi(k)| \geq K_0 > 0$, де K_0 — деяка додатна стала.

Якщо ж при цьому множина B_Λ — скінченна, і виконується умова

$$\frac{\psi_0(k)|1-\lambda_k^{(n)}|}{\nu_\Lambda(n)} \leq K_1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda,$$

то має місце рівність

$$\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi.$$

Зауважимо, що у випадку, коли множина B_Λ містить лише один елемент, дане твердження можна одержати з результатів монографії П. Бутцера та Р. Несселя.

В підрозділі 2.3 досліджується насиченість в S^p_φ лінійних методів Фур'є, Зігмунда, Рогозинського, Фавара та Валле-Пуссена. Зокрема, показано, що, як і в періодичному випадку, методи Зігмунда, Рогозинського, Фавара, а також метод Валле-Пуссена, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) \to c_n < c$, є насиченими в усіх просторах $S^p_\varphi(X)$ Для цих методів вказано порядки та класи насичення. Також показано, що метод Валле$S^p_\varphi(X)$ена в усіх інших випадках не є насиченим в $S^p_\varphi(X)$.

У третьому розділі вивчаються найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ. А саме, досліджується поведінка цих величин на класах ψU^p_φ — ψ-інтегралів всіх елементів, які належать одиничній кулі простору S^p_φ.

Перший підрозділ цього розділу є допоміжним. В ньому визначається об'єкт та апарат апроксимації.

Об'єктом апроксимації є класи ψ-інтегралів всіх елементів, які належать одиничній кулі U_φ^q простору S_φ^q, $q > 0$. Поняття ψ-інтеграла в просторах S_φ^p було введено О.І. Степанцем.

Нехай $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довільна система комплексних чисел і f — деякий елемент простору S_φ^p формальний ряд Фур'є якого має вигляд (4). Якщо в просторі X існує елемент F, для якого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \widehat{f}_\varphi(k) \varphi_k,$$

тобто, коли $\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}_\varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, то елемент F називають *ψ-інтегралом елемента f* і записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з X, то множину ψ -інтегралів всіх елементів з $\mathfrak{N}$ позначають через $\psi\mathfrak{N}$. Зокрема, ψS_φ^p — множина ψ-інтегралів всіх елементів, що належать до S_φ^p.

Нехай U_φ^p — одинична куля в просторі S_φ^p:

$$U_\varphi^p = \{f \in S_\varphi^p : \quad ||f||_p \leq 1\}.$$

Тоді ψU_φ^p — множина ψ-інтегралів всіх елементів з U_φ^p. Слід зазначити, що коли простір S_φ^p є повним, і при цьому виконується умова

$$\psi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

то

$$\psi U_\varphi^p = \{f \in S_\varphi^p : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi_k}|^p \leq 1\},$$

тобто, множина ψU_φ^p є p-еліпсоїдом в просторі S_φ^p, півосі якого дорівнюють $|\psi_k|$.

Наближаючими агрегатами для елементів з класів ψU_φ^p є поліноми $U_n(f; \Lambda; \gamma)$ вигляду

$$U_n(f; \Lambda; \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}_\varphi(i_k) \varphi_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}_\varphi(i_k) \varphi_{i_k},$$

$\Lambda = ||\lambda_k^{(n)}||$ — довільна нескінченна трикутна матриця чисел, а $\gamma = \{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ — будь-яка перестановка натурального ряду $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Задача полягає у знаходженні точних значень величин $e_n(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p$ — найкращих n-членних наближень даним Λ-методом класів ψU_φ^q в метриці простору S_φ^p, які визначаються співвідношенням (1).

Точні значення величин $e_n(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p$ коли 0<p,q<∞, дають теореми 3.2.1 та 3.4.1.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— довільна система комплексних чисел, для якої*

і виконується умова (8), p і q — будь-які числа такі, що $0 < q \leq p$, *і* $\Lambda = ||\lambda_k^{(n)}||$ *— трикутна матриця чисел, що задовольняють умову*

$$|1 - \lambda_k^{(n)}| \leq 1. \tag{10}$$

Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ *вірна рівність*

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p = \sup_{s \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \beta_k^p \left(\sum_{i=1}^{s} \bar{\psi}_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = \sum_{k=1}^{s^*} \beta_k^p \left(\sum_{i=1}^{s^*} \bar{\psi}_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}},$$

де $\beta = \{\beta_k\}$ *і* $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, = 0$ (9) *впорядкування величин* $|1 - \lambda_k^{(n)}|$ *і* $|\psi_k|$, *відповідно, за неспаданням і незростанням, а* s^* *— деяке натуральне число.*

Теорема 3.4.1. *Нехай p і q — довільні числа такі, що 0<p<q,* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *—довільна система комплексних чисел, для якої*

$$||\psi||_{l^{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty, \tag{11}$$

і виконується умова (8), і $\Lambda = ||\lambda_{l_i}^{(n)}||$ *— трикутна матриця чисел, що задовольняють умову (10). Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$e_n(\psi U_\varphi^q, \Lambda)_p = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(a_s b_s\right)^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}},$$

де $a_s = \left(\sum_{k=l_s+1}^{l_s+1} \bar{\psi}_k^{-q} \right)^{-1/q}$, $b_s = \left(\sum_{k=l_s+1}^{l_s+1} \beta_k^p \right)^{1/p}$; $\beta = \{\beta_k\}$ *і* $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$,

—послідовності чисел, утворені шляхом впорядкування величин $|1 - \lambda_k^{(n)}|$ *і* $|\psi_k|$, *відповідно, за неспаданням і незростанням; а систему* $\widetilde{L}_n = \widetilde{L}_n(\psi, \Lambda) = \{l_0, l_1, \ldots\}$ *підібрано так, що* $l_0 = 0$, *для будь-якого* $s \in \mathbb{N}$ l_s *— найбільше натуральне число, яке задовольняє рівність*

$$\max_{l > l_{s-1}} \frac{\sum\limits_{k=l_{s-1}+1}^{l} \beta_k^p}{\sum\limits_{k=l_{s-1}+1}^{l} \bar{\psi}_k^{-q}} = \frac{\sum\limits_{k=l_{s-1}+1}^{l_s} \beta_k^p}{\sum\limits_{k=l_{s-1}+1}^{l_s} \bar{\psi}_k^{-q}}.$$

Зазначимо, що з доведення теореми 3.4.1 випливає, що система $\widetilde{L}_n = \widetilde{L}_n(\psi, \Lambda)$, яка фігурує при формулюванні цього твердження завжди існує.

Зауважимо також, що умови (9) та (11) забезпечують у відповідних випадках вкладення $\psi U_\varphi^q \subset S_\varphi^p$. При цьому у випадку, коли 0<p<q умова (11) є не тільки достатньою для такого вкладення, але й необхідною.

Теореми 3.2.1 та 3.4.1, у випадку, коли $\lambda_k^{(n)} = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, доведені О.І. Степанцем.

У підрозділах 3.3 та 3.5 доводяться допоміжні леми для числових рядів, на яких базується доведення теорем 3.2.1 та 3.4.1. При цьому здебільшого використовується схема доведення і позначення, які було запропоновано О.І. Степанцем.

Слід зазначити, що екстремальні задачі в просторах S_φ^p врешті зводяться до відповідних екстремальних задач для числових рядів з невід'ємними коефіцієнтами, розв'язки яких вдається отримувати в явному вигляді. Крім цього, наведена вище схема побудови цих просторів дає змогу застосовувати отримані результати до задач наближення у багатьох функціональних просторах різними апаратами наближень. Наприклад, в ролі X можна брати множину $C_{[-1;1]}$ — неперервних на відрізку [-1;1] функцій, а в ролі системи φ — довільну ортонормовану на [-1;1] з вагою w=w(x) систему поліномів, зокрема, поліномів Чебишева, Лежандра, Якобі тощо.

У підрозділах 3.6 та 3.7 дисертації розглядаються застосування результатів, отриманих у розділах 3.2 та 3.4 до задач наближення функцій багатьох змінних, а саме, встановлюються твердження — наслідки теорем 3.2.1 та 3.4.1 для просторів S^p і, зокрема, для простору $L_2(\mathbb{R}^m)$ — всіх 2π-періодичних по кожній зі змінних функцій f(**x**)=f(x_1,...,x_m) сумовних на кубі періодів Q^m,

$$Q^m = \{\mathrm{x}: \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^m, \quad -\pi \le x_k \le \pi, \ k = 1, 2, \ldots, m\},$$

$(f \in L(\mathbb{R}^m))$ зі скінченною нормою

$$||f||_{L_2} = \Big(\int\limits_{Q^m} |f(\mathrm{t})|^2 d\mathrm{t}\Big)^{1/2}.$$

Поняття Ψ-інтеграла у цих просторах вводиться таким чином.

Нехай $\Psi = \{\Psi(\mathrm{k})\}_{\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^m}$ — фіксована система комплексних чисел — кратна послідовність, і f — довільна функція з простору $L(\mathbb{R}^m)$, ряд Фур'є якої за тригонометричною системою

$$(2\pi)^{-m/2}e^{i\mathbf{kx}}, \ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m, \qquad (12)$$

має вигляд

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}.$$

Далі, розглядається ряд

$$(2\pi)^{-m/2}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m}\Psi(\mathbf{k})\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}.$$

Якщо цей ряд для даної функції f і системи Ψ є рядом Фур'є деякої функції $F\in L$, то F називають Ψ-інтегралом функції f і записують $F(\mathrm{x}) = \mathcal{J}^{\Psi}(f;\mathrm{x})$. Зрозуміло, що при цьому

$$\widehat{F}(\mathbf{k}) = \Psi(\mathbf{k})\widehat{f}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m.$$

Множину Ψ-інтегралів усіх функцій $f\in L$ позначають через L^{Ψ}. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L, то через $L^{\Psi}\mathfrak{N}$ позначається множина Ψ-інтегралів всіх функцій з $\mathfrak{N}$.

За множину $\mathfrak{N}$ візьмемо одиничну кулю простору L_2:

$$U_{L_2} = \{f\in L_2: \quad \|f\|_{L_2}\le 1\}.$$

Покладемо $L^{\Psi}U_{L_2} = U^{\Psi}_{L_2}$.

Для того, щоб визначити апарат наближення у цьому випадку, впорядкуємо довільним чином елементи системи (12) і покладемо $\tau = \{\tau_s\}, \quad s\in\mathbb{N}$, де

$$\tau_s = (2\pi^{-m/2})e^{i\mathbf{k}_s\mathrm{x}}, \quad \mathbf{k}_s\in\mathbb{Z}^m, \quad s = 1,2,\ldots.$$

Наближаючими агрегатами для функцій $f\in U^{\Psi}_{L_2}$ є тригонометричні поліноми $U_n(f,\Lambda,\gamma,\mathrm{x})$ вигляду

$$U_n(f,\Lambda,\gamma,\mathrm{x}) = \sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(n)}\widehat{f}(j_s)\tau_{j_s} = (2\pi)^{-m/2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{(n)}\widehat{f}(j_s)e^{i\mathbf{k}_{j_s}\mathrm{x}},$$

де $\gamma = \{j_1, j_2,\ldots\}$ – довільна перестановка натурального ряду, а

$$\Lambda = \|\lambda_s^{(n)}\|, \ n = 1,2,\ldots; \ s = 1,2,\ldots; \quad \lambda_s^{(n)} = 0, \ s > n$$

— нескінченна трикутна матриця чисел.

Розглядаються величини

$$e_n(U^{\Psi}_{L_2},\Lambda)_{L_2} = \sup_{f\in U^{\Psi}_{L_2}}\inf_{\gamma\in\Gamma}\|f - U_n(f,\Lambda,\gamma,\mathrm{x})\|_{L_2}, \quad p,q>0.$$

В прийнятих позначеннях вірне таке твердження.

Теорема 3.7.1. *Нехай* $\Psi = \{\Psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m}$ *— довільна система комплексних чисел, для якої виконуються умови*

і

$$\Psi_{\mathbf{k}}\ne 0 \quad \forall\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m, \qquad (13)$$

і $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ *— трикутна матриця чисел, що задовольняють умову (10). Тоді для кожного* $n\in\mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$e_n^2(U^{\Psi}_{L_2},\Lambda)_{L_2} = \sup_{s\in\mathbb{N}}\sum^{s}\beta_k^2\left(\sum_{i=1}^{s}\overline{\Psi}_i^{\,-2}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{s^*}\beta_k^2\left(\sum_{i=1}^{s^*}\overline{\Psi}_i^{\,-2}\right)^{-1},$$

де $\beta = \{\beta_k\}$ *і* $\overline{\Psi} = \{\overline{\Psi}_k\}, \quad k = 1,2,\ldots,$ *— системи чисел, утворені шляхом впорядкування величин* $|1-\lambda_k^{(n)}|$ *і* $|\Psi_{\mathbf{k}}|$, *відповідно, за неспаданням і незростанням, а* s^* *— деяке натуральне число.*

Дану теорему у випадку, коли $\lambda_k^{(n)} = 1, \ k = 1,2,\ldots,n,$ доведено О.І. Степанцем.

Зазначимо також, що умова (13) дозволяє для заданої системи $\Psi = \{\Psi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^m}$ впорядкувати величини $\Psi_{\mathbf{k}}$ за незростанням і тим самим побудувати систему $\overline{\Psi} = \{\overline{\Psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка використовується при формулюванні даного твердження.

У підрозділі 3.8 дисертаційної роботи показано, що не існує жодної трикутної матриці Λ, відмінної від матриці

$$\Lambda_1 = ||\lambda_k^{(n)}|| : \quad \lambda_k^{(n)} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n,$$

яка б при кожному натуральному n задовольняла рівність (2).

У підрозділі 3.9 вводимо величини $\mathcal{E}_n(\psi U^q_{\varphi,\Lambda}, \Lambda)_p$, які є узагальненнями найкращих n-членних наближень Λ-методами на випадок, коли матриці Λ — прямокутні, і знаходимо точні значення цих величин.

У підрозділі 3.10 розроблені у підрозділах 3.3 та 3.5 методи застосовуються до деяких екстремальних задач.

В останньому підрозділі третього розділу, спираючись на теорему3.2.1, знаходимо точні значення вел$e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p$, які визначаються співвідношенням (1), для випадку, коли p=q=1,

$$|\psi_k| = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ (k-1)^{-r}, & k \geq 2, \end{cases}$$

де r — довільне додатне число, а

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k-1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k > n.$$

Висновки

1. Визначено поняття насичення лінійного методу у просторах $S^p_\varphi(X)$ в такий спосіб, щоб насиченість лінійного методу, а також порядок насичення, не залежали від усіх параметрів X, φ та p, що визначають ці простори.

2. Знайдено достатні умови насиченості лінійного методу в S^p_φ.При цьому для методів, що задовольнять ці умови, вказано порядки та класи насичення.

3.Показано, що методи Зігмунда, Рогозинського, Фавара, а також метод Валле-Пуссена у випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) \to c_n < c$, є насиченими в усіх просторах $S^p_\varphi(X)$. Для цих методів вказано порядки та класи насичення. Також показано, що метод Валле-Пуссена в усіх інших випадках не є насиченим в $S^p_\varphi(X)$.

4. Знайдено точні значення величин $e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p$ найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU^q_φ в метриці простору S^p_φ при довільних 0<p,q<∞, а також сформульовано відповідні наслідки для просторів функцій багатьох змінних.

5. При порівнянні цих значень із значеннями величин $e_n(\psi U^q_\varphi)_p$ – звичайних n-членних наближень класів ψU^q_φ, які було знайдено О.І. Степанцем, виявилося, що не можна вказати жодної матриці Λ, відмінної відматриці

$$\Lambda_1 = ||\lambda_k^{(n)}|| : \quad \lambda_k^{(n)} = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n,$$

яка б при кожному натуральному n задовольняла рівність

$$e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p = e_n(\psi U^q_\varphi)_p, \quad 0 < q \leq p.$$

6. Знайдено точні значення величин, які є аналогами найкращих n-членних наближень Λ-методами класів ψU^q_φ у випадку, коли матриці Λ прямокутні.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. *Шидліч А.Л.* Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. —**35**. — С.215--232.

2 *Степанець О.І., Шидліч А.Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ // Укр. мат. журн. — 2003. —**55**, №8. — С.1107--1126.

3. *Шидліч А.Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. —**46**. — С.283--306.

4. *Шидліч А.Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Шості Боголюбовські читання". — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С.243.

Шидліч А.Л. Лінійні методи підсумовування рядів у просторах S^p_φ. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Інститут математики НАН України, Київ, 2003.

Дисертацію присвячено вивченню апроксимаційних властивостей лінійних методів підсумовування рядів у просторах S^p_φ.

В дисертації введено поняття насичення та регулярності для загальних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ, встановлено достатні умови насиченості та необхідні і достатні умови регулярності таких методів в S^p_φ, а також одержано точні значення так званих найкращих n-членних наближень Λ-методами q-еліпсоїдів у просторах S^p_φ.

Ключові слова: лінійні методи підсумовування рядів, простори S^p_φ, насичення, регулярність, найкращі n-членні наближення Λ-методами.

Шидлич А.Л. Линейные методы суммирования рядов в пространствах S^p_φ. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2003.

Диссертация посвящена изучению аппроксимационных свойств линейных методов суммирования рядов в пространствах S^p_φ.

В диссертации рассмотрены понятия насыщения и регулярности для общих линейных методов суммирования рядов Фурье в пространствах S^p_φ, получены достаточные условия насыщености и необходимые и достаточные условия регулярности таких методов в S^p_φ. В работе также получены точные значения наилучших n-членных приближений Λ-методами q-эллипсоидов в пространствах S^p_φ.

Пусть f — произвольный элемент пространства S^p_φ, $p \in (0, \infty)$, и

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k \qquad (14)$$

— его ряд Фурье по системе $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$.

Пусть также

$$\Lambda = ||\lambda_k^{(n)}||,\ n = 1, 2, \dots,\ k = 1, 2, \dots, \quad \lambda_k^{(n)} = 0,\ k > n,$$

— бесконечная треугольная матрица чисел. Каждому элементу $f \in S^p_\varphi$, отправляясь от его разложения (14) в ряд Фурье по системе φ, сопоставим полином $U_n(f; \Lambda; \gamma)$ вида

$$U_n(f; \Lambda; \gamma) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \widehat{f}_\varphi(i_k)\varphi_{i_k},$$

где $\gamma = \{i_k\}_{k=1}^\infty$ — любая перестановка натурального ряда $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Рассмотрим величину

$$e_n(f, \Lambda)_p = \inf_\gamma \|f - U_n(f; \Lambda; \gamma)\|_{S^p_\varphi},$$

$$f \in S^p_\varphi$$

которая называется *наилучшим n-членным приближением елемента данным Λ-методом.*

В работе получены точные значения наилучших n-членных приближений Λ-методами классов ψU^q_φ в метрике пространств S^p_φ, а именно, величин $e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p$, определяемых равенством

$$e_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p \overset{df}{=} \sup_{f\in\psi U^q_\varphi} e_n(f,\Lambda)_p.$$

В этом соотношении

$$\psi U^q_\varphi = \left\{ f\in S^q_\varphi :\ \widehat{f}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{g}_\varphi(k),\ g\in S^q_\varphi,\ \|g\|_{S^p_\varphi} \le 1 \right\}.$$

Одним из основных результатов, касающихся этих величин, является следующая теорема, которая была получена совместно с А.И. Степанцом.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— произвольная система отличных от нуля комплексных чисел, для которой*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = 0,$$

p i q — фиксированные вещественные числа такие, что 0<q≤p, и $\Lambda = \|\lambda^{(n)}_k\|$ *— треугольная матрица чисел, удовлетворяющих условию*

$$|1-\lambda^{(n)}_k| \le 1.$$

Тогда при каждом $n\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$e^p_n(\psi U^q_\varphi, \Lambda)_p = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \beta^p_k \left(\sum_{i=1}^{s} \bar\psi_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = \sum_{k=1}^{s^*} \beta^p_k \left(\sum_{i=1}^{s^*} \bar\psi_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}},$$

где $\beta = \{\beta_k\}$ *и* $\bar\psi = \{\bar\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *— системы чисел, которые получены путем упорядочения величин* $|1-\lambda^{(n)}_k|$ *и* $|\psi_k|$, *соответственно, по неубыванию и невозрастанию, а* s^* *— некоторое натуральное число.*

Ключевые слова: линейные методы суммирования рядов, про-странства S^p_φ, насыщение, регулярность, наилучшие n-членные приближения Λ-методами.

Shydlich A.L. Linear methods of summation of series in the spaces S^p_φ. – Manuscript.

The thesis for a scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2003.

The thesis contains the researches of approximation attributes of linear methods of summation of series in the spaces S^p_φ.

Introduced in the thesis are conceptions of regularity and saturation for general linear methods of summation of series in the spaces S^p_φ. We obtain sufficient conditions of saturation and necessary and sufficient conditions of regularity for these methods in S^p_φ. We also find the exact values of the best n-term approximations by Λ -methods of q-ellipsoids in the spaces S^p_φ.

Key words: linear methods of summation of series, spaces S^p_φ, saturation, regularity, the best n–term approximations by Λ -methods.

Підп. до друку 26.04.2004. Формат $60 \times 84/16$. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк.арк. 1,37. Ум. друк. арк. 1,27.
Тираж 100 пр. Зам. 82.

Інститут математики НАН України
01601 Київ-4, вул. Терещенківська, 3