Збірник праць Ін-ту математики НАН України (2021) т. 18, № 1, 594–643

Задачі теорії наближень в абстрактних лінійних просторах

А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч

Присвячується світлій пам'яті Олександра Івановича Степанця

Abstract. This review presents the results, which cover the study of current problems of approximation theory in abstract linear spaces. Such research has been actively developed since the 2000s, based on the ideas and approaches initiated in the articles by Stepanets. In particular, the review contains results concerning the best, best n-term approximations and widths of some functional compacts in the spaces $\mathcal{S}^p$. Direct and inverse approximation theorems are also formulated in these spaces.

Анотація. В даній оглядовій роботі наведено результати, які охоплюють дослідження актуальних проблем теорії апроксимації в абстрактних лінійних просторах. Такі дослідження набули активного розвитку, починаючи з 2000-х років, на базі ідей та підходів, започаткованих в роботах О. І. Степанця. Зокрема, в огляді містяться результати, які стосуються найкращих, найкращих n-членних наближень та поперечників деяких функціональних компактів у просторах $\mathcal{S}^p$, а також сформульовано прямі та обернені теореми наближення у цих просторах.

1. Вступ

Результати наукових досліджень, які будуть висвітлені у даній оглядовій роботі, виникли внаслідок пошуку О. І. Степанцем, його учнями та послідовниками нових підходів до задач теорії наближення функцій багатьох змінних і, зокрема, періодичних функцій. В цій теорії існує багато проблем і одними з визначальних, напевно, є такі: вибір апроксимативних агрегатів, вибір класів функцій та апроксимаційних характеристик. В той час, як в одновимірному випадку вигляд найпростішого агрегату наближення визначається природним порядком натурального ряду, в багатовимірному випадку, тобто, коли задано абстрактну

2010 Mathematics Subject Classification: 41A65, 41A46, 41A29, 41A17, 42A10
УДК 517.5
Ключові слова: поперечник, найкраще n-членне наближення, пряма теорема наближення, обернена теорема наближення, нерівність Джексона, модуль гладкості.

множину $\mathcal{X}$ – банахів простір функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1 \ldots, x_d)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, d змінних, вибір найпростіших агрегатів є дещо проблематичним. Перші труднощі тут починаються з того, що саме слід вважати аналогом частинної суми для кратного ряду

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots k_d), \tag{1.1}$$

де $\mathbb{Z}^d$ – цілочисельна решітка в $\mathbb{R}^d$. Природним є розгляд «прямокутних» сум і відповідних їм апроксимативних агрегатів – у періодичному випадку тригонометричних поліномів вигляду

$$\sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=-n_d}^{n_d} c_{k_1,\ldots,k_d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1t_1+\cdots+k_dt_d)}. \tag{1.2}$$

Проте частинні суми кратного ряду можна означати багатьма іншими способами, зокрема, наприклад, у такий спосіб. Нехай $\{G_\alpha\}$ – сім'я обмежених областей взаємно неперетинних в $\mathbb{R}^d$, які залежать від параметра α, $\alpha \in \mathbb{N}$, і такі, що будь-який вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ належить усім областям G_α при достатньо великих значеннях α. Тоді вираз $\sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{\mathbf{k}}$ називають частинною сумою ряду (1.1), яка відповідає області G_α. За аналогією з цим вводяться і відповідні частинні суми тригонометричних рядів:

$$\sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}\in G_\alpha} c_{k_1\ldots k_d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_1+\cdots+k_dx_d)}. \tag{1.3}$$

Досить швидко виявилось, що у випадку наближення функцій з відомих класів Соболєва $W_p^r(\mathbb{R}^d)$ замість прямокутних сум вигляду (1.2) доцільніше застосовувати суми (1.3), які побудовані за областями, що визначаються деякими гіперболічними поверхнями. Такі області вперше були введені К. І. Бабенком в [26, 27] і отримали назву гіперболічних хрестів. Їх поява дала істотний поштовх у розвитку сучасної теорії наближення функцій багатьох змінних. В цьому напрямку отримано велику кількість важливих та цікавих результатів, з яким можна ознайомитись, наприклад, з робіт [6, 19, 43, 69].

Слід зазначити, що більшість результатів, які стосуються наближення функцій з використанням гіперболічних хрестів, у просторах $L_p(\mathbb{R}^d)$ мають порядковий характер, а точні рівності отримуються лише у гільбертових просторах (при $p = 2$). Спроби використання гіперболічних хрестів, а також їх модифікацій – ступінчастих гіперболічних хрестів при наближенні функцій з класів, відмінних від соболєвських, взагалі кажучи, бажаних результатів майже не дають. У зв'язку з цим, природно, виникає припущення, що для кожного конкретного класу $\mathfrak{N}$ (або ж деякої сім'ї таких класів) потрібно підбирати відповідну йому сім'ю областей G_α, яка визначається його параметрами.

Іншою причиною, яка ускладнює отримання точних результатів по наближенню функцій багатьох змінних є історично сформована практика розглядати задачі саме у просторах $L_p(\mathbb{R}^d)$. У періодичному випадку норма в цих просторах означається рівністю

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{x})|^p\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d. \tag{1.4}$$

і характеризує величину середнього значення p-го степеня модуля заданої функції.

При $p = 2$ добре відомою є рівність Парсеваля

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{T}^d)} = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}|c_{\mathbf{k}}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $c_{\mathbf{k}} = c_{k_1,\ldots,k_d}$ – коефіцієнти Фур'є функції f. Тобто, у цьому випадку норма функції f повністю характеризує всю множину $\{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ (при інших значеннях p, зрозуміло, подібні рівності можливі лише у тривіальних випадках). Тому є доцільною спроба введення норм функцій за допомогою величин, пов'язаних саме з їх коефіцієнтами Фур'є. Такий підхід розглядався, зокрема, у роботах [39, 65] та ін., але найбільш ретельно був розвинутий, починаючи з 2000-х років, у циклі робіт О. І. Степанця та його послідовників [1, 2, 13, 15, 17, 23, 31, 33, 34, 36, 44, 46, 47, 49—53, 55—60, 62, 64, 70, 77—84].

Цей підхід, зокрема, дозволяє розповсюджувати ідеї та методи теорії наближень на абстрактні лінійні простори, що в свою чергу, дає можливість дивитись на функції з загальних позицій аналізу та дозволяє отримувати завершені змістовні результати.

2. Наближення в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$

2.1. **Означення і деякі властивості просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$.** Нехай $\mathfrak{X}$ – деякий лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – фіксована зліченна лінійно незалежна система в ньому, і нехай існує комплекснозначна функція (x, y), визначена для кожної пари $x, y \in \mathfrak{X}$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, така, що виконуються умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, де $\overline{z}$ – число, комплексно-спряжене з z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y), \quad \lambda,\ \mu$ – довільні числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Тобто, визначено скалярний добуток елементів простору $\mathcal{X}$ із елементами системи φ.

Кожному елементу $x \in \mathcal{X}$ ставиться у відповідність послідовність чисел $\widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають простори $\mathcal{S}^p_\varphi = \mathcal{S}^p_\varphi(\mathcal{X})$ всіх елементів $x \in \mathcal{X}$ зі скінченною (квазі-)нормою

$$\|x\|_p := \|x\|_{p,\varphi} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_\varphi(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

При цьому елементи $x, y \in \mathcal{X}$ вважаються тотожними в $\mathcal{S}^p_\varphi$, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Зрозуміло, що при $p = 2$ простір $\mathcal{S}^2_\varphi$ за умови його повноти є гільбертовим. При всіх інших $p \in (0, \infty)$ простори $\mathcal{S}^p_\varphi$ наслідують важливі властивості гільбертових просторів – рівність Парсеваля у вигляді співвідношення (2.1) і мінімальну властивість частинних сум ряду Фур'є, яка формулюється в такий спосіб:

Твердження 2.1 ([49, 50]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p \in (0, \infty)$,*

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}(k)\varphi_k \tag{2.2}$$

– ряд Фур'є елемента f за системою φ і

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

– частинні суми цього ряду. При даному $n \in \mathbb{N}$ серед усіх поліномів вигляду $\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, найменше відхиляється від f частинна сума $S_n(f)$, тобто,

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_n\|_p = \|f - S_n(f)\|_p.$$

Крім того, виконується рівність

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{f}(k)|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^p. \tag{2.3}$$

При $n \to \infty$ права частина в (2.3) прямує до нуля. Тобто, для довільного елемента f з $\mathcal{S}^p_\varphi$ його ряд Фур'є (2.2) збігається до f, система φ є повною в $\mathcal{S}^p_\varphi$, а простір $\mathcal{S}^p_\varphi$ сепарабельний.

Звернемо увагу ще на одну властивість просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$: *якщо систему $\varphi' = \{\varphi'_k\}_{k=1}^\infty$ отримано із системи $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ шляхом будь-якої перестановки її членів, то справджуються рівності*

$$\mathcal{S}^p_\varphi = \mathcal{S}^p_{\varphi'}, \quad \text{і} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in \mathcal{S}^p_\varphi. \tag{2.4}$$

Цей факт випливає з означення просторів $\mathcal{S}^p_\varphi$ та рівності (2.1).

Останнє зауваження дає можливість узагальнити твердження 2.1 наступним чином.

Твердження 2.2 ([52]). *Нехай $\{g_\alpha\}$ – сім'я обмежених підмножин, які залежать від параметра $\alpha \in \mathbb{N}$ і таких, що будь-яке число $n \in \mathbb{N}$ належить усім множинам g_α з достатньо великими індексами α. Нехай, далі, $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p \in (0, \infty)$, і*

$$S_{g_\alpha}(f) = S_{g_\alpha}(f)_\varphi = \sum_{k \in g_\alpha} \widehat{f}(k)\varphi_k$$

– частинна сума ряду $S[f]_\varphi$, яка відповідає множині g_α. Тоді серед усіх сум вигляду $\Phi_{g_\alpha} = \sum_{k\in g_\alpha} c_k\varphi_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, найменше відхиляється від f частинна сума $S_{g_\alpha}(f)$, тобто

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_{g_\alpha}\|_p = \|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p.$$

При цьому

$$\|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k \in g_\alpha} |\widehat{f}(k)|^p$$

і

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|f - S_{g_\alpha}(f)\|_p = 0.$$

2.2. **Деякі реалізації та узагальнення.** Розглянемо декілька прикладів реалізацій та узагальнень розглядуваних у п. 2.1 побудов (див., наприклад, [52]).

2.2.1. **Простори $\mathcal{S}^p$.** Нехай $\mathbb{R}^d$ – d-вимірний, $d \geq 1$, евклідів простір, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ – його елементи, $\mathbb{Z}^d$ – цілочисельна решітка в $\mathbb{R}^d$, тобто, множина векторів $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ з цілочисельними координатами,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d,$$

$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ і, зокрема, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \cdots + k_d x_d$, $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$.

Нехай, далі, $L = L(\mathbb{T}^d)$ – множина всіх 2π-періодичних за кожною зі змінних функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_d)$, сумовних на кубі періодів

$$\mathbb{T}^d := [0, 2\pi)^d.$$

Якщо $f \in L$, то через $S[f]$ позначають ряд Фур'є функції f за тригонометричною системою $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, тобто

$$S[f] = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{2.5}$$

де

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.6}$$

Якщо ототожнити функції, еквівалентні відносно міри Лебега, то за простір $\mathcal{X}$ можна взяти простір $L(\mathbb{T}^d)$, а за систему φ – тригонометричну систему $\tau = \{\tau_s(\mathbf{x})\}_{s=1}^{\infty}$, де

$$\tau_s(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}_s,\mathbf{x})}, \quad \mathbf{k}_s \in \mathbb{Z}^m, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

утворену із системи $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ шляхом довільної нумерації її елементів; скалярний добуток в такому випадку задається у відомий спосіб:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{\tau}_s(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{k}_s) = \widehat{f}_{\tau}(s). \tag{2.8}$$

Отримані при цьому множини $\mathcal{S}^p_{\tau}$ згідно з (2.4) не залежать від нумерації системи $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ і надалі позначаються через $\mathcal{S}^p$.

2.2.2. **Простори l_p.** Виберемо тепер в ролі $\mathcal{X}$ – простір усіх послідовностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ комплексних чисел, у якому операції додавання та множення на скаляр визначаються в стандартний спосіб. У ролі φ – систему послідовностей $e = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $e_k = \{e_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$ такі, що $e_{kk} = 1$ і $e_{ki} = 0$ при $k \neq i$.

Скалярний добуток елементів $x \in \mathcal{X}$ на елементи системи e визначимо співвідношеннями

$$(x, e_k) = \widehat{x}_e(k) = x_k, \quad (e_k, x) = \overline{x_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

і при фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглянемо простори $\mathcal{S}^p_e(\mathcal{X})$ всіх послідовностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ комплексних чисел зі скінченною (квазі-)нормою

$$\|x\|_{p,e} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_e(k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1$'$}$$

Очевидно, що $\mathcal{S}^p_e(\mathcal{X})$ збігаються з відомими просторами послідовностей l_p.

2.2.3. **Простори** $\mathcal{S}^{p,\mu}_{\varphi}$ є деяким узагальненням просторів $\mathcal{S}^{p}_{\varphi}$. Вони були введені в роботі О. І.Степанця та В. І. Рукасова [59] і будуються за тією ж схемою, що й останні, однак в цьому випадку функціонал вигляду

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

у співвідношенні (2.1) слід замінити на функціонал з вагою μ

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\cdot|^p\mu_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\mu=\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – задана система невід'ємних чисел, $\mu_k\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$. При цьому якщо $\mu_k\equiv 1$, то $\mathcal{S}^{p,\mu}_{\varphi}=\mathcal{S}^{p}_{\varphi}$.

2.2.4. **Простори** $\mathcal{S}^{p}_{\Phi}$ введено в 2003 році О. І. Степанцем [57]. При їх означенні використовуються подібна до наведених вище схема, яка полягає в наступному. Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ – деякі лінійні комплексні простори векторів x та y відповідно. Припустимо, що на $\mathcal{X}$ задано лінійний оператор Φ, який діє в $\mathcal{Y}$, а на деякій підмножині $\mathcal{Y}'\subset\mathcal{Y}$ визначено функціонал f. Нехай, далі, $E(\Phi)$ – множина значень оператора Φ, і $\mathcal{X}'$ – прообраз множини $\mathcal{Y}'\subset E(\Phi)$ при відображенні Φ. В такому випадку на $\mathcal{X}'$ можна визначити функціонал f' за допомогою рівності

$$f'(x)=f(\Phi(x)),\qquad x\in\mathcal{X}' \tag{2.9}$$

Якщо в ролі f вибрати функціонал, що задає на $\mathcal{Y}'$ норму (або квазінорму), то рівність (2.9) буде визначати аналогічну величину на $\mathcal{X}'$.

Нехай $(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $d\ge 1$, – d-вимірний евклідів простір точок

$$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d),$$

визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$ зі скінченною σ-аддитивною неперервною мірою, A – μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^d,\mathrm{d}\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a – або скінченне число, або ж $a=\infty$; $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}(A,\mathrm{d}\mu)$ – множина всіх заданих на A функцій $y=y(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $\mathrm{d}\mu$.

При заданому $p\in(0,\infty]$ через $L_p(A,\mathrm{d}\mu)$ позначають підмножину функцій з $\mathcal{Y}(A,\mathrm{d}\mu)$, для яких є скінченною (квазі-)норма

$$\|y\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)}=\begin{cases}\left(\int_A|\,y(\mathbf{x})|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, & p\in(0,\infty),\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbf{x}\in A}|\,y(\mathbf{x})|, & p=\infty.\end{cases} \tag{2.10}$$

Нехай тепер $\mathfrak{X}$ – деякий лінійний простір векторів x, і Φ — лінійний оператор, який діє з $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}(A, \mathrm{d}\mu)$:

$$\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}(A, \mathrm{d}\mu), \quad \Phi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \widehat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \widehat{x} \in \mathfrak{Y}(A, \mathrm{d}\mu).$$

При довільному фіксованому $p \in (0, \infty]$ покладають

$$\mathcal{S}^p_\Phi = \mathcal{S}^p_\Phi\,(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi} = \|\widehat{x}\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)} < \infty \right\}.$$

Елементи $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ вважають тотожними в $\mathcal{S}^p_\Phi$, якщо за мірою $\mathrm{d}\mu$ майже скрізь $\widehat{x}_1(\mathbf{t}) = \widehat{x}_2(\mathbf{t})$.

Таким чином, множина $\mathcal{S}^p_\Phi$ – множина всіх векторів $x{\in}\mathfrak{X}$, які є прообразами функцій з множини $L_p(A, \mathrm{d}\mu)$ при відображенні Φ.

Простори $\mathcal{S}^{p,\mu}_\varphi$ (а отже, і $\mathcal{S}^p_\varphi$) є частковими випадками просторів $\mathcal{S}^p_\Phi$. Дійсно, якщо в даному просторі $\mathfrak{X}$ означити оператор Φ, який кожному $x \in \mathfrak{X}$ ставить у відповідність послідовність $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty$, де $y_k = \widehat{x}_\varphi(k)$; за множину $(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\mu)$ взяти простір $\mathbb{R}^1$ з мірою $\mathrm{d}\mu$, носієм якої є множина $\mathbb{Z}^1$ цілочисельних точок k, в яких $\mu(k) \equiv \mu_k$; і покласти $A = \left\{ k \in \mathbb{Z}^1 \mid k \geq 1 \right\}$, то в такому випадку $\mathfrak{Y}(A, \mathrm{d}\mu)$ – множина всіх послідовностей y, для яких є скінченною величина

$$\|y\|_{L_p(A,\mathrm{d}\mu)} = \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty)$$

2.3. ψ-інтеграли та характеристичні послідовності.

2.3.1. У 2001 році О. І. Степанець ввів до розгляду наступні об'єкти наближення у просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$, тобто, підмножини елементів, які відповідають в класичній теорії апроксимації поняттю класу функцій [50], [53, Гл. 11].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел. Якщо для данного елемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фур'є якого має вигляд (2.2), існує елемент $F \in \mathfrak{X}$, для якого ряд Фур'є $S[F]_\varphi$ має вигляд

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^\infty \psi_k\,\widehat{f}(k)\varphi_k, \tag{2.11}$$

тобто, коли

$$\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k\,\widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

то елемент F називається ψ-інтегралом елемента f. В такому випадку записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ позначають множину ψ-інтегралів усіх елементів з $\mathfrak{N}$. Зокрема, $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$ – множина ψ-інтегралів всіх елементів, які належать даному простору $\mathcal{S}^p_\varphi$.

Якщо f і F пов'язані співвідношенням (2.11) або (2.12), то f називають ψ-похідною елемента F і позначають $f = D^{\psi}F = F^{\psi}$.

Надалі обмежуємося випадком, коли система φ задовольняє умову

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{2.13}$$

Зрозуміло, що ця умова забезпечує вкладення $\psi\mathcal{S}^p_\varphi \subset \mathcal{S}^p_\varphi$, яке має місце, зокрема, за умови обмеженості множини чисел $|\psi_k|$, $k \in \mathbb{N}$.

Нехай

$$U^p_\varphi = \big\{ f \in \mathcal{S}^p_\varphi : \quad \|f\|_p \le 1 \big\} \tag{2.14}$$

– одинична куля у даному просторі $\mathcal{S}^p_\varphi$ і ψU^p_φ – множина ψ-інтегралів всіх елементів з U^p_φ. Саме множини ψU^p_φ є основними об'єктами апроксимації в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$. Якщо простір $\mathcal{S}^p_\varphi$ є повним, а

$$\psi_k \ne 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

то внаслідок (2.12) та (2.14)

$$\psi\, U^p_\varphi = \bigg\{ f \in \mathcal{S}^p_\varphi : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \bigg| \frac{\widehat{f}(k)}{\psi_k} \bigg|^p \le 1 \bigg\}, \tag{2.16}$$

тобто, множина $\psi\, U^p_\varphi$ є p-еліпсоїдом в просторі $\mathcal{S}^p_\varphi$ з півосями, які дорівнюють $|\psi_k|$.

2.3.2. Конструкцію агрегатів, які використовуються для наближення елементів $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, зручно визначати за допомогою спеціально підібраних характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ і $\delta(\psi)$ системи ψ, які задаються в такий спосіб [50], [53, Гл. 11].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умову (2.13). Через

$$\varepsilon(\psi) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$$

позначають множину значень величин $|\psi_k|$, впорядковану за їх спаданням, через

$$g(\psi) = \{g_1, g_2, \ldots\}$$

– послідовність множин

$$g_n = g_n(\psi) = \big\{ k \in \mathbb{N} : |\psi_k\,| \ge \varepsilon_n \big\}$$

і через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які належать множині g_n. Через $g_0 = g_0(\psi)$ позначають порожню множину і вважають, що $\delta_0 = 0$.

Враховуючи умову (2.13), послідовності $\varepsilon(\psi)$ і $g(\psi)$ можна визначити такими співвідношеннями:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_k|, g_1 = \{k \in \mathbb{N} : \ |\psi_k| = \varepsilon_1\}, \quad \varepsilon_n = \sup_{k\bar{\in} g_{n-1}} |\psi_k|, \\ g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} : \ |\psi_k| = \varepsilon_n\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

За такого означення будь-яке число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам g_n з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty. \tag{2.18}$$

Зазначимо також, що якщо $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $|\psi_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, то має місце рівність

$$\widetilde{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.19}$$

2.4. **Найкращі наближення індивідуальних елементів множин $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$.** Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, підпорядкованих умові (2.13), і $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ та $\delta(\psi)$ – відповідні їй характеристичні послідовності.

Величину

$$E_n(f)_{\psi,\,p} = \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f - \sum_{k\in g_{n-1}(\psi)} c_k\, \varphi_k \Big\|_p \tag{2.20}$$

називають найкращим наближенням елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ довільними поліномами, побудованими по областях $g_{n-1}(\psi)$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між найкращим наближенням елемента f і найкращими наближеннями його ψ-похідних. Подібні твердження в теорії наближень прийнято називати прямими теоремами.

Теорема 2.3 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$, $p > 0$ і система*

$$\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$$

підпорядкована умовам (2.13) *та* (2.15)*. Тоді ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\,\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f)_{\psi,p}$$

збігається і при довільному $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)\, E_k^p(f^\psi)_{\psi,p}\,, \tag{2.21}$$

у якому величини $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ визначаються рівністю (2.20)*, а ε_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – елементи характеристичної послідовності $\varepsilon(\psi)$.*

Теорема 2.4 у певному розумінні є оберненою до попередньої: у ній за властивостями найкращого наближення елемента f стверджується про існування у нього похідних і дається інформація про найкраще наближення цих похідних.

Теорема 2.4 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $f \in \mathcal{S}^p_\varphi \cap \psi\mathcal{X}$, $p > 0$, система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15) *і*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1}\, E_k(f)_{\psi,p} = 0. \tag{2.22}$$

Тоді для того, щоб виконувалось включення $f \in \psi\mathcal{S}^p_\varphi$, необхідно та достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\,\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})E_k^p(f)_{\psi,p}. \tag{2.23}$$

Якщо цей ряд збігається, то при довільному $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p}\, E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\,(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})\, E_k^p(f)_{\psi,p}\;, \tag{2.24}$$

у якому величини $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ та ε_k мають той же сенс, що і в теоремі 2.3.

2.5. **Найкращі наближення та базисні поперечники q-еліпсоїдів.**

2.5.1. **Означення найкращих наближень та базисних поперечників.** Нехай f – довільний елемент простору $\mathcal{S}^p_\varphi$ і γ_n, $n \in \mathbb{N}$, – будь-який набір з n різних натуральных чисел. Величину

$$E_{\gamma_n}(f)_p = \inf_{c_k\in\mathbb{C}} \Big\| f - \sum_{k\in\gamma_n} c_k\, \varphi_k \Big\|_p \tag{2.25}$$

називають найкращим наближенням елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ n-членними поліномами, що відповідають набору γ_n.

Нехай, далі, $S_{\gamma_n}(f) = S_{\gamma_n}(f)_\varphi = \sum_{k\in\gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k$– сума Фур'є, яка відповідає набору γ_n, і

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_p = \|\, f - S_{\gamma_n}(f)\|_p \tag{2.26}$$

– наближення елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ сумою Фур'є, що відповідає набору γ_n.

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина простору $\mathcal{S}^p_\varphi$, тоді через $E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p$ та $\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p$ позначають точні верхні межі величин (2.25) та (2.26) по множині $\mathfrak{N}$, тобто,

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_p \quad \text{та} \quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_p. \tag{2.27}$$

Характеристики

$$\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_p = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p \quad \text{та} \quad \mathcal{D}^\perp_n(\mathfrak{N})_p = \inf_{\gamma_n} \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_p \tag{2.28}$$

називають базисним та проєкційним поперечниками порядку n множини $\mathfrak{N}$ в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$.

Зазначимо, що у випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величинам $\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_p$ відповідають тригонометричні (базисні) поперечники, а величинам $\mathcal{D}^\perp_n(\mathfrak{N})_p$ – проєкційні (Фур'є) поперечники.

2.5.2. **Найкращі наближення та поперечники q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ при $0 < q \le p$.** Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умови (2.13) та (2.15) і q – довільне додатне число таке, що $0 < q \le p$. У ролі множин $\mathfrak{N}$ у співвідношеннях (2.27) та (2.28) будемо вибирати множини $\psi\, U^q_\varphi$ q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$, які задаються рівністю (2.16) при $p = q$.

Оскільки (див., наприклад, [73]) для будь-якої невід'ємної послідовності $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \ge 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^q\right)^{1/q}, \quad 0 < q \le p, \tag{2.29}$$

то

$$S^q_\varphi \subset \mathcal{S}^p_\varphi \quad \text{та} \quad \psi U^q_\varphi \subset \psi U^p_\varphi, \quad 0 < q \le p. \tag{2.30}$$

Для довільної системи комплексних чисел $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ та будь-якого набору γ_n із n різних натуральних чисел через $\psi_{\gamma_n} = \{\psi_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty$ позначимо послідовність чисел таку, що

$$\psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi_k, & k \overline{\in} \gamma_n. \end{cases} \tag{2.31}$$

Теорема 2.5 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам (2.13) та (2.15), і $0 < q \le p$. Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, справджуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi U^q_\varphi)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1), \tag{2.32}$$

де $\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1)$ *– перший член послідовності* $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$*, яка є спадною перестановкою послідовності* $\{|\psi_{\gamma_n}(k)|\}_{k=1}^{\infty}$.

Нехай $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді, розглядаючи точні нижні межі обох частин рівності (2.32) по всіх можливих наборах γ_n, неважко помітити, що точна нижня межа правої частини (2.32) реалізується набором

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} \ : \ |\psi_{i_k}| = \widetilde{\psi}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{2.33}$$

і при цьому $\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k) = \widetilde{\psi}_{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тому внаслідок (2.28)

$$\mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \widetilde{\psi}_{n+1}.$$

Отже, має місце таке твердження про точні значення поперечників.

Теорема 2.6 ([52])**.** *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15)*, і* $0 < q \le p$*. Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \widetilde{\psi}_{n+1}, \tag{2.34}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$*. При цьому для набору чисел* γ_n^**, означеного рівністю* (2.33)*, мають місце рівності*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U_{\varphi}^q)_p = E_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \\ = \mathcal{E}_{\gamma_n^*}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(1) = \widetilde{\psi}_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.5.3. **Найкращі наближення та базисні поперечники q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_{\varphi}^p$ при $0 < p < q$.** Наведемо аналоги теорем 2.5 та 2.6 у випадку, коли $q > p > 0$. Як і вище, припускаємо, що система чисел ψ підпорядкована умові (2.15), а також умові

$$\|\psi\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty, \quad 0 < p < q. \tag{2.36}$$

яка забезпечує вкладення

$$\psi U_{\varphi}^q \subset \mathcal{S}_{\varphi}^p, \quad 0 < p < q. \tag{2.37}$$

Теорема 2.7 ([52])**.** *Нехай* $0 < p < q$*, і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36)*. Тоді для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральних чисел,* $n \in \mathbb{N}$*, справджуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi U_{\varphi}^q)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{2.38}$$

де послідовність $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_{\gamma_n}(k)|\}_{k=1}^{\infty}$.

Розглядаючи точні нижні межі обох частин рівності (2.38) по всіх можливих наборах γ_n, можна переконатись, що точна нижня межа правої частини (2.38) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням (2.33). Тому внаслідок (2.28)

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U^q_\varphi)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}.$$

Отже, справджується таке твердження про значення поперечників.

Теорема 2.8 ([52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U^q_\varphi)_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{2.39}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. *При цьому для набору чисел* γ_n^*, *який визначається рівністю* (2.33), *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi U^q_\varphi)_p = \mathcal{D}_n^{\perp}(\psi U^q_\varphi)_p = E_{\gamma_n^*}(\psi U^q_\varphi)_p = \mathcal{E}_{\gamma_n^*}(\psi U^q_\varphi)_p =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\psi}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}. \tag{2.40}$$

Звернемо увагу на те, що послідовність $\widetilde{\psi}_k$, $k \in \mathbb{N}$, в загальному випадку є східчастою. Тому внаслідок (2.34) такий самий характер має і величина $\mathcal{D}_n(\psi U^q_\varphi)_p$ при $p \geq q > 0$. Якщо ж $p < q$, то згідно з (2.39) ця величина строго спадає з ростом параметра n.

Зазначимо, що інтегральні аналоги теорем 2.5–2.8 встановлено в роботах [18, 57, 62, 63, 86]. У роботах [16, 74, 85] твердження теорем 2.5–2.8 було поширено відповідно на простори зі змінним показником підсумовування $l_{\mathbf{p}}$, простори Орлича l_M та модулярні простори Мусєляка-Орлича $l_{\mathbf{M}}$.

2.6. Наближення поліномами, побудованими по областях $g_n(\psi)$, та колмогоровські поперечники p-еліпсоїдів.

2.6.1. Наближення поліномами.
Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умову (2.13). Розглянемо

окремо випадок, коли апроксимуючі поліноми визначаються областями $g_n(\psi)$, побудованими по даній системі комплексних чисел ψ згідно з формулами (2.17). Для довільного елемента $f \in \psi\mathcal{S}^p_\varphi$ позначимо

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} := S_{g_n(\psi)}(f) = \sum_{k\in g_n(\psi)} \widehat{f}(k)\,\varphi_k, \quad S_0(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{2.41}$$

де $g_n(\psi)$, $n = 1, 2, \ldots$, – елементи послідовності $g(\psi)$, θ – нульовий елемент простору $\mathcal{S}^p_\varphi$, і

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p} \ = \|\, f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\,\psi}\|_p. \tag{2.42}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\psi\mathcal{S}^p_\varphi$, то покладаємо

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{\psi,\,p} \ = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \ \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p}. \tag{2.43}$$

та

$$E_n(\mathfrak{N})_{\psi,\,p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \ E_n(f)_{\psi,\,p}. \tag{2.44}$$

Враховуючи рівності (2.19) та прийняті позначення, наводимо такі твердження – наслідки з теорем 2.5 та 2.7.

Наслідок 2.9 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, – довільна система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15), *і $0 < q \le p$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(\psi U^p_\varphi)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi\, U^p_\varphi)_{\psi,\,p} = \varepsilon_n, \tag{2.45}$$

де ε_n – n-й член характеристичної послідовності $\varepsilon(\psi)$.

Наслідок 2.10 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36), *і $0 < p < q$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(\psi U^q_\varphi)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi U^q_\varphi)_{\psi,p} = \left(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{2.46}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а δ_n – члени характеристичної послідовності $\delta(\psi)$.

2.6.2. **Колмогоровські поперечники p-еліпсоїдів.** Нехай Y – лінійний нормований простір, $\mathfrak{M}$ – центрально-симетрична множина в ньому і $\mathcal{F}_n$ – множина всіх підпросторів F_n розмірності $n \in \mathbb{N}$ простору Y. Величину

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n\in\mathcal{F}_n} \ \sup_{x\in\mathfrak{M}} \ \inf_{u\in F_n} \ \|x-u\|_Y$$

називають поперечником за Колмогоровим множини $\mathfrak{M}$ у просторі Y.

Теорема 2.11 ([52]). *Нехай $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, – система комплексних чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15). *Тоді при довільних $p \in [1, \infty)$ та $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi U^p_\varphi) = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi U^p_\varphi) = \ldots$$
$$= d_{\delta_n - 1}(\psi U^p_\varphi) = E_n(\psi U^p_\varphi)_{\psi,p} = \varepsilon_n, \tag{2.47}$$

у яких δ_s та ε_s, $s = 1, 2, \ldots$, – елементи характеристичних послідовностей $\delta(\psi)$ та $\varepsilon(\psi)$ системи ψ, а $\delta_0 = 0$.

Зазначимо, що у скінченно вимірних просторах l^d_p твердження, аналогічне до теореми 2.11, випливає з теореми 2.1 глави VI монографії А. Пінкуса [11]. У роботах [85], [16] та [74] твердження теореми 2.11 поширено відповідно на простори зі змінним показником підсумовування $l_{\mathbf{p}}$, простори Орлича l_M та модулярні простори Мусєляка-Орлича $l_{\mathbf{M}}$.

2.7. **Найкращі n-членні наближення.**

2.7.1. **Найкращі n-членні наближення q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ при $0 < q \le p$.**

Нехай $n \in \mathbb{N}$, γ_n – довільний набір з n натуральних чисел і

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k, \tag{2.48}$$

де α_k – комплексні числа. Величину

$$e_n(f)_p = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{\alpha_k,\, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_p. \tag{2.49}$$

називають найкращим n-членним наближенням елемента $f \in \mathcal{S}^p_\varphi$ в просторі $\mathcal{S}^p_\varphi$. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}^p_\varphi$, то покладаємо

$$e_n(\mathfrak{N})_p = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f)_p. \tag{2.50}$$

Величини, аналогічні до величин (2.49), вперше введені С. Б. Стєчкіним [66], і їх властивості досліджувались в теорії наближень періодичних функцій багатьма авторами (див., наприклад, [6, 21, 22, 43, 53] та ін.). Варто зазначити, що раніше Е. Шмідт [14] розглядав величину найкращого білінійного наближення, яка в ідейному плані є близькою до величин вигляду (2.49).

В даному підрозділі визначаються величини вигляду (2.50) у випадку, коли $\mathfrak{N}$ є q-еліпсоїдами $\psi\, U^q_\varphi$ (див. означення (2.16)). Як і вище, вважаємо, що $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна система комплексних чисел, які задовольняють умови (2.13) та (2.15). В такому випадку, як вже зазначалося, при $0 < q \le p$ виконується вкладення $\psi U^q_\varphi \subset \mathcal{S}^p_\varphi$, а отже, величина (2.50) має зміст.

Теорема 2.12 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *система чисел, підпорядкована умовам* (2.13) *та* (2.15), *і* $0 < q \le p$. *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n^p(\psi U_\varphi^q)_p = \sup_{s>n}(s-n)\bigg(\sum_{k=1}^{s}\widetilde{\psi}_k^{-q}\bigg)^{-\frac{p}{q}}, \tag{2.51}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *спадна перестановка послідовності чисел* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$. *Точна верхня межа в правій частині* (2.51) *досягається при деякому скінченному значенні* s^*.

У випадку, коли всі числа послідовності ψ дорівнюють одиниці, тобто, коли $\psi U_\varphi^q = U_\varphi^q$, $0 < q \le p$, має місце таке твердження.

Теорема 2.13 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < q \le p$. *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n^p(U_\varphi^q)_p = \sup_{s>n}\frac{s-n}{s^{1/q}}. \tag{2.52}$$

При $p = q$ *точна верхня межа в правій частині* (2.52) *дорівнює одиниці. Якщо ж* $q < p$, *то вона досягається в одній із точок* $\left[\frac{n}{1-q/p}\right]$ *або ж* $\left[\frac{n}{1-q/p}\right] + 1$, *де* $[c]$ – *ціла частина числа* c.

2.7.2. **Найкращі n-членні наближення q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при** $0 < p < q$**.** В цьому підрозділі наведено точні значення величини $e_n(\psi U_\varphi^q)_p$ за умови, що $0 < p < q$. Як і вище, припускаємо, що система чисел ψ підпорядкована умові (2.15), а також умові (2.36), яка гарантує вкладення $\psi U_\varphi^q \subset S_\varphi^p$.

Теорема 2.14 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *система чисел, підпорядкована умовам* (2.15) *та* (2.36). *Тоді при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p = \left((s^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\bigg(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\bigg)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}, \tag{2.53}$$

де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *спадна перестановка послідовності чисел* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$, *а число* s^* *вибране з умови*

$$\widetilde{\psi}_{s^*}^{-q} \le \frac{1}{s^*-n}\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q} < \widetilde{\psi}_{s^*+1}^{-q}. \tag{2.54}$$

Таке число s^* *існує і єдине.*

Зазначимо, що аналоги теорем 2.12, 2.13 та 2.14 у випадку апроксимації інтегралами заданого рангу встановлено в роботах [57, 62, 63]. У просторах l_p^d скінченних послідовностей аналогічні твердження при всіх $0 < p$, $q \leq \infty$ отримано в роботі [7].

У роботі [44] твердження теорем 2.12 та 2.14 розповсюджено на простори $\mathcal{S}_\varphi^{p,\mu}$, а в [16] твердження теореми 2.12 дещо розповсюджено на простори Орлича l_M.

2.8. **Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень та поперечників q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$.** Аналіз теорем 2.5–2.8, 2.11 та 2.12–2.14, показує, що точні значення апроксимативних характеристик у теоремах 2.5, 2.6 та 2.11, виражаються у термінах величин, для яких явно прослідковується їх швидкість прямування до нуля при $n \to \infty$. Вирази, у термінах яких визначені точні значення апроксимативних характеристик у теоремах 2.8, 2.12 та 2.14, потребували додаткових досліджень. Такі дослідження були здійснені, зокрема, у роботах [15, 61—63]. При цьому ефективним виявився розвинений О. І. Степанцем та його учнями апарат дослідження, який базується на наведеній нижче класифікації опуклих функцій [54, Гл.3].

2.8.1. **Класифікація Степанця опуклих функцій.** Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину всіх опуклих донизу функцій $\psi(t)$, неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$:

$$\mathfrak{M} = \big\{\psi(t) : \ \psi(t) > 0, \ \psi(t_1) - 2\psi((t_1 + t_2)/2) + \psi(t_2) \geq 0 \\ \forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\big\}.$$

Множина $\mathfrak{M}$ досить неоднорідна за швидкістю прямування до нуля при $t \to \infty$ її елементів: функції $\psi(t)$ можуть спадати як дуже повільно, так і дуже швидко. Тому виникає необхідність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини, що об'єднують функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які в певному сенсі мають однакову швидкість прямування до нуля.

В ролі характеристики, за допомогою якої можна здійснити таке розбиття, О. І. Степанець обрав пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, що означаються в такий спосіб. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначають функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1. \tag{2.55}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, характеристика $\eta(t)$ для всіх $t \geq 1$ з (2.55) визначається однозначно: $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$.

Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

В залежності від поведінки функції μ розрізняють такі підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < \mu(\psi; t) \le K \ \ \forall t \ge 1 \ \ \}^1,$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \ : \quad 0 < K \le \mu(\psi; t) < \infty \ \ \forall t \ge 1 \ \ \},$$

$$\mathfrak{M}_C{=}\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty{=}\{\psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 \ \forall t \ge 1\}.$$

Через B позначимо множину всіх монотонно спадних до нуля при $t \to \infty$ функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$, які задовольняють так звану Δ_2-умову:

$$\psi(t) \le K\psi(2t). \tag{2.56}$$

Як показано в [54, Гл.3, §3.16] має місце рівність

$$B \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0. \tag{2.57}$$

Зазначимо, що природними представниками множин $\mathfrak{M}_C$ є функції t^{-r} при $r > 0$, а також функції $t^{-r}\ln^{\varepsilon}(t{+}a)$ при довільних $\varepsilon \in \mathbb{R}$, додатних r і a, для яких $a \ge e^{3\varepsilon/r} - 1$ та ін. До множини $\mathfrak{M}_0$ належать також функції $\ln^{-r}(t + a)$ при довільних додатних r і a.

Через $\mathfrak{M}_\infty^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M} \ : \ \mu(\psi; t) \uparrow \infty \ \big\}.$$

З цієї множини виділяють такі підмножини:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \ \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty \ \big\},$$

де

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+),$$

$$\mathfrak{M}_\infty^c = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \quad \alpha(\psi; t) \downarrow 0, \ 0 < K_1 < \psi(t)/|\psi'(t)| < K_2\big\}$$

і

$$\mathfrak{M}''_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+ \ : \quad \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0 \ \big\}.$$

Природними представниками множин $\mathfrak{M}'_\infty$ та $\mathfrak{M}_\infty^c$ є функції $\exp(-\lambda t^s)$, $\lambda > 0$, при $s \in (0, 1)$ та $s = 1$ відповідно. До множини $\mathfrak{M}''_\infty$ належать функції $\exp(-\lambda(t + a)^r)$ при $\lambda > 0$, $r > 1$ і $a \ge ((r-1)/(r\lambda))^{1/r} - 1$.

[1] K, K_1, $K_2, \ldots$ – деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

2.8.2. **Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень та поперечників q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$.** Порядкові оцінки найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$ містяться в такому твердженні.

Теорема 2.15 ([15, 61, 62]). *Нехай $0 < p, q < \infty$, система чисел $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ задовольняє рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а ψ_1 – деяка додатна функція.*

1) *Якщо функція ψ_1^p належить множині B, а при $0 < p < q$, крім цього, при всіх t, більших деякого числа t_0, є опуклою та задовольняє умову*

$$t|\psi_1'(t)|/\psi_1(t) \ge K_0 > \beta, \tag{2.58}$$

де $\psi_1'(t) := \psi_1'(t+)$, $\beta = d(1/p - 1/q)$, то

$$e_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.^2$$

2) *Якщо функція $\psi_1^p \in \mathfrak{M}'_\infty$, то*

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)(\eta(\psi_1, n) - n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

3) *Якщо функція ψ_1^p належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$ або $\mathfrak{M}''_\infty$, то*

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1), \quad n \to \infty.$$

Наведемо порядкові оцінки поперечників $\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p$ та $\mathcal{D}^\perp_n(\psi\, U^q_\varphi)_p$ при $0 < p < q < \infty$.

Теорема 2.16 ([15, 62]). *Нехай $0 < p < q < \infty$, система чисел*

$$\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$$

при всіх $k \in \mathbb{N}$ задовольняє рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ – спадна перестановка послідовності чисел $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$, а ψ_1 – деяка додатна функція.

1) *Якщо функція ψ_1^p належить множині B, при всіх t, більших деякого числа t_0, є опуклою та задовольняє умову* (2.58) *з*

$$\beta = d(1/p - 1/q),$$

то

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \mathcal{D}^\perp_n(\psi\, U^q_\varphi)_p \asymp \psi_1(n+1)\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

[2] Для додатних послідовностей $a(n)$ та $b(n)$ вираз "$a(n) \asymp b(n)$" означає, що існують такі сталі $K_1, K_2 > 0$, що при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $a(n) \le K_2 b(n)$ і $a(n) \ge K_1 b(n)$.

2) *Якщо функція* $\psi_1^p \in \mathfrak{M}'_\infty$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \psi_1(n+1)(\eta(\psi_1,n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

3) *Якщо функція* ψ_1^p *належить множині* $\mathfrak{M}^c_\infty$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \psi_1(n+1).$$

Порівнюючи порядкові оцінки для величин $e_n(\psi U_\varphi^q)_p$ та $\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p$ бачимо, що у випадку, коли $0 < q \le p$, а послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ така, що при всіх натуральних k виконується рівність $\widetilde{\psi}_k = \psi_1(k)$, де функція ψ_1 задовольняє одну з умов 1) чи 2) теореми 2.15, мають місце рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n(\psi U_\varphi^q)_p}{\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_n(\psi U_\varphi^q)_p}{\mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p} = 0.$$

Якщо ж $0 < p < q$ і ψ_1 задовольняє одну з умов 1) чи 2), або ж якщо $0 < p,\ q < \infty$ і ψ_1 належить до однієї з множин $\mathfrak{M}^c_\infty$ чи $\mathfrak{M}''_\infty$, то

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_p \asymp \mathcal{D}_n^\perp(\psi\, U_\varphi^q)_p.$$

2.9. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями.**

2.9.1. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < q \le p$.** Нехай Γ_n – множина всіх наборів γ_n з n різних натуральних чисел. В такому випадку величину $e_n(f)_p$, означена рівністю (2.49), можна записати у вигляді

$$e_n(f)_p = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_p.$$

Поряд з $e_n(f)_p$ можна розглядати та величини

$$e_n(f;\Gamma'_n)_p = \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} E_{\gamma_n}(f)_p, \tag{2.59}$$

де Γ'_n – деяка підмножина з Γ_n. У зв'язку з цим величину $e_n(f)_p$ зручно назвати абсолютним найкращим n-членним наближенням, а величину $e_n(f;\Gamma'_n)_p$ – найкращим n-членним наближенням з обмеженнями, маючи на увазі, що тут термін «обмеження» стосується вибору підмножини Γ'_n.

В ролі Γ'_n розглянемо дві підмножини $\Gamma_n^{(1)}$ та $\Gamma_n^{(2)}$. Через $\Gamma_n^{(1)}$ позначають множину наборів

$$\gamma_n^{(1)} = \{j\,n+1,\ j\,n+2, \ldots (j+1)n\},\ j = 0,1,\ldots;$$

а через $\Gamma_n^{(2)}$ – множину наборів

$$\gamma_n^{(2)} = \{j+1,\ j+2, \ldots j+n\},\ j = 0,1,\ldots.$$

Зрозуміло, що завжди $\Gamma_n^{(1)} \subset \Gamma_n^{(2)} \subset \Gamma_n$ та

$$e_n(f)_p \le e_n(f;\Gamma_n^{(2)})_p \le e_n(f;\Gamma_n^{(1)})_p. \tag{2.60}$$

Тому якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}_\varphi^p$ і

$$e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{'})_p = \sup_{f\in\mathfrak{N}} e_n(f;\Gamma_n^{'})_p\,, \tag{2.61}$$

то мають місце нерівності

$$e_n(\mathfrak{N})_p \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(2)})_p \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(1)})_p. \tag{2.62}$$

Як і раніше, в ролі множин $\mathfrak{N}$ вибираємо множини $\psi\, U_\varphi^q$, які задаються рівністю (2.16) при $p = q$.

Теорема 2.17 ([52, 55, 58]). *Нехай $0 < q \le p$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система комплексних чисел, для яких послідовність $|\psi_k|$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно прямує до нуля. Тоді при довільному $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q;\Gamma^{(1)})_p = e_n(\psi\, U_\varphi^q;\Gamma^{(2)})_p = \frac{(s^*-1)^{1/p}}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{s^*} |\,\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\Big)^{1/q}},$$

де s^* – деяке натуральне число, для якого

$$\sup_{s>1} \frac{(s-1)^{1/p}}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{s} |\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\Big)^{1/q}} = \frac{(s^*-1)^{1/p}}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{s^*} |\psi_{(k-1)n+1}|^{-q}\Big)^{1/q}}.$$

Таке число s^* завжди існує.

2.9.2. **Найкращі n-членні наближення з обмеженнями q-еліпсоїдів в просторах $\mathcal{S}_\varphi^p$ при $0 < p < q$.** У випадку, коли $0 < p < q$ точні значення величин $e_n(\psi\, U_\varphi^q;\Gamma^{(1)})_p$ містяться в такому твердженні.

Теорема 2.18 ([52, 55]). *Нехай $0 < p < q$ і $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ – система таких комплексних чисел, що виконуються умови (2.15) та (2.36) і послідовність $\{|\psi_k|\}_{k=1}^\infty$ не зростаючи прямує до нуля. Тоді при довільному $n \in \mathbb{N}$*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^q;\Gamma_n^{(1)})_p = \left((s^*-1)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{s^*} \widetilde{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*n+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}},$$

де

$$\widetilde{\psi}_k = \Big(\sum_{i=(k-1)n+1}^{k\,n} |\psi_i|^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Число s вибране з умови

$$\widetilde{\psi}_{s^*}^{-q} \le \frac{1}{s^*-1}\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q} < \widetilde{\psi}_{s^*+1}^{-q}.$$

Таке число s завжди існує і єдине.

Для величин $e_n(\psi U_\varphi^q;\Gamma_n^{(2)})_p$ при $0<p<q$, взагалі кажучи, має місце нерівність

$$e_n(\psi U_\varphi^q;\Gamma_n^{(2)})_p \le \left((s^*-1)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*n+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Більш детально з цим випадком і зокрема, з умовами, за яких в останньому співвідношенні має місце рівність, можна ознайомитись у роботі [55].

3. Наближення в просторах $\mathcal{S}^p$.

3.1. **Основні означення.** Нехай, як і в п. 2.2, $L=L(\mathbb{T}^d)$, $d\ge 1$, – множина всіх 2π-періодичних за кожною зі змінних функцій

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\cdots,x_d),$$

сумовних на кубі періодів $\mathbb{T}^d$ і (2.5) – ряд Фур'є функції $f\in L$ за системою (2.7). Еквівалентні відносно міри Лебега функції ототожнюються.

Нехай, далі, $\mathcal{S}^p$ – простір, породжений множиною L, системою (2.7) і деяким числом $p\in(0,\infty)$, зі скалярним добутком (2.8) і (квазі-)нормою $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{\mathcal{S}^p}$, визначеною згідно з (2.1):

$$\|f\|_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{f}(\mathbf{k})|^p\Big)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Нехай тепер $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – довільна система комплексних чисел – кратна послідовність. Якщо для функції $f\in L$ з рядом Фур'є (2.5) ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\psi(\mathbf{k})\widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}. \tag{3.2}$$

є рядом Фур'є деякої функції F з L, то F називають ψ-інтегралом функції f і позначають $F=\mathcal{J}^\psi(f)$. При цьому функцію f називають ψ-похідною функції F і позначають $f=D^\psi(F)=F^\psi$. Множину ψ-інтегралів всіх функцій $f\in L$ позначають через L^ψ. Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з L, то через $L^\psi\mathfrak{N}$ позначають множину ψ-інтегралів всіх функцій з $\mathfrak{N}$. Зрозуміло, що коли $f \in L^{\psi}$, коефіцієнти Фур'є функцій f и f^{ψ} пов'язані співвідношеннями

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k})\widehat{f}^{\psi}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.3}$$

В ролі $\mathfrak{N}$ можна обрати одиничну кулю в U^p в просторі $\mathcal{S}^p$:

$$U^p = \{f \in \mathcal{S}^p : \quad \|f\|_p \le 1\}. \tag{3.4}$$

В такому випадку покладаємо $L^{\psi}_p := L^{\psi}_p(\mathbb{T}^d) = L^{\psi}U^p$. Система ψ, як і вище, підпорядкована умові

$$\lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} \psi(\mathbf{k}) = 0. \tag{3.5}$$

Зазначимо, що коли $f \in L^{\psi}\mathcal{S}^p$ і $|\psi(\mathbf{k})| \le K$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, то $f \in \mathcal{S}^p$. Тому за умови (3.5) має місце вкладення $L^{\psi}_p \subset \mathcal{S}^p$.

Означимо характеристичні послідовності $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ і $\delta(\psi)$ аналогічно до того як це зроблено у підрозділі 2.3 Через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ позначимо множину значень величин $|\psi(\mathbf{k})|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, впорядковану за спаданням. Розглянемо також послідовності $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ та $\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$g_n = g_n(\psi) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\psi(\mathbf{k})| \ge \varepsilon_n\}, \qquad \delta_n = \delta_n^{\psi} = |g_n|$$

– кількість елементів $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, що належать множині g_n.

З огляду на умову (3.5), в даному випадку послідовності $\varepsilon(\psi)$ та $g(\psi)$ означаються рівностями (2.17) з врахуванням того, що $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Як і раніше, вважаємо, що $g_0 = g_0(\psi)$ – порожня множина і $\delta_0 := \delta_0(\psi) = 0$.

Зазначимо, що крім природної умови (3.5) від системи ψ жодних інших істотних обмежень не вимагатиметься. Тому ці системи ψ, а з ними і їх характеристичні послідовності $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ та $\delta(\psi)$ в загальному випадку можуть бути різноманітними та достатньо складними.

В багатовимірному випадку, напевно, найбільш простими і природними є системи ψ, у яких $\psi(\mathbf{k})$ зображуються добутками

$$\psi(\mathbf{k}) = \psi(k_1, \ldots, k_d) = \prod_{j=1}^{d} \psi_j(k_j), \quad k_j \in \mathbb{Z}^1, \quad j = \overline{1, d}, \tag{3.6}$$

значень одновимірних послідовностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^{\infty}$. Якщо при цьому $\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}$, $j = \overline{1, d}$, то множини $g_n(\psi)$ будуть симетричними відносно усіх координатних площин і, як неважно переконатися,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_+} 2^{d-q(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^{d} |\psi_j(k_j)| \cos\Big(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}\Big),$$

де $q(\mathbf{k})$ – кількість координат вектора $\mathbf{k}$, які дорівнюють нулю, а числа β_{k_j} означаються рівностями

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2}=\frac{\mathrm{Re}\ \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|},\quad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2}=\frac{\mathrm{Im}\ \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В такому випадку множина L^{ψ} ψ-інтегралів дійсних функцій φ з $L(\mathbb{T}^d)$ складається з дійсних функцій f, і якщо при цьому ряд в (3.2) є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\mathcal{D}_\psi(t)$, то достатньою умовою включення $f\in L^{\psi}\mathfrak{N}$ є можливість зображення функції f у вигляді згортки

$$f(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(x-t)\mathcal{D}_\psi(t)\mathrm{d}t,$$

де $\varphi\in\mathfrak{N}$ і майже скрізь $\varphi(\mathbf{x})=f^{\psi}(\mathbf{x})$. Це, зокрема, означає, що множини $L^{\psi}\mathfrak{N}$ містять класи функцій, які зображуються у вигляді згорток з фіксованими сумовними ядрами.

3.2. **Застосування отриманих результатів до задач наближення періодичних функцій багатьох змінних.** Наведемо застосування результатів попередніх підрозділів до розв'язання задач теорії наближення функцій багатьох змінних в просторах $\mathcal{S}^p$.

3.2.1. **Найкращі наближення, найкращі n-членні наближення та базисні поперечники класів L^{ψ}_q в просторах $\mathcal{S}^p$.** Нехай f – довільна функція з простору $\mathcal{S}^p$, n – будь-яке натуральне число і γ_n – довільний набір з n векторів $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$. Розглянемо тригонометричні поліноми

$$P_{\gamma_n}=\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}c_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}\quad\text{та}\quad S_{\gamma_n}(f)=\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)},\tag{3.7}$$

де $c_{\mathbf{k}}$ – будь-які комплексні числа, а $\widehat{f}(\mathbf{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f, а також величини

$$E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}=\inf_{c_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}}\|f-P_{\gamma_n}\|_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}=\|f-S_{\gamma_n}(f)\|_{\mathcal{S}^p}.\tag{3.8}$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $\mathcal{S}^p$, то покладаємо

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\sup_{f\in\mathfrak{N}}E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}$$

а також

$$\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\inf_{\gamma_n}E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}\quad\text{і}\quad \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}=\inf_{\gamma_n}\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}.$$

Через $e_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p}$ позначаємо найкраще n-членне тригонометричне наближення множини $\mathfrak{N}$ в просторі $\mathcal{S}^p$, тобто, величину

$$e_n(\mathfrak{N})_{\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{\mathcal{S}^p}.$$

В ролі множини $\mathfrak{N}$ розглядаємо множину L^ψ_q ψ-інтегралів всіх функцій з одиничної кулі простору $\mathcal{S}^q$, $0 < p, q < \infty$, за умов, що гарантують вкладення $L^\psi_q \subset \mathcal{S}^p$.

За таких позначень мають місце такі твердження – наслідки відповідних теорем підрозділів 3-6.

Твердження 3.1 ([53, Гл. 11], [52])**.** *Нехай* $0 < q \le p$, *і* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *і*

$$\psi(\mathbf{k}) \ne 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.9}$$

Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ *і для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральных чисел справджуються рівності*

$$E_{\gamma_n}(L^\psi_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(L^\psi_q)_{\mathcal{S}^p} = \widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1),$$

де $\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(1)$ *– перший член послідовності* $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty$, *яка є спадною перестановкою системи чисел* $\{|\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k})|\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$,

$$\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{k} \in \gamma_n, \\ \psi(\mathbf{k}), & \mathbf{k} \overline{\in} \gamma_n, \end{cases}$$

при всіх $n \in \mathbb{N}$ *виконуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(L^\psi_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^\perp_n(L^\psi_q)_{\mathcal{S}^p} = \widetilde{\psi}_{n+1},$$

$$e^p_n(L^\psi_q)_{\mathcal{S}^p} = \sup_{s>n}(s-n)(\sum_{k=1}^{s} \bar{\psi}_k^{-q})^{-\frac{p}{q}} = (s^*-n)(\sum_{k=1}^{s^*} \bar{\psi}_k^{-q})^{-\frac{p}{q}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ *– спадна перестановка системи чисел* $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, *і* s^* *– деяке натуральне число.*

Твердження 3.2 ([53, Гл. 11], [52])**.** *Нехай* $0 < p < q$, *і* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *– система чисел, яка задовольняє умови* (3.5) *та*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\psi(\mathbf{k})|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty. \tag{3.10}$$

Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і для довільного набору γ_n із n різних натуральных чисел справджуються рівності

$$E_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{\psi}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

де система чисел $\widetilde{\psi}_{\gamma_n} = \{\widetilde{\psi}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $\{|\psi_{\gamma_n}(\mathbf{k})|\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$; при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\mathcal{D}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

$$e_n^p(L^{\psi}_q)_{\mathcal{S}^p} = \left((s^*-n)^{\frac{q}{q-p}}\Big(\sum_{k=1}^{s^*}\widetilde{\psi}_k^{-q}\Big)^{-\frac{p}{q-p}} + \sum_{k=s^*+1}^{\infty}\widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – спадна перестановка системи чисел $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ і s^* – деяке натуральне число.

3.2.2. **Наближення поліномами, що побудовані за областями $g_n(\psi)$, в просторах $\mathcal{S}^p$.** Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам (3.5) та (3.9), і функція f належить множині $L^{\psi}\mathcal{S}^p$. Розглянемо випадок, апроксимуючі поліноми будуються по наборах γ_n, які визначаються через елементи $g_n(\psi)$ характеристичної послідовності $g(\psi)$ системи ψ. Тоді поліноми (3.7) набуватимуть вигляду $P_{g_n(\psi)} = \sum_{\mathbf{k}\in g_n(\psi)} c_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}$ і

$$S_n(f)_{\psi} = S_{g_n(\psi)}(f) = \sum_{\mathbf{k}\in g_n(\psi)}\widehat{f}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\cdot)}, \tag{3.11}$$

$S_0(f)_{\psi} := 0$, а величини (3.8) –

$$E_n(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \inf_{a_{\mathbf{k}}\in\mathbb{C}}\Big\|f - P_{g_n(\psi)}\Big\|_{\mathcal{S}^p} \quad \text{і} \quad \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \|f - S_{n-1}(f)_{\psi}\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Якщо $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $L^{\psi}\mathcal{S}^p$, то покладаємо

$$E_n(\mathfrak{N})_{\psi,\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} \quad \text{і} \quad \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\psi,\mathcal{S}^p} = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\psi,\mathcal{S}^p}.$$

Твердження 3.3 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $0 < q \le p$ і $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9). *Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$E_n(L^{\psi}_q)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_q)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \varepsilon_n,$$

де ε_n – члени характеристичної послідовності системи $\varepsilon(\psi)$.

Твердження 3.4 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $0 < p < q$ *і* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *– система чисел, яка задовольняє умови* (3.5) *та* (3.10). *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$E_n(L_q^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \mathcal{E}_n(L_q^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \Bigg(\sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \widetilde{\psi}_k^{\frac{pq}{q-p}}\Bigg)^{\frac{q-p}{pq}},$$

в яких $\widetilde{\psi} = \{\widetilde{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ *– спадна перестановка системи чисел* $|\psi_{\mathbf{k}}|$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, *а* δ_n *– члени характеристичної послідовності* $\delta(\psi)$.

Аналоги теорем 2.3 та 2.4 у просторах $\mathcal{S}^p$ формулюються в такий спосіб.

Твердження 3.5 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $f \in L_p^\psi$, $p > 0$ *і*

$$\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}}$$

– система чисел, яка задовольняє умову (3.5). *Тоді ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p}$$

збігається, і при кожному $n \in \mathbb{N}$ *має місце рівність*

$$E_n^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^\psi)_{\psi,\mathcal{S}^p},$$

де ε_k *– елементи характеристичної послідовності* $\varepsilon(\psi)$.

Твердження 3.6 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L^\psi$, $p > 0$, *система* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}}$ *задовольняє умову* (3.5) *і*

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} = 0.$$

Тоді для того, щоб виконувалося включення $f \in L_p^\psi$ *необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})E_k^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p}.$$

Якщо цей ряд збігається, то при довільному $n \in \mathbb{N}$, *справджується рівність*

$$E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p}E_n^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f)_{\psi,\mathcal{S}^p},$$

де ε_k *– елементи характеристичної послідовності* $\varepsilon(\psi)$.

3.2.3. **Поперечники за Колмогоровим класів L^{ψ}_{p}.** Нехай $\mathcal{G}_n$ – множина всіх n-вимірних підпросторів G_n в $\mathcal{S}^p$, $n\in\mathbb{N}$, і

$$d_n(L^{\psi}_{p})_{\mathcal{S}^p}=\inf_{G_n\in\mathcal{G}_n}\sup_{f\in L^{\psi}_{p}}\inf_{u\in G_n}\|f-u\|_{\mathcal{S}^p},\quad d_0(L^{\psi}_{p})_{\mathcal{S}^p}:=\sup_{f\in L^{\psi}_{p}}\|f\|_{\mathcal{S}^p},$$

– поперечники за Колмогоровим класів L^{ψ}_{p} в просторі $\mathcal{S}^p$.

Твердження 3.7 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $p\in[1,\infty)$ і $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9)*. Тоді при довільних $n\in\mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_{p})_{\mathcal{S}^p}=d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_{p})_{\mathcal{S}^p}=\ldots$$
$$=d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_{p})_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{p})_{\psi,\mathcal{S}^p}=\varepsilon_n,$$

де ε_n та δ_n – члени характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$ та $\delta(\psi)$, відповідно.

3.2.4. **Деякі наслідки для просторів $L_p(\mathbb{T}^d)$.** Нехай $L_p=L_p(\mathbb{T}^d)$, $p\in[1,\infty)$, – простір функцій $f\in L$ зі скінченною нормою (1.4). Зв'язок між просторами L_p та $\mathcal{S}^p$ встановлює відома теорема Гаусдорфа-Юнга (див., наприклад, [19]), з якої випливає, що при $p\in(1,2]$ і $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ мають місце формули

$$L_p\subset\mathcal{S}^{p'}\quad\text{і}\quad\|f\|_{\mathcal{S}^{p'}}\le\|f\|_{L_p},$$
$$\mathcal{S}^p\subset L_{p'}\quad\text{і}\quad\|f\|_{L_{p'}}\le\|f\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Зокрема, при $p=p'=2$ виконуються рівності

$$L_2=\mathcal{S}^2\quad\text{і}\quad\|\cdot\|_{L_2}=\|\cdot\|_{\mathcal{S}^2}.\tag{3.12}$$

Отже, теореми, доведені для просторів $\mathcal{S}^p$, містять певну інформацію і для просторів L_p, яка є найбільш повною внаслідок (3.12), у випадку, коли $p=2$.

У останньому випадку, з теорем 3.3 та 3.7 отримуємо наслідок

Наслідок 3.8 ([53, Гл. 11], [52]). *Нехай $\psi=\{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9)*. Тоді для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справджуються рівності*

$$\begin{aligned}d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_{2})_{L_2}=d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_{2})_{L_2}=\ldots=d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_{2})_{L_2}=\\=E_n(L^{\psi}_{2})_{\psi,L_2}=\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{2})_{\psi,L_2}=\varepsilon_n,\end{aligned}\tag{3.13}$$

де ε_n та δ_n – члени характеристичних послідовностей $\varepsilon(\psi)$ та $\delta(\psi)$, відповідно.

Рівності (3.13) в одновимірному випадку ($d=1$) для класів Соболєва W_2^r (при $\psi(k)=k^{-r}$, $r\in\mathbb{N}$) отримав у 1936 році А. М. Колмогоров [9], який започаткував новий напрям в теорії наближень, пов'язаний з дослідженням поперечників різних функціональних класів.

Як випливає з (3.13), у просторі L_2 поперечники множин L_2^ψ реалізують суми Фур'є (3.11).

Зазначимо, що відомі класи диференційовних функцій Соболєва отримуються з $L^\psi U_{L_p}$, якщо $\psi(\mathbf{k})$ має вигляд (3.6) з

$$\psi_j(k_j)=\begin{cases}1, & k_j=0,\\ (ik_j)^{-r_j}, & k_j\neq 0,\end{cases}\quad j=\overline{1,d},\ r_j\in\mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Нехай $d=2$, а послідовності $\psi_1(k_1)$ та $\psi_2(k_2)$ означені рівностями (3.14) за умови $r_1=r_2=r>0$. У цьому випадку класи $L^\psi U_{L_p}$ з точки зору знаходження поперечників вперше розглядалися К. І. Бабенком в [26, 27], який цьому випадку фактично отримав співвідношення (3.13).

В цій ситуації характеристична послідовність $\varepsilon(\psi)$ складається з елементів $\varepsilon_n=n^{-r}$, $n\in\mathbb{N}$, множини $g_n(\psi)$ векторів $\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$, які задовольняють умову

$$k_1'k_2'\leq n,$$

де

$$k_j'=\begin{cases}1, & k_j=0,\\ |k_j|, & k_j\neq 0,\ j=1,2.\end{cases}$$

Такі множини вперше з'явились у згаданих роботах К. І. Бабенка [26, 27] і зараз їх заведено називати гіперболічними хрестами.

3.3. Класи $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ та їх апроксимативні характеристики.

3.3.1. Означення класів $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$.

Позначимо через l_p^d, $0<p\leq\infty$, простір всіх послідовностей $\mathbf{x}=\{x_k\}_{k=1}^d\in\mathbb{R}^d$ зі стандартною l_p-нормою (квазінормою)

$$|\mathbf{x}|_p:=\|\mathbf{x}\|_{l_p^d}=\begin{cases}(\sum_{k=1}^d|x_k|^p)^{1/p}, & 0<p<\infty,\\ \sup_{1\leq k\leq d}|x_k|, & p=\infty.\end{cases}$$

Розглянемо наступні функціональні класи:

$$\mathcal{F}^\psi_{q,r}=\mathcal{F}^\psi_{q,r}(\mathbb{T}^d):=\Big\{f\in L(\mathbb{T}^d):\ \|\{\widehat{f}(\mathbf{k})/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)}\leq 1\Big\},$$

де $\psi=\psi(t)$, $t\geq 1$, – деяка фіксована додатна спадна функція, така, що $\psi(0):=\psi(1)$ і $0<q,r\leq\infty$.

Зазначимо, що коли $\psi(t) = t^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$ і $q = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty} =: \mathcal{F}^{s}_{q,\infty}$ є множинами функцій, у яких частинні похідні порядку s мають абсолютно збіжні ряди Фур'є. Якщо ж $q = 2$, то класи $\mathcal{F}^{s}_{2,\infty}$ збігаються з класами Соболєва W^s_2. Апроксимативні характеристики класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ для різних $r \in (0,\infty]$ і різноманітних функцій ψ досліджувались в роботах [5, 10, 15, 20, 48, 80—82] та інших. Отримані для цих класів результати знаходять своє застосування до дослідження поведінки апроксимативних характеристик функціональних класів у просторах Лебега $L_p(\mathbb{T}^d)$.

3.3.2. **Порядкові оцінки найкращих n-членних тригонометричних наближень в просторах S^p.** Класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ збігаються з множинами $L^{\psi^*}_q$ у випадку, коли система $\psi^* = \{\psi^*(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ задовольняє рівності $\psi^*(\mathbf{k}) = \psi(|\mathbf{k}|_r)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Тому для них справджуються наведені вище твердження 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 та 3.7. З огляду на можливі застосування результатів до задач наближення у просторах Лебега $L_p(\mathbb{T}^d)$ також є корисними твердження цього підрозділу, у яких, зокрема, встановлено точні порядкові оцінки апроксимативних величин класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$. Для їх формулювання та доведення використовувалися згадані вище твердження, а також наведена у підрозділі 2.8.1 класифікація Степанця опуклих функцій.

Нехай $\psi = \psi(t)$, $t \ge 1$, – фіксована додатна спадна до нуля функція. Тоді спадну перестановку $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, системи чисел $\psi(|\mathbf{k}|_r)$ можна визначити рівністю

$$\widetilde{\psi}(l) = \psi(m), \quad l \in (V_{m-1}, V_m], \quad m = 1, 2, \ldots,$$

де $V_m := |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}|$ – кількість елементів множини

$$\widetilde{\Delta}^d_{m,r} := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_r \le m, \quad m = 0, 1, \ldots\}.$$

Далі, при формулюванні результатів важливо, щоб при всіх достатньо великих m (більших, ніж деяке додатне число k_0) виконувалось співвідношення

$$M_r(m - c_1)^d < V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,r}| \le M_r(m + c_2)^d, \tag{3.15}$$

де M_r, c_1 та c_2 – деякі додатні сталі.

Зрозуміло, що у випадку, коли $r = \infty$, співвідношення (3.15) виконується і $M_\infty = \mathrm{vol}\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_\infty \le 1\} = 2^d$, якщо ж $r = 1$, то $M_1 = \mathrm{vol}\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|_1 \le 1\} = 2^d/d!$.

Твердження 3.9 ([15, 81]). *Нехай $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$, виконуються умова* (3.15)*, і функція ψ^p належить множині B, а при*

$0 < p < q$, *крім того, при всіх* t, *більших ніж деяке число* t_0, *є опуклою та задовольняє умову* (2.58) *з* $\beta = d(1/p - 1/q)$. *Тоді*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}})\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.16}$$

Враховуючи вигляд оцінки (3.16) і те, що умова (3.15) виконується, зокрема, при $r = 1$ та $r = \infty$, з даного твердження легко отримати такий наслідок.

Наслідок 3.10. *Нехай* $d \ge 1$, $0 < p, q < \infty$ *і функція* ψ *задовольняє умови твердження 3.9. Тоді для довільного* $r \in [1, \infty]$ *має місце оцінка* (3.16).

Дійсно, для довільних чисел $r \in [1, \infty]$, $0 < q < \infty$ і будь-якої додатної спадної функції ψ мають місце вкладення

$$\mathcal{F}^{\psi}_{q,1} \subset \mathcal{F}^{\psi}_{q,r} \subset \mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}.$$

Тому якщо виконуються умови наслідку 3.10, то для $r \in [1, \infty]$

$$\frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \ll e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,1})_{\mathcal{S}^p} \le e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \le e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty})_{\mathcal{S}^p} \ll \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}.$$

Твердження 3.11 ([82]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$, *виконуються умова* (3.15), *а функція* ψ^p *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$ *або* $\mathfrak{M}^c_\infty$. *Тоді*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi^p, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \tag{3.17}$$

де

$$m_n = (n/M_r)^{\frac{1}{d}}.$$

У випадку, коли $d = 1$, класи $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r} =: \mathcal{F}^{\psi}_{q}$ не залежать від r, умова (3.15) виконується з константою $M_r = 2$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}'_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0 < p$, $q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2)(n\alpha(\psi, n/2))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.17'}$$

Твердження 3.12 ([80]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p < q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, *виконується умова* (3.15) *та умова*

$$k^{(d-1)/\alpha}\psi(k+1)/\psi(k) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3.18}$$

з $\alpha = p$. *Тоді при всіх* $n \in [V_{m-1}, V_m)$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p}}\, n^{\frac{1-d}{dq}}. \tag{3.19}$$

Якщо виконуються умови твердження 3.12 і $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то

$$\psi(m) n^{\frac{1-d}{qd}} \ll e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \ll \psi(m) n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Твердження 3.13 ([80]). *Нехай $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < q \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, виконуються умови* (3.15) *та* (3.18) *при $\alpha = q$. Тоді*

1) *при $n = V_{m-1}$ має місце оцінка*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m);$$

2) *для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$ таких, що*

$$q(V_m - V_{m-1}) \geq p\,(V_m - n); \tag{3.20}$$

справджується оцінка (3.19);

3) *для всіх $n \in (V_{m-1}, V_m)$, що не задовольняють умову* (3.20),

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(n - V_{m-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли $r = \infty$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ маємо $V_m = |\widetilde{\Delta}^d_{m,\infty}| = (2m+1)^d$. Тому якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то число m визначається рівністю $m = [(n+1)^{1/d}/2]$.

У випадку $d = 1$, якщо $n \in [V_{m-1}, V_m)$, то $n = V_{m-1} = V_m - 1$, а $m = [(n+1)/2]$. Тому для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$ та будь-яких $0 < p,\, q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]).$$

Як бачимо, при $d > 1$ у випадку $0 < q \leq p < \infty$ отримані оцінки істотно залежать від розміщення числа n на півсегменті $[V_{m-1}, V_m)$. Розглядаючи у твердженнях 3.12 та 3.13 деякі конкретні підпослідовності $n(m)$ отримаємо такий наслідок.

Наслідок 3.14. *Нехай $d \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in [V_{m-1}, V_m)$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty$, виконуються умови* (3.15) *та* (3.18) *при $\alpha = \min\{p, q\}$. Тоді*

1) *якщо $n = n(m) = V_m - c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, то для довільних $0 < p,\, q < \infty$*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m) n^{\frac{1-d}{dq}};$$

2) *якщо $n = n(m) = V_{m-1} + c_m$, $c_m \in \mathbb{N}$, $c_m \leq K$, $m = 1, 2, \ldots$, то для довільних $0 < p < q < \infty$*

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)\, n^{\frac{d-1}{d}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}; \tag{3.21}$$

а для довільних $0 < q < p < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m);$$

3) *якщо ж підпослідовність* $n = n(m)$ *така, що*

$$(V_m - V_{m-1}) \asymp (V_m - n), \tag{3.22}$$

то для довільних $0 < p < q < \infty$ *справджується оцінка* (3.21), *а при* $0 < q \le p < \infty$ *оцінка* (3.21) *справджується за умови, що* $n = n(m) \ne V_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$.

3.3.3. **Порядкові оцінки величин** $\mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}$ **та** $\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p}$ містяться в наступних твердженнях.

Твердження 3.15 ([80]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ *і* $m \in \mathbb{N}$. *Тоді*

1) *якщо* $0 < q \le p < \infty$, *то для довільної додатної спадної до нуля функції* $\psi(t)$, $t \ge 1$, *при кожному* $n \in [V_{m-1}, V_m)$ *справджується рівність*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \psi(m);$$

2) *якщо ж* $0 < p < q < \infty$, *виконується умова* (3.15), $\psi^p \in \mathfrak{M}_{\infty}''$ *і при* $\alpha = \frac{pq}{q-p}$ *має місце* (3.18), *то при кожному* $n \in [V_{m-1}, V_m)$ *справджується оцінка*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m)(V_m - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \tag{3.23}$$

У випадку $d = 1$ при $0 < q \le p < \infty$ з твердження 3.15 випливає, що для довільної додатної спадної до нуля функції $\psi(t)$, $t \ge 1$,

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_q^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \psi([(n+1)/2]),$$

а при $0 < p < q < \infty$ для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}_{\infty}''$

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_q^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_q^{\psi})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi([(n+1)/2]).$$

Твердження 3.16 ([15, 81]). *Нехай* $d \ge 1$, $0 < r \le \infty$, $0 < p, q < \infty$ *і виконується умова* (3.15). *Тоді*

1) *якщо* $0 < q \le p < \infty$, *то для довільної функції* $\psi \in B$ *має місце оцінка*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n) \asymp \psi(n^{1/d}),$$

2) *якщо ж* $0 < p < q < \infty$, *а функція* ψ^p *належить* B *і при всіх* t, *більших ніж деяке число* t_0, *є опуклою та задовольняє умову* (2.58) *при* $\beta = d(1/p - 1/q)$, *то*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}_n^{\perp}(\mathcal{F}_{q,r}^{\psi})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(n^{\frac{1}{d}}) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Твердження 3.17 ([82]). *Нехай $d \geq 1$, $0 < r \leq \infty$, $0 < p, q < \infty$, виконуються умова* (3.15)*, а функція ψ^p належить $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$. Тоді для довільних $0 < q \leq p < \infty$ має місце співвідношення*

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n),$$

а для довільних $0 < p < q < \infty$ – співвідношення

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \psi(m_n)(n\alpha(\psi, m_n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

На підставі твердження 3.17 та означення множини $\mathfrak{M}^c_\infty$ бачимо, що для довільної функції $\psi^p \in \mathfrak{M}^c_\infty$ та будь-яких $0 < p$, $q < \infty$ справджується оцінка

$$\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \psi(n/2).$$

Співставляючи оцінки величин

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}, \qquad \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}, \qquad \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p},$$

робимо висновок, що у випадку, коли $d = 1$ і $\psi^p \in \mathfrak{M}''_\infty \cup \mathfrak{M}^c_\infty$, для будь-яких чисел $0 < p$, $q < \infty$

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} \asymp \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)} = \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q})_{\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)}.$$

Якщо $d > 1$, то аналогічне співвідношення

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \asymp \mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = \mathcal{D}^{\perp}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} \tag{3.24}$$

справджується коли $0 < p < q$ і функція ψ задовольняє умови тверджень 3.9 та 3.11. Якщо ж $d > 1$, а $0 < q \leq p$, то для довільної функції, яка задовольняє умови тверджень 3.9 та 3.11

$$e_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p} = o\Big(\mathcal{D}_n(\mathcal{F}^{\psi}_{q,r})_{\mathcal{S}^p}\Big), \ n \to \infty. \tag{3.25}$$

Коли ψ^p належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$ і $d > 1$, то при $0 < q < p$ співвідношення (3.24) виконується (за відповідних додаткових умов тверджень 3.12 та 3.13) для підпослідовності вигляду

$$n = n(m) = V_{m-1} + c_m, \qquad c_m \in \mathbb{N}, \ c_m \leq K, \ m = 1, 2, \ldots,$$

а при $0 < p = q$ – для підпослідовності

$$n = n(m) = V_{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

У випадку, коли $0 < p < q$ співвідношення (3.24) виконується для підпослідовностей $n = n(m)$, що задовольняють умову (3.22); якщо ж дана підпослідовність $n = n(m)$ така, що

$$V_m - n = o(V_m - V_{m-1}), \ m \to \infty,$$

то справджується співвідношення (3.25).

3.4. **Прямі та обернені теореми наближення в просторах $\mathcal{S}^p$.**

3.4.1. **Попередні позначення.** Нехай f – довільна функція з простору $L = L(\mathbb{T}^d)$ з рядом Фур'є вигляду (2.5). Для будь-якого

$$\nu \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

покладемо

$$H_\nu(f)(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1 = \nu} \widehat{f}(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \ |\mathbf{k}|_1 := \sum_{j=1}^{d} |k_j|.$$

Тоді ряд Фур'є функції f можна записати у вигляді

$$S[f](\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(f)(\mathbf{x}). \tag{3.26}$$

Розглянемо множину $\mathcal{T}_n^\triangle$, $n \in \mathbb{N}_0$, всіх поліномів вигляду

$$\tau_n(\mathbf{x}) := \sum_{|\mathbf{k}|_1 \le n} a_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{x},\mathbf{k})},$$

де $a_{\mathbf{k}}$ – довільні комплексні числа.

Величину

$$E_n^\triangle(f)_{\mathcal{S}^p} = \inf_{\tau_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}^\triangle} \|f - \tau_{n-1}\|_{\mathcal{S}^p}$$

називають *найкращим наближенням* функції $f \in \mathcal{S}^p$ порядку $n-1$ поліномами, побудованим за трикутними областями.

Модулем гладкості функції $f \in \mathcal{S}^p$ порядку $\alpha > 0$ називають величину

$$\omega_\alpha^\triangle(f, t)_{\mathcal{S}^p} := \sup_{|h|\le t} \|\Delta_h^\alpha f\|_{\mathcal{S}^p} = \sup_{|h|\le t} \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(\cdot - jh) \Big\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Функції $\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$ володіють усіма звичайними властивостями класичних модулів гладкості. Зокрема, має місце таке твердження.

Лема 3.18. *Нехай $f, g \in \mathcal{S}^p$, $\alpha \ge \beta > 0$, $t, t_1, t_2 \ge 0$. Тоді*

(i) $\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$, $t \in (0,\infty)$, *є невід'ємною неперервною зростаючою функцією і* $\lim\limits_{t\to 0+} \omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} = 0$;

(ii) $\omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} \le 2^{\{\alpha-\beta\}} \omega_\beta^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p}$, *де* $\{\alpha\} = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : k \ge \alpha\}$;

(iii) $\omega_\alpha^\triangle(f+g,t)_{\mathcal{S}^p} \le \omega_\alpha^\triangle(f,t)_{\mathcal{S}^p} + \omega_\alpha^\triangle(g,t)_{\mathcal{S}^p}$;

(iv) $\omega_1^\triangle(f,t_1+t_2)_{\mathcal{S}^p} \le \omega_1^\triangle(f,t_1)_{\mathcal{S}^p} + \omega_1^\triangle(f,t_2)_{\mathcal{S}^p}$;

(v) $\omega_\alpha(f,t)_{\mathcal{S}^p} \le 2^{\{\alpha\}} \|f\|_{\mathcal{S}^p}$.

3.4.2. **Прямі теореми наближення.**

Твердження 3.19 ([2]). *Нехай* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ *– система чисел, підпорядкована умовам* (3.5) *та* (3.9). *Якщо для функції*

$$f \in \mathcal{S}^p,\ 1 \le p < \infty,$$

існує похідна f^ψ *з простору* $\mathcal{S}^p$, *то при* $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p} \le \varepsilon_n E_n^{\triangle}(f^\psi)_{\mathcal{S}^p}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \max_{|\mathbf{k}|_1 \ge n} |\psi(\mathbf{k})|.$$

Сформулюємо тепер прямі теореми наближення в просторах $\mathcal{S}^p$ в термінах найкращих наближень та модулів гладкості функцій. Зокрема, наведемо нерівності типу Джексона вигляду

$$E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p} \le K(\tau)\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}, \ \ \tau > 0,$$

і розглянемо питання про точні константи в цих нерівностях при фіксованих n, α, τ та p. Для цього розглянемо величину

$$K_{n,\alpha,p}(\tau) = \sup\left\{\frac{E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}}{\omega_\alpha^{\triangle}(f, \frac{\tau}{n})_{\mathcal{S}^p}} : f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y},\ f \not\equiv \mathrm{const}\right\},$$

де $Y := \mathbb{Z}_+^d \cup \mathbb{Z}_-^d$, $\mathbb{Z}_+^d$ та $\mathbb{Z}_-^d$ – підмножини векторів $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, всі координати яких відповідно невід'мні або від'ємні,

$$L_{1,Y} := L_{1,Y}(\mathbb{T}^d) = \{f \in L(\mathbb{T}^d) :\ \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0\ \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus Y\}.$$

Через $M(\tau)$, $\tau > 0$, позначимо множину обмежених неспадних функцій μ, відмінних від константи на $[0, \tau]$.

Теорема 3.20 ([2, 60]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \le p < \infty$. *Тоді для довільних* $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *та* $\alpha > 0$ *справджується нерівність*

$$E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p} \le C_{n,\alpha,p}(\tau)\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\tau}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p}, \tag{3.27}$$

де

$$C_{n,\alpha,p}(\tau) := \left(\inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{2^{\frac{\alpha p}{2}} I_n(\tau, \mu)}\right)^{1/p}, \tag{3.28}$$

і

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,\alpha,p}(\tau, \mu) = \inf_{\nu \in \mathbb{N}: \nu \ge n} \int_0^\tau \Big(1 - \cos\frac{\nu}{n}t\Big)^{\frac{\alpha p}{2}} d\mu(t).$$

Крім цього, існує функція $\mu_* \in M(\tau)$, *яка реалізує точну нижню межу в* (3.28). *Нерівність* (3.27) *є непокращуваною на множині всіх функцій*

$f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, *в тому сенсі, що для довільних* $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *маємо*

$$C_{n,\alpha,p}(\tau) = K_{n,\alpha,p}(\tau).$$

Зазначимо, що у просторах $L_2(\mathbb{T}^1)$ при $\alpha = 1$ дане твердження доведено О. Г. Бабенком [24]. У просторах $\mathcal{S}^p$ цей та інші результати цього підрозділу отримано для функцій однієї та багатьох змінної відповідно в роботах [2, 60].

Зазначимо також, що для $f \in \mathcal{S}^p$ умова $\widehat{f}(\mathbf{k}) = 0$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_{\pm}$ в теоремі 3.20 взагалі кажучи є необхідною. Наприклад, розглянемо функцію

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}^*, \mathbf{x})},$$

де $k^* = (l, -l, 0, \ldots)$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при всіх $n < 2l$ маємо $E_n(f^*)_{\mathcal{S}^p} = 1$, однак $\omega(f^*, t) \equiv 0$.

Наслідок 3.21 ([2, 60]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \le p < \infty$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\alpha > 0$ *справджується нерівність*

$$E^{\triangle}_n(f)^p_{\mathcal{S}^p} \le \frac{1}{2^{\frac{\alpha p}{2}} I_n(\frac{\alpha p}{2})} \int\limits_0^{\pi} \omega^{\triangle}_{\alpha}\Big(f, \frac{t}{n}\Big)^p_{\mathcal{S}^p} \sin t \mathrm{d}t, \tag{3.29}$$

де

$$I_n(\lambda) := \inf_{\nu \in \mathbb{N}: \nu \ge n} \int\limits_0^{\pi} \Big(1 - \cos \frac{\nu}{n} t\Big)^{\lambda} \sin t \mathrm{d}t, \quad \lambda > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Якщо при цьому $\frac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$I_n\Big(\frac{\alpha p}{2}\Big) = \frac{2^{\frac{\alpha p}{2}+1}}{\frac{\alpha p}{2} + 1},$$

і нерівність (3.29) *не може бути покращена для* $n \in \mathbb{N}$ *в тому сенсі, що для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *існує функція* $f^* \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$ *така, що*

$$E^{\triangle}_n(f^*)^p_{\mathcal{S}^p} = \frac{\frac{\alpha p}{2} + 1}{2^{\alpha p + 1}} \int\limits_0^{\pi} \omega^{\triangle}_{\alpha}\Big(f^*, \frac{t}{n}\Big)^p_{\mathcal{S}^p} \sin t \mathrm{d}t.$$

В наступному твердженні містяться оцінки зверху при $\tau = \pi$ для констант $K_{n,\alpha,p}(\tau)$, які не залежать від n і є не покращуваними у низці важливих випадків.

Наслідок 3.22 ([2, 60]). *Для довільних* $1 \le p < \infty$, $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються нерівності*

$$K^p_{n,\alpha,p}(\pi) \le \frac{1}{2^{\frac{\alpha p}{2}-1} I_n(\frac{\alpha p}{2})} \le \frac{\frac{\alpha p}{2}+1}{2^{\alpha p} + 2^{\frac{\alpha p}{2}-1}(\frac{\alpha p}{2}+1)\sigma(\frac{\alpha p}{2})},$$

де величина $I_n(\lambda)$ *означена рівністю* (3.30) *і*

$$\sigma(\lambda) := -\sum_{m=[\frac{\lambda}{2}]+1}^{\infty} \binom{\lambda}{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \left(\frac{1-(-1)^{[\lambda]}}{2} \binom{2m}{m} \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m}{j} \frac{2}{2(m-j)^2 - 1} \right), \quad \lambda > 0.$$

Якщо при цьому $\frac{\alpha p}{2} \in \mathbb{N}$, *то величина* $\sigma(\frac{\alpha p}{2}) = 0$ *і*

$$K^p_{n,\alpha,p}(\pi) \le \frac{\frac{\alpha p}{2}+1}{2^{\alpha p}}. \tag{3.31}$$

Наступне твердження встановлює оцінку величин $K_{n,\alpha,p}(\pi)$ рівномірно обмежену відносно усіх параметрів $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ та $1 \le p < \infty$.

Наслідок 3.23 ([2, 60]). *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p \cap L_{1,Y}$, $1 \le p < \infty$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Тоді для довільних* $\alpha > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$

$$E^{\triangle}_n(f)_{\mathcal{S}^p} < \frac{4}{3 \cdot 2^{\alpha/2}} \omega_\alpha \Big(f, \frac{\pi}{n} \Big)_{\mathcal{S}^p}.$$

У просторах $L_2(\mathbb{T}^1)$ при $\alpha = 1$ нерівність (3.29) доведено М. І. Черних ом [75, 76]. Нерівності такого типу, а також суміжні питання, пов'язані з обчисленням значень поперечників класів функцій, що задаються мажорантами їх модулів неперервності, досліджувалися в роботах [1, 23, 25, 31—34, 38, 47, 67, 68, 70] та ін.

3.4.3. **Обернені теореми наближення.** Перед формулюванням оберненої теореми наближення наведемо також нерівність Бернштейна, у якій норма узагальненої похідної тригонометричного полінома оцінюється через норму самого полінома (див., наприклад, [70, Гл. 4]).

Твердження 3.24 ([2, 60]). *Нехай* $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ – *система чисел, які задовольняють умову* (3.9). *Тоді для довільного* $\tau_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, *справджується нерівність*

$$\|\tau^\psi_n\|_{\mathcal{S}^p} \le \frac{1}{\epsilon_n} \|\tau_n\|_{\mathcal{S}^p}, \quad \text{де} \ \ \epsilon_n := \min_{0<|\mathbf{k}|_1 \le n} |\psi(\mathbf{k})|.$$

Наслідок 3.25. *Нехай* $\psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}$, $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, $r \geq 0$. *Тоді для довільного полінома* $\tau_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\|\tau_n^{\psi}\|_{\mathcal{S}^p} = \|\tau_n^{(r)}\|_{\mathcal{S}^p} \leq n^r \|\tau_n\|_{\mathcal{S}^p}.$$

Обернена апроксимаційна теорема в просторі $\mathcal{S}^p$ має такий вигляд.

Теорема 3.26 ([2, 60])**.** *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\alpha > 0$

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}(\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p}) E_\nu^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}. \tag{3.32}$$

Зазначимо, що в (3.32) сталу π^α, взагалі кажучи, зменшити не можна, оскільки для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $f^* \in \mathcal{S}^p$ така, що при всіх n, більших деякого номера n_0 виконується протилежна нерівність

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f^*, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} > \frac{\pi^\alpha - \varepsilon}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}(\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p}) E_\nu^{\triangle}(f^*)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}.$$

Оскільки $\nu^{\alpha p} - (\nu-1)^{\alpha p} \leq \alpha p \nu^{\alpha p - 1}$, то з нерівності (3.32) випливає, що

$$\omega_\alpha^{\triangle}\Big(f, \frac{\pi}{n}\Big)_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{\pi^\alpha (\alpha p)^{1/p}}{n^\alpha}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha p - 1} E_\nu^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}^p\bigg)^{1/p}. \tag{3.33}$$

Звідси, зокрема, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.27 ([2, 60])**.** *Нехай* $f \in \mathcal{S}^p$, $1 \leq p < \infty$, *послідовність найкращих наближень* $E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p}$ *функції* f *задовольняє співвідношення* $E_n^{\triangle}(f)_{\mathcal{S}^p} = O(n^{-\beta})$ *при деякому* $\beta > 0$. *Тоді для всіх* $\alpha > 0$,

$$\omega_\alpha^{\triangle}(f, t)_{\mathcal{S}^p} = \begin{cases} O(t^\beta) & \textit{при } \beta < \alpha, \\ O(t^\alpha |\ln t|^{1/p}) & \textit{при } \beta = \alpha, \\ O(t^\alpha) & \textit{при } \beta > \alpha. \end{cases}$$

У просторах $\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^1)$ 2π-періодичних функцій однієї змінної нерівності (3.33) були отримані в [65] та [60]. У просторах $\mathcal{S}^p(\mathbb{T}^d)$ функцій багатьох змінних ці нерівності отримано в [2]. У просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ нерівності типу (3.33) доведено М. П. Тіманом (див. [71, 72] та [70, Гл. 2]).

Прямі та обернені теореми наближення функцій, заданих на сфері, у просторах $S^{p,q}(\sigma^d)$, $d \geq 3$, отримано в роботах [40, 41].

3.4.4. **Конструктивні характеристики класів функцій, визначених їх модулями гладкості.** Нехай ω – довільна мажоранта, визначена на відрізку $[0,1]$. Для фіксованого $\alpha>0$ покладемо

$$\mathcal{S}^pH^{\omega}_{\alpha}=\Big\{f\in\mathcal{S}^p:\quad \omega^{\triangle}_{\alpha}(f;\delta)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}(\omega(\delta)),\quad \delta\to 0+\Big\}. \qquad (3.34)$$

Далі, розглядаємо мажоранти $\omega(t)$, $t\in[0,1]$, які задовольняють наступні умови:

1) $\omega(\delta)$ неперервна на $[0,1]$;
2) $\omega(\delta)\uparrow$;
3) $\omega(\delta)\neq 0$ для $\delta\in(0,1]$;
4) $\omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$,

а також відомі умови Барі $(\mathcal{B}_{\alpha})$ та $(\mathcal{B})$ (див., наприклад, [28]):

$$(\mathcal{B}_{\alpha}),\ \alpha>0:\quad \sum_{v=1}^{n}v^{\alpha-1}\omega\Big(\frac{1}{v}\Big)=\mathcal{O}\Big[n^{\alpha}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big],$$

$$(\mathcal{B}):\quad \sum_{v=n+1}^{\infty}\frac{1}{v}\,\omega\Big(\frac{1}{v}\Big)=\mathcal{O}\Big[\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Теорема 3.28 ([2, 60])**.** *Нехай $\alpha>0$, ω – довільна функція, яка задовольняє умови 1)-4) та умову $(\mathcal{B}_{\alpha})$. Для того, щоб функція*

$$f\in\mathcal{S}^p\cap L_{1,Y}$$

належала множині $\mathcal{S}^pH^{\omega}_{\alpha}\cap L_{1,Y}$, необхідно і достатньо, щоб

$$E^{\triangle}_n(f)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}\Big[\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Функція t^r, $r\le\alpha$, задовольняє умови 1)-4) та $(\mathcal{B}_{\alpha})$. Тому позначаючи через $\mathcal{S}^pH^{r}_{\alpha}$ множину $\mathcal{S}^pH^{\omega}_{\alpha}$ при $\omega(t)=t^r$, $0<r\le\alpha$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 3.29. *Нехай $\alpha>0$, $0<r\le\alpha$. Для того, щоб функція $f\in\mathcal{S}^p\cap L_{1,Y}$ належала множині*

$$\mathcal{S}^pH^{r}_{\alpha}\cap L_{1,Y},$$

необхідно та достатньо, щоб

$$E^{\triangle}_n(f)_{\mathcal{S}^p}=\mathcal{O}(n^{-r}).$$

3.5. **Наближення лінійними методами функцій з просторів $\mathcal{S}^p$.** У низці робіт (див., наприклад, [13, 35, 37, 46, 64, 78, 79, 84] та ін.) досліджувалися різні проблеми, пов'язані з апроксимацією лінійними методами підсумовування рядів Фур'є у просторах $\mathcal{S}^p_{\varphi}$ та просторах $\mathcal{S}^p$

зокрема. Так, в роботах [79, 84] розглядались загальні питанні теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є (регулярність, насичення) у просторах $\mathcal{S}^p_\varphi$. В [64, 78] встановлено точні значення найкращих n-членних наближень такими методами q-еліпсоїдів у цих просторах. В роботі [35] отримано нерівності типу Джексона наближення сумами Зигмунда в просторах $\mathcal{S}^p$. Наведемо результати робіт [13, 46], у яких встановлено прямі та обернені теореми наближення функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона, і в термінах похибок наближення цими середніми в просторі $\mathcal{S}^p$ отримано конструктивну характеристику класів функцій, узагальнені похідні яких належать множинам $\mathcal{S}^p H_\omega$.

3.5.1. **Позначення та постановка задачі.** Нехай f – довільна функція з простору $L(\mathbb{T}^d)$. Виходячи зі співвідношення (3.26), розглянемо лінійні оператори $S_n^\triangle$, $\sigma_n^\triangle$, $P_{\varrho,s}^\triangle$ і $A_{\varrho,r}^\triangle$, визначені на $L(\mathbb{T}^d)$ відповідно рівностями

$$S_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n = 0, 1, \ldots,$$

$$\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) H_\nu(f)(\mathbf{x}),\ n \in \mathbb{N},$$

$$P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{\nu^s} H_\nu(f)(\mathbf{x}), \quad s > 0,\ \varrho \in [0, 1),$$

і

$$A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x}) = S_{r-1}^\triangle(f)(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r} H_\nu(f)(\mathbf{x}),$$

де при $r \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in [0, 1)$

$$\lambda_{\nu,r} := \lambda_{\nu,r}(\varrho) := \sum_{k=0}^{r-1} \binom{\nu}{k} (1-\varrho)^k \varrho^{\nu-k} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(1-\varrho)^k}{k!}\ \frac{d^k}{d\varrho^k}\varrho^\nu.$$

Вирази $S_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$, $\sigma_n^\triangle(f)(\mathbf{x})$ і $P_{\varrho,s}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називають відповідно трикутною частинною сумою ряду Фур'є, трикутною сумою Фейєра і узагальненою трикутною сумою Абеля-Пуассона функції f. Вираз $A_{\varrho,r}^\triangle(f)(\mathbf{x})$ називають трикутною сумою Тейлора-Абеля-Пуассона функції f.

Оператори $P_{\varrho,s}^\triangle$ в загальному випадку, як агрегати наближення функцій функцій однієї змінної, мабуть, вперше розглядалися в [29, 30]. Оператори $A_{\varrho,r}^\triangle$ введені в [45], де в їх термінах дано конструктивну характеристику класів Гарді–Ліпшиця $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини. Апроксимацій властивості цих операторів вивчалися в роботах [4, 12, 13, 42, 45, 46] та ін. В частинному випадку, коли $r = s = 1$ оператори $A_{\varrho,1}^\triangle$ та $P_{\varrho,1}^\triangle$

збігаються між собою і породжують класичний метод Абеля-Пуассона підсумовування кратних рядів Фур'є по трикутних областях.

Нагадаємо, що інтегралом Пуассона функції $f \in L(\mathbb{T}^d)$ називається функція $P(f)$, визначена в $[0,1)^d \times \mathbb{R}^d$ рівністю

$$f(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x} + bt) P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

де

$$P(\boldsymbol{\varrho}, \mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{d} \frac{1 - \varrho_j^2}{1 - 2\varrho_j \cos t_j + \varrho_j^2}, \ \ \varrho_j \in [0,1),$$

— кратне ядро Пуассона і

$$\mathbf{x} + bt := (x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d).$$

Надалі домовимось під виразом $f(\varrho, \mathbf{x})$ розуміти інтеграл Пуассона, в якому $\boldsymbol{\varrho}$ – це вектор з однаковими координатами, тобто $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho, \ldots, \varrho)$.

В даному підрозділі вивчаються оператори $A^{\triangle}_{\varrho,r}$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}$ як лінійних методів наближення функцій в просторах $\mathcal{S}^p$. При цьому основна увага звертається на зв'язок апроксимативних властивостей сум $A^{\triangle}_{\varrho,r}(f)$ і $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ із диференціальними властивостями функції f, а саме, властивостями похідних, означених в такий спосіб.

Нехай $\psi = \{\psi(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ – довільна система комплексних чисел і

$$\mathcal{Z}(\psi) := \mathcal{Z}^d(\psi) := \Big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \psi(\mathbf{k}) = 0 \Big\}.$$

Надалі вважаємо, що множина $\mathcal{Z}(\psi)$ має скінченну кількість елементів.

Якщо для даної функції $f \in L(\mathbb{T}^d)$ знайдеться функція $g \in L(\mathbb{T}^d)$ така, що

$$S[f](\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{Z}(\psi)} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \psi(\mathbf{k}) \widehat{g}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}, \tag{3.35}$$

то кажуть, що у функції f існує ψ-похідна g, для якої використовують позначення $g = f^{\psi}$. При цьому, якщо $\mathcal{Z}(\psi) = \varnothing$, то перша сума в (3.35) покладається рівною нулеві.

Зрозуміло, що ψ-похідна для функцій з простору $\mathcal{S}^p$ є єдиною з точністю до суми

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{Z}(\psi)} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k},x)},$$

де $a_{\mathbf{k}}$ – будь-які числа. Дане означення ψ-похідної пристосоване для потреб досліджень, викладених у цьому підрозділі, і за суттю не відрізняється від поняття ψ-похідної О. І. Степанця, наведеного в підрозділі 3.1

Далі, розглядаються ψ-похідні функцій з $L(\mathbb{T}^d)$ в таких двох випадках:

1) $\psi(\mathbf{k}) = \nu^{-r}$ при $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, $r \geq 0$ і
2) $\psi(\mathbf{k}) = 0$ при $|\mathbf{k}|_1 = 0, 1, \ldots, r-1$ та $\psi(\mathbf{k}) = (\nu - r)!/\nu!$ при $|\mathbf{k}|_1 = \nu$, $\nu \geq r$, $r \in \mathbb{N}$.

При цьому у першому випадку для ψ-похідної функції f використовуємо позначення $f^{(r)}$, у другому – $f^{[r]}$, а при $r = 0$ покладаємо $f^{(0)} = f^{[0]} = f$. Відмітимо також, що $f^{(1)} = f^{[1]}$.

3.5.2. **Прямі та обернені теореми наближення лінійними методами.** Перейдемо до формулювання основних результатів підрозділу 3.5. При цьому будемо використовувати позначення, наведені в підрозділах 3.4.2 та 3.4.4.

Твердження 3.30 ([13, 46]). *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* $(\mathcal{B})$. *Тоді наступні твердження рівносильні:*

i) $\left\| S_n^{\triangle}\left(f^{[1]}\right)\right\|_{\mathcal{S}^p} = O(n\omega(\frac{1}{n}))$, $\quad n \to \infty$;

ii) $\|f - \sigma_n^{\triangle}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O(\omega(\frac{1}{n}))$, $\quad n \to \infty$.

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii), *то*

iii) $f \in \mathcal{S}^p H_\omega^1$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

Зазначимо, що імплікація ii)$\Rightarrow$iii) є твердженням типу прямих та обернених теорем для методу Фейєра [3].

В наступній теоремі даються прямі та обернені теореми наближення функцій оператором $A_{\varrho,r}^{\triangle}$ в просторі $\mathcal{S}^p$ в термінах мажорант ω.

Теорема 3.31 ([13, 46]). *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* $(\mathcal{B})$. *Наступні твердження рівносильні:*

i) $\|f - A_{\varrho,r}^{\triangle}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O((1-\varrho)^{r-1}\omega(1-\varrho))$, $\quad \varrho \to 1-$;

ii) $\left\|P(f^{[r]})(\varrho, \cdot)\right\|_{\mathcal{S}^p} = O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho})$, $\quad \varrho \to 1-$;

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii), *то*

iii) $f^{[r-1]} \in \mathcal{S}^p H_\omega^1$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

Зазначимо, що імплікація ii)⇒iii) є твердженням типу теорем Гарді-Літтлвуда [8].

Наведемо також апроксимаційні властивості сум $P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)$ в просторі $\mathcal{S}^p$. Застосування теореми 3.31 до функції

$$f = g^{(s-1)}$$

зі значенням параметра $r = 1$ і врахування співвідношення

$$\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{\mathcal{S}^p} \sim \|f^{(s-1)} - P^{\triangle}_{\varrho,1}(f^{(s-1)})\|_{\mathcal{S}^p}, \quad \varrho \to 1-, \tag{3.36}$$

дозволяє записати таке твердження.

Теорема 3.32 ([13, 46]). *Нехай* $1 \le p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $f \in L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$ *і* ω *– довільна функція, яка задовольняє умови* 1)-4) *та* $(\mathfrak{B})$. *Наступні твердження рівносильні:*

i) $\|f - P^{\triangle}_{\varrho,s}(f)\|_{\mathcal{S}^p} = O(\omega(1-\varrho)), \quad \varrho \to 1-;$

ii) $\left\|P(f^{(s)})(\varrho,\cdot)\right\|_{\mathcal{S}^p} = O(\frac{\omega(1-\varrho)}{1-\varrho}), \quad \varrho \to 1-;$

Крім цього, якщо виконується одне із тверджень i) *чи* ii)*, то*

iii) $f^{(s-1)} \in \mathcal{S}^p H_\omega$.

Якщо ж $f \in L_{1,Y}(\mathbb{T}^d)$, *то всі твердження* i)-iii) *є еквівалентними.*

При $d = 1$ простір $L_{1,Y}(\mathbb{T}^1)$ збігається з простором $L_1(\mathbb{T}^1)$ і тому твердження i)–iii) в твердженні 3.30 і теоремах 3.31 та 3.32 є рівносильними без жодних застережень.

Зазначимо, що в [4] результати твердження 3.30, а також теорем 3.31 та 3.32, зокрема, розповсюджено на простори типу Орлича $\mathcal{S}_M$.

Література

[1] Abdullayev F. G., Chaichenko S. O., and Shidlich A. L. "Direct and inverse approximation theorems of functions in the Musielak-Orlicz type spaces". *Math. Inequal. Appl.* 24.2 (2021), pp. 323–336.

[2] Abdullayev F. G., Özkartepe P., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. "Exact constants in direct and inverse approximation theorems for functions of several variables in the spaces S^p". *Filomat* 33.5 (2019), pp. 1471–1484.

[3] Butzer P. L. and Nessel R. J. *Fourier Analysis and Approximation. Volume 1: One-Dimentional Theory.* Birkhäuser Basel, 1971, pp. xvi+553.

[4] Chaichenko S. O., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. "Approximation of functions by linear summation methods in the Orlicz-type spaces". *Укр. матем. вісник* 17.2 (2020), pp. 152–170.

[5] DeVore R. A. and Temlyakov V. N. "Nonlinear Approximation by Trigonometric Sums". *J. Fourier Anal. Appl.* 2.1 (1995), pp. 29–48.

[6] Dũng D., Temlyakov V., and Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation.* Springer International Publishing, 2018, pp. xi+218.

[7] Gao F. "Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator". *J. Approx. Theory.* 162.4 (2010), pp. 646–652.

[8] Hardy G. H. and Littlewood J. E. "Some properties of fractional integrals. II". *Math. Zeitschr.* 34.1 (1932), pp. 403–439.

[9] Kolmogoroff A. "Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse". *Ann. of Math., Second series* 37.1 (1936), p. 107.

[10] Li R. S. and Liu Y. P. "Best m-term one-sided trigonometric approximation of some function classes defined by a kind of multipliers". *Acta Mathematica Sinica, English Series* 26.5 (2009), pp. 975–984.

[11] Pinkus A. *n-Widths in Approximation Theory.* Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. x+291.

[12] Prestin J., Savchuk V. V., and Shidlich A. L. "Approximation theorems for multivariate Taylor-Abel-Poisson means". *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Matematica* 64.3 (2019), pp. 313–329.

[13] Savchuk V. V. and Shidlich A. L. "Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p". *Acta Sci. Math. (Szeged)* 80.3-4 (2014), pp. 477–489.

[14] Schmidt E. "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I". *Math. Annalen.* 63 (1906), pp. 433–476.

[15] Shidlich A. L. «Nonlinear approximation of the classes $F^{\psi}_{q,r}$ of functions of several variables in the integral metrics». *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 13. 3. Ін-т математики НАН України, 2016, с. 256—274.

[16] Shidlich A. L. and Chaichenko S. O. "Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces". *Numer. Funct. Anal. Optim.* 36.10 (2015), pp. 1339–1352.

[17] Stepanets A. I. *Methods of approximation theory.* De Gruyter, 2005, pp. xviii+919.

[18] Stepanets A. I. and Shidlich A. L. "Best approximations of integrals by integrals of finite rank". *J. Approx. Theory* 162.2 (2010), pp. 323–348.

[19] Temlyakov V. N. *Approximation of periodic functions.* Computational mathematics and analysis series. Commack, New York: Nova Science Publ., 1993, p. 419.

[20] Temlyakov V. N. "Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation". *Constr. Approx.* 14.4 (1998), pp. 569–587.

[21] Temlyakov V. N. *Greedy approximation.* Cambridge University Press, 2011, p. 418.

[22] Temlyakov V. N. *Sparse approximation with bases.* Springer Basel, 2015, p. 261.

[23] Абдуллаєв Ф. Г., Сердюк А. С. та Шидліч А. Л. «Поперечники функціональних класів, визначених мажорантами узагальнених модулів гладкості в просторах S^p». *Укр. мат. журн.* 73.6 (2021), с. 723—737.

[24] Бабенко А. Г. «О точной константе в неравенстве Джексона в L^2». *Матем. заметки* 39.5 (1986), с. 651—664.

[25] Бабенко В. Ф. и Конарева С. В. «Неравенства типа Джексона-Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства». *Укр. мат. журн.* 70.9 (2018), с. 1155—1165.

[26] Бабенко К. И. «О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами». *ДАН СССР* 132.5 (1960), с. 982—985.

[27] Бабенко К. И. «О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами». *ДАН СССР* 132.2 (1960), с. 247—250.

[28] Бари Н. К. и Стечкин С. Б. «Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций». *Тр. московского мат. об-ва.* 5 (1956), с. 483—522.

[29] Бугров Я. С. «Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка». *Mathematica (Cluj)* 5.28 (1963), с. 5—25.

[30] Бугров Я. С. «Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов». *Труды Мат. ин-та АН СССР* 117 (1972), с. 47—61.

[31] Вакарчук С. Б. «Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p, $1 \le p < \infty$». *Укр. мат. журн.* 56.5 (2004), с. 595—605.

[32] Вакарчук С. Б. «Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2. I». *Укр. мат. журн.* 68.6 (2016), с. 723—745.

[33] Вакарчук С. Б. и Щитов А. Н. «О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространствах S^p, $1 \le p < \infty$». *Укр. мат. журн.* 58.3 (2006), с. 303—316.

[34] Войцехівський В. Р. «Нерівності типу Джексона в просторі S^p». *Укр. мат. журн.* 55.9 (2003), с. 1167—1177.

[35] Войцехівський В. Р. «Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зігмунда». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України,* 35:33-46. Ін-т математики НАН України, 2002.

[36] Войцехівський В. Р. «Поперечники деяких класів простору S^p». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини,* 46:17-26. Ін-т математики НАН України, 2003.

[37] Войцехівський В. Р. та Сердюк А. С. «Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p методом Вороного». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України,* 2(2):43-53. Ін-т математики НАН України, 2005.

[38] Горбачук М. Л., Грушка Я. І. та Торба С. М. «Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца». *Укр. мат. журн.* 57.5 (2005), с. 633—643.

[39] Кахан Ж.-П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.* Москва: Мир, 1976, с. 204.

[40] Ласурия Р. А. «Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{p,q}(\sigma^{m-1})$». *Матем. заметки* 98.4 (2015), с. 530—543.

[41] Ласурия Р. А. «Прямые и обратные теоремы приближения функций, заданных на сфере, в пространстве $S^{p,q}(\sigma^m)$». *Укр. мат. журн.* 59.7 (2007), с. 901—911.

[42] Престін Ю., Савчук В. В. та Шидліч А. Л. «Прямі та обернені теореми наближення 2π-періодичних функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона». *Укр. мат. журн.* 69.5 (2017), с. 657—669.

[43] Романюк А. С. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных.* Праці Ін-ту математики НАН України, 40, 2012, с. 352.

[44] Рукасов В. И. «Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой». *Укр. мат. журн.* 55.4 (2003), с. 500—509.

[45] Савчук В. В. «Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора-Абеля-Пуассона». *Укр. мат. журн.* 59.9 (2007), с. 1253—1260.

[46] Савчук В. В. та Шидліч А. Л. «Наближення функцій багатьох змінних лінійними методами в просторах S^p». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* Т. 4. 1. Ін-т математики НАН України, 2007, с. 302—317.

[47] Сердюк А. С. «Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 46. Ін-т математики НАН України, 2003, с. 229—248.

[48] Сердюк А. С. та Степанюк Т. А. «Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій». *Допов. НАН України* 2 (2015), с. 32—37.

[49] Степанец А. И. *Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ.* Киев: Ин-т математики НАН Украины, (Препр./ НАН Украины, Ин-т математики; 2001.2), 2001, с. 85.

[50] Степанец А. И. «Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 53.3 (2001), с. 392—416.

[51] Степанец А. И. «Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках». *Укр. мат. журн.* 53.8 (2001), с. 1121—1146.

[52] Степанец А. И. «Задачи теории приближений в линейных пространствах». *Укр. мат. журн.* 58.1 (2006), с. 47—92.

[53] Степанец А. И. *Методы теории приближений: В 2 ч.* Праці Ін-ту математики НАН Украини. Математика та її застосування, 40, (II), 2002, с. 468.

[54] Степанец А. И. *Методы теории приближений: В 2 ч.* Праці Ін-ту математики НАН Украини. Математика та її застосування, 40, (I), 2002, с. 427.

[55] Степанец А. И. «Наилучшие n-членные приближения с ограничениями». *Укр. мат. журн.* 57.4 (2005), с. 533—553.

[56] Степанец А. И. «Наилучшие приближения q-эллипсоидов в просторанствах $S^{p,\mu}_\varphi$». *Укр. мат. журн.* 56.10 (2004), с. 1378—1383.

[57] Степанец А. И. «Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах». *Укр. мат. журн.* 55.3 (2003), с. 1392—1423.

[58] Степанец А. И. и Рукасов В. И. «Наилучшие «сплошные» n-членные приближения в пространствах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 55.5 (2003), с. 801—811.

[59] Степанец А. И. и Рукасов В. И. «Пространства S^p с несимметричной метрикой». *Укр. мат. журн.* 55.2 (2003), с. 264—277.

[60] Степанец А. И. и Сердюк А. С. «Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p». *Укр. мат. журн.* 54.1 (2002), с. 106—124.

[61] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. «О порядках наилучших приближений интегралов функций при помощи интегралов ранга σ». *Нелін. колив.* 10.4 (2007), с. 528—559.

[62] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. *Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций.* Киев: Ин-т математики НАН Украины, (Препр. НАН Украины, Ин-т математики; 2007.2), 2007, с. 103.

[63] Степанец А. И. и Шидлич А. Л. «Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций». *Изв. РАН. Сер. матем.* 74.3 (2010), с. 169—224.

[64] Степанець О. І. та Шидліч А. Л. «Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 55.8 (2003), с. 1107—1126.

[65] Стерлин М. Д. «Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений». *Докл. АН СССР* 202.3 (1972), с. 545—547.

[66] Стечкин С. Б. «Об абсолютной сходимости ортогональных рядов». *Докл. АН СССР* 102.1 (1955), с. 37—40.

[67] Тайков Л. В. «Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2». *Мат. заметки* 20.3 (1976), с. 433—438.

[68] Тайков Л. В. «Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2». *Мат. заметки* 25.2 (1979), с. 217—223.

[69] Темляков В. Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной.* Тр. МИАН СССР, 178, 1986, с. 113.

[70] Тиман М. Ф. *Аппроксимация и свойства периодических функций.* Киев: Наук. думка, 2009, с. 376.

[71] Тиман М. Ф. «Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p, $(1 \le p \le \infty)$». *Матем. сб.* 46(88).1 (1958), с. 125—132.

[72] Тиман М. Ф. «Обратные теоремы конструктивной теории функций многих переменных». *Докл. АН СССР* 120.6 (1958), с. 1207—1209.

[73] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г. *Неравенства.* Москва: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 456.

[74] Чайченко С. О. та Шидліч А. Л. «Апроксимативні характеристики модулярних просторів Орлича». *Укр. матем. вісник* 15.2 (2018), с. 194—209.

[75] Черных Н. И. «О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2». *Матем. заметки* 2.5 (1967), с. 513—522.

[76] Черных Н. И. «О неравенстве Джексона в L_2». *Тр. МИАН СССР* 88 (1967), с. 71—74.

[77] Шидліч А. Л. «Апроксимативні характеристики просторів S^p_Φ». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 5. 1. Ін-т математики НАН України, 2008, с. 404—430.

[78] Шидліч А. Л. «Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ». *Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН Украини,* 46:283-306. Т. 46. Ін-т математики НАН України, 2003, с. 283—306.

[79] Шидліч А. Л. «Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 60.6 (2008), с. 815—828.

[80] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки для деяких апроксимаційних характеристик». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 10. 1. Ін-т математики НАН України, 2013, с. 304—337.

[81] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $F^\psi_{q,\infty}$ в просторах $L_p(T^d)$». *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 8. 1. Ін-т математики НАН України, 2011, с. 302—317.

[82] Шидліч А. Л. «Порядкові оцінки функціоналів, в термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $F^\psi_{q,r}$». *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 11. 3. Ін-т математики НАН України, 2014, с. 287—314.

[83] Шидліч А. Л. «Порядкові рівності для деяких функціоналів та їх застосування до оцінок найкращих n-членних наближень та поперечників». *Укр. мат. журн.* 61.10 (2009), с. 1403—1423.

[84] Шидліч А. Л. «Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ». *Укр. мат. журн.* 56.1 (2004), с. 133—138.

[85] Шидліч А. Л. та Чайченко С. О. «Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах l_{p}». *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН Украини.* Т. 11. 2. Ін-т математики НАН України, 2014, с. 399—412.

[86] Шидліч А. Л. та Чайченко С. О. «Деякі екстремальні задачі в просторах Орлича». *Матем. студії* 42.1 (2014), с. 21—32.

А. С. Сердюк

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: sanatolii@ukr.net

ORCID: orcid.org/0000-0003-2659-8920

А. Л. Шидліч

Інститут математики НАН України, м. Київ

Email: shidlich@gmail.com

ORCID: orcid.org/0000-0002-6421-9277