НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О.А. Бойчук, О.О. Покутний

НОРМАЛЬНО-РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ПРОЄКТ
«НАУКОВА КНИГА»

Київ
Наукова думка
2022

УДК 517.9

У монографії встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта як у лінійному, так і нелінійному випадках. Досліджено операторні рівняння, лінеаризована частина яких є нормально-розв'язним оператором, тобто таким, що має замкнену множину значень. Знайдено умови біфуркації та розгалуження розв'язків операторних рівнянь у нескінченновимірних просторах, що узагальнюють метод Ляпунова—Шмідта та Вішика—Люстерніка. Побудовано ітеративні алгоритми знаходження розв'язків нелінійних операторних рівнянь. Результати проілюстровано на прикладах рівнянь математичної фізики та зліченновимірних системах диференціальних рівнянь.

Для науковців, аспірантів, студентів старших курсів, які спеціалізуються у галузі диференціальних рівнянь, математичної фізики та функціонального аналізу.

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор В.П. Журавльов
доктор фізико-математичних наук, професор В.І. Ткаченко

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту математики НАН України (протокол №7 від 03.11.2020 р.)

Видання здійснене на кошти Цільової комплексної програми НАН України «Наукові основи функціонування та забезпечення умов розвитку науково-видавничого комплексу НАН України»

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *О.А. Микитенко*

ISBN 978-966-00-1806-8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

На сьогодні добре відомою є теорія нормально-розв'язних операторних рівнянь. Це рівняння з оператором, в якого множина значень є замкненою. Для таких операторів за умови доповнювальності ядра та множини значень у вихідних просторах існують або узагальнено-обернені (для банахових просторів), або псевдообернені за Муром—Пенроузом оператори (у гільбертових просторах).

У розділі 1 наведено основні значення та твердження з функціонального аналізу, а також теорії топологічних векторних просторів і операторів.

У розділі 2 розвинуто теорію для операторних рівнянь, які не є нормально-розв'язними, тобто так звану теорію сильних узагальнено-обернених та сильних псевдообернених операторів для рівнянь із незамкненою множиною значень (тобто вони не є нормально-розв'язними). Показано, як розширити вихідний простір й оператор на цей простір, щоб розширений оператор був нормально-розв'язним. Такі задачі називають узагальненими нормально-розв'язними. Отримано критерії розв'язності відповідних лінійних операторних рівнянь та побудовано відповідну множину розв'язків. Розроблено конструкцію проєкторів на ядро та коядро вихідного оператора як у сепарабельних, так й у несепарабельних просторах.

Узагальнено метод рядів Неймана для рівнянь із необов'язково стискальним оператором. Отримано нові формули для знаходження псевдообернених за Муром—Пенроузом матриць.

Теорію сильних узагальнено-обернених та псевдообернених за Муром—Пенроузом операторів застосовано в ході дослідження нелінійних операторних рівнянь. Побудовано теорію розгалуження розв'язків нелінійних операторних рівнянь у локально-опуклих просторах, що є розвиненням методу Ляпунова—Шмідта. Запропоновану техніку проілюстровано на прикладі операторного рівняння Ляпунова в просторі Гільберта у критичному (резонансному) випадку.

У розділі 3 попередні результати застосовують до дослідження крайових задач для операторно-диференціального рівняння Хіла у просторі Гільберта. Отримано критерій розв'язності відповідного рівняння та умови біфуркації розв'язків. Розглянуто параметричну крайову задачу з періодичними операторними коефіцієнтами. Введено поняття відносного спектра оператора у банаховому просторі й за його допомогою знайдено необхідні та достатні умови розв'язності даної задачі. Отримані результати узагальнюють дані, одержані М.Г.Крейном, на нерегулярний (резонансний) випадок. Під час досліджень використовують узагальнений метод рядів Неймана. Досліджено нелінійну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі. Визначено необхідні та достатні умови існування розв'язків такої задачі із застосуванням операторного рівняння для породжувальних елементів. У скінченновимірному випадку періодичної крайової задачі операторне рівняння має фізичний зміст — це амплітуди коливань відповідного розв'язку. Відповідне рівняння відоме з літературних джерел як рівняння для породжувальних амплітуд [105, 168, 169]. Знайдено алгоритм побудови таких розв'язків, які при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків породжувальної крайової задачі.

Розділ 4 присвячено питанню існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь у просторах Фреше та Банаха за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння. Досліджено питання існування слабких майже періодичних розв'язків рівнянь у локально-опуклих просторах. Розглянуто приклади запропонованої теорії для диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах і просторах Фреше, зліченних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Отримано критерій розв'язності лінійного диференціального рівняння у банаховому просторі з крайовими умовами на нескінченності. Обґрунтовано метод параметризації для апроксимації обмежених розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі.

У розділі 5 досліджували крайові задачі для рівняння Шредінгера у гільбертовому просторі. Для лінійного нестаціонарного рівняння отримано критерій розв'язності та представлення розв'язків за допомогою побудованого оператора Гріна. За результатами розділу 4 отримано умови існування обмежених на всій осі розв'язків відповідного рівняння. Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійних крайових задач для рівняння Шредінгера, а також зв'язок між ними. Побудовано збіжні ітераційні процедури для знаходження відповідних розв'язків. Результати застосовано в процесі дослідження двоточкової крайової задачі для стаціонарного (з постійним оператором) рівняння Шредінгера. Отримано умови біфуркації розв'язків відповідної лінійної крайової задачі та узагальнення методу Вішика—Люстерніка на відповідний клас задач. Запропоновану техніку дослідження проілюстровано на прикладах абстрактного рівняння Ван дер Поля у просторі Гільберта та абстрактного гіперболічного рівняння. Показано, як можна досліджувати певні хімічні та біологічні задачі, звівши їх до нелінійних автономних крайових задач у гільбертових просторах із необмеженими операторними коефіцієнтами.За умов експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння отримано умови наявності гомоклінічного хаосу. Експоненціальна дихотомія є першим кроком до хаосу.

Зауважимо, що ці умови визначаються операторним рівнянням для породжувальних елементів. У скінченновимірному випадку звичайної періодичної задачі це відображається рівнянням Ляпунова—Пуанкаре для породжувальних амплітуд. У випадку задачі на всій осі для звичайних систем диференціальних рівнянь оператор, що визначає рівняння для породжувальних елементів (сталих) збігається з функцією Мельникова.

Дослідження підтримано грантом Національного фонду досліджень України (проєкт №2020.02.0089).

ВСТУП

Потреби сучасної науки зумовлюють необхідність розвитку теорії крайових задач для операторно-диференціальних рівнянь. Такими задачами моделюють багато природних, фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів [8, 74, 172, 422, 423, 194, 219, 270]. Розробка конструктивних методів аналізу лінійних та нелінійних крайових задач для широкого класу диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних, інтегро-диференціальних систем, систем із запізненням та імпульсом посідає одне з чільних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь.

Задачі про існування періодичних розв'язків таких рівнянь досліджували М. Боголюбов, Ю. Митропольський, А. Самойленко [35], І. Малкін [168], Є. Грєбєніков, Ю. Рябов [105], А. Андронов, А. Вітт, С. Хайкін [8], В. Якубович [292], В. Старжинський. Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і періодичні крайові задачі для них вивчали А. Мишкіс [189], А. Самойленко [190], М. Перестюк [201], [241] А. Халанай, Д. Векслер [267] та інші.

Періодичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь із запізненням досліджували А. Мишкіс, А. Самойленко, Ю. Митропольський, Д. Мартинюк, Дж. Хейл [271]. Класичну теорію крайових задач започатковано ще до появи методів функціонального аналізу. Постановка таких задач у загальному операторному вигляді стала можливою з використанням функціонального аналізу, який почали застосовувати як апарат для дослідження загальних крайових задач для різних класів операторних рівнянь. Ці питання досліджували Й. Мавін [416], С. Швабік [479], М. Тврди, О. Вейвода [484], Д. Векслер [485].

Теорію крайових задач для операторних рівнянь застосували для інтегро-диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом. Розв'язність таких рівнянь вивчав Ю. Ландо [153]. Проєкційно-ітеративні методи побудови розв'язків крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь розроблено А. Лучкою та його учнями [165], а методи з використанням функціонального аналізу — А. Антоневичем, Я. Радино [11].

Наведені крайові задачі здебільшого вивчали у регулярному випадку, тобто коли операторне рівняння $Lz = f$ заданих крайових задач має розв'язки за будь-якої правої частини, тобто до оператора L вихідної задачі є обернений L^{-1}. Такі крайові задачі досліджували у фредгольмовому випадку [3]. Зазначалося, що нефредгольмові крайові задачі ненульового індексу є значно складнішими і потребують окремого дослідження. Загальну теорію таких задач у нетеровому випадку, коли кількість крайових умов m не збігається з порядком n диференціальної системи, розроблено О. Бойчуком, В. Журавльовим, А. Самойленком [38, 326, 327] у відповідних просторах для автономних та неавтономних систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь із зосередженим запізненням, диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Із застосуванням апарату узагальнено-обернених матриць та операторів доведено загальні теореми про розв'язність і подання розв'язків критичних (резонансних, коли порушується єдиність розв'язку) крайових задач для різних класів лінійних і нелінійних рівнянь, а також узагальнено простори, в яких розглядали ці крайові задачі.

Питання розв'язності операторних рівнянь у випадку нетерових крайових задач вивчали Ф. Аткінсон [17], [18], О. Бойчук, В. Журавльов [38], Дж. Іллс [125], С. Нікольський [192]. Теорію крайових задач для диференціальних рівнянь у банахових просторах досліджували Ю. Далецький [108], С. Крейн і М. Крейн [144], А. Самойленко, Ю. Теплінський, Р. Петришин [237], А. Баскаков [24]. Ці та загальніші задачі належать (згідно з класифікацією Крейна [145]) до типу нормально-розв'язних задач, коли породжувальний оператор має замкнену множину значень. Для розв'язання таких типів рівнянь застосовують теорію псевдообернених матриць та узагальнено-обернених операторів, якій присвячено праці Е. Мура [420], Р. Пенроуза [445], М. Нашеда, Г. Вотруби [428], [429], К. Рао [464], А. Албєрта [5], В. Королюка, А. Турбіна [137], С. Кемпбелла [340], Е. Дойча [359], А. Бен-Ізраеля, Т. Гревілля та інших математиків.

Дослідження диференціально-операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах пов'язане з розвитком теорії напівгруп операторів. Фундаментальними є результати, отримані Е. Хілле та Р. Філіпсом [274], К. Іосідою [126], В. Феллером і Т. Като [129], І. Міядером та М. Крейном [143], С. Крейном [144], Дж. Голдстейном [372], А. Пазі [444], А. Ягі [490], К. Енгелем, Р. Нагелем [366]. У цих працях теорію застосовували до дослідження операторно-диференціальних рівнянь із необмеженими операторними коефіцієнтами. Окремої уваги варті праці, в яких досліджували диференціальні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами. Дж. Голдстейн [372], А. Пазі [444], Д. Хенрі [273], А. Баскаков [29] та інші вивчали гладкість розв'язків операторно-диференціальних рівнянь залежно від властивостей операторних коефіцієнтів та неоднорідної частини. Диференціальні рівняння з операторами зсуву розглядали Г. Ліф, С. Канторовіц, А. Баскаков [23], М. Городній [100], А. Чайковський. Апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь із операторними коефіцієнтами, що відповідають різницевим схемам, досліджували в працях П. Соболевського [248], О. Самарського, В. Макарова, І. Гаврилюка.

Одним із важливих питань у якісній теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання про існування обмежених розв'язків. Важливим аспектом теорії крайових задач для такого класу рівнянь є дослідження питань розв'язності задач із умовами на нескінченності. Цей напрям починається з праць А. Пуанкаре та А. М. Ляпунова.

У середині XX ст. теорію операторно-диференціальних рівнянь почали розробляти М. Крейн [142], Х. Массера, Х. Шеффер [176], В. Коппель [353]—[355], Ф. Хартман [269], Р. Саккер, Дж. Селл [474], К. Палмер [436], [438]. Такі задачі досліджували як у скінченновимірному випадку (Я. Курцвейль, А. Самойленко, В. Кулік [185], О. Бойчук, [327]), так і у нескінченновимірному випадку (Б. Левітан, В. Жиков [156], Е. Мухамадієв, В. Слюсарчук [253], А. Баскаков [23]—[29], Д. Хенрі [273], Ю. Далецький [109]. Умови існування та єдиності обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь вивчали В. Кім, Д. Мартинюк, В. Слюсарчук, А. Самойленко, Ю. Теплінський, Ю. Томілов [395], О. Бойчук, І. Гайшун у випадку обмежених операторних коефіцієнтів, а також А. Дороговцев [277], А. Баскаков, М. Городній [100], А. Чайковський [277] у випадку необмежених операторних коефіцієнтів.

Експоненціально-дихотомічні на всій осі системи утворюють клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так і необмежено зростати. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку розглядали О. Перрон [447], А. Майзель [167], В. Коппель [353], Р. Саккер, Дж. Селл [471], Ю. Митропольский, А. Самойленко, В. Кулик [185], а в нескінченновимірних просторах Банаха — М. Крейн, Ю. Далецький [143], Х. Массер, Х. Шеффер [176], Ф. Хартман [269], І. Чуєшов [350], В. Мельников [182]. У працях Р. Саккера, Дж. Селла [471], К. Палмера [436] умову експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи було послаблено зі заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях, а також вперше доведено нетеровість відповідного оператора в процесі розв'язуванні задачі про обмеженя на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у працях О.Бойчука, А.Самойленко [327], де з використанням узагальнено-обернених операторів і псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць досліджували задачу про існування, біфуркацію та розгалуження обмежених на всій осі розв'язків за лінійних та нелінійних збурень. Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами систематично вивчав Д. Хенрі.

У працях Х. Родрігеса, Дж. Філхо [468] доведено аналог альтернативи Фредгольма (за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння). Фредгольмовість оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами досліджували А. Баскаков [22]—[25], Ю. Латушкін, Ю. Томілов [395]. О. Станжицький [258] вивчав експоненціальну дихотомію стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм, а В. Слюсарчук [254] та Е. Мухамадієв — експоненціальну дихотомію розв'язків дискретних систем. Наведені крайові задачі розглядали здебільшого для випадку, коли лінеарізована частина таких операторів є нетеровою або фредгольмовою. Тому дослідження операторно-диференціальних крайових задач, лінеарізована частина яких є нормально-розв'язним оператором або узагальнено нормально-розв'язним оператором є цікавими та актуальними. Саме таким питанням й присвячено цю монографію. Для того щоб розширити сферу застосування до операторних рівнянь, які є не нормально-розв'язними, а узагальненими нормально-розв'язними операторними рівняннями, тобто такими, що мають незамкнену множину значень, побудовано теорію узагальненої розв'язності.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Z}^n$)	—	n-вимірний евклідів простір (з цілочисельними координатами);
J	—	відрізок на дійсній прямій (скінченний або нескінченний);
$BC(J, \mathcal{H})$	—	банахів простір неперервних та обмежених на J вектор-функцій зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$;
$l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbf{B})$	—	банахів простір обмежених послідовностей зі значеннями у просторі Банаха $\mathbf{B}$;
$\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$	—	банахів простір лінійних обмежених операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;
$SGI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$	—	простір лінійних сильно узагальнено-оборотних операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;
$GI(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$	—	простір лінійних узагальнено-оборотних операторів, що діють з простору Банаха $\mathbf{B_1}$ у простір Банаха $\mathbf{B_2}$;
$PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$	—	простір лінійних псевдообернених за Муром—Пенроузом операторів, що діють з простору Гільберта $\mathcal{H}_1$ у простір Гільберта $\mathcal{H}_2$;
$L_2([a;b]; \mathcal{H})$	—	гільбертів простір інтегровних із квадратом на відрізку $[a;b]$ функцій зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$;
l_p	—	банахів простір послідовностей, сумовних з p-степенем;
c	—	банахів простір збіжних послідовностей;
c_0	—	банахів простір збіжних до нуля послідовностей;
m або l_∞	—	банахів простір обмежених послідовностей;
$R(L)$	—	множина значень оператора L;
$N(L)$	—	ядро оператора L;
$(G[\cdot])(t)$	—	узагальнений оператор Гріна;
$\overline{L}^{-}_{X,Y}$	—	сильний (X, Y)-узагальнено-обернений;
$\overline{L}^{+}$	—	сильний псевдообернений до оператора L;
$P_Y(\mathcal{P}_Y)$	—	проєктор (ортопроєктор) на підпростір Y простору Банаха (Гільберта);

$U_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} U^k}{n}$	—	оператор усереднення;
σ_{NS}	—	відносний спектр оператора;
$V \subset H \subset V^*$	—	оснащена трійка просторів Гільберта;
$e_\tau^{A_1,A_2,t}$	—	операторний запізнювальний експоненціал;
$AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$	—	простір майже періодичних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$;
$WAP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$	—	простір слабко майже періодичних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$

РОЗДІЛ 1
УЗАГАЛЬНЕНО-ОБЕРНЕНІ ТА ПСЕВДООБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ

Наведемо головні означення та твердження з функціонального аналізу, теорії топологічних векторних просторів та операторів, які використовуватимемо надалі. Матеріал, поданий у цьому розділі, є довідковим. Теореми викладено без доведень, з посиланнями на джерела, де можна детальніше та глибоко ознайомитися з ними.

1.1. Топологічні та векторні простори

Наступні означення подано в праці [225].

Означення 1.1. *Векторний (лінійний) простір E над полем $\Phi(\Phi = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ дійсних (комплексних) чисел – це множина з операціями додавання та множення на скаляри ($x, y \in E \to x+y \in E$; $x \in E, \lambda \in \Phi \to \lambda x \in E$) з такими властивостями :*

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) $\exists\theta : x + \theta = \theta + x = x$;
4) $\forall x \;\; \exists -x : x + (-x) = \theta$;
5) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
8) $1 \cdot x = x$.

Лінійні операції над елементами простору E розповсюджуються на його підмножини:

для довільних $x \in E$ та $A \subset E$

$$x + A = \{x + y : y \in A\};$$

для довільних $A \subset E$ та $B \subset E$

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\};$$

для довільних $\lambda \in \Phi$ та $A \subset E$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Аналогічно, для довільної множини $\mathcal{A}$ підмножин з E

$$x + \mathcal{A} = \{x + A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Множина $A + A$ взагалі відрізняється від множини $2A$, але завжди має місце включення $2A \subset A + A$.

Підмножину M з E називають *векторним підпростором* простору E, якщо $x + y \in M$ та $\lambda x \in M$ для всіх $x, y \in M$ та $\lambda \in \Phi$ (тобто, якщо $M + M \subset M$ та $\lambda M \subset M$ для всіх $\lambda \in \Phi$).

Означення 1.2. *Підмножину A векторного простору E називають опуклою, якщо $\lambda x + \mu y \in A$ для довільних $x, y \in A$ та всіх $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ таких, що $\lambda + \mu = 1$.*

Означення 1.3. *Підмножину A векторного простору E називають врівноваженою, якщо $\lambda x \in A$ для довільних $x \in A$ та всіх λ таких, що $|\lambda| \leq 1$.*

Означення 1.4. *Підмножину A векторного простору E називають абсолютно-опуклою, якщо вона одночасно є опуклою та врівноваженою.*

Зауважимо, що попереднє означення рівносильне наступній вимозі [225, с.15] : $\lambda x + \mu y \in A$ для всіх $x, y \in A$ та λ, μ таких, що $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Означення 1.5. *Підмножину A векторного простору E називають поглинальною, якщо для кожного $x \in E$ існує таке $\lambda > 0$, що $x \in \mu A$, де μ: $|\mu| \geq \lambda$.*

Топологічний простір — це множина наділена структурою відкритих множин, яка дає можливість розглядати збіжність та неперервність.

Означення 1.6. *Топологічний простір — це множина S з виділенною родиною підмножин $\mathcal{T} \subset 2^S$, які називають відкритими множинами й задовольняють такі властивості : (i) $\mathcal{T}$ є замкненою відносно скінченних перетинів, тобто якщо $A, B \in \mathcal{T}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{T}$;*

(ii) $\mathcal{T}$ є замкненою відносно довільних об'єднань, тобто якщо $A_\alpha \in \mathcal{T}$ для всіх α з деякої множини індексів I, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) $\emptyset, S \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ називають топологією в S.

Означення 1.7. *Множину $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ називають базою топології $\mathcal{T}$, якщо довільна $T \subset \mathcal{T}$ має вигляд $T = \bigcup_\alpha B_\alpha$ для деякої сім'ї $\{B_\alpha\} \subset \mathcal{B}$.*

Нехай x — точка топологічного простору S. Множину N називають *околом* точки x, якщо існує відкрита множина U така, що $x \in U \subset N$.

Множину $\mathcal{N}$ підмножин топологічного простору S називають *базою околів* точки x, якщо кожна з $N \in \mathcal{N}$ є околом точки x й для довільного околу M точки x існує така множина $N \in \mathcal{N}$, що $N \subset M$. Поширеною є також назва *фундаментальна система околів*.

Означення 1.8. *Нехай $< S, \mathcal{T} >$ та $< T, \mathcal{U} >$ — два топологічних простори. Функцію $f : S \to T$ називають неперервною, якщо $f^{-1}[A] \in$ $\in \mathcal{T}$ для кожної $A \in \mathcal{U}$, тобто прообраз довільної відкритої множини є відкритою множиною.*

Функцію f називають *відкритою*, якщо $f[B]$ відкрита для кожної $B \in \mathcal{T}$. Якщо f відкрита й неперервна, її називають *взаємно неперервною.* Взаємно неперервну бієкцію називають *гомеоморфізмом.*

Гомеоморфізми — це ізоморфізми топологічних просторів.

Означення 1.9. *Нехай $< S, \mathcal{T} >$ — топологічний простір та нехай $A \subset S$. Індукована (відносна) топологія на A визначається сім'єю множин $\mathcal{T}_A = \{O \bigcap A | O \in \mathcal{T}\}$. Підмножину $B \subset A$ називають відкритою в індукованій топології, якщо $B \in \mathcal{T}_A$.*

Топологічний простір називають *віддільним* або *гаусдорфовим*, якщо дві його довільні різні точки мають неперетинні околи. Важливий клас топологічних просторів утворюють метричні простори. За базу топології в ньому можна обрати сім'ю його куль.

Нехай E – векторний простір над полем $\Phi(\Phi = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ дійсних або комплексних чисел. Кажуть, що топологія $\mathcal{T}$ в E узгоджується з алгебричною структурою, якщо алгебричні операції в E є неперервними, тобто $x+y$ — неперервна функція пари змінних x, y, а λx — неперервна функція пари змінних λ, x. *Топологічний векторний простір* над Φ — це векторний простір над Φ, наділений топологією, що узгоджується з його алгебричною структурою.

У кожному топологічному векторному просторі існує базис врівноважених околів. У найважливіших топологічних векторних просторах існує також базис опуклих околів. Такі простори називають *локально-опуклими.*

Означення 1.10. *Невід'ємну (скінченну) дійснозначну функцію p, визначену на E, називають напівнормою, якщо вона задовольняє властивості:*
1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ (напівадитивність);
2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
для всіх $x, y \in E$ та $\lambda \in \Phi$.

Кожній абсолютно опуклій та поглинальній множині M векторного простору E можна поставити у відповідність функціонал

$$p_M(x) = \inf_{\alpha > 0, \alpha^{-1} x \in M} \alpha,$$

який називають *функціоналом Мінковського,* причому він буде утворювати деяку напівнорму в E [126]. І навпаки, для довільної напівнорми p на E множини $\{x : p(x) < \alpha\}$ та $\{x : p(x) \le \alpha\}$ для довільного $\alpha > 0$ є абсолютно опуклими та поглинальними. Виявляється, що ця двоїстість між напівнормами та абсолютно опуклими поглинальними множинами дає можливість інакше визначити поняття локально-опуклого простору.

Теорема 1.1. *[225, с.30]. Нехай на векторному просторі E задано довільну сім'ю напівнорм Q. Тоді в E існує найслабша, узгоджена з алгебричною структурою, топологія, в якій кожна напівнорма з Q є неперервною. У цій топології E є локально-опуклим простором з базисом замкнених околів, утвореним можливими множинами вигляду*

$$\{x : \sup_{1 \le i \le n} p_i(x) \le \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0, p_i \in Q).$$

Локально-опуклий простір E буде віддільним тоді й тільки тоді, коли система напівнорм Q, що задає його топологію задовольняє таку *аксіому віддільності*: для кожного $x \neq 0$ існує напівнорма $p \in Q$ така, що $p(x) \neq 0$ [126], [225, с.30]. У літературних джерелах локально-опуклим простором часто називають віддільний локально-опуклий простір.

Якщо p – норма на E, то простір E, топологія якого визначається цією нормою, буде нормованим, а тому й метричним. Наступна теорема дає характеризацію метричних локально-опуклих просторів.

Теорема 1.2. *[223, с.150]. Нехай E – віддільний локально-опуклий топологічний простір. Умови рівносильні таким:*

а) E метризований;

б) нуль має зліченний базис околів;

в) топологія на E породжується деякою зліченною сім'єю напівнорм.

Повний метризований локально-опуклий простір називають *простором Фреше*. Повний нормований простір називають *простором Банаха (банаховим)*.

Нехай E — векторний простір над полем Φ і M — його векторний підпростір. Тоді відношення $x - y \in M$ є відношенням еквівалентності у E, а множина E/M всіх класів еквівалентності $X, Y, ...$ може бути векторним простором над Φ, який називають *факторпростором* E за відношенням M (якщо $X, Y \in E/M$, то $X + Y \in E/M$ та $\lambda X \in E/M$ при $\lambda \neq 0$; залишається покласти $0 \cdot X = M$) [225, с.115]. Класом еквівалентності $k(x)$, якому належить елемент $x \in E$, є $x + M$, де k — лінійне відображення; його називають *канонічним відображенням* E на E/M.

Якщо E — локально-опуклий простір і $\mathfrak{U}$ – базис абсолютно опуклих околів, то множина $k(U)(U \in \mathfrak{U})$ утворює базис околів топології в E/M, яку називають *факторторологією*; E/M, наділений цією топологією, є локально-опуклим простором. Оскільки $U \subset k^{-1}(k(U))$ для кожного $U \in \mathfrak{U}$, то k неперервне; при цьому факторторологія — найсильніша з топологій в E/M, за якої k є неперервним.

Наведемо властивості факторизованого локально-опуклого простору у вигляді теорем з [225].

Теорема 1.3. *[225, с.116]. Факторпростір E/M, наділений факторторологією, є віддільним тоді й тільки тоді, коли M – замкнений векторний підпростір простору E.*

Теорема 1.4. *[225, с.117]. Довільне лінійне відображення t локально-опуклого простору E у локально опуклий простір F розкладається у композицію $t = u \circ k$, де u – взаємно однозначне лінійне відображення $E/t^{-1}(0)$ в F, k – канонічне відображення E на $E/t^{-1}(0)$; t — неперервне тоді й тільки тоді, коли неперервне u.*

У загальному випадку факторпростір повного простору за його замкненим векторним підпростором не обов'язково буде повним. Простір Фреше має у цьому відношенні перевагу. А саме: виконується таке твердження.

Теорема 1.5. *[225, с.175]. Факторпростір простору Фреше за замкненим векторним підпростором є простором Фреше.*

Нехай E – локально-опуклий простір, M та N – векторні підпростори простору E, які перетинаються лише в нулі. *Прямою (алгебричною) сумою* просторів M та N називають множину всіх векторів $x_1 + x_2$, $x_1 \in M, x_2 \in N$, якщо вони породжують весь простір E (це означає виконання умов $M + N = E, M \cap N = \emptyset$). Позначається: $E = M \dot{+} N$. Якщо, крім того, M та N є замкненими підпросторами (наділеними відповідною індукованою топологією), то кажуть про розклад у пряму (топологічну) суму замкнених підпросторів та пишуть $E = M \oplus N$. У цьому випадку підпростір M називають *топологічним прямим доповненням* підпростору N у E. Підпростір, для якого існує топологічне пряме доповнення, називають *топологічно доповнювальним.* На жаль, пряма сума двох підпросторів може не бути підпростором (тобто може бути незамкненою). Далі наведено твердження стосовно доповнювальності та розкладу в топологічні суми підпросторів вихідного простору.

Теорема 1.6. *[102, с.45,46]. Нехай B – банахів простір, а B_1 та B_2 два його підпростори, які перетинаються лише у нулі. Для того щоб пряма сума $B_1 \oplus B_2$ була підпростором, необхідно та достатньо, щоб існувала стала $k \geq 0$, така що:*

$$||x_1 + x_2|| \geq k(||x_1|| + ||x_2||), \quad x_1 \in B_1, x_2 \in B_2.$$

Якщо $B = H$ — простір Гільберта, то довільний його підпростір має пряме доповнення, за яке можна обрати ортогональне доповнення до підпростору.

Теорема 1.7. *[9]. 1. Якщо B_1 — n-вимірний підпростір простору Банаха B, то для B_1 існує замкнене доповнення, яке може бути заданим за допомогою n лінійно незалежних функціоналів.*

2. Якщо B_2 – замкнений підпростір у просторі Банаха B, заданий скінченним набором з n лінійно незалежних функціоналів

$$B_2 = \{x : f_i(x) = 0, i = 1, ..., n\},$$

то для B_2 існує доповнення розмірності n.

Проблема доповнювальності банахових підпросторів пов'язана з так званою проблемою Банаха (див., наприклад, [217]).

Один з найперших прикладів недоповнювального підпростору був побудований Р.Філіпсом. Відомо [272, с.183], що простори c_0 (збіжних до нуля послідовностей) та l_∞ (обмежених послідовностей) є банаховими відносно норми $||\xi||_\infty := sup\{|\xi_k||k \in \mathbb{N}\}$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, ...))$, причому c_0 – замкнений підпростір простору l_∞. Він довів, що підпростір c_0 в l_∞ є недоповнювальним. Дійсно, справедливою є така теорема.

Теорема 1.8. *(Лінденштраус, Цафрірі). ([272, с.185], [408]). Наступні властивості банахового простору E є еквівалентними:*

(i) будь-який підпростір у E має топологічне пряме доповнення;

(ii) простір E топологічно ізоморфний деякому гільбертовому простору.

Для локально-опуклих просторів справедливими є такі теореми щодо розкладу простору в топологічні прямі суми підпросторів.

Теорема 1.9. *[225, с.141]. Нехай локально-опуклий простір E є алгебричною прямою сумою власних векторних підпросторів M та N, p та q – проєкції E на M та N, а h та k – канонічні відображення E на E/M та E/N. Тоді рівносильними є такі твердження:*

1) E є топологічною сумою підпросторів M та N;

2) p — неперервне;

3) q — неперервне;

4) h — ізоморфізм N на E/M;

5) k — ізоморфізм M на E/N.

Теорема 1.10. *[225, с.143]. Векторний підпростір M локально-опуклого простору E є доповнювальним тоді й тільки тоді, коли існує неперервний лінійний проектор p простору E у себе такий, що $p(E) = M$ й $p^2 = p$.*

Зазначимо, що простір Фреше щодо доповнювальності має переваги над іншими локально-опуклими просторами. Справедливим є таке твердження.

Теорема 1.11. *[225]. Якщо простір Фреше є алгебричною прямою сумою двох власних векторних підпросторів, то він є їх топологічною сумою.*

1.2. Узагальнено-обернені та псевдообернені оператори

Тут йтиметься лише про лінійні перетворення та оператори.

Нехай V та W — векторні простори над довільним полем, $\mathcal{L}(V, W)$ — множина всіх лінійних перетворень, що діють з простору V у простір W. Для лінійного перетворення $A \in \mathcal{L}(V, W)$ через $R(A)$ і $N(A)$ позначатимемо відповідно образ та ядро A.

Означення 1.11. *[359]. Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Лінійне перетворення $B \in \mathcal{L}(W, V)$ називають напівоберненим для A, якщо $ABA = A$.*

Означення 1.12. *Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Лінійне перетворення $B \in$ $\in \mathcal{L}(W, V)$ називають рефлексивно напівоберненим для A, якщо $ABA =$ $= A$ й одночасно $BAB = B$.*

Означення 1.13. *Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{H}$ — підпростір V такий, що $V = \mathcal{H} \oplus N(A)$ і нехай $\mathcal{J}$ — підпростір W такий, що $W = R(A) \oplus \mathcal{J}$. Тоді пару $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ називають A-допустимою парою.*

Наявність пар $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ для будь-якого лінійного перетворення над векторними просторами випливає з того факту, що будь-який підпростір векторного простору має алгебричне доповнення [359].

Означення 1.14. *Нехай $A \in \mathcal{L}(V, W)$ і $(\mathcal{H}, \mathcal{J})$ — A-допустима пара. Тоді відображення*

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}} : W \to V,$$

$$A^{+}_{\mathcal{H},\mathcal{J}}y = A^{-1}_{\mathcal{H}}y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in R(A), y_2 \in \mathcal{J},$$

називають $(\mathcal{H}, \mathcal{J})-$*псевдооберненим до* A.

У цьому означенні відображення $A_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to R(A)$ діє за таким правилом: $A_{\mathcal{H}}x = Ax, \;\; x \in \mathcal{H}$. Згідно з теоремою 12 [359] до цього відображення є лінійне обернене $A^{-1}_{\mathcal{H}}$.

Будь-яке псевдообернене відображення є також й рефлексивно напівоберненим. Для будь-якого лінійного відображення над векторними просторами існує псевдообернене.

Узагальнення цих результатів на випадок просторів з додатковою геометричною структурою не завжди, можливо, й потребує додаткових вимог.

Наприклад, у гільбертовому просторі для того, щоб множина значень лінійного оператора була підпростором, вона повинна бути замкненою. У такому випадку існує ортогональне доповнення до цього підпростору [223]. У банаховому просторі навіть умова замкненості підпростору виявляється не достатньою для існування топологічного доповнення до всього простору (про це йшлося вище).

Оскільки замкненість множини значень є суттєвою умовою, то серед класу операторів, що діють з одного банахового простору в інший виділяють нормально-розв'язні. Існує декілька еквівалентних означень цього класу операторів [145], [262], [326, с.33].

Означення 1.15. *Щільно визначений оператор* L*, що діє з одного банахового простору* B_1 *в інший* B_2 *називають нормально-розв'язним, якщо множина значень його є замкненою* $R(L) = \overline{R(L)}$.

Надалі $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ позначатимемо простір лінійних неперервних операторів, що діють з одного простору Банаха в інший.

Для множини M у банаховому просторі $\mathbf{B}$ та множини N у його спряженому просторі $\mathbf{B}^*$ виділяють такі поняття ортогональності [145]:

$$M^{\perp} = \{f \in \mathbf{B}^* : < x, f >= 0 \; \forall x \in M\},$$

$$^{\perp}N = \{x \in \mathbf{B} : < x, f >= 0 \; \forall f \in N\}.$$

Для рівнянь вигляду $Lx = y$ з нормально-розв'язним оператором існують необхідні й достатні умови розв'язності.

Справедливою є така теорема [102], [137], [326, с.34].

Теорема 1.12. *Для того щоб замкнений щільно визначений оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, у якого $R(L) \neq B_2$, був нормально-розв'язним, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з таких умов:*

а) $^{\perp}N(L^*) = R(L)$;

б) рівняння $Lx = y$ розв'язне лише для тих $y \in B_2$, що задовольняють умову

$$\phi(y) = 0,$$

де ϕ — будь-який розв'язок однорідного спряженого рівняння

$$L^*\phi = 0.$$

Але ця теорема дає тільки умови розв'язності. Загальний розв'язок таких рівнянь можна визначити не завжди.

У випадку банахового простору оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ називають *узагальнено-оборотним*, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ такий, що $LXL = L$ [102]. Зауважимо, що у випадку лінійних векторних просторів такий оператор називають напівоберненим. Оператор X називають узагальнено-оберненим до оператора L і позначають L^-. Зауважимо, що з множини узагальнено-оборотних до L операторів можна виділити такий Y, що буде виконуватися додаткова умова: $YLY = Y$. Якщо до оператора є узагальнено-обернений, то можна побудувати загальний розв'язок операторного рівняння $Lx = y$. За певних додаткових умов нормально-розв'язний оператор є узагальнено-оборотним. А саме, справедливим є такий критерій.

Теорема 1.13. *[102], [137], [326, с.39]. Для того, щоб оператор $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ був узагальнено-оборотним, необхідно й достатньо, щоб:*

1. L був нормально-розв'язним оператором.

2. Підпростір $N(L)$ мав пряме доповнення в B_1.

3. Підпростір $R(L)$ мав пряме доповнення в B_2.

Лема. *[137]. Якщо $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ замкнений оператор та існує замкнений лінійний підпростір M простору B_2 такий, що*

$$B_2 = M \oplus R(L),$$

то L є нормально-розв'язним оператором.

Якщо оператор L відображає простір B у себе, то справедливим є таке означення.

Означення 1.16. *[137]. Замкнений щільно визначений оператор $L: B \to B$ називають зведено-оборотним, якщо*

$$B = N(L) \oplus R(L).$$

Звичайно, що у гільбертовому просторі нормальна розв'язність еквівалентна узагальненій оборотності. Будь-який скінченновимірний оператор є узагальнено-оборотним (умови 1—3 виконуються).

Якщо оператор $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2, то з множини узагальнено-обернених операторів $L^- \in \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ можна обрати єдиний, що задовольняє властивості:

$$1. LL^-L = L; \qquad 2. L^-LL^- = L^-;$$

$$3. (LL^-)^* = LL^-; \quad 4. (L^-L)^* = L^-L.$$

Такий оператор називають псевдооберненим за Муром—Пенроузом [445] оператором і позначають L^+. Цей оператор має додаткові екстремальні властивості на відміну від звичайного узагальнено-оберненого [82], [102], [326], [464], [81]. Насправді, для існування L^+ достатньо виконання лише властивостей 1 та 3. Надалі будемо писати, що $L \in PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, якщо оператор L має псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор, $PI(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ — множина всіх таких операторів.

Серед нормально-розв'язних операторів виділяють декілька класів операторів, які варті особливої уваги [145].

Нехай $n = n(L) = dimN(L)$, $d = d(L) = dimN(L^*)$. Індекс оператора визначають як $indL = n(L) - d(L)$ ([326], [145] тощо).

Згідно з класифікацією С.Г. Крейна [145] нормально-розв'язний замкнений оператор, у якого $n(L)$ або $d(L)$ скінченне, називають відповідно *n-нормальним* або *d-нормальним* оператором.

У випадку, коли обидва числа $n(L)$ та $d(L)$ є скінченними, оператор L називають *нетеровим.* Якщо додатково оператор L є оператором нульового індексу, то його називають *фредгольмовим* (фредгольмовим індекса нуль). Зауважимо, що в іноземній літературі останні два типи операторів часто не розрізняють і називають їх або фредгольмовими, або F-операторами.

Для фредгольмових операторів справедливою є лема Шмідта [64] та її розвинення — теорема Нікольського [192] про загальне подання обмеженого фредгольмового оператора у вигляді суми неперервно-оборотного й скінченновимірного операторів [326]. Узагальнення цього критерію на необмежені оператори та просте доведення теореми Нікольського наведено у праці [465] (див. також список літератури до неї).

Така характеризація Нікольського справедлива лише для фредгольмових операторів, а не для нетерових операторів.

Для нетерових операторів виконується характеризація Аткінсона [17] про те, що будь-який нетерів оператор можна подати у вигляді суми односторонньо оберненого й скінченновимірного оперторів.

Наведені теореми про подання дають можливість отримати конструкцію узагальнено-оберненого до нетерового оператора за допомогою спеціальних скінченновимірних операторів, які додають до вихідного нетерового оператора [326].

Це оператори проєктування на ядро та образ нетерового оператора. Теорію узагальнено-обернених операторів ефективно використовують під час дослідження рівнянь з оператором, що має наведені властивості.

РОЗДІЛ 2
УЗАГАЛЬНЕНІ НОРМАЛЬНО-РОЗВ'ЯЗНІ ОПЕРАТОРНІ РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ, БАНАХА ТА ГІЛЬБЕРТА

Теорію нормально-розв'язних операторних рівнянь достатньо вивчено для рівнянь з оператором, який має замкнену множину значень. За певних додаткових умов такі оператори мають узагальнено-обернені або псевдообернені за Муром—Пенроузом оператори залежно від просторів, у яких досліджують рівняння. З використанням цієї теорії вдається досліджувати операторно-диференціальні рівняння та крайові задачі для них у тому випадку, коли лінеаризована однорідна частина таких задач є нормально-розв'язним оператором. Для задач із оператором, що має незамкнену множину значень (не є нормально-розв'язним) такої завершеної теорії не розроблено.

У цьому розділі запропоновано відповідні означення для рівнянь із оператором, що має не обов'язково замкнену множину значень. Показано, як треба розширити вихідний простір й оператор на нього так, щоб розширений оператор був нормально-розв'язним. Такі задачі будемо називати узагальненими нормально-розв'язними.

2.1. Сильний узагальнено-обернений та псевдообернений оператори

Відомо [420], [445], що для будь-якої прямокутної матриці розміру $m \times n$ існує псевдообернена за Муром—Пенроузом. На жаль, такого результату для лінійних відображень у нескінченновимірних, навіть, у просторах Гільберта немає через наявність складнішої геометрії. Як відомо, у просторах Гільберта в довільного лінійного обмеженого оператора L є псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор L^+ тоді й тільки тоді, коли він є нормально-розв'язним. Таким чином, умова замкненості множини значень L виділяє підклас нормально-розв'язних операторів, що мають псевдообернений [145], [327]. Для просторів Банаха та загальніших топологічних просторів цієї умови виявляється недостатньо, навіть для того, щоб існував узагальнено-обернений оператор L^-. Існування такого оператора забезпечує умова доповнювальності образу нормально-розв'язного оператора $\overline{R(L)} = R(L)$ та його ядра $N(L)$ (див., наприклад, [137]). Для операторів, що не мають замкненої множини значень, такої завершеної теорії не розроблено. Саме таким питанням й присвячено цей підрозділ, де розглядаються визначення та побудова узагальнено-обернених операторів до лінійних обмежених, що діють у просторах Фреше, Банаха та Гільберта з не обов'язково замкненою множиною значень. Для того щоб розв'язати цю задачу, пропонується розширити вихідний простір й оператор L на нього так, щоб розширений оператор $\overline{L}$ був нормально-розв'язним. Використовуючи розширений оператор $\overline{L}$, для рівняння $Lx = y$ виділяють три типи розв'язків, які гарантують їх існування за додаткових умов на праві частини.

Нехай $L : H_1 \to H_2$ — довільний лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гільберта H_1 у простір Гільберта H_2. При цьому не припускається замкненість множини його значень.

Покажемо, як можна ввести поняття псевдооберненого за Муром—Пенроузом оператора для довільного лінійного обмеженого оператора.

Сильний псевдообернений оператор у просторах Гільберта

Відомо [223], що простори Гільберта H_1 та H_2 можна розкласти в ортогональні суми:

$$H_1 = N(L) \oplus X, H_2 = \overline{R(L)} \oplus Y. \tag{2.1}$$

Тут $X = N(L)^\perp$, $Y = \overline{R(L)}^\perp$ — відповідно ортогональні доповнення до нуль-простору та замикання образу $R(L)$ оператора L. З огляду на подання (2.1) існують оператори ортогонального проєктування $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на відповідні підпростори: $\mathcal{P}_{N(L)} : H_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_X : H_1 \to X$, $\mathcal{P}_{\overline{R(L)}} : H_2 \to \overline{R(L)}$, $\mathcal{P}_Y : H_2 \to Y$. Позначимо через H фактор-простір простору H_1 за ядром $N(L)$ $(H = H_1/N(L))$. Оскільки, як відомо з праць [221, 225], існує неперервна бієкція, тобто взаємно однозначне неперервне відображення $p : X \to H$ та проєкція $j : H_1 \to H$. Трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)}H$ [221, 225].

Визначимо оператор

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}_{\overline{R(L)}} L j^{-1} p : X \to R(L) \subset \overline{R(L)}.$$

Цей оператор будують за допомогою ланцюга просторів та операторів:

$$X \xrightarrow{p} H \xrightarrow{j^{-1}} H_1$$

$$H_1 \xrightarrow{L} H_2 \xrightarrow{\mathcal{P}_{\overline{R(L)}}} R(L) \subset \overline{R(L)}$$

Запропоновану конструкцію зручно подати у вигляді комутативної діаграми:

$$\begin{array}{ccc}
H_1 & \xrightarrow{L} & H_2 \\
{\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I} \\
H & & H_2 \\
{\scriptstyle p^{-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}_{\overline{R(L)}}} \\
X & \xrightarrow{\mathcal{L}} & R(L) \subset \overline{R(L)} \\
\bigcap & & \bigcap \\
\overline{H}_1 & \xrightarrow{\overline{L}} & H_2
\end{array}$$

Легко переконатися у тому, що так визначений оператор є лінійним, неперервним та ін'єктивним (тобто, якщо $x_1 \neq x_2$, то $\mathcal{L}x_1 \neq \mathcal{L}x_2$). Скориставшись процесом поповнення [166] за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||\mathcal{L}x||_F$, де $F = \overline{R(L)}$, отримаємо новий простір $\overline{X}$ й розширений оператор $\overline{\mathcal{L}}$, який буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$:

$$\overline{\mathcal{L}} : \overline{X} \to \overline{R(L)}, \quad X \subset \overline{X}.$$

Розглянемо розширений оператор $\overline{L}$, який визначається так: $\overline{L} = \overline{\mathcal{L}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$, при цьому справедливими є розклади у ортогональні суми:

$$\overline{H}_1 = N(L) \oplus \overline{X}, \quad H_2 = R(\overline{L}) \oplus Y.$$

Зрозуміло, що якщо $x \in H_1$, то $\overline{L}x = Lx$. Побудувавши до оператора L розширений оператор $\overline{L}$, який вже є нормально-розв'язним, можемо запровадити таке означення.

Означення 2.1. *Оператор* $\overline{L}^+ : H_2 \to \overline{H}_1$ *будемо називати сильним псевдооберненим до оператора* L.

Зауваження 2.1. *З цього означення випливає, що сильний псевдообернений до оператора* L *є псевдооберненим до оператора* $\overline{L}$.

Продемонструємо запропоновані означення на прикладі конкретного оператора.

Нехай оператор $L : l_2 \to l_2$ діє за правилом

$$Lx = L(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, x_2, \frac{x_3}{2}, ..., \frac{x_n}{n-1}, ...).$$

Тоді його ядро збігається з множиною послідовностей вигляду $\{\alpha(1, 0, 0, ...), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Після факторизації можна вважати, що маємо оператор $\mathcal{L} : l_2 \to l_2$, який діє за правилом

$$\mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (y_1, \frac{y_2}{2}, ..., \frac{y_n}{n}, ...).$$

Доведемо, що його множина значень не є замкненою. Для цього достатньо помітити, що

$$l_2 \ni (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...) = \lim_{k\to\infty} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...),$$
$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...) = \mathcal{L}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k}, 0, 0, ...),$$

а вектор

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...) = \mathcal{L}(1, 1, ...).$$

Але вектор, який складається з одиниць, не належить простору послідовностей l_2. Тому вектор $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ не належить множині значень оператора $\mathcal{L}$. Повповнивши простір l_2 за нормою $||x||_{\overline{H}} = ||\mathcal{L}x||_{l_2}$, отримаємо простір $\overline{H} \supset l_2$, у якому цей оператор буде нормально-розв'язним. Зазначимо, що простір $\overline{H}$ досить широкий, бо містить у собі простір обмежених послідовностей m. До оператора $\overline{L}$ будуємо традиційний псевдообернений оператор, що є узагальненим (сильним) псевдооберненим оператором $\overline{L}^{+} : l_2 \to \overline{H}$ до оператора L, який у цьому випадку буде мати такий вигляд:

$$(L_{strong})^{+}x = \overline{L}^{+}x = \overline{L}^{+}(x_1, x_2, ..., x_n, ...) =$$

$$= (0, x_2, 2x_3, ..., (n-1)x_n, ...).$$

Розглянутий приклад ілюструє, як з оператора L за допомогою запропонованої схеми отримати $\overline{L}$ та побудувати сильний псевдообернений $\overline{L}^{+}$ у відповідних просторах.

Сильний узагальнено-обернений оператор у просторах Фреше та Банаха

Нагадаємо, що для випадку, коли вихідні простори H_1 та H_2 є векторними просторами, поняття узагальнено-оберненого оператора було введено у праці Е.Дойтча [359] (про що йшлося у розд. 1). З огляду на процес поповнення, розглядуваний вище, це поняття можна поширити й на випадок просторів Фреше та Банаха з необов'язково замкненою множиною значень.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор L, що діє з простору Банаха (Фреше) B_1 у простір Банаха (Фреше) B_2. Надалі вважатимемо, що простори $N(L)$ і $\overline{R(L)}$ є доповнювальними, тобто мають місце такі розклади у прямі суми підпросторів:

$$B_1 = N(L) \oplus X, B_2 = \overline{R(L)} \oplus Y, \tag{2.2}$$

й відповідні розклади одиниці:

$$I_{B_1} = P_{N(L)} + P_X, \quad I_{B_2} = P_{\overline{R(L)}} + P_Y,$$

де $P_{N(L)}, P_X, P_{\overline{R(L)}}, P_Y$ — проєктори на відповідні підпростори.

За аналогією до означення [359] допустимої пари (розд. 1) введемо означення узагальненої L допустимої пари.

Означення 2.2. *Нехай $L : B_1 \to B_2$ лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха B_1 у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset B_1$ та $Y \subset B_2$ такі, що виконується умова (2.2). Тоді пару (X, Y) будемо називати узагальненою L-допустимою парою.*

Розглянемо звужений оператор $L_X : X \to \overline{R(L)}$, $L_X x = Lx, x \in X$ (лінійний, неперервний та ін'єктивний). Поповнимо простір X за нормою $||x|| = ||L_X x||_{B_2}$ і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор позначимо $\overline{L}_X$. У попередньому випадку гільбертових просторів оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(L)}$ здійснював гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(L)}$. Через $\overline{B}_1 = \overline{X} \oplus N(L)$ позначимо розширений вихідний простір.

Означення 2.3. *Нехай $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ та (X, Y) — узагальнена L-допустима пара. Тоді відображення*

$$L^{-}_{X,Y} : B_2 \to \overline{B}_1,$$

$$L^{-}_{X,Y} y = \overline{L}_X^{-1} y_1,\ y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{R(L)},\ y_2 \in Y,$$

називають сильним (X, Y)-узагальнено-оберненим до L.

Безпосередньо з означення сильного (X, Y) - узагальнено- оберненого оператора випливають такі властивості:

$$LL^{-}_{X,Y}L = L, \quad L^{-}_{X,Y}LL^{-}_{X,Y} = L^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \;\; X,$$

або з заміною L на L_X

$$\overline{L}_X L^{-}_{X,Y} \overline{L}_X = \overline{L}_X, \quad L^{-}_{X,Y} \overline{L}_X L^{-}_{X,Y} = L^{-}_{X,Y} \quad \text{на} \;\; \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 (див. розд. 1) з означення псевдооберненого оператора у загальному випадку немає.

Зауваження 2.2. *Якщо вихідні простори є просторами Фреше, то поповнювати слід за зліченною системою напівнорм [126], [166]. Справді, запропонований підхід залишається справедливим у випадку деяких загальніших ніж Фреше локально-опуклих просторах, а відповідне поповнення будується за системою напівнорм, що визначають топологію простору.*

Зауваження 2.3. *Якщо вихідні простори є просторами Гільберта, то сильний псевдообернений оператор $\overline{L}^{+}$ до оператора L, з введеного вище означення, буде також й сильним (X, Y)-узагальнено-оберненим до L у сенсі попереднього означення. Таким чином у просторах Гільберта довільний лінійний обмежений оператор має сильний $(N(L)^{\perp}, \overline{R(L)}^{\perp})$-узагальнено-обернений, де $X = N(L)^{\perp}, Y = \overline{R(L)}^{\perp}$.*

Зауваження 2.4. *На загальні локально-опуклі простори означення, запропоновані вище, у загальному випадку перенести неможливо, бо як зазначалося, фактор-простір повного локально-опуклого простору за його замкненим підпростором може бути не повним [225].*

Нижче розглядаються застосування побудованої теорії до ров'язування операторних рівнянь.

2.2. Лінійні рівняння з обмеженим оператором. Поняття узагальнених розв'язків та їх подання

Розглянемо у просторах Банаха B_1 та B_2 лінійне рівняння

$$Lx = y, \tag{2.3}$$

де y — елемент простору B_2; L — такий лінійний обмежений оператор, що пара (X, Y) є узагальненою L-допустимою. Відомо [326], що в загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і може бути не єдиним. Коли розв'язку не існує у звичайному сенсі, то часто знаходять такий елемент $x = \overline{x} \in B_1$, який мінімізує норму нев'язки $||L\overline{x} - y||_{B_2} = inf_{x \in B_1}||Lx - y||_{B_2}$. Його називають псевдо- або квазірозв'язком залежно від того, визначено його на просторах Гільберта чи Банаха, відповідно [260], [326]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора L є суттєвою, але у загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

Запропоновано такі означення розв'язків для рівняння (2.3), щоб можна було гарантувати їх існування у тому чи іншому сенсі.

Використавши побудовану вище конструкцію, розширимо вихідний простір B_1 й оператор L, заданий на ньому так, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення, яке встановлюватиме відповідність між розв'язками та правими частинами у загальному випадку є багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків. Основні результати сформулюємо у просторах Банаха та Гільберта. У цьому разі для рівняння (2.3) виділимо такі три типи розв'язків.

1. Класичні розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор L є нормально-розв'язним. Тоді, як відомо [326], неоднорідність $y \in R(L)$ у рівнянні (2.3) належить образу оператора тоді й тільки тоді, коли $P_{N(L^*)}y = 0$. За умови, що існує узагальнено-обернений оператор L^- (у випадку просторів Гільберта нормальна-розв'язність еквівалентна існуванню псевдооберненого за Муром—Пенроузом оператора L^+), множина розв'язків рівняння (2.3) у просторі Банаха має вигляд

$$x = L^- y + P_{N(L)}c \ \ \forall c \in B_1,$$

а у просторі Гільберта

$$x = L^+ y + \mathcal{P}_{N(L)}c \ \ \forall c \in H_1.$$

2. Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли множина значень оператора L не є замкненою. Оскільки оператор L має (X, Y) узагальнену L-допустиму пару, то для просторів B_1 і B_2 справедливим є розклад (2.2).

Тоді можна вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (2.3). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ і $\overline{R(L)}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ та коректним буде наступне означення.

Означення 2.4. *Елемент $\overline{L}_X^{-1}y$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (2.3), якщо $y \in \overline{R(L)}$.*

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = L_{X,Y}^- y + P_{N(L)}c \ \ \forall c \in B_1,$$

а оператор $L_{X,Y}^- y := \overline{L}_X^{-1} y_1$, де $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \overline{R(L)}, y_2 \in Y$.

3. Узагальнені квазірозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(L)}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $P_{N(L^*)}y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $inf||\overline{L}x - y||_{B_2}$, де $\overline{L} = \overline{L}_{\overline{X}}\mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфінум береться по всіх елементах $x \in \overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Означення 2.5. *Довільний елемент з множини $\{L_{X,Y}^- y + +P_{N(L)}c\}_{c \in B_1}$ будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (2.3).*

Означення 2.6. *Зазначимо, що якщо* $R(L) = \overline{R(L)}$, *то узагальнені квазірозв'язки збігаються зі звичайними квазірозв'язками.*

Зауваження 2.5. *З наведеного вище означення елемент* $L^{-}_{X,Y}y$ *може мати не найменшу норму на відповідному просторі, на відміну від* $\overline{L}^{+}y$.

Теорема 2.1. *Нехай для оператора* L *існує* (X, Y) *узагальнена* L-*допустима пара.*

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ *задовольняє умову*

$$P_{N(\overline{L}^{*})}y = 0, \tag{2.4}$$

якщо $y \in R(L)$, *то отримані розв'язки будуть класичними.*

2. Якщо умова (2.4) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y}y + P_{N(L)}c \quad \forall c \in B_1;$$

b) 1. Узагальнені квазірозв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in B_2$ *задовольняє умову*

$$P_{N(\overline{L}^{*})}y \neq 0. \tag{2.5}$$

2. Якщо умова (2.5) виконується, то множина узагальнених квазірозв'язків буде мати вигляд

$$x = L^{-}_{X,Y}y + P_{N(L)}c \quad \forall c \in B_1.$$

У випадку просторів Гільберта цю теорему можна уточнити.

Наслідок. *Розглянемо рівняння (2.3) з лінійним обмеженим оператором* L.

a) 1. Сильні узагальнені розв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^{*})}y = 0, \tag{2.6}$$

яка еквівалентна умові

$$(\varphi, y) = 0, \tag{2.7}$$

для всіх φ *таких, що* $\overline{L}^*\varphi = 0$*; якщо* $y \in R(L)$*, то отримані розв'язки будуть класичними.*

2. Якщо умова (2.6) виконується, то множина сильних узагальнених розв'язків рівняння (2.3) буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in H_1.$$

b) 1. Узагальнені псевдорозв'язки рівняння (2.3) існують тоді й тільки тоді, коли елемент $y \in H_2$ *задовольняє умову*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{L}^*)} y \neq 0, \tag{2.8}$$

яка еквівалентна такій:

$$(\varphi, y) \neq 0. \tag{2.9}$$

2. Якщо умова (2.8) виконується, то множина узагальнених псевдорозв'язків буде мати вигляд

$$x = \overline{L}^+ y + \mathcal{P}_{N(L)} c \quad \forall c \in H_1.$$

Зауваження 2.6. *У просторах Гільберта наведені вище проєктори будуть ортопроєкторами.*

2.3. Лінійні нормально-розв'язні рівняння та проєктори у просторах Банаха

Тут досліджуються результати про подання нескінченновимірних проєкторів, що дають змогу будувати узагальнено-обернений оператор у просторах Банаха. Це — проєктори на ядро та образ нормально-розв'язного оператора. Знайдено вигляд проєкторів та умови, за яких вони існують. Досліджено лінійні рівняння з нормально-розв'язним оператором. Наведено аналогії між класом усіх узагальнено-обернених операторів.

Постановка задачі

Нехай L — лінійний, обмежений оператор, що діє у просторах Банаха E_1 та F_1. Припустимо, що оператор L нормально-розв'язний та індукує розклад цих просторів:

$$E_1 = N(L) \oplus X_1, \; F_1 = Y_1 \oplus R(L), \tag{2.10}$$

де через $N(L)$ і $R(L)$ традиційно позначено ядро та образ оператора L (тобто оператор L є узагальнено-оборотним). Поряд з (2.10) маємо розклади одиниць на суми проєкторів:

$$I_{E_1} = P_{N(L)} + P_{X_1}, \tag{2.11}$$

$$I_{F_1} = P_{Y_1} + P_{R(L)}. \tag{2.12}$$

Задача полягає у знаходженні розв'язків лінійного рівняння

$$Lx = y, \tag{2.13}$$

а також поданні проєкторів, що фігурують у (2.11), (2.12).

Отримаємо критерій розв'язності рівняння (2.13) у відповідних функціональних просторах. Позначимо через $dimN(L) = \mathcal{U}$ і $dimN(L^*) = \mathcal{V}$ потужності нуль-просторів операторів L та його спряженого L^*. Потужності ядра та коядра оператора L не обов'язково зліченні. Покажемо, що проєктори $P_{N(L)}$, P_{Y_1} у певних випадках можна подати, як розклади у ряд за системою базисних елементів, якщо остання існує. Нагадаємо деякі факти щодо базисів, які використовуватимуться надалі.

Означення 2.7. *[128]. Послідовність $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ векторів простору Банаха утворює базис Шаудера або топологічний базис, якщо кожен вектор x банахового простору однозначно можна розкласти у ряд $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ збіжний за нормою.*

Розглянемо випадок, коли $\mathcal{U}$ — множина довільної потужності.

Означення 2.8. *Система елементів $\{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{U}\}$ є мінімальною, якщо жоден елемент цієї системи не належить до замкненої оболонки інших елементів.*

Умова мінімальності виконується далеко не завжди, навіть у гільбертовому просторі [128]. Надалі припускатимемо існування базисних систем елементів підпросторів $N(L)$ і Y_1.

Як відомо [272], для довільного простору Банаха B існує ізометрія на деякий підпростір простору $l_\infty(X)$, де X — одинична куля у спряженому до B просторі $X = S_1(B^*)$. Тоді існують такі набори ізометрій:

1) ізометрія $J_1 : E_1 \to E_2 \subset l_\infty(S_1(E_1^*))$;

2) ізометрія $J_2 : F_1 \to F_2 \subset l_\infty(S_1(F_1^*))$, тут $E_2 = J_1(E_1)$, $F_2 = J_2(F_1)$ — замкнені підпростори банахових просторів відповідно $l_\infty(S_1(E_1^*))$ і $l_\infty(S_1(F_1^*))$; $S_1(E^*)$ — одинична сфера у просторі, спряженому до E.

Ізометрія J_1 переводить кожен елемент x простору E_1 у функціонал

$$h_x : S_1(E_1^*) \to \mathbb{R},$$

що діє за правилом $h_x(f) = f(x), f \in S_1(E_1^*)$. При цьому

$$||x||_{E_1} = ||J_1(x)||_{l_\infty(S_1(E_1^*))} = ||h_x||_{E_2} = \sup_{f \in S_1(E_1^*)} |h_x(f)| =$$

$$= \sup_{f \in S_1(E_1^*)} |f(x)|.$$

Ізометрія J_2 діє аналогічним чином з простору F_1 у підпростір $l_\infty(S_1(F_1^*))$.

Введемо до розгляду наступний оператор $\mathcal{L} := J_2 L J_1^{-1} : E_2 \to F_2$, який робить комутативною таку діаграму:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{L} & F_1 \\ {\scriptstyle J_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_2} \\ l_\infty(S_1(E_1^*)) \supset E_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F_2 \subset l_\infty(S_1(F_1^*)), \end{array}$$

а оператори L та $\mathcal{L}$ згідно з Хелемським [272] є слабко подібними у категорії Ban, тобто пара (J_1, J_2) здійснює слабку подібність. Нагадаємо, що об'єктами у цій категорії є довільні простори Банаха (у розглядуваному випадку простори E_1, F_1), а морфізмами — довільні лінійні обмежені оператори (L та $\mathcal{L}$).

Відомо [272], що пара ізометрій (J_1, J_2) здійснює слабку подібність між L та $\mathcal{L}$ тоді й тільки тоді, коли вона є ізоморфізмом у категорії $Mor(Ban)$. Класом об'єктів у цій категорії є довільний лінійний обмежений оператор, що діє з одного простору Банаха в інший. Морфізми у цій категорії визначаються такими парами лінійних обмежених операторів (ρ_1, ρ_2), що $\rho_1 \mathcal{L} = L \rho_2$.

Неважко побачити, що

$$||\mathcal{L}||_{E_2 \to F_2} = ||J_2 L J_1^{-1}||_{E_2 \to F_2} \leq$$

$$\leq ||J_2||_{F_1 \to F_2} ||L||_{E_1 \to F_1} ||J_1^{-1}||_{E_2 \to E_1} = ||L||_{E_2 \to F_2}.$$

Для доведення нерівності в інший бік достатньо проробити аналогічну процедуру з оператором $L = J_2^{-1}\mathcal{L}J_1$. Звідси робимо висновок, що $||\mathcal{L}||_{E_2 \to F_2} = ||L||_{E_1 \to F_1}$. Таким чином, можна перейти від рівняння (2.13) до еквівалентного (у сенсі збереження норми) рівняння

$$\mathcal{L}h_x = p_y, \tag{2.14}$$

але вже визначеному у просторах функціоналів. Оператор $\mathcal{L}$ з огляду на слабку подібність і припущення, що оператор L є узагальнено-оборотним, також буде індукувати наступні розклади просторів E_2 та F_2:

$$E_2 = N(\mathcal{L}) \oplus X_2, \quad F_2 = Y_2 \oplus R(\mathcal{L}), \tag{2.15}$$

де X_2, Y_2 — деякі підпростори просторів відповідно E_2 та F_2. Позначимо мінімальну систему базисних функціоналів нуль-простору $N(\mathcal{L}) \subset E_2$ через $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}} \subset N(\mathcal{L})$, а мінімальну систему базисних елементів (функціоналів) нуль-простору $N(\mathcal{L}^*) \subset F_2$ через $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta \in \mathcal{V}} \subset N(\mathcal{L}^*)$ (за припущення, що останні існують). З мінімальності базисних функцій $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ і базисних функціоналів $\{\varphi_\beta(\cdot)\}_{\beta \in \mathcal{V}}$ випливає, що існують біортогонально спряжена система $\{f_\alpha(\cdot)\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ лінійних функціоналів і система функцій $\{\psi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{V}}$, тобто

$$f_\lambda(e_\mu) = \delta_{\lambda\mu}, \lambda, \mu \in \mathfrak{U}, \varphi_\nu(\psi_\gamma) = \delta_{\nu\gamma}, \nu, \gamma \in \mathcal{V},$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Проєктор на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ побудуємо так:

$$P_{N(\mathcal{L})}h_x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} f_\alpha(h_x)e_\alpha. \tag{2.16}$$

Аналогічно будується проєктор на підпростір Y_2:

$$P_{Y_2}p_y = \sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta. \tag{2.17}$$

Те, що так визначені оператори є дійсно проєкторами, виявляють безпосередньою перевіркою означення.

Теорема 2.2. *Рівняння (2.14) буде розв'язним для тих і лише тих $p_y \in F_2$, які задовольняють рівність*

$$\sum_{\beta \in \mathcal{V}} \varphi_\beta(p_y)\psi_\beta = 0. \tag{2.18}$$

За виконання умови (2.18) розв'язки рівняння (2.14) матимуть вигляд

$$h_x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} f_\alpha(r_z) e_\alpha + \mathcal{L}^- p_y, \tag{2.19}$$

для довільної функції $r_z \in E_2$; $\mathcal{L}^-$ — узагальнено-обернений до оператора $\mathcal{L}$.

Доведення. З розкладу (2.15) випливає, що оператор $\mathcal{L}$ нормально-розв'язний і, крім того, узагальнено-оборотний. Тоді, як відомо [326], необхідною та достатньою умовою розв'язності рівняння (2.14) є умова на неоднорідність p_y:

$$P_{N(\mathcal{L}^*)} p_y = 0. \tag{2.20}$$

Оскільки $\mathcal{L}$ нормально-розв'язний, то ${}^{\perp}N(\mathcal{L}^*) = R(\mathcal{L})$ [137]. Водночас справедливим є розклад (2.15). Тоді умову (2.20) можна замінити на

$$P_{Y_2} p_y = 0.$$

Виходячи з подання (2.17), отримуємо (2.18). За виконання умов розв'язності розв'язки рівняння (2.14) є такими:

$$h_x = P_{N(\mathcal{L})} r_z + \mathcal{L}^- p_y \tag{2.21}$$

для довільної функції $r_z \in E_2$. Підставивши (2.16) у (2.21), одержуємо подання (2.19).

Випадок сепарабельних просторів

Розглянемо детальніше випадок, коли простори E_1 і F_1 є сепарабельними. У цьому випадку оператор $\mathcal{L}$ можна розглядати як такий, що діє не в просторах функцій, а в просторах послідовностей. Відомо [272], що у випадку сепарабельних просторів E_1 і F_1 їх можна ізометрично вкласти у деякі підпростори простору послідовностей l_∞. У цьому випадку можна вести мову про комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccccc}
E_1 & \xrightarrow{j_1} & E_3 \subset C(B_1(E_1^*)) & \xrightarrow{j_2} & E_4 \subset l_\infty \\
{\scriptstyle L}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\
F_1 & \xrightarrow{i_1} & F_3 \subset C(B_1(F_1^*)) & \xrightarrow{i_2} & F_4 \subset l_\infty,
\end{array}$$

де $j_1 : E_1 \to E_3 \subset C(B_1(E_1^*))$ — ізометрія (перетворення Гельфанда), що ставить у відповідність кожному вектору $x \in E_1$ функціонал означування $h_x : B_1(E_1^*) \to \mathbb{R}$ за правилом $h_x(f) = f(x)$, для будь-якого функціонала f з одиничної кулі $B_1(E_1^*)$ спряженого до E_1 простору.

Виходячи з сепарабельності простору E_1 можна стверджувати, що $B_1(E_1^*)$ має зліченну щільну у *слабкій топології підмножину, яку позначатимемо $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ізометрія j_2 ставить у вдповідність кожному функціоналу $h_x \in E_3$ вектор $(h_x(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \in E_4$, де E_4 — підпростір простору l_∞. Ізометрії $\{i_k, k = 1, 2\}$ визначають так само. У цьому випадку пара ізометрій (J_1, J_2), що визначені через композиції $J_1 = j_2 o j_1, J_2 = i_2 o i_1$, буде ізоморфізмом у категорії $Mor(Ban)$ між L та $\mathcal{L}$. Припустимо, що у такій ситуації підпростори $N(\mathcal{L}), N(\mathcal{L}^*)$ мають базиси Шаудера, що є одночасно й мінімальними системами. Зафіксуємо такі системи векторів $\{e_i = (e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ..., e_i^{(n)}, ...) \in l_\infty, i \in \mathbb{N}\}$ і функціоналів $\{\varphi_i(\cdot) \in l_\infty^*, i \in \mathbb{N}\}$, а відповідні їм біортогональні системи позначимо $\{f_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset l_\infty^*$ та $\{\psi_i = (\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ..., \psi_i^{(n)}, ...)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset l_\infty$. Тоді рівності (2.16) і (2.17), щозадають проєктори на відповідні підпростори, можна записати у такому вигляді:

$$P_{N(\mathcal{L})}(x_1, x_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i((x_1, x_2, ...))(e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, ...). \tag{2.22}$$

Аналогічно

$$P_{Y_2}(y_1, y_2, ...) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i((y_1, y_2, ...))(\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ...). \tag{2.23}$$

Введемо до розгляду нескінченні матриці:

$$\mathcal{E} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} & ... & e_1^{(n)} & ... \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & ... & e_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ e_k^{(1)} & e_k^{(2)} & ... & e_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$\Psi = (\psi_i)_{i\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & ... & \psi_1^{(n)} & ... \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & ... & \psi_2^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \psi_k^{(1)} & \psi_k^{(2)} & ... & \psi_k^{(n)} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

і нескіченні вектори:

$$\mathcal{F}(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), ..., f_n(\cdot), ...),$$

$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_n(\cdot), ...).$$

Згідно з позначеннями дію проєкторів $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ і $\mathcal{P}_{Y_2}$ на вектори з підпростору обмежених послідовностей можна подати у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \mathcal{F}(x)\mathcal{E},\ \mathcal{P}_{Y_2}y = \Phi(y)\Psi.$$

З того, що набори $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ і $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ утворюють базиси Шаудера у відповідних підпросторах випливає, що

$$P_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}y, \tag{2.25}$$

де

$$P^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x = \mathcal{F}^{(n)}(x)\mathcal{E}^{(n)}; P^{(n)}_{Y_2}y = \Phi^{(n)}(y)\Psi^{(n)},$$

а матриці й вектори з (2.24), (2.25) — $n\times n$- та $1\times n$-вимірні зрізи визначених вище нескінченновимірних матриць і векторів. Відповідні границі існуватимуть із огляду на означення базису Шаудера (див., наприклад, [128]).

Якщо простори $E_2 = \mathcal{H}_1$ і $F_2 = \mathcal{H}_2$ — простори Гільберта, то внаслідок ізоморфізму відповідних об'єктів L та $\mathcal{L}$ категорії $Mor(Ban)$ простори E_1 і F_1 також будуть гільбертовими. У цьому випадку можна знаходити не тільки проєктори $P_{N(\mathcal{L})}, P_{Y_2}$, а й ортопроєктори, тобто проєктори з додатковою умовою $\mathcal{P}^*_{N(\mathcal{L})} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ й $\mathcal{P}^*_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_2}$. У випадку сепарабельних просторів Гільберта кожна тотальна ортонормована система векторів є базисом Шаудера. Нехай $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ і $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ є мінімальними системами ортогональних векторів, які утворюють базиси нуль-просторів $N(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H}_1$ й $N(\mathcal{L}^*) \subset \mathcal{H}_2$. Відомо [19], що умова мінімальності системи векторів $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ у просторі Гільберта еквівалентна такій: для довільного j числа

$$\delta_j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(f_j, f_{j+1}, ..., f_n)}{\Gamma(f_{j+1}, f_{j+2}, ..., f_n)} > 0, \quad j = \overline{1,\infty},$$

де $\Gamma(g_1, g_2, ..., g_n)$ — визначник Грама системи векторів $\{g_i\}_{i=1}^n$.

У цьому випадку ортопроєктор $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ на нуль-простір $N(\mathcal{L})$ можна знайти так:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x,$$

а ортопроєктор —

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}y,$$

де

$$\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{(-1)}_{ij}(f_j, x)f_i,$$

$$\mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}y = \sum_{s,k=1}^{n} \beta^{(-1)}_{sk}(\varphi_k, y)\varphi_s,$$

$\alpha^{(-1)}_{ij}$ и $\beta^{(-1)}_{sk}$ — елементи матриць, обернених до матриць Грама

$$\Gamma(f_1, f_2, ..., f_n).$$

Існування границі й той факт, що так визначені оператори будуть ортопроєкторами, випливає з теореми 7 [128, с.230] з огляду на монотонність набору ортопроєкторів $\mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})}$ й $\mathcal{P}^{(n)}_{Y_2}$. Якщо ортонормовані системи базисних векторів $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ і $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ зафіксовано, то ортопроєктори на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$ і підпростір Y_2 будують так:

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i,$$

$$\mathcal{P}_{Y_2}y = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n}(y, \varphi_s)\varphi_s.$$

Основний результат та його наслідки

На підставі ізоморфності об'єктів L і $\mathcal{L}$ у банахових просторах автоматично отримуємо основний результат стосовно розв'язності рівняння $Lx = y$.

Теорема 2.3. *Рівняння (2.13) є розв'язним для тих і лише тих $y \in F_1$, що задовольняють умову*

$$\sum_{\beta\in\mathcal{V}} \varphi_\beta(J_2 y)\psi_\beta = 0, \tag{2.26}$$

у разі виконання якої розв'язки рівняння (2.13) матимуть вигляд

$$x = \sum_{\alpha\in\mathfrak{U}} f_\alpha(J_2 z) J_1^{-1} e_\alpha + L^- y \tag{2.27}$$

для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ — узагальнено-обернений до оператора L.

Доведення. Умова (2.26) безпосередньо випливає з умови (2.18) (нагадаємо, що $p_y = J_2 y$). Щоб переконатися в істинності подання (2.27), достатньо показати, що якщо оператор $\mathcal{L}^-$ є узагальнено-оберненим до оператора $\mathcal{L}$, то й оператор $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L} J_2$ буде узагальнено-оберненим до оператора L. Те, що оператор L^- є обмеженим очевидно. З рівностей

$$L^- L L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 L J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 =$$

$$= J_1^{-1}\mathcal{L}^-\mathcal{L}\mathcal{L}^- J_2 = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 = L^-,$$

$$L L^- L = J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2 J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 = J_2^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^-\mathcal{L} J_1 =$$

$$= J_2^{-1}\mathcal{L} J_1 = L$$

й означення оператора, узагальнено-оберненого до вихідного, випливає, що оператор L^- дійсно є таким оператором.

Зазначимо, що одночасно встановлено наступний факт.

Наслідок. *Об'єкти L^- і $\mathcal{L}^-$ є ізоморфними у категорії $Mor(Ban)$. Пара ізометрій (J_2, J_1) перетворює діаграму*

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{L^-} & E_1 \\ J_2\downarrow & & \downarrow J_1 \\ F_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}^-} & E_2 \end{array}$$

на комутативну.

При цьому простори E_1 і F_1, а також простори E_2 і F_2 розкладаються на прямі суми підпросторів

$$F_1 = N(L^-) \oplus \overline{X}_1, \;\; E_1 = \overline{Y}_1 \oplus R(L^-),$$

$$F_2 = N(\mathcal{L}^-) \oplus \overline{X}_2,\ E_2 = \overline{Y}_2 \oplus R(\mathcal{L}^-).$$

Сформулюємо наслідок із теореми (2.3) для випадку сепарабельних просторів.

Наслідок. *Рівняння (2.13) є розв'язним для тих і лише тих $y \in$ $\in F_1$, що задовольняють рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}^{(n)}_{Y_2} J_2 y = \overrightarrow{0}. \tag{2.28}$$

За виконання умови (2.28) розв'язки рівняння (2.13) матимуть вигляд

$$x = \lim_{n\to\infty} J_1^{-1} \mathcal{P}^{(n)}_{N(\mathcal{L})} J_2 z + L^- y$$

для довільного елемента $z \in E_1$; $L^- = J_1^{-1}\mathcal{L}^- J_2$ — оператор, узагальнено-обернений до оператора L.

Зауваження 2.7. *Подання, аналогічні до (2.24) і (2.25), можна отримати також у випадку несепарабельних підпросторів. Для цього треба замінити збіжність послідовностей на збіжність відповідних сіток:*

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} h_x = \lim_{\alpha\in\mathcal{U}} \mathcal{P}^{(\alpha)}_{N(\mathcal{L})} h_x,\ \mathcal{P}_{Y_2} p_y = \lim_{\beta\in\mathcal{V}} \mathcal{P}^{(\beta)}_{Y_2} p_y.$$

Отримані результати дають змогу знаходити проєктори на відповідні підпростори (2.24), (2.25), що являють собою ядро та коядро оператора L з використанням відповідних проєкторів для оператора $\mathcal{L}$, як у випадку сепарабельних, так і несепарабельних просторів. Загальний вигляд цих проєкторів можна одержати з використанням біортогонально спряженої системи до базисної. Запропонований підхід дає можливість досліджувати умови розв'язності розглянутих рівнянь типу (2.13) та (2.14) у функціональних просторах.

2.4. Розвинення методу рядів Неймана для узагальненого обертання на спектрі у просторах Банаха та Фреше

Побудовану вище теорію можна уточнити на класі операторних рівнянь з оператором L, що має вигляд $I - A$ із не обов'язково стискальним оператором A.

Розглядається рівняння

$$(I - A)x = y, \tag{2.29}$$

де $A : B \to B$ — лінійний обмежений оператор; B — простір Банаха з нормою $||\cdot||$ (або простір Фреше зі зліченним набором напівнорм $||\cdot||_n, n \in \mathbb{N}$).

Для оператора A припускатимемо, що існує стала $c > 0 : ||A^n|| \leq \leq c, n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $||\cdot||_m$ існує напівнорма $||\cdot||_k$ така, що $||A^n x||_m \leq c||x||_k$), $\overline{0} \in B$. Задача полягає у знаходженні розв'язків рівняння (2.29) з використанням операторних рядів. Для простоти викладення розглядатимемо випадок, коли B — рефлексивний банахів простір. Щодо можливого узагальнення на випадок загальніших топологічних векторних просторів і послаблення умови рівномірної обмеженості степенів оператора A, то це буде викладено після наведення основних результатів.

Основний результат

Перейдемо до вивчення рівняння (2.29) у рефлексивному просторі Банаха. Найцікавішим випадком для рівняння (2.29) є так званий критичний випадок, коли $\mu = 1$ — точка спектра оператора A, а для оператора $\mu I - A$ немає оберненого. Відомо, що у цьому випадку вихідне рівняння буде розв'язним не при довільних правих частинах, а його розв'язок може бути не єдиним (крім того, рівняння може мати нескінченну кількість розв'язків).

З умови рівномірної обмеженості степенів оператора A випливає [126, с.297], що виконується розклад простору B у пряму суму:

$$B = N(I - A) \oplus \overline{R(I - A)}. \tag{2.30}$$

У праці [319] введено поняття відносного спектра оператора ρ_{NS}. Цю множину визначають так:

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, R(I - \lambda A) = \overline{R(I - \lambda A)}\}.$$

Доведемо низку тверджень стосовно узагальненого обертання оператора $I - A$, отриманих у праці [319]. Переформулюємо деякі з результатів у вигляді теореми, яку потім буде зручно використовувати для дослідження розв'язності рівняння (2.29). Для цього введемо позначення для усередненого оператора й нагадаємо його властивості:

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}, A_0A = AA_0 = A_0^2 = A_0,$$
$$N(A_0) = \overline{R(I-A)}.$$

Теорема 2.4. *Нехай* $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$ *і степені оператора* A *є рівномірно обмеженими. Тоді*

a) $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ *(відносно регулярна точка);*

b) оператор $I-A+A_0$ *є оборотним, а оператор* $I-A$ *є узагальнено-оборотним і* $(I-A)^- = (I-A+A_0)^{-1} - A_0$*;*

c) рівняння (2.29) є розв'язним для тих і тільки тих y*, які задовольняють умову*

$$A_0y = \overline{0}; \tag{2.31}$$

d) якщо умову (2.31) виконано, то множина розв'язків рівняння (2.29) матиме вигляд

$$x = A_0c + G[y] \quad \forall c \in B, \tag{2.32}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(A-A_0)^l\}^{k+1}y - A_0y \tag{2.33}$$

є узагальнений оператор Гріна рівняння (2.29) для будь-якого $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(A)||}$.

Нижче доведено більш загальну теорему. Дослідимо операторне рівняння (2.29) у загальному випадку (без припущення про замкненість образу оператора $I-A$) за схемою, розробленою вище. Покажемо, що операторне рівняння (2.29) завжди можна зробити розв'язним у певному сенсі.

1. Класичні розв'язки.

Якщо множина значень оператора $I-A$ є замкненою, тобто виконується умова $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$, тоді справедливою є теорема 2.4, а умова розв'язності $y \in R(I-A)$ рівняння (2.29) рівносильна умові (2.31) $A_0y = \overline{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків рівняння (2.29) матиме вигляд (2.32).

2. Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(I-A) \neq \overline{R(I-A)}$, та застосуємо теорему 2.4. Нехай $y \in \overline{R(I-A)}$. Тоді умова розв'язності рівняння (2.29) також матиме вигляд $A_0 y = \overline{0}$. Оскільки ядро $N(I-A)$ оператора $I-A$ є доповнювальним підпростором у просторі B (це випливає з розкладу в пряму суму (2.30)), то можна розглянути фактор-простір по ядру оператора $I-A$. Профакторизуємо простір B за ядром $N(I-A)$ й позначимо відповідний фактор-простір через $E = B/N(I-A)$. Нехай $P_{\overline{R(I-A)}}$ і $P_{N(I-A)}$ — відповідно проєктори на підпростори $\overline{R(I-A)} \subset B$ та $N(I-A)$. Тоді звужений оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{A} = P_{\overline{R(I-A)}}(I-A)j^{-1} : E \to R(I-A) \subset \overline{R(I-A)},$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут j — канонічна проєкція банахового простору B на фактор-простір E: $j : B \to E$ [286]. Трійка (B, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $B_1 = P_{N(I-A)}B$. Це дає можливість ввести поняття сильного узагальненого розв'язку [166] для рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x} = y, \overline{x} \in E, \tag{2.34}$$

так само, як це робилося вище.

Використаємо процес поповнення за нормою $||\overline{x}||_{\overline{E}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x}||_F$, де простір $F = \overline{R(I-A)}$ [166]. Тоді розширений оператор $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})} : \overline{E} \to \overline{R(I-A)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{E}$ та $\overline{R(I-A)}$. У силу конструкції сильного узагальненого розв'язку [166] рівняння

$$\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}\overline{x} = y$$

матиме єдиний узагальнений розв'язок $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}^{-1} y$, який позначатимемо через $\widetilde{c} \in \overline{E}$, а простір E буде щільно вкладеним в $\overline{E}$. З огляду на щільність вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in E$ класів еквівалентності, яка збігається до $\widetilde{c}$ за нормою $\overline{E}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$, отримаємо, що вона збігається до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Таку послідовність називають сильним майже розв'язком [166].

Усі сильні майже розв'язки операторного рівняння (2.29) можна записати у вигляді

$$\{c_n + P_{N(I-A)}c\}_{n \in \mathbb{N}} = \{c_n + A_0 c\}_{n \in \mathbb{N}}$$

для будь-якого $c \in B$.

Зауважимо, що означення сильних узагальнених розв'язків та майже розв'язків є еквівалентними у розглянутих просторах для вихідного рівняння (2.29). Поняття майже розв'язків зручно використовувати для того, щоб зрозуміти, як можна знаходити розширення оператора Гріна (2.33) у термінах послідовностей. Якщо $y \in \overline{R(I-A)}$, то існує послідовність $y_n \in R(I-A)$, що до неї збігається. Тоді $G[y_n]$ буде збігатися до $G[y]$ і як c_n можна обрати $G[y_n]$. Таким чином, узагальнений оператор Гріна $G[y]$ також можна розширити до $\overline{G}[y]$. Відмітимо, що якщо $y \in R(I-A)$, то введені вище сильні узагальнені розв'язки будуть класичними.

3. Сильні квазірозв'язки.

Розглянемо елемент $y \notin \overline{R(I-A)}$. Тоді критерій розв'язності $A_0 y = \overline{0}$ рівняння (2.29) не виконується: $A_0 y \neq \overline{0}$. У цьому випадку рівняння (2.29) не має ані класичних, ані сильних узагальнених розв'язків, але існують елементи y з $\overline{B} = N(I-A) \oplus \overline{X}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки

$$||\overline{(I-A)}c - g||_{\overline{B}} = ||\overline{(I-A)(I-A)}^{\ -} y - g||$$

(простір $\overline{X}$ є ізометрично ізоморфним простору $\overline{E}$, а оператор $\overline{I-A}$ є відповідним розширенням оператора $I-A$). Тоді загальний розв'язок варіаційної задачі, який мінімізує норму нев'язки, матиме вигляд

$$c = (\overline{I-A})^{\ -} y + A_0 \overline{c} \quad \forall \overline{c} \in B.$$

Цей розв'язок будемо називати сильним квазірозв'язком рівняння (2.29) за аналогією з тим, як це зроблено вище.

Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 2.5. *Нехай у рівнянні (2.29) лійнійний обмежений оператор А, який діє у рефлексивному просторі Банаха або Фреше, є таким, що його степені є рівномірно обмеженими. У такому випадку:*

(a) Рівняння (2.29) має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$A_0 y = \overline{0}. \tag{2.35}$$

Якщо $y \in R(I-A)$, то розв'язки рівняння (2.29) будуть класичними.

(б) Якщо умова (2.35) виконується, то множину розв'язків рівняння (2.29) можна подати у вигляді операторного ряду:

$$x = A_0\overline{c} + \overline{G}[y] \quad \forall \overline{c} \in B,$$

де $\overline{G}[y]$*– відповідне розширення оператора Гріна* $G[y]$ *(2.33).*

(в) Якщо умова (2.35) не виконується, тобто

$$A_0 y \neq \overline{0}, \tag{2.36}$$

то рівняння (2.29) має множину псевдорозв'язків, яку можна подати так:

$$x = A_0\overline{c} + \overline{G}[y] \quad \forall \overline{c} \in B,$$

де $\overline{G}[y] = (\overline{I - A})^{-}y$.

Зауваження 2.8. *Якщо* $||A|| < 1$, *то оператор* $A_0 = \overline{0}$, *і у формулі (2.33) можна зробити граничний перехід, коли* $\mu \to 1$ *та отримати ряд Неймана. У цьому випадку існуватиме єдиний класичний розв'язок. Таким чином, отримані результати узгоджуються з раніше доведеними та у випадку, коли оператор* A *є стискальним, збігаються зі звичайним рядом Неймана.*

Зауваження щодо посилення результатів

Наведемо теорему з праці [286], з якої буде зрозуміло, як можна узагальнити отримані у попередньому пункті результати на загальніші топологічні простори.

Теорема 2.6. *[286, с.964]. Нехай* E *— віддільний локально-опуклий простір, а* u *— його неперервний ендоморфізм і*

$$A_n = \frac{1 + u + u^2 + ... + u^n}{n}.$$

Припустимо, що

(a) множина $\{A_n(x) : n = 1, 2, ...\}$ *є відносно слабко компактною у просторі* E *для кожного* $x \in E$*;*

(a$'$) множина $\{A_n\}$ *є рівностепенево неперервною ;*

(b) $\lim_n n^{-1}u^n(x) = 0$ *у слабкій топології для кожного* $x \in E$*. Тоді:*

(1) E *— топологічна пряма сума підпросторів* $N(1-u)$ *та* $\overline{R(1-u)}$*;*

(2) якщо π *— проєктування* E *на* $N(1-u)$ *паралельно* $\overline{R(1-u)}$*, то* $\lim_n A_n(x) = \pi(x)$ *у слабкій топології для кожного* $x \in E$*.*

Нарешті, якщо умова (b) виконується у разі заміни слабкої топології вихідною, то те саме справедливо й для твердження (2).

За цих умов після факторизації за схемою, поданою вище, та після поповнення за топологією, індукованою системою напівнорм [166], можна довести, що оператор $\overline{1-u}$ має замкнену множину значень тобто є нормально-розв'язним. Тоді з п. 1, теореми 2.6 випливатиме, що оператор $\overline{1-u}$ є узагальнено-оборотний з узагальнено-оберненим оператором $(\overline{1-u})^{-}$. У цьому випадку множина узагальнених розв'язків рівняння $(1-u)x = y$ матиме вигляд $x = \pi(c)+(\overline{1-u})^{-}y$ для довільного елемента $c \in E$. У разі загальних локально-опуклих просторів подання може не мати вигляд збіжного операторного ряду. Для отримання такого подання у праці [319], а також під час доведення твердження використовували теорему Банаха про обернений оператор для $(1-u+\pi)$, яка виконується не завжди.

В ультрабочкових, бочкових та просторах Фреше теорема 2.6 виконується [286] і розклад аналогічний до (2.32) є справедливим. Якщо простір B буде бочковим, то з умови (a) теореми випливає умова (a') [286, c.965], яку можна прибрати.

Нагадаємо, що *бочкою* у топологічному векторному просторі E називають довільну його замкнену, опуклу, врівноважену та поглинальну множину. Топологічний векторний простір E називають *бочковим*, якщо він є локально-опуклим і кожна бочка в E є околом нуля. Якщо простір E є нормованим або простором Фреше, а u — слабко компактний ендоморфізм, степені якого рівностепенево неперервні, то зі слабкої компактності випливає умова (a), а умова (b) виконується у вихідній топології.

Зауважимо, що такі простори з'являються у ході дослідження багатьох рівнянь математичної фізики. Якщо E — простір Банаха (або Фреше) і умову (b) замінено умовою $n^{-1}||u^n|| \to 0$ або умовою $||u^n|| \le c$ (у просторі Фреше відповідна збіжність буде індукована зліченною системою напівнорм, що породжують топологію простору), то умова (a') автоматично виконуватиметься. Нарешті у рефлексивних просторах умову (a) можна прибрати. Крім того, у праці [410] метод рядів Неймана розповсюджується на випадок правильних операторів. Якщо оператор у правій частині (2.29) замінити на довільний обмежений оператор B, що діє з гільбертового простору H_1 у H_2, то можна повністю дослідити розв'язність рівняння (2.29). Для цього треба скористатися сильним псевдооберненим оператором (див. підрозд. 2.1).

2.5. Формули для знаходження матриць, псевдообернених за Муром—Пенроузом

Тут результати підрозд. 2.4 продемонстровано на прикладах операторів, які є матрицями.

Нагадаємо [82, 285], що задача найменших квадратів полягає у знаходженні такого вектора, який мінімізує вираз

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||Dx - y||, \tag{2.37}$$

де D — $n \times n$-вимірна матриця, а вектор $y \in \mathbb{R}^n$ є фіксованим. Зазначимо, що розв'язок задачі (2.37) може бути не єдиним [326, 82]. Відомо також [285, 326], що з множини всіх векторів, для яких цей мінімум досягається, вектор

$$z = D^+ y,$$

(D^+ — матриця, псевдообернена за Муром—Пенроузом до матриці D) має найменшу норму.

Послідовність матриць $\{U^n, n \in \mathbb{N}\}$ називають *рівномірно обмеженою*, якщо існує стала $c > 0$ така, що $||U^n|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$. Тут $||\cdot||$ означає довільну фіксовану норму в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Надалі розглядатимуться лише матриці D вигляду

$$D = I - U, \tag{2.38}$$

за припущення, що їх степені утворюють рівномірно обмежену послідовність. Для таких матриць справедливі результати підрозд. 2.4 щодо псевдообернення. Сформулюємо їх як наслідки для матриць. Визначимо матрицю

$$U_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k}{n}.$$

Матриця U_0 є матричним ортопроєктором [81, 126] (це є твердження так званої ергодичної теореми [81, 126]). Сформулюємо твердження, наведені у підрозд. 2.4 для матриць вигляду (2.38).

Наслідок. *Матриця* $I-U+U_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *має обернену, яку можна подати у вигляді ряду:*

$$(I-U+U_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U-U_0)^l\}^{k+1} \tag{2.39}$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$, *де* R_μ *— резольвента матриці* $U - U_0$. Матрицю $I-U+U_0$ будемо називати *усередненою матрицею* до матриці $I-U$.

Наслідок. *Матриця* $D = I - U$ *має псевдообернену за Муром—Пенроузом, для якої справедливим є подання*

$$(I-U)^{+} = (I-U+U_0)^{-1} - U_0 \tag{2.40}$$

або у вигляді збіжного за нормою матричного ряду

$$(I-U)^{+} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U-U_0)^l\}^{k+1} - U_0 \tag{2.41}$$

для всіх $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu||}$.

Наслідок. *Матриця* $I - U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *має псевдообернену за Муром—Пенроузом, яку можна подати у вигляді*

$$(I-U)^{+} = \sum_{k=0}^{\infty}(U-U_0)^k - U_0, \tag{2.42}$$

якщо ряд у правій частині є збіжним.

Цю формулу можна отримати внаслідок граничного переходу, коли $\mu \to 1$ у (2.41). При цьому у виразі (2.41) у першій сумі залишиться доданок тільки при $k = 0$ й, таким чином, маємо (2.42).

Матриця U_0 дійсно є матричним ортопроєктором на ядро матриці $I-U$. Тому її можна знайти, розв'язуючи систему рівнянь $(I-U)x = 0$.

Як зазначалося, псевдообернені матриці використовують під час розв'язування багатьох крайових задач. Окрім того, можна навести приклади класів матриць, які застосовуються у теорії стохастичних диференціальних рівнянь та задовольняють вимоги рівномірної обмеженості степенів. Наведемо відповідні означення.

Означення 2.9. *[285]. Матрицю $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$ називають стохастичною, якщо всі її елементи є невід'ємними, а сума елементів довільного рядка дорівнює одиниці.*

Покажемо, що якщо матриця D має вигляд $D = I - P$ (P — стохастична матриця), то вона має псевдообернену за Муром—Пенроузом, яку можна знайти за однією з формул (2.40)—(2.42). Розглянемо матричну m-норму:

$$||A||_m = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Для стохастичної матриці P її m-норма дорівнює одиниці: $||P||_m = 1$. З рівняння Колмогорова—Чепмена [285] випливає, що

$$P^{n+m} = P^n P^m.$$

З цих рівностей отримуємо

$$||P^n||_m \leq ||P||_m^n = 1.$$

Отже, степені стохастичної матриці утворюють рівномірно обмежену множину.

Зазначимо, що отримані формули можна застосовувати для знаходження стаціонарних розподілів у ланцюгах Маркова [285].

Проілюструємо розроблену теорію псевдообернення матриць на прикладі системи масового обслуговування з чотирма ймовірнісними станами як функціями часу $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, що задовольняють систему диференціальних рівнянь Колмогорова—Чепмена такого вигляду [68]:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23})P_2(t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{31}P_3(t), \end{cases}$$

з умовою нормування $P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)+P_3(t) = 1$, де $P_i(t) \geq 0, i = \overline{0,3}$.

Позначимо $\vec{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ й запишемо систему в матричному вигляді, ввівши до розгляду матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ \lambda_{01} & -\lambda_{10} - \lambda_{12} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{12} & -\lambda_{21} - \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{31} \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь Колмогорова можна подати у вигляді такої крайової задачі:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \Lambda \vec{P}(t), \\ l\vec{P}(\cdot) = \sum_{i=0}^{3} P_i(0) = 1. \end{cases} \tag{2.43}$$

Для розв'язування системи (2.43) можна застосовувати перетворення Лапласа. Нагадаємо, що для функції $f(t)$ її перетворення Лапласа має вигляд

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

При цьому похідній $f'(t)$ відповідатиме функція $pF(p) - f(0)$. Обернене перетворення Лапласа здійснюється так:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} F(p) dp.$$

Нехай вектор-функція $\vec{\pi}(p)$ має вигляд $\vec{\pi}(p) = (\pi_0(p), \pi_1(p), \pi_2(p), \pi_3(p))$, де $\pi_i(p)$, $i = \overline{0,3}$, — відповідні образи функцій станів $P_i(t)$ у випадку перетворення Лапласа. Тоді диференціальна система (2.43) перетвориться на лінійну алгебричну систему:

$$\vec{\pi} = Q\vec{\pi} + \vec{g}, \tag{2.44}$$

де $Q = \frac{1}{p}\Lambda$, $\vec{g} = \frac{1}{p}(P_0(0), P_1(0), P_2(0), P_3(0))$, або у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \pi_0(p) = -\frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) + \frac{\lambda_{10}}{p}\pi_1(p) + \frac{P_0(0)}{p}, \\ \pi_1(p) = \frac{\lambda_{01}}{p}\pi_0(p) - \frac{(\lambda_{10}+\lambda_{12})}{p}\pi_1(p) + \frac{\lambda_{21}}{p}\pi_2(p) + \frac{\lambda_{31}}{p} + \frac{P_1(0)}{p}, \\ \pi_2(p) = \frac{\lambda_{12}}{p}\pi_1(p) - \frac{(\lambda_{21}+\lambda_{23})}{p}\pi_2(p) + \frac{P_2(0)}{p}, \\ \pi_3(p) = \frac{\lambda_{23}}{p}\pi_2(p) - \frac{\lambda_{31}}{p}\pi_2(p) + \frac{P_3(0)}{p}, \end{cases}$$

з умовою $\sum_{i=0}^{3} \pi_i(p) = \frac{1}{p}$. Перетворимо систему (2.44) до вигляду

$$(I-Q)\vec{\pi}=\vec{g}. \qquad (2.45)$$

Можливі два випадки:

1) $det(I-Q)\neq 0$. Тоді існує єдиний розв'язок матричної системи (2.45) у вигляді $\vec{\pi}=(I-Q)^{-1}\vec{g}$. Виконання умови нормованості перевіряється безпосередньою підстановкою отриманого розв'язку;

2) $det(I-Q)=0$. У цьому випадку розв'язок матричної системи (2.45) існує для тих і тільки тих правих частин, що задовольняють умову $P_{N(I-Q)^T}\vec{g}=\vec{0}$. За виконання цієї умови множина розв'язків системи має вигляд

$$\vec{\pi}=(I-Q)^{+}\vec{g}+P_{N(I-Q)}\vec{c}$$

для довільного вектора $\vec{c}\in\mathbb{R}^4$, де матриця $(I-Q)^{+}$ є псевдооберненою за Муром—Пенроузом до матриці $(I-Q)$. Виконуючи обернене перетворення Лапласа та перевіряючи умову нормованості знаходимо відповідний розподіл станів. Нехай задано такі коефіцієнти інтенсивностей:

$$\lambda_{01}=0,019,\quad \lambda_{10}=0,65,\quad \lambda_{12}=0,4,$$
$$\lambda_{21}=0,392,\quad \lambda_{23}=0,008, \lambda_{31}=0,008.$$

Розв'язуючи рівняння Колмогорова—Чепмена з урахуванням умови нормування, отримуємо трипараметричну множину ймовірностей станів системи:

$$\begin{cases} P_0(t)=0,52+(0,002+a_{11})0,264^t+(0,005+a_{12})0,729^t+\\ +(-0,527+a_{13})0,991^t,\\ P_1(t)=0,16+(-0,004+a_{21})0,264^t+(-0,001+a_{22})0,729^t+\\ +(-0,155+a_{23})0,991^t,\\ P_2(t)=0,16+(0,002+a_{31})0,264^t+(-0,004+a_{32})0,729^t+\\ +(-0,158+a_{33})0,991^t,\\ P_3(t)=0,16+a_{41}0,264^t+a_{42}0,729^t+(0,84+a_{43})0,991^t, \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} a_{11}=0,077c_1-0,449c_2+0,186c_3;\ a_{12}=0,29c_1-0,177c_2-0,8c_3;\\ a_{13}=0,631c_1+0,626c_2+0,616c_3,\ a_{21}=-0,134c_1+0,784c_2-0,324c_3;\\ a_{22}=-0,052c_1+0,032c_2+0,143c_3;\ a_{23}=0,186c_1+0,184c_2+0,181c_3;\\ a_{31}=0,057c_1-0,336c_2+0,138c_3;\ a_{32}=-0,246c_1+0,149c_2+0,677c_3;\\ a_{33}=0,189c_1+0,187c_2+0,185c_3;\ a_{41}=0,001c_2;\\ a_{42}=0,006c_1-0,004c_2-0,02c_3,\ a_{43}=-1,006c_1-0,977c_2-0,982c_3 \end{cases}$$

для довільних сталих c_1, c_2, c_3 таких, що $P_i(t) \geq 0$. Результати наведено із заокругленнями до тисячних. Наприклад, якщо покласти, що $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$, а момент часу $t = 3$, отримаємо такі ймовірності станів:

$$P_0(3) = 0,001, P_1(3) = 0,001, P_2(3) = 0,001, P_3(3) = 0,97.$$

Бачимо, що у випадку прямування до нескінченності часу t імовірності, які визначають функції станів, прямують до чисел відповідно $0,52, 0,16, 0,16, 0,16$. Цей приклад ілюструє, як можна звести систему масового обслуговування, що описується звичайними диференціальними рівняннями зі стохастичними коефіцієнтами, до алгебричної системи, для дослідження якої використовують псевдообернені матриці.

2.6. Теорема про неявну функцію у просторах Фреше, Банаха та Гільберта

Цей підрозділ присвячено застосуванню теорії сильних узагальнено-обернених операторів, введених вище, під час дослідження нелінійних операторних рівнянь.

Задачі математичної фізики часто зводять до розв'язування нелінійних рівнянь, чи систем рівнянь вигляду

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0, \tag{2.46}$$

де $\mathcal{F}(x, \varepsilon)$ — нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) в околі $w = w(x_0, \varepsilon_0) \subset E_1 + E$ відомого розв'язку $x = x_0$ рівняння (2.46) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ зі значеннями в E_2; E_1, E_2, E — простори Фреше, Банаха або Гільберта.

Ставиться задача про побудову розв'язків $x = x(\varepsilon)$ рівняння (2.46) в околі w точки (x_0, ε_0), які при $\varepsilon = \varepsilon_0$ перетворюються на породжувальний розв'язок $x = x_0$. Якщо похідна Фреше $\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ існує та є оборотним оператором, то в околі w, як випливає з класичної теореми про неявну функцію [193], існує єдиний неперервний (гладкий, аналітичний) розв'язок $x = x_0 + y(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

У теорії розгалуження [64], [160] розглядається питання про існування та кількість малих розв'язків $y(\varepsilon - \varepsilon_0)$, а також про побудову їх асимптотики за малим параметром $\varepsilon - \varepsilon_0$ у тому випадку, коли оператор $Q = -\mathcal{F}_x(x_0, \varepsilon_0)$ має нетривіальний підпростір нулів $N(Q)$, тобто не виконуються припущення класичної теореми про неявну функцію. За цих умов у околі $w(x_0, \varepsilon_0)$ може існувати декілька розв'язків чи множина розв'язків. У такому випадку точку (x_0, ε_0) називають точкою розгалуження розв'язків рівняння. Надалі для зручності вважатимемо, що $x_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$. Тоді вихідне рівняння (2.46) можна записати так:

$$Qx = \varepsilon R(x, \varepsilon), R(0, 0) = 0,$$

у припущенні, що нелінійність $R(x, \varepsilon)$ задовольняє умову: $R_x(0, 0) = 0$ (похідна Фреше за змінною x).

Якщо $\varepsilon = \lambda$ — числовий параметр і за всіх можливих значень λ: $R(0, \lambda) = 0$, то отримане рівняння називають задачею про точки біфуркації. Точками біфуркації є ті значення параметра λ, в околі яких існують нетривіальні розв'язки рівняння.

Основи теорії розгалуження функціональних рівнянь закладено ще на початку XX ст. у працях видатних математиків О.М.Ляпунова та Е.Шмідта. Дослідження О.М.Ляпунова пов'язані з відомою задачею про рівноважні фігури, а Е.Шмідта — із загальною теорією лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь.

Зазначимо, що якщо ядро $N(Q)$ оператора Q є скінченновимірним, то цю задачу досліджували за допомогою відомої леми Шмідта для фредгольмових та нетерових операторів [326]. Метод, що застосовується під час розв'язування задач теорії розгалуження, називають методом Ляпунова–Шмідта. Роботи пов'язані з теоремами про неявні функції досліджували в працях [140, 193, 289, 376, 427].

Розглянемо нелінійне рівняння (2.46):

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = 0,$$

за умови, що його можна записати у вигляді

$$Qx = \varepsilon R(x, \varepsilon), \tag{2.47}$$

у просторах Фреше E_1 та E_2 з нелінійністю $R(x, \varepsilon)$, яка задовольняє умову $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$ (похідна у сенсі Фреше за першою змінною), де ε - достатньо малий числовий параметр. Задача полягає у знаходженні такого розв'язку $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків породжувальної задачі $Qx = 0$ і є визначеним і неперервним у околі цього розв'язку. Зауважимо, що аналогічні результати є справедливими для просторів Банаха.

Класичний випадок. Спочатку розглянемо випадок, коли оператор Q такий, що пара (X, Y) є Q-допустимою згідно з означенням, наведеним у підрозд. 2.1. Тоді розв'язок породжувальної задачі можна подати у вигляді $x = P_{N(Q)}c$ (c — довільний елемент простору E_1). Знайдемо необхідну умову існування розв'язку нелінійного рівняння.

Теорема 2.7. *(необхідна умова). Нехай рівняння (2.47) має розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків $x(0) = P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0 \in E_1$. Тоді c_0 повинен задовольняти рівняння*

$$F(c) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c, 0) = 0. \tag{2.48}$$

Це рівняння за аналогією зі скінченновимірним випадком [168] називатимемо рівнянням для породжувальних елементів [326].

Доведення. Припустимо, що нелінійне рівняння має розв'язок $x = x(\varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків $x(0) = P_{N(Q)}c_0$ породжувального рівняння $Qx = 0$. Підставимо розв'язок $x = x(\varepsilon)$ у рівняння (2.47) і запишемо умову розв'язності рівняння (2.46):

$$P_{N(Q^*)}R(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Перейдемо до границі, коли $\varepsilon \to 0$ (це можна зробити з огляду на умови, наведені вище). Використовуючи при цьому неперервність R в околі породжувального розв'язку, отримуємо рівняння (2.48). Таким чином, необхідна умова існування розв'язку задачі (2.46) про неявну функцію, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на розв'язок $P_{N(Q)}c_0$, полягає в тому, щоб елемент $c = c_0 \in E_1$ був розв'язком операторного рівняння для породжувальних елементів (2.48).

Знайдемо достатню умову існування розв'язку нелінійного рівняння. Для цього необхідною є додаткова гладкість за x від нелінійності $R(x(\varepsilon), \varepsilon)$ в околі породжувального розв'язку.

Нехай елемент $c = c_0$ задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.48). Зробимо заміну змінних: $x(\varepsilon) = = P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon)$. Тоді рівняння (2.47) набуде вигляду

$$Qy(\varepsilon) = \varepsilon R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon). \tag{2.49}$$

Відображення $y(\varepsilon)$ задовольняє умову $y(0) = 0$. Виділимо в (2.49) лінійну частину в околі породжувального розв'язку:

$$R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0, 0) + ly(\varepsilon) + \mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon), \tag{2.50}$$

$$ly(\varepsilon) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0)y(\varepsilon)$$

та запишемо умову розв'язності рівняння (2.49) відносно y:

$$P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

За виконання цієї умови розв'язки рівняння (2.49) матимуть вигляд

$$y(\varepsilon) = \overline{y}(\varepsilon) + P_{N(Q)}c(\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)] := \varepsilon Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y(\varepsilon), \varepsilon).$$

Підставивши цей вираз в умову розв'язності з урахуванням подання (2.50) та умови (2.48), отримаємо операторне рівняння відносно $c(\varepsilon)$:

$$B_0 c(\varepsilon) = g(\varepsilon), \tag{2.51}$$

де $B_0 = P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}$, $g(\varepsilon) = -P_{N(Q^*)}l\overline{y}(\varepsilon) - P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon)$.

За виконання умови $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$ один із розв'язків рівняння (2.51) матиме вигляд $c(\varepsilon) = B_0^- g(\varepsilon)$. Тоді отримаємо таку операторну систему відносно $y(\varepsilon), c(\varepsilon), \overline{y}(\varepsilon)$:

$$\begin{cases} y(\varepsilon) = P_{N(Q)}c(\varepsilon) + \overline{y}(\varepsilon), \\ c(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)], \end{cases}$$

яку запишемо у вигляді

$$u(\varepsilon) = Lu(\varepsilon) + g(\varepsilon). \tag{2.52}$$

Тут $u(\varepsilon) = (y(\varepsilon), c(\varepsilon), \overline{y}(\varepsilon))^T$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & P_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1(\varepsilon) \\ g_2(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$L_1 z = -B_0^- P_{N(Q^*)} l z,$$

$$g_1(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)} \mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon), \;\; g_2(\varepsilon) = G[y(\varepsilon)].$$

Тоді $u(\varepsilon) = (I - L)^{-1} g(\varepsilon) = \mathcal{S}(\varepsilon) u(\varepsilon)$, де

$$\mathcal{S}(\varepsilon) u(\varepsilon) = (I - L)^{-1} g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I & P_{N(Q)} & P_{N(Q)} L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} g(\varepsilon),$$

$$\mathcal{S}(\varepsilon) \begin{bmatrix} y(\varepsilon) \\ c(\varepsilon) \\ \overline{y}(\varepsilon) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -P_{N(Q)} B_0^- P_{N(Q^*)} \mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) - P_{N(Q)} B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(\varepsilon)] + G[y(\varepsilon)] \\ -B_0^- P_{N(Q^*)} \mathcal{R}(y(\varepsilon), \varepsilon) - B_0^- P_{N(Q^*)} l G[y(\varepsilon)] \\ G[y(\varepsilon)] \end{pmatrix}.$$

З огляду на малість ε завжди можна досягти того, щоб оператор $\mathcal{S}(\varepsilon)$ був стискальним. Скориставшись принципом стискальних відображень [193], отримаємо таку теорему.

Теорема 2.8. *(достатня умова). Нехай виконуються умови:*

1. *B_0, Q є узагальнено-оборотними операторами;*
2. *$P_{N(B_0^*)} P_{N(Q^*)} = 0$.*

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in E_1$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.48), існує неперервний розв'язок рівняння (2.47). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу:

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B_0^- P_{N(Q^*)} \{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l \overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)} c_0, 0) - l y_k(\varepsilon),$$

$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k \to \infty} x_k(\varepsilon),$$

$$G[y_k(\varepsilon)] = \varepsilon B^- R(P_{N(Q)} c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)} c_0, 0) = 0$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$.

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами

Спочатку доведемо таке твердження.

Наслідок. *Нехай $F(c)$ має похідну Фреше для кожного елемента $c = c_0$ простору E_1, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.48). Якщо оператор B_0 має обмежений обернений, то рівняння (2.47) має єдиний розв'язок для кожного c_0.*

Доведення. Розглянемо різницю

$$F(c_0 + \varepsilon) = F(c_0 + \varepsilon) - F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}(c_0 + \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$-P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}\varepsilon +$$

$$+P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}\varepsilon, \varepsilon) = B_0[\varepsilon] + P_{N(Q^*)}\mathcal{R}(P_{N(Q)}\varepsilon, \varepsilon).$$

Звідси випливає, що $B_0 = F'(c_0)$. Оскільки оператор $F'(c_0) = \frac{dF(c)}{dc}|_{c=c_0}$ (похідна Фреше від оператора F) оборотний, то для оператора B_0 виконуються умови теореми 2.8. Таким чином, умова оборотності оператора B_0 пов'язує між собою необхідну та достатню умови. У скіченновимірному випадку ця умова є еквівалентною умові простоти кореня [105].

Зауваження щодо посилення результатів. Використовуючи поняття сильного узагальнено-оберненого оператора можна довести загальніше твердження, ніж у достатній умові 2.8. Необхідна умова у цьому випадку не змінюється. Сформулюємо аналог теореми 2.8.

Теорема 2.9. *Нехай виконуються такі умови:*

1) Q та B_0 — відповідно сильні (X_1-, Y_1), (X_2, Y_2)-узагальнено-оборотні оператори ;

2) $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in \overline{E}_1$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.48), існує узагальнений розв'язок $x(\varepsilon)$ рівняння (2.47). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу:

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -B^{-}_{0X_2,Y_2}P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$
$$x_k(\varepsilon) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$
$$G[y_k(\varepsilon)] = \varepsilon Q^{-}_{X_1,Y_1} R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$
$$F(c_0) = P_{N(Q^*)} R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0$$

для $y_0(\varepsilon) = 0, c_0(\varepsilon) = 0, \overline{y}_0(\varepsilon) = 0$, *де* $Q^{-}_{X_1,Y_1}, B^{-}_{0X_2,Y_2}$ *— сильні узагальнено-обернені оператори.*

Зауваження 2.9. *Техніка доведення цієї теореми не відрізняється від доведення попередньої, але теорема 2.8 є загальнішою з огляду на те, що умова замкненості множини значень операторів Q та B_0 не припускається.*

Розглянемо тепер те саме рівняння, але визначене у просторах Гільберта $E_1 = H_1, E = H, E_2 = H_2$. Геометрія цих просторів багатша, і, як випливає з результатів, отриманих вище, довільний лінійний обмежений оператор має сильний псевдообернений. Зважаючи на це, отримаємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in H_1$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (2.48), існує узагальнений розв'язок $x(\varepsilon)$ рівняння (2.47). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\begin{cases} y_{k+1}(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(Q)}c_k(\varepsilon) + \overline{y}_k(\varepsilon), \\ c_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^{+}\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) + l\overline{y}_k(\varepsilon)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(\varepsilon) = G[y_k(\varepsilon)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(\varepsilon), \varepsilon) = R(\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon) - R(\mathcal{P}_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(\varepsilon),$$
$$x_k(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \quad x(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(\varepsilon),$$
$$G[y_k(\varepsilon)] = \overline{Q}^{+} R(\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + y_k(\varepsilon), \varepsilon),$$
$$F(c_0) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} R(\mathcal{P}_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

збіжного для довільних початкових значень $y_0(\varepsilon)$, $c_0(\varepsilon)$, $\overline{y}_0(\varepsilon)$, *де* $\overline{B}_0^{+}, \overline{Q}^{+}$ *– сильні псевдообернені за Муром—Пенроузом оператори.*

Зауваження 2.10. *Рівняння для породжувальних елементів (2.48) у скінченновимірному випадку збігається з рівнянням для породжувальних сталих, які використовувалися в [326].*

Приклад. Продемонструємо, як можна застосовувати отримані теореми для подання розв'язків нелінійного операторного рівняння Ляпунова у просторі Гільберта в критичному (резонансному) випадку (коли порушується єдиність розв'язку породжувального рівняння).

Дослідимо рівняння вигляду

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) = AX + XB + \varepsilon X Q_1 X - Q_2 = 0, \tag{2.53}$$

де $A, B, Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}(H)$ — відомі лінійні обмежені оператори, що діють у просторі Гільберта H, оператор $X \in \mathcal{L}(H)$ є невідомим; ε — малий параметр.

Розглянемо породжувальне рівняння

$$\mathcal{F}(X, 0) = AX + XB - Q_2 = 0. \tag{2.54}$$

У цьому випадку $R(X, \varepsilon) = \varepsilon X Q_1 X$. Ввівши позначення $QX := AX + XB$, вираз (2.54) запишемо так:

$$QX = Q_2.$$

Тоді узагальнені розв'язки (2.54) набудуть вигляду

$$X = \overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C, \tag{2.55}$$

де довільний оператор C належить $\mathcal{L}(H)$ за виконання умови $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} Q_2 = 0$.

На підставі наведених теорем, сформулюємо таке твердження.

Теорема 2.10. *(необхідна умова). Нехай існує неперервний розв'язок рівняння (2.53), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із розв'язків породжувальної задачі (2.54) вигляду (2.55) з оператором $C = C_0$. Тоді C_0 повинен задовольняти операторне рівняння для породжувальних операторів:*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)} (\overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C) Q_1 (\overline{Q}^{+} Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C) = 0. \tag{2.56}$$

Таким чином, теорема 2.10 є необхідною умовою існування розв'язку операторного рівняння типу Ляпунова (2.53). Для отримання достатньої умови існування розв'язку операторного рівняння Ляпунова (2.53), так само, як і при доведенні теореми 2.8, зробимо заміну змінних:

$$X(\varepsilon) = Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2.$$

Тоді отримаємо рівняння

$$QY(\varepsilon) = -\varepsilon(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2), \quad (2.57)$$

$$Y(0) = 0.$$

Умова розв'язності для (2.57) набуде вигляду

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2) = 0. \quad (2.58)$$

За виконання умови (2.58) розв'язки будуть такими:

$$Y(\varepsilon) = \overline{Y}(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C(\varepsilon),$$

де

$$\overline{Y}(\varepsilon) = G[Y(\varepsilon)] =$$
$$= -\varepsilon\overline{Q}^{+}(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2).$$

Неважко перевірити, що у цьому випадку

$$lY(\varepsilon) = Y(\varepsilon)Q_1(\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2) + (\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1Y(\varepsilon).$$

Отже, отримаємо таку операторну систему:

$$Y(\varepsilon) = \overline{Y}(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C(\varepsilon),$$

$$\overline{Y}(\varepsilon) = -\varepsilon\overline{Q}^{+}(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2)Q_1(Y(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^{+}Q_2),$$
$$B_0C(\varepsilon) = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}Y(\varepsilon)Q_1Y(\varepsilon) - \mathcal{P}_{N(Q^*)}l\overline{Y}(\varepsilon).$$

Використовуючи наслідок з достатньої умови 2.8 для просторів Гільберта, отримуємо таке твердження.

Теорема 2.11. *(достатня умова). Нехай* $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$. *Тоді для довільного оператора* $C = C_0 \in \mathcal{L}(H)$, *який задовольняє рівняння для породжувальних операторів (2.56), існує неперервний узагальнений розв'язок* $x(\varepsilon)$ *рівняння (2.53). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу:*

$$Y_{k+1}(\varepsilon) = \overline{Y}_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_k(\varepsilon),$$

$$C_{k+1}(\varepsilon) = -\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}Y_k(\varepsilon)Q_1Y_k(\varepsilon) - \mathcal{P}_{N(Q^*)}l\overline{Y}_k(\varepsilon),$$
$$\overline{Y}_{k+1}(\varepsilon) = G[Y_k(\varepsilon)],$$
$$X_k(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + Y_k(\varepsilon) + \overline{Q}^+Q_2, \quad X(\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} X_k(\varepsilon),$$
$$G[Y_k(\varepsilon)] = -\varepsilon\overline{Q}^+(Y_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2)Q_1(Y_k(\varepsilon) + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0 + \overline{Q}^+Q_2),$$

$$F(C_0) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}(\overline{Q}^+Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0)Q_1(\overline{Q}^+Q_2 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0) = 0$$

для $Y_0(\varepsilon) = 0, C_0(\varepsilon) = 0, \overline{Y}_0(\varepsilon) = 0$, *де* $\overline{B}_0^+, \overline{Q}^+$ *— сильні псевдообернені за Муром—Пенроузом оператори.*

РОЗДІЛ 3

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ БАНАХА ТА ГІЛЬБЕРТА

3.1. Періодичні розв'язки рівняння Хіла

Уцьому розділі попередні результати застосовують до дослідження розв'язності періодичної крайової задачі для рівняння Хіла у просторі Гільберта. Отримано критерій розв'язності такої задачі, побудовано узагальнений оператор Гріна, за допомогою якого подано відповідну множину періодичних розв'язків.

Постановка задачі. Розглянемо у дійснозначному просторі Гільберта H рівняння Хіла [108]:

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \tag{3.1}$$

з періодичною умовою

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w). \tag{3.2}$$

У рівнянні (3.1) T — додатний самоспряжений оператор. Нехай $T^{\frac{1}{2}} \geq$ $\geq \lambda I$ — квадратний корінь з оператора T. Задача полягає у знаходженні умов розв'язності та побудові розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2). Оскільки оператор T є замкненим, то [144, 146] область визначення $D(T^{\frac{1}{2}})$ оператора $T^{\frac{1}{2}}$ є простором Гільберта відносно скалярного добутку $(T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u)$.

Зробивши заміну змінних:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}}x_2(t) + r\ cos(tT^{\frac{1}{2}})z, \\ \dot{x}_2(t) = -T^{\frac{1}{2}}x_1(t) + r\ sin(tT^{\frac{1}{2}})z, \end{cases} \tag{3.3}$$

(аналогічну до заміни типу Ван дер Поля, коли $r = 0$), отримаємо неоднорідну операторну систему диференціальних рівнянь з відповідною крайовою умовою

$$x_1(0) = x_1(w), \quad x_2(0) = x_2(w) + rT^{-\frac{1}{2}}cos(wT^{\frac{1}{2}})z - rT^{-\frac{1}{2}}z. \tag{3.4}$$

Тут $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, z — довільний елемент простору H.

Еволюційним оператором для рівняння (3.3) при $r=0$ буде сильно неперервна унітарна група, яку можна подати у вигляді такого оператора:

$$U(t):=U(t,0)=\begin{pmatrix} cos\ tT^{\frac{1}{2}} & sin\ tT^{\frac{1}{2}} \\ -sin\ tT^{\frac{1}{2}} & cos\ tT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Відомо [12, 224], що унітарна група $U(t)$ не є стискальною. Нагадаємо її властивості:

$$U^n(t)=\begin{pmatrix} cos\ ntT^{\frac{1}{2}} & sin\ ntT^{\frac{1}{2}} \\ -sin\ ntT^{\frac{1}{2}} & cos\ ntT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}=U(nt), ||U^n(t)||=1, n\in\mathbb{N}.$$

Вводячи до розгляду новий простір Гільберта $H_{T^{\frac{1}{2}}}=D(T^{\frac{1}{2}})\oplus$ $\oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ зі скалярним добутком $(<u,v>,<u,v>)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}}=(T^{\frac{1}{2}}u,T^{\frac{1}{2}}u)+$ $+(T^{\frac{1}{2}}v,T^{\frac{1}{2}}v)$ і вектор $\varphi==(x_1,x_2)^T$, задачу (3.3), (3.4) на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ запишемо у вигляді

$$\dot{\varphi}(t)=A\varphi(t)+f(t), \tag{3.5}$$

$$\varphi(0)=\varphi(w)+\alpha, \tag{3.6}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

а вектор-функція $f(t)$ та вектор α — відповідно

$$f(t)=(r\ cos(tT^{\frac{1}{2}})z, r\ sin(tT^{\frac{1}{2}})z)^T),$$

$$\alpha=(0,rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z-z))^T.$$

Основний результат. Дослідимо питання щодо розв'язності крайової задачі (3.5), (3.6). Розв'язок задачі (3.5) можна подати так:

$$\varphi(t)=U(t)c+\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

для довільного елемента $c \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Підставляючи $f(t)$, остаточно отримаємо

$$\varphi(t) = U(t)c + \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(tT^{\frac{1}{2}})z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Підставивши (3.7) у крайову умову (3.6), дійшли висновку про еквівалентність розв'язності крайової задачі (3.5), (3.6) та операторного рівняння:

$$(I - U(w))c = g, \tag{3.8}$$

де

$$g = \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо операторне рівняння (3.8). При цьому використовуватимемо результати розд. 2.

1. Класичні узагальнені розв'язки крайової задачі (3.1), (3.2).

Припустимо, що множина значень оператора $I - U(w)$ є замкненою, тобто $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$. Тоді операторна система (3.8) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли [319]

$$U_0(w)g = 0, \tag{3.9}$$

де

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U(kw)}{n}$$

є ортопроєктором, який проєктує простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ на власний підпростір одиниці $1 \in \sigma(U(w))$ [126] оператора $I - U(w)$, тобто проєктор на коядро оператора $I - U(w)$ дорівнює $U_0(w)$: $\mathcal{P}_{N((I-U(w))^*)} = U_0(w)$. За виконання умови розв'язності, розв'язки рівняння (3.8) матимуть вигляд [319]

$$c = U_0(w)\overline{c} +$$

$$+ (\sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))g \quad \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Підставивиши їх у (3.7) знаходимо всі розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6):

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f,\alpha])(t) \ \ \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.10}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) =$$

$$= U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z-z)\end{pmatrix}-$$

$$-U(t)U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(cos(wT^{\frac{1}{2}})z-z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}sin(tT^{\frac{1}{2}})z \\ 0\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

є узагальненим оператором Гріна задачі (3.5),(3.6).

2. Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(I-U(w)) \neq \overline{R(I-U(w))}$, але елемент g є таким, що $g \in \overline{R(I-U(w))}$. Тоді умову (3.9) розв'язності $U_0(w)g = 0$ виконано [126, 319].

Унаслідок того, що степені оператора монодромії є рівномірно обмеженими [126, с.299], справедливим є розклад

$$H_{T^{\frac{1}{2}}} = N(I-U(w)) \oplus \overline{R(I-U(w))},$$

тому ядро $N(I-U(w))$ оператора $I-U(w)$ є доповнювальним підпростором у $H_{T^{\frac{1}{2}}}$, як і в розд. 2. Профакторизувавши простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ за ядром $N(I-U(w))$, отримаємо оператор

$$(I-U(w))P_{\overline{R(I-U(w))}} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w)) \to$$

$$\to R(I-U(w)) \subset \overline{R(I-U(w))},$$

де $\mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}} = \mathcal{P}_{N((I-U(w))^*)}$ — ортопроєктор на підпростір $\overline{R(I-U(w))} \subset H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Таким чином, отриманий оператор $(I-$ $-U(w))\mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}$ буде ін'єктивним. Далі використаємо процес поповнення за нормою $||(I-U(w))\mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}x||_{R(I-U(w))}$ [32, с.504—505], [166]. Розширений оператор

$$\widetilde{I-U(w)} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))} \to \overline{R(I-U(w))}$$

буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$ та $\overline{R(I-U(w))}$. З огляду на [166] рівняння

$$(I-\widetilde{U(w)})x = g$$

матиме єдиний сильний узагальнений розв'язок, який позначатимемо як $x := \widetilde{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$, і простір $H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))$ буде щільно вкладеним в $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$.

Застосуємо еквівалентне до узагальненої розв'язності формулювання поняття майже розв'язності. З огляду на щільність вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I- -U(w))$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$, отримаємо, що вона збіжна до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Таку послідовність називають сильним майже розв'язком (див. докладніше в [166, с.26—29]). Тоді множина усіх сильних майже розв'язків операторного рівняння (3.8) матиме вигляд

$$\{c_n + P_{N(I-U(w))}\overline{c}, n \in \mathbb{N}\} = \{c_n + U_0(w)\overline{c}, n \in \mathbb{N}\}$$

для довільного $\overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Отже, сильні майже розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) можна подати у вигляді послідовності

$$\{\varphi_n(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + U(t)c_n, n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.12}$$

яка збігається до $U(t)\widetilde{c}$ у просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$. Відомо, що існування сильних узагальнених розв'язків еквівалентне існуванню сильних майже розв'язків [166]. Якщо елемент g належить до образу відповідного оператора $I-U(w)$: $g \in R(I-U(w))$, то сильні узагальнені розв'язки будуть класичними. У даному випадку це означає, що $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$.

3. Псевдорозв'язки.

Розглянемо випадок, коли елемент $g \notin \overline{R(I-U(w))}$, тобто критерій розв'язності відповідного рівняння не виконано. Це означає, що $U_0(w)g \neq 0$. У цьому випадку звичайних розв'язків рівняння (3.8) не існує, але є елементи c із простору $H_{T^{\frac{1}{2}}}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки $||(I-U(w))c-g||_{H_{T^{\frac{1}{2}}}}$ [326]:

$$c = (I-U(w))^{+}g + U_0(w)\overline{c} \quad \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Ці елементи й називають псевдорозв'язками. У тому випадку, коли множина значень є незамкненою $R(I - U(w)) \neq \overline{R(I - U(w))}$, треба замінити оператор $I - U(w)$ на розширений $\overline{R(I - U(w))}$, тоді отримаємо сильні псевдорозв'язки:

$$c = \overline{(I - U(w))}^{+} g + U_0(w)\overline{c} \quad \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Елемент $(I - U(w))^{+} g$ $(\overline{(I - U(w))}^{+} g)$ із цієї множини має найменшу норму. Тоді множина всіх псевдорозв'язків крайової задачі (3.5), (3.6) знову матиме вигляд (3.10). Таким чином, справедливою є теорема.

Теорема 3.1. *Нехай задано крайову задачу (3.5), (3.6).*

1. Сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) існують тоді й тільки тоді, коли неоднорідність у (3.8) належить замиканню множини значень оператора $\overline{R(I - U(w))}$, тобто неоднорідність така, що виконується умова

$$U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}} (cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Якщо додатково вектор

$$(rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z; rT^{-\frac{1}{2}} (cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z))^{T} \in R(I - U(w)),$$

то розв'язки будуть класичними узагальненими.

За виконання цієї умови (3.13) сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f, \alpha])}(t),$$

де $\overline{(G[f, \alpha])}(t)$ – розширення оператора $(G[f, \alpha])(t)$ на простір $\overline{H}_{T^{\frac{1}{2}}}$.

2. Сильні псевдорозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} sin(wT^{\frac{1}{2}})z \\ rT^{-\frac{1}{2}} (cos(wT^{\frac{1}{2}})z - z) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{3.14}$$

За виконання цієї умови (3.14) сильні псевдорозв'язки крайової задачі (3.5), (3.6) мають вигляд

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f, \alpha])}(t).$$

Приклади. Проілюструємо отримані вище твердження на прикладах.

1. Розглянемо періодичну крайову задачу для рівняння, що описує коливання маятника:

$$\ddot{x}(t) = -(\frac{2\pi}{\omega})^2 x(t), \tag{3.15}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{3.16}$$

Зробимо заміну змінних: $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \frac{2\pi}{\omega} x_2(t) + r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t$, та запишемо цю задачу у вигляді крайової задачі для системи рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{2\pi}{\omega} x_2(t) + r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t, \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{2\pi}{\omega} x_1(t) + r\ sin\frac{2\pi}{\omega}t, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$x_1(0) = x_1(\omega). \tag{3.18}$$

Фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи для (3.17), нормована у нулі, є такою:

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{\omega}t & sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ -sin\frac{2\pi}{\omega}t & cos\frac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix}.$$

Введемо допоміжні вектори:

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, \quad f(t) = (r\ cos\frac{2\pi}{\omega}t, r\ sin\frac{2\pi}{\omega}t)^T.$$

Крайова задача (3.17), (3.18) є нерегулярною [326] у сенсі, що має множину періодичних розв'язків (на відміну від регулярного випадку). Тоді згідно з [326] множина всіх ω-періодичних розв'язків задачі (3.17), (3.18) матиме вигляд

$$z(t, c) = X(t)c + (G[f])(t)$$

для довільного вектора $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Тут $(G[\cdot])(t)$ — узагальнений оператор Гріна періодичної задачі (3.17), (3.18), який можна знайти [326], наприклад, так:

$$(G[f])(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

У цьому випадку перетворення $X(t)$ є ортогональним і таким, що зберігає площі [12]: $X^{-1}(t) = X^T(t)$. Простим підрахунком можна переконатися, що $(G[f])(t) = (\frac{r\omega}{2\pi}sin\frac{2\pi}{\omega}t, 0)^T$. Отже, множина всіх ω-періодичних розв'язків крайової задачі (3.17), (3.18) матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t,c,r) \\ x_2(t,c,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{\omega}t & sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ -sin\frac{2\pi}{\omega}t & cos\frac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{r\omega}{2\pi}sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

для довільних $c_1, c_2, r \in \mathbb{R}$.

2. Розглянемо крайову задачу (3.17), (3.18) з додатковими крайовими умовами (перевизначену):

$$x_2(0) = x_2(\frac{\omega}{4}) = 0, \tag{3.20}$$

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t)dt = \alpha \neq 0. \tag{3.21}$$

Покажемо, що ця задача має розв'язок для довільного числа $\alpha \in \mathbb{R}$. Підставивши другу компоненту розв'язку (3.19) в умову (3.20), маємо

$$x_2(0) = c_2 = 0, \quad x_2(\frac{\omega}{4}) = -c_1 = 0.$$

Після підстановки у першу компоненту отримаємо, що $x_1(t,c,r) = \frac{r\omega}{2\pi}sin\frac{2\pi}{\omega}t$. Враховуючи умову (3.21), маємо

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t,c,r)dt = \frac{r\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\omega}{2}} sin\frac{2\pi}{\omega}tdt = \frac{r\omega^2}{2\pi^2} = \alpha.$$

Звідси $r = \frac{2\pi^2\alpha}{\omega^2}$. Отже, розв'язок крайової задачі (3.17)—(3.21) є таким:

$$(x_1(t), x_2(t))^T = (\frac{\pi\alpha}{\omega}sin\frac{2\pi}{\omega}t, 0)^T.$$

Зауваження 3.1. *Без додаткового параметра r така задача не мала б розв'язків.*

3. Розглянемо крайову задачу (3.17)—(3.20), на розв'язках якої необхідно мінімізувати критерій якості

$$\int_0^1 x_1(t,c,r)dr \to \inf_{t\in\mathbb{R}}. \tag{3.22}$$

Згідно з першим прикладом $c_1 = c_2 = 0$. Тоді інтеграл у (3.22) набуде значення

$$\int_0^1 x_1(t,c,r)dr = \frac{\omega}{2\pi} sin\frac{2\pi}{\omega}t \int_0^1 rdr = \frac{\omega}{4\pi} sin\frac{2\pi}{\omega}t.$$

Неважко побачити, що задача (3.22) розв'язна і найменше значення дорівнює $-\frac{\omega}{4\pi}$ (досягається у точках вигляду $t_k = = (\frac{3}{4} + k)\omega, k \in \mathbb{Z}$).

Зауваження 3.2. *Аналогічним чином у рівняння коливань маятника можна ввести довільну кількість додаткових параметрів та за допомогою доведених вище теорем дослідити умови розв'язності крайових задач, які можуть мати різну кількість лінійно незалежних розв'язків або не мати взагалі.*

Зауваження 3.3. *До операторного рівняння Хіла вигляду (3.1) можна звести лінійні хвильові рівняння (див., наприклад, [224, с.321]), що дає змогу досліджувати крайові задачі для них.*

3.2. Умови біфуркації розв'язків рівняння Хіла

У цьому підрозділі проілюстровано отримані результати та досліджено умови біфуркації розв'язків рівняння Хіла у тих випадках, коли незбурена крайова задача має або не має розв'язки. Для зручності читання та формулювання результатів наведемо ті факти, які надалі використовуватимуться.

Допоміжні твердження. Розглянемо у дійсному просторі Гільберта H рівняння Хіла

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0 \tag{3.23}$$

з крайовими умовами

$$y(0) - y(w) = \alpha_1, \quad \dot{y}(0) - \dot{y}(w) = \alpha_2, \tag{3.24}$$

за тих самих припущень на оператор T, що і у підрозд. 3.1, та елементи α_1, α_2, за яких незбурена задача не має розв'язків: $\alpha_1, \alpha_2 \in H$. Після заміни змінних отримаємо операторну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = T^{\frac{1}{2}} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -T^{\frac{1}{2}} x_1(t) \end{cases} \tag{3.25}$$

з крайовими умовами

$$x_1(0) - x_1(w) = \alpha_1, \quad x_2(0) - x_2(w) = \alpha_2, \tag{3.26}$$

$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, або як задачу на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$:

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \tag{3.27}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{3.28}$$

де оператор A матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Надалі використовуватимемо подання розв'язків неоднорідної операторної системи:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + f(t), \tag{3.29}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha \tag{3.30}$$

у вигляді

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f, \alpha])(t) \quad \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.31}$$

де

$$(G[f, \alpha])(t) =$$

$$= U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1}(\alpha +$$

$$+ \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) - U(t)U_0(w)(\alpha +$$

$$+ \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

є узагальненим оператором Гріна задачі (3.29), (3.30). Згідно з наведеним вище крайова задача (3.27), (3.28) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли елемент $\alpha \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ задовольнятиме умову

$$U_0(w)\{\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\} = 0. \tag{3.32}$$

За виконання цієї умови розв'язки задачі (3.27), (3.28) матимуть вигляд

$$\varphi(t,\overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[0,\alpha])(t) = U(t)U_0(w)\overline{c}+$$

$$+U(t)(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))\alpha$$

з незалежним від часу оператором Гріна.

Біфуркація розв'язків. Припустимо, що елемент α такий, що операторна система (3.27), (3.28) не є розв'язною в класичному узагальненому сенсі, тобто $U_0(w)\alpha \neq 0$. Виникає питання про біфуркацію розв'язків збуреної задачі. Покажемо, яким чином можна збурити систему (3.27), (3.28), щоб зробити її розв'язною. Розглянемо операторну систему:

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \tag{3.33}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{3.34}$$

де оператор $A_1(t)$ є лінійним та обмеженим за всіх $t \in [0; w]$. Для отримання достатніх умов існування розв'язків операторної системи (3.33), (3.34) застосовуватимемо аналог методу Вішика—Люстерніка та оператор

$$B_0 = U_0(w)\int_0^w A_1(t)U(t)dtU_0(w) : H_{T^{\frac{1}{2}}} \to H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3.2. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

1) B_0 є псевдооберненим за Муром—Пенроузом оператором ($B_0 \in \in PI(H_{T^{\frac{1}{2}}})$);

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Якщо незбурена двоточкова операторна система (3.5), (3.6) не має розв'язків, то операторна система (3.33), (3.34) має ρ-параметричну множину розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi_0(t,\varepsilon,c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty}\varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho] \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}},$$

абсолютно збіжного для достатньо малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$. *Тут*

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1},$$

$$\overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t),$$

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t)U_0(w)\overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t), i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{c}_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha,$$

$$\overline{c}_0 = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau,$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ U_0(w)\times$$

$$\times \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+ U_0(w)\times$$

$$\times \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w),$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+ U_0(w)\times$$

$$\times \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau)d\tau, i = 1, 2, ...;$$

$$\overline{X}_{-1}(t) = U(t)U_0(w),$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t), i = 0, 1, 2, ...$$

Зауваження 3.4. *Потужність множини лінійно незалежних розв'язків залежить від розмірності підпростору* $\mathcal{P}_{N(B_0)}H$.

Доведення. Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду за степенями ε:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \varphi_i(t). \tag{3.35}$$

Підставимо ряд (3.35) у крайову задачу й зберемо коефіцієнти біля відповідних степенів ε. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_{-1}(t)$ при ε^{-1} ряду (3.35) зводиться до розв'язування такої операторно-диференціальної крайової задачі:

$$\frac{d\varphi_{-1}(t)}{dt} = A\varphi_{-1}(t), \tag{3.36}$$

$$\varphi_{-1}(0) - \varphi_{-1}(w) = 0. \tag{3.37}$$

Множина розв'язків операторно-диференціальної системи (3.36), (3.37) має вигляд $\varphi_{-1}(t, c_{-1}) = U(t)U_0(w)c_{-1}$ для довільного елемента $c_{-1} \in$ $\in H_{T^{\frac{1}{2}}}$, який визначено нижче.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_0(t)$ біля ε^0 ряду (3.35) зводиться до розв'язування такої неоднорідної операторно-диференціальної крайової задачі:

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = A\varphi_0(t) + A_1(t)\varphi_{-1}(t, c_{-1}), \tag{3.38}$$

$$\varphi_0(0) - \varphi_0(w) = \alpha. \tag{3.39}$$

Крайова задача (3.38), (3.39) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)\{\alpha + \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)A_1(\tau)U(\tau)d\tau U_0(w)c_{-1}\} = 0$$

згідно з (3.12). Використовуючи властивість $U_0(w)U(w) = U(w)U_0(w) =$ $= U_0(w)$ [126], умову розв'язності перепишемо у вигляді операторного рівняння відносно c_{-1}:

$$B_0 c_{-1} = -U_0(w)\alpha. \tag{3.40}$$

Оскільки оператор $B_0 : H_{T^{\frac{1}{2}}} \to H_{T^{\frac{1}{2}}}$ має псевдообернений, то операторне рівняння (3.40) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли [326]

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} U_0(w)\alpha = 0,$$

яка виконується з огляду на п. 2 для довільного елемента $\alpha \in$ $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ ($\mathcal{P}_{N(B_0^*)}$ — ортопроєктор на коядро оператора B_0^*). Тоді множина розв'язків (3.40) має вигляд

$$c_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho.$$

Іншими словами,

$$c_{-1} = \bar{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, \qquad \bar{c}_{-1} = -B_0^+ U_0(w)\alpha,$$

де B_0^+ є псевдооберненим до B_0 за Муром—Пенроузом оператор. Тоді множина розв'язків крайової задаічі (3.35), (3.36) є такою:

$$\varphi_{-1}(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) + U(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

$$\overline{\varphi}_{-1}(t, \overline{c}_{-1}) = U(t)U_0(w)\overline{c}_{-1}.$$

Використовуючи подання (3.33), лінійність узагальненого оператора Гріна, множину розв'язків крайової задачі (3.39), (3.40) можна записати у вигляді

$$\varphi_0(t, c_0) = U(t)U_0(w)c_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t) +$$

$$+ (G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(t)U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де елемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу.

Визначенню коефіцієнта $\varphi_1(t)$ біля ε^1 ряду (3.35) еквівалентне розв'язування крайової задачі

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = A\varphi_1(t) + A_1(t)\varphi_0(t, c_0), \tag{3.41}$$

$$\varphi_1(0) - \varphi_1(w) = 0. \tag{3.42}$$

Критерій розв'язності (3.12) для задачі (3.41), (3.42) матиме вигляд

$$U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)\varphi_0(\tau, c_0)d\tau = 0.$$

Після підстановки розв'язку $\varphi_0(t, c_0)$ в умову розв'язності отримуємо операторне рівняння відносно c_0:

$$B_0c_0 = -U_0(w)(\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau)d\tau U_0(w)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho).$$

Згідно з припущенням 2 теореми (3.2) це рівняння є розв'язним, а елемент $c_0 \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ визначають так:

$$c_0 = \overline{c}_0 + \mathcal{F}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_0 = -B_0^+U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{F}_0 = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(\tau) d\tau U_0(w).$$

Остаточно множина розв'язків операторної крайової задачі (3.38), (3.39) матиме вигляд

$$\varphi_0(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) + \overline{X}_0(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho \quad \forall c_\rho \in H_{T^{\frac{1}{2}}},$$

де

$$\overline{\varphi}_0(t, \overline{c}_0) = U(t)U_0(w)\overline{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot, \overline{c}_{-1}), \alpha])(t),$$

$$\overline{X}_0(t) = U(t)U_0(w)\mathcal{F}_0 + (G[A_1(\cdot)U(\cdot), 0])(t)U_0(w).$$

Таким чином, розв'язки крайової задачі (3.41), (3.42) є такими

$$\varphi_1(t, c_1) = U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\varphi_0(\cdot, c_0), 0])(t) =$$

$$= U(t)U_0(w)c_1 + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, \overline{c}_0) + A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, 0])(t),$$

де елемент c_1 буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_2(t)$ біля ε^2 ряду (3.35) зводиться до розв'язування крайової задачі

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = A\varphi_2(t) + A_1(t)\varphi_1(t, c_1), \tag{3.43}$$

$$\varphi_2(0) - \varphi_2(w) = 0. \tag{3.44}$$

Підставивши розв'язок $\varphi_1(t)$ в умову розв'язності (3.12), після перетворень отримаємо операторне рівняння для знаходження елемента c_1:

$$B_0 c_1 = -U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, \overline{c}_0) +$$

$$+ A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho, 0])(\tau) d\tau.$$

Згідно з припущенням теореми умову розв'язності буде виконано, а множина розв'язків матиме вигляд

$$c_1 = \overline{c}_1 + \mathcal{F}_1 \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho;$$

де

$$\overline{c}_1 = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, \overline{c}_0), 0] d\tau;$$

$$\mathcal{F}_1 = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau) G([A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot), 0])(\tau) d\tau.$$

Остаточно множина розв'язків крайової задачі (3.41), (3.42) буде такою:

$$\varphi_1(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_1(t, \overline{c}_1) + \overline{X}_1(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де

$$\overline{\varphi}_1(t, \overline{c}_1) = U(t) U_0(w) \overline{c}_1 + G([A_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, \overline{c}_0), 0])(t);$$

$$\overline{X}_1(t) = U(t) U_0(w) \mathcal{F}_1 + G([A_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot), 0])(t).$$

Аналогічним чином неважко показати (діючи за індукцією), що задача визначення коефіцієнта $\varphi_i(t)$ біля ε^i ряду (3.35) зводиться до розв'язності операторної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = A\varphi_i(t) + A_1(t)\varphi_{i-1}(t, c_{i-1}), \tag{3.45}$$

$$\varphi_i(0) - \varphi_i(w) = 0. \tag{3.46}$$

За виконання умов теореми множина розв'язків крайової задачі (3.45), (3.46) набуде вигляду

$$\varphi_i(t, c_\rho) = \overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} c_\rho,$$

де

$$\overline{\varphi}_i(t, \overline{c}_i) = U(t) U_0(w) \overline{c}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(t),$$

$$\overline{c}_i = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{i-1}), 0])(\tau) d\tau;$$

$$\mathcal{F}_i = I - B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(\tau) d\tau;$$

$$\overline{X}_i(t) = U(t) U_0(w) \mathcal{F}_i + (G[A_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot), 0])(t),$$

$$i = 0, 1, 2, ..., \quad \overline{X}_{-1}(t) = U(t) U_0(w).$$

Абсолютна збіжність отриманого ряду доводиться за аналогією з працею [41].

Зауваження 3.5. *Досліджуване рівняння охоплює достатньо широкий спектр різних задач від звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних до абстрактних рівнянь, що викликають самостійний інтерес. У критичному випадку розглянута крайова задача може бути як фредгольмовою — у найпростішому випадку, так і нормально-розв'язною — у найзагальнішому випадку (згідно з класифікацією Крейна [145]). Зазначимо, що завдяки процесу поповнення, розробленому в розд. 2, можна розглядати більш загальний клас узагальнених нормально-розв'язних операторів. Цього можна досягти використовуючи процес поповнення. Тоді отримаємо оператор із замкненою множиною значень, тобто зробити його нормально-розв'язним. Відмітимо також, що цю процедуру можна застосувати до задачі про умови біфуркації розв'язків крайової задачі:*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t),$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot)$$

з узагальнено-оберненим оператором у лінійній частині, де l_1 — лінійний обмежений векторний функціонал.

3.3. Параметрична крайова задача з періодичними операторними коефіцієнтами

Тут розглядають періодичну крайову задачу, що зустрічається у багатьох теоретичних і прикладних дослідженнях. Для дослідження цієї задачі запропоновано означення відносного спектра лінійного обмеженого оператора. Використовуючи це поняття, отримали необхідні та достатні умови розв'язності параметричної множини диференціальних рівнянь з періодичним операторним коефіцієнтом і крайовою умовою.

Вступ. Нехай $(\mathbf{B}, ||\cdot||)$ — комплексний простір Банаха, $\overline{0}$ — нульовий елемент у просторі $\mathbf{B}$, $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ — банахів простір лінійних та обмежених операторів, що діють з $\mathbf{B}$ у себе. Нехай $A(t)$ — періодична оператор-функція на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathcal{L}(\mathbf{B})$, $f(t)$ — неперервна на $[0; w]$ періодична вектор-функція зі значеннями у просторі Банаха $\mathbf{B}$ і періодом $w > 0$, тобто $A(t + w) = A(t),\ \ f(t + w) = f(t)$.

У просторі $\mathbf{B}$ розглянемо множину крайових задач:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda A(t)x(t) + f(t), \tag{3.47}$$

$$x(0) - x(w) = \overline{0}. \tag{3.48}$$

Як відомо [108], розв'язок задачи Коші для операторного рівняння (3.47) з довільною початковою умовою $x(0) = x_0$ має вигляд

$$x(t) = U(t, \lambda)x_0 + \int_0^t U(t, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau, \tag{3.49}$$

де $U(t, \lambda)$ за фіксованого λ — еволюційний оператор, що задовольняє однорідне рівняння

$$\frac{dU(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t)U(t, \lambda), \;\; U(0, \lambda) = I.$$

Підставивши (3.49) у крайову умову (3.48), отримаемо

$$x(0) - x(w) = (I - U(w, \lambda))x_0 - \int_0^w U(w, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau.$$

Розв'язність крайової задачі (3.47),(3.48) еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$(I - U(w, \lambda))x_0 = \int_0^w U(w, \lambda)U^{-1}(\tau, \lambda)f(\tau)d\tau, \tag{3.50}$$

де $U(w, \lambda)$ — оператор монодромії задачі (3.47), (3.48), I – тотожній оператор.

Означення 3.1. *[142]. Точка λ є точкою стійкості рівняння (3.47), якщо $||U^n(w, \lambda)|| \leq c, n \in \mathbb{Z}$.*

За аналогією з наведеним вище, запропонуємо таке означення.

Означення 3.2. *Точку λ називають точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w, \lambda)$ крайової задачі (3.47), (3.48), якщо послідовність операторів $\{U^n(w, \lambda), n \in \mathbb{N}\}$ є рівностепенево неперервною (рівномірно обмеженою) $||U^n(w, \lambda)|| \leq c, n \in \mathbb{N}$.*

Наведені далі дані виникли у зв'язку з відомим результатом, отриманим М.Г. Крейном([142, с.129]).

Лема 3.1. *Якщо λ є точкою стійкості рівняння (3.47), то кожен його розв'язок є рівномірно обмеженим при $t \in \mathbb{R}$.*

Зауваження 3.6. *Наприклад, в [143, с.162] рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),$$

визначене на півосі $[0;+\infty)$, *називають стійким (точніше, стійким праворуч), якщо кожен його розв'язок обмежений на* $[0;+\infty)$. *Необхідною та достатньою умовою стійкості є рівномірна обмеженість його еволюційного оператора:* $\sup_{t\geq 0}||U(t)|| < \infty$.

Виявляється, що можлива ситуація, коли рівняння (3.47) може мати рівномірно обмежені розв'язки й у тому випадку, коли точка λ не є точкою стійкості рівняння (3.47). Нижче показано, що за формулою для знаходження узагальнено-обернених операторів та поняття стійкості праворуч за слабкішої умови крайову задачу (3.47), (3.48) можна дослідити у випадку, коли точка λ є точкою *стійкості праворуч* оператора монодромії $U(w,\lambda)$ і задача (3.47), (3.48) матиме обмежені розв'язки за додаткових умов на неоднорідність $f(t) \in \mathbf{B}$.

Позначимо через $N(I - U(w,\lambda))$ і $R(I - U(w,\lambda))$ відповідно ядро та образ оператора $I - U(w,\lambda)$.

Через ρ_{NS} позначимо множину тих $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких оператор $I - U(w,\lambda)$ є нормально-розв'язним, тобто

$$\rho_{NS} = \{\lambda : \quad \lambda \in \mathbb{C}, \;\; R(I - U(w,\lambda)) \; = \; \overline{R(I - U(w,\lambda))} \; \}.$$

Зауваження 3.7. *Як буде показано далі, множина* $\sigma_{NS} = \mathbb{C} \setminus \rho_{NS}$ *тісно пов'язана з поняттям відносного спектра (а у випадку простору Банаха з його узагальненням), введеного та дослідженого вперше, мабуть, Асплундом (див. [268], [298]).*

Для точнішого зв'язку зі спектром оператора A нагадаємо [268], що оператор A називають *відносно оборотним*, якщо існує оператор X такий, що $AXA = A$. Останнім часом загальноприйнятніше такий оператор називати *узагальнено-оборотним [102], [326].* Зазначимо, що кожен оборотний оператор є узагальнено-оберненим; оператор, що має лише лівий або правий обернений також є узагальнено-оборотним. У скінченновимірному просторі кожен оператор є узагальнено-оборотним. Зауважимо, що це поняття належить до загальної теорії кілець, і наведене вище твердження про узагальнену оборотність скінченновимірних операторів можна сформулювати так: повна скінченновимірна алгебра матриць над полем комплексних чисел є регулярним кільцем (фон Нейман [431]).

Відносним спектром оператора A (у просторі Гільберта) називають множину комплексних чисел λ, для яких оператор $A-\lambda I$ не буде відносно оборотним (узагальнено-оберненим) [268], [298]. Відзначимо, що на відміну від звичайного поняття спектра оператора відносний спектр втрачає низку якісних властивостей (наприклад, відносний спектр не повинен бути замкненою множиною (див. приклад до задачі 71 у [268, с. 227]).

Отже, тут метою є отримання необхідних і достатніх умов розв'язності крайової задачі (3.47), (3.48) у просторі Банаха, а також побудова відповідних розв'язків у тому випадку, коли оператор монодромії є стійким праворуч. Основним результатом є така теорема.

Теорема 3.3. *Нехай $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w,\lambda)$ задачі (3.47) у рефлексивному просторі Банаха* $\mathbf{B}$*. Тоді:*

а) крайова задача (3.47), (3.48) має періодичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f(t)$ задовольняє умову

$$U_0(\lambda)\int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0, \tag{3.51}$$

де $U_0(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}$;

б) за виконання умови (3.51) періодичні розв'язки крайової задачі (3.47), (3.48) мають вигляд

$$x(t,c) = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{3.52}$$

де c – довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$*,*

$$G(t,\tau) = U(t,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}-$$

$$-U_0(\lambda))U^{-1}(\tau,\lambda) + K(t,\tau)$$

є узагальненим оператором Гріна крайової задачі (3.47), (3.48) та

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq t, \\ U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda), & t > \tau. \end{cases}$$

Допоміжні твердження. Доведемо низку тверджень з яких буде легко отримати основну теорему.

Лема 3.2. *Якщо $\lambda \in \rho_{NS}$ є точкою стійкості праворуч оператора монодромії $U(w,\lambda)$, то крайова задача (3.47), (3.48) є розв'язною тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f(t)$ задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=2}^{n+1} U^m(w,\lambda)}{n} \int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau = 0. \tag{3.53}$$

Доведення. Оскільки оператор монодромії є стійким праворуч, то він має замкнену множину значень (оскільки $\lambda \in \rho_{NS}$). Тоді [126, с.296] множину значень оператора $I - U(w,\lambda)$ можна визначити так:

$$R(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= \{x \in H : \lim_{n\to\infty} U_n(w,\lambda)x = \overline{0}, U_n(w,\lambda) = \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n}\}.$$

У цьому випадку операторне рівняння (3.50) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n} \int_0^w U(w,\lambda) U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau = 0,$$

яка еквівалентна умові (3.53), оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n} U(w,\lambda) = U_0(\lambda) U(w,\lambda) = U_0(\lambda).$$

Отже, рівність (3.53) гарантує належність функції $f(t)$ до множини значень оператора $I - U(w,\lambda)$, що й доводить лему.

Зауваження 3.8. *У випадку, коли $\lambda \in \rho_{NS}$ та одночасно $R(I- -U(w,\lambda)) = \mathbf{B}$, оператор $I - U(w,\lambda)$ є оборотним, а точка λ є його регулярною точкою і крайова задача (3.47), (3.48) має єдиний розв'язок $x(t) \in \mathbf{B}$ з початковою умовою $x(0) = x_0$ для довільної неоднорідності $f(t)$. У цій ситуації*

$$x_0 = (I - U(w,\lambda))^{-1} \int_0^w U(w,\lambda) U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau$$

і, як наслідок, отримуємо відомий результат М.Г.Крейна [142, с.131]. Окрім того, як показано в праці [142, с.131—133], у цьому випадку оператор монодромії $U(w,\lambda)$ буде стійким (й навіть сильно стійким [142]).

Зауваження 3.9. *Під час доведення леми ніде не використовувалася рефлексивність вихідного простору Банаха, а тому це твердження справедливе у довільному просторі Банаха* $\mathbf{B}$.

Наступні результати отримують як наслідок відомої статистичної ергодичної теореми за виконання додаткової умови. Надалі будемо припускати, що обмежені множини простору $\mathbf{B}$ слабко секвенціально компактні [126, с. 297]. Зазначимо, що у просторі Гільберта ця умова завжди виконується. Банахів простір, що має цю властивість, є рефлексивним (теорема Еберлейна—Шмульяна [126]). Якщо B — гільбертовий простір, то наведене вище припущення для нього завжди виконується, оскільки гільбертів простір є рефлексивним. Тоді [126, с.298] власний підпростір $N(I - U(w, \lambda))$ оператора $I - U(w, \lambda)$ збігаєтбся з множиною значень оператора U_0, що визначається рівністю

$$U_0(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w, \lambda)}{n} x,$$

тобто

$$N(I - U(w, \lambda)) = R(U_0(\lambda)).$$

Наведемо властивості оператора U_0, які будуть використовуватися надалі [126] :

$$i)\ \ U_0(\lambda) = U_0^2(\lambda),$$

$$ii)\ \ U_0(\lambda) = U(w, \lambda)U_0(\lambda),$$

$$iii)\ \ U_0(\lambda) = U_0(\lambda)U(w, \lambda).$$

Зауважимо, що справді оператор $U_0(\lambda)$ збігається з ортопроєктором на коядро оператора $I - U(w, \lambda)$: $U_0(\lambda) = \mathcal{P}_{N((I-U(w,\lambda))^*)}$.

Наслідок. *Якщо простір* $\mathbf{B} = H$ *є простором Гільберта, то ортогональне доповнення до* $N(I - U(w, \lambda))$ *можна подати у вигляді*

$$N(I - U(w, \lambda))^{\perp} = \{y \in H : U_0^*(\lambda)y = \overline{0}\},$$

де $U_0^*(\lambda)$ *— оператор, спряжений до оператора* $U_0(\lambda)$.

Лема 3.3. *Оператор* $I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *має обмежений обернений, який можна подати у вигляді*

$$(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1} \tag{3.54}$$

для всіх $0 < \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))||$.

Доведення. Покажемо, що $N(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \overline{0}$. Дійсно, якщо $x \in N(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$, то

$$(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))x = \overline{0}. \tag{3.55}$$

Оскільки $(I - U(w,\lambda))x \in R(I - U(w,\lambda))$, $U_0(\lambda)x \in N(I - U(w,\lambda))$, а підпростори $R(I - U(w,\lambda))$ і $N(I - U(w,\lambda))$ перетинаються лише у нулі, то умова (3.55) виконується тоді й тільки тоді, коли одночасно $(I - U(w,\lambda))x = \overline{0}$ та $U_0(\lambda)x = \overline{0}$ (у випадку простору Гільберта згідно з теоремою Піфагора

$$0 = ||(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))x||^2 =$$

$$= ||(I - U(w,\lambda))x||^2 + ||U_0(\lambda)x||^2).$$

Це можливо тільки тоді, коли $x = \overline{0}$. Покажемо, що $R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B}$. Для цього достатньо помітити, що

$$\mathbf{B} = N(I - U(w,\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)) = R(U_0) \oplus R(I - U(w,\lambda)).$$

З цього розкладу випливає, що довільний елемент $x \in \mathbf{B}$ має вигляд $(I - U(w,\lambda))y + U_0(\lambda)z$, що й доводить рівність $R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B}$.

Доведемо детально рівність

$$R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B} = R(U_0(\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)).$$

Спочатку доведемо включення

$$R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) \subset R(U_0(\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)).$$

Розглянемо довільний елемент $x \in R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))$. Якщо

$$x \in R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))),$$

то існує

$$z : x = (I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))z = (I - U(w,\lambda))z + U_0(\lambda)z.$$

Тоді очевидно, що

$$u = (I - U(w,\lambda))z \in R(I - U(w,\lambda)), v = U_0(\lambda)z \in R(U_0(\lambda)).$$

Таким чином, отримали включення

$$R(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))\subset R(U_0(\lambda))\oplus R(I-U(w,\lambda)).$$

Навпаки

$$R(U_0(\lambda))\oplus R(I-U(w,\lambda))\subset R(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))).$$

Нехай $x\in R(U_0(\lambda))\oplus R(I-U(w,\lambda))$. Тоді існують елементи $z\in\in R(U_0(\lambda))$ та $v\in R(I-U(w,\lambda))$: $x=z+v$. Оскільки $z\in R(U_0(\lambda))$ та $v\in R(I-U(w,\lambda))$, то звідси випливає, що існують $y:z=U_0(\lambda)y$ та $h:v=(I-U(w,\lambda))h$. Отже,

$$x=U_0(\lambda)y+(I-U(w,\lambda))h.$$

Розглянемо елемент $g=U_0(\lambda)y+(I-U_0(\lambda))h$. Доведемо, що

$$x=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))g.$$

Це випливає з таких рівностей:

$$(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))g=$$

$$=-(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))(U_0(\lambda)y+(I-U_0(\lambda))h)=$$

$$=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))U_0(\lambda)y+(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))(I-U_0(\lambda))h=$$

$$=(U_0(\lambda)-U(w,\lambda)U_0(\lambda))y+U_0^2(\lambda)y+$$

$$+(I-U(w,\lambda))h-(U_0(\lambda)-U(w,\lambda)U_0(\lambda))h+$$

$$+(U_0(\lambda)-U_0^2(\lambda))h.$$

З властивостей оператора $U_0(\lambda)$ випливає, що

$$U_0(\lambda)=U_0(\lambda)U(w,\lambda)=U(w,\lambda)U_0(\lambda),U_0^2(\lambda)=U_0(\lambda).$$

Тому маємо

$$(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))g=U_0(\lambda)y+(I-U(w,\lambda))h=x.$$

Таким чином, правильним є обернене включення:

$$R(U_0(\lambda))\oplus R(I-U(w,\lambda))\subset R(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))).$$

Це й доводить рівність

$$R(U_0(\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)) = R(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))) = \mathbf{B}.$$

Отже, за теоремою Банаха [126] вихідний оператор, що однозначно відображає $\mathbf{B}$ на себе має обмежений обернений. З доведеного випливає, що для оператора $\mu I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$ точка $\mu = 1$ є регулярною. Оскільки степені оператора $U(w,\lambda)$ є рівномірно обмеженими, то спектральний радіус $r_{(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))} \leq 1$. Добре відомо [126], що резольвентна множина обмеженого оператора є відкритою, а число μ належить до резольвентної множини оператора $U(w,\lambda) - U_0(\lambda)$: $\mu = 1 \in \rho(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$. Тоді існує окіл точки μ такий, що кожна точка цього околу належить до резольвентної множини. Для довільної точки $\mu > 1$ з цього околу існує резольвента [126], яку можна подати у вигляді сильно збіжного за нормою ряду:

$$R_\mu := R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda)) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l.$$

Використовуючи аналітичність резольвенти й добре відому тотожність для точок $\mu > 1$ таких, що $|1-\mu| < 1/||R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))||$, отримуємо

$$R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k R_\mu^{k+1}.$$

Остаточно, підставивши в цю рівність наведений вище ряд, переконуємося у справедливості (3.54). Що й треба було довести. Оператор $I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda))$ будемо називати *оператором усереднення* до оператора $I - U(w,\lambda)$. Зауважмимо, що у розглянутому випадку степені оператора монодромії є обмеженими, а також виконуються умови статистичної ергодичної теореми [126, с. 297]. Унаслідок цього середні степені оператора монодромії збігаються із середнім вектор-функції на відрізку $[0; w]$.

Зв'язок з узагальнено-оберненим оператором

Тут встановлено зв'язок між узагальнено-оберненим оператором та оператором, що є оберненим до оператора усереднення.

Доведемо таке твердження.

Лема 3.4. *Для довільного $\lambda \in \rho_{NS}$ оператор, узагальнено-обернений до оператора $I - U(w,\lambda)$, існує та його можна подати у вигляді*

$$(I - U(w,\lambda))^- = (I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda), \tag{3.56}$$

або у вигляді збіжного операторного ряду

$$(I - U(w,\lambda))^{-} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1} - U_0(\lambda) \qquad (3.57)$$

для всіх $0 < \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))||$.

Доведення. Оператор, що визначається правою частиною рівності (3.56), є очевидно обмеженим. Тому для встановлення (3.56) достатньо перевірити виконання умов означення узагальнено-оберненого оператора. При цьому будуть використовуватися обидва подання та властивості *i—iii* оператора $U_0(\lambda)$.

1. Розглянемо добуток

$$(I - U(w,\lambda))((I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda))(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)) - U_0(\lambda))((I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} -$$

$$-U_0(\lambda))(I - U(w,\lambda)) = (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} -$$

$$-(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))U_0(\lambda) + U_0(\lambda)^2)(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1})(I - U(w,\lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w,\lambda) - U_0(\lambda)))^{-1}) \times$$

$$\times ((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda)) - U_0(\lambda)) =$$

$$= I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda) - U_0(\lambda) - U_0(\lambda) + U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) +$$

$$+ U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda).$$

Відзначимо, що $U_0(\lambda)(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l = 0$ для довільного $l \in \mathbb{N}$ (це безпосередньо випливає з властивостей *i—iii* та формули бінома Ньютона).

Покажемо, що

$$U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) =$$

$$= U_0(\lambda)(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} =$$

$$= (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = U_0(\lambda).$$

Дійсно,

$$U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^kU_0(\lambda)\times$$

$$\times\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1}U_0(\lambda)=$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}((\mu^{-1})^{k+1}(\mu-1)^kU_0(\lambda)+$$

$$+(\mu-1)^kU_0(\lambda)\{\sum_{l=1}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\}^{k+1})U_0(\lambda)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}(\mu-1)^kU_0(\lambda)=\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{\mu-1}{\mu})^kU_0(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\frac{\mu-1}{\mu}}U_0(\lambda)=U_0(\lambda).$$

Таким чином,

$$I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda)-U_0(\lambda)-U_0(\lambda)+$$

$$+U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)=I-U(w,\lambda).$$

Звідси випливає, що оператор $(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))^{-1}-U_0(\lambda)$ задовольняє першу умову означення узагальнено-оберненого оператора.

2. Перевіримо тепер виконання другої умови означення узагальнено-оберненого оператора:

$$((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))\times$$

$$\times(I-U(w,\lambda))((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=$$

$$=((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))\times$$

$$\times((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))-U_0(\lambda))\times$$

$$\times((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=$$

$$=(I-U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))-$$

$$-(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)+U_0(\lambda)^2)\times$$

$$\times((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) =$$
$$= (I - (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda))\times$$
$$\times((I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda)) =$$
$$= (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda)\times$$
$$\times(I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda) + (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) =$$
$$= (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda) -$$
$$- U_0(\lambda) + U_0(\lambda) = (I - U(w,\lambda) + U_0(\lambda))^{-1} - U_0(\lambda).$$

Отже, лему доведено.

Доведення теореми. З огляду на лему 3.2 крайова задача (3.47), (3.48) буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3.53).

Згідно з умовою *iii* для оператора $U_0(\lambda)$ цю рівність можна записати так:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=2}^{n+1} U^m(w,\lambda)}{n} \int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau =$$
$$= U_0(\lambda) U(w,\lambda) \int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau =$$
$$= U_0(\lambda) \int_0^w U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau,$$

що й доводить п. *a* теореми.

Нехай умови п. *a* виконано. Тоді, виходячи з теореми [326] про подання розв'язків за допомогою узагальнено-оберненого оператора, рівняння (3.50) матиме множину розв'язків вигляду

$$x_0 = (I - U(w,\lambda))^{-} \int_0^w U(w,\lambda) U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau + U_0(\lambda) c$$

для довільного елемента $c \in \mathbf{B}$. Підставляючи (3.57) в (3.49), отримаємо загальний розв'язок вихідної крайової задачі (3.47), (3.48):

$$x(t,c) = U(t,\lambda) U_0(\lambda) c + U(t,\lambda)(I - U(w,\lambda))^{-}\times$$
$$\times \int_0^w U(w,\lambda) U^{-1}(\tau,\lambda) f(\tau) d\tau +$$

$$+\int_0^t U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau =$$

$$= U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int_0^w K(t,\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^w U(t,\lambda)\times$$

$$\times(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)) - U_0(\lambda))^l\}^{k+1} - U_0(\lambda) + I)\times$$

$$\times U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким чином, розв'язок має вигляд (3.52), що й завершує доведення теореми.

Коментарі. 1. У випадку, коли $\mathbf{B} = H$ — простір Гільберта, множина σ_{NS} буде збігатися з відносним спектром, введеним у праці [298]. Дійсно, у цьому випадку оператор $I - U(w,\lambda)$ буде нормально-розв'язним, а отже, згідно з [326] — псевдооборотним. З властивостей псевдооберненого оператора безпосередньо випливає його відносна оборотність. З праці [359] відомо, що якщо для оператора A існує оператор B такий, що $ABA = A$, то можна підібрати оператор C такий, що $ACA = A$, $CAC = C$. З цього випливає, що довільний відносно обернений оператор є також узагальнено-оборотним, а відносний спектр збігається з множиною σ_{NS}.

2. У випадку простору Банаха умова належності $\lambda \in \rho_{NS}$ є еквівалентною нормальній розв'язності оператора $I - U(w,\lambda)$. Ця умова [102], [326] не гарантує існування узагальнено-оберненого до оператора $I - U(w,\lambda)$. Для існування узагальнено-оберненого необхідно й достатньо [102], [326], щоб ядро $N(I - U(w,\lambda))$ та образ $R(I - U(w,\lambda)) = \overline{R(I - U(w,\lambda))}$ були доповнювальними підпросторами вихідного простору Банаха (питанню доповнювальності підпросторів простору Банаха присвячено праці М. Кадеця [127], А. Пельчинського [200]). Основну теорему отримано без припущення доповнювальності підпростору $R(I - U(w,\lambda))$. Дійсно, у випадку, коли оператор $U(w,\lambda)$ є стійким праворуч, а оператор $I - U(w,\lambda)$ має замкнену область значень, підпростір $R(I - U(w,\lambda))$ завжди буде доповнювальним [126], а оператор $I - U(w,\lambda)$ буде узагальнено-оборотним. Окрім того, оскільки $I - U(w,\lambda)$ діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе, то він буде зведено-оборотним згідно з означенням [137] праці В.С. Королюка, А.Ф. Турбіна, оскільки справедливим є

розклад простору $\mathbf{B}$ у пряму суму:

$$\mathbf{B} = N(I - U(w,\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)).$$

3. Якщо оператор $I - U(w,\lambda)$ має скінченновимірне ядро, то його нуль-простір завжди буде доповнювальним. У цьому випадку його розширення на весь простір, таке щоб розширений оператор був оборотним, можна будувати по-іншому (без оператора усереднення). Результати викладено у працях [101, 104] та повязані з лемою Аткінсона [17]. Розширений оператор будується за допомогою додавання до вихідного оператора проєктора на його нуль-простір. З огляду на скінченновимірність $N(I - U(w,\lambda))$ цей проєктор можна подати за допомогою біортогональної системи елементів до елементів базису нуль-простору оператора $I - U(w,\lambda)$ [101] (про це йшлося в розд. 2).

4. У випадку, коли нуль-простір є нескінченновимірним доповнювальним підпростором, для побудови проєктора у вигляді, аналогічному до отриманого в [101], достатньо існування біортогональної системи елементів до базисної. Можливість такого подання досліджували у розд. 2 (див. також проблему апроксимації детально викладену в [199, 200]).

5. У випадку, коли у поданні (3.57) можна зробити граничний перехід при $\mu \to 1$ (наприклад, коли ряд $\sum_{l=0}^{\infty}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l$ є збіжним), формула (3.57) набуває зручнішого вигляду:

$$(I - U(w,\lambda))^{-}x = \sum_{l=0}^{\infty}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l x - U_0(\lambda)x. \qquad (3.58)$$

Зауважимо, що основною метою тут є послаблення умови стійкості, за якої це рівняння досліджував М.Г. Крейн [142].

РОЗДІЛ 4
ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ ТА ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ ТА БАНАХА

Одним із головнх у якісній теорії звичайних диференціальних рівнянь є питання про поведінку розв'язків на нескінченності. Клас систем, розв'язки яких можуть як спадати до нуля з експоненціальною швидкістю, так і необмежено зростати досліджують за допомогою поняття експоненціальної дихотомії на всій осі та півосях системи, що розглядається. Обмежені на всій осі розв'язки таких систем у скінченновимірному випадку вивчали О. Перрон, А. Майзель [447], а також В. Коппель [353], Р. Саккер, Дж. Селл [471, 472, 473], Ю. Митропольский, А. Самойленко, В. Кулик [185], а в нескінченновимірних просторах Банаха — М. Крейн [142], Ю. Далецкий, М. Крейн [108], Х. Массер, Х. Шеффер [176], Ф. Хартман [269], І. Чуєшов [350]. У цих працях поставлену задачу досліджували за припущення експоненціальної дихотомії на всій осі відповідного однорідного рівняння.

У [437], [438] умову експоненціальної дихотомії на всій осі однорідної диференціальної системи було послаблено з заміною на умову експоненціальної дихотомії на півосях і вперше доведено нетеровість відповідного оператора у ході розв'язування задачі про обмежені на всій осі розв'язки. Подальшого розвитку ця ідея набула у [321], де з використанням узагальнено-обернених операторів й псевдообернених за Муром—Пенроузом матриць досліджували задачу про існування обмежених на всій осі розв'язків за лінійних і нелінійних збурень системи. Ці та інші результати відображено у праці О. Бойчука, А. Самойленко [326].

Поняття експоненціальної дихотомії для еволюційних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами вивчали Д. Хенрі [273] і Х. Родрігес, Дж. Філхо [468], де за припущення експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного операторного рівняння доведено аналог альтернативи Фредгольма. Дослідженню нетеровості оператора відповідного диференціального рівняння з необмеженими коефіцієнтами присвячено праці А. Баскакова [22, 23, 24, 25], Ю. Латушкіна, Ю. Томілова [395] .

4.1. Обмежені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь у просторі Банаха

У цьому розділі досліджується питання існування обмежених на всій осі розв'язків як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами у просторах Фреше та Банаха за умови експоненціальної дихотомії на півосях відповідного однорідного рівняння.

Лінійні рівняння з обмеженим оператором

Наведено основні результати з теорії обмежених розв'язків диференціальних рівнянь у просторі Банаха з обмеженим операторним коефіцієнтом у правій частині. Багато з них отримано у працях [41, 44, 206, 208].

Постановка задачі й основні поняття. У банаховому просторі $\mathbf{B}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$, $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$;

$$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \{f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B}, f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B}), |||f||| =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} ||f(t)||_{\mathbf{B}} < \infty\},$$

$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — банахів простір функцій, неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$; операторнозначна функція $A(t)$ є сильно неперервною з відповідною нормою $|||A||| = \sup_{t \in \mathbb{R}} ||A(t)|| < \infty$, а розв'язок $x = x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))ds$$

є неперервно диференційовним у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє рівняння (4.1) всюди на $\mathbb{R}$.

Необхідно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння (4.1) у просторі функцій Банаха $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ й обмежених разом з похідною. Припустимо, що однорідне операторне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \tag{4.2}$$

є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ відповідно з проєкторами P і Q, тобто існують проєктори $P(P^2 = P)$ і $Q(Q^2 = Q)$, а також сталі $k_{1,2} \geq 1$ і $\alpha_{1,2} > 0$ такі, що

$$||U(t)PU^{-1}(s)|| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, t \geq s,$$

$$||U(t)(I-P)U^{-1}(s)|| \leq k_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, s \geq t, \text{ для всіх } t, s \in \mathbb{R}_+$$

та

$$||U(t)QU^{-1}(s)|| \leq k_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, t \geq s,$$

$$||U(t)(I-Q)U^{-1}(s)|| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, s \geq t, \text{ для всіх } t, s \in \mathbb{R}_-,$$

де $U(t) = U(t, 0)$ – еволюційний оператор [108] рівняння (4.2) такий, що

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = I - \text{одиничний оператор.}$$

Для рівняння (4.1) справедливим є такий результат [41].

Теорема 4.1. *Припустимо, що однорідне рівняння (4.2) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ відповідно з проєкторами P і Q. Якщо оператор*

$$D = P - (I - Q) : \mathbf{B} \to \mathbf{B}, \tag{4.3}$$

який діє з простору Банаха $\mathbf{B}$ у себе, є узагальнено-оберненим, то

(i) для того, щоб існували розв'язки рівняння (4.1), обмежені на всій осі, необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.4}$$

де

$$H(t) = P_{N(D^*)}QU^{-1}(t) = P_{N(D^*)}(I - P)U^{-1}(t);$$

(ii) за виконання умови (4.4) розв'язки рівняння (4.1), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$x_0(t, c) = U(t)PP_{N(D)}c + (G[f])(t) \ \forall c \in \mathbf{B}, \tag{4.5}$$

де $(G[f])(t)$ *[41] — узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки;* D^- *— узагальнено-обернений до оператора* D*; проектори* $P_{N(D)} = I - D^-D$ *і* $P_{N(D^*)} = I - DD^-$*;* c *— довільний елемент простору Банаха* $\mathbf{B}$.

Зауваження 4.1. *I. Нагадаємо, що якщо оператор* D *є узагальнено-оборотним [326], то:*

(i) оператор D *є нормально-розв'язним* ($\overline{R(D)} = R(D) = ImD$)*;*

(ii) підпростір $N(D) = kerD$ *має пряме доповнення в* $\mathbf{B}$*;*

(iii) підпростір $R(D)$ *має пряме доповнення в* $\mathbf{B}$.

За виконання цих умов для оператора D *завжди існує узагальнено-обернений оператор* D^-.

II. У скіченновимірному випадку, коли $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ *та оператор* D *є* $n \times n$*-вимірною матрицею, властивості (i), (ii), (iii) завжди виконуються (оскільки підпростори* $N(D)$ *і* $N(D^*) = cokerD$ *є скінченновимірними, а отже доповнювальними, і оператор* D *має замкнену множину значень). Зазначимо, що умова (4.4) рівносильна ортогональності неоднорідності рівняння (4.1) до розв'язків відповідного однорідного спряженого рівняння. У такій ситуації отримаємо лему Палмера [438].*

III. Застосування теорії узагальнено-обернених операторів і псевдообернених матриць до дослідження вихідної задачі, дає змогу отримати як відомі результати, так й нові факти. Якщо розглядатиемо рівняння в $\mathbb{R}^n$ *за припущення, що відповідне лінійне однорідне рівняння є експоненціально дихотомічним на півосях, то оператор*

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$$

може бути лише нетеровим [321]. А у випадку, коли досліджується рівняння у просторі Банаха $\mathbf{B}$*, вихідна задача має значно більше варіантів розв'язків. З теореми 4.1 випливає, що оператор* L *може бути* *(використовуючи класифікацію Крейна С.Г. [145]):*

1) нормально-розв'язним оператором ($\overline{ImL} = ImL$)*;*

2) d-нормальним ($\overline{R(L)} = R(L),\ dimcokerL < \infty$)*;*

3) n-нормальним ($\overline{R(L)} = R(L), dimkerL < \infty$)*;*

4) нетеровим ($indL = dimkerL - dimcokerL < \infty$)*;*

5) фредгольмовим ($indL = 0$)*.*

Лінійні та нелінійні рівняння з необмеженим оператором

Покажемо, що аналогічними можуть бути результати для необмежених оператів. У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо однорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad t \in J, \tag{4.6}$$

де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$ необмежений оператор $A(t)$ є замкненим з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t.

Нагадаємо декілька класичних понять теорії напівгруп операторів і пов'язаних із ними фактів.

Означення 4.1. *[468], [146, с.237]. Множину обмежених лінійних операторів* $\{T(t,s)|\ t \geq s;\ t,s \in J\}$ *у просторі Банаха* $\mathbf{B}$ *називають еволюційним оператором, якщо виконуються такі умови:*

(i) $\quad T(s,s) = I, \quad s \in J;$

(ii) $\ T(t,\sigma)T(\sigma,s) = T(t,s), \quad t \geq \sigma \geq s$ *в* J.

Якщо $T(t,s)$ *додатково задовольняє умову*

(iii) $x \in \mathbf{B}$ *відображення* $(t,s) \mapsto T(t,s)x$ *є неперервним* $t \geq s$, *то кажуть, що* $T(t,s)$ *сильно неперервний еволюційний оператор (або множина сильно неперервних еволюційних операторів).*

Якщо задача Коші, породжена рівнянням (4.6) та початковою умовою $x(s,s,x_0) = x_0 \in D$, є рівномірно коректною [146], то можна визначити для $t \geq s$ на J лінійний оператор $T(t,s) : D \to \mathbf{B}$ за правилом

$$T(t,s)x_0 = x(t,s,x_0).$$

Справедливим є наступний результат, доведений С.Г. Крейном [146, с.237—239].

Твердження. *Припустимо, що задача Коші для рівняння (4.6) є рівномірно коректною. Тоді множина лінійних операторів* $\{T(t,s),\ t \geq$ $\geq s,\ t,s \in J\}$*, визначена вище, є сильно неперервним еволюційним* *оператором. Крім того,* $T(t,s)D \subset D$ *та, якщо* $x \in D$, *то* $T(t,s)x$ *є диференційовним за змінною* t *і*

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t,s)x = A(t)T(t,s)x, \quad t \geq s, \quad t,s \in J.$$

Якщо відображення $t \mapsto A(t)$ *є сильно неперервним, то* $T(t,s)x$ *є диференційовним для* $s < t$ *на* J *для всіх* $x \in D$ *і*

$$\frac{\partial}{\partial s}T(t,s)x = -T(t,s)A(s)x.$$

У цьому випадку кажуть, що $T(t,s)$ — еволюційний оператор, *асоційований* з рівнянням (4.6).

За фіксованого $t \geq s$ оператор $T(t,s)$ буде обмеженим лінійним оператором і, оскільки множина D є щільною у $\mathbf{B}$, то його можна розширити на весь простір $\mathbf{B}$ за неперервністю, що надалі й припускається. Розширення еволюційного оператора на весь простір позначатимемо так само.

Означення 4.2. *[273, с.245]. Еволюційний оператор* $\{T(t,s)|\ t \geq \geq s;\ t,s \in J\}$ *допускає експоненціальну дихотомію на* J, *якщо існують проєкторнозначна оператор-функція* $\{P(t)|t \in J\}$ *у* $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ *і дійсні сталі* $\alpha > 0$ *та* $M \geq 1$ *такі, що:*

(i) $T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s), \quad t \geq s;$

(ii) звуження $T(t,s)\restriction_{N(P(s))}, t \geq s$, *оператора* $T(t,s)$ *на ядро* $N(P(s))$ *проєктора* $P(s)$ *здійснює ізоморфізм з* $N(P(s))$ *на* $N(P(t))$. *Визначимо* $T(s,t)$ *як обернений:*

$$T(s,t) = (T(t,s)\restriction_{N(P(s))})^{-1} : N(P(t)) \to N(P(s));$$

(iii) $\|T(t,s)P(s)\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s;$

(iiii) $\|T(t,s)(I - P(s))\| \leq Me^{-\alpha(s-t)}, \quad s \geq t.$

Окремої уваги варте вивчення експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_s^- = (-\infty; s]$, $\mathbb{R}_s^+ = [s; \infty)$ (у цьому випадку проєкторнозначні функції, визначені на півосях, позначатимемо $P_-(t)$ для всіх $t \geq s$ і $P_+(t)$ для всіх $t \leq s$ відповідно зі сталими M_1, α_1 та M_2, α_2).

З використанням цих понять отримаємо необхідні та достатні умови існування слабких обмежених розв'язків для неоднорідного рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \qquad t \in J, \tag{4.7}$$

з $f \in BC(J, \mathbf{B}) = \{f : J \to \mathbf{B}; f$ неперервна та обмежена$\}$.

Обмеженість розуміємо у тому сенсі, що $|||f||| = \sup_{t\in J} ||f(t)|| < \infty$. Необмежений оператор $A(t)$ є замкненим з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, що не залежить від t.

Означення 4.3. *[468]. Якщо $f : J \to \mathbf{B}$ — неперервна вектор-функція, а $T(t,s)$ є асоційованим з (4.6) сильно неперервним еволюційним оператором на J, то u називають слабким (узагальненим) розв'язком на J неоднорідного рівняння (4.7), коли $u : J \to \mathbf{B}$ є неперервною та задовольняє рівність*

$$u(t) = T(t,\tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)f(s)ds, \quad t \geq \tau, \tag{4.8}$$

для кожного $\tau \in J$.

Основний результат можна сформулювати так.

Теорема 4.2. *Нехай $\{T(t,s)|\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ є сильно неперервним еволюційним оператором, асоційованим з рівнянням (4.6). Припустимо, що виконано такі умови:*

1) $T(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ відповідно з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ і $P_-(t)$;

2) оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ є узагальнено-оберненим.

Тоді:

1) для того щоб існували слабкі обмежені на всій осі розв'язки рівняння (4.7) необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.9}$$

де $H(t) = P_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)$;

2) за виконання умови (4.9) слабкі розв'язки рівняння (4.7) мають вигляд

$$x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in \mathbf{B}. \tag{4.10}$$

Тут

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)P_+(s)D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad\qquad + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ t \geq s, \\ \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{s} T(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad +T(t,s)(I-P_-(s))D^-[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad\qquad + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ s \geq t, \end{cases}$$

є узагальненим оператором Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки :

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(\mathcal{L}x)(t) := \frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t),$$

де D^- *— узагальнено-обернений до оператора* D*;* $P_{N(D)} = I - D^-D$, $P_{N(D^*)} = I - DD^-$ *— проєктори [102] на ядро та коядро оператора* D*.*

Зауваження 4.2. *Аналогічна теорема є правильною й у тому випадку, коли еволюційний оператор* $T(t,s)$ *допускає експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_s^+$ *та* $\mathbb{R}_s^-$*. Далі (для зручності читача) розглядається випадок* $s = 0$*.*

Доведення. Розв'язки рівняння (4.7), обмежені на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$, мають такий вигляд:

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} T(t,0)P_+(0)\xi_1 - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau, \ \ t \geq 0, \\ T(t,0)(I-P_-(0))\xi_2 + \int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \\ \qquad - \int_t^0 T(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau, \ \ t \leq 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Дійсно,

$$||T(t,0)P_+(0)\xi_1|| \leq ||T(t,0)P_+(0)||||\xi_1|| \leq M_1 e^{-\alpha_1 t}||\xi_1||,$$

$$\frac{\partial(T(t,0)P_+(0)\xi_1)}{\partial t} = A(t)T(t,0)P_+(0)\xi_1.$$

Таким чином, вираз $T(t,0)P_+(0)\xi_1$ відображає всі обмежені на $\mathbb{R}_0^+$ розв'язки однорідного рівняння (4.6).

Доведемо обмеженість одного з інтегралів, визначених у (4.11):

$$||\int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau|| \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} ||T(t,\tau)(I-P_+(\tau))||||f(\tau)||d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| \int_t^{+\infty} M_1 e^{\alpha_1(t-\tau)}d\tau = \frac{M_1}{\alpha_1}|||f||| < \infty.$$

Обмеженість інших інтегралів перевіряють аналогічно. Виходячи з того, що

$$\frac{\partial(-\int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau)}{\partial t} =$$

$$= T(t,t)(I-P_+(t))f(t) - A(t)\int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau +$$

$$+T(t,t)P_+(t)f(t) + A(t)\int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau = f(t)+$$

$$+A(t)\{-\int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau\},$$

переконуємося у тому, що вираз (4.11) дійсно визначає всі обмежені розв'язки рівняння (4.7) на півосях.

Для того щоб вираз (4.11) визначав слабкі обмежені розв'язки на всій осі необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$x(0+,\xi_1,\xi_2) = x(0-,\xi_1,\xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$P_+(0)\xi_1 - \int_0^{+\infty} T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau = \tag{4.12}$$

$$= (I-P_-(0))\xi_2 + \int_{-\infty}^0 T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Якщо ξ_1 та ξ_2 — розв'язки рівняння (4.12), то, підставивши їх у (4.11), отримаємо слабкий на всій осі розв'язок рівняння (4.7). Покажемо, що за виконання умов теореми множину слабких обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.7) можна подати у вигляді

$$x(t,\xi)=\begin{cases} T(t,0)P_+(0)\xi-\int_t^{+\infty}T(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+ \\ \qquad +\int_0^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t\geq 0, \\ T(t,0)(I-P_-(0))\xi+\int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau- \\ \qquad -\int_t^0 T(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau, \quad t\leq 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Це означає, що потужності множин слабких обмежених розв'язків (4.11) і (4.13) збігаються й елементи ξ_1 і ξ_2 можна обрати однаковими $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Зрозуміло, що будь-який обмежений розв'язок вигляду (4.13) міститься у множині слабких обмежених розв'язків (4.11) за виконання умов розв'язності.

Запишемо рівняння (4.12) у такому вигляді:

$$P_+(0)\xi_1=(I-P_-(0))\xi_2+g, \tag{4.14}$$

де

$$g=\int_{-\infty}^0 T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^{+\infty}T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau.$$

Використовуючи те, що $P_+^2(0)=P_+(0)$, для кожного елемента ξ_1 маємо $P_+^2(0)\xi_1=P_+(0)\xi_1$. Підставивши це у (4.14), одержимо

$$P_+(0)((I-P_-(0))\xi_2+g)=(I-P_-(0))\xi_2+g$$

або

$$P_+(0)(I-P_-(0))\xi_2-(I-P_-(0))\xi_2=g-P_+(0)g.$$

Оскільки $(I-P_-(0))^2=I-P_-(0)$, отримаємо операторне рівняння

$$P_+(0)(I-P_-(0))\xi_2-(I-P_-(0))^2\xi_2=g-P_+(0)g,$$

яке можна подати у вигляді

$$D(I-P_-(0))\xi_2=(I-P_+(0))g. \tag{4.15}$$

За умовою теореми оператор D є нормально-розв'язним (окрім того, він є узагальнено-оберненим), тому [326] необхідною й достатньою умовою розв'язності (4.15) буде така умова: $P_{N(D^*)}(I - P_-(0))g = 0$ (згідно з [102] $P_{N(D^*)}$ можна знаходити за допомогою рівності $P_{N(D^*)} = I - DD^-$). Оскільки $P_{N(D^*)}D = 0$ (це випливає, наприклад, з того, що

$$P_{N(D^*)}D = (I - DD^-)D = D - DD^-D = D - D = 0)$$

або, що те саме $P_{N(D^*)}(P_+(0) - (I - P_-(0)) = 0)$, то $P_{N(D^*)}(I - -P_+(0)) = = P_{N(D^*)}P_-(0)$. Виходячи з цього, знайдемо $P_{N(D^*)}g$:

$$P_{N(D^*)} \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + P_{N(D^*)}\times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau =$$

$$= P_{N(D^*)}(P_-^2(0) \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)f(\tau)d\tau + (I - P_+(0))^2\times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty} T(0,\tau)f(\tau)d\tau) =$$

$$= P_{N(D^*)}P_-(0)(\int_{-\infty}^{0} P_-(0)T(0,\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} (I - P_+(0))T(0,\tau)f(\tau)d\tau) =$$

$$= P_{N(D^*)}P_-(0)g = P_{N(D^*)}(I - P_+(0))g = 0.$$

Умова $P_{N(D^*)}g = 0$ є необхідною та достатньою для розв'язності рівняння $D\xi = g$, або $P\xi = (I - Q)\xi + g$, яке збігається з рівнянням (4.14), якщо покласти $\xi = \xi_1 = \xi_2$. Доведено, що множина обмежених розв'язків (4.11) є підмножиною множини обмежених розв'язків (4.13) і тим самим вони збігаються. З огляду на наведене вище умова існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.7) рівносильна розв'язності операторного рівняння

$$D\xi = \int_{0}^{\infty} T(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (4.16)$$

Оскільки оператор D є узагальнено-оборотним, то рівняння (4.16) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$P_{N(D^*)}\{\int_0^{\infty} T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau\}=0.$$

За виконання цієї умови рівняння (4.16) має множину розв'язків:

$$\xi = D^-(\int_0^{\infty} T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau) + P_{N(D)}c,$$

де c — довільний елемент простору Банаха $\mathbf{B}$. Підставляючи отримані розв'язки в (4.11), отримаємо (4.10).

Доведемо властивість узагальненого оператора Гріна відносно стрибка у точці 0 використовуючи таке позначення:

$$(G[f])(0+0)-(G[f])(0-0)=$$

$$=-\int_0^{\infty} T(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + P_+(0)D^-g-$$

$$-\int_{-\infty}^{0} T(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau-(I-P_-(0))D^-g=$$

$$=-g+P_+(0)D^-g-D^-g+P_-(0)D^-g=$$

$$=(P_+(0)-I+P_-(0))D^-g-g=DD^-g-g=$$

$$=-(I-DD^-)g=-P_{N(D^*)}g=-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt.$$

Друга властивість теореми перевіряється безпосередньою підстановкою оператора Гріна у рівняння (4.7). Теорему доведено.

Для того щоб показати зв'язок між доведеним твердженням та результатами праці [468], сформулюємо допоміжну лему.

Лема 4.1. *Якщо проєктори $P_+(0)$ та $P_-(0)$ комутують ($[P_+(0),P_-(0)]=0$), то оператор $D=P_+(0)-(I-P_-(0))$ завжди має узагальнено-обернений, який збігається з оператором D.*

Доведення. Зрозуміло, що оператор D є обмеженим. Знайдемо спочатку D^2:

$$D^2 = (P_+(0) - I + P_-(0))(P_+(0) - I + P_-(0)) =$$

$$= P_+^2(0) - P_+(0) + P_-(0)P_+(0)-$$

$$-P_+(0) + I - P_-(0) + P_+(0)P_-(0) - P_-(0) + P_+^2(0) =$$

$$= 2P_+(0)P_-(0) - P_+(0) - P_-(0) + I.$$

Тоді

$$D^3 = D^2 D =$$

$$= (2P_+(0)P_-(0) - P_+(0) - P_-(0) + I)(P_+(0) - I + P_-(0)) =$$

$$= 2P_+(0)P_-(0)P_+(0) - P_+(0)^2 - P_-(0)P_+(0) + P_+(0)-$$

$$-2P_+(0)P_-(0) + P_+(0) + P_-(0) - I + 2P_+(0)P_-(0)^2-$$

$$-P_+(0)P_-(0) - P_-(0)^2 + P_-(0) =$$

$$= -2P_+(0)P_-(0) + 2P_+(0)P_-(0) + P_+(0) + P_-(0) - I = D.$$

Звідси випливає, що $DDD = D$, а це і означає, що D є узагальнено-оборотним і $D = D^-$. Лему доведено.

Зауваження 4.3. *Основні результати праці [468] отримано за припущення, що проєктори $P_+(0)$ та $P_-(0)$ комутують. З леми 4.1 та теореми 4.2 отримуємо, як наслідок, результати з [468].*

Зауваження 4.4. *Аналогічний результат розглянуто у нетеровому випадку в [395]. Оскільки нетерів оператор є узагальнено-оборотним, то цей результат також задовольняє умови теореми 4.2.*

4.2. Нелінійні диференціальні рівняння у просторі Банаха з необмеженим оператором у лінійній частині

У просторі Банаха $\mathbf{B}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + f(t). \tag{4.17}$$

Будемо шукати обмежений розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (4.17), який перетворюється на один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c)$ породжувального рівняння при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови припускатимемо, що оператор-функція $Z(x, t, \varepsilon)$ задовольняє вимогу:

$$Z(\cdot, \cdot, \cdot) \in C[||x - x_0|| \leq q] \times BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) \times C[0, \varepsilon_0],$$

де q — деяка додатна стала (неперервність у околі породжувального розв'язку).

Покажемо, що цю проблему можна вирішити за допомогою операторного рівняння

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x_0(t, c), t, 0) dt = 0. \tag{4.18}$$

Його називають *рівнянням для породжувальних елементів.*

Теорема 4.3. *(необхідна умова). Припустимо, що однорідне рівняння (4.6) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_0^+$ і $\mathbb{R}_0^-$ з проєкторнозначними оператор-функціями відповідно $P_+(t)$ та $P_-(t)$, а нелінійне рівняння (4.17) має обмежений розв'язок $x(\cdot, \varepsilon)$, який перетворюється на один з розв'язків породжувального рівняння (4.6) зі сталою $c = c^0 : x(t, 0) = x_0(t, c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді ця стала повинна задовольняти рівняння для породжувальних елементів(4.18).*

Доведення. Якщо рівняння (4.17) має обмежений розв'язок $x(t, \varepsilon)$, то згідно з доведеною теоремою 4.2 повинна виконуватись умова розв'язності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \{f(t) + \varepsilon Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt = 0. \tag{4.19}$$

Використовуючи умову (4.9), отримуємо, що умова (4.19) еквівалентна такій: $\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt = 0$. Після скорочення на $\varepsilon \neq 0$ маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt = 0.$$

При $\varepsilon \to 0$ $x(t, \varepsilon) \to x_0(t, c^0)$. Остаточно (використовуючи неперервність оператор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$) отримуємо

$$F(c^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x_0(t, c^0), t, 0) dt = 0,$$

що й доводить теорему.

Для отримання достатньої умови існування обмежених розв'язків рівняння (4.17) додатково припустимо, що оператор-функція $Z(x, t, \varepsilon)$

є сильно диференційовною в околі породжувального розв'язку

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[||x - x_0|| \leq q].$$

Покажемо, що цю задачу можна розв'язати за допомогою оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}dt : \mathbf{B} \to \mathbf{B},$$

де $A_1(t) = Z^1(v, t, \varepsilon)|_{v=x_0;\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 4.4. *(достатня умова). Припустимо, що однорідне рівняння (4.6) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями відповідно $P_+(t)$ та $P_-(t)$, а рівняння (4.7) має обмежені розв'язки у вигляді (4.11). Нехай для оператора B_0 виконуються такі умови:*

1) оператор B_0 є узагальнено-оборотним;

2) $P_{N(B_0^*)}P_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (4.18), існує принаймні один слабкий обмежений розв'язок рівняння (4.17). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0(\tau, c^0) + y_k, \tau, \varepsilon)](t, 0),$$

$$c_k = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon), \tau, \varepsilon)\}d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t, c^0) + y_k(t,\varepsilon), k = 0, 1, 2, ..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Доведення. У рівнянні (4.17) виконаємо таку заміну змінних: $x(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon)$, де стала c^0 задовольняє (4.18). Як наслідок, отримаємо рівняння для y:

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + \varepsilon Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon), t, \varepsilon). \tag{4.20}$$

Необхідно знайти обмежений розв'язок:

$$y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(\mathbb{R},\mathbf{B}), y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], y(t,0) = 0.$$

Очевидно, що розв'язність рівняння (4.20) еквівалентна розв'язності рівняння (4.17). Запишемо цю умову для y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0. \tag{4.21}$$

За виконання умови (4.21) множина обмежених розв'язків рівняння (4.20) матиме вигляд

$$y(t,\varepsilon) = T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0 + y,\tau,\varepsilon)](t,0).$$

Оскільки оператор $Z(x,t,\varepsilon)$ є диференційовним за Фреше в околі породжувального розв'язку, то справджується умова

$$Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(x_0(t,c^0),t,0)+$$

$$+A_1(t)y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де $A_1(t) = Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}$, а для членів $\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)$ вищого порядку за y виконуватимуться співвідношення

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0.$$

Тоді умову (4.21) можна записати так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{Z(x_0(t,c^0),t,0)+$$

$$+A_1(t)\{T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon)\}\}dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0. \tag{4.22}$$

Використовуючи позначення, перепишемо цю умову у вигляді операторного рівняння відносно c:

$$B_0c = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt. \tag{4.23}$$

Згідно з теоремою 4.2 необхідною й достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (4.23) буде умова

$$P_{N(B_0^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt=0,$$

яка виконується в силу припущення 2:

$$P_{N(B_0^*)}H(t)=P_{N(B_0^*)}P_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)=0.$$

Тоді елемент c можна обрати у вигляді

$$c=-B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt.$$

Отже, маємо таку операторну систему:

$$\begin{cases} y(t,\varepsilon)=T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c+\overline{y}(t,\varepsilon),\\ c=-B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt,\\ \overline{y}(t,\varepsilon)=\varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0). \end{cases} \tag{4.24}$$

Введемо допоміжний вектор $u=(y,c,\overline{y})^T\in\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$, що належить декартовому добутку $\mathbf{B}^3$ (T означає операцію транспонування). Розглянувши допоміжний оператор $L_1g=-B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)g(t)dt$, операторну систему (4.24) можна записати так:

$$u=\begin{bmatrix} 0 & T(t,0)P_+(0)P_{N(D)} & I\\ 0 & 0 & L_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}u+$$

$$+\begin{pmatrix} 0\\ -B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt\\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0)\end{pmatrix}.$$

У свою чергу ця операторна система еквівалентна такій операторній системі:

$$\begin{bmatrix} I & -T(t,0)P_+(0)P_{N(D)} & -I\\ 0 & I & -L_1\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}u= \tag{4.25}$$

$$=\begin{pmatrix} 0\\ -B_0^-\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt\\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0)\end{pmatrix}.$$

Введемо позначення :

$$M := \begin{bmatrix} I & -T(t,0)P_+(0)P_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathfrak{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t,0) \end{pmatrix}.$$

Оператор M має обмежений обернений M^{-1}:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & T(t,0)P_+(0)P_{N(D)} & T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Те, що так визначений оператор задовольняє рівність

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I$$

перевіряється безпосередньою підстановкою.

Доведемо, що цією рівністю дійсно визначається обмежений оператор.

Необхідно довести, що існує стала $c_1 > 0$, така що для всіх $u \in \mathbf{B}^3$ виконується нерівність $\|M^{-1}u\|_{\mathbf{B}^3} \le c_1\|u\|_{\mathbf{B}^3}$. Ця нерівність еквівалентна [146] такій (зі сталою $c_2 > 0$) : для довільних $y, c, \overline{y} \in \mathbf{B}$

$$|||M^{-1}(y,c,\overline{y})^T|||_{\mathbf{B}^3} \le c_2(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

$$M^{-1}(y,c,\overline{y})^T = \begin{pmatrix} y + T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y} \\ c + L_1\overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Доведемо обмеженість норми кожної компоненти вектора у просторі Банаха $\mathbf{B}$:

$$|||y + T(\cdot,0)P_+(0)P_{N(D)}c + T(\cdot,0)P_+(0)P_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||y|||_{\mathbf{B}} +$$

$$+|||T(\cdot,0)P_+(0)P_{N(D)}|||_{\mathbf{B}}|||c|||_{\mathbf{B}} + |||T(\cdot,0)P_+(0)P_{N(D)}L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} +$$

$$+|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||y|||_{\mathbf{B}} + c_1|||c|||_{\mathbf{B}} + c_2|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Аналогічно

$$|||c + L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||c|||_{\mathbf{B}} + |||L_1|||_{\mathbf{B}}|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \le |||c|||_{\mathbf{B}} + c_3|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Таким чином,

$$|||L^{-1}(y,c,\overline{y})^T|||_{\mathbf{B}^3} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + (c_1+1)|||c|||_{\mathbf{B}} + (1+c_2+c_3)|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\leq c_4(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

де $c_4 = \max\{1, 1+c_1, 1+c_2+c_3\}$. Виходячи з цього, отримуємо обмеженість оператора L^{-1}.

Тоді операторну систему (4.24) запишемо у такому вигляді:

$$u = M^{-1}g = M^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку є нелінійним. Варіюючи параметром ε і користуючись обмеженістю оператора M^{-1}, можна досягти того, щоб оператор $M^{-1}S(\varepsilon)$ був стискальним. З принципу стискальних відображень [146] випливає, що операторна система (4.24) має єдину нерухому точку, яка й визначає обмежений розв'язок рівняння (4.17).

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Для встановлення зв'язку між необхідною та достатньою умовами розв'язності рівняння (4.17) встановимо спочатку допоміжне твердження.

Наслідок. *Припустимо, що оператор $F(c)$ має похідну у сенсі Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Банаха $\mathbf{B}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (4.18). Якщо оператор B_0 має обмежений обернений оператор, то рівняння (4.18) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок для кожного c^0.*

Доведення. Розглянемо вираз

$$F^{(1)}(c)[h] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}[x_0^{(1)}(t,s,c)[h]]dt,$$

який випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень у просторі Банаха [4]. Знайдемо похідну від розв'язку $x_0^{(1)}(t,c)$ за c. Оскільки $x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c + (G[f])(t,0)$, то [4]

$$x_0^{(1)}(t,c)[h] = \frac{\partial x_0(t,c+\alpha h)}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c +$$

$$+\alpha T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}h + (G[f])(t,0))|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}(T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}c)|_{\alpha=0} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}h)|_{\alpha=0}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(G[f])(t,0)|_{\alpha=0}=$$
$$=T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}h,\ \text{та}\ Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}=A_1(t).$$

Остаточно запишемо

$$F^{(1)}(c)[h]=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)A_1(t)T(t,0)P_+(0)P_{N(D)}dt[h]=B_0[h].$$

З огляду на те, що $F^{(1)}(c)=B_0$ є оборотним, рівняння (4.18) має єдиний розв'язок, тоді й рівняння (4.17) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок.

Зауваження 4.5. *Оскільки оператор $F^{(1)}(c)$ є оборотним, то для оператора B_0 умови 1 та 2 виконуються. Тоді рівняння (4.17) матиме єдиний обмежений розв'язок для кожного $c^0 \in \mathbf{B}$. Таким чином умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ пов'язує необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c^0 рівняння для породжувальних сталих [326].*

4.3. Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь у локально-опуклих просторах

Дослідження диференціальних рівнянь у локально-опуклих просторах і просторах Фреше є актуальною задачею. Такі задачі широко застосовують у багатьох розділах математики, а також у математичній фізиці.

Тут розглядається узагальнення означень е-дихотомії для еволюційних рівнянь у локально-опуклих просторах з необмеженою оператор-функцією. Наводяться необхідні й достатні умови існування узагальнених обмежених розв'язків для диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Фреше з необмеженим оператором.

Постановка задачі. У повному локально-опуклому просторі E розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння з необмеженою оператор-функцією $A(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x+f(t), t\in J \tag{4.26}$$

де $A(t)$ для кожного $t \in J$ є лінійною замкненою оператор-функцією з незалежною від часу t щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset E$; вектор-функція $f(t)$ є обмеженою й неперервною на J.

Припустимо [221], що існує обмежена оператор-функція $U(t), t \in J$ з областю визначення $D(U(t)) = D$ така, що для кожного $x \in D$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}U(t)x = A(t)U(t)x, \quad U(0) = I.$$

Оскільки множина D щільна в E, то $U(t)$ можна розширити за неперервністю на весь простір E. Оператор-функцію $U(t)$ традиційно називають *еволюційним оператором*, що відповідає однорідному рівнянню

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \in J. \tag{4.27}$$

Для простоти викладення додатково припускаємо, що для кожного t еволюційний оператор $U(t)$ має обмежений обернений $U^{-1}(t) : E \to E$ (так званий параболічний випадок).

Означення 4.4. *Якщо $f : J \to E$ є неперервною, обмеженою і $U(t)$ — еволюційний оператор, то вектор-функцію $u(t)$ називають узагальненим (слабким) розв'язком рівняння (4.26), коли $u(t)$ є неперервною і рівність*

$$u(t) = U(t)U^{-1}(\tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} U(t)U^{-1}(s)f(s)ds, \ t \geq \tau, \tag{4.28}$$

виконується для довільного $t \in J$.

Означення 4.5. *Будемо казати, що рівняння (4.27) допускає експоненціальну дихотомію на J, якщо існує проєктор $P \in \mathcal{L}(E)$ такий, що для довільної напівнорми $q \in SpecE$ існує напівнорма $p \in SpecE$, а сталі $K \geq 1, \alpha > 0$ є такими, що виконуються нерівності*

$$q(U(t)PU^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(t-s)}p(\xi), t \geq s,$$

$$q(U(t)(I-P)U^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(s-t)}p(\xi), s \geq t,$$

де $spec\ E$ — множина усіх напівнорм, заданих на E.

Це означення введено у працях [53], [206] і дає змогу дослідити питання щодо існування узагальнених розв'язків за аналогією з тим, як це було зроблено у просторі Банаха.

Теорема 4.5. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ з проекторами відповідно P_+ та P_-. Тоді:*

1) рівняння (4.26) має узагальнені обмежені розв'язки тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$P_+\xi_1 - (I - P_-)\xi_2 = g \tag{4.29}$$

має розв'язки. Тут

$$g = \int_{-\infty}^{0} P_- U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \int_{0}^{+\infty} (I - P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau;$$

2) за виконання умов розв'язності рівняння (4.29) рівняння (4.26) має обмежені на всій осі розв'язки, які визначаються так:

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} U(t)P_+\xi_1 - \int_t^{+\infty} U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \;\; t \geq 0, \\ U(t)(I-P_-)\xi_2 + \int_{-\infty}^t U(t)P_-U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \\ - \int_t^0 U(t)(I-P_-)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \;\; t \leq 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Доведення. Розв'язки рівняння (4.26), обмежені на півосях, мають вигляд (4.30). Дійсно, доведемо наприклад, що (4.30) визначають обмежені розв'язки для невід'ємної дійсної півосі $t \geq 0$.

З визначення еволюційного оператора для рівняння (4.26) маємо

$$\frac{d(U(t)P_+\xi_1)}{dt} = A(t)U(t)P_+\xi_1.$$

З того, що рівняння (4.27) є е-дихотомічним випливає, що для довільної напівнорми $q \in Spec\ E$ існує напівнорма $p \in Spec\ E$ така, що

$$q(U(t)P_+\xi_1) \leq K_1 e^{-\alpha t} p(\xi_1), t \geq 0.$$

Тоді $U(t)P_+\xi_1$ визначає множину обмежених розв'язків однорідного рівняння (4.27):

$$\frac{d(-\int_t^{+\infty} U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)}{dt} =$$

$$= U(t)P_+U^{-1}(t)f(t) + A(t)\int_0^t U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+U(t)(I-P_-)U^{-1}(t)f(t)-A(t)\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=$$

$$=f(t)+A(t)\{-\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\}.$$

Доведемо обмеженість одного з інтегралів:

$$q(\int_t^{+\infty}U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)\leq$$

$$\leq\int_t^{+\infty}q(U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau))d\tau\leq$$

$$\leq\int_t^{+\infty}K_1e^{-\alpha(t-\tau)}p(f(\tau))d\tau\leq\sup_{\tau\in\mathbb{R}}p(f(\tau))\frac{K_1}{\alpha}.$$

Цілком аналогічно доводиться обмеженість інших доданків. Для того щоб вираз (4.30) визначав узагальнені обмежені розв'язки на всій осі необхідно й достатньо, щоб

$$x(0+,\xi_1,\xi_2)=x(0-,\xi_1,\xi_2).$$

Ця умова еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$P_+\xi_1-(I-P_-)\xi_2= \tag{4.31}$$

$$=\int_{-\infty}^0 U(t)P_-U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+\int_0^{+\infty}U(t)(I-P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

За умов розв'язності цього рівняння узагальнені обмежені розв'язки рівняння (4.26) знаходять підстановкою його розв'язків у (4.30) . Теорему доведено.

Наведемо декілька фактів щодо теореми. Розглянемо допоміжний оператор $S:=(P_+,P_--I)$ та вектор $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$. Тоді рівняння (4.29) можна записати у вигляді

$$S\xi=g.$$

Оскільки введений оператор S не обов'язково нормально-розв'язний (для довільної послідовності $g_n\in R(S)$ такої, що $g_n\to g, n\to\infty$, маємо, що існує послідовність $z_n = (z_n^1, z_n^2)^T : g_n = Sz_n = P_+ z_n^1 + (P_- - I) z_n^2$. Але з цього подання та збіжності g_n до елемента g у просторі F не випливає, що окремо кожна з послідовностей $P_+ z_n^1$ та $(P_- - I) z_n^2$ є збіжною. Тому не можна гарантувати, що $g \in R(S)$, й у загальному випадку, умова $P_{N(S^*)} g = 0$ не гарантує розв'язність рівняння (4.29). Отже, воно може бути не нормально-розв'язним [369]. У цьому випадку за (4.30) отримуються узагальнені (слабкі) обмежені розв'язки лише на півосях. Щоб одержати повний результат на всій осі необхідними є додаткові умови на оператор $P_+ - I + P_-$, які дають змогу розв'язати рівняння (4.29). Тому розглянемо це рівняння у просторі Фреше F. З огляду на його геометрію можна ввести поняття сильного узагальнено-оберненого оператора (як у розд. 2), й тим самим уточнити теорему й сформулювати результат.

Зауваження 4.6. *Нагадаємо, що якщо простір Фреше розкладається в алгебричну пряму суму підпросторів, то він розкладається й у топологічну пряму суму цих самих підпросторів [225]. За наявності цього факту дослідження рівняння (4.29) є простішим у просторі Фреше, ніж у загальних топологічних просторах, і теорему можна доповнити.*

Зауваження 4.7. *Залежно від того, за якою топологією виконується склеювання розв'язків у точці нуль:*

$$x(0+, \xi_1, \xi_2) = x(0-, \xi_1, \xi_2), \tag{4.32}$$

отримаємо різні типи розв'язків еквівалентного операторного рівняння (4.29).

Усе залежить від того, в якому просторі визначають ці розв'язки. Якщо еволюційний оператор $U(t)$ визначено на всьому просторі F (наприклад, коли відповідна оператор-функція $A(t)$ є сильно неперервною $|||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)|| < \infty$)), то розв'язок операторного рівняння (4.31), що є еквівалентним умові (4.32), знаходиться у вихідному просторі F і залежно від того, чи належить права частина множині значень оператора S (оператор S є нормально-розв'язним $(R(S) = \overline{R(S)})$), маємо або звичайний розв'язок, або квазірозв'язок операторного рівняння (4.31).

Якщо оператор S не є нормально-розв'язним, то у випадку, коли права частина операторного рівняння належить замиканню образу *оператора S та не належить його множині значень ($g \in \overline{R(S)}/R(S)$) отримаємо узагальнені розв'язки.*

У загальному випадку необмежених операторних коефіцієнтів оператор еволюції $U(t)$ можна визначити не на всьому просторі F, і умова розв'язності операторного рівняння (4.31) не може гарантувати, що $g \in R(S)$. Тоді для операторного рівняння (4.31) можливий випадок, коли $g \in \overline{R(S)}$, але $g \notin R(S)$. Окрім того, за таких умов може статися так, що $\xi_1, \xi_2 \in \overline{F}/F$, де простір $\overline{F}$ отримано поповненням вихідного простору за певною топологією. Залежно від того, як визначається ця топологія, маємо різні типи розв'язків операторного рівняння (4.31) і відповідно вихідного рівняння (4.29).

Зазначимо також, що можлива ситуація, коли $\xi_1, \xi_2 \in D(A(t)) = D$ та $g \in R(S)$. Тоді отримаємо класичні розв'язки. Якщо $\xi_1, \xi_2 \notin D(A(t)) = D$ та $g \in R(S)$, одержимо класичні узагальнені розв'язки [32]; якщо $\xi_1, \xi_2 \in F$, $g \in \overline{R(S)}/R(S)$ або $\xi_1, \xi_2 \in D(\overline{A(t)})$, $g \in \overline{R(S)}/R(S)$ — узагальнені розв'язки. Якщо права частина $g \notin \overline{R(S)}$, $g \in F/\overline{R(S)}$, отримаємо узагальнені квазірозв'язки. Якщо оператор S є нормально-розв'язним, то узагальнені квазірозв'язки ($g \in F/R(S)$) збігаються з квазірозв'язками [260].

Теорема 4.6. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами відповідно P_+ та P_-, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F$$

є сильним (X, Y)-узагальнено-оборотним.

Тоді:

1) для того щоб існували узагальнені, обмежені на всій осі розв'язки рівняння (4.26) необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in \in BC(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{4.33}$$

де $H(t) = (I - \overline{D} D^{-}_{X,Y}) P_- U^{-1}(t)$, $\overline{D}$ — розширення оператора D на поповнений простір $\overline{F}$;

2) за виконання умови (4.33) узагальнені розв'язки рівняння (4.26) будуть мати такий вигляд:

$$x_0(t, c) = U(t) P_+ P_{N(\overline{D})} c + \overline{(G[f])}(t) \quad \forall c \in \overline{F}, \tag{4.34}$$

де

$$\overline{(G[f])}(t) = \begin{cases} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+ f(\tau)d\tau - \\ - \int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_+ D^-_{X,Y}[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau], \;\; t \ge 0, \\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau - \\ - \int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I-P_-)D^-_{X,Y}[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau], \;\; t \le 0, \end{cases}$$

є узагальненим оператором Гріна, розширеним на $\overline{F}$.

З урахуванням введених означень деталі методики доведення теореми такі самі, як і у випадку доведення теореми 4.5.

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) у повному локально-опуклому просторі E є експоненціально дихотомічним на всій осі з проєктором P. Тоді для довільної обмеженої на всій осі й неперервної вектор-функції f існує єдиний обмежений розв'язок рівняння (4.26). Цей розв'язок має вигляд*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{4.35}$$

де

$$G(t,\tau) = \begin{cases} U(t)PU^{-1}(\tau), t \ge \tau, \\ -U(t)(I-P)U^{-1}(\tau), t < \tau. \end{cases}$$

Доведення. З проєкторами P та $I-P$ пов'язані відповідно підпростори $E_1 = PE$ і $E_2 = (I-P)E$. Підпростір E_1 складається з тих початкових значень розв'язків рівняння (4.27), що залишаються обмеженими при $t \to \infty$, а підпростір E_2 — з початкових значень розв'язків, що залишаються обмеженими при $t \to -\infty$. Оскільки ці підпростори перетинаються лише в нулі, то рівняння (4.27) не має нетривіальних обмежених розв'язків. Отже, рівняння (4.26) має єдиний розв'язок, що визначається з (4.35).

Зауваження 4.8. *У випадку, коли E — простір Банаха й оператор-функція $A(t)$ за кожного t є неперервним та обмеженим оператором ($A(t) \in \mathcal{L}(E)$), отримаємо відомі результати [108].*

Зауваження 4.9. *У випадку, коли E — квазіповний бочковий простір* *і оператор* $A(t) = A$ *є регулярним* ($A : E \to E$)*, отримуємо результати з [221]. У цьому разі умова дихотомії еквівалентна тому, що спектр оператора* A *не перетинається з уявною віссю. Таким чином, для спектральних проєкторів* $P_1 = P$ *і* $P_2 = I - P$ *справедливим є подання [221]:*

$$P_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda,$$

й відповідно функція Гріна $G(\cdot)$ *має вигляд*

$$G(t) = \begin{cases} e^{tA}P_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, \ t > 0, \\ -e^{tA}P_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, \ t < 0. \end{cases}$$

Якщо A *— секторіальний оператор, то отримаємо результати про обмежені розв'язки, які наведено в [273].*

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально дихотомічним на півосях* $\mathbb{R}_+$ *та* $\mathbb{R}_-$ *з проєкторами* P_+ *і* P_- *відповідно , а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F$$

має узагальнено-обернений.

Тоді:

1) для того щоб існували обмежені на всій осі розв'язки рівняння (4.26) необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ *задовольняла умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.36}$$

де $H(t) = (I - DD^-)P_-U^{-1}(t)$*;*

2) за виконання умови (4.36) обмежені розв'язки рівняння (4.26) набудуть вигляду

$$x_0(t, c) = U(t)P_+P_{N(D)}c + (G[f])(t), \quad c \in F, \tag{4.37}$$

де

$$(G[f])(t) = \begin{cases} \begin{array}{r} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I - P_+)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_+D^-[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I - P_+)f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ \ t \ge 0, \\ \\ \int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I - P_-)f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I - P_-)D^-[\int_0^\infty U^{-1}(\tau)(I - P_+)f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_-f(\tau)d\tau], \ \ t \le 0, \end{array} \end{cases}$$

є узагальненим оператором Гріна.

Приклад. Розглянемо рівняння (4.26) у вигляді зліченної системи з діагональним оператором

$$A(t) = diag\{\underbrace{th\ t, ..., th\ t}_{k}, -th\ t, -th\ t, ...\}$$

у просторах $l^2_{loc}(\mathbf{C})$ (з системою напівнорм $||(x_1, x_2, ..., x_n, ...)||^2_{n,l^2_{loc}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, $n \in \mathbb{N}$) або Кьоте з різними ваговими векторами (означення див., наприклад, у [221]). Тоді рівняння (4.26) є експоненціально дихотомічним на півосях з проєкторами

$$P_+ = diag\{\underbrace{0, ..., 0}_{k}, 1, 1, ...\}, \quad P_- = diag\{\underbrace{1, ..., 1}_{k}, 0, 0, ...\}$$

відповідно.

Еволюційний оператор має вигляд

$$U(t) = diag\{\underbrace{\frac{e^t + e^{-t}}{2}, ..., \frac{e^t + e^{-t}}{2}}_{k}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \frac{2}{e^t + e^{-t}}, ...\}.$$

Згідно з теоремою маємо, що

$$D = P_+ - I + P_- = 0, P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = I,$$

і оскільки $dim\ R[P_{N(D^*)}P_-] = k$, то оператор $P_{N(D^*)}P_-$ є скінченновимірним, $H(t) = diag\{H_k(t), 0\}$, де $H_k(t) = diag\{2/(e^t+e^{-t}), ..., 2/(e^t+e^{-t})\}$ — $k \times k$ вимірна матриця.

Необхідна й достатня умова існування узагальнених обмежених розв'язків у просторі Фреше набуде такого вигляду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0, \\ \quad \ldots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0. \end{cases}$$

На відміну від випадку банахових просторів топологія простору Фреше визначається набором напівнорм $||(x_1, x_2, ..., x_n, ...)||^2_{n,l^2_{loc}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, що не є нормами, тому такі функції не утворюють банахів простір.

Обмежені та майже періодичні розв'язки

Тут результати попередніх досліджень застосовуються до знаходження обмежених та майже періодичних розв'язків операторно-диференціальних рівнянь.

Означення 4.6. *[108]. Неперервна вектор-функція $f(t)$ зі значеннями у просторі Банаха E, визначена при $t \in \mathbb{R}$, є майже періодичною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $L > 0$, що кожен інтервал довжиною не меншою за L містить точку τ, для якої*

$$||f(t) - f(t+\tau)|| < \varepsilon.$$

Розглянемо рівняння (4.26) у просторі Банаха з постійним (у загальному випадку необмеженим) оператором і майже періодичним вільним членом $f(t)$. Позначимо через $\Delta(f)$ «множину не майже періодичності» [156]. Нагадаємо, що точку $\lambda \in J$ називають точкою «майже періодичності» функції f, якщо існує такий окіл цієї точки, що згортка $f * \varphi$ є майже періодичною функцією для будь-якої $\hat{\varphi} \in C_0^\infty$ із носієм, що належить цьому околу ($\hat{\varphi}$ — перетворення Фур'є для φ). Доповнення до цієї множини називають «множиною не майже періодичності». Нехай також c_0 — простір послідовностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, елементи якого збіжні до нуля. Справедливе таке твердження.

Твердження. *Нехай множина $\Delta(f)$ є розрідженою й виконується одна з умов :*

а) простір F не містить простір c_0 як підпростір;

б) вектор-функція f є слабко компактною.

Тоді за умови існування (4.29) будь-який обмежений розв'язок рівняння (4.26) вигляду (4.30) є майже періодичним. Це твердження є наслідком теореми 4.6 та теореми 5 із [156]. Зауважимо, що існує ширший клас майже періодичних задач, а саме — рівняння з асимптотично майже періодичними функціями.

Означення 4.7. *[356]. Неперервну на всій осі функцію $x(t)$ називають асимптотично майже періодичною, якщо її можна подати у вигляді*

$$x(t) = f(t) + r(t), t \in \mathbb{R},$$

де f — майже періодична функція; r — неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0.$$

Означення можна відобразити такими прикладами.

Приклади. Для того щоб ще раз підкреслити відмінність дослідження питання стосовно існування обмежених розв'язків у просторах Фреше та Банаха, розглянемо рівняння

$$\dot{x}_m(t) + th t x_m(t) = e^{-\frac{t}{m}}, m \in \mathbb{N}, \tag{4.38}$$

у просторі Фреше, топологія якого породжується такою системою напівнорм:

$$|x|_n = \sup_{t\in[-n;\infty)} |x(t)|, n \geq 0.$$

Зауважимо, що на відміну від простору Банаха неперервних та обмежених на всій осі функцій $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ права частина цього рівняння не належить простору $BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$, але належить простору Фреше, означеному вище. Дійсно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{-\frac{t}{m}}| = +\infty,$$

проте

$$|e^{-\frac{t}{m}}|_n = e^{\frac{n}{m}} < +\infty$$

для кожного n. Це означає, що дана функція є необмеженою у просторі Банаха, але обмеженою у просторі Фреше. Простір Фреше асимптотично майже періодичних функцій з визначеною вище топологією позначають $AAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [356], тобто функція $e^{-\frac{t}{m}} \in AAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тоді рівняння (4.38) має асимптотично майже періодичний обмежений на всій осі розв'язок у вигляді

$$x_m(t) = \frac{2c_m}{e^t + e^{-t}} + \frac{e^{(1-\frac{1}{m})t}}{(1-\frac{1}{m})(e^t+e^{-t})} - \frac{e^{-(1+\frac{1}{m})t}}{(1+\frac{1}{m})(e^t+e^{-t})}.$$

Ще одним прикладом існування обмеженого розв'язку в просторі Фреше може бути таке диференціальне рівняння у просторі узагальнених функцій $D'(\mathbb{R})$:

$$x'(t) + th\ t\ x(t) = \delta(t), \tag{4.39}$$

де δ — дельта-функція Дірака. Це рівняння можна записати у вигляді

$$(x', \varphi) + (th\ t\ x, \varphi) = (\delta, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$

або за означенням

$$(x, -\varphi' + tht\ \varphi) = (\delta, \varphi). \tag{4.40}$$

Згідно з теоремою про існування обмежених розв'язків, отримуємо, що рівняння (4.39) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли права частина (4.40) буде ортогональною до обмежених розв'язків однорідного спряженого рівняння

$$-\varphi'(t) + th\ t\ \varphi(t) = 0.$$

Легко бачити, що єдиним обмеженим розв'язком однорідного рівняння є нульовий розв'язок. Для нього отримаємо, що

$$(\delta, \varphi) = (\delta, 0) = 0,$$

тому умова розв'язності для рівняння (4.39) в узагальненому сенсі (4.40) завжди виконується. Узагальнений обмежений розв'язок можна подати у вигляді

$$x(t) = \frac{\theta(t)}{ch\ t},$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда. Дійсно, $x(t)$ — обмежений розв'язок, оскільки

$$(x, -\varphi' + th\ t\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)(-\varphi'(\tau) + th\ \tau\varphi(\tau))d\tau =$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(\tau)}{ch\ \tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{sh\ \tau}{ch^2\ \tau}\varphi(\tau)d\tau.$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл, отримаємо

$$-\frac{\varphi(t)}{ch\ t}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{sh\ \tau\varphi(\tau)}{ch^2\ \tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{sh\ \tau}{ch^2\ \tau}\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Відомо [73], що $x(t) = \frac{\theta(t)}{ch\ t}$ називають фундаментальним розв'язком рівняння (4.39). Використовуючи це подання, зауважимо, що для довільної обмеженої на всій осі узагальненої функції $f(t) \in D'(\mathbb{R})$ обмежений на всій осі розв'язок $x(t)$ рівняння

$$x'(t) + th\ tx(t) = f(t)$$

можна знайти у вигляді

$$x(t) = \frac{\theta(t)}{ch\ t} * f(t),$$

де «$*$» означає операцію згортки [73].

Для банахового простіру $\mathbf{B}$, наділеного топологією, яку породжено сукупністю напівнорм

$$\mathbf{B} \ni x \to |\varphi(x)|, \varphi \in \mathbf{B}^*,$$

локально-опуклий простір позначимо $\mathbf{B}_w$. Для нього справедливе таке означення.

Означення 4.8. *[356]. Відображення $x : \mathbb{R} \to \mathbf{B}$ називають слабко майже періодичним, якщо для довільного $\varphi \in \mathbf{B}^*$ відображення $\varphi(x(t)) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Простір слабко майже періодичних вектор-функцій позначають $WAP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$.*

Розглянемо рівняння $\dot{x}(t) = f(t)$ у банаховому просторі $\mathbf{B}$ із правою частиною $f(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. Як відомо [111], у скінченновимірному просторі обмеженість інтеграла $\int_0^t f(s)ds, t \in \mathbb{R}$ від майже періодичної функції гарантує те, що розв'язок $x(t)$ буде майже періодичним. У банаховому просторі такого результату не має, але відомий такий факт.

Теорема 4.7. *[356]. Якщо $f(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ та*

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds, t \in \mathbb{R},$$

то обмеженість x на $\mathbb{R}$ гарантує, що $x \in WAP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$. Окрім того, для того щоб $x \in AP(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, необхідно та достатньо, щоб $\mathcal{R}_x = \{x(t); t \in \in \mathbb{R}\}$ була відносно компактною в $\mathbf{B}$.

З цієї теореми, твердження, наведеного вище, та теореми 4.6 випливає наслідок.

Наслідок. *Нехай однорідне рівняння (4.27) є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами відповідно P_+ та P_-, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F$$

має узагальнено-обернений ($D \in GI(F)$), де F — банаховий простір, наділений сильною топологією.

Тоді:

1) для того щоб існували слабкі майже періодичні розв'язки рівняння (4.26) необхідно та достатньо, щоб вектор-функція $f \in AP(\mathbb{R}, F)$ задовольняла умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4.41}$$

де $H(t) = (I - DD^{-})P_{-}U^{-1}(t)$*;*

2) за виконання умови (4.41) слабкі майже періодичні розв'язки рівняння (4.26) матимуть вигляд

$$x_0(t,c) = U(t)P_{+}P_{N(D)}c + (G[f])(t), \quad c \in F, \tag{4.42}$$

де

$$(G[f])(t) = \begin{cases} \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_{+}f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_{+})f(\tau)d\tau + \\ +U(t)P_{+}D^{-}[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_{+})f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^{0} U^{-1}(\tau)P_{-}f(\tau)d\tau], \ t \geq 0, \\ \int_{-\infty}^{t} U(t)U^{-1}(\tau)P_{-}f(\tau)d\tau - \\ -\int_t^{0} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_{-})f(\tau)d\tau + \\ +U(t)(I-P_{-})D^{-}[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_{+})f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^{0} U^{-1}(\tau)P_{-}f(\tau)d\tau], \ t \leq 0, \end{cases}$$

є узагальненим оператором Гріна.

Доведення. Справедливість умови розв'язності (4.41) випливає з теореми 4.6. Належність $f \in AP(\mathbb{R}, F)$ гарантує, що за виконання умови (4.41) вираз (4.42) визначає множину обмежених на всій осі розв'язків рівняння (4.26). Тоді з анонсованої теореми [356, с.144] випливає, що кожен розв'язок є слабко майже періодичним у просторі Фреше F_w, наділеному слабкою топологією ($x_0(t,c) \in WAP(\mathbb{R}, F_w)$).

Зауваження 4.10. *З теореми 4.7 (теорема 5.3 [356, с.140]) випливає, що* $x_0(t,c) \in AP(\mathbb{R}, F)$ *тоді й тільки тоді, коли він має відносно компактну множину значень у просторі* F.

E-дихотомія лінійних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних

Розглянемо еволюційну операторну систему, а саме векторне рівняння у частинних похідних:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{U}(D)u(t,x), \quad t \in [0; +\infty), \tag{4.43}$$

де $u(t,x)$ — вектор-функція з компонентами $u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x)$; $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — точка простору $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}(D) = ||a_{ij}(D)||$ — квадратна $m \times m$ матриця, елементи a_{ij} якої є многочленами від $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$ за сталими коефіцієнтами.

Припустимо, що виконується така умова: 1) характеристичний многочлен $d(\sigma, \lambda)$ матриці $\mathcal{U}(\sigma)$ зображається у вигляді

$$d(\sigma, \lambda) = |\mathcal{U}(\sigma) - \lambda I| = p(\sigma, \lambda)q(\sigma, \lambda),$$

де многочлени $p(\sigma, \lambda)$, $q(\sigma, \lambda)$ відносно σ і λ мають біля кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}^n$ корені $\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), ..., \lambda_k(\sigma)$ та $\lambda_{k+1}(\sigma), ..., \lambda_m(\sigma)$ відповідно у лівій та правій півплощинах $Re\lambda \leq -\delta$ і $Re\lambda \geq \sigma$.

За виконання цієї умови існує квадратна $m \times m$ матриця $B(D)$, елементами якої є многочлени з постійними коефіцієнтами від $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$, та існує простір Гільберта L_B, отриманий поповненням за диференціальною нормою

$$||u||_B = \{\int (B(D)u(x), u(x))dx\}^{\frac{1}{2}}$$

деякої сукупності функцій з $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для цього простору буде справджуватись таке твердження:

За виконання умови 1 для рівняння (4.43) у просторі L_B має місце експоненціальна дихотомія на півосі $[0; +\infty)$ у сенсі означення 4.5.

Це твердження, очевидно, випливає з відповідного твердження, наведеного в [147], і того факту, що означення дихотомії у сенсі означення 4.5, узагальнює означення дихотомії у сенсі відповідного означення з [147]. Аналогічно, використовуючи означення 4.5 дихотомії на півосях, можна досліджувати питання існування обмежених на всій осі розв'язків операторної системи:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathfrak{U}(t, D)u(t, x).$$

Наступний приклад ілюструє цей факт.

Приклад. Розглянемо зліченну систему рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - th\ t\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} = f_i(x,t), \\ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} + th\ t\frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} = g_i(x,t) \end{cases} \tag{4.44}$$

з крайовими умовами

$$u_i(t,0) = u_i(t,2\pi), \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,2\pi), u_i(0,x) = \varphi_i(x), \tag{4.45}$$

$$v_i(t,0) = v_i(t,2\pi), \frac{\partial v_i}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v_i}{\partial x}(t,2\pi), v_i(0,x) = \psi_i(x), i\in\mathbb{N}, \tag{4.46}$$

де $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ — довільні функції, що розкладаються у ряд Фур'є. Якщо розглянути вектор-функції $Y(t,x) = = (u_i(t,x), v_i(t,x))^T_{i\in\mathbb{N}}$, $F(t,x) = (f_i(t,x), g_i(t,x))^T_{i\in\mathbb{N}}$, $\Psi(x) =$

$= \quad (\varphi_i(x), \psi_i(x))^T_{i\in\mathbb{N}}$, то крайову задачу (4.44)—(4.46) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial Y(t,x)}{\partial t} = B(t)\frac{\partial^2 Y(t,x)}{\partial x^2} + F(t,x), \tag{4.47}$$

$$Y(t,0) = Y(t,2\pi), \frac{\partial Y}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial Y}{\partial x}(t,2\pi), Y(0,x) = \Psi(x), \tag{4.48}$$

де

$$B(t) = diag\{th\ t, -th\ t, th\ t, -th\ t, ...\}.$$

Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.47), (4.48) за умови, що $F(t,x) \in BC(\mathbb{R}, L_2([0;2\pi], l_2))$. Це означає, що вектор-функція $F(t,x)$ належить банаховому простору обмежених на всій осі вектор-функцій за змінною t зі значеннями за змінною x у просторі $L_2([0;2\pi], l_2)$. Норму у цьому просторі визначають так:

$$|||F||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||F(t,\cdot)||_{L_2([0;2\pi],l_2)} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} (\sum_{i=1}^{\infty} (||f_i(t,\cdot)||^2_{L_2([0;2\pi])} + ||g_i(t,\cdot))||^2_{L_2([0;2\pi])})^{\frac{1}{2}}) < +\infty.$$

Отже, у цій системі рівняння не є незалежними.

Враховуючи таке означення норми у цьому просторі, розв'язок крайової задачі (4.47), (4.48) будемо шукати у просторі $BC^1(\mathbb{R}, W_2^2([0;2\pi], l_2))$. Запишемо крайову задачу (4.47), (4.48) у операторному вигляді:

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t) + F(t), \tag{4.49}$$

$$Y(0) = \Psi, \tag{4.50}$$

де $Y(t) = Y(t,\cdot)$, $F(t) = F(t,\cdot)$, $\Psi = \Psi(\cdot)$,

$$A(t) = diag\{th\ t\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -th\ t\frac{\partial^2}{\partial x^2}, ...\},$$

з областю визначення

$$D(A(t)) = \{g(t,x) \in L_2([0;2\pi], l_2), A(t)g(t,x) \in L_2([0;2\pi], l_2) :$$

$$g(t,0)=g(t,2\pi),\frac{\partial g}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(t,2\pi)\}.$$

Нехай функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ розкладено у ряди Фур'є:

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi_{1i}^k cokx+\varphi_{2i}^k sinkx),$$

$$\psi_i(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}(\psi_{1i}^k cokx+\psi_{2i}^k sinkx).$$

Тоді еволюційний оператор однорідного рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt}=A(t)U(t),$$

визначають так:

$$U(t)\Psi=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\varphi_{11}^k cokx+\varphi_{21}^k sinkx)}{ch^{k^2}t} & 0 & ... & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}(\psi_{11}^k cokx+\psi_{21}^k sinkx)ch^{k^2}t & 0 & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$U(0)\Psi=\Psi;$$

$$U(t)U^{-1}(s)\Psi=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\varphi_{11}^k cokx+\varphi_{21}^k sinkx)ch^{k^2}s}{ch^{k^2}t} & 0 & ... & ... \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\psi_{1i}^k cokx+\psi_{2i}^k sinkx)ch^{k^2}t}{ch^{k^2}s} & 0 & ... \end{pmatrix},$$

і система допускає експоненціальну дихотомію на півосях з проєкторами відповідно

$$P=diag\{1,0,1,0,...\} \text{ та } Q=diag\{0,1,0,1,...\}$$

Розкладемо функції $f_i(t,x)$, $g_i(t,x)$ у ряди Фур'є за змінною x:

$$f_i(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}(f_{ki}^1(t)coskx+f_{ki}^2(t)sinkx),$$

$$g_i(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}(g_{ki}^1(t)coskx+g_{ki}^2(t)sinkx),$$

де

$$f_{ki}^1(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f_i(t,x) coskx dx, \quad f_{ki}^2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f_i(t,x) sinkx dx,$$

$$g_{ki}^1(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} g_i(t,x) coskx dx, \quad g_{ki}^2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} g_i(t,x) sinkx dx.$$

У цьому випадку оператор $D = P - I + Q = 0$ та проєктори $P_{N(D)} = I$, $P_{Y_D} = I$ відповідно. Тоді необхідна та достатня умова існування обмежених на всій осі розв'язків неоднорідного рівняння (4.49)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)F(t)dt = 0$$

виконуватиметься, якщо виконуватиметься такий набір рівностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{ki}^1(\tau)}{ch^{k^2}\tau} d\tau = 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{ki}^2(\tau)}{ch^{k^2}\tau} d\tau = 0, i, k \in \mathbb{N}.$$

За виконання цих умов відповідна крайова задача матиме множину обмежених на всій осі розв'язків за змінною t, які можна подати у вигляді

$$Y(t) = U(t) P P_{N(D)} \Psi + (G[F])(t)$$

або у розгорнутому вигляді

$$u_i(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_{1i}^k coskx + \varphi_{2i}^k sinkx}{ch^{k^2} t} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{\int_0^t f_{ki}^1(s) ch^{k^2} s ds}{ch^{k^2} t} coskx + \frac{\int_0^t f_{ki}^2(s) ch^{k^2} s ds}{ch^{k^2} t} sinkx \Big),$$

$$v_i(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(coskx \; ch^{k^2} t \int_t^{+\infty} \frac{g_{ki}^1(s)}{ch^{k^2} s} ds + sinkx \; ch^{k^2} t \int_t^{+\infty} \frac{g_{ki}^2(s)}{ch^{k^2} s} ds \Big), t \geq 0,$$

$$v_i(x,t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(coskx \; ch^{k^2} t \int_{-\infty}^{t} \frac{g_{ki}^1(s)}{ch^{k^2} s} ds + sinkx \; ch^{k^2} t \int_{-\infty}^{t} \frac{g_{ki}^2(s)}{ch^{k^2} s} ds \Big), t \leq 0.$$

4.4. Крайові задачі на всій осі

Праці, присвячені розвиненню методів аналізу крайових задач, традиційно посідають одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь. Крайові задачі на всій осі та з умовами на нескінченності виникають у різних застосуваннях — теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування та чисельних методах, у задачах радіо інженерії, механіці, біології тощо. Цей підрозділ присвячено дослідженню лінійних крайових задач на всій осі.

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу у просторі Банаха $\mathbf{B}$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \ , \tag{4.51}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \tag{4.52}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у простір Банаха $\mathbf{B}$,

$$f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \{f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B}, |||f||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty\},$$

операторнозначна функція $A(t)$ є сильно неперервною з відповідною нормою $|||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||A(t)|| < +\infty$;

$$BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \{x(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{B}), |||x||| =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|x(t)\|, \|x'(t)\|\} < \infty\}$$

є простором функцій, неперервних та обмежених на $\mathbb{R}$ разом із похідною; l — лінійний та обмежений оператор, що діє з простору $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ у простір Банаха $\mathbf{Y}$.

Визначимо умови існування обмежених на всій осі розв'язків $x(\cdot) \in \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ крайової задачі (4.51), (4.52) за припущення, що відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{4.53}$$

допускає експоненціальну дихотомію [108, 436, 474] на півосях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ відповідно з проєкторами P та Q і сталими $k_{1,2} \geq 1$ та $\alpha_{1,2} > 0$. Еволюційний оператор, нормований у нулі, позначимо $U(t)$.

Основний результат. Покажемо, що за виконання умов теореми 4.3 крайову задачу можна розв'язати за допомогою оператора

$$B_0 := lU(\cdot)PP_{N(D)} : \mathbf{B} \to \mathbf{Y}.$$

Теорема 4.8. *Нехай оператор*

$$B_0 : \mathbf{B} \to \mathbf{Y},$$

що діє з простору $\mathbf{B}$ *у простір Банаха* $\mathbf{Y}$, *є узагальнено-оборотним (тобто* $B_0 \in GI(\mathbf{B}, \mathbf{Y})$*). Тоді:*

(i) для того щоб розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) існували необхідно й достатньо, щоб

$$P_{\mathbf{Y}_{B_0}}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] = 0; \tag{4.54}$$

(ii) за виконання умови (4.54) розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) мають вигляд

$$x(t, \overline{c}) = U(t)PP_{N(D)}P_{N(B_0)}\overline{c}+$$

$$+U(t)PP_{N(D)}B_0^{-}[\alpha - l(G[f])(\cdot)] + (G[f])(t)$$

для довільного елемента $\overline{c} \in \mathbf{B}$, *де* $(G[f])(\cdot)$ *— узагальнений оператор Гріна, визначений у теоремі 4.1;* B_0^{-} *— узагальнено-обернений оператор до* B_0*;* $P_{N(B_0)} = I - B_0^{-}B_0$*;* $P_{\mathbf{Y}_{B_0}} = I - B_0B_0^{-}$ *— проєктор, який проєктує* $\mathbf{B}$ *на підпростір* $\mathbf{Z} := \mathbf{Y} \ominus R(B_0)$ *(*$\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \oplus R(B_0)$*).*

Доведення. З теореми 4.1 маємо, що множина обмежених розв'язків рівняння (4.51) є такою: $x(t, c) = U(t)PP_{N(D)}c + (G[f])(t)$. Підставимо ці розв'язки у рівняння (4.52):

$$l(U(\cdot)PP_{N(D)}c + (G[f])(\cdot)) = \alpha.$$

Оскільки оператор l є лінійним, то

$$l(U(\cdot)PP_{N(D)})c + l((G[f])(\cdot)) = \alpha,$$

й остаточно отримаємо операторне рівняння:

$$B_0c = \alpha - l((G[f])(\cdot)).$$

Оскільки оператор B_0 є узагальнено-оборотним, то для існування розв'язків крайової задачі (4.51), (4.52) необхідно та достатньо [326], щоб

$$P_{\mathbf{Y}_{B_0}}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то

$$c = P_{N(B_0)}\overline{c} + B_0^{-}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] \ \ \forall\, \overline{c} \in \mathbf{B}.$$

Тоді множина обмежених розв'язків крайової задачі (4.51), (4.52) набуває вигляду:

$$x(t, \overline{c}) = U(t)PP_{N(D)}P_{N(B_0)}\overline{c} +$$
$$+ U(t)PP_{N(D)}B_0^{-}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] + (G[f])(t).$$

Зауваження 4.11. *Якщо* $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, $lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha, \alpha) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, *де* α *— положення рівноваги (4.51), то всі обмежені розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) є «гомоклінічними» траєкторіями [375]. У тому випадку, коли* $lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha, \beta) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B}$, *де* $\alpha \neq \beta$ *— положення рівноваги, а всі обмежені розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) є «гетероклінічними» траєкторіями [375].*

Зауваження 4.12. *Покажемо, що умова*

$$P_{\mathbf{Y}_{B_0}}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] = 0$$

теореми еквівалентна тому, що

$$P_{N(B_0^*)}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] = 0.$$

Введемо позначення: $h = \alpha - l((G[f])(\cdot))$. *Умова існування розв'язку крайової задачі (4.51), (4.52) еквівалентна розв'язності рівняння*

$$B_0 c = h. \tag{4.55}$$

Для того щоб $h \in R(B_0)$ *необхідно та достатньо, щоб* $h \notin \mathbf{Z}$. *Ця умова виконується тоді й тільки тоді, коли* $P_{\mathbf{Y}_{B_0}} h = 0$. *Разом із розкладом простору*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \oplus R(B_0) = (\mathbf{Y} \ominus R(B_0)) \oplus R(B_0)$$

маємо розклад одиниці

$$I_{\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{Y}_{B_0}} + P_{R(B_0)}.$$

Водночас рівність (4.55) виконується тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \phi \in \mathbf{Y}^* : \phi(B_0 c) = \phi(h),$$

яка у свою чергу може бути переписана у вигляді

$$(B_0^* \phi)(c) = \phi(h)$$

за визначенням спряженого оператора. Тоді умова розв'язності рівняння (4.55) є еквівалентною тому, що

$$\phi(h) = 0 \ \ \forall \phi \in \mathbf{Y}^* : B_0^* \phi = 0$$

або

$$\phi(h) = 0 \ \ \forall \phi \in N(B_0^*) \subset \mathbf{Y}^*.$$

У свою чергу ця умова еквівалентна умові розв'язності

$$P_{N(B_0^*)} h = 0.$$

Окрім того, $^{\perp}N(B_0^*) = \{h \in \mathbf{Y} : \phi(h) = 0, \phi \in N(B_0^*)\} = R(B_0)$*. Іншими словами, розв'язність операторного рівняння (4.55) еквівалентна умові ортогональності правої частини* h *рівняння (4.55) до розв'язків однорідного спряженого рівняння* $B_0^* \varphi = 0$*.*

Приклади. 1. Проілюструємо твердження доведені вище. Розглянемо таку крайову задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.56}$$

$$lx(\cdot) = x(b) - x(a) = \alpha, \tag{4.57}$$

де $A(t)$ — оператор у вигляді зліченновимірної матриці, що для кожного дійсного значення t діє у просторі Банаха $\mathbf{B} = l_p,\ p \in [1; +\infty)$ та

$$x(t) = col\{x_1(t), x_2(t), \ldots x_k(t), \ldots\} \ \in \ BC^1(\mathbb{R}, l_p),$$

$$f(t) = col\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t), \ldots\} \ \in \ BC(\mathbb{R}, l_p)$$

є зліченними вектор-стовцями; $a, b \in \mathbb{R}, b > 0, a < 0$; $\alpha = col\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\} \in l_p$ — сталий вектор ($\alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \in \mathbb{N}$).

Розглянемо крайову задачу (4.56), (4.57) з оператором

$$A(t)=\begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{th\ t \qquad 0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ 0 & th\ t & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & th\ t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\,th\ t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} : l_p \to l_p. \qquad (4.58)$$

Еволюційний оператор системи (4.56), (4.58) має вигляд

$$U(t)=$$

$$=\begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{(e^t+e^{-t})/2 \qquad 0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ 0 & (e^t+e^{-t})/2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а оператор, обернений до $U(t)$, — вигляд

$$U^{-1}(t)=$$

$$=\begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{2/(e^t+e^{-t}) \qquad 0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots . \\ 0 & 0 & 2/(e^t+e^{-t}) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (e^t+e^{-t})/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

Тоді відповідна однорідна система експоненціально дихотомічна на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$, з проєкторами набуває вигляду

$$P=\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{0 \qquad 0}^{k}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad Q=\begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{1 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$D = P - (E - Q) = 0, \qquad P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = E.$$

Оскільки $dim R[P_{N(D^*)}Q] = k$, то оператор $P_{N(D^*)}Q$ є скінченновимірним:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots}^{k} & \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\ 0 \quad \dots \quad 1 & \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 & \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \end{pmatrix} U^{-1}(t) = diag\{H_k(t), 0\},$$

де

$$H_k(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

є $k \times k$-вимірною матрицею.

Згідно з теоремою 4.3 для існування ров'язків системи (4.56), (4.58), обмежених на всій осі, необхідно й достатньо, щоб виконувались такі умови:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t) f(t) dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0, \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t + e^{-t}} dt = 0. \end{cases} \tag{4.59}$$

Тому щоб система (4.53), (4.58) мала розв'язки, обмежені на всій осі, необхідно й достатньо, щоб виконувалося рівно k умов; інші функції $f_i(t)$ для всіх $i \geq k+1$ можна обрати довільними з такого класу, щоб $f \in BC(\mathbb{R}, l_p)$. Окрім того, система (4.53), (4.58) має нескінченну множину обмежених розв'язків. Наприклад, за вектор-функцією f з класу $BC(\mathbb{R}, l_p)$ можна обрати довільну f з першими k компонентами, що є непарними функціями.

Для розв'язування крайової задачі знайдемо матрицю B_0:

$$B_0 = lU(\cdot)PP_{N(D)} = U(b)PP_{N(D)} - U(a)PP_{N(D)},$$

остаточно

$$B_0 = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{0 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{cha-chb}{cha \cdot chb} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{cha-chb}{cha \cdot chb} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} : l_p \to l_p.$$

Оскільки $a \neq b$, то оператор $P_{\mathbf{Y}_{B_0}}$ набуває вигляду

$$P_{\mathbf{Y}_{B_0}} = \begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{1 \qquad 0 \qquad \dots}^{k}} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} : l_q \to l_q \ (1/p + 1/q = 1),$$

тому

$$G[f](b) - G[f](a) = \begin{pmatrix} -\int_{-\infty}^{a} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}} ds - \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}} ds \\ \dots \\ -\int_{-\infty}^{a} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}} ds - \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}} ds \\ \\ \frac{1}{2} \int_a^b (e^s + e^{-s}) f_{k+1}(s) ds \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathbf{Y}_{B_0}}[\alpha - l(G[f])(\cdot)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{a} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}} ds + \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_1(s)}{e^s+e^{-s}} ds = -\alpha_1, \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{a} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}} ds + \int_{b}^{+\infty} \frac{2f_k(s)}{e^s+e^{-s}} ds = -\alpha_k. \end{cases} \tag{4.60}$$

Отже, згідно з теоремою 4.1 крайова задача (4.56)—(4.58) допускає принаймні один обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок тоді й тільки тоді, коли вектор-функція f задовольняє сформульовані вище умови.

2. Розглянемо одновимірну крайову задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -tht\ x(t) + f(t),$$

$$lx = (x(+\infty), x(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2. \tag{4.61}$$

a) нехай $f(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ та $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, -2)$. Множина обмежених розв'язків, які задовольняють крайову умову (4.61), має вигляд

$$x(t,c) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, c - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} + \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) нехай $f(t) = 2\ tht$ та $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2)$. У цьому випадку рівняння (4.51) має точку рівноваги — розв'язок $x_0(t) = 2$, а множина «гомоклінічних» траєкторій є такою:

$$x(t,c) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, c + 2 - \frac{4}{e^t + e^{-t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Розглянемо двовимірну крайову задачу:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -tht\ x_1(t) + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -tht\ x_2(t) + f_2(t),$$

$l(x_1, x_2) = (x_1(+\infty), x_1(-\infty), x_2(+\infty), x_2(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2,\ \alpha_3, \alpha_4) = (0, -2, 2, 2)$, де $f_1(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, f_2(t) = 2\ tht$ (прямий добуток рівнянь з прикладів 2a, 2b). Ця задача має двопараметричну множину обмежених розв'язків:

$$x_1(t, c_1) = \tfrac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_1 - \tfrac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}} + \tfrac{2}{e^t+e^{-t}},$$

$$x_2(t, c_2) = \tfrac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_2 + 2 - \tfrac{4}{e^t+e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Розглянемо двовимірну крайову задачу:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -tht\ x_1(t) + x_2(t) + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -tht\ x_2(t) + f_2(t),$$

$l(x_1, x_2) = (x_1(+\infty), x_1(-\infty), x_2(+\infty), x_2(-\infty)) = (\alpha_1, \alpha_2,\ \alpha_3, \alpha_4) = (2, -4, 2, 2) \in \mathbb{R}^4$, де $f_1(t) = \frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, f_2(t) = 2\ tht$. У цьому випадку задача має двопараметричну множину обмежених розв'язків вигляду

$$x_1(t, c_1, c_2) = \tfrac{c_1 + 2c_2 t - 4t + 2e^t - 4e^{-t}}{e^t+e^{-t}},$$

$$x_2(t, c_2) = \tfrac{2}{e^t+e^{-t}}\ c_2 + 2 - \tfrac{4}{e^t+e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Розглянемо випадок, коли оператор крайових умов l діє на обмежені розв'язки рівняння (4.51) так:

$$lx(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} A_i x(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t_{i+n}) = \alpha,$$

де лінійні та обмежені оператори $A_i, i = \overline{1,n}, B_j, j = \overline{1,m}$, діють у просторах Гільберта $\mathbf{B} = H_1, \mathbf{Y} = H_2$, $A_i, B_j \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$; $t_i > 0, i = \overline{1,n}$; $t_{i+n} < 0, i = \overline{n+1,m}$. Отримаємо багатоточкову крайову задачу. Тоді оператор B_0 набуде вигляду

$$B_0 := (\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)} : H_1 \to H_2.$$

З теореми 4.8 отримаємо таке твердження.

Теорема 4.9. *Нехай*

$$\overline{R((\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)})} =$$
$$= R((\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)}).$$

Тоді:

(i) для того щоб розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) існували необхідно й достатньо, щоб

$$P_{\mathbf{Y}_{((\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)})}}[\alpha - l((G[f])(\cdot))] = 0; \qquad (4.62)$$

(ii) за виконання умови (4.62) розв'язки крайової задачі (4.51), (4.52) мають вигляд

$$x(t,\overline{c}) = U(t)PP_{N(D)}P_{N((\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)})}\overline{c} +$$
$$+ U(t)PP_{N(D)}((\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)})^{+}[\alpha - l(G[f])(\cdot)] + (G[f])(t)$$

для довільного елемента $\overline{c} \in \mathbf{B}$, де $(G[f])(\cdot)$ — узагальнений оператор Гріна, визначений у теоремі 4.1; $(\sum_{i=1}^{n} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i U(t_{i+n}))PP_{N(D)})^{+}$ — псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор.

4.5. Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків для еволюційних рівнянь з необмеженим оператором

У працях [114]—[117] введено метод параметризації для апроксимації розв'язків систем диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах. У цьому підрозділі обгрунтовано метод параметризації для диференціального рівняння у банаховому просторі з необмеженим операторним коефіцієнтом. У випадку існування обмежених розв'язків відповідного диференціального рівняння запропоновано ітераційний алгоритм довільного порядку точності для знаходження узагальнених обмежених розв'язків. Здебільшого він необхідний для дослідження породжувального оператора еволюції, що не заданий в явному вигляді.

Постановка задачі. На осі $\mathbb{R}$ розглядається лінійне еволюційне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{4.63}$$

де $A(t)$ — множина лінійних замкнених операторів з незалежною від t областю визначення $D(A(t)) = D \subset B$, щільною у вихідному банаховому просторі B, $f \in BC(\mathbb{R}, B)$.

Тут подано узагальнення методу параметризації [114], [115] на випадок необмежених операторів. За цим алгоритмом можна знаходити узагальнені обмежені розв'язки диференціального рівняння (4.63) за умов їх існування (див. підрозд. 4.4), коли породжувальний оператор еволюції невідомо. Для простоти викладення припускатимемо виконання умов, за яких еволюційний оператор вихідного рівняння (4.63) є сильно неперервним [144].

Надалі через $l_\infty(\mathbb{Z}, B)$ традиційно [253] позначатимемо простір нескінченних послідовностей $x = \{x_s, s \in \mathbb{Z}\}$ зі значеннями у банаховому просторі B, які мають обмежену норму $||x||_\infty = \sup_{s\in\mathbb{Z}} ||x_s||_B$.

Позначимо як $l_\infty(\mathbb{Z}; C([(s-1)h; sh); B)), h > 0$, також простір послідовностей неперервних й обмежених функцій $x(t) = (x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$, $x_s(t) \in \in B$, визначених для $t \in [(s-1)h; sh)$ з нормою $||x||_{l_\infty(Z;C([(s-1)h;sh);B))} = = \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||x_s(t)||_B$ (або для зручності $||x||_1$). Викладемо суть методу параметризації.

Метод параметризації. Для зручності вважатимемо, що операторфункція $A(t)$ є обмеженою. Оберемо крок $h > 0$ та розбиття

$$\mathbb{R} = \cup_{s=-\infty}^{+\infty} [(s-1)h; sh).$$

Звуження будь-якої функції $x(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$ на напівінтервал $[(s-1)h; sh)$ позначатимемо $x_s(t)$. Тоді рівняння (4.63) перетвориться на багатоточкову крайову задачу:

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = A(t)x_s(t) + f(t),\ t \in [(s-1)h; sh), \tag{4.64}$$

з умовами зшивання у точках розбиття:

$$\lim_{t \to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), s \in \mathbb{Z}. \tag{4.65}$$

Введемо позначення: $\lambda_s = x_s((s-1)h)$ і на кожному напівінтервалі $[(s-1)h; sh)$ зробимо заміну змінних: $u_s(t) = x_s(t) - \lambda_s$.

Отримаємо крайову задачу із параметром

$$\frac{du_s(t)}{dt} = A(t)(u_s(t) + \lambda_s) + f(t),$$

$$u_s((s-1)h) = 0, \quad t \in [(s-1)h; sh), \tag{4.66}$$

$$\lim_{t \to sh-0} u_s(t) + \lambda_s = \lambda_{s+1}, s \in \mathbb{Z}. \tag{4.67}$$

Задачі (4.64), (4.65) та (4.66), (4.67) є еквівалентними у тому сенсі, що якщо система функцій $(x_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ є розв'язком задачі (4.64), (4.65), то система пар $(\lambda, u(t)) = (\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ теж є розв'язком крайової задачі (4.66), (4.67). Якщо пара $(\lambda^*, u^*(t)) \in l_\infty(\mathbb{Z}, B) \times l_\infty(\mathbb{Z}; C([(s-$ $-1)h; sh); B))$ — розв'язок задачі (4.66), (4.67), то функція $x^*(t) =$ $= (\lambda_s^* + u_s^*(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ належить класу $BC^1(\mathbb{R}, B)$ і задовольняє диференціальне рівняння (4.63) на D.

Задача (4.66) зручна тим, що за фіксованих значень параметра $\lambda =$ $= (\lambda_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ є задачею Коші й має єдиний розв'язок, який можна знайти [144] з інтегрального рівняння:

$$u_s(t) = \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau)[u_s(\tau) + \lambda_s]d\tau + \int_{(s-1)h}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{4.68}$$

Підставляючи $u_s(t)$ у праву частину (4.68) та повторюючи цей процес m разів, отримуємо

$$\begin{aligned} u_s(t) = [&\textstyle\int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)\int_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + ...+ \\ &+ \textstyle\int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m...d\tau_1]\lambda_s + \int_{(s-1)h}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + ...+ \\ &+ \textstyle\int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1 + \\ &\textstyle\int_{(s-1)h}^{t} A(\tau_1)...\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1})\int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)u_s(\tau)d\tau_m d\tau_{m-1}...d\tau_1. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Звідси визначимо $\lim_{t\to sh-0} u_s(t)$ і, підставивши в (4.67), знайдемо нескінченну операторну систему рівнянь відносно параметрів $\lambda_s, s \in \mathbb{Z}$:

$$[I + P_{m,s}(h)]\lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{m,s}(h) - R_{m,s}(u,h), \tag{4.70}$$

де I — тотожний оператор,

$$P_{m,s}(h) = \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) \int_{(s-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + ... +$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) ... \int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m ... d\tau_1,$$

$$F_{m,s}(h) = \int_{(s-1)h}^{sh} f(\tau_1)d\tau_1 + ... +$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) ... \int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} f(\tau_m)d\tau_m d\tau_{m-1} ... d\tau_1,$$

$$R_{m,s}(u,h) = \int_{(s-1)h}^{sh} A(\tau_1) ... \int_{(s-1)h}^{\tau_{m-2}} A(\tau_{m-1}) \times$$

$$\times \int_{(s-1)h}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m) u_s(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} ... d\tau_1.$$

Позначимо через $Q_{m,h}$ нескінченновимірну операторну матрицю, яка відповідає лівій частині рівняння (4.70). У кожному блочному рядку матриці $Q_{m,h}$ ненульовими блоками є лише оператори $I + P_{m,s}(h)$ та $-I$. Ввівши до розгляду зліченні вектори $F_m(h) = (..., F_{m,s}(h), F_{m,s+1}(h), ...)$ й $R_m(u,h) = (..., R_{m,s}(u,h), R_{m,s+1}(u,h), ...)$, отримаємо операторне рівняння вигляду

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h) - R_m(u,h). \tag{4.71}$$

Легко бачити, що операторна матриця

$$Q_{m,h} : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$$

є обмеженим оператором, для якого справедливою оцінка

$$||Q_{m,h}||_{\mathcal{L}(l_\infty(\mathbb{Z},B))} \le 2 + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!}(\alpha h)^j \quad (\alpha = \sup_{t\in[(s-1)h;sh]} ||A(t)||).$$

Розв'язок задачі (4.66), (4.67) з параметром — систему пар $(\lambda_s, u_s(t))_{s\in\mathbb{Z}}$ — знаходимо виходячи з наступного алгоритму:

Крок 1. Початкове наближення $\lambda^{(0)}$ параметра визначаємо з операторного рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h).$$

На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв'язуючи задачу Коші (4.66) при $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$, знаходимо $u_s^{(0)}(t)$, виходячи з (4.68) за умови розв'язності $P_{N(Q^*_{m,h})}F_m(h) = 0$. Тут $P_{N(Q^*_{m,h})}$ — проєктор [327] на ядро оператора $Q^*_{m,h}$.

Крок 2. Підставляючи $u_s^{(0)}(t)$ у праву частину (4.71), з рівняння

$$Q_{m,h}\lambda = -F_m(h) - R_m(u^0, h)$$

визначаємо $\lambda^{(1)}$. На відрізках $[(s-1)h; sh)$, розв'язуючи задачу Коші (4.66) при $\lambda_s = \lambda_s^{(1)}$, знаходимо $u_s^{(1)}(t)$. Далі цей процес повторюється на кожному з відрізків. За умови розв'язності маємо $P_{N(Q^*_{m,h})}\{R_m(u^0, h)\} = 0$. Умову необхідно перевіряти на кожному кроці. Тому, якщо $P_{N(Q^*_{m,h})} = 0$, то умови розв'язності виконуються автоматично.

Якщо умови розв'язності не виконуються, то алгоритм дає змогу знаходити квазірозв'язки.

Теорема 4.10. *Нехай за деяких* $h > 0$ *і* $m \in \mathbb{N}$ *операторна матриця* $Q_{m,h} : l_\infty(\mathbb{Z}, B) \to l_\infty(\mathbb{Z}, B)$ *є узагальнено-оборотним оператором та виконуються умови*

$$P_{N(Q^*_{m,h})} = 0,$$

$||Q^-_{m,h}|| \leq \gamma_m(h), \gamma_m(h) = const,$ *де* $Q^-_{m,h}$ *— узагальнено-обернений оператор до*

$$q_m(h) = \gamma_m(h)[exp(\alpha h) - 1 - ... - (m!)^{-1}(\alpha h)^m] < 1.$$

Тоді рівняння (4.63) має принаймні один обмежений розв'язок $x(t) \in$ $\in BC^1(\mathbb{R}, B)$*, для якого справедлива оцінка:*

$$|||x - x^{(k)}||| \leq \gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}e^{\alpha h}\frac{[q_m(h)]^k}{1 - q_m(h)}M(h, c), \qquad (4.72)$$

$$M(h, c) = [e^{\alpha h} - 1](h|||f|||\gamma_m(h)\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||\mathcal{P}_{N(Q_{m,h})}c||_\infty) + e^{\alpha h}|||f|||h.$$

Тут $x^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \lambda^{(k)}$.

Доведення. Зважаючи на узагальнену оборотність $Q_{m,h}$, оберемо початковий вектор $\lambda^{(0)}$ з рівності

$$\lambda^{(0)} = Q^{-}_{m,h}(-F_m(h)) + P_{N(Q_{m,h})}c,$$

де c — будь-який фіксований елемент з банахового простору B; $P_{N(Q_{m,h})}$ — проєктор на ядро оператора $Q_{m,h}$. Тоді

$$||\lambda^{(0)}||_\infty = \sup_{s\in\mathbb{Z}} ||\lambda_s^{(0)}||_B \le ||Q^{-}_{m,h}|| \cdot ||F_m(h)||_\infty + ||P_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Оскільки

$$||F_m(h)||_\infty \le h|||f||| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!},$$

то

$$||\lambda^{(0)}||_\infty \le \gamma_m(h)h|||f||| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||P_{N(Q_{m,h})}c||_\infty.$$

Згідно з припущеннями за такого $\lambda^{(0)}$ задача (4.66) має єдиний розв'язок $(u_s^{(0)}(t))_{s\in\mathbb{Z}}$, для якого справедлива оцінка :

$$||u_s^{(0)}(t)||_B \le [e^{\alpha[t-(s-1)h]} - 1]||\lambda_s^{(0)}||_B + e^{\alpha[t-(s-1)h]}|||f|||h.$$

Тому, для $u^{(0)}(t)$ отримаємо оцінку

$$||u^{(0)}||_1 \le \sup_{s\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[(s-1)h;sh)} ||u_s^{(0)}(t)||_B \le [e^{\alpha h} - 1](h|||f|||\gamma_m(h)\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||P_{N(Q_{m,h})}c||_\infty) + e^{\alpha h}|||f|||h.$$

Далі за алгоритмом знаходимо вектор $\lambda^{(1)} = Q^{-}_{m,h}[-F_m(h)- -R_m(u^{(0)}, h)] + P_{N(Q_{m,h})}c$, де фіксований елемент банахового простору $c \in B$ обирають так само, як і на попередньому кроці. Враховуючи це, оцінимо різницю $\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}$ за нормою

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty = ||Q^{-}_{m,h}[-R_m(u^{(0)}, h)]|| \le$$

$$\leq \gamma_m(h)||R_m(u^{(0)},h)||_\infty \leq \gamma_m(h)||u^{(0)}||\frac{(\alpha h)^m}{m!}.$$

Тоді

$$||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \leq \gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}([e^{\alpha h} - 1](h|||f|||\gamma_m(h)\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\alpha h)^j}{(j+1)!} + ||P_{N(Q_{m,h})}c||) + e^{\alpha h}|||f|||h).$$

Продовжуючи цей ітераційний процес за індукцією, отримуємо нерівності

$$||u_s^{(n+1)}(t) - u_s^{(n)}(t)||_B \leq [e^{\alpha[t-(s-1)h]} - 1]||\lambda_s^{(n+1)} - \lambda_s^{(n)}||_B. \qquad (4.73)$$

Визначаючи з алгоритму пару векторів $\lambda^{(n+1)}$ й $\lambda^{(n)}$:

$$\lambda^{(n+1)} = Q^-_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n)},h)] + P_{N(Q_{m,h})}c,$$

$$\lambda^{(n)} = Q^-_{m,h}[-F_m(h) - R_m(u^{(n-1)},h)] + P_{N(Q_{m,h})}c,$$

з тим самим елементом c, одержуємо, що для різниці $\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}$ справедливим є ланцюг нерівностей:

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty = ||Q^-_{m,h}[R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n-1)},h)]||_\infty \leq$$

$$\leq \gamma_m(h)||R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n)},h)||_\infty.$$

Підставляючи (4.73) та обчислюючи повторні інтеграли, маємо

$$||R_m(u^{(n-1)},h) - R_m(u^{(n)},h)||_\infty \leq$$

$$\leq [e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}]||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty.$$

Звідси

$$||\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}||_\infty \leq \gamma_m(h)[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha h)^j}{j!}]||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty =$$

$$= q_m(h)||\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}||_\infty, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки за умов теореми $q_m(h) < 1$, то послідовність $\lambda^{(n)} = (\lambda_s^{(n)})_{s\in\mathbf{Z}}$ є збіжною до деякого вектора $\lambda^* = (\lambda_s^*)_{s\in\mathbf{Z}}$, коли $n \to \infty$, та для неї виконується [128] оцінка

$$||\lambda^* - \lambda^{(n)}||_\infty \leq \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}||_\infty \leq$$

$$\leq \frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}M(h, c).$$

Для послідовності $u^{(n)}(t)$ маємо таку оцінку :

$$||u^{(n+1)} - u^{(n)}||_1 \leq ||R_m(u^{(n-1)}, h) - R_m(u^{(n)}, h)||_\infty,$$

з якої аналогічно, як і для параметрів λ, робиться висновок щодо збіжності послідовності функцій $u^{(n)}(t)$ до деякої функції $u^*(t)$ й має місце оцінка :

$$||u^* - u^{(n)}||_1 \leq [e^{\alpha h} - 1]\frac{(q_m(h))^n}{1 - q_m(h)}\gamma_m(h)\frac{(\alpha h)^m}{m!}M(h, c).$$

Враховуючи це, отримуємо, що функція $u^*(t) + \lambda^*$ є обмеженим розв'язком вихідної задачі, а $(u^{(n)}(t) + \lambda^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність, що прямує до неї, коли $n \to \infty$ та виконується оцінка (4.72). Теорему доведено.

Зауваження 4.13. *На відміну від праць [114]–[117] викладений метод апроксимації можна застосовувати до дослідження диференціальних рівнянь у резонансному випадку в нескінченновимірних просторах з необмеженими операторними коефіцієнтами, у тому числі й у випадку, коли відповідне рівняння має неєдиний обмежений розв'язок.*

РОЗДІЛ 5
РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Підходи, запропоновані у попередніх розділах, використано до дослідження крайових задач для еволюційного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта. Відомо [249], [368], що такі задачі мають широке коло застосувань у багатьох прикладних науках. Досліджуються умови існування обмежених розв'язків й біфуркації розв'язків крайових задач стаціонарного та нестаціонарного лінійного та нелінійного рівнянь у резонансних випадках. Знайдено алгоритми побудови таких розв'язків. Результати продемонстровано та уточнено на двоточковій крайовій задачі для рівняння Шредінгера й рівняння Ван дер Поля у гільбертовому просторі.

5.1. Експоненціальна дихотомія та обмежені розв'язки рівняння Шредінгера

Цей підрозділ присвячено отриманню необхідних та достатніх умов існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійного та нелінійного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта за умов, коли відповідне однорідне рівняння є експоненціально дихотомічним на півосях.

Постановка задачі (лінійний випадок). Розглянемо диференціальне рівняння Шредінгера [224]:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J, \tag{5.1}$$

у просторі Гільберта $\mathcal{H}$, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, а необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$. Тут $H_0 = H_0^*$ є необмеженим самоспряженим оператором з областю визначення $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$; відображення $t \to V(t)$ є сильно неперервним. Визначимо, як і в [224], операторнозначну функцію:

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0} V(t) e^{-itH_0}.$$

У цьому випадку для $\tilde{V}(t)$ справедливим є представлення Дайсона [224, с.311], і можна визначити еволюційний оператор $\tilde{U}(t,s)$. Тоді $U(t,s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}$, а $\psi_s(t) = U(t,s)\psi$ є слабким розв'язком однорідного рівняння (5.1) з умовою $\psi_s(s) = \psi$. Це означає [224, с.311], що для довільного $\eta \in D(H_0)$ функція $(\eta, \psi_s(t))$ є диференційовною та задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t)) = -i(H_0\eta, \psi_s(t)) - i(V(t)\eta, \psi_s(t)), t \in J.$$

Необхідно знайти, за яких умов на вектор-функцію f рівняння (5.1) буде мати слабкі обмежені на всій осі розв'язки. При цьому припускається її належність до простору Банаха $BC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ із неперервними та обмеженими на $\mathbb{R}$ вектор-функціями зі значеннями у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Для простоти викладення будемо припускати, що D є щільною в $\mathcal{H}$, а еволюційний оператор $U(t,s)$ (розширений за неперервністю) — обмеженим та визначеним на всьому просторі $\mathcal{H}$. Оператор U позначають так само.

Обмежені розв'язки. Надалі використовуватимемо поняття експоненціальної дихотомії у тому сенсі, що і у розд. 4. Проаналізуємо рівняння (5.1) за умов експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$ та $\mathbb{R}_0^+ = [0; \infty)$. (У цьому випадку проєкторнозначні функції, визначені на півосях, позначатимемо $P_+(t)$ для всіх $t \geq 0$ і $P_-(t)$ для всіх $t \leq 0$ відповідно зі сталиими M_1, α_1 та M_2, α_2,). Основний результат цієї частини можна подати у такому вигляді.

Лема 5.1. *Нехай $\{U(t,s),\ t \geq s \in \mathbb{R}\}$ є сильно неперервним еволюційним оператором, асоційованим із рівнянням (5.1). Припустимо, що виконано такі умови:*

1. Оператор $U(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проєкторнозначними оператор-функціями відповідно $P_+(t)$ та $P_-(t)$,.

2. Оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ має псевдообернений за Муром—Пенроузом.

Тоді справедливі такі твердження:

1. Існують слабкі розв'язки рівняння (5.1), обмежені на всій осі, тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{5.2}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)U(0,t)$.

2. За виконання умови (5.2) слабкі розв'язки рівняння (5.1), обмежені на всій осі, мають вигляд

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in \mathcal{H}, \tag{5.3}$$

де

$$(G[f])(t,s) =$$

$$= \begin{cases} \int_s^t U(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} U(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + U(t,s)P_+(s)D^+[\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ t \geq s, \\ \int_{-\infty}^{t} U(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^s U(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + U(t,s)(I - P_-(s))D^+[\int_s^{\infty} U(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \quad + \int_{-\infty}^{s} U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ s \geq t, \end{cases}$$

є узагальненим оператором Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки:

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt.$$

Цю теорему доводили так само, як і у розд. 4. Покажемо, що умову 2 у лемі можна прибрати, і рівняння (5.1) буде завжди розв'язним у певному сенсі. Нагадаємо, що обмежені на всій дійсній осі розв'язки рівняння (5.1) існують тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$D\xi = g, \tag{5.4}$$

$$g = \int_{-\infty}^{0} U(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} U(0,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau$$

є розв'язним, а їхня кількість залежить від розмірності підпростору $N(D)$.

Згідно з теорією операторних рівнянь, побудованою у розд. 2, виділимо три типи розв'язків рівняння (5.4):

1) *Класичні узагальнені розв'язки.* Розглянемо випадок, коли оператор D є нормально-розв'язним, тобто $(R(D) = \overline{R(D)})$. Тоді [326], як відомо, $g \in R(D)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(D^*)}g = 0$. У цьому випадку існує псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор D^+, а множину розв'язків рівняння (5.4) можна подати у такому вигляді [326]:

$$\xi = D^+g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H}.$$

2) *Сильні узагальнені розв'язки.* Розглянемо випадок, коли $R(D) \neq \neq \overline{R(D)}$. Тоді існує розширений оператор $\overline{D} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ ($\overline{\mathcal{H}}$ — відповідне поповнення простору $\mathcal{H}$), який є нормально-розв'язним (згідно з розд. 2). Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (5.4) матиме вигляд

$$\xi = \overline{D}^+g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H},$$

де $\overline{D}^+$ є сильним псевдооберненим оператором до оператора D (означення 2.1). Цей оператор є псевдооберненим за Муром—Пенрозуом до оператора $\overline{D}$.

3) *Узагальнені псевдорозв'язки.* Коли $g \notin \overline{R(D)}$, то умови для елемента g є рівносильними умові $\mathcal{P}_{N(D^*)}g \neq 0$. У цьому випадку існують елементи з $\overline{\mathcal{H}}$, що мінімізують таку норму нев'язки $||\overline{D}\xi - g||_{\mathcal{H}}$ для $\xi \in \overline{\mathcal{H}}$:

$$\xi = \overline{D}^+g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \quad c \in \mathcal{H}.$$

Ці елементи називають узагальненими псевдорозв'язками рівняння (5.4).

Зауваження 5.1. *Слід підкреслити, що у кожному з розглянутих випадків вигляд обмежених розв'язків (5.4) не змінюється. Якщо позначити через* $\overline{(G[f])(t,0)}$ *відповідне розширення узагальненого оператора Гріна* $(G[f])(t,0)$*, то у лемі 5.1 розв'язки рівняння (5.1)завжди існуватимуть в одному зі сенсів 1—3, і матимуть вигляд*

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + \overline{(G[f])(t,0)} \quad \forall c \in \mathcal{H}$$

для кожного з випадків.

Зауваження 5.2. *Поєднання результатів леми та конструкцій 1—3 відповідних розв'язків свідчить про те, що з умови експоненціальної дихотомії на півосях випливає існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (5.1).*

Нелінійний випадок. Розглянемо у просторі Гільберта $\mathcal{H}$ нелінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + f(t). \tag{5.5}$$

Шукатимемо обмежений розв'язок $\varphi(t,\varepsilon)$ рівняння (5.5), що перетворюється на один із розв'язків породжувального рівняння (5.1) при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови від оператор-функції $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ вимагатимемо неперервності в околі породжувального розв'язку $\varphi_0(t)$:

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C[||\varphi - \varphi_0|| \leq q] \times BC(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \times C[0, \varepsilon_0],$$

де q – деяка додатна стала.

Покажемо, що цю проблему можна вирішити, використовуючи операторне рівняння для породжувальних елементів:

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(\varphi_0(t,c), t, 0)dt = 0. \tag{5.6}$$

У скінченновимірному випадку аналогічне рівняння називають рівнянням для породжувальних сталих.

Теорема 5.1. *(необхідна умова). Припустимо, що рівняння (5.1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проєкторнозначними оператор-функціями відповідно $P_+(t)$ та $P_-(t)$, а нелінійне рівняння (5.5) має обмежений розв'язок $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків породжувального рівняння (5.1) з елементом $c = c^0$, $\varphi(t,0) = \varphi_0(t,c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді цей елемент повинен задовольняти рівняння для породжувальних елементів (5.6).*

Цю теорему доводять за методикою, яку запропоновано у розд. 1—4.

Для знаходження достатньої умови існування обмежених розв'язків (5.1) додатково припускатимемо, що оператор-функція $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ є строго диференційовною в околі породжувального розв'язку ($Z(\cdot, t, \varepsilon) \in$ $\in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \leq q]$).

Доведемо, що цю проблему буде вирішено з використанням оператора

$$B_0 := \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

де $A_1(t) = Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше). Застосувавши теорему про неявну функцію (див. розд. 2), можна довести таке твердження.

Теорема 5.2. *(достатня умова). Нехай рівняння (5.1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними функціями відповідно $P_+(t)$ та $P_-(t)$. Припустимо, що оператор B_0 задовольняє умови:*

1. B_0 має псевдообернений за Муром—Пенроузом;

2. $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (5.6), існує обмежений на всій осі розв'язок. Його можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0 + y_k, \tau, \varepsilon))](t,0),$$

$$c_k = -B_0^+ \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$

$$= Z(\varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)y_k(t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \qquad \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,0,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,\varepsilon).$$

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами існування обмежених на всій осі розв'язків встановлює таке твердження.

Наслідок. *Нехай оператор $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта $\mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (5.6). Якщо B_0 має обмежений обернений, то рівняння (5.5) має єдиний обмежений розв'язок на всій осі для кожного c^0.*

Таким чином, знову отримано модифікацію метода Ляпунова—Шмідта з досліджень нелінійного рівняння Шредінгера. Зауважимо, що з теорем 5.1, 5.2 випливають умови наявності можливої складної поведінки динамічної системи, що породжується рівнянням (5.5) [350], [438].

Під час дослідження складної поведінки рівняння (5.6) розглядають [350] так звану зсунуту траєкторію $\varphi_s(t) = \varphi(t-s)$. Тоді умову (5.6) можна подати у вигляді

$$\Delta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s)Z(\varphi_0(t-s,c),t,0)dt = 0,$$

або після заміни $t \to t+s$ — у вигляді

$$\Delta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(\varphi_0(t,c),t+s,0)dt = 0. \qquad (5.7)$$

Ця умова означає ортогональність нелінійності Z до розв'язків однорідного спряженого до $\varphi'(t) = -iH(t)\varphi(t)$ рівняння ($f(t) = 0$). Якщо однорідне спряжене рівняння має єдиний (з точністю до множника) обмежений розв'язок, то умови теореми Палмера [438] (теорема 7.2 [350]) виконуються, якщо оператор

$$B_0(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t+s)U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt$$

має обмежений обернений, тобто виконуються умови сформульованого вище наслідку. У скінченновимірному випадку ця умова еквівалентна умові простоти кореня рівняння $\Delta(s) = 0$. Тоді оператор $\Delta(s)$ пов'язано з відомою функцією Мельникова, яка з'являється в ході вивчення так званих трансверсальних траєкторій:

$$\Delta(0) = F(c^0) = 0, \Delta'(0) = F^1(c^0) = B_0, \Delta'(s) = B_0(s).$$

У випадку вихідного рівняння (5.5) $s = 0$. Тоді отримані результати перетворюються на стандартні умови [181] для функції Мельникова, які гарантують наявність гомоклінічного хаосу [282].

Зауваження 5.3. *Застосовуючи розвинену вище теорію для еволюційних рівнянь, що мають властивість експоненціальної дихотомії на півосях, можна вивчати крайові задачі з умовами на нескінченності.*

Сформулюємо одну з таких задач. У просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядаємо таку крайову задачу:

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{5.8}$$

$$l\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon \mathcal{J}(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5.9}$$

Для рівняння (5.8) умови, які накладаються на вектор-функцію $f(t)$ та оператор-функцію $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, такі самі, як і для рівняння (5.5). Оператор l є лінійним та обмеженим і діє з простору Гільберта $\mathcal{H}$ у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$ та може задавати умови на нескінченності, α — довільний елемент простору $\mathcal{H}_1$; оператор-функція $\mathcal{J}(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняє аналогічні умови, що й $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$. Для такої задачі можна отримати необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків, що є аналогічними до встановлених вище.

5.2. Біфуркація розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера

Досліджуються умови біфуркації розв'язків крайових задачі для рівняння Шредінгера на скінченному відрізку.

Постановка задачі. У просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядають крайову задачу для еволюційного рівняння вигляду

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon H_1(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{5.10}$$

$$\ell\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot). \tag{5.11}$$

Тут для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$ необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; $H_1(t)$ — лінійний та обмежений для всіх $t \in J$ оператор; ℓ, l_1 — лінійні та обмежені оператори, що діють з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_1$. Інші вимоги такі самі, як і у підрозділі 5.1. Шукається сильний розв'язок крайової задачі (5.10), (5.11) для тих правих частин $f(t)$ рівняння (5.10), для яких незбурена крайова задача ($\varepsilon = 0$) їх не має. Зауважимо, що асимптотичні методи дослідження рівнянь розглядали у працях [326], [477].

Лінійний випадок. Дослідимо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків незбуреної крайової задачі

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), \tag{5.12}$$

$$\ell\varphi(\cdot) = \alpha. \tag{5.13}$$

Використовуючи теорему Крейна С.Г. [144], будь-який слабкий розв'язок рівняння (5.12) можна подати у вигляді

$$\varphi(t,s) = U(t,s)\varphi(s,s) + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{5.14}$$

де рівність розуміється у такому сенсі:

$$(\eta, \varphi(t,s)) = (\eta, U(t,s)\varphi(s,s) + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau) \quad \forall \eta \in D(H_0). \tag{5.15}$$

Підставивши вираз (5.14) у крайову умову (5.13), отримаємо операторне рівняння відносно елемента $\varphi(s,s) \in \mathcal{H}$:

$$Q\varphi(s,s) = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{5.16}$$

де $Q = \ell U(\cdot, s)$ – оператор, отриманий після підстановки в (5.13) відповідного еволюційного оператора $U(t,s)$. Для зручності позначимо $\varphi = \varphi(s,s)$, $g = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau$. Тоді операторне рівняння (5.16) запишемо у вигляді

$$Q\varphi = g. \tag{5.17}$$

Так само, як і вище, можна виділяти три типи розв'язків рівняння (5.17). Позначимо $\overline{Q} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}_1$ розширений до Q оператор. Такий оператор завжди має псевдообернений. Тоді рівняння (5.17) матиме розв'язки (у тому чи іншому сенсі):

$$\varphi = \overline{Q}^{+} g + \mathcal{P}_{N(Q)}c, \ c \in \mathcal{H},$$

як у випадку, коли $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}g = 0$, так і у випадку, коли $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}g \neq 0$. Умова $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}g = 0$ гарантує, що $g \in \overline{R(Q)}$. Якщо додатково $g \in R(Q)$, то отримаємо звичайний розв'язок (зауваження 4.8).

Об'єднуючи викладене вище, приходимо до твердження.

Теорема 5.3. *Нехай задану крайову задачу (5.12), (5.13) визначено в просторах Гільберта.*

1. Сильні узагальнені розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau = 0, \tag{5.18}$$

якщо $\alpha - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \in R(Q)$, *то розв'язки будуть класичними узагальненими.*

2. Узагальнені квазірозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \neq 0; \tag{5.19}$$

3. За виконання умови (5.18) або (5.19) узагальнені розв'язки (сильні або квазірозв'язки) крайової задачі (5.12), (5.13) мають вигляд

$$\varphi(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t,s)\overline{Q}^{+}\alpha + (\overline{G[f,\alpha]})(t,s). \tag{5.20}$$

Тут

$$(\overline{G[f,\alpha]})(t,s) = U(t,s)\overline{Q}^{+}\alpha + (\overline{G[f]})(t,s),$$

де

$$(\overline{G[f]})(t,s) = \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t,s)\overline{Q}^{+}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau$$

є узагальненим оператором Гріна крайової задачі (5.12), (5.13); c – довільний елемент простору $\mathcal{H}$.

Біфуркація розв'язків. Припустимо, що крайова задача (5.12), (5.13) не має сильних узагальнених розв'язків, тобто виконується умова (5.19). Знайдемо умови на збурювальні доданки $H_1(t), l_1$, за яких збурена крайова задача (5.10), (5.11):

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon H_1(t)\varphi(t) + f(t), t \in J, \tag{5.21}$$

$$\ell\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon l_1\varphi(\cdot). \tag{5.22}$$

матиме сильні узагальнені розв'язки. Використаємо при цьому оператор

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)H_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Будемо шукати розв'язки крайової задачі (5.10), (5.11) у вигляді ряду за степенями малого параметра ε:

$$\varphi(t,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i\varphi_i(t). \tag{5.23}$$

Підставимо ряд (5.23) у крайову задачу (5.10), (5.11) й прирівняємо коефіцієнти біля відповідних степенів ε. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_{-1}(t)$ при ε^{-1} ряду (5.23) зводиться до крайової задачі вигляду

$$\frac{d\varphi_{-1}(t)}{dt}=-iH(t)\varphi_{-1}(t), \tag{5.24}$$

$$\ell\varphi_{-1}(\cdot)=0. \tag{5.25}$$

Множина узагальнених розв'язків операторної крайової задачі (5.24), (5.25) матиме вигляд

$$\varphi_{-1}(t,s,c_{-1})=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_{-1},\quad t\in J,$$

для довільного елемента $c_{-1}\in\mathcal{H}$, який визначають на наступному кроці ітераційного процесу. Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_0(t)$ біля ε^0 ряду (5.23) зводиться до такої крайової задачі:

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt}=-iH(t)\varphi_0(t)+H_1(t)\varphi_{-1}(t,s,c_{-1})+f(t), \tag{5.26}$$

$$\ell\varphi_0(\cdot)=\alpha+l_1\varphi_{-1}(\cdot,s,c_{-1}). \tag{5.27}$$

З огляду на умову існування сильного узагальненого розв'язку (5.18) критерій розв'язності для задачі (5.26), (5.27) набуде вигляду

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha+l_1\varphi_{-1}(\cdot,s,c_{-1})-$$

$$-\ell\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)(H_1(\tau)\varphi_{-1}(\tau,s,c_{-1})+f(\tau))d\tau\}=0,$$

з якого остаточно отримаємо операторне рівняння

$$B_0c_{-1}=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha+\ell\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau). \tag{5.28}$$

Надалі припускатимемо, що $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$. Тоді операторне рівняння (5.28) буде розв'язним. Множина сильних узагальнених розв'язків (5.28) набуде вигляду

$$c_{-1} = \overline{B}_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha + \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau) + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho$$

для довільного елемента $c_\rho \in \mathcal{H}$. Для зручності запишемо цю рівність так:

$$c_{-1} = \overline{c}_{-1} + \mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_{-1} = \overline{B}_0^+ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(-\alpha + \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau).$$

Тоді множина сильних узагальнених розв'язків крайової задачі (5.26), (5.27) матиме вигляд

$$\varphi_{-1}(t,s,c_\rho) = \overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) + \overline{X}_{-1}(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

$$\overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1},$$
$$\overline{X}_{-1}(t,s) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Використовуючи зображення (5.20) і лінійність узагальненого оператора Гріна, множину сильних узагальнених розв'язків крайової задачі (5.26), (5.27) можна подати так:

$$\varphi_0(t,s,c_0) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_0 + U(t,s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\} +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t,s) + (U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_{-1}(\cdot,s) +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{-1}(\cdot,s)]}(t,s))\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де елемент $c_0 \in \mathcal{H}$ визначають на наступному кроці ітераційного процесу.

Проблема визначення коефіцієнта $\varphi_1(t)$ ряду (5.23) біля ε^1 запишеться у вигляді крайової задачі:

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_1(t) + H_1(t)\varphi_0(t,s,c_0), \tag{5.29}$$

$$\ell\varphi_1(\cdot) = l_1\varphi_0(\cdot,s,c_0). \tag{5.30}$$

Умова розв'язності (5.18) для задачі (5.29), (5.30) має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\varphi_0(\cdot,s,c_0)-\ell\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)H_1(\tau)\varphi_0(\tau,s,c_0)\}d\tau=0,$$

із якої з огляду на розв'язність знаходимо елемент c_0

$$c_0=\overline{c}_0+\mathcal{F}_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_0=\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)H_1(\tau)(U(\tau,s)\overline{Q}^+\{\alpha+l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})+f(\cdot)]}(\tau,s))d\tau-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\{\alpha+l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}-$$
$$-\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})+f(\cdot)]}(\cdot,s)),$$
$$\mathcal{F}_0=\overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^{\cdot}U(\cdot,\tau)H_1(\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s)+G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]\}(\tau,s)d\tau-$$
$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s)-\overline{G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]}(\cdot,s))+I.$$

Остаточно множина сильних узагальнених розв'язків крайової задачі (5.26), (5.27) набуде вигляду

$$\varphi_0(t,s,c_\rho)=\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0)+\overline{X}_0(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,\quad \text{для довільного}\quad c_\rho\in\mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0+U(t,s)\overline{Q}^+\{\alpha+l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\}+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})+f(\cdot)]}(t,s),$$
$$\overline{X}_0(t,s)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_0+U(t,s)\overline{Q}^+\ell U(\cdot,s)\mathcal{P}_{N(Q)}+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)U(\cdot,s)]}(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Отже, крайова задача (5.29), (5.30) матиме сильні узагальнені розв'язки:

$$\varphi_1(t,s,c_1)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_1+$$
$$+U(t,s)\overline{Q}^+l_1\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot,s,\overline{c}_0)]}(t,s)+$$
$$+(U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot,s)+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)})c_\rho,$$

де елемент c_1 знаходять на наступному кроці ітераційного процесу.

Проблему визначення коефіцієнта $\varphi_2(t)$ біля ε^2 пов'язано з розв'язками крайової задачі вигляду

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_2(t) + H_1(t)\varphi_1(t, s, c_1), \tag{5.31}$$

$$\ell\varphi_2(\cdot) = l_1\varphi_1(\cdot, s, c_1). \tag{5.32}$$

Умова розв'язності крайової задачі (5.31), (5.32) у цьому випадку зводиться до розв'язності операторного рівняння

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\varphi_1(\cdot, s, c_1) - \ell\int_s^\cdot U(\cdot, \tau)\varphi_1(\tau, s, c_1)d\tau\} = 0,$$

з якого за припущення, що $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$, знаходимо елемент c_1:

$$c_1 = \overline{c}_1 + \mathcal{F}_1\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_1 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\times$$

$$\times(\int_s^\cdot U(\cdot, \tau)\{U(\tau, s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0)]}(\tau, s)\}d\tau$$

$$-U(\cdot, s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0) - \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0)]}(\cdot, s));$$

$$\mathcal{F}_1 = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\times$$

$$\times(\int_s^\cdot U(\cdot, \tau)\{U(\tau, s)\overline{Q}^+ l\overline{X}_0(\cdot, s) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot, s)]}(\tau, s)\}d\tau -$$

$$-U(\cdot, s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot, s) - \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot, s)]}(t, s)) + I.$$

Остаточно множина сильних узагальнених розв'язків крайової задачі (5.29), (5.30) набуде вигляду

$$\varphi_1(t, s, c_\rho) = \overline{\varphi}_1(t, s, \overline{c}_1) + \overline{X}_1(t, s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho \quad \forall c_\rho \in \mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_1(t, s, \overline{c}_1) = U(t, s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_1 +$$

$$+U(t, s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_0(\cdot, s, \overline{c}_0)]}(t, s);$$

$$\overline{X}_1(t, s) = U(t, s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_1 + U(t, s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_0(\cdot, s) +$$

$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_0(\cdot,s)]}(t,s),$$

а множина сильних узагальнених розв'язків задачі (5.31), (5.32) — вигляду

$$\varphi_2(t,s,c_1) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_2 + U(t,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_1(\cdot,s,\overline{c}_1)+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_1(\cdot,s,\overline{c}_1)]}(t,s)+$$
$$+(U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_1(\cdot,s) + \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_1(\cdot,s)]}(t,s))\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де елемент $c_2 \in \mathcal{H}$ визначають на наступному кроці ітераційного процесу.

Діючи далі за індукцією, неважко показати, що за виконання умови на добуток проєкторів: $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$, проблема визначення коефіцієнта $\varphi_i(t)$ біля ε^i ряду (5.19) зводиться до розв'язності операторної крайової задачі:

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_i(t) + H_1(t)\varphi_{i-1}(t,s,c_{i-1}), \tag{5.33}$$

$$\ell\varphi_i(\cdot) = l_1\varphi_{i-1}(\cdot,s,c_{i-1}). \tag{5.34}$$

Елемент c_i знаходять так:

$$c_i = \overline{c}_i + \mathcal{F}_i\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho,$$

де

$$\overline{c}_i = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(\tau,s)\}d\tau - U(\cdot,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})-$$
$$-\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(\cdot,s));$$

$$\mathcal{F}_i = \overline{B}_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell(\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)\{U(\tau,s)\overline{Q}^+ l\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)+$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(\tau,s)\}d\tau-$$
$$-U(\cdot,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_{i-1}(\cdot,s) - \overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(t,s)) + I.$$

Множину сильних узагальнених розв'язків крайової задачі (5.33), (5.34) можна подати у вигляді

$$\varphi_i(t,s,c_\rho) = \overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) + \overline{X}_i(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho \text{ для довільного } c_\rho \in \mathcal{H},$$

де

$$\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1}) +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(t,s);$$
$$\overline{X}_i(t,s) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\mathcal{F}_i + U(t,s)\overline{Q}^+\ell\overline{X}_{i-1}(\cdot,s) +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{X}_{i-1}(\cdot,s)]}(t,s).$$

Збіжність ряду (5.19) доводять так само, як і в праці [42].

Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 5.4. *Припустимо, що виконується така умова:*

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0.$$

Якщо незбурена операторна крайова задача (5.12), (5.13) не має сильних узагальнених розв'язків, то операторна крайова задача (5.10), (5.11) має ρ-параметричну множину сильних узагальнених розв'язків у вигляді ряду

$$\varphi(t,s,\varepsilon,c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty}\varepsilon^i[\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) +$$
$$+\overline{X}_i(t,s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c_\rho] \quad \textit{для довільного} \quad c_\rho \in \mathcal{H},$$

абсолютно збіжного для достатньо малого фіксованого параметра $\varepsilon \in \in (0,\varepsilon_*]$; тут

$$\overline{\varphi}_{-1}(t,s,\overline{c}_{-1}) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_{-1},$$
$$\overline{\varphi}_0(t,s,\overline{c}_0) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_0 + U(t,s)\overline{Q}^+\{\alpha + l_1\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1})\} +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{-1}(\cdot,s,\overline{c}_{-1}) + f(\cdot)]}(t,s),$$
$$\overline{\varphi}_i(t,s,\overline{c}_i) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}\overline{c}_i + U(t,s)\overline{Q}^+ l_1\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1}) +$$
$$+\overline{G[H_1(\cdot)\overline{\varphi}_{i-1}(\cdot,s,\overline{c}_{i-1})]}(t,s); \quad i \in \mathbb{N}.$$

Цілком природно, що у випадку дослідження умов біфуркації класичних розвязків крайової задачі (5.10), (5.11) за умови, коли операторне рівняння

$$Q\varphi(s,s) = \alpha - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \tag{5.35}$$

є нормально-розв'язним, справедливими будуть аналогічні результати для існування класичних розв'язків [327].

5.3. Нелінійні крайові задачі для рівняння Шредінгера

Знайдемо необхідну та достатню умови існування узагальнених розв'язків нелінійних крайових задач для рівняння Шредінгера. Встановимо умови нормальної та узагальненої нормальної розв'язності. Для подання розв'язків використовуватимемо узагальнений оператора Гріна.

Постановка задачі. У просторі Гільберта $\mathcal{H}$ розглядається нелінійне диференціальне рівняння Шредінгера:

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), t \in J, \tag{5.36}$$

з нелінійною операторною крайовою умовою вигляду

$$\ell\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\mathcal{J}(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{5.37}$$

де $J \subset \mathbb{R}$ — скінченний відрізок. Для кожного t необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$ зі самоспряженим оператором $H_0 = H_0^*$ на $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$ та сильно неперервним відображенням $t \to V(t)$. Припускається, що оператор ℓ є лінійним та обмеженим і діє з простору Гільберта $\mathcal{H}$ у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, а α — довільним елементом простору $\mathcal{H}_1$. Необхідно знайти такий розв'язок $\varphi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5.36), (5.37), який перетворюється на один із розв'язків породжувальної крайової задачі

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) + f(t), t \in J, \tag{5.38}$$

$$\ell\varphi_0(\cdot) = \alpha \tag{5.39}$$

при $\varepsilon = 0$. Оператор-функції $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \mathcal{J}(\varphi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють таке обмеження в околі породжувального розв'язку $\varphi_0(t)$ за сукупністю змінних:

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times C(J,\mathcal{H}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

$$\mathcal{J}(\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \le q] \times C[0,\varepsilon_0],$$

де q — деяка додатня стала.

Необхідна та достатня умови існування розв'язків. Спочатку знайдемо необхідну умову існування сильного узагальненого розв'язку

$\varphi(t,s,\varepsilon)$ крайової задачі (5.36), (5.37), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжувальний розв'язок $\varphi_0(t,s,c)$ вигляду (5.20). При цьому припускатимемо, що виконується умова (5.18), тобто крайова задача (5.38), (5.39) має сильні узагальнені розв'язки.

Теорема 5.5. *(необхідна умова). Нехай крайова задача (5.36), (5.37) має сильний узагальнений розв'язок $\varphi(t,s,\varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із породжувальних розв'язків $\varphi_0(t,s,c^0)$ (5.20) з елементом $c = c^0$. Тоді елемент $c^0 \in \mathcal{H}$ повинен задовольняти операторне рівняння для породжувальних елементів:*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c),0) -$$
$$-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi_0(\tau,s,c),\tau,0)d\tau\} = 0. \tag{5.40}$$

Зауваження. *У скінченновимірному випадку рівняння для породжувальних елементів буде збігатися з рівнянням для породжувальних сталих [327], а у періодичному випадку з рівнянням для породжувальних амплітуд [105], [169].*

Доведення. Якщо крайова задача (5.36), (5.37) має сильні узагальнені розв'язки, то згідно з теоремою 5.3 повинна виконуватись умова

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha + \varepsilon\mathcal{J}(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)(f(\tau) + \varepsilon Z(\varphi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau\} = 0. \tag{5.41}$$

Оскільки виконується умова (5.18), то після спрощення (5.41) можна записати у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\mathcal{J}(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\} = 0.$$

Переходячи до границі у цій рівності, коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо операторне рівняння (5.40). Зауважимо, що від нелінійностей $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \mathcal{J}(\varphi(t,s,\varepsilon),\varepsilon)$ достатньо вимагати лише неперервності в околі породжувального розв'язку (або іншої умови, за якої можливий граничний перехід за ε).

Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо заміну змінних у крайовій задачі (5.36), (5.37):

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,s,\varepsilon),$$

де $\varphi_0(t,s,c^0)$ — породжувальний розв'язок (5.20) з елементом c^0, який задовольняє операторне рівняння для породжувальних елементів (5.40). Сильний узагальнений розв'язок крайової задачі будемо шукати у нових змінних:

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\psi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{5.42}$$

$$\ell\psi(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,\varepsilon), \varepsilon), \tag{5.43}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на нульовий розв'язок.

Розв'язність крайової задачі (5.42), (5.43) еквівалентна розв'язності крайової задачі (5.36), (5.37). Використовуючи неперервну диференційовність нелінійностей в околі породжувального розв'язку, виділимо лінійну частину за ψ й члени нульового порядку за ε. Маємо розклади вигляду

$$Z(\varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,s,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(\varphi_0(t,s,c^0), t, 0) +$$

$$+ A_1(t)\psi(t,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(t,s,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon), \varepsilon) =$$

$$= \mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0), 0) + l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$A_1(t) = A_1(t,c^0) = Z^{(1)}_{\varphi}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0}, l_1 = \mathcal{J}^{(1)}(\varphi_0, 0),$$

є похідними Фреше у точці $(\varphi = \varphi_0(t,s,c^0), \varepsilon = 0)$, а для членів вищого порядку $\mathcal{R}(\psi,t,\varepsilon), \mathcal{R}_1(\psi,\varepsilon)$ за ψ і ε виконується співвідношення

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \mathcal{R}^{(1)}_{\psi}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_1(0,0) = 0, \mathcal{R}^{(1)}_{1\psi}(0,0) = 0.$$

Ураховуючи заміну, розглянемо крайову задачу

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\psi(t,\varepsilon) + \varepsilon\{Z(\varphi_0(t,s,c^0), t, 0) +$$

$$+ A_1(t)\psi(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\}, \tag{5.44}$$

$$\ell\psi(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0), 0) + l_1\psi(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\}. \tag{5.45}$$

Для існування сильного узагальненого розв'язку цієї задачі необхідно та достатньо, щоб виконувалася умова

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}-$$

$$-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{Z(\varphi_0(\tau,s,c^0),\tau,0)+A_1(\tau)\psi(\tau,s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau)=0.$$

Тоді справедливим є подання

$$\psi(t,s,c)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon),c\in\mathcal{H},$$

$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon)=\varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+}\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0)+$$

$$+l_1\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0),\cdot,0)+A_1(\cdot)\psi(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

Підставляючи у лінійну частину вираз $U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon)$ замість $\psi(t,s,\varepsilon)$ та враховуючи виконання умови (5.40), отримуємо операторне рівняння відносно $c\in\mathcal{H}$:

$$B_0c=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau-$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}, \qquad (5.46)$$

де

$$B_0:=\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(l_1U(\cdot,s)-\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau,s)d\tau)\mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Для сильної узагальненої розв'язності (5.46) згідно з викладеним вище необхідно та достатньо, щоб виконувалася умова

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau-$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\}=0,$$

що буде гарантовано виконуватися, якщо $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}=0$. Розв'язавши (5.46) відносно c, одержимо операторну систему:

$$\psi(t,s,c)=U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}(t,s,\varepsilon),$$

$$c = \overline{B}_0^+\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\}, \tag{5.47}$$

$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

Ввівши допоміжний вектор $u = (\psi, c, \overline{\psi})^T \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ (T означає операцію транспонування), операторну систему (5.47) запишемо у вигляді

$$u = \begin{bmatrix} 0 & U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

де

$$L_1\overline{\psi} = B_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}(\ell\int_s^\cdot U(\cdot,\tau)A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)d\tau - l_1\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)),$$

$$g_1 = B_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\ell\int_s^\cdot \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau - \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\},$$

$$g_2 = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

Ця операторна система еквівалентна системі

$$Lu = g, \tag{5.48}$$

де

$$L := \begin{bmatrix} I & -U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор L має омежений обернений L^{-1}:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & -U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)} & -U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Дійсно, безпосередньою підстановкою перевіряємо, що визначений так оператор задовольняє рівність $LL^{-1} = L^{-1}L = = I$. Обмеженість доводиться за означенням. Отже, систему (5.48) можна записати у ви-

гляді
$$u = L^{-1}g = L^{-1}S(\varepsilon)u.$$
Для достатньо малого ε оператор $S(\varepsilon)$ буде стискальним. Тоді з принципу стискальних відображень буде випливати, що операторна система (5.48) має єдину нерухому точку, яка й буде давати обмежений сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (5.36), (5.37). Таким чином, встановлюється наступне твердження.

Теорема 5.6. *Нехай для оператора B_0 виконується умова $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$.*

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (5.40), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок крайової задачі (5.36), (5.37). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу:
$$\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+}\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) +$$
$$+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s),$$
$$c_k = \overline{B}_0^{+}\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}_k(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$
$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l_1\overline{\psi}_k(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\},$$
$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c_k + \overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$
$$\varphi_k(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi_k(t,s,\varepsilon), k = 0,1,2,..., \psi_0(t,s,\varepsilon) = 0,$$
$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,s,\varepsilon).$$

Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Сформулюємо й доведемо результат, який пов'язує між собою необхідну й достатню умови.

Наслідок. *Нехай оператор $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта $\mathcal{H}$, що задовольняє рівняння для породжувальних елементів (5.40). Якщо B_0 має обмежений обернений оператор, то крайова задача (5.36), (5.37) має єдиний сильний узагальнений розв'язок для кожного такого c^0.*

Доведення. Доведення випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень та рівності
$$F^{(1)}(c)[h] = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\mathcal{J}^{(1)}(v,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\cdot,s,c)[h]] -$$

$$-\ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z^{(1)}(v,\tau,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\tau,s,c)[h]]d\tau\} = B_0[h].$$

З огляду на оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ оператор B_0 також є оборотним. Згідно з рівнянням (5.40) крайова задача (5.36), (5.37) має єдиний сильний узагальнений розв'язок для кожного елемента $c = c^0$.

5.4. Двоточкова крайова задача для рівняння Шредінгера з постійним оператором

Наведені у розділі 3 теореми можна застосувати та уточнити, досліджуючи лінійну двоточкову крайову задачу для рівняння Шредінгера з постійним оператором.

Постановка задачі у лінійному випадку. Розглянемо крайову задачу для еволюційного рівняння Шредінгера у просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH_0\varphi(t) + f(t),\ t \in [0;w], \tag{5.49}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha \in D, \tag{5.50}$$

де $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H};$, $\mathcal{H}$ — простір Гільберта; вектор-функція $f(t)$ є інтегровною; для простоти викладення будемо вважати, що необмежений оператор H_0 для кожного $t \in [0;w]$ має вигляд [224]:

$$H_0 = i\begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Такий оператор широко використовують у ході дослідження хвильових рівнянь [224]. У більш загальному випадку оператор H_0 може мати вигляд

$$H_0 = i\mathcal{J}\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}\mathcal{J}, \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1},$$

де T — додатний самоспряжений оператор у просторі Гільберта $\mathcal{H}$ [142].

Надалі розглядається випадок, коли $\mathcal{J} = I$ (для простоти). Оскільки оператор T є замкненим, то область визначення $D(T)$ оператора T є простором Гільберта відносно скалярного добутку (Tu, Tu). Тому оператор H_0 буде самоспряженим на області визначення $D = D(T) \oplus D(T)$ зі скалярним добутком

$$(< u, v >, < u, v >)_{\mathcal{H}^T} = (Tu, Tu)_{\mathcal{H}} + (Tv, Tv)_{\mathcal{H}}$$

та інфінітіземальним генератором [224] сильно неперервної еволюційної групи

$$U(t) := U(t, 0) = \begin{pmatrix} cos\ tT & sin\ tT \\ -sin\ tT & cos\ tT \end{pmatrix},$$

$$U^n(t) = \begin{pmatrix} cos\ ntT & sin\ ntT \\ -sin\ ntT & cos\ ntT \end{pmatrix}.$$

Тут $||U^n(t)|| = 1, n \in \mathbb{N}$ (нерозтягувальна група); $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$.

Слабкі розв'язки рівняння (5.49) можна подати як

$$\varphi(t) = U(t)c + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

з довільним елементом $c \in \mathcal{H}_T$.

Підставивши цю умову в (5.50), отримаємо, що розв'язність крайової задачі (5.49), (5.50) еквівалентна розв'язності такого операторного рівняння:

$$(I - U(w))c = g, \tag{5.51}$$

де $g = \alpha + U(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$.

Розглянемо випадок, коли множина значень $I - U(w)$ є замкненою $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$. Як і для рівняння Хілла (3.1), розв'язність (5.51) можна встановлювати з використанням оператора

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n U(kw)}{n},$$

що є ортопроєктором простору $\mathcal{H}_T$ на підпростір $1 \in \sigma(U(w))$. Рівняння (5.51) буде розв'язним тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)g = 0.$$

У разі виконання цієї умови розв'язки (5.51) набудуть вигляду

$$c = U_0(w)\overline{c} +$$

$$+(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))g$$

для $0 < \mu - 1 < \frac{1}{||R_\mu(U(w))||}$ та довільного $\overline{c} \in \mathcal{H}_T$.

Таким чином, отримали твердження.

Лема 5.2. *Нехай оператор $I - U(w)$ має замкнену множину значень $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$.*

1. Узагальнені розв'язки крайової задачі (5.49), (5.50) існують тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{5.52}$$

2. За виконання умови (5.52) узагальнені розв'язки (5.49), (5.50) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f, \alpha])(t), \tag{5.53}$$

де

$$(G[f,\alpha])(t) =$$

$$= U(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l\}^{k+1}(\alpha +$$

$$+ \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) - U(t)U_0(w)(\alpha +$$

$$+ \int_0^w U(w)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

є узагальненим оператором Гріна крайової задачі (5.49), (5.50) для $0 <$ $< \mu - 1 < 1/||R_\mu(U(w))||$.

Покажемо, як можна прибрати умову $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$ леми та зробити крайову задачу (5.49), (5.50) завжди розв'язною. Розпишемо всі можливі випадки детально та уточнимо деякі аспекти розширень певних операторів і просторів.

1) *Класичні узагальнені розв'язки.* Якщо $R(I - U(w)) = \overline{R(I - U(w))}$, то $g \in R(I - U(w))$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N((I-U(w))^*)}g = 0$ [326], а множина розв'язків (5.51) має вигляд [326] $c = G[g] + U_0(w)\overline{c}, \overline{c} \in \mathcal{H}_T$,

де [319]

$$G[g] = (I - U(w))^+ g = ((I - (U(w) - U_0(w))^{-1} - U_0(w))g$$

є узагальненим оператором Гріна. А у вигляді збіжного ряду:

$$G[g] = (\sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \{\sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w) - U_0(w))^l\}^{k+1} - U_0(w))g.$$

2) *Сильні узагальнені розв'язки.* Якщо $R(I - U(w)) \neq \overline{R(I - U(w))}$ та $g \in \overline{R(I - U(w))}$, то оператор $I - U(w)$ можна розширити до оператора $\overline{I - U(w)}$ з замкненою множиною значень, для якого завжди існує псевдообернений за Муром—Пенроузом оператор.

Опишемо розвинену в розд. 1—4 конструкцію в термінах розглядуваних просторів. Оскільки оператор $I - U(w)$ є обмеженим, то справедливим є розклад простору $\mathcal{H}_T$ у пряму суму:

$$\mathcal{H}_T = N(I - U(w)) \oplus X, \mathcal{H}_T = \overline{R(I - U(w))} \oplus Y,$$

з

$$X = N(I - U(w))^{\perp} = \overline{R(I - U(w))}$$

та

$$Y = \overline{R(I - U(w))}^{\perp} = N(I - U(w)).$$

Покладемо як $E = \mathcal{H}_T / N(I - U(w))$ фактор-простір простору $\mathcal{H}_T$, $\mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}$, а $\mathcal{P}_{N(I-U(w))}$ ортопроєктори, які проєктують відповідно на $\overline{R(I - U(w))}$ і $N(I - U(w))$. Тоді оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{U}(w) = \mathcal{P}_{\overline{R(I-U(w))}}(I - U(w))j^{-1}p : X \to$$

$$\to R(I - U(w)) \subset \overline{R(I - U(w))}$$

є лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут

$$p : X \to E = \mathcal{H}_T / N(I - U(w)), \quad j : \mathcal{H}_T \to E$$

є відповідно неперервними біекцєю та проєкцією. Трійка $(\mathcal{H}_T, E, j)$ — локально тривіальнє розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_{N(I-U(w))}\mathcal{H}$ [299]. У цьому випадку [166, с.26,29] можна визначити сильний узагальнений розв'язок рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))x = g, x \in X. \tag{5.54}$$

Поповнюючи простір X за нормою $||x||_{\overline{X}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))x||_F$ ($F = \overline{R(I - U(w))}$ [166]), отримаємо новий простір $\overline{X}$. Розширений оператор

$$\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)} : \overline{X} \to \overline{R(I - U(w))}, X \subset \overline{X},$$

здійснює гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(I - U(w))}$. Тоді рівняння

$$(\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)})\overline{\xi} = g,$$

має єдиний розв'язок $(\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)})^{-1}g$, який традиційно називатимемо сильним узагальненим розв'язком рівняння (5.54).

Зауваження 5.4. *Існують розширення просторів та відповідних операторів такого вигляду:*

$$\overline{p} : \overline{X} \to \overline{E}, \quad \overline{j} : \overline{\mathcal{H}}_T \to \overline{E}, \quad \overline{\mathcal{P}}_X = \mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{\mathcal{H}}_T \to$$

$$\to \overline{X}, \quad \overline{G} : \overline{R(I - U(w))} \to \overline{X},$$

де

$$\overline{\mathcal{H}}_T = N(I - U(w)) \oplus \overline{X}; \quad \overline{p}(x) = p(x), x \in X;$$

$$\overline{j}(x) = j(x), x \in \mathcal{H}_T;$$

$$\overline{\mathcal{P}}_X(x) = \mathcal{P}_X(x), x \in \mathcal{H}_T \ (\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_X^2 = \mathcal{P}_X^*);$$

$$\overline{G}[g] = G[g], g \in R(I - U(w)).$$

Оператор $\overline{I - U(w)} = (\overline{\mathcal{I} - \mathcal{U}(w)})\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{\mathcal{H}}_T \to \mathcal{H}_T$ *є розширенням* $I - U(w)$, $\overline{(I - U(w))}c = (I - U(w))c$ *для довільного* $c \in \mathcal{H}_T$ *.*

3) *Сильні псевдорозв'язки.* Розглянемо елемент $g \notin \overline{R(I - U(w))}$. Це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(I-U(w))^*)}g \neq 0$. Тоді існують елементи з $\overline{\mathcal{H}}_T$, що мінімізують у відповідному просторі норму нев'язки $||\overline{(I - U(w))}\xi - g||_{\mathcal{H}_T}$:

$$\xi = \overline{(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))}^{-1} g + \mathcal{P}_{N(I-U(w))}\overline{c} \quad \forall \overline{c} \in \mathcal{H}_T.$$

Ці елементи (за аналогією з [15],[326]) називають *сильними псевдорозв'язками.*

Сформулюємо загальну теорему розв'язності двоточкової крайової задачі для рівняння Шредінгера.

Теорема 5.7. *Розглянемо крайову задачу (5.49), (5.50).*

1. a) Класичні узагальнені або сильні узагальнені розв'язки крайової задачі (5.49), (5.50) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) = 0. \tag{5.55}$$

Якщо $(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \in R(I - U(w))$, *то розв'язки (5.49), (5.50) будуть класичними узагальненими.*

b) За виконання умови (5.55) розв'язки (5.49), (5.50) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f, \alpha]})(t),$$

де $(\overline{G[f, \alpha]})(t)$ *— розширення оператора* $(G[f, \alpha])(t)$.

2. a) Сильні псевдорозв'язки крайової задачі (5.49), (5.50) існують тоді й тільки тоді, коли

$$U_0(w)(\alpha + \int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) \neq 0. \tag{5.56}$$

b) За виконання умови (5.56) сильні псевдорозв'язки (5.49), (5.50) мають вигляд

$$\varphi(t, \overline{c}) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (\overline{G[f, \alpha]})(t),$$

де

$$(\overline{G[f, \alpha]})(t) = U(t)\overline{G}[\alpha +$$

$$+U(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau] + \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= U(t)\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{U}(w))}^{-1}(\alpha + U(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau) +$$

$$+ \int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Нелінійний випадок. У просторі Гільберта $\mathcal{H}_T$, означеному вище, розглянемо крайову задачу

$$\frac{d\varphi(t, \varepsilon)}{dt} = -iH_0\varphi(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + f(t), \tag{5.57}$$

$$\varphi(0,\varepsilon)-\varphi(w,\varepsilon)=\alpha. \tag{5.58}$$

Задача полягає у знаходженні розв'язку $\varphi(t,\varepsilon)$ крайової задачі (5.57), (5.58), який перетворюється на один із розв'язків породжувального рівняння (5.49), (5.50) $\varphi_0(t,\overline{c})$ вигляду (5.53) при $\varepsilon=0$. Для крайової задачі (5.57), (5.58) можна застосувати та уточнити попередні результати.

Для знаходження необхідної умови від оператор функції $Z(\varphi,t,\varepsilon)$ будемо вимагати неперервність у околі порождувального розв'язку

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot)\in C[||\varphi-\varphi_0||\leq q]\times C([0;w],\mathcal{H}_T)\times C[0,\varepsilon_0],$$

де q — деяка додатна стала.

Цю проблему можна вирішити за допомогою операторного рівняння для порождувальних елементів (5.40), яке у розглянутому періодичному випадку (для $\alpha=0$) називають (за аналогією з [169]) операторним рівнянням для породжуввальних амплітуд

$$F(\overline{c})=U_0(w)\int_0^w U^{-1}(\tau)Z(\varphi_0(\tau,\overline{c}),\tau,0)d\tau=0. \tag{5.59}$$

Теорема 5.8. *(необхідна умова). Нехай нелінійна крайова задача (5.57), (5.58) має розв'язок $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків $\varphi_0(t,\overline{c})$ породжувальної задачі (5.49), (5.50) з елементом $\overline{c}=c^0$, $\varphi(t,0)=\varphi_0(t,c^0)$ при $\varepsilon=0$. Тоді цей елемент повинен задовольняти операторне рівняння для породжувальних амплітуд (5.59).*

Доведення проводиться за схемою теореми 5.3.

Для знаходження достатньої умови існування розв'язків крайової задачі (5.57), (5.58) додатково припускатимемо, що оператор-функція $Z(\varphi,t,\varepsilon)$ є сильно диференційовною в околі породжувального розв'язку

$$Z(\cdot,t,\varepsilon)\in C^1[||\varphi-\varphi_0||\leq q].$$

Цю проблему можна вирішити за допомогою оператора

$$B_0=\frac{dF(\overline{c})}{d\overline{c}}|_{\overline{c}=c_0}=U_0(w)\int_0^w U^{-1}(t)A_1(t)dt:\mathcal{H}\to\mathcal{H},$$

де $A_1(t)=Z^1(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}$ (похідна у сенсі Фреше).

Теорема 5.9. *(достатня умова). Нехай оператор B_0 задовольняє такі умови:*

1) B_0 має псевдообернений оператор за Муром—Пенроузом;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}U_0(w) = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c^0 \in \mathcal{H}_T$, що задовольняє операторне рівняння для порождувальних амплітуд (5.59), існує принаймні один сильний узагальнений розв'язок (5.57), (5.58).

Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу:

$$\overline{v}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0) + v_k, \tau, \varepsilon), \alpha](t),$$

$$c_k = -B_0^+ U_0(w) \int_0^w U^{-1}(\tau)\{A_1(\tau)\overline{v}_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{R}(v_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\}d\tau,$$

$$\mathcal{R}(v_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) =$$

$$= Z(\varphi_0(t, c^0) + v_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) - Z(\varphi_0(t, c^0), t, 0) - A_1(t)v_k(t, \varepsilon),$$

$$\mathcal{R}(0, t, 0) = 0, \quad \mathcal{R}_x^1(0, t, 0) = 0,$$

$$v_{k+1}(t, \varepsilon) = U(t)U_0(w)c_k + \overline{v}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\varphi_k(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, c^0) + v_k(t, \varepsilon), k = 0, 1, 2, ...,$$

$$v_0(t, \varepsilon) = 0, \varphi(t, \varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t, \varepsilon).$$

Доведення проводиться за тією самою схемою, що й теореми про неявну функцію.

Цілком аналогічно встановлюється твердження, наведене нижче, що поєднує необхідну та достатню умови розв'язності.

Наслідок. *Нехай оператор $F(\overline{c})$ має похідну у сенсі Фреше $F^{(1)}(\overline{c})$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта $\mathcal{H}$, який задовольняє операторне рівняння для породжувальних амплітуд (5.59). Якщо оператор B_0 має обмежений обернений, то крайова задача (5.57), (5.58) має єдиний розв'язок для кожного c^0.*

5.5. Приклади крайових задач

Проілюструємо твердження цього розділу.

1. Рівняння Ван дер Поля у просторі Гільберта. Розглянемо еволюційне диференціальне рівняння у сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$:

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = \varepsilon(1 - ||y(t)||^2)\dot{y}(t), \tag{5.60}$$

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w), \tag{5.61}$$

де T — необмежений оператор з компактним оберненим оператором T^{-1}. Тоді існує ортонормований базис $e_i \in \mathcal{H}$ такий, що $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)e_i$ та $Ty(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i(t)e_i$, $\lambda_i \to \infty$. Операторна система (5.57), (5.58) для крайової задачі (5.60), (5.61) еквівалентна зліченній системі звичайних диференціальних рівнянь ($c_k(t) = x_k(t)$) вигляду

$$\dot{x}_k(t) = \sqrt{\lambda_k} y_k(t), \quad k = 1, 2, ...,$$

$$\dot{y}_k(t) = -\sqrt{\lambda_k} x_k(t) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(1 - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2(t)) y_k(t), \tag{5.62}$$

$$x_k(0) = x_k(w), \quad y_k(0) = y_k(w). \tag{5.63}$$

Будемо знаходити розв'язки цієї системи рівнянь у просторі $C^1([0; w])$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються на один із розв'язків породжувального рівняння. Розглянемо критичний випадок: $\lambda_i = 4\pi^2 i^2/w^2, i \in \mathbb{N}$. Нехай для простоти $w = 2\pi$. Тоді множина усіх періодичних розв'язків (5.62), (5.63) є такою:

$$x_k(t) = cos(kt)c_1^k + sin(kt)c_2^k,$$

$$y_k(t) = -sin(kt)c_1^k + cos(kt)c_2^k$$

для всіх пар сталих $c_1^k, c_2^k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. У цьому випадку $U_0(w) = U_0(2\pi) = I$, а рівняння для породжувальних амплітуд (5.59) можна записати у вигляді нескінченного вектора, який складається з пар F_1^k, F_2^k:

$$F(c) := (F_1^1(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...), F_2^1(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...),$$

$$F_1^2(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...), F_2^2(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...), ...)^T = 0,$$

де

$$F_1^k(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...) =$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^{2\pi} sin(k\tau)(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} (cos(j\tau)c_1^j + sin(j\tau)c_2^j)^2) \times$$

$$\times(-sin(k\tau)c_1^k + cos(k\tau)c_2^k)d\tau;$$

$$F_2^k(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...) =$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} cos(k\tau)(1 - \sum_{j=1}^{+\infty}(cos(j\tau)c_1^j + sin(j\tau)c_2^j)^2)\times$$

$$\times(-sin(k\tau)c_1^k + cos(k\tau)c_2^k)d\tau.$$

Після перетворень отримаємо, що рівняння (5.59) є еквівалентним такій зліченій системі алгебраїчних нелінійних рівнянь:

$$F_1^k(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...) =$$

$$= -\frac{1}{k}((c_1^k)^3 + 2\sum_{j=1, j\neq k}(c_1^k(c_1^j)^2 + c_1^k(c_2^j)^2) + c_1^k(c_2^k)^2 - 4c_1^k) = 0,$$

$$F_2^k(c_1^1, c_2^1, c_1^2, c_2^2, ...) =$$

$$= \frac{1}{k}((c_2^k)^3 + 2\sum_{j=1, j\neq k}(c_2^k(c_1^j)^2 + c_2^k(c_2^j)^2) + (c_1^k)^2 c_2^k - 4c_2^k) = 0,$$

де $k \in \mathbb{N}$. З цих рівностей маємо, що або $c_1^k = 0$ або

$$(c_1^k)^2 + 2\sum_{j=1, j\neq k}((c_1^j)^2 + (c_2^j)^2) + (c_2^k)^2 - 4 = 0.$$

Так само маємо, що або $c_2^k = 0$, або

$$(c_2^k)^2 + 2\sum_{j=1, j\neq k}((c_1^j)^2 + (c_2^j)^2) + (c_1^k)^2 - 4 = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.64}$$

Візьмемо довільне $m \neq k$. Тоді або $c_1^m = 0$, або $c_2^m = 0$, або

$$(c_1^m)^2 + 2\sum_{j=1, j\neq m}((c_1^j)^2 + (c_2^j)^2) + (c_2^m)^2 - 4 = 0. \tag{5.65}$$

Розглянувши різницю (5.64) та (5.65), отримаємо, що

$$(c_1^m)^2 + (c_2^m)^2 = (c_1^k)^2 + (c_2^k)^2. \tag{5.66}$$

Позначимо $(c_1^m)^2 + (c_2^m)^2 = a^2$. Тоді з рівняння (5.64) випливає, що для того, щоб ряд у лівій частині збігався необхідно, щоб лише скінченна кількість компонент $(c_1^k, c_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ була ненульовою (інакше ряд, що складається з однакових чисел, буде нескінченним). Нехай $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}) \neq \neq 0, i = \overline{1, N}$ (або одна з компонент цієї пара є ненульовою). Тоді використовуючи (5.64)—(5.66), отримуємо, що

$$a^2 + 2(N-1)a^2 = (2N-1)a^2 = 4.$$

Звідси остаточно

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = (\frac{2}{\sqrt{2N-1}})^2, i = \overline{1, N}.$$

Зауважимо, що задача про періодичні розв'язки рівняння Ван дер Поля дає можливість сказати, що ці сталі $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}), i = \overline{1, N}$, є амплітудами періодичних розв'язків вихідного рівняння Ван дер Поля. Таким чином, отримали твердження.

Теорема 5.10. *(необхідна умова розв'язності рівняння Ван дер Поля). Нехай крайова задача (5.62), (5.63) має розв'язок $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, який перетворюється на один із розв'язків породжувального рівняння з набором пар сталих $(c_1^k, c_2^k), k \in \mathbb{N}$. Тоді серед них може бути не більше ніж скінченна кількість ненульових сталих. Окрім того, якщо $(c_1^{k_i}, c_2^{k_i}) \neq (0, 0), i = \overline{1, N}$, то ці сталі знаходяться на N-вимірному торі скінченновимірного підпростору сталих:*

$$(c_1^{k_i})^2 + (c_2^{k_i})^2 = (\frac{2}{\sqrt{2N-1}})^2, i = \overline{1, N}. \tag{5.67}$$

Зауважимо, що отримані многовиди (5.67) визначаються з операторного рівняння для породжувальних амплітуд (5.59).

2. Абстрактне гіперболічне рівняння. Знайдемо умови біфуркації розв'язків періодичної крайової задачі для абстрактного гіперболічного рівняння у сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$:

$$y''(t, \varepsilon) + Ty(t, \varepsilon) = \varepsilon A_1(t)y(t, \varepsilon) + f(t), \tag{5.68}$$

$$y(0, \varepsilon) = y(w, \varepsilon), y'(0, \varepsilon) = y'(w, \varepsilon), \tag{5.69}$$

де T — необмежений оператор із компактним оберненим T^{-1}; лінійний обмежений оператор $A_1(t)$ підлягає визначенню. Тоді існує ортонормований базис $e_i \in \mathcal{H}$ такий, що $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)e_i$, $Ty(t) =$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i(t) e_i, \lambda_i \to \infty$. У цьому випадку крайова задача (5.68), (5.69) еквівалентна такій зліченній системі звичайних диференціальних рівнянь:

$$x_k'(t) = \sqrt{\lambda_k} y_k(t),$$

$$y_k'(t) = -\sqrt{\lambda_k} x_k(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (\varepsilon a_{kk}(t) x_k(t) + f_k(t)), \tag{5.70}$$

$$x_k(0) = x_k(w), \quad y_k(0) = y_k(w), \tag{5.71}$$

де $c_k(t) = x_k(t); x_k'(t) = y_k(t)$. Тут за подання оператора $A(t)$ обирається діагональна матриця $diag\{a_{ii}(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Розглянемо резонансний випадок, коли $\lambda_k = \frac{4\pi^2 k^2}{w^2}$. Припустимо, що $w = 2\pi$ (для спрощення). Спочатку знайдемо умови розв'язності породжувальної ($\varepsilon = 0$) крайової задачі

$$x_k'(t) = \sqrt{\lambda_k} y_k(t), y_k'(t) = -\sqrt{\lambda_k} x_k(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} f_k(t), \tag{5.72}$$

$$x_k(0) = x_k(w), \quad y_k(0) = y_k(w). \tag{5.73}$$

Неважко побачити, що така породжувальна ($\varepsilon = 0$) крайова задача є розв'язною тоді й тільки тоді, коли

$$\int_0^{2\pi} sin(k\tau) f_k(\tau) d\tau = 0, \tag{5.74}$$

$$\int_0^{2\pi} cos(k\tau) f_k(\tau) d\tau = 0, k \in \mathbb{N}. \tag{5.75}$$

За виконання умов (5.74), (5.75) породжувальна крайова задача (5.72), (5.73) має періодичну множину розв'язків у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_k(t, c_1^k, c_2^k) \\ y_k(t, c_1^k, c_2^k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\ kt & sin\ kt \\ -sin\ kt & cos\ kt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^k \\ c_2^k \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \int_0^t sin\ k(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \\ \int_0^t cos\ k(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $a_{kk}(t) = a_{kk} \neq 0$ та

$$\int_0^{2\pi} sin\ (k\tau) f_k(\tau) d\tau \neq 0, \tag{5.76}$$

$$\int_0^{2\pi} cos\ (k\tau) f_k(\tau) d\tau \neq 0, k \in \mathbb{N}, \tag{5.77}$$

тобто породжувальна крайова задача не має розв'язків.

Розв'язок збуреної задачі (5.70), (5.71) знайдемо у вигляді ряду за степенями малого параметра ε:

$$x(t,\varepsilon) = \frac{x_{-1}(t)}{\varepsilon} + x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... \tag{5.78}$$

При ε^{-1} отримаємо крайову задачу для знаходження коефіцієнта $x_{-1}(t) = (x_{-1}^k(t), y_{-1}^k(t))_{k\in\mathbb{N}}^T$ біля ε^0:

$$\frac{dx_{-1}^k(t)}{dt} = ky_{-1}^k(t), \quad x_{-1}^k(0) = x_{-1}^k(2\pi),$$

$$\frac{dy_{-1}^k(t)}{dt} = -kx_{-1}^k(t), \quad y_{-1}^k(0) = y_{-1}^k(2\pi).$$

Множина розв'язків такої задачі має вигляд

$$x_{-1}^k(t, c_{-1}) = \cos kt\ c_{-1}^{1k} + \sin kt\ c_{-1}^{2k},$$

$$y_{-1}^k(t, c_{-1}) = -\sin kt\ c_{-1}^{1k} + \cos kt\ c_{-1}^{2k}.$$

Довільний елемент $c_{-1} = (c_{-1}^{1k}, c_{-1}^{2k})_{k\in\mathbb{N}}^T$ визначається умовою розв'язності матричної крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_0(t) = = (x_0^k(t), y_0^k(t))_{k\in\mathbb{N}}^T$:

$$\frac{dx_0^k(t)}{dt} = ky_0^k(t), \quad x_0^k(0) = x_0^k(2\pi),$$

$$\frac{dy_0^k(t)}{dt} = -kx_0^k(t) + \frac{1}{k}a_{kk}x_{-1}^k(t, c_{-1}) + \frac{1}{k}f_k(t), \quad y_0^k(0) = y_0^k(2\pi).$$

Множина розв'язків $x_0^k(t), y_0^k(t)$ такої задачі має вигляд

$$x_0^k(t, c_0) = cos\ ktc_0^{1k} + sin\ ktc_0^{2k} +$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^t sin\ k(t-\tau)(a_{kk}x_{-1}^k(\tau, c_{-1}) + f_k(\tau))d\tau,$$

$$y_0^k(t, c_0) = -sinktc_0^{1k} + cos\ ktc_0^{2k} +$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^t cos\ k(t-\tau)(a_{kk}x_{-1}^k(\tau, c_{-1}) + f_k(\tau))d\tau,$$

за виконання умови

$$B_0 c_{-1} = g,$$

де B_0 — блоково-діагональна матриця з двовимірними блоками на діагоналі:

$$B_0 = \ block\ \begin{pmatrix} 0 & -\pi a_{kk} \\ \pi a_{kk} & 0 \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}};$$

$$g = (\int_0^{2\pi} sin\ k\tau f_k(\tau)d\tau, -\int_0^{2\pi} cos\ k\tau f_k(\tau)d\tau)^T_{k\in\mathbb{N}}.$$

Тоді сталі $\overline{c}^{1k}_{-1}, \overline{c}^{2k}_{-1}$ мають вигляд

$$\overline{c}^{1k}_{-1} = \frac{-\int_0^{2\pi}\cos k\tau f_k(\tau)d\tau}{\pi a_{kk}}, \quad \overline{c}^{2k}_{-1} = \frac{-\int_0^{2\pi}\sin k\tau f_k(\tau)d\tau}{\pi a_{kk}}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$x_0^k(t,c_0) = \cos ktc_0^{1k} + \sin ktc_0^{2k} + \frac{1}{k}g_0^{1k}(t).$$

Тут

$$g_0^{1k}(t) = \int_0^{2\pi} K_1(t,\tau)f_k(\tau)d\tau + \int_0^t sin\ k(t-\tau)f_k(\tau)d\tau;$$

$$K_1(t,\tau) = \frac{1}{2\pi k}(ktsin\ k(t-\tau) - sin\ kt\ sin\ k\tau);$$

$$y_0^k(t,c_0) = -sin\ ktc_0^{1k} + cos\ ktc_0^{2k} + \frac{1}{k}g_0^{2k}(t),$$

де

$$g_0^{2k}(t) = \int_0^{2\pi} K_2(t,\tau)f_k(\tau)d\tau + \int_0^t cos\ k(t-\tau)f_k(\tau)d\tau;$$

$$K_2(t,\tau) = -\frac{1}{2\pi k}(ktcos\ k(t-\tau) + sin\ ktcos\ k\tau).$$

Довільний елемент c_{i-1} визначається умовою розв'язності неоднорідної крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_i(t)$ біля ε^i ряду (5.78):

$$\frac{dx_i^k(t)}{dt} = ky_i^k(t), x_i^k(0) = x_i^k(2\pi), \tag{5.79}$$

$$\frac{dy_i^k(t)}{dt} = -kx_i^k(t) + \frac{1}{k}a_{kk}x_{i-1}^k(t,c_{i-1}), y_i^k(0) = y_i^k(2\pi). \tag{5.80}$$

Множина розв'язків має вигляд

$$x_i^k(t,c_i) = cos\ ktc_i^{1k} + sin\ ktc_i^{2k} + \frac{1}{k}g_i^{1k}(t),$$

$$y_i^k(t,c_i) = -sin\ ktc_i^{1k} + cos\ ktc_i^{2k} + \frac{1}{k}g_i^{2k}(t),$$

де

$$g_i^{1k}(t) = -a_{kk}\int_0^{2\pi} K_1(t,\tau)g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau - a_{kk}\int_0^t sin\ k(t-\tau)g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau;$$

$$g_i^{2k}(t) = a_{kk}\int_0^{2\pi} K_2(t,\tau)g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau + a_{kk}\int_0^t cos\ k(t-\tau)g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau;$$

$$\overline{c}_{i-1}^{1k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} cos\ k\tau g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau;$$

$$\overline{c}_{i-1}^{2k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sin\ k\tau g_{i-1}^{1k}(\tau)d\tau.$$

3. Двоточкова крайова задача. Розглянемо дійснозначну зліченну систему диференціальних рівнянь:

$$x'(t) = H(t)x(t) + f(t)$$

у просторі нескінченних послідовностей l_2 з необмеженим оператором $H(t)$, вектор-функцією $f(t)$ у вигляді

$$H(t) = diag\{2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\},$$

$$f(t) = col(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots)$$

і крайовою умовою вигляду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(1) = \alpha$, де

$$M = diag\{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1, \ldots\};$$

$$N = diag\left\{e^{-2}, e^{-4}, e^{-8}, e^{-16}, \ldots, e^{-2^n}, \ldots\right\},$$

$$\alpha = col\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in \ell_2; \quad \alpha_i = const,\ i = \overline{1,\infty}.$$

Легко переконатися, що так визначений оператор дійсно є необмеженим. Як область визначення оператора A розглянемо таку множину неперервних вектор-функцій:

$$D(A) = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), ...) \in l_2, t \in [0,1] :$$

$$\sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{4^i} x_i^2(t) < \infty\}.$$

Ця множина є щільною в $C([0,1];l_2)$ (оскільки містить довільні вектор-функції, що мають скінченну кількість ненульових координат). Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектор-стовпчика $x(t) = \operatorname{col}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\} \in C\left([0;1], \ell_2\right)$.

Еволюційний оператор задачі має вигляд

$$U(t,0) = \operatorname{diag}\left\{e^{2t}, e^{4t}, e^{8t}, e^{16t}, \dots, e^{2^n t}, \dots\right\}.$$

Оберненим до $U(t,0)$ є оператор

$$U^{-1}(t,0) = \operatorname{diag}\left\{e^{-2t}, e^{-4t}, e^{-8t}, e^{-16t}, \dots, e^{-2^n t}, \dots\right\}.$$

Тоді оператор Q та його узагальнено-обернений оператор Q^- набувають вигляду

$$Q = M - NU(1,0) = \operatorname{diag}\{2,0,2,0,\dots,2,0,\dots\},$$

$$Q^- = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{diag}\{1,0,1,0,\dots,1,0,\dots\}.$$

Проєктори на ядро та коядро оператора Q відповідно є такими:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^-Q = \operatorname{diag}\{0,1,0,1,\dots,0,1,\dots\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^- = \operatorname{diag}\{0,1,0,1,\dots,0,1,\dots\}.$$

Запишемо умови (5.18) розв'язності для цієї задачі:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_2 & = & \int_0^1 \frac{e^4 f_2(\tau)}{e^{4\tau}} d\tau, \\ \alpha_4 & = & \int_0^1 \frac{e^{16} f_4(\tau)}{e^{16\tau}} d\tau, \\ \dots & & \\ \alpha_{2k} & = & \int_0^1 \frac{e^{2k} f_{2k}(\tau)}{e^{2k\tau}} d\tau, \\ \dots & & \end{array}\right.$$

За відомих $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2k}, \dots (k \in \mathbb{N})$ і довільних $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2k+1}, \dots (k \in \mathbb{N})$ та $f(t) \in C\left([0;1], \ell_2\right)$ задача має зліченну кількість розв'язків у вигляді

$$x(t,0,c) = diag\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, ..., 0, e^{2^{2k}t,\dots}\}c +$$

$$+\frac{1}{2} diag\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, ..., e^{2^{2k-1}t}, 0, ...\}\alpha + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in l_2,$$

або

$$x(t,0,c) = diag\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, ..., 0, e^{2^{2k}t, ...}\}c+$$

$$+\frac{1}{2}diag\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, ..., e^{2^{2k-1}t}, 0, ...\}\alpha + col(\int_0^t \frac{e^{2t}f_1(\tau)d\tau}{e^{2\tau}},$$

$$\int_0^t \frac{e^{4t}f_2(\tau)d\tau}{e^{4\tau}}, \int_0^t \frac{e^{8t}f_3(\tau)d\tau}{e^{8\tau}}, \int_0^t \frac{e^{16t}f_4(\tau)d\tau}{e^{16\tau}}, ...,$$

$$\int_0^t \frac{e^{2^k t}f_k(\tau)d\tau}{e^{2^k\tau}}, ...) + col(\int_0^1 \frac{e^{2t}f_1(\tau)d\tau}{2e^{2\tau}}, 0,$$

$$\int_0^1 \frac{e^{4t}f_1(\tau)d\tau}{2e^{2\tau}}, 0, ..., \int_0^1 \frac{e^{2^{2k-1}t}f_k(\tau)d\tau}{2e^{2^{2k-1}\tau}}, 0, ...),$$

де $k \in \mathbb{N}$.

4. Зведення хімічних та біологічних задач. Наведемо приклади практичних задач, які моделюються нелінійною автономною операторно-диференціальною крайовою задачею

$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon R(z(t,\varepsilon)) + f(t), t \in J, \tag{5.81}$$

$$lz(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{5.82}$$

У загальному випадку оператор-функція $A(t)$ є необмеженим (замкненим) оператором зі щільною областю визначення, що не залежить від часу $t : D(A(t)) = D \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, $J \subset \mathbb{R}$; l — лінійний та обмежений оператор, що переводить розв'язок (5.81) у простір Гільберта $\mathcal{H}_1$; $\alpha \in \mathcal{H}_1$; R — достатньо гладка нелінійнсть (додаткові умови наведено нижче); вектор-функція $f(t) \in \mathcal{F}(J, \mathcal{H})$, $\mathcal{F}(J, \mathcal{H})$ — певний функціональний простір.

1. Схеми каталітичних реакцій. Нехай, наприклад [219], маємо схему

$$A + X \to 2X, (k_1),$$

$$X + Y \to 2Y, (k_2),$$

$$Y \to E, (k_3).$$

Концентрація вихідної речовини та кінцевого продукту є постійними за часом.

Цю модель також широко використовують в екології. Тут X означає, наприклад, кількість рослиноїдних, що живляться субстратом, A, Y —

хижаків, що живляться рослиноїдними X. Таку модель в літературних джерелах пов'язують із моделлю Лотки—Вольтера. Система рівнянь швидкостей реакції має вигляд [219]

$$\frac{dX}{dt} = k_1 AX - k_2 XY,$$

$$\frac{dY}{dt} = k_2 XY - k_3 Y.$$

2. У вигляді (5.81) можна подати модель, яка задається системою диференціальних рівнянь [219, с.135]:

$$\frac{dX_i}{dt} = KX_i \left(N + \sum_k R^k S_i^k - X_i \right) - dX_i,$$

де R^k — коефіцієнт пропорційності.

3. Ще одним прикладом задачі (5.81) є модель нерівноважних фазових переходів для такого ланцюга хімічних реакцій [219]:

$$A + 2X \leftrightarrows^{k_1}_{k_2} 3X, X \leftrightarrows^{k_3}_{k_4} B.$$

Макроскопічне кінетичне рівняння набуде вигляду

$$\frac{dX}{dt} = -k_2 X^3 + k_1 AX^2 - k_3 X + k_4 B.$$

Якщо перепозначити коефіцієнти, то його можна записати у вигляді феноменологічного рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \gamma x^2 - x.$$

Відомо також модель брюсселятора, що відповідає схемі реакції [219]:

$$A \to X,$$

$$2X + Y \to 3X,$$

$$B + X \to Y + D,$$

$$X \to E.$$

Покладаючи сталі швидкостей такими, що дорівнюють одиниці, отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{dX}{dt} = A + X^2Y - BX - X,$$

$$\frac{dY}{dt} = BX - X^2Y.$$

4. Обмін речовиною між двома об'ємами належить до типу задач (5.81) і має вигляд системи рівнянь:

$$\frac{dX_1}{dt} = A + X_1^2Y_1 - BX_1 - X_1 + D_X(X_2 - X_1),$$

$$\frac{dY_1}{dt} = BX_1 - X_1^2Y_1 + D_Y(Y_2 - Y_1),$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A + X_2^2Y_2 - BX_2 - X_2 + D_X(X_1 - X_2),$$

$$\frac{dY_2}{dt} = BX_2 - X_2^2Y_2 + D_Y(Y_1 - Y_2).$$

Якщо враховувати дифузію, то математичне формулювання проблем, які пов'язані з дисипативними структурами, потребує вивчення диференціальних рівнянь у частинних похідних.

У такому випадку еволюція концентрацій компонент X_i визначається системою рівнянь [219]

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = v(X_1, X_2, ...) + D_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial r^2},$$

де перший член відповідає внеску хімічних реакцій у зміну концентрації X_i та зазвичай має простий поліноміальний вигляд, а другий — дифузії вздовж осі r. У таких системах далеко від рівноваги виникають нестійкості, які зручно вивчати методами теорії біфуркацій. Якщо включити дифузію, то рівняння для брюсселятора набудуть такого вигляду:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A + X^2Y - BX - X + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}, \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + D_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}. \tag{5.84}$$

Зауважимо, що втрата стійкости може відбуватися по-різному. Якщо дисперсійне рівняння має два комплексно-спряжених корені, дійсні частини яких у деякій точці перетворюються на нуль, то це зумовлює виникнення граничного циклу. У літературних джерелах її часто називають біфуркцією Хопфа. Якщо маємо два дійсних корені, один з яких у деякій критичній точці стає додатним, то у такій ситуації виникають неоднорідні стаціонарни стани. Її називають біфуркацією Тьюрінга. У загальному вигляді це може бути система диференціальних рівнянь у частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial X}{\partial t} = v(X,Y) + D_X \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}, \tag{5.85}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -v(X,Y) + D_Y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}. \tag{5.86}$$

Згідно з розробленою вище теорією умова (5.82) дає можливість досліджувати досить загальні крайові задачі. Покажемо на прикладі однієї системи дифузійних рівнянь, як її записати в операторному вигляді, до якого можна застосовувати отримані теореми.

5. Нехай маємо систему рівнянь типу (5.83), (5.84) вигляду

$$\frac{\partial x(t,r)}{\partial t} = (D_x \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 1)x(t,r), \tag{5.87}$$

$$\frac{\partial y(t,r)}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2}{\partial r^2} y(t,r) + \varepsilon x^2(t,r)y(t,r), \tag{5.88}$$

$$x(t,0) = x(t,2\pi), x_t(t,0) = x_t(t,2\pi),$$

$$y(t,0) = y(t,2\pi), y_t(t,0) = y_t(t,2\pi), \tag{5.89}$$

$$l_1 x(\cdot,r) = x(1,r) - x(0,r) = \alpha_1(r),$$

$$l_2 y(\cdot,r) = y(1,r) - y(0,r) = \alpha_2(r). \tag{5.90}$$

Вводячи вектор $z = (x,y)^T$, задачу можна записати у вигляді (5.81), (5.82):

$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = Az(t,\varepsilon) + \varepsilon R(z(t,\varepsilon))$$

$$lz(\cdot) = \alpha,$$

де крайова умова (5.82) є такою:

$$lz(\cdot) = (l_1 x(\cdot), l_2 y(\cdot)), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

а оператор A:

$$A = \begin{pmatrix} D_x \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 1 & 0 \\ 0 & D_y \frac{\partial^2}{\partial r^2} \end{pmatrix}$$

визначається разом із крайовими умовами (5.89). Для нього відомо еволюційний оператор, і можна повністю дослідити розв'язність такої крайової задачі у відповідних просторах за запропонованою вище схемою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Агаев Р. П. Метод Фадеева и обобщенно-обратные матрицы. С. 1—25.

2. Абловиц М. Дж., Хот Т. С. Связанные нелинейные уравнения Шредингера для соприкасающихся жидкостей со свободной поверхностью. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 159, № 3. С. 326—335.

3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.

4. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

5. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.:Наука, 1977. 224 с.

6. Алимов А. Л. О гамильтоновой форме Фейнмановского континуального интеграла. *Теоретическая и математическая физика.* 1974. Т. 20, № 3. С. 302—307.

7. Алимов А. Л. О конитнуальном интеграле Фейнмана на нелинейном фазовом пространстве. *Теоретическая и математическая физика.* 1977. Т. 30, № 2. С. 159—167.

8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Е. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

9. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. М: Университетское, 1984. 351 с.

10. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Линейные уравнения и борнология. Минск: Изд-во Минск. ун-та, 1982. 201 с.

11. Антоневич А. Б. Расслоенные пространства и К-теория: первые шаги. Труды КРОМШ-2009. С. 14—51.

12. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 336 с.

13. Арнольд В. И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. *УМН.* 1983. Т. 38, № 4(232). С. 189—203.

14. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. Акад. наук СССР.* 1961. Т. 25. С. 21—86.

15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1986. 287 с.

16. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. Ограниченные решения систем гиперболических уравнений и их аппроксимация. *ЖВМиМФ.* 2003. Т. 43, № 8. С. 1183—1200.

17. Аткинсон Ф. Р. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. *Математический сборник. Нов. сер.* 1951. Т. 28, № 1. С. 3—14.

18. Аткинсон Ф. В. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 749 с.

19. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков: Вища школа, 1977. Т. 1. 315 с.

20. Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. Периодические режимы в нелинейных диссипативных системах вблизи точки бифуркации. *ЖВМиМФ.* 1985. Т. 25, № 9. С. 1314—1326.

21. Бабин А. В. Конечномерность ядра и коядра квазилинейных эллиптических отображений. *Математический сборник.* 1974. Т. 93, № 3. С. 422—450.

22. Баскаков А. Г. Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов. *Докл. РАН.* 2002. Т. 383, № 5. С. 583—585.

23. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов. *Функциональный анализ и его приложения.* 1996. № 30. С. 1—11.

24. Баскаков А. Г. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов. *Математические заметки.* 2000. Т. 67, № 6. С. 816—827.

25. Баскаков А. Г. О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах. *Докл. РАН.* 2007. Т. 416, № 2. С. 156—160.

26. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. *Изв. РАН. Серия: Математика.* 2009. Т. 73, № 2. С. 3—68.

27. Баскаков А. Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 2003. № 39. С. 413—415.

28. Баскаков А. Г. О существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной. *Вест. ВГУ. Серия: Физика. Математика.* 2002. № 2. С. 44—49.

29. Баскаков А. Г. Спектральные свойства дифференциального оператора $d/dt - A_0$ с неограниченным оператором A_0. *Дифференциальные уравнения.* 1991. Т. 27, № 12. С. 2162—2164.

30. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.:Наука, 1983. 337 с.

31. Белокуров В. В. Теория возмущений со сходящимися рядами для вычисления величин, заданных конечным числом членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений. *Теоретическая и математическая физика.* 2000. Т. 123, № 3. С. 452—461.

32. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Киев: Вища школа, 1990. 600 с.

33. Богаевский И. А. Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью. *Алгебра и анализ.* 1989. Т. 1, вып. 4. С. 1—16.

34. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

35. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1969. 247 с.

36. Боголюбов Н. Н., Прикарпатский А.К., Курбатов А.М., Самойленко В.Г. Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость. *Теоретическая и математическая физика.* Т. 65, № 2. 1985. С. 271—284.

37. Боголюбов Н. М. О сходимости Фейнмановских диаграммных разложений в модели Изинга. *Теоретическая и математическая физика.* 1977. Т. 30, № 1. С. 138—141.

38. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Киев: IM НАНУ, 1995. 320 с.

39. Бойчук О. А., Кривошея С.А. Критерiй розв'язностi матричних рiвнянь типу Ляпунова. *УМЖ.* 1998. Т. 50, № 8. С. 1021—1026.

40. Бойчук А. А., Журавлев В.Ф., Покутный А.А. Нормально-разрешимые операторные уравнения. *УМЖ.* 2013. Т. 65, № 2. С. 163—175.

41. Бойчук А. А., Покутний А.А. Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространства. *Нелiнiйнi коливання.* 2006. Т. 9, № 1. С. 3—14.

42. Бойчук А. А., Покутный А.А. Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом. *УМЖ.* 2013. Т. 65, № 3. С. 329—339.

43. Бойчук А. А., Покутный А.А. Применение эргодической теории при решении одного семейства разностных уравнений в банаховом пространстве Proceeding Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference «Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications Sunny Beach». Bulgaria, 2011. P. 241—246.

44. Бойчук О. А., Покутний О.О. Обмеженi розв'язки слабконелiнiйних диференцiальних рiвнянь у банаховому просторi. *Нелiнiйнi коливання.* 2008. Т. 11, № 2. С. 151—160.

45. Бойчук А. А., Покутный А.А., Чистяков В.Ф. О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений. *ЖВМиМФ.* 2013. Т. 53, № 6. С. 958—969.

46. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач. Киев:Наукова думка, 1990. 96 с.

47. Бойчук А. А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием. *Дифференциальные уравнения.* 1994. Т. 30, № 10. С. 1677—1682.

48. Бойчук А. А. Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях. *Український математичний журнал.* 1989. Т. 41, № 10. С. 1416—1420.

49. Бойчук А. А. Краевые задачи для слабовозмущенных систем в критических случаях. Киев, 1988. 44 с. (Препр. АН УССР . Ин-т математики; 88.39).

50. Бойчук А. А., Журавлев В.Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах. *Докл. АН УССР. Серия А.* 1990. Т. 8. С. 3—6.

51. Бойчук А. А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях. *Український математичний журнал.* 1990. Т. 42, 9. С. 1180—1187.

52. Бойчук А. А., Покутний А.А. Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта. *Український математичний журнал.* 2015. Т. 67, № 9. С. 1181—1188.

53. Бойчук А. А., Покутний А.А. Экспоненциальная дихотомия и ограниченные решения дифференциальных уравнений в пространстве Фреше. *Укрїнський математичний журнал.* 2014. Т. 66, № 12. С. 1587—1598.

54. Борисович Ю. Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера. *УМН.* 1977. Т. 32, вып. 4(196). С. 3—54.

55. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, СО, 1980. 222 с.

56. Бояринцев Ю. Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск, 1989. 223 с.

57. Бояринцев Ю. Е.,Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск: Наука, 1998. 224 с.

58. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, СО, 1988. 154 с.

59. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

60. Бутко Я. А. Формула Фейнмана—Каца—Ито для бесконечномерного уравнения Шредингера со скалярным и векторным потенциалом. *Нелинейная динамика.* 2006. Т. 2, № 1. С. 75—87.

61. Вайнберг М. М., Айзендлер П. Г. Методы исследования в теории разветвления решений. *Итоги науки. Серия: Математика. Математический анализ.* 1965, 1966. С. 7–69.

62. Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г. О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. *Изв. вузов. Математика.* 1969. Т. 10. С. 3—10.

63. Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г. О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. II. *Изв. вузов. Математика.* 1969. Т. 11. С. 3—12.

64. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

65. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1974. 412 с.

66. Варфоломеев Е. М., Россовский Л. Е. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения к исследованию нейронных сетей и передаче информации нелинейными лазерными системами с обратной связью. М., 2008. 244 с.

67. Васильев В. В.,Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. *Итоги науки и техники. Серия: математический анализ.* ВИНИТИ, 1990. Т. 28. С. 87—202.

68. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 383 с.

69. Верлань А. Ф., Сизиков Р. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.

70. Визинеску А., Греку Д., Феделе Р., Никола С. Де. Гидродинамический подход Маделунга к обобщенному нелинейному уравнению Шредингера с производной потенциала. Специальные решения и их устойчивость. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 160, № 1. С. 229—239.

71. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. *Математический сборник.* 1951. Т. 29 (71), № 3. С. 615—676.

72. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. *Успехи математических наук.* 1960. Т. 15, вып. 3. С. 3—80.

73. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

74. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.:Наука, 1976. 286 с.

75. Габасов Р., Кириллова Ф Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.

76. Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х. Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом. *Уфимский математический журнал.* 2011. Т. 3, № 3. С. 55—66.

77. Галба Е. Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. *ЖВМиМФ.* 2012. Т. 52. С. 2115—2132.

78. Галба Е. Ф., Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами. *ЖВМиМФ.* 2012. Т. 52, № 12. 21–32 с.

79. Гантмахер Ф. Теория матриц. 1967. 576 с.

80. Гестрин Г. Н. Интеграл Фейнмана и разложение по собственным функциям оператора Шредингера. *Функциональний анализ и его приложения.* 1976. Т. 10, Вып. 1. С. 75—76.

81. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука. 1969. 475 с.

82. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

83. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. М.: ГИФМЛ, 1961. Вып. 4. 472 с.

84. Герджиков В. С., Костов Н. А., Вылчев Т. И. Многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера с постоянными граничными условиями. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 159, № 3. С. 438—447.

85. Головачев Г. М., Смирнов А. О. О спектральной кривой функционально-разностного уравнения Шредингера. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2010. № 374. С. 107—120.

86. Голубева В. А. Некоторые вопросы аналитической теории Фейнмановских интегралов. *УМН.* 1976. Т. 31, вып. 2(188). С. 135—202.

87. Голубева В. А. Об исследовании Фейнмановского интеграла гомологическим методом. *Теоретическая и математическая физика.* 1970. Т. 3, № 3. С. 405—419.

88. Голубева В. А., Энольский В. З. О дифференциальных уравнениях для Фейнмановской амплитуды однопетлевого графа с четырьмя вершинами. *Математические заметки.* 1978. Т. 23, № 1. С. 113—119.

89. Гольтяпин В. В. Использование псевдообратной матрицы факторного отображения в измерении факторов. *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2011. Т. 14, № 3(47). С. 20—30.

90. Гомилко А. М. Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0-полугруппы операторов. *Функциональный анализ и его приложения.* 1999. Т. 33, № 4. С. 66—69.

91. Гомилко А. М., Зварт Х., Томилов Ю. Об обратном операторе генератора C_0- полугруппы. *Математический сборник.* 2007. Т. 198, № 8. С. 35—50.

92. Горбачук М. Л. Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов. *Функциональный анализ и его приложения.* 2005. С. 85—90.

93. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984. 283 с.

94. Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н. Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений. *Український математичний журнал.* 1989. Т. 41, № 10. С. 1299—1313.

95. Горбачук В. И., Князюк А. В. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. *Успехи математических наук.* 1989. Т. 44, № 3. С. 55—91.

96. Горбачук В. М. Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений. *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 308, № 1. С. 23—27.

97. Горбачук М. Л., Мацишин И. Т. Поведение на бесконечности решений дифференциального уравнения первого порядка параболического типа. *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 312, № 3. С. 521—524.

98. Горбачук М. Л., Шкляр А. Я. О гладкости слабых решений дифференциально-операторных уравнений. *Функциональный анализ и его приложения.* 1999. Т. 33, № 1. С. 59—61.

99. Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Шкляр А. Я. О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. *Докл. РАН.* 1995. Т. 341, № 6. С. 734—736.

100. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве. *Математические заметки.* 1992. Т. 54, вып. 4. С. 17-22.

101. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. *УМН.* 1957. Т. 12, № 2. С. 43—115.

102. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в одномерную теорию сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.

103. Гоф Дж., Обрезков О. О., Смолянов О. Г. Рандомизированные гамильтоновы интегралы Фейнмана и стохастические уравнения Шредингера—Ито. *Известия РАН. Серия математика.* 2005. Т. 69, № 6. С. 3—20.

104. Гохберг И. Ц., Маркус А. С. Об устойчивости некоторых свойств нормально разрешимых операторов. *Математический сборник.* 1956. Т. 40 (82), № 4. С. 453—466.

105. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 432 с.

106. Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я. и др. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1973. 135 с.

107. Далецкий Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. *УМН.* 1962. Т. 17, вып. 5 (107). С. 3—115.

108. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

109. Далецкий А. Ю., Самойленко Ю. С. Некоммутативная проблема моментов. *Функциональный анализ и его приложения.* 1987. Т. 21, вып. 2. С. 72—73.

110. Дезин А. А. Операторы с первой производной по "времени"и нелокальные граничные условия. *Изв. АН СССР. Серия: Математика.* 1967. Т. 31. С. 61—86.

111. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

112. Демков Ю. Н., Курасов П. Б. Теорема Вигнера фон Неймана : отталкивание уровней и выродженные состояния. *Теоретическая и математическая физика.* 1987. Т. 72, № 3. С. 403—415.

113. Джеффрис Б., Джонсон Г. В. Операторное исчисление Фейнмана для семейств некоммутирующих операторов : тензорные произведения, упорядоченные носители и выпутывание экспоненциального множителя. *Математические заметки.* 2001. Т. 70, вып. 6. С. 815—838.

114. Джумабаев Д. С. Аппроксимация ограниченного решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения решениями двухточечных краевых задач. *ЖВМиМФ.* 1990. Т. 30, № 3. С. 388—404.

115. Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. *ЖВМиМФ.* 1989. Т. 29, № 1. С. 50—66.

116. Джумабаев Д. С. Ограниченные решения семейств систем дифференциальных уравнений и их аппроксимация. *Фундаментальная и прикладная математика.* 2006. Т. 12, № 5. С. 29—47.

117. Джумабаев Д. С. Сингулярные краевые задачи и их аппроксимация для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *ЖВМиМФ.* 1992. Т. 32, № 1. С. 10—24.

118. Дядькин И. Г. Уравнение Фейнмана—Шредингера и метод статистических возмущений. *ЖВМиМФ.* 1968. Т. 8, № 6. С. 1269—1279.

119. Жук С. М. Замкнутость и нормальная разрешимость оператора, порожденного линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. *Нелинейные колебания.* 2007. Т. 10, № 4. С. 464—479.

120. Забрейко П. П., Качуровский Р. И., Красносельский М. А. Об одном принципе неподвижной точки для операторов в гильбертовом пространстве. *Функциональный анализ и его приложения.* 1967. Т. 1, вып. 2. С. 93—94.

121. Замалин В.М., Норман Г.Э. О методе Монте-Карло в Фейнмановской формулировке квантовой статистики. *ЖВМиМФ.* 1973. Т. 13, № 2. С. 408—420.

122. Зарнадзе Д. Н. Замечания о теореме метризации линейного топологического пространства. *Математические заметки.* 1985. Т. 37, № 5. С. 763—773.

123. Земляная Е. В., Алексеева Н. В. Осциллирующие солитоны в нелинейном уравнении Шредингера с диссипацией и накачкой. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 159, № 3. С. 536—545.

124. Иванов А. П. Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы. *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, № 4. С. 479—498.

125. Иллс Дж. Фредгольмовы структуры. *УМН.* 1971. Т. 26, вып. 6 (162). С. 213—240.

126. Иосида К. Функциональный анализ. М.:Мир, 1967. 624 с.

127. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах. *УМН.* 1973. Т. 28, № 6. С. 77—95.

128. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.:Наука, 1984. 752 с.

129. Като Т. Теория возмущений линейных операторов М.: Мир, 1972. 740 с.

130. Качковский И., Филонов Н. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в многомерном цилиндре. *Алгебра и анализ.* 2009. Т. 21, № 1. С. 133—152.

131. Качковский И., Филонов Н. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в слое и гладком цилиндре. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2010. Т. 385. С. 69—82.

132. Качуровский Р. И. Приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений. *Изв. вузов. Математика.* 1967. Т. 67, № 12. С. 27—37.

133. Кигурадзе И. Т. Некоторые сунгулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. 352 с.

134. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.

135. Климов В. С. Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью. *Изв. РАН. Серия математика.* 2000. Т 64, № 4. С. 109—130.

136. Козицкий С. Б. Амплитудные уравнения для трехмерной биодиффузионной валиковой конвекции с ячейками произвольной ширины в окрестности точек бифуркации Хопфа. *Вестник Удмуртского университета.* 2010. Вып. 4. С. 13—24.

137. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем. Киев: Наукова думка, 1978. 218 с.

138. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа. *Автоматика и телемеханика.* 1996. № 12. С. 15—24.

139. Красносельский М. А., Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г. Условия устойчивости циклов при бифуркации Хопфа в бесконечности. *Автоматика и телемеханика.* 1997. № 1. С. 56—62.

140. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 393 с.

141. Краснюк И. Б. Нелинейные граничные задачи для уравнения Больцмана : периодические решения и их бифуркации. *Теоретическая и математическая физика.* 1998. Т. 110, № 2. С. 323—333.

142. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Киев: ИМ АН УССР , 1964. 186 с.

143. Крейн М. Г., Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

144. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

145. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 93 с.

146. Функциональный анализ. СМБ; под ред С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.

147. Крейн С. Г., Савченко Ю. Б. Об экспоненциальной дихотомии для уравнений с частными производными. *Дифференциальные уравнения.* 1972. Т. 8, № 5. С. 835—844.

148. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. *Итоги науки и техники. Математичесий анализ.* 1983. № 21. С. 130—264.

149. Крейн С .Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике. *Успехи математических наук.* 1957. Т. 12, № 1(73). С. 208—211.

150. Крылов А.Н. Вибрация судов. 1948. 402 с.

151. Курасов Б. П., Павлов Б. С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. II. *Теоретическая и математическая физика.* 1988. Т. 74, № 1. С. 82—93.

152. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.

153. Ландо Ю. К. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения. *Дифференциальные уравнения.* 1967. Т. 3, № 4. С. 695—697.

154. Ландо Ю. К. Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов. *Дифференциальные уравнения.* 1968. Т. 4, № 6. С. 1112—1126.

155. Левенштам В. Б. Равномерная экспоненциальная дихотомия параболических операторов с быстро осциллирующими коэффициентами. *Математические заметки.* 2006. Т. 79, № 5. С. 729—735.

156. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.

157. Леонов Г. А. Проблема обоснования первого приближения в теории устойчивости движения. *Успехи механики.* 2003. № 3. С. 1—28.

158. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

159. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

160. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: ФАН, 1985. 184 с.

161. Логинов Б.В., Сидоров Н.А. Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова—Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации. *Математический сборник.* 1991. Т. 182, № 5. С. 681—691.

162. Ломоносов В. И. Об одной конструкции сплетающего оператора. *Функциональный анализ и его приложения.* 1980. Т. 14, № 1. С. 67—68.

163. Ломоносов В. И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, уоммутирующих с вполне непрерывным. *Функциональный анализ и его приложения.* 1973. Т. 7, № 3. С. 55—56.

164. Лосев А. Г., Мазепа Е. А. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях. *Алгебра и анализ.* 2001. Т. 13, вып. 1. С. 84—110.

165. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы. Киев: Наукова думка, 1993. 288 с.

166. Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. М.: Диалектика, 2009. 185 с.

167. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. *Тр. Урал. политехн. ин-та. Серия: Математика.* 1954. № 51. С. 20—50.

168. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.

169. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

170. Малышев А. Н., Sadkane M. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша. *ЖВМиМФ.* 2005. Т. 45, № 3. С. 391—399.

171. Манджавидзе И. Д., Сисакян А. Н. Теория возмущений в окрестности протяженных объектов. *Теоретическая и математическая физика.* Т. 123, № 3. 2000. С. 433—451.

172. Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. 397 с.

173. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла. *Математический сборник.* 1975. № 97(139). С. 493—554.

174. Маслов В. П., Чеботарев А. М. Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана. *Теоретическая и математическая физика.* 1976. Т. 28, № 3. С. 291—307.

175. Маслов В. П. К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнамана. *Теоретическая и математическая физика.* 1970. Т. 2, № 1. С. 30—35.

176. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.

177. Махмудов Н.М. Разрешимость краевых задач для уравнения Шредингера. С. 160—163.

178. Махмудов Н. М. Разрешимость краевых задач для уравнения Шредингера с чисто мнимыми коэффициентами. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия.* 2011. Т. 11, вып. 1. С. 31—38.

179. Махмудов Н. М. Об одной задаче оптимального управления для уравнения Шредингера с вещественнозначным коэффициентом. *Изв. вузов. Математика.* 2010. Т. 11. С. 31—40.

180. Мелешко В. И. Устойчивое к возмущениям псевдообращение замкнутых операторов. *ЖВМиМФ.* 1977. Т. 17, № 5. С. 32—43.

181. Мельников В. К. Устойчивость центра при периодических возмущениях. *Тр. ММО.* 1964. Т. 12. С. 1—56.

182. Мельникова И. В. Свойства d-полугрупп Лионса и обобщенная корректность задачи Коши. *Функциональный анализ и его приложения.* 1997. Т. 31, вып. 3. С. 23—34.

183. Менский М. Б. Фейнмановское квантование и S-матрица для спиновых частиц в римановом пространстве-времени. *Теоретическая и математическая физика.* 1974. Т. 18, № 2. С. 202.

184. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979. 248 с.

185. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев: Наукова думка, 1990. 272 с.

186. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. *УМН.* 1981. Т. 36, вып. 5 (221). С. 109—151.

187. Мозер Ю. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды. *УМН.* 1969. Т. 24, вып. 2 (146). С. 165—211.

188. Муминов М.Э. О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра оператора Шредингера трех частиц на решетке. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 159, № 2. С. 299—317.

189. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Гостехиздат, 1951. 256 с.

190. Мышкис А. Д., Самойленко А. М Системы с толчками в заданные моменты времени. *Математический сборник.* 1967. Т. 74, вып. 2. С. 202—208.

191. Насибов Ш. М. О точной константе в одном неравенстве Соболева—Ниренберга и ее приложении к уравнению Шредингера. *Изв. РАН. Серия математика.* 2009. Т. 73, № 3. С. 127—150.

192. Никольский С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. *Изв. АН СССР.* 1943. Т. 7, № 3. С. 147—163.

193. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977. 232 с.

194. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 406 с.

195. Осипов Э. П. Интеграл Фейнмана для экспоненциального взаимодействия в четырехмерном пространстве-времени. I. *Теоретическая и математическая физика.* 1981. Т. 47, № 3. С. 307—314.

196. Павлов Б. С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. I. *Теоретическая и математическая физика.* 1987. Т. 72, № 3. С. 403—415.

197. Панков А. А. Ограниченные и почти-периодические по времени решения одного класса нелинейных эволюционных уравнений. *Математический сборник.* 1983. Т. 121(163), № 1(5). С. 72—86.

198. Пашаев О. К. Релятивистские нелинейные уравнения Шредингера и Бюргрса. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 160, № 1. С. 178—188.

199. Пелчинский А. О некоторых проблемах Банаха. *УМН.* 1973. Т. 28, № 6. С. 67—77.

200. Пелчинский А., Фигель Т. О методе Энфло построения банаховых пространств. *УМН.* 1973. Т. 28, № 6. С. 95—109.

201. Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю. Оператор Гріна—Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь. *УМЖ.* 2009. Т. 61, № 7. С. 948—957.

202. Петрина Д. Я. О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана, теорема существования. *Изв. АН СССР.* 1968. Т. 32. С. 1052—1074.

203. Плисс В. А. Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977.

204. Покутний О. О. Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в банаховому просторі обмежені на всій цілочисельній вісі. *Вісн. Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки.* 2006. Вип. 1. С. 182—188.

205. Покутний О. О. Розв'язки лінійних слабко збурених різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій вісі цілих чисел. *Вісн. Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки.* 2006. Вип. 3. С. 240—245.

206. Покутний О. О. Узагальнені обмежені розв'язки лінійних еволюційних рівнянь в локально-опуклих просторах. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2009. № 2 (98). С. 35—40.

207. Покутный А. А. Новые формулы для нахождения матриц псевдообратных по Муру—Пенроузу. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2010. № 3 (102). С. 120—125.

208. Покутний О. О. Апроксимація узагальнених обмежених розв'язків еволюційних рівнянь з необмеженим оператором. *Нелінійні коливання.* 2011. Т. 14, № 1. С. 93—99.

209. Покутный А. А. Линейные нормально-разрешимые уравнения в банаховых пространствах. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2012. Т. 1(107). С. 146—153.

210. Покутный А. А. Бифуркация двухточечной краевой задачи для уравнения Хилла. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2012. № 4(110). С. 77—85.

211. Покутний О. О. Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше. *Доп. НАН України.* 2013. Вип. 1. С. 19—23.

212. Покутный А. А. Периодические решения уравнения Хилла. *Нелінійні коливання.* 2013. Т. 16, № 1. С. 111—117.

213. Покутний О. О., Семенов В. В. Розв'язки еволюційних рівнянь Соболєва—Гальперна з чистим запізненням. III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика», присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Київ, 2009. С. 57.

214. Покутний О. О., Семенов В. В. Керованість еволюційних рівнянь типу Соболєва—Гальперна з чистим запізненням. International workshop «Problems of decision making under uncertainties»(PDMU-2009). Kamyanets-Podilsky, Ukraine, 2009. P. 95—96.

215. Покутний О. О. Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісн. Київськ. ун-ту.* 2013. Вип. 4. С. 158—161.

216. Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976. 176 с.

217. Попов М. М. Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії Банаха. *Математика сьогодні.* 2007. С. 78—116.

218. Попов В. С. Фейнамновский метод распутывания операторов и теория представлений групп. *УФН.* 2007. Т. 177, № 12. С. 1319—1340.

219. Prigogine N. From Being to Becoming: Time and Complexity in Physical Sciences. Freeman and Co., San Francisco, 1980. 328 p. — Пригожин И. От существующего к возникающему. М.:Наука, 1985. 328 с.

220. Рабинович М. И., Мюезинолу М. К. Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная дуятельность. *УФН.* 2010. Т. 180, № 4. С. 371—387.

221. Радыно А. Я. Линейные уравнения и борнология. Минск: БГУ, 1982. 199 с.

222. Радыно Я. В. Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах. III. Примеры регулярных операторов. *Дифференциальные уравнения.* 1977. Т. 13, № 10. С. 1796—1803.

223. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В 4 т. Т. 1. Функциональный анализ. М.:Мир, 1977. 360 с.

224. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В 4 т. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.:Мир, 1978. 395 с.

225. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М.:Мир, 1967. 257 с.

226. Роговченко Ю. В., Трофимчук С. Р. Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем. *Украинский математический журнал.* 1987. Т. 39, № 2. С. 260—264.

227. Рубан В. П. О нелинейном уравнении Шредингера для волн на неоднородном течении. *Письма в ЖЭТФ.* 2012. Т. 95, вып. 9 С. 550—556.

228. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.:Наука, 1969. 287 с.

229. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$. *Дифференциальные уравнения.* 1975. Т. 11, № 11. С. 1996—2010.

230. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.:Наука, 1987. 303 с.

231. Самойленко А. М. Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$. *УМЖ.* 2001. Т. 53, № 3. С. 356—371.

232. Самойленко А. М. О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду. *Изв. АН СССР. Серия: Математика.* 1972. Вып. 36. С. 209—233.

233. Самойленко А. М. О сохранении инвариантного тора при возмущении. *Изв. АН СССР. Серия: Математика.* 1970. Вып. 34. С. 1219—1240.

234. Самойленко А. М. Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа. *Функциональный анализ и его приложения.* 1968. Т. 2, вып. 4. С. 63—69.

235. Самойленко А. М. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия. *Изв. АН СССР. Серия: Математика.* 1966. Вып. 30. С. 1047—1072.

236. Самойленко А. М., Бойчук А. А., Кривошея С. А. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием. *Украинский математический журнал.* 1996. Т. 48, № 11. С. 1576—1579.

237. Самойленко А. М., Петришин Р. И. Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем. *Изв. АН СССР. Серия: Математика.* 1972. Вып. 36. С. 209—233.

238. Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А. Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем. *Украинский математический журнал.* 2002. Т. 54, № 11. С. 1517—1530.

239. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ:Вища школа, 2000. 294 с.

240. Самойленко А. М., Теплинський Ю.В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь в банахових просторах. *Пр. Ін-ту матем. НАН України. Матемематика та її застосування.* Київ: Ін-тут матем. НАН України, 2008. Вип. 72. 496 с.

241. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287 с.

242. Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией. *Математические заметки.* 1984. Т. 35, № 4. С. 569—577.

243. Сидоров Н. А. Функция «сумма цифр» для некоторых нестационарных систем счисления. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 1997. Т. 240. С. 257—267.

244. Сидоров Н. А., Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях. *Тр. ин-та матем. и мех-ки УрО РАН.* 2010. Т. 16, № 2. С. 226—237.

245. Сидоров Н.А., Синицын А.В. О ветвлении решений системы Власова—Максвелла. *Сибирский математический журнал.* 1996. Т. 37, № 6. С. 1367—1379.

246. Сидоров Н. А., Синицын А. В. Теория индекса в задаче ветвления решений системы Власова—Максвелла. *Математическое моделирование.* 1999. Т. 11, № 9. С. 83—100.

247. Сильченко Ю. Т. Обыкновенный дифференциальный оператор с нерегулярными граничными условиями. *Сибирский математический журнал.* 1986. Т. 27, № 4. С. 93—104.

248. Сильченко Ю. Т., Соболевский П. Е. Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью. *Сибирский математический журнал.* 1986. Т. 4, № 27. С. 93—104.

249. Славнов Н.А. Введение в теорию квантовых интегрируемых систем. Квантовое нелинейное уравнение Шредингера. *Лекционные курсы НОЦ.* 2011. № 18. С. 3—118.

250. Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов. *Математические заметки.* 1987. Т. 42, № 2. С. 262—267.

251. Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно с-непрерывных фукционально-дифференциальных операторов. *УМЖ.* 1989. Т. 41, № 2. С. 201—205.

252. Слюсарчук В. Ю. Задачі Коші з неєдиними розв'язками. *Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Серія: Математика.* 2011. Т. 1, № 4. С. 117—118.

253. Слюсарчук В. Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. Рівне: УДУВГП, 2003. 365 с.

254. Слюсарчук В. Е. Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем. *Украинский математический журнал.* 1983. Т. 35, № 1. С. 109-114.

255. Смирнов В. А. Сингулярности фейнмановских диаграмм в координатном пространстве и α- представление. *Теоретическая и математическая физика.* 1981. Т. 46, № 1. С. 27—32.

256. Смирнов В. А. Инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости коэффициентных функций Фейнмановских диаграмм как функционалов из S'. II. *Теоретическая и математическая физика.* 1981. Т. 46, № 2. С. 199—212.

257. Смирнов А. О. Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шредингера. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2012. № 398. С. 209—222.

258. Станжицький О. М. Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм. *УМЖ.* 2001. Т. 53, № 11. С. 1545—1555.

259. Тинюкова Т. С. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера для квантового волновода. *Вестн. Удмуртского ун-та. Математика.* 2011. Вып. 2. С. 88—97.

260. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1979. 285 с.

261. Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. *Изв. АН. Серия: Математика.* 2003. Т. 67, № 2. С. 133—166.

262. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 495 с.

263. Фадеев Л. Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. *Теоретическая и математическая физика.* 1969. Т. 1, № 1. С. 3—18.

264. Фадеев М. М. О спектральных свойствах дискретного оператора Шредингера с чисто мнимым финитным потенциалом. *Математические заметки.* 2009. Т. 85, вып. 3. С. 451—455.

265. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов. *Алгебра и анализ.* 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173—200.

266. Федотов А. А. Комплексный метод ВКБ адиабатических возмущений периодического оператора Шредингера. *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2010. № 379. С. 142—178.

267. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.

268. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.:Мир, 1970. 352 с.

269. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970. 720 с.

270. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.

271. Хейл Дж. К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

272. Хелемский А. Я. Функциональный анализ. М.:МЦНМО, 2004. 552 с.

273. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.:Мир, 1985. 376 с.

274. Хилле Е., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 832 с.

275. Хуснуллин И. Х. Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке. *ЖВМиМФ.* 2010. Т. 50, № 4. С. 679—698.

276. Ху Сы Цзян. Теория гомотопий. М.:Мир, 1964. 468 с.

277. Чайковський А. В. Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі. *УМЖ.* 2001. Т. 53, № 5. С. 688—693.

278. Чебан Д. Н. Ограниченные решения линейных почти периодических систем дифференциальных уравнений. *Изв. РАН. Серия: Математика.* 1998. Т. 62, № 3. С. 156—174.

279. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебродифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003. 317 с.

280. Чубурин Ю. П. Квазиуровни двухчастичного оператора Шредингера с возмущенным периодическим потенциалом. *Теоретическая и математическая физика.* 2009. Т. 158, № 1. С. 115—125.

281. Чудинович И. Ю., Щербина В. А. Ренормированные Фейнмановские амплитуды для полей с фиксированными массами. *Теоретическая и математическая физика.* 1976. Т. 27, № 1. С. 24—37.

282. Чуешов И. Д. О слабых предельных точках Фейнмановских интегральных произведений. *Функциональный анализ и его приложения.* 1978. Т. 12, № 1. С. 90—91.

283. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова. *Вісн. ХНУ ім. В.Н.Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка.* 2014. № 1120. С. 85—94.

284. Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием. *Прикладная математика и механика.* 1959. Т. 23, № 5. С. 836—844.

285. Ширяев А. Н. Вероятность. М.:Наука, 1989. 640 с.

286. Эдвадс Р.Э. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.

287. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.:Наука, 1971. 296 с.

288. Юдашкин А. А. Бифуркации стационарных решений в синергетической нейронной сети и управление распознаванием образов. *Автоматика и телемеханика.* 1996. № 11. С. 139—147.

289. де ла Яве Р. Введение в КАМ-теорию. М.:Ин-т комп. исслед., 2003. 176 с.

290. Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Функциональный анализ. Баку: Илм., 1967. С. 187—206.

291. Якубов С. Я., Балаев М. К. Корректная разрешимость дифференциально-операторных уравнений на всей оси. *Докл. АН СССР.* 1976. Т. 229, № 3. С. 562—565.

292. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.:Наука, 1972. 718 с.

293. Acosta-Humanez P. B. Darboux integrals for Schrödinger planar vector fields via Darboux transformations. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications.* 2012. Vol. 8 (043). 26 p.

294. Afraimovich V., Young T., Muezzinoglu M. K., Rabinovich M. I. Nonlinear dynamics of emotion-cognition interaction: when emotion does not destroy cognition ? *Bulletin of mathematical Biology*. 2011. Vol. 73. P. 266—284.

295. Akhmerov R. R., Kurbatov V. G. Exponential dichotomy and stability of neutral type equations. *Journal of differential equations*. 1988. Vol. 76. P. 1—25.

296. Alexander J. C., Yorke James A. The homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures. *Transaction of the American mathematical society*. 1978. Vol. 242. P. 271—284.

297. Arlotti L. A new characterization of B-bounded semigroups with applications to implicit evolution equations. *Abstract and Applied Analysis*. 2000. P. 227—244.

298. Asplund E. A non-closed relative spectrum. *Arkiv. för Matematik*. 1958. Vol. 3. P. 425—427.

299. Atiyah M. F. K-theory. New-York, Amsterdam. 1967. 220 p.

300. Banasiak J. B-bounded semigroups and implicit evolution equations. *Abstract and Applied Analysis*. 2000. P. 13—32.

301. Banasiak J. Remarks on the solvability of the inhomogeneous abstract Cauchy problem for linear and semilinear evolution equations. *Quaestiones Mathematicae*. 1999. Vol. 22, N 1. P. 83—92.

302. Barreira L., Valls C. Stable manifolds for nonautonomous equations without exponential dichotomy. *Journal of Differential Equations*. 2006. Vol. 221. P. 58—90.

303. Barreira L., Valls C. Center manifolds for infinite delay. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 247. P. 1297—1310.

304. Barreira L., Valls C. Robustness via Lyapunov functions. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 246. P. 2891—2907.

305. Barreira L. Quadratic Lyapunov functions and nonuniform exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 246. P. 1235—1263.

306. Barreira L., Valls C. Lyapunov sequences for exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 246. P. 183—215.

307. Barreira L., Valls C. Robustness of nonuniform exponential dichotomies in Banach spaces. *Journal of Differential Equations*. 2008. Vol. 244. P. 2407—2447.

308. Barreira L., Valls C. Smooth center manifolds for nonuniformly partially hyperbolic trajectories. *Journal of Differential Equations*. 2007. Vol. 237. P. 307—342.

309. Barreira L., Valls C. Stability in delay difference equations with nonuniform exponential behavior. *Journal of Differential Equations*. 2007. Vol. 238. P. 449—470.

310. Barreira L., Silva C., Valls C. Nonuniform behavior and robustness. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 246. P. 3579—3608.

311. Barreira L., Valls C. Smooth robustness of parametrized perturbations of exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations*. 2010. Vol. 249. P. 2021—2043.

312. Battelli F., Lazzari C. Exponential dichotomies, heteroclinic orbits, and Melnikov functions. *Journal of Differential Equations.* 1990. Vol. 86. P. 342—366.

313. Battelli F. Bounded solutions to singularly perturbed systems of O.D.E. *Journal of Differential Equations.* 1992. Vol. 100. P. 49—81.

314. Battelli F., Palmer K. Transverse intersection of invariant manifolds in singular systems. *Journal of Differential Equations.* 2001. Vol. 177. P. 77—120.

315. Batty Charles J.K., Srivastava Sachi. The non-analytic growth bound of a C_0 -semigroup and inhomogeneous Cauchy problems. *Journal of Differential Equations.* 2003. Vol. 194. P. 300—327.

316. Berezansky L., Braverman E. On exponential dichotomy for linear difference equations with bounded and unbounded delay. Proceedings of the conference on differential and difference equations and applications. 2006. P. 169—178.

317. Berger A., Doan T. S., Siegmund S. A definition of spectrum for differential equations on finite time. *Journal of Differential Equations.* 2009. Vol. 246. P. 1098—1118.

318. Berger M. S., Podolak E. On nonlinear fredholm operator equations. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1974. Vol. 80, N 5. P. 861—864.

319. Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A. Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory. *Abstract and Applied Analysis.* 2011. Article ID 928587. 12 p. http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/

320. Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Boundary-Value Problems for Delay Differential Systems. *Advances in Difference equations.* 2010. Article ID 593834. 20 p.

321. Boichuk A. A. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line. *Nonlinear Oscillations.* 1999. Vol.2 , N. 1. P. 3—10.

322. Boichuk A.A. A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. *Differential Equations.* 2001. Vol.37, N 4. P. 464—471.

323. Boichuk O.A. Criterion of the solvability of matrix Lyapunov type equations. *Ukrainian mathematical journal.* 1998. Vol. 50, N 8. P. 1021—1026.

324. Boichuk A. A., Pokunij A. A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space. *Tatra Mountains Mathematical Publications.* 2007. Vol. 38. P. 29—41.

325. Boichuk A. A., Pokutnyi O. A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line. Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12-15 June 2012, Athens Greece. P. 81—89.

326. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. VSP, Utrecht–Boston. 2004. 317 p.

327. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. 2nd edition. Inverse and Ill-Posed Problems Series 59. Berlin: De Gruyter, 2016. 298 p.

328. Boichuk A. A., Shegda L. M. Singular Fredholm boundary value problems. *Nonlinear Oscillations.* 2007. Vol. 10, N 3. P. 303—312.

329. Boichuk A. A., Shegda L. M. Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems. *Differential equations.* 2011. Vol. 47, N 4. P. 459—467.

330. Boichuk A. A., Shegda L. M. Degenerate nonlinear boundary value problems. *Ukrainian mathematical journal.* 2009. Vol. 61, N 9. P. 1387—1403.

331. Boyadzhiev K. N. Integral represantation of functions on sectors, functional calculus and norm estimates. *Collectania Mathematica.* 2002. Vol. 53, N 3. P. 287—302.

332. Boyarintsev Yu. E., Chistyakov V. F Differential Algebraic Equations: Methods for Numerical Solution and Study. M.:Nauka, Novosibirsk, 1998. 224 p.

333. Brenan K. E., Campbell S. L., and Petzold L. R. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Society for Industrial Applied Mathematics. Philadelphia. 1996. 263 p.

334. Brezis H., Browder F. E. A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis. *Advances in mathematics.* 1976. Vol. 21. P. 355—364.

335. Broer H. Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach. *Journal of Differential Equations.* 2000. Vol. 166. P. 290—327.

336. Broer H. Resonance tongues and instability pockets in the quasiperiodic Hill-Schrodinger equation. *Journal of Differential Equations.* 2003. Vol. 241. P. 467—503.

337. Broer H., Levi M. Geometrical aspects of stability theory for Hill's equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 1995. Vol. 131. P. 225—240.

338. Caliceti E., Cannata F., Graffi S. $\mathcal{PT}$ symmetric Schrödinger operators: reality of the perturbed eigenvalues. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications.* 2010. Vol. 6, N 009. 8 p.

339. Campbell S. L., Petzold L. R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. // — Society for Industrial Applied Mathematics. *Journal on Algebraic and Discrete Methods.* 1983. Vol. 4. P. 517—521.

340. Campbell S. L., Meyer C. D. Continuity properties of the Drazin Pseudoinverse. *Linear algebra and its applications.* 1975. Vol. 10. P. 77—83.

341. Campbell S. L., Meyer C. D. Generalized inverses of linear transformations. Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia. 2009. 272 p.

342. Chang K. W. Almost periodic solutions of singularly perturbed systems of differential equations. *Journal of Differential Equations.* 1968. Vol. 4. P. 300—307.

343. Chow Shui-Nee., Lin Xiao-Biao., Palmer K. A shadowing lemma with applications to semilinear parabolic equations. Society for Industrial Applied Mathematics. *Journal on Mathematical Analysis.* 1989. Vol. 20, N 3. P. 547—557.

344. Chow Shui-Nee. On a conjecture of K. Cooke. *Journal of Differential Equations.* 1973. Vol. 14. P. 307—325.

345. Chicone C., Latushkin L. Evolution semigroup in dynamical systems and differential equations. *Mathematical surveys monography, Providence, RI.* 1999. Vol. 70. 372 p.

346. Chicone C., Swanson R. C. Spectral theory for linearizations of dynamical systems. *Journal of Differential Equations*. 1981. Vol. 40. P. 155—167.

347. Chow Shui-Nee, Lin Xiao-Biao. Smooth invariant foliations in infinite dimensional spaces. *Journal of Differential Equations*. 1991. Vol. 94. P. 266—291.

348. Chow S.-N., Leiva H. Unbounded perturbation of the exponential dichotomy for evolution equations. *Journal of Differential Equations*. 1996. Vol. 129. P. 509—531.

349. Chow S.-N., Leiva H. Existence and roughness of the exponential dichotomy for skew-product semiflow in Banach spaces. *Journal of Differential Equations*. 1995. Vol. 120. P. 429—477.

350. Chueshov I. D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. Kharkiv, Acta. 2002. 416 p.

351. Colonius F., Fabbri R., Johnson R. On nonautonomous H^∞ control with infinite horizon. *Journal of Differential Equations*. 2006. Vol. 220. P. 46—67.

352. Consolini L., Tosques M. A sufficient condition for dichotomy based on a suitable invariance property. *Journal of Differential Equations*. 2011. Vol. 251. P. 1475—1488.

353. Coppel W. A. Dichotomies and reducibility. *Journal of differential equations*. 1967. Vol. 3. P. 500—521.

354. Coppel W. A. Dichotomies and reducibility (II). *Journal of differential equations*. 1968. Vol. 4. P. 386—398.

355. Coppel W. A. Dichotomies and Lyapunov functions. *Journal of Differential Equations*. 1984. Vol. 52. P. 58—65.

356. Corduneanu C. Almost periodic oscillations and waves. Springer Science+Business Media. 2009. 31 p.

357. Crandall M. G., Pazy A., Tartar L. Remarks on generators of analytic semigroups. *Israel Journal of Mathematics*. 1979. Vol. 32, N 4. P. 363—374.

358. Dai Xiongping. Hyperbolicity and integral expression of the Lyapunov exponents for linear cocycles. *Journal of Differential Equations*. 2007. Vol. 242. P. 121—170.

359. Deutch E. Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation. *Linear algebra and its applications*. 1971. Vol. 4. P. 313—322.

360. Diagana Toka. Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces. Springer Switzerland. 2013. 312 p.

361. Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M. Controllability of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay. Soceity of industrial and applied mathematics. *Journal of control optimizations*. 2008. Vol. 47, N 3. P. 1140—1149.

362. Dieci L., Elia C., Vleck E. Exponential dichotomy on the real line : SVD and QR methods. *Journal of Differential Equations*. 2010. Vol. 248. P. 287—308.

363. Dieci L., Elia. C.. The singular value decomposition to approximate spectra of dynamical systems. Theoretical aspects. *Journal of Differential Equations*. 2006. Vol. 230. P. 502—531.

364. Durhuus B., Gayral V. The scattering problem for a noncommutative nonlinear Schrödinger equation. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications*. 2010. Vol. 6 (046). 17 p.

365. Eidelman Y. S., Tikhonov I. V. On periodic solutions of abstract differential equations. *Abstract and applied analysis*. 2001. Vol. 6,8. P. 489— 499.

366. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evoluition equations. New York: Springer-Verlag, 2000. 586 p.

367. Favini A., Yagi A. Space and time regularity for degenerate evolution equations. *Journal of Mathematical Soceity of Japan*. 1992. Vol. 44, N 2. P. 331—350.

368. Feynman R.P. An operator calculus having applications in quantuum electrodynamics. *Physical Review*. 1951. Vol. 84, N 1. P. 108—128.

369. Feshchenko I.S. On closeness of the sum of n subspaces of a Hilbert space. U*krainian mathematical journal*. 2012. Vol. 63, N 10. P. 1566—1622.

370. Glasser M. L., Papageorgiou V. G., Bountis T. C. Melnikov's function for two-dimensional mappings. *Social and applied mathematics*. 1989. Vol. 49, N 3. P. 692—703.

371. Gohberg I., Kaashoek M. A., Schagen F. Finite section method for linear ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*. 2000. Vol. 163. P. 312—334.

372. Goldstein J. A. Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford University Press, 1985. 245 p.

373. Gruendler J. The existence of transverse homoclinic solutions for higher order equations. *Journal of Differentiql Equations*. 1996. Vol. 130. P. 307—320.

374. Gühring G., Răbiger F., Schnaubelt R. A characteristic equation for Non-autonomous partial functional differential equations. *Journal of Differential Equations*. 2002. Vol. 181. P. 439—462.

375. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York, 1983. 559 p.

376. Hamilton R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1982. Vol. 7(1) P. 65—222.

377. Hochstadt H. Instability intervals of Hill's equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1964. Vol. 17. P. 251—255.

378. Huy Nguyen Thieu. Invariant manifolds of admissible classes for semi-linear evolution equations. *Journal of Differential Equations*. 2009. Vol. 246. P. 1820—1844.

379. Johnson R. Cantor spectrum for the quasi-periodic Schrödinger equation. *Journal of Differential Equations*. 1991. Vol. 91. P. 88—110.

380. Johnson R. The recurrent Hill's equation. *Journal of Differential Equations*. 1982. Vol. 46. P. 165—193.

381. Johnson R. Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. *Journal of Differential Equations*. 1986. Vol. 61. P. 54—78.

382. Johnson R., Mahesh Neruvkar. Exponential dichotomy and rotation number for linear Hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations.* 1994. Vol. 108. P. 201—216.

383. Johnson R., Yingfei Yi. Hopf bifurcation from non-periodic solutions of differential equations, II. *Journal of Differential Equations.* 1994. Vol. 107. P. 310—340.

384. Nguyen Thieu Huy, Vu Thi Ngog. Exponential dichotomy of difference equations in l_p—phase spaces on the half-line. *Advances in difference equations.* 2006. article ID58453. P. 1—14.

385. Weinstein M. I., Keller J. B. Asymptotic behavior of stability regions for Hill's equation. *Soceity of industrial and applied mathematics.* 1987. Vol. 47, N 5. P. 941—958.

386. Weinstein M. I., Keller J. B. Hill's equation with a large potentials. *Soceity of industrial and applied mathematics.* 1985. Vol 45. P. 954—958.

387. Khusainov D. Ya.,Shuklin G. V. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Studia Universita Zilina Mathematical Series.* 2003. Vol. 17. P. 101—108.

388. Kovalchuk V., Slawianowski J. J. Hamiltonian systems inspired by the Schrödinger equation. *Soceity of industrial and applied mathematics.* 1985. Vol. 45. P. 954—958.

389. Kostyukova O.I. Optimality criterion for a linear-quadratic problem of optimal control by a descriptor system. *Differencial'nie uravnenia.* 2000. Vol. 36, N 11. P. 1475—1481.

390. Kundu Anjan. Integrable hierarchy of higher nonlinear Schrödinger type equations. *Soceity of industrial and applied mathematics.* 2006. Vol. 2 (078). 12 p.

391. Kunkel P., Mehrmann V Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. European Mathematical Society, 2006. 192 p.

392. Kuzhel A. Characteristic functions and models of nonself-adjoint operators. Kluwer, 1996. 286 p.

393. Laederich S. Boundary value problems for partial differential equations with exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations.* 1992. Vol. 100. P. 1—21.

394. Lan N. T. On the mild solutions of higher-order differential equations in Banach spaces. *Abstract and Applied Analysis.* 2003. Vol. 15. P. 865—880.

395. Latushkin Yu., Tomilov Yu. Fredholm differential operators with unbounded coefficients. *Journal of Differential equations.* 2005. Vol. 208. P. 388—429.

396. Latushkin Yu., Montgomerri Smith., Randolph T. Evolutionary semigroups and dichotomy of linear skew-product flows on locally compact spaces with Banach spaces. *Journal of Differential Equations.* 1996. Vol. 125. P. 73—116.

397. Latushkin Yu., Pogan A. The dichotomy theorem for evolution bi-families. *Journal of Differential Equations.* 2008. Vol. 245. P. 2267—2306.

398. Latushkin Yu., Schnaubelt R. Evolution semigroups, translation algebras, and exponential dichotomy of cocycles. *Journal of Differential Equations.* 1999. Vol. 159. P. 321—369.

399. deLaubenfels R., Wang S. Spectral conditions guaranteeing a nontrivial solution of the abstract Cauchy problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1998. Vol. 126, N 11. P. 3271—3278.

400. deLaubenfels R. Powers of generators of holomorphic semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987. Vol. 99, N 1. P. 105—108.

401. Lazareva A.B., Pakshin P.V. Solution of matrix Lurier, Riccati and Lyapunov equations for digital systems. *Automatika and Telemekhanika*. 1986. N 12. P. 17–22.

402. Levy D. M., Keller J. B. Instability intervals of Hill's equation. *Communications on Pure and applied mathemtics*. 1963. Vol. 16. P. 469—479.

403. Lin Xiao-Biao. Heteroclinic bifurcation and singularly perturbed boundary value problems. *Journal of Differential Equations*. 1990. Vol. 84. P. 319—382.

404. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomy and homoclinic orbits in functional differential equations. *Journal of Differential Equations*. 1986. Vol. 61. P. 54—78.

405. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomies in intermediate spaces with applications to a diffusively perturbed predator-Prey model. *Journal of Differential Equations*. 1994. Vol. 100. P. 36—63.

406. Liao A. P., Bai Z. Z., Lei Yu. Best approximate solution of matrix equation $AXB + CYD = E^*$. Soceity of industrial and applied mathematics. *Journal of Matrix Analysis and Applications*. 2005. Vol. 27, N 3. P. 675—688.

407. Lin Xiao-Biao. Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations. *Journal of Differential Equations*. 1986. Vol. 63. P. 227—254.

408. Lindenstrauss J., Pelczynski A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. *Studia Mathematica*. 1968. Vol.29. P. 275—325.

409. Lojasiewich S. jr., Zehnder E. An inverse function theorem in Frech$\acute{e}$t spaces. *Journal of functional analysis*. 1979. Vol. 33. P. 165—174.

410. Lyashko S. I., Semenov V. V. On a theorem of M.A.Krasnoselski. *Cybernetics and System Analysis*. 2010. Vol. 46, N 6. P. 1021—1025.

411. Luzin N. N. Study of a matrix system in the theory of differential equations. *Avtomatika i Telemekhanika*. 1940. Vol. 5. P. 4—66.

412. Maniar L., Schnaubelt R. The Fredholm alternative for parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary conditions. *Journal of Differential Equations*. 2007. Vol. 235. P. 308—339.

413. Markin M. V. A characterization of the generators of analytic C_0-semigroups in the class of scalar type spectral operators. *Abstract and Applied Analysis*. 2004. Vol. 12. P. 1007—1018.

414. Markin M. V. On a characterization of generators of analytic semigroups in the class of normal operators. *Methods Functional Analysis Topology*. 1996. Vol. 2, N 2. P. 86—93.

415. Martin R. H. Separation of solutions to differential equations. *Journal of differential Equations*. 1973. Vol. 14. P. 213—234.

416. Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. Regional conference series in mathematics, 40. Providence, 1979. 122 p.

417. McKean H. P., P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Mathematica*. 1975. Vol. 30. P. 217—244.

418. McKean H. P., Trubowitz E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1976. Vol. 29. P. 14—226.

419. Melnikova I. V. Regularised solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense. *Integral Transfroms Special Functions*. 2006. Vol. 17, N 2—3. P. 185—191.

420. Moore E. H. On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract). *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1920. Vol. 26. P. 394—395.

421. Muller P.C. Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: a survey. *Applied Mathematics Computer Science*. Vol. 8, N 2. P. 269—286.

422. Murray J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. Springer, New York, 2002. 576 p.

423. Murray J.D. Mathematical Biology: II. Spatial models and biomedical applications. Springer, New York, 2003. 839 p.

424. Naito Toshiki, Nguen van Minh. Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations. *Journal of Differential Equations*. 1999. Vol. 152. P. 358—376.

425. Nakayama Yu. Scrödinger-like dilaton gravity. *Soceity of industrial and applied mathematics*. 2011. Vol. 7 (014). 12 p.

426. Al-Nayef A., Diamond P., Kloeden P., Kozyakin V., Pokrovskii A. Bi-shadowing and delay equations. *Dynamic and stability of systems*. 2010. Vol. 11:2. P. 121—134.

427. Nash J. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annalen Mathematic*. 1956. Vol. 63. P. 20—63.

428. Nashed M. Z., Votruba G. F A unified approach to generalized inverses of linear operators: I. Algebraic, topological and projectional properties. *Bulletin of the American mathematical Soceity*. 1974. Vol. 5. P. 825—830.

429. Nashed M. Z., Votruba G. F. A unified approach to generalized inverses of linear operators: II. Extremal and proximal properties. *Bulletin of the American Mathematical Soceity*. 1974. Vol. 5. P. 831—835.

430. Neubrander F. Integrated semigroups and their applications to the Abstract Cauchy problem. *Pacific Journal of Mathematics*. 1988. Vol. 135, N 1. P. 111—155.

431. von Neumann J. On regular rings. *Proceedings of the American Mathematical Soceity*. 1936. Vol. 22. P. 707—713.

432. Nikitin A. G., Popovych R. O. Group classification of nonlinear Schrödinger equations. Soceity of industrial and applied mathematics. P. 1—11.

433. Moser J. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proceedings of the Nationcal Academy of Science USA*. 1961. Vol. 47. P. 1824—1831.

434. Oharu Shinnosuke. Semigroups of linear operators in a Banach space. *Publications, RIMS, Kyoto University*. 1971/72. Vol. 7. P. 205—260.

435. Ortega R., Tineo A. Resonance and non-resonance in a problem of boundedness. *Proceedings of the American Mathematical Soceity*. 1996. Vol. 124, N 7. P. 2089—2096.

436. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *Journal of Differential Equations*. 1984. Vol. 55. P. 225—256.

437. Palmer K. J. An ordering for linear differential systems and a characterization od exponential separation in terms of reducibility. *Journal of Differential Equations*. 1984. Vol 53. P. 67—97.

438. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *Journal of Differential Equations*. 1984. Vol. 55. P. 225—256.

439. Palmer K. J. The structurally stable linear systems on the half-line are those with exponential dichotomies. *Journal of Differential Equations*. 1979. Vol. 33. P. 16—25.

440. Palmer K. J. Exponential separation, exponential dichotomy and spectral theory for linear systems of ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*. 1982. Vol. 46. P. 324—345.

441. Palmer K. J. An ordering for linear differential systems and a characterization of exponential separation in terms of reducibility. *Journal of Differential Equations*. 1984. Vol. 53. P. 67—97.

442. Palmer K. J. Transversal heteroclinic points and Cherry's example of a nonintegrable Hamiltonian system. *Journal of Differential Equations*. 1986. Vol. 65. P. 321—360.

443. Papaschinopoulos G., Schinas J. Criteria for an exponential dichotomy of difference equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 1985. Vol. 35, N 2. P. 295—299.

444. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York Springer-Verlag, 1983. 279 p.

445. Penrose R. A. Generalized Inverse for Matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Societ*y. 1955. Vol. 51. P. 406—413.

446. Penrose R.A. and Todd J. A. On best approximate solutions of linear matrix equations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1956. Vol. 52. P. 17—19. doi:10.1017/ S0305004100030929

447. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Mathematical Zurnal*. 1930. Vol. 32. P. 138—152.

448. Peterhof D., Sandstade B. Exponential dichotomies for solitary-wave solutions of semilinear elliptic equations on infinite cylinders. *Journal of Differential Equations*. 1997. Vol. 140. P. 266—308.

449. Pinasco J. P. The distribution of nonprincipal eigenvalues of singular second-order linear ordinary differential equations. *International journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2006. Article ID29895. P. 1—7.

450. Pinasco J. P. Lower bounds for eigenvalues on the one-dimensional p-Laplacian. *Abstract and applied mathematics*. 2004. Vol. 2. P. 147—153.

451. Pinto M. Dichotomy and existence of periodic solutions of quasilinear functional differential equations. *Nonlinear analysis*. 2010. Vol. 72. P. 1227—1234.

452. Pogan A., Preda P., Preda C. Schäffer spaces and uniform exponential stability of linear skew-product semiflows. *Journal of Differential Equations*. 2005. Vol. 212. P. 191—207.

453. Pogan A., Preda P., Preda C. Schäffer spaces and exponential dichotomy for evolutionary processes. *Journal of Differential Equations*. 2006. Vol. 230. P. 378—391.

454. Pötzsche Christian. Persistence and imperfection of nonautonomous bifurcation patterns. *Journal of Differential Equations*. 2011. Vol. 250. P. 3874—3906.

455. Pokutnyi A. A. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded linear part. *Differential Equations*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 803—813.

456. Popescu L. H. A topological classification of linear differential equations on Banach spaces. *Journal of Differential Equations*. 2004. Vol. 203. P. 28—37.

457. Prada C. $(L^p(\mathbb{R}_+, X),\ L^q(\mathbb{R}_+, X))$ – admissibility and exponential dichotomies of cocycles. *Journal of Differential Equations*. 2010. Vol. 249. P. 578—598.

458. Da Prato G., Sinestrari E . Differential operators with non dense domain. *Annali della Scuola Normale Superiora Di Pisa*. 1987. Vol. 14. P. 285— 344.

459. Prevatt T. W. Application of exponential dichotomies to asymptotic integration and the spectral theory of ordinary differential operators. *Journal of Differential Equations*. 1975. Vol. 17. P. 444—460.

460. Pron'kin V.S. On quasiperiodic solutions of the matrix Riccati equation. Russian Academy of Sciences. *Izvestiya Mathematics*. 1994. Vol. 43(3) P. 455—470

461. Puig J. Cantor spectrum for the almost Mathieu operator. *Communications on Pure and Mathematical Physics*. 2004. Vol. 244. P. 297—309.

462. Quesne C. Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications*. 2007. Vol. 3 (067). 14 p.

463. Quesne C. Point canonical transformation versus deformed shape invariance for position-dependent mass Schrödinger equations. *Symmetry, integrability and geometry: Methods and applications*. 2009. Vol. 5 (046). 17 p.

464. Rao C. R., Mitra S. K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York: Wiley, 1971. 240 p.

465. Ramm A. G. A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators. *American Mathematical Monthly*. 2001. Vol. 108, N 9. P. 855—860.

466. Rasmussen M. Dichotomy spectra and Morse decompositions of linear nonautonomous differential equations. *Journal of Differential Equations.* 2009. Vol. 246. P. 2242—2263.

467. Roberts M., Stewart I. Singularity theory and its applications. Springer - Verlag Warwick 1989, part II: Singularities, Bifurcations and Dynamics. 322 p.

468. Rodrigues H. M, Ruas-Filho J. G. Evolution Equations: Dichotomies and the Fredholm Alternative for Bounded Solutions. *Journal of Differential Equations.* 1995. Vol. 119. P. 263—283.

469. Rodrigues H. M., Silveria M. On the relationship between exponential dichotomies and the Fredholm alternative. *Journal of Differential Equations.* 1988. Vol. 73. P. 78—81.

470. Ruan S., Zhang W. Exponential dichotomies, the Fredholm alternative, and transverse homoclinic orbits in partial functional differential equations. *Journal of dynamics and differential equations.* 2005. Vol. 17, N 4. P. 759—777.

471. Sacker R., Sell G. Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II. *Journal of Differential Equations.* 1976. Vol. 22. P. 478—496.

472. Sacker R. J. Existence dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, IV. *Journal of Differential Equations.* 1978. Vol. 27. P. 106—137.

473. Sacker R. J. The splitting index for linear differential systems. *Journal of Differential Equations.* 1979. Vol. 33. P. 368—405.

474. Sacker R. J., Sell G. R. Dichotomies for Linear Evolutionary Equaitons in Banach Spaces. *Journal of Differential Equations.* 1994. Vol. 113. P. 17—67.

475. Sakamoto Kunimochi. Estimates on the strength of exponential dichotomies and application to integral manifolds. *Journal of Differential Equations.* 1994. Vol. 107. P. 259—274.

476. Samoilenko A. M., Yakovets V. P. On the reducibility of a singular linear system to central canonical form. *Dokladi Akademii Nauk Ukrainy.* 1993. Vol. 4. P. 10—15.

477. Samoilenko A., Petrishin R. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Springer Netherlands, 2004. 317 p.

478. Schȧffer J. J. Linear differential equations with delays : Admissibility and conditional exponential stability, II. *Journal of Differential Equations.* 1971. Vol. 10. P. 471—484.

479. Schwabik S., Tvrdy M., Veivoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. Praha, Academia, 1979. 245 p.

480. Shvydkoy R. Cocyles and Mane sequences with an application to ideal fluids. *Journal of Differential Equations.* 2006. Vol. 229. P. 49—62.

481. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Continuous and generalized solutions of singular partial differential equations. *Lobachevskii journal of mathematics.* 2005. Vol. 20. P. 31—45.

482. Siegmund S. Normal forms for nonautonomous differential equations. *Journal of Differential Equations.* 2002. Vol. 178. P. 541—573.

483. Traple Janusz. Weak almost periodic solutions of differential equations. *Journal of Differential Equations*. 1982. Vol. 45. P. 199—206.
484. Veivoda O. On Perturbed Nonlinear Boundary Value Problems. *Checoslobac Mathematical Journal*. 1961. Vol. 11. P. 323—364.
485. Wexler D. On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems. *Annalen Vft. Mathematic pura et Applied*. 1968. Vol. 80. P. 123—136.
486. Vinograd R. E. Exact bounds for exponential dichotomy roughness I. Strong dichotomy. *Journal of Differential Equations*. 1988. Vol. 71. P. 63—71.
487. Vinograd R. Exact bounds for exponential dichotomy roughness II. An example of attainability. *Journal of Differential Equations*. 1991. Vol. 90. P. 203—210.
488. Vinograd R. E. Exact bounds for exponential dichotomy roughness III. Semistrong dichotomy. *Journal of Differential Equations*. 1991. Vol. 91. P. 245—267.
489. Wyss Christian. Perturbation theory for Hamiltonian operator matrices and Riccati equations. Dissertation, Bern. 2008. 164 p.
490. Yagi A. Abstract parabolic equations and their applications. Berlin: Springer, 2010. 581 p.
491. Yingfei Yi, Wenxian Shen. Asymptotic almost periodicity of scalar parabolic equations with almost periodic time dependence. *Journal of Differential Equations*. 1995. Vol. 122. P. 373—397.
492. Wu Jiongyu, Zhang Weinan. Homoclinic orbits on invariant manifolds of a functional differential equation. *Journal of Differential Equations*. 2000. Vol. 165. P. 414—429.
493. Yanguang (Charles) Li. Chaos and shadowing lemma for autonomous systems of infinite dimensions. *Journal of dynamics and differential equations*. 2003. Vol. 15, N 4. P. 699—729.
494. Yingfei Yi. Stability of integral manifold and orbital attraction of quasi-periodic motion. *Journal of Differential Equations*. 1993. Vol. 103. P. 278—322.
495. Yingfei Yi. A generalized integral manifold theorem. *Journal of Differential Equations*. 1993. Vol. 102. P. 153—187.
496. Zehnder E. An implicit function theorem for small divisor problems. *Bulletin of the American Mathematical Soceity*. 1974. Vol. 80, N 1. P. 174—179.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОЙЧУК Олександр Андрійович
ПОКУТНИЙ Олександр Олексійович

НОРМАЛЬНО-РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2022

Художнє оформлення *О.В. Харук*
Художній редактор *І. П. Савицька*
Технічний редактор *Т. С. Березяк*
Комп'ютерна верстка *Л. В. Багненко*

Підп. до друку 07.09.2022. Формат 70 × 100/16. Папір офс. № 1.
Гарн. Computer Modern. Друк. офс. Ум. друк. арк. 18,2.
Обл.-вид. арк. 12,0. Тираж 100 прим. Зам. № ДФ 1214

Оригинал-макет виготовлено
у НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво Фенікс»
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13^{б}
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 271 від 07.12.2000 р.