НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Препринт 2016.5

Бондар І., Покутний О.

Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі

Київ-2016

УДК 517.9

Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі/ Бондар І, Покутний О. -Київ, 2016.-35с.-(Препр./ НАН України. Ін-т математики; 2016.5)

У рамках науково-дослідної роботи проведено дослідження з теорії крайових задач операторно-диференціальних рівнянь, що моделюють фізико-технічні та біологічні задачі.

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор, член кореспондент НАН України, Бойчук О.А.

доктор фізико-математичних наук, професор, Семенов В.В.

Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики НАН України

1. Основні наукові результати

У рамках науково-дослідної роботи проведено дослідження з теорії крайових задач операторно-диференціальних рівнянь, що моделюють фізико-технічні та біологічні задачі[1].

Основними результатами є наступні:

- Використовуючи принцип стискаючого відображення Банаха-Каччіополі-Пікара та теорію ступеня відображення із застосуванням ергодичної теорії, встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабко нелінійних операторних рівнянь у просторах Фреше, Банаха та Гільберта. Побудовано теорію збурень у відповідних просторах. Використовуючи методи Ньютона та їх модифіковані методи прискореної збіжності, отримано ітераційний процес побудови розв'язку.

- Досліджено двоточкову крайову задачу для операторно-диференціального рівняння типу Ляпунова і у критичному (резонансному) випадку, яка виникає у теорії оптимального керування для матричних диференціальних рівнянь Ріккаті та рівнянь типу Ляпунова. Досліджено задачу за припущення, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нормально-розв'язним (зокрема, нетеровим або фредгольмовим). Запропоновано підхід до знаходження її розв'язку за допомогою теорії псевдообернених матриць та операторів. Знайдено умову розв'язності таких задач.

- При дослідженні умов біфуркації розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом встановлена достатня умова розв'язності та, використовуючи метод Вішика-Люстерника, побудовано загальний вигляд розв'язку цієї задачі. За-

[1]Робота підтримана грантом Президента України для молодих учених

пропоновано новий підхід до розгляду імпульсних крайових задач, який спрощує процес дослідження умов розв'язності.

- Використовуючи апарат теорії псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів та метод простої ітерації, встановлено необхідну, достатню умови розв'язності та зв'язок між ними, для слабко нелінійних імпульсних інтегро-диференціальних систем та крайових задач для них. Запропоновано алгоритм побудови розв'язку.

- Отримано необхідні та достатні умови розв'язності слабко нелінійно-збуреної крайової задачі для нелінійного операторно-диференціального рівняння Ріккаті в просторі Гільберта на відрізку та на всій осі. Шукаються такі розв'язки крайової задачі, які обертаються в один з розв'язків породжуючої лінійної задачі, коли немає нелінійного збурення. Розв'язки породжуючої задачі будуються за допомогою введеного узагальненого оператора Гріна. Для слабко нелінійного рівняння побудовано ітераційний процес знаходження розв'язків, що збігається до шуканого розв'язку.

2. Слабко збурені крайові задачі для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом

При математичному моделюванні еволюції реальних процесів з короткочасовими збуреннями часто їх тривалістю можна знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація приводить до необхідності дослідження динамічних систем з розривними траекторіями або, як їх часто називають, диференціальні системи з імпульсним впливом.

М. М. Крилов та М. М. Боголюбов [1] показали, що при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом можна успішно застосовувати асимптотичні методи нелінійної механіки. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом почалося у роботах А. Д. Мишкіса, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [9], А. Халаная, Д. Векслера [6]. У подальшому, ідеї, закладені у цих роботах, отримали свій розвиток та узагальнення у численних публікаціях [11, 12, 13, 15, 16, 21]. Стало зрозуміло, що теорію диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати і для дослідження розв'язності систем інтегро-диференціальних рівнянь [19, 26, 27]. Такий напрям у теорії інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і буде предметом дослідження даного розділу. Використовуючи результати, отримані у роботах [4, 15, 17, 26, 27], з'ясуємо умови розв'язності та структуру розв'язків таких задач.

У роботі [29] розглянуто задачу про достатню умову розв'язності слабко збуреної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним

впливом у фіксований момент часу:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t)+ \\ +\varepsilon\int\limits_a^b \Big[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)\Big]ds,\ t \neq \tau_i, \\ \Delta E_i x\mid_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon A_{1i}x(\tau_i - 0),\ i = 1, ..., p,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot, \varepsilon)\ \in\ \mathbb{R}^q. \tag{2}$$

Тут $A(t), B(t)$, $\Phi(t)$, $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ — $(m \times n)$, $(m \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times n)$, $(n \times n)$ — вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, S_i — $(k_i \times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор стовпчик констант, $\operatorname{rank}(E_i + S_i) = k_i$ $(i = 1, 2, ..., p)$, тобто розв'язок системи (1) визначається однозначним продовженням через точки розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i\big(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)\big), \tag{3}$$

тут імпульс задається не по всіх компонентах невідомої n-вимірної вектор-функції $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_{k_i}(t), ..., x_n(t))$, а лише по k_i її компонентах; ℓ — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a;b]$, $\ell = col(\ell_1, \ell_2, \ell_3, .., \ell_p) : D_2[a;b] \to \mathbb{R}^p$; $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$.

Розв'язок $x(t) = x(t, \varepsilon)$ імпульсної крайової задачі (1), (2) визначений у такому класі:

$$\begin{gathered}x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b],\ x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0], \\ t \in [a,b],\ \tau_i \in (a,b).\end{gathered}$$

Паралельно зі слабко збуреною імпульсною крайовою задачею (1), (2) розглядається наступна породжуюча імпульсна крайова задача ($\varepsilon = 0$):

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t),\quad t \neq \tau_i, \\ \Delta E_i x\mid_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i,\quad i = 1, ..., p,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \alpha \ \in \ \mathbb{R}^q. \tag{5}$$

Припускається, що породжуюча задача (4), (5) не має розв'язків при певних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ та $\alpha \in \mathbb{R}^p$.

Імпульсну умову можна представити як внутрішню крайову [4, 27, 28] увівши k-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал

$$\begin{gathered}\varphi = col(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p): \ D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^k, \\ \varphi_i: \ D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k_i}, \\ k := k_1 + k_2 + ... + k_p, \quad i = 1, 2, ..., p,\end{gathered}$$

де

$$\begin{cases} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1)x(\tau_1-) \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2)x(\tau_2-) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p)x(\tau_p-), \end{cases} \tag{6}$$

яка буде мати наступний вигляд

$$\varphi x(\cdot,\varepsilon) = \gamma + \varepsilon A_1 x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{R}^k. \tag{7}$$

Тут $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p) \in \mathbb{R}^k$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, $A_1 = [A_{11}, A_{12}, ..., A_{1i}, ..., A_{1p}]$ — $(k \times np)$ блочно-діагональна матриця, A_{1i} — $(k_i \times n)$-вимірна матриця.

Тепер введемо обмежений лінійний $(k+q)$-вимірний векторний функціонал

$$\mathfrak{L} := \left[\begin{array}{c} \varphi \\ \ell \end{array}\right] : D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k+q}$$

і запишемо імпульсну (1) та крайову (2) умови у наступній формі:

$$\mathfrak{L} x(\cdot,\varepsilon) = \delta + \varepsilon \mathfrak{L}_1 x(\cdot,\varepsilon),$$

де $\delta := \left[\begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{k+q}$, $\mathfrak{L}_1 := \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \ell_1 \end{array}\right] : D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I}) \to \mathbb{R}^{k+q}$ — обмежений лінійний $(k+q)$-вимірний векторний функціонал.

Таким чином ми отримали слабко збурену крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь, яка відповідає слабко збуреній імпульсній крайовій задачі (1), (2):

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds =$$

$$f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b \Big[K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)\Big] ds, \quad (8)$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot,\varepsilon) = \delta + \varepsilon \mathfrak{L}_1 x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k+p}, \quad (9)$$

$$t \in [a,b] \backslash_{\{\tau_i\}_I}, \tau_i \in (a,b), \quad i = 1, ..., p, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_*].$$

Відповідна породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має вигляд:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \quad (10)$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot,\varepsilon) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}. \quad (11)$$

Відповідно до [24, 17], використовуючи теорію псевдообернених операторів та метод Вішика–Люстерника, [8] ми можемо сформулювати наступний критерій розв'язності крайової задачі (10), (11).

Теорема 1. *Припустимо, що слабко збурена крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом* (1), (2) *задовольняє наведені вище умови і породжуюча імпульсна крайова задача* (4), (5) *є нерозв'язною для деяких неоднорідностей* $f(t) \in L_2[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^q$ *та* $\gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, $i = 1, .., p$. *Тоді, якщо виконано умову:*

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{bmatrix} = 0,$$

то слабко збурена імпульсна крайова задача (1), (2) *буде мати принаймні один розв'язок у вигляді абсолютно збіжного ряду при фіксованому* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j x_j(t, c_j).$$

Коефіцієнти $x_j(t, c_j)$ *мають наступний вигляд:*

$$x_j(t, c_j) = X_{r_2}(t)c_j - \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\Big(\delta_j - \mathfrak{L}F_j(\cdot)\Big) + F_j(t),$$

$$c_j = B_0^+ g_{j+1}, \quad c_j \in \mathbb{R}^{r_2}, \quad j = 0, 1, 2...$$

Компоненти $F_j(t)$, g_{j+1} та всі складові (1)-(11) детально описані у роботі І. А. Бондар [29] відповідно.

Наслідок 1. *Якщо при довільних* $i = 1, .., p$, $E_i := E$ — $(n \times n)$ — *вимірна матриця і* γ_i *n-вимірний вектор стовпчик, тоді імпульсна умова в* (1) *має вигляд стандартної імпульсної умови* (див. [9, 11, 12, 17])*:*

$$\Delta x \mid_{t=\tau_i} := x(\tau_i+) - x(\tau_i-) = S_i x(\tau_i-) + \gamma_i + \varepsilon A_{1i} x(\tau_i-), \quad i = 1, ..., p.$$

Наслідок 2. *Якщо* $E_1 = (1, 0, ..., 0), ..., E_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0), ...,$ $i = 1, ..., p$, $p \leq n$ *і* S_i — $(1 \times n)$ *вектори, тоді імпульсна умова в* (1) *буде задаватися лише по відповідних компонентах невідомої вектор-функції* $x(t) = \mathrm{col}\big(x_1(t), ..., x_i(t), ..., x_n(t)\big)$:

$$\triangle E_i x \mid_{t=\tau_i} := x_i(\tau_i+) - x_i(\tau_i-), \quad i = 1, ..., p.$$

3. Слабко нелінійні імпульсні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь

Умови існування розв'язків систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь та крайових задач для них вивчались у роботах [22, 23, 24, 25, 26]. Для таких систем в препринті розвинуто загальну теорію та розроблено ефективні методи знаходження розв'язків за допомогою теорії псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць [17]. Досліджено умови існування та запропоновано ітераційні алгоритми побудови розв'язків крайових задач для слабко нелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.

Розглянуто слабко нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксований момент часу:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \quad (12)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (13)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a,b], \tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p,$$

та крайовою умовою

$$\ell x(\cdot) = \alpha + \varepsilon J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \;\; \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (14)$$

Будемо використовувати припущення і позначення запропоновані у роботі [26] і у попередньому розділі. Додамо лише наступні визначення: $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційована по x в околі породжуючого розв'язку, інтегровна по t і неперервна по ε:

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \mu], \; Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b],$$

$$Z(x(t,\cdot),t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0];$$

$J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійні обмежені, відповідно, p, q-вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовані по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Покажемо, що досліджувати задачу з імпульсним впливом (12)-(14) можна, розглядаючи її як внутрішню крайову задачу ("interface BVP's"[4]).

Для того, щоб показати цей зв'язок, введемо $\varphi x(\cdot)$ — k–вимірний лінійний обмежений векторний функціонал

$$\varphi := col(\varphi_1, ..., \varphi_p) : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^k, \quad k := k_1 + k_2 + ... + k_p,$$

$$\varphi_i : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to \mathbb{R}^{k_i}, \ (i = 1, ..., p)$$

наступним чином

$$\begin{cases} \varphi_1 x := E_1 x(\tau_1+) - (E_1 + S_1)x(\tau_1-) \\ \varphi_2 x := E_2 x(\tau_2+) - (E_2 + S_2)x(\tau_2-) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_p x := E_p x(\tau_p+) - (E_p + S_p)x(\tau_p-), \end{cases} \tag{15}$$

та запишемо імпульсну дію (13) як крайову умову

$$\varphi x(\cdot) = \gamma + \varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{16}$$

де $\gamma = col(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p) \in \mathbb{R}^k, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}$.

Об'єднаємо таким чином отриману внутрішню крайову умову (16) із заданою крайовою умовою (14) і отримаємо $(k+q)$ умов на невідому n-вимірну вектор-функцію $x(t)$:

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \in R^{k+q}, \tag{17}$$

де

$$\mathfrak{L} := \begin{bmatrix} \varphi \\ \ell \end{bmatrix}, \ \delta := \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \delta \in R^{k+q}, \ J(x(\cdot,\varepsilon)) := \begin{bmatrix} J_1(x(\cdot,\varepsilon)) \\ J_2(x(\cdot,\varepsilon)) \end{bmatrix}.$$

Тепер слабко нелінійну імпульсну крайову задачу (12)-(14) можна розглядати як слабко нелінійну крайову задачу (12), (17). Аналогічно, як у роботах [23, 26], можна встановити необхідну та достатню умови розв'язності та зв'язок між ними для отриманої таким чином слабко нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь (12), (17). Отже, шукаємо розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (12),(17), визначений у такому класі вектор-функцій

$$x = x(t): \quad x(\cdot) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(\cdot) \in L_2[a,b].$$

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a,b], \ x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

і який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t), \tag{18}$$

$$\mathfrak{L}x(\cdot) = \delta \in \mathbb{R}^{k+q}, \tag{19}$$

яка детально розглянута у роботі [14]. Справедливим є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \leq (p, r_1)$. *Тоді однорідна крайова задача* (18), (19) $(f(t) = 0, \delta = 0)$ *має* r *лінійно-незалежних розв'язків вигляду:*

$$x(t, c_r) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_r} c_r, \ c_r \in \mathbb{R}^r,$$

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D, \ r = r_1 - \operatorname{rank} Q.$$

Неоднорідна крайова задача (18), (19) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) = 0, \tag{20}$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D, \ d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q,$$

та має r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків:*

$$x(t,c_r) = \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}P_{Q_r}c_r + \\ \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot)) + F(t),\ \forall c_r \in \mathbb{R}^r, \quad (21)$$

які визначені у наступному класі вектор-функцій:

$$x = x(t): \quad x(\cdot) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{x}(\cdot) \in L_2[a,b].$$

Тут $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$, $\Psi(t) = \int\limits_a^t \Phi(s)ds$ — відповідно, $n \times (m+n)$ та $n \times m$ вимірні матриці; $D = \Big[I_m - \int\limits_a^b \Big[A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)\Big]ds, -\int\limits_a^b A(s)ds\Big]$ — $m \times (m+n)$ вимірна матриця, $\tilde{f}(t) = \int\limits_a^t f(s)ds$, $\tilde{b} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)\Big]ds$, $F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$, I_m, I_n — одиничні матриці відповідних порядків; P_D, P_{D^*} — $(m+n) \times (m+n)$, $m \times m$ -вимірні матриці, відповідно, ортопроектори на ядро та коядро матриці D; $P_{D_{r_1}}$ $(P_{D^*_{d_1}})$ — матриця, яка складається із повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці ортопроектора P_D (P_{D^*}). Матриця Q — $(k+q) \times r_1$ вимірна і побудована згідно з [14]; D^+ (Q^+) — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до D (Q) матриця. P_Q, P_{Q^*}, відповідно, $r_1 \times r_1$, $(k+q) \times (k+q)$ вимірні матриці, ортопроектори на ядро та коядро матриці Q; P_{Q_r} $(P_{Q^*_{d_2}})$ — матриця, яка складається з повної системи r (d_2) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці P_Q (P_{Q^*}).

Далі, розв'язок (21) породжуючої крайової задачі (18),(19) $x(t,0) = x_0(t,c_r)$ будемо називати *породжуючим розв'язком* слабко нелінійної імпульсної крайової задачі (12)-(14), де $c_r \in \mathbb{R}^r$ — невідомий вектор констант, який буде визначений нижче.

Розглянуто критичний випадок, коли відповідна однорідна $(f(t) = 0,\ \delta = 0)$ породжуюча крайова задача (18),(19) має нетривіальні розв'язки $x(t,c_r) = x_0(t,c_r)$, які визначаються формулою (21). Спочатку встановимо ***необхідну умову*** розв'язності крайової задачі (12), (17). Справедливим буде наступне твердження.

Теорема 3. (Необхідна умова). *Нехай слабко нелінійна імпульсна крайова задача* (12)-(14) *має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$, *такий, що:*

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],\ x(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$$

і, який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r)$ (21) *з константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$.

Тоді вектор констант c_r^0 *обов'язково повинен бути дійсним коренем системи рівнянь:*

$$P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Bigg[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + B(s) \int\limits_a^b K(s, \tau) Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0) d\tau \Bigg] ds = 0, \quad (22)$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \Bigg\{ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - \mathfrak{L} \Bigg(\int\limits_a^{\cdot} \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \Bigg[A(t) \int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds d\tau + \\ + B(t) \int\limits_a^b K(t, s) Z(x_0(s, c_r^0), s, 0) ds \Bigg] dt \Bigg) \Bigg\} = 0, \quad (23)$$

$$d_1 = m - \operatorname{rank} D,\ d_2 = k + q - \operatorname{rank} Q.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.5 [8] та теореми 5.4 [17]. У випадку періодичних задач константа c_r^0 має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, тому у класичній періодичній задачі відповідне рівняння для систем звичайних диференціальних рівнянь називають рівнянням для породжуючих амплітуд [5, 7]. За аналогією, будемо називати систему рівнянь (22), (23) — *системою рівнянь для породжуючих вектор-констант* імпульсної крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь (12)-(14).

Якщо система рівнянь (22), (23) розв'язна, то вектор $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ визначає той породжуючий розв'язок (21) $x(t, c_r) = x_0(t, c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t, \varepsilon)$ вихідної імпульсної крайової задачі (12)-(14) (а це те саме, що розв'язок внутрішньої крайової задачі (12), (17)) при $\varepsilon = 0$. Якщо ж система рівнянь (22), (23) не має розв'язку, то й імпульсна крайова задача (12)-(14) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні корені рівняння для породжуючих констант (22), (23). Таким чином, необхідна умова розв'язності імпульсної крайової задачі (12)-(14) полягає у тому, щоб система рівнянь (22), (23) мала хоча би один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$.

Для отримання ***достатньої умови*** існування зробимо заміну змінних у внутрішній крайовій задачі (12), (17):

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon),$$

де $y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \dot{y}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],\ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $y(t, 0) = 0$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 4. (Достатня умова). *Нехай породжуюча крайова задача* (18), (19) *при виконанні умов* (22), (23) *має r-параметричну сім'ю розв'язків* (21) ($r = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q$). *Тоді для кожного дійсного значення вектора $c_r = c_r^0 \in R^r$, що задовольняє систему рівнянь* (22), (23) *для породжуючих констант та при умові:*

$$\operatorname{rank} B_0 = d_1 + d_2, \tag{24}$$

слабко нелінійна крайова задача (12)-(14) *має хоча б один розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$:*

$$x(\cdot, \varepsilon) \in D_2([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b],\ x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$ (21) *і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу та формулою $x_k(t, \varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y_k(t, \varepsilon),\ (k = 0, 1, 2, ...)$.*

Тут $(d_1+d_2)\times r$-вимірна матриця

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s)\Big]ds \\ \\ P_{Q^*_{d_2}}\Big\{\mathfrak{L}_1 X_r(\cdot) - \mathfrak{L}F_0^1(\cdot)\Big\} \end{bmatrix},$$

$P_{B_0^*}$ —$(d_1+d_2)\times(d_1+d_2)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір $R^{d_1+d_2}$ на нуль-простір $N(B_0^*)$. Збіжний ітераційний процес, який визначає розв'язок задачі (12)-(14), та складові компоненти детально описані у відповідній роботі І. А. Бондар[2].

Аналогічно до [17, 25, 26] можна показати зв'язок між необхідною та достатньою умовами існування розв'язку задачі (12)-(14). Справедливе наступне твердження.

Теорема 5. *Для того, щоб слабко нелінійна імпульсна крайова задача для систем інтегро-диференціальних рівнянь* (12)–(14) *мала розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],\ x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (21) *з константою* $c_r = c_r^0 \in R^r$ $(r = m+n-\operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q)$, *необхідно, щоб вектор* c_r^0 *був дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих векторів* (22), (23) *та достатньо, щоб виконувалася наступна умова:*

$$\operatorname{rank}\Big\{B_0 := \frac{\partial \bar{F}(c_r)}{\partial c_r}\Big\}|_{c_r=c_r^0} = d_1+d_2.$$

Більше того, якщо $k+q=r_1$, *тоді остання умова означає, що вектор* $c_r = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ *є простим коренем системи рівнянь для породжуючих векторів* (22), (23).

[2] *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes, 2016 (in print)

4. Теорія розгалуження розв'язків операторних рівнянь

У цій частині досліджуються задачі про існування неявних функцій [30]. Багато задач математичної фізики зводяться до розв'язання нелінійних рівнянь чи систем рівнянь виду

$$\mathcal{F}(x,h)=0, \tag{25}$$

де $\mathcal{F}(x,h)$ – нелінійний оператор, визначений і неперервний (достатньо гладкий, аналітичний) в околі $w=w(x_0,h_0)\subset E_1+E$ відомого розв'язку $x=x_0$ при $h=h_0$ зі значеннями в E_2; E_1,E_2,E – простори Фреше ($\mathcal{F}: w(x_0,h_0)\subset E_1\times E\to E_2$). Необхідно побудувати розв'язок $x=x(h)$ рівняння (25) в околі w точки (x_0,h_0). Якщо похідна Фреше $\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ існує і є оборотним оператором, то в околі w, як випливає з класичної теореми про неявну функцію, існує єдиний неперервний (гладкий, аналітичний) розв'язок $x=x_0+y(h-h_0)$. Теорія розгалуження розглядає питання про існування й кількість малих розв'язків $y(h-h_0)$, а також побудову їх асимптотики за малим параметром $h-h_0$ у тому випадку, коли оператор $B=-\mathcal{F}_x(x_0,h_0)$ має нетривіальний підпростір нулів $N(B)$, тобто не виконуються припущення класичної теореми про неявну функцію. В околі $w(x_0,h_0)$ може існувати декілька розв'язків чи множина розв'язків, залежних від одного або декількох параметрів; (x_0,h_0) називається тоді точкою розгалуження розв'язків рівняння (25). У подальшому будемо для зручності вважати, що $x_0=0, h_0=0$. Тоді (25) можна записати у вигляді

$$Qx=R(x,h), R(0,0)=0, \tag{26}$$

за припущення на нелінійність: $R_x(0,0)=0$ (похідна Фреше за першою змінною). Якщо $h=\lambda$ – числовий параметр і при всіх можливих значеннях λ: $R(0,\lambda)=0$, то рівняння (26) називається задачею про точки

біфуркації. Точками біфуркації є ті значення параметра λ, в околі яких існують нетривіальні розв'язки рівняння. Основи теорії розгалуження функціональних рівнянь було закладено на початку XX сторіччя у роботах видатних математиків О. М. Ляпунова й Е. Шмідта. Дослідження О. М. Ляпунова були пов'язані з відомою задачею про рівноважні фігури, а Е. Шмідта – з загальною теорією лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь. Відзначимо також, що якщо $N(Q)$ скінченновимірне, то в такому випадку ця задача досліджувалась Вайнбергом М. М. з допомогою леми Шмідта для фредгольмових та нетерових операторів. Метод, що застосовується при розв'язанні задач теорії розгалуження, дістав назву методу Ляпунова-Шмідта.

Надалі розглядається нелінійне рівняння вигляду

$$Qx = hR(x, h), \tag{27}$$

в просторах Фреше E_1 та E_2 з неперервною нелінійністю $R(x, h)$, що задовольняє умову $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$ (похідна в сенсі Фреше за першою змінною існує в околі $(0, 0)$). Задача полягає у відшуканні такого розв'язку $x = x(h)$, який при $h = 0$ обертається в один з розв'язків породжуючої задачі $Qx = 0$ і визначений та неперервний в околі цього розв'язку. Необхідні та достатні умови існування розв'язків рівняння (27) отримано в наступному вигляді [30].

Теорема 6. (Необхідна умова). *Нехай рівняння (27) має неперервний розв'язок $x = x(h)$, який при $h = 0$ обертається в один з розв'язків породжуючої задачі $P_{N(Q)}c$ з елементом $c = c_0 \in E_1$. Тоді c_0 повинен задовольняти рівняння для породжуючих елементів*

$$F(c) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c, 0) = 0. \tag{28}$$

Рівняння для породжуючих елементів є аналогом рівняння для породжуючих амплітуд у випадку періодичної крайової задачі. Показано, що достатня умова існування розв'язків рівняння (27) отримується з використанням оператора $B_0 = P_{N(Q^*)}lP_{N(Q)}$, де лінійний оператор l визначений за наступним правилом $ly(h) = R_x(P_{N(Q)}c_0, 0)y(h)$.

Теорема 7. (Достатня умова). *Нехай виконуються умови:*

1. B_0, Q *- узагальнено-оборотні оператори;*

2. $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0 \in E_1$*, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (28), існує неперервний в околі елемента* c_0 *розв'язок рівняння (27). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -B_0^- P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h), h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h), h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h) - R(P_{N(Q)}c_0, 0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = Q^- R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0, 0) = 0,$$

$$y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0.$$

Наслідок 3. *Нехай* $F(c)$ *має похідну Фреше для кожного елементу* $c = c_0$ *простору* E_1*, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (28). Якщо похідна Фреше* $F^{(1)}(c_0) = B_0$ *є обмеженим оборотним оператором, то рівняння (27) має єдиний розв'язок в околі елемента* $c_0 \in E_1$.

Використовуючи запропоноване поняття сильного узагальнено-оберненого оператора, можна довести більш загальні твердження.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови:*

1. Q *та* B_0 *– сильні* (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) *- узагальнено-оборотні оператори відповідно;*

2. $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$.

Тоді для довільного елемента $c = c_0$*, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (28), існує неперервний узагальнений розв'язок* $x(h)$ *рівняння (27). Цей розв'язок можна знайти за допомогою збі-*

жного ітераційного процесу

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -B^{-}_{0X_2,Y_2}P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h),h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h),h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h),h) - R(P_{N(Q)}c_0,0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = Q^{-}_{X_1,Y_1}R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h),h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0,0) = 0,$$

для $y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0$*;* $B^{-}_{0X_1,Y_1}, B^{-}_{X_2,Y_2}$ *– сильні узагальнено-обернені оператори.*

Якщо розглядати те саме рівняння, але визначене у просторах Гільберта $E_1 = H_1, E = H, E_2 = H_2$, то за рахунок наявності скалярного добутку результат спрощується до наступного:

Наслідок 4. *Нехай* $P_{N(B_0^*)}P_{N(Q^*)} = 0$*. Тоді для довільного елемента* $c = c_0$*, що задовольняє рівняння для породжуючих елементів (28), існує неперервний узагальнений розв'язок* $x(h)$ *рівняння (27). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу*

$$\begin{cases} y_{k+1}(h) = P_{N(Q)}c_k(h) + \overline{y}_k(h), \\ c_{k+1}(h) = -\overline{B}_0^{+}P_{N(Q^*)}\{\mathcal{R}(y_k(h),h) + l\overline{y}_k(h)\}, \\ \overline{y}_{k+1}(h) = G[y_k(h)], \end{cases}$$

$$\mathcal{R}(y_k(h),h) = R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h),h) - R(P_{N(Q)}c_0,0) - ly_k(h),$$

$$x_k(h) = P_{N(Q)}c_0 + y_k(h), \quad x(h) = \lim_{k\to\infty} x_k(h),$$

$$G[y_k(h)] = \overline{Q}^{+}R(P_{N(Q)}c_0 + y_k(h),h),$$

$$F(c_0) = P_{N(Q^*)}R(P_{N(Q)}c_0,0) = 0,$$

для $y_0(h) = 0, c_0(h) = 0, \overline{y}_0(h) = 0$*;* $\overline{B}_0^{+}, \overline{Q}^{+}$ *– сильні псевдообернені за Муром-Пенроузом оператори.*

5. Крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторах Банаха та Гільберта

Крайовим задачам для диференціальних рівнянь як в скінченновимірних, так і нескінченновимірних просторах присвячена величезна кількість робіт. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова. Його розглядають як в матричному, так й операторному випадках [35], [36], [37]. В даній частині розглядається крайова задача для операторно-диференціального рівняння типу Ляпунова у просторі Банаха й у тому випадку, коли відповідна задача може мати не єдиний розв'язок. Дана робота присвячена дослідженню рівняння типу Ляпунова у просторі Банаха у регулярному й нерегулярному випадках.

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{29}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{30}$$

де $Z = Z(t)$ є невідомою оператор-функцією; $A, B \in \mathcal{L}(B_1)$ – лінійні обмежені оператори, що діють з простору Банаха B_1 в себе; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервне відображення відрізка $[a; b]$ у простір $\mathcal{L}(B_1)$, $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(B_1))$; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ у простір Банаха B_2, тобто $\ell : C([a; b]; \mathcal{L}(B_1)) \to B_2$, α – елемент простору B_2.

Матричне рівняння такого вигляду відіграє важливу роль у теорії лінійних Гамільтонових систем, варіаційному численні та оптимальному керуванні і широко використовується у теорії ігор [38].

У роботі [39] отримано критерій розв'язності періодичної крайової задачі для матричного рівняння Ріккаті у термінах жорданової структури матриць A та B й у нерегулярному випадку.

Для отримання основного результату розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C\left([a;b], L(B_1)\right)$ в оператор-функцію

$$K_\tau^t[\Phi] \in C([a;b] \times [a;b]; \mathcal{L}(B_1))$$

вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)},\ \left(t, \tau \in [a;b]\right). \tag{31}$$

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (29) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau, \tag{32}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(B_1)$; $\tilde{Z}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (29), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau. \tag{33}$$

Підставимо (32) у крайову умову (30) та отримаємо наступне операторне рівняння відносно оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau, \tag{34}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_a^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(B_1) \to B_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор $\mathbf{L}$ дане рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним [40].

У цьому випадку розв'язки рівняння (34) існують тоді й тільки тоді [40], коли

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}\left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{35}$$

Тут $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)}$ – проектор на ядро оператора $\mathbf{L}^*$, спряженого до оператора $\mathbf{L}$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (34)

$$\left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau\right] \in R(\mathbf{L})$$

множині значень оператора $\mathbf{L}$.

За виконання умови розв'язності (35) операторне рівняння (34) має множину розв'язків вигляду:

$$M = \mathbf{L}^+ \left[\alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C, \tag{36}$$

де C – довільний лінійний обмежений оператор ($C \in \mathcal{L}(B_1)$), $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ - проектор на ядро оператора $\mathbf{L}$. Підставивши оператор M в умову (32), отримаємо загальний розв'язок (29),(30) у вигляді:

$$Z(t) = K_a^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{37}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається наступним чином:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t K_\tau^t[\Phi(\tau)] d\tau - K_a^t[\ell \int_a^{\cdot} K_\tau^{\cdot} \Phi(\tau) d\tau] + K_a^t[L^+ \alpha].$$

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 9. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача* (29),(30) *має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова (35). За виконання умови* (35) *розв'язки крайової задачі* (29),(30) *мають вигляд*

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{38}$$

для довільного оператора $C \in \mathcal{L}(B_1)$.

Зауваження. *Якщо оператор* $\mathbf{L}$ *оборотний, то умова (35) виконується автоматично й крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.*

Надалі отримано умови керованості розглянутої крайової задачі та уточнено теореми на випадок просторів Гільберта [31].

6. Крайові задачі для рівняння Ріккаті у просторі Гільберта

Рівняння Ріккаті відіграє важливу роль у теорії оптимального керування, фізиці, при дослідженні задач із теорії ігор та варіаційного числення. Зазначимо, що у загальному випадку багато робіт присвячено отриманню умов розв'язності у регулярному випадку.

Існує багато робіт, де матричне рівняння та операторно-диференціальне рівняння Ріккаті досліджувалися як правило у регулярному випадку (коли вихідна проблема має єдиний розв'язок). У нерегулярному випадку таке рівняння досліджувалося (у періодичному випадку) у роботі Бойчука О. А., Кривошеї С. А. [39]. У статті [47] досліджується дискретне рівняння Ріккаті. У статті Пронкіна В.С. [49] досліджується питання стосовно квазіперіодичних розв'язків матричного рівняння Ріккаті з коефіцієнтами, що є функціями Арнольда. Дисертація [48] також присвячена теорії збурень гамільтонових систем для операторних матриць та рівняня Ріккаті у просторі Гільберта.

У даній частині, з використанням техніки узагальнено-обернених операторів, встановлено критерій розв'язності даної задачі, породжуючої задачі та проаналізовано структуру множини розв'язків.

Спочатку наводиться відповідна постановка задачі. Потім встановлюються необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків породжуючої крайової задачі та відповідної слабко-нелінійної задачі.

Розглядається наступна крайова задача

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B(t) + \Phi(t) + \varepsilon Z(t,\varepsilon)\Psi(t)Z(t,\varepsilon), \quad (39)$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha, \quad (40)$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ невідома оператор-функція з простору $C([a;b],\mathbf{H}_1)$, $A(t), B(t)$ та $\Phi(t), \Psi(t)$ обмежені операторнозначні функції $A(t), B(t), \Phi(t)$,

$\Psi(t) \in C([a;b], \mathcal{L}(\mathbf{H}_1))$. Іншими словами, кожен з цих операторів визначає шлях у просторі лінійних та обмежених операторів $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1)$, $\varepsilon \geq 0$ малий параметр. Шукаємо такий розв'язок $Z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (39), (40), який при $\varepsilon = 0$ обертається в один з розв'язків $Z_0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dZ_0(t)}{dt} = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{41}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \tag{42}$$

6.1. Критерій розв'язності та структура множини розв'язків незбуреної задачі. Розв'язки на скінченному відрізку

Розглянемо випадок, коли диференціальне рівняння розглядається на скінченному відрізку $[0;T]$. Нехай визначено оператор K_τ^t, дія якого на операторнозначну функцію $\Phi = \Phi(t)$ задається наступним чином:

$$K_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(\tau), \tag{43}$$

де $U(t)$, $V(t)$ еволюційні оператори [36] наступних операторно-диференціальних рівнянь

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), X(0) = I, \tag{44}$$

$$\dot{Y}(t) = B(t)Y(t), Y(0) = I, \tag{45}$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ задовольняє наступне операторно-диференціальне рівняння

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)B(t), Y(0) = I.$$

Використовуючи оператор K_τ^t, можемо записати загальний розв'язок незбуреної задачі ($\varepsilon = 0$):

$$\dot{Z}_0(t) = A(t)Z_0(t) - Z_0(t)B(t) + \Phi(t), \tag{46}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha, \tag{47}$$

у вигляді

$$Z_0(t) = K_0^t[M] + \widetilde{Z}_0(t),$$

де M довільний оператор та

$$\widetilde{Z}_0(t) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi]d\tau.$$

Основним твердженням цієї частини є наступна теорема.

Теорема 10. *Розглянемо крайову задачу (46), (47).*

1) Розв'язки крайової задачі (46), (47) існують тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0; \tag{48}$$

де $Q = \ell K_0^{\cdot}$ та $R(Q) = \overline{R(Q)}$; за виконання умови (48) розв'язки мають наступний вигляд:

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{49}$$

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[Q^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}]-$$

узагальнений оператор Гріна та Q^+ псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор.

2) Узагальнені розв'язки крайової задачі (46), (47) існують тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0,$$

де $\overline{Q}^+$ - сильний узагальнено-обернений оператор. Тоді множина розв'язків рівняння (46) має вигляд

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{50}$$

де

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}]-$$

узагальнений оператор Гріна.

3) Квазірозв'язки існують тоді й тільки тоді, коли $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \notin \overline{R(Q)}$ та в цьому випадку мають вигляд

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{51}$$

з тим же узагальнено-оберненим.

Нарис доведення. Підставимо розв'язок неоднорідного рівняння у крайову умову:

$$lZ_0(\cdot) = \alpha, \tag{52}$$

та отримаємо наступне операторне рівняння:

$$QM := \ell K_0^{\cdot}[M] = \alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot). \tag{53}$$

Для рівняння (53) (використовуючи теорію узагальнено-обернених операторів [17], [44]) будемо мати наступні варіанти :

1) Якщо $R(Q) = \overline{R(Q)}$, то рівняння (53) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0. \tag{54}$$

Якщо умова (54) виконана, то множина розв'язків рівняння (53) має вигляд:

$$M = Q^+\{\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot)\} + \mathcal{P}_{N(Q)}C,$$

для довільного лінійного обмеженого оператора C. Тоді множина розв'язків крайової задачі (46), (47) має вигляд

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{55}$$

де

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^+\{\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot)\}] -$$

узагальнений оператор Гріна.

2) Розглянемо випадок, коли $R(Q) \neq \overline{R(Q)}$. Якщо $\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot) \in \overline{R(Q)}$, то існує множина узагальнених розв'язків у наступному вигляді:

$$M = \overline{Q}^+\{\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot)\} + \mathcal{P}_{N(Q)}C,$$

за виконання умов розв'язності:

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\alpha - \ell \widetilde{Z}_0(\cdot)\} = 0,$$

де $\overline{Q}^+$ - сильний узагальнено-обернений оператор [44]. Тоді множина розв'язків крайової задачі (46), (47) має вигляд

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{56}$$

де

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \widetilde{Z}_0(t) + K_0^t[\overline{Q}^+\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot)\}]-$$

узагальнений оператор Гріна.

3) Якщо $\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot) \notin \overline{R(Q)}$, маємо множину квазірозв'язків у вигляді

$$Z_0(t) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{57}$$

з тим же узагальнено-оберненим (див. також статтю [43]).

6.2. Слабконелінійний випадок

Спочатку встановимо **необхідну умову**. Розглянемо крайову задачу (39), (40). Шукається такий розв'язок $Z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (39), (40), який для $\varepsilon = 0$ обертається в один із розв'язків $Z_0(t)$ породжуючої крайової задачі (46), (47) [50].

Теорема 11. (Необхідна умова). *Нехай крайова задача (39), (40) має розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ обертається в один з розв'язків породжуючої крайової задачі (46), (47) з оператором $C = C_0$, $Z_0(t, C_0)$. Тоді оператор C_0 задовольняє наступне операторне рівняння для породжуючих операторів:*

$$F(C) = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]+$$

$$+(G[\Phi, \alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + (G[\Phi, \alpha])(\tau))]d\tau = 0. \tag{58}$$

Доведення. Припустимо, що крайова задача (39), (40) має розв'язок $Z(t, \varepsilon)$, який для $\varepsilon = 0$ обертається в один із розв'язків породжуючої крайової задачі $Z_0(t, C_0)$. З попередньої теореми випливає, що виконується наступна умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\alpha - \ell\widetilde{Z}_0(\cdot, \varepsilon)\} = 0; \tag{59}$$

де

$$\widetilde{Z}_0(t,\varepsilon) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi + \varepsilon Z\Psi Z]d\tau.$$

Використовуючи те, що (48) виконується, умову розв'язності (59) можемо переписати в наступному вигляді:

$$\varepsilon\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\ell\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[Z\Psi Z]d\tau\} = 0.$$

Розділивши на ε та перейшовши до границі, коли ε прямує до нуля, отримаємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\{\ell\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[Z_0\Psi Z_0]d\tau\} = 0,$$

або у вигляді

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C_0]+$$

$$+(G[\Phi,\alpha])(\tau))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C_0] + (G[\Phi,\alpha])(\tau))]d\tau = 0. \tag{60}$$

З цієї умови отримаємо твердження теореми.

Отримаємо **достатню умову** розв'язності крайової задачі (46), (47). Зробимо заміну змінних $Z(t,\varepsilon)$ за правилом

$$Z(t,\varepsilon) = Y(t,\varepsilon) + Z_0(t,C_0).$$

Тоді отримаємо наступну крайову задачу:

$$\dot{Y}(t,\varepsilon) = A(t)Y(t,\varepsilon) - Y(t,\varepsilon)B(t)+$$

$$+\varepsilon(Z_0(t) + Y(t,\varepsilon))\Psi(t)(Z_0(t) + Y(t,\varepsilon)), \tag{61}$$

$$lY(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{62}$$

Множина розв'язків рівняння (61) має вигляд

$$Y(t,\varepsilon) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + \overline{Y}(t,\varepsilon), \tag{63}$$

$$\overline{Y}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[(Z_0 + Y)\Psi(Z_0 + Y)])(t,\varepsilon), \tag{64}$$

за виконання умови (59)

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(Z_0 + Y)\Psi(Z_0 + Y)]d\tau = 0. \tag{65}$$

Підставивши у вираз (63) та використовуючи умову розв'язності отримаємо:

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + \overline{Y}(\tau,\varepsilon))\Psi(\tau)(K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C] + \overline{Y}(\tau,\varepsilon))]d\tau = 0.$$

Тоді можемо переписати цей вираз у вигляді наступного операторного рівняння:

$$LC = G, \tag{66}$$

де

$$LC = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]\Psi(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)]d\tau +$$

$$+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} \overline{Y}(\tau,\varepsilon)\Psi(\tau)K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]]d\tau, \tag{67}$$

та

$$G = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]\Psi(\tau)K_0^\tau[\mathcal{P}_{N(Q)}C]]d\tau -$$

$$-\mathcal{P}_{N(Q^*)}\ell \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\overline{Y}(\tau,\varepsilon)\Psi(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)]d\tau. \tag{68}$$

Якщо наступна умова виконана,

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0, \tag{69}$$

то рівняння (67) має розв'язок

$$C = L^+G. \tag{70}$$

Можна довести, що з умови (69) випливає, що крайова задача (61), (62) має розв'язки. Таким чином довели наступну теорему.

Теорема 12. (Достатня умова). *За умови (69) крайова задача (61), (62) розв'язна. Множина розв'язків крайової задачі задачі (61), (62) може бути знайденою з допомогою наступного збіжного ітераційного процесу:*

$$Y_{k+1}(t,\varepsilon) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(Q)}C_k] + \overline{Y}_k(t,\varepsilon), \tag{71}$$

$$\overline{Y}_k(t,\varepsilon) = \varepsilon(G[(Z_0 + Y_k)\Psi(Z_0 + Y_k)])(t,\varepsilon), \tag{72}$$

$$C_k = L^+ G_k, \tag{73}$$

з нульовими початковими даними.

Доведення цього твердження використовує модифікований варіант принципу стискаючих відображень і проводиться таким чином, як доведення теореми 3 з роботи [46].

Список використаних джерел

1. *Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — К.: Изд-во АН УССР, 1937. — 353 с.

2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 572 с.

3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1968. — 455 с.

4. *Zettl Anton.* Adjoint and Self-Adjoint BVP's with Interface Conditions // SIAM J.Appl.Math. — 16, 4.— p.851–859.

5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 307 с.

7. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

8. *Люстерник Л. Ю., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Уч. пособие. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.

9. *Самойленко А. М., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. К.: Вища шк., 1987. — 287 с.

10. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.

11. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. — 1991. — 27, 9. — С. 1516–1521.

12. *Бойчук А. А., Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1992. — 44, 4. — С. 564-568.

13. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.:Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

14. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, 11. — С. 1576-1579.

15. *Boichuk A.* Boundary value problems for impulse differential systems // Universitatis Jagellonicae Acta Mathematica. — 1998. — **XXXVI**. — P. 187-192.

16. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т комп. иссл, 2002. — 384 с.

17. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — VSP, Utrecht–Boston, 2004. — 323 p.

18. *Boichuk A. A., Pokutnii A. A.* Bounded solutions of linear differential equations in a Banach space // Nonlinear Oscil.—2006.— **9**, 1.— P.1–12.

19. *Akhmet M. U., Tleubergenova M. A., Yilmaz O.* Asymptotic behavior of linear impulsive integro-differential equations // Comp. and Math. with Appl. — 2008. — 56. — P. 1071-1081.

20. *Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Boundary-Value Problems for Weakly Nonlinear Delay Differential Systems // Abstr.Appl. Anal. — 2011. — Article ID 631412. — 19 p.

21. *Boichuk A., Langerova M., Skorikova J.* Bounded Solutions of Impulsive Differential Systems // Funct. Differ. Equat. — 2011. — 18, 1-2. — P. 89 -– 99.

22. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — 15, 2. — С. 151 – 164.

23. *Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. — 2013. — **1**. — С. 71 – 74.

24. *Golovatska I.* Weakly perturbed boundaty-value problems of integro–differential equations // Tatra Mount. Math. Publ. — 2013. — 54.— P. 61 – 71.

25. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Слабко нелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — 16, 3. — С. 314 – 321.

26. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — 16, 4. — С. 460 — 474.

27. *Бондар І. А.* Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь (Boundary value problems for linear systems of integro-differential equations with impulsive action) // Буковин. мат. журн.— Чернівці: Чернів. нац. ун-т. — 2014. — 2, 4. — С. 7-11.

28. *Boichuk A., Langerova M., Ruzickova M., Voitushenko E.* Systems of singular differential equations with pulse action // Advances in difference equations.

    www.advancesindifferenceequations.com/ content/2013/1/86

29. *Bondar I.* Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action // Tatra Mount. Math. Publ. (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014). — 2015. — 63.- P. 73 – 87, DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.

30. *Бойчук А. А, Покутний А. А.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**,9. — С. 1181–1188.

31. *Панасенко Є. В , Покутний О. О.* Керованість крайових задач для рівнянь Ляпунова в просторі Гільберта // Вісник Запорізьк. ун–ту, мат. модел. і прикл. механіка. — 2015. —3. —С. 213–220.

32. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space // Boundary Value Problems. —2014. — http: //www.boundaryvalueproblems.com /content /2014/1/4.

33. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Экспоненциальная дихотомия и ограниченные решения дифференциальных уравнений в пространстве Фреше // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, 12. –С. 1587–1597.

34. *Покутний О. О.* Представлення розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера у просторі Гільберта // Нелінійні коливання. — 2014. — **17**, 1. — С. 102–111

35. *Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова // Укр. мат. журн. — 1998. — 50, 8. — С. 1021-–1026.

36. *Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

37. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна, серія "Математика, прикладна математика і механіка". — 2014. — 1120. — С. 85–94.

38. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления.— М.: Мир, 1972. — 544 с.

39. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation // Differential Equations. — 2001. — 37, 4. — P. 464-–471.

40. *Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. - К.: Ин–т мат. НАН Украины, 1995. — 320 с.

41. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1971. — 104 с.

42. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. — 464 с.

43. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором в лінійній частині // Нелінійні коливання. — 2013. — 16, 4. — С. 518–526.

44. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, серія фіз.-мат. науки. — 2013. — 4. — С. 158–161.

45. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

46. *Pokutnyi O.A.* Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded linear part // Differential equations. — 2012. — 48, 6. — p. 803-813.

47. *Lazareva A. B., Pakshin P. V.* Solution of matrix Lurier, Riccati and Lyapunov equations for digital systems // Automatic and Telemekh. —1986. — 12. — P.17-22.

48. *Wyss Christian.* Perturbation theory for Hamiltonian operator matrices and Riccati equations // Dissertation, Bern. — 2008.— 164 p.

49. *Pronkin V.S.* On quasiperiodic solutions of the matrix Riccati equation // RAN. Izv. Math. — 1994. — 43, 3. — p.455-470.

50. *Pokutnyi O.O.* Boundary Value Problem for an Operator-Differential Riccati Equation in the Hilbert Space on the Interval // Advances in pure mathematics. — 2015. — 5. — p.865-873. // — http://dx.doi.org/10.4236/apm.2015.514081

Наукове видання

І.Бондар, О.Покутний

Розробка методів розв'язування крайових задач для операторно-диференціальних систем, які моделюють фізико-технічні та біологічні задачі

Редактор Позяк Н.М.
Підп.до друку 13.05.2016. Формат 60×84/16. Папір тип.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 2,25. Ум. друк. арк. 2,10.
Тираж 40 пр. Зам.

Інститут математики НАН України
01601, Київ, вул. Терещенківська, 3