НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Грищук Сергій Вікторович

УДК 517.9

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

01.01.01 — математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2008

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
ПЛАКСА Сергій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу комплексного аналізу і
теорії потенціалу

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ГУТЛЯНСЬКИЙ Володимир Якович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
м. Донецьк, головний науковий співробітник відділу рівнянь
з частинними похідними;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ГЕРУС Олег Федорович,
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
м. Житомир, завідувач кафедри математичного аналізу

Захист відбудеться "____" __________ 2008 р. о ____ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 в Інституті математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "____" __________ 2008 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А.С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Рівняння теорії узагальненого осесиметричного потенціалу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0,\quad m=\mathrm{const}>0, \tag{1}$$

має фундаментальне значення в ряді розділів математичної фізики, гідродинаміки, аеродинаміки, теорії пружності. Воно природньо з'являється при вивченні рівняння Лапласа з певними видами симетрії області визначення або розв'язків. Зокрема, якщо m є натуральним числом, то рівняння (1) задовольняють гармонічні функції $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m+2})$, визначені в $(m+2)$-вимірному дійсному просторі $\mathbb{R}^{m+2}$, за умови, що вони, так би мовити, "володіють симетрією" відносно осі Ox_1 і розглядаються в меридіанній площині $\Big\{(x,y)$: $x=x_1,\, y=\sqrt{x_2^2+\cdots+x_{m+2}^2}\Big\}$: $u(x,y):=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m+2})$.

Важливими з точки зору застосувань є крайові задачі для розв'язків рівняння (1) в областях, що лежать у півплощині $\{(x,y):y>0\}$ і прилягають до відрізків осі Ox. М.В. Келдиш встановив, що коректні постановки крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням можуть істотно відрізнятися від коректних постановок для невироджених рівнянь. Так, для рівняння (1) коректні постановки крайових задач у ряді випадків потребують, щоб відрізки лінії виродження $y=0$ були вільними від крайових умов.

Дослідження з теорії диференціальних рівнянь еліптичного типу з виродженням відображені в роботах і монографіях багатьох авторів, зокрема, Е.Т. Уіттекера і Д.Н. Ватсона, М.В. Келдиша, М.О. Лаврентьєва і Б.В. Шабата, Л.Г. Лойцянського, А. Вейнштейна, Р.П. Гілберта, А. Маккі, П. Хенрічі, Ю.П. Кривенкова, Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, І.І. Данилюка, С.А. Терсенова, Г.М. Положого, М.Б. Капілевича, І.О. Кіпріянова та інших. Проте, не зважаючи на значну кількість досліджень з теорії крайових задач для згаданих рівнянь, актуальною залишається розробка методів їх розв'язання, які базуються на інтегральних зображеннях розв'язків. При цьому досить ефективними є зображення розв'язків через аналітичні функції, що дає можливість застосовувати до крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням методи теорії крайових задач аналітичних функцій комплексної змінної і сингулярних інтегральних рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Інституті математики НАН України в рамках наукових тем "Дослідження з комплексного аналізу, теорії потенціалу, диференціальних та топологічних властивостей відображень і множин" (номер держреєстрації 0101U000700) і "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного аналізу " (номер держреєстрації 0106U000156).

Мета і завдання дослідження. Об'єктом дослідження є рівняння (1) і його розв'язки.

Предметом дослідження є вивчення граничних властивостей узагальненого осесиметричного потенціалу та характеризація розв'язків рівняння (1) за допомогою моногенних функцій, які приймають значення в деякій комутативній банаховій алгебрі.

Метою дослідження є встановлення інтегральних зображень розв'язків рівняння (1) через аналітичні функції комплексної змінної і розробка на їх основі функціонально-аналітичного методу розв'язання крайових задач для узагальнених осесиметричних потенціалів.

Для досягнення мети в роботі:

– встановлюються достатні умови неперервного продовження узагальнених осесиметричних потенціалів на границю області і вивчаються їх граничні властивості;

– розробляється схема редукції деяких крайових задач для розв'язків рівняння (1) до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі;

– знаходиться комутативна банахова алгебра така, що моногенні функції зі значеннями в ній, які будуються як продовження аналітичних функцій комплексної змінної, дають ефективний спосіб побудови розв'язків рівняння (1).

При розв'язанні цих задач застосовуються методи теорії аналітичних функцій комплексної змінної і сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукову новизну мають такі результати дисертації.

1. Встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу через аналітичні функції комплексної змінної, задані у довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. При $m \in (0; 2)$ для певних класів узагальнених осесиметричних потенціалів встановлено взаємно однозначну відповідність між розв'язками рівняння (1) та аналітичними функціями комплексної змінної, яка задається вказаними інтегральними зображеннями.

2. Встановлено достатні умови неперервного продовження інтегральних зображень узагальненого осесиметричного потенціалу на границю області та одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень.

3. Здійснено редукцію деяких крайових задач для розв'язків рівняння (1) при $m \in (0; 2)$ до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі за розширених умов на границю області.

4. Знайдено алгоритми побудови розв'язків рівняння (1) при $m > 1$ за компонентами моногенних функцій гіперкомплексної змінної, які будуються в явному вигляді як продовження аналітичних функцій комплексної змінної.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані в теорії узагальнених аналітичних функцій, в теорії крайових задач для розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу з виродженням та їх застосуваннях у математичній фізиці, гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез належать науковому керівнику — С.А. Плаксі. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто здобувачем.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися в Інституті математики НАН України на наукових семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу (керівник — Ю.Б. Зелінський, 2005 – 2007) і відділу теорії функцій (керівник — А.С. Романюк, 2008), на Київському міському семінарі з функціонального аналізу (керівники — академік НАН України, професор Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України, професор М.Л. Горбачук, член-кореспондент НАН України, професор Ю.С. Самойленко, 2007), на семінарі кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету (керівник — О.Ф. Герус, 2007), на Міжнародному семінарі "Течії з вільними границями і суміжні проблеми аналізу" (Київ, Україна, 2005), на Міжнародній конференції "Комплексний аналіз і хвильові процеси в механіці" (Житомир, Україна, 2007), а також були викладені в доповідях наукового керівника на конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань та обчислень ISAAC (Катанія, Італія, 2005) і на Міжнародній конференції з комплексного аналізу і теорії потенціалу (Гебзе, Туреччина, 2006).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в статтях [1–3] у наукових фахових виданнях, в препринті [4], а також в матеріалах міжнародних конференцій [5, 6].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, в який включено 80 найменувань. Повний обсяг дисертації 122 сторінки, з них список використаних джерел займає 9 сторінок.

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику С.А. Плаксі за постановку задач, корисні поради та зауваження.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету досліджень, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

В розділі 1 зроблено огляд літератури за темою і виділено напрямки досліджень дисертаційної роботи.

В розділі 2 встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу в довільній обмеженій однозв'язній і симетричній відносно осі Ox області D декартової площини xOy.

Позначимо через D_z область комплексної площини $\mathbb{C}$, конгруентну області D, а через b_1 і b_2 — точки перетину її границі ∂D_z з дійсною віссю $\mathbb{R}$, при цьому умовимося, що $b_1 < b_2$. Для кожної точки $z \in D_z$, для якої $\operatorname{Im} z \neq 0$, зафіксуємо довільну гладку жорданову криву $\Gamma_{z\bar{z}}$, що лежить в області D_z і з'єднує точки z, $\bar{z}$. У випадку, коли $z \in \partial D_z$ і $\operatorname{Im} z \neq 0$, через $\Gamma_{z\bar{z}}$ позначимо ту дугу границі ∂D_z, яка з'єднує точки z, $\bar{z}$ і містить b_1. Умовимося вважати початком кожної кривої $\Gamma_{z\bar{z}}$ точку з від'ємною уявною частиною.

Якщо $z \in \overline{D_z}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{\alpha}$ розуміємо як неперервну вітку аналітичної функції $L(t) := \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{\alpha}$ з розрізом вздовж жорданової кривої, що послідовно з'єднує точки z, ∞, $\bar{z}$ і має з множиною $\Gamma_{z\bar{z}} \cup \mathbb{R}$ спільними лише точки z, $\bar{z}$, і таку, що $L(t) > 0$ при всіх $t > \max\limits_{\tau \in \Gamma_{z\bar{z}}} \operatorname{Re} \tau$.

В підрозділі 2.1 доведено пряму теорему стосовно зображень узагальненого осесиметричного потенціалу, в якій встановлено інтегральний вираз, котрий кожній голоморфній в D_z функції ставить у відповідність розв'язок рівняння (1) на множині $\{(x,y)\in D : y\neq 0\}$ при $m>0$.

Теорема 2.1.1. *Якщо* $m>0$ *і функція* F *голоморфна в області* D_z*, то функція*

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}} F(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt\,,\quad z=x+iy,\ (2)$$

задовольняє рівняння (1) *на множині* $\{(x,y)\in D : y\neq 0\}$*. При цьому*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y)=\frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac12\right)}{2\pi}\,F(x_0)\qquad \forall\, x_0\in\mathbb{R} : (x_0,0)\in D\,,$$

де $\mathrm{B}(p,q)$ *— бета-функція Ейлера.*

Формула (2) узагальнює інтегральні зображення розв'язків рівняння (1), одержані А. Маккі, П. Хенрічі, Ю.П. Кривенковим, Н. Раджабовим. Схожі за виглядом з виразом (2) інтегральні зображення x^m-аналітичних функцій одержано Г.М. Положим.

В підрозділі 2.2 встановлено умови, що є достатніми для неперервного продовження інтегрального зображення (2) на границю області D_z, і одержано оцінку локального модуля неперевності його граничних значень.

Нехай n — невід'ємне ціле число, яке задовольняє нерівність $2n<m\leq 2n+2$. Ввівши в розгляд функцію $u(z):=u(x,y)$ комплексної змінної $z:=x+iy$, після інтегрування частинами n разів в рівності (2) одержуємо

$$u(z)=\frac{k(m)}{2\pi i\,|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}} \mathcal{F}_n(t)Q_n(t-x,y)\Big((t-z)(t-\bar z)\Big)^{-\nu_m}dt,\ (3)$$

де $\nu_m:=\{1-\frac{m}{2}\}$ — дробова частина числа $1-\frac{m}{2}$,

$$k(m):=\begin{cases}1 & \text{при } n=0,\\ 2^{n/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n}{2}+1) & \text{при } n=2,4,\ldots,\\ -2^{(n+1)/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n-1}{2}) & \text{при } n=1,3,\ldots,\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_n(t) := \begin{cases} F(t) & \text{при } n=0,\\ \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau & \text{при } n=1,\\ \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t_{n-1}}\int\limits_{t_0}^{t_{n-2}}\dots\int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2\dots dt_{n-1} & \text{при } n=2,3,\dots \end{cases}$$

$(t, t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in D_z$ і інтегрування ведеться вздовж гладких дуг, що належать D_z та з'єднують кінці інтегрування), $Q_n(t-x, y)$ — конктретний многочлен степеня n від $t-x$ та y, записаний в явному вигляді.

Нехай тепер $\gamma := \partial D_z$ є замкненою жордановою спрямлюваною кривою. Позначимо через L_p банахів простір сумовних у степені p функцій $f\colon \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_p} := \Big(\int\limits_{\gamma} |f(t)|^p |dt|\Big)^{1/p}$, а через L_∞ — банахів простір істотно обмежених функцій $f\colon \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\gamma} |f(t)|$. Позначимо також через E_p клас Смирнова функцій, заданих в D_z, а через E_∞ — клас голоморфних і обмежених в D_z функцій.

Позначимо через $d(z_1, z_2)$ діаметр тієї дуги кривої γ, яка з'єднує точки $z_1, z_2 \in \gamma$ і має щонайменшу довжину. Будемо говорити, що γ є *k-кривою типу "діаметр-хорда"*, якщо відношення $d(z_1, z_2)/|z_1 - z_2|$ обмежене числом k при довільному виборі точок $z_1, z_2 \in \gamma$. Область D_z назвемо *k-областю*, якщо дві довільні точки множини $\overline{D_z}$ можна з'єднати k-кривою типу "діаметр-хорда" з фіксованим значенням k, і при цьому всі точки зазначеної кривої, за винятком, можливо, кінців, належать області D_z.

Нехай $\theta(\varepsilon) := \sup\limits_{z\in\gamma} \operatorname{mes}\{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$ — метрична характеристика кривої γ, введена В.В. Салаєвим (тут mes — лінійна міра Лебега на γ).

У наступній теоремі наведено достатні умови неперервного продовження функції (3) на границю γ області D_z.

Теорема 2.2.1. *Нехай γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, симетрична відносно дійсної осі і така, що $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Якщо $m > 0$ і $\mathcal{F}_n$ належить класу E_p, де $1 < p \le \infty$ при $m = 2n+2$ і $\{\frac{m}{2}\}^{-1} < p \le \infty$ при $m \ne 2n+2$, то функція (3) неперервно продовжується з області D_z у точки множини $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$. При цьому для кожного δ такого, що $0 < \delta < (1/8)\max\limits_{t\in\gamma}|\operatorname{Im} t|$,* *та довільних точок* $z_0, z_1 \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ *таких, що* $|\mathrm{Im}\, z_0| \geq \delta$ *і* $|z_1 - z_0| \leq |\mathrm{Im}\, z_0|/2$, *виконується нерівність*

$$|u(z_1) - u(z_0)| \leq c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \big(d(z_1, z_0)^{1-\nu_m-\chi_p} + \omega_{m,p}(|z_1 - z_0|)\big), \quad (4)$$

де

$$\omega_{m,p}(\varepsilon) := \begin{cases} \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n < m < 2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p \leq \infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } m = 2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < \infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m} \ln\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при} \\ \qquad m = 2n+1 \text{ і } p = \infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < (2\{\frac{m}{2}\} - 1)^{-1} \text{ або } p = \infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2\nu_m} \quad \text{при} \\ \qquad 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і } p = (2\{\frac{m}{2}\} - 1)^{-1}, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m} \quad \text{при } 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і} \\ \qquad (2\{\frac{m}{2}\} - 1)^{-1} < p < \infty, \\ 0 \qquad \text{при } m = 2n+2 \text{ і } 1 < p \leq \infty, \end{cases}$$

$\chi_p := 1/p$ *при* $p < \infty$ *і* $\chi_p := 0$ *при* $p = \infty$, *а стала* c *не залежить від* $\mathcal{F}_n, z_0, z_1$.

Якщо, крім того, для точки b_j, *де* $j = 1$ *або* $j = 2$, *існує окіл, перетин якого з* D_z *є* k*-областю, і при цьому існує границя*

$$F(b_j) := \lim_{z \to b_j, z \in D_z} \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{F}_n(z),$$

то існує також границя

$$\lim_{z \to b_j, z \in D_z} u(z) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)}{2\pi}\, F(b_j).$$

Очевидним наслідком оцінки (4) є відповідна оцінка для локального модуля неперервності $\omega_{\gamma, z_0}(u, \varepsilon) := \sup\limits_{t \in \gamma,\, |t - z_0| \leq \varepsilon} |u(t) - u(z_0)|$.

В підрозділі 2.3 для функції $u(x, y)$ з деяких відомих класів розв'язків рівняння (1) при $m \in (0; 2)$ сформульовано теореми (обернені до теореми 2.1.1) про існування голоморфної функції F такої, що виконується рівність (2).

Позначимо $D^+ := \{(x, y) \in D : y > 0\}$. З теореми 2.1.1 випливає, що розв'язок (2) рівняння (1) належить класу $C_2(D^+)$ функцій, кожна з яких неперервна на множині $D^+ \cup \{(x, 0) \in D : b_1 < x < b_2\}$ і двічі неперервно диференційовна в D^+. Крім того, функція (2) належить підкласу $N_2(D^+)$ класу $C_2(D^+)$, що складається з функцій, які задовольняють додаткову умову

$$\lim_{(x_0,y)\to(x_0,0)} y^m \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad \forall\, x_0 \in (b_1, b_2)\,.$$

Теорема 2.3.1. *Для кожної функції $u(x, y)$ класу $C_2(D^+)$, яка при $m \in [1, 2)$ задовольняє рівняння (1) в області D^+, існує єдина голоморфна функція $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$F(\bar z) = \overline{F(z)} \qquad \forall\, z \in D_z \tag{5}$$

і така, що рівність (2) виконується при всіх $(x, y) \in D^+$.

Теорема 2.3.2. *Для кожної функції $u(x, y)$ класу $N_2(D^+)$, яка при $m \in (0, 1)$ задовольняє рівняння (1) в області D^+, існує єдина голоморфна функція $F : D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову (5) і така, що рівність (2) виконується при всіх $(x, y) \in D^+$.*

Теореми 2.3.1, 2.3.2 при $m \in (0, 2)$ узагальнюють аналогічні результати Ю.П. Кривенкова на області більш загального вигляду.

Доведення теорем 2.3.1, 2.3.2 здійснюється в підрозділі 2.4 методом, розробленим С.А. Плаксою для рівняння (1) при $m = 1$. Схема доведення включає, зокрема, редукцію інтегрального рівняння (2) з шуканою функцією F до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду на дійсній осі і дає можливість одержати (при деяких природних припущеннях про границю області і задану функцію) формули розв'язків таких крайових задач для рівняння (1):

задача E: при $1 \le m < 2$ знайти розв'язок рівняння (1) класу $C_2(D^+)$, який приймає на кривій Γ, що є перетином границі ∂D області D з півплощиною $\{(x, y) : y \ge 0\}$, значення заданої неперервної функції u_Γ;

задача N_0: при $m \in (0; 1)$ знайти розв'язок рівняння (1) класу $N_2(D^+)$, який приймає на Γ значення заданої неперервної функції u_Γ.

Засобом розв'язання задач E і N_0 є допоміжна задача про відшукання голоморфної в D_z і неперервної в $\overline{D_z}$ функції F, яка задовольняє додаткову умову симетрії (5), а її граничні значення задовольняють інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i\,|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}} F(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt = u_{\partial D}(x,y)\,,$$

де $(x,y)\in\partial D : y\neq 0,\quad z=x+iy,\quad u_{\partial D}(x,y):=u_\Gamma(x,|y|)$.

При розв'язанні допоміжної задачі використовується конформне відображення $\sigma(Z)$ одиничного круга $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|<1\}$ на область D_z таке, що $\sigma(-1)=b_1$, $\sigma(1)=b_2$ і образом півкруга $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|<1,$ $\operatorname{Im} Z>0\}$ при відображенні $\sigma(Z)$ є область $\{z\in D_z\ :\operatorname{Im} z>0\}$.

Ввівши в розгляд функцію

$$M(Z,T):=\left(\frac{(T-Z)(T-\bar Z)}{(\sigma(T)-\sigma(Z))(\sigma(T)-\sigma(\bar Z))}\right)^{1-m/2}\,,$$

яка при кожному фіксованому $Z\neq -1$ розуміється як неперервна вітка функції, аналітичної по змінній T в одиничному крузі, така, що $M(Z,-1)>0$, розглянемо також функцію

$$m(\xi,\tau):=-i\,\frac{\exp{(i\pi m/2)}}{4^{1-m/2}}\,\frac{(\tau+i)^{2-m}}{\tau+i}\,M\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\,,\frac{\tau-i}{\tau+i}\right),\quad \xi,\tau\in\mathbb{R}\,,$$

де голоморфна вітка функції $(\tau+i)^{2-m}$ визначена поза розрізом $\{\tau=i\eta:\eta\le -1\}$ і приймає значення $-\exp(-i\pi m/2)$ при $\tau=0$.

Нехай $\omega\colon[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ — монотонно неспадна неперервна функція, для якої виконується рівність $\omega(0)=0$, а також існують сталі C і ν такі, що при всіх $k>1$ і всіх $\xi>0$ справедлива нерівність $\omega(k\xi)\ \le\ C\,k^\nu\,\omega(\xi)$. Тоді при $\alpha\in(0;1]$ введемо в розгляд клас $\mathcal{H}_\alpha^\omega$ функцій $g:\partial D_z\longrightarrow\mathbb{C}$, для кожної з яких виконується умова

$$|g(z_1)-g(z_2)|\le\ c\,\omega(r_{z_1z_2})\left(\frac{|z_1-z_2|}{r_{z_1z_2}}\right)^\alpha\quad\forall\,z_1,z_2\in\partial D_z\,,$$

де $r_{z_1z_2}:=\max\{|z_1-b_1||z_1-b_2|,|z_2-b_1||z_2-b_2|\}$ і стала c не залежить від z_1,z_2.

Позначимо через $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$ клас функцій $g_{\partial D}\colon\partial D\longrightarrow\mathbb{R}$, для кожної з яких функція g, яка визначається рівністю $g(x+iy)$:= := $g_{\partial D}(x,y)$ при $(x,y)\in\partial D$, належить класу $\mathcal{H}_\alpha^\omega$.

В теоремі 2.4.1 наведено достатні умови редукції допоміжної задачі при $m \in (0,2)$ і $u_{\partial D} \in \mathcal{H}^{\omega}_{\alpha}(\partial D)$ до сингулярного інтегрального рівняння:

$$A(\xi,\xi)\,U_p(\xi) + \frac{2\xi}{\pi}B(\xi,\xi)\int\limits_0^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau -$$

$$-\frac{4m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi^2}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\Bigg(\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau\,U_p(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\Bigg)d\tau -$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{U_p(\tau)\,s\,(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau = f_*(\xi)\;\forall\xi>0, \quad (6)$$

в якому $\qquad A(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Re}\,m(\xi,\tau), \qquad B(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Im}\,m(\xi,\tau),$

$$f_*(\xi) := u_*(\xi)\xi^{1-m} - m\,\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(u_*(s)-u_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds$$

і функція u_* виражається через задану функцію $u_{\partial D}$ рівністю

$$u_*(\xi) := \frac{|y|^{m-1}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}}\Big(u_{\partial D}(x,y) - u_{\partial D}(b_2,0)\Big), \quad x+iy = \sigma\Big(\frac{\xi-i}{\xi+i}\Big).$$

Через $C(\mathbb{R})$ позначимо банахів простір функцій $g_*\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, неперервних на розширеній дійсній прямій $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, з нормою $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})} := \sup_{\tau\in\mathbb{R}}|g_*(\tau)|$, а через $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$ — клас функцій $g_* \in C(\mathbb{R})$, модулі неперервності яких задовольняють умови Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty$$

при всіх $a > 0$, де $\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon) := \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}:|\tau|\ge 1/\varepsilon}|g_*(\tau_1) - g_*(\infty)|$, $\omega_G(g_*,\varepsilon) := \sup\limits_{\tau_1,\tau_2\in G:\,|\tau_1-\tau_1|\le\varepsilon}|g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)|$. Позначимо через $C_e(\mathbb{R})$ підпростір банахового простору $C(\mathbb{R})$, що складається з парних функцій, а через $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$ — множину парних функцій класу $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$.

Введемо в розгляд функції

$$\widehat{m}(\xi,\tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi} \displaystyle\int_{\tau}^{\xi} \dfrac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds \ \text{при} \\ \qquad \xi\tau > 0,\ |\tau| < |\xi|, \\ 0 \qquad\qquad \text{при}\ \xi\tau < 0\ \text{або}\ \xi\tau > 0,\ |\tau| > |\xi|, \end{cases}$$

$$\widehat{A}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Re}\,\widehat{m}(\xi,\tau) \qquad \widehat{B}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Im}\,\widehat{m}(\xi,\tau) \qquad \widehat{f}_*(\tau) := f_*(|\tau|)$$

$$k_p(\xi,\tau) := m\,\sin\frac{\pi m}{2}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}\,\widehat{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{\widehat{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}\,d\eta\right)$$

та інтегральні оператори

$$(k_p f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_p(\xi,\tau)}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, f(\tau)\, d\tau\,,$$

$$(Rf)(\xi) := (\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}\left(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\, f(\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{P(\xi)}{2^m\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\tau^2+1)\left|\mathrm{Im}\,\sigma\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\,|\tau|}\right)^{1-m/2} \frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right),$$

де $\alpha^* := \max\{0, 1-m\}$, а при визначенні функції $P(\xi) := \exp(-i\pi m/2)(\xi+i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)^{1-m/2} + \exp(i\pi m/2) \times$ $\times\, (\xi-i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)\right)^{1-m/2}$ голоморфні вітки аналітичних функцій нормуються так, щоб $P(0)=0$.

В теоремі 2.4.2 встановлено достатні умови того, що кожний розв'язок сингулярного інтегрального рівняння (6) вигляду

$$U_p(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,, \tag{7}$$

де $U_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, одержується в результаті розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = (R\widehat{f}_*)(\xi) \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

в якому оператор $R\,k_p$ є компактним у просторі $C_e(\mathbb{R})$. При цьому рівняння (8) має єдиний розв'язок у просторі $C_e(\mathbb{R})$, який належить класу $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

В результаті редукції допоміжної задачі до рівняння (8) доведено наступне твердження.

Теорема 2.4.3. *Нехай* $0 < m < 2$ *і функція* $u_{\partial D}$ *належить класу* $\mathcal{H}^{\omega}_{\alpha}(\partial D)$, $m/2 < \alpha \le 1$, *при цьому конформне відображення* $\sigma(Z)$ *має на колі* $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = 1\}$ *неперервну контурну похідну, яка не перетворюється в нуль в жодній точці цього кола і модуль неперервності якої задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\ \ln^3 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty\,.$$

Тоді розв'язок задачі E *при* $m \in [1,2)$ *або розв'язок задачі* N_0 *при* $m \in (0,1)$ *задається формулою* (2), *в якій* F *є єдиним розв'язком допоміжної задачі і має вигляд*

$$F(z) = F_0(z) + \frac{2\pi\, u_\Gamma(b_2, 0)}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)},$$

де голоморфна функція F_0 *виражається рівністю*

$$F_0(z) = -\frac{2\sin\frac{\pi m}{2}(\xi + i)}{\pi\, \sigma'(\frac{\xi - i}{\xi + i})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_p(|\tau|)}{\tau - \xi}\, d\tau, \quad z = \sigma\left(\frac{\xi - i}{\xi + i}\right), \mathrm{Im}\,\xi > 0,$$

при цьому функція U_p *має вигляд* (7), *де* U_0 *є розв'язком рівняння Фредгольма* (8) *у просторі* $C_e(\mathbb{R})$.

Розділ 2 завершується доведенням теорем 2.3.1 і 2.3.2, яке спирається на теорему 2.4.3.

В розділі 3 встановлено зв'язок між розв'язками рівняння (1) при $m > 1$ в областях спеціального вигляду і моногенними функціями, які приймають значення в деякій комутативній банаховій алгебрі.

Розглянемо комплексифікацію $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} := \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H} \equiv \{c = a + ib \ : a, b \in \mathbb{H}\}$ нескінченновимірної комутативної асоціативної банахової алгебри $\mathbb{H} := \{a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R},\ \|a\|_{\mathbb{H}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\}$, таблицю множення для елементів базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ якої запропонував І.П. Мельниченко:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_m e_n = \tfrac{1}{2}\left(e_{m+n-1} + (-1)^{n-1} e_{m-n+1}\right) \quad \forall\, m \geq n \geq 1\,,$$

при цьому норма в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ задається співвідношенням $\|c\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, де $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, e_k, \quad c_k \in \mathbb{C}$.

Нехай тепер D — область декартової площини xOy, *опукла* в напрямку осі Oy. Це означає, що область D разом з кожною своєю точкою (x,y) містить також відрізок, що з'єднує точки (x,y) та $(x,-y)$. Тоді конгруентна області D область D_z комплексної площини є опуклою в напрямку уявної осі. Області D поставимо також у відповідність конгруентну їй область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x,y) \in D\}$ в площині $\mu := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

В підрозділі 3.1 встановлено характеризацію розв'язків рівняння (1) при $m > 1$ в опуклій в напрямку осі Oy області D за допомогою компонент головних продовжень в область D_ζ функцій, голоморфних в області D_z. При $m = 1$ таку характеризацію встановлено в роботах І.П. Мельниченка і С.А. Плакси, де для кожної функції $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, голоморфної в опуклій у напрямку уявної осі області D_z, побудовано в явному вигляді її головне продовження в область D_ζ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (te_1 - \zeta)^{-1} F(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y)\, e_k\,, \quad \zeta := xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\,, \tag{9}$$

при цьому

$$U_1(x,y) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt, \tag{10}$$

$$U_k(x,y) := \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t-x)}{y}\right)^{k-1} dt, \tag{11}$$

де $z = x + iy \,:\, y \neq 0$, γ — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, що охоплює відрізок, який з'єднує точки z і $\bar{z}$ та є спектром елемента ζ, а також лінією розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ (вважаємо також, що в точках осі Ox функції (10), (11) доозначено за неперервністю).

Позначимо

$$a_k(m) := \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!} \, C_{2n}^{n}, & \text{якщо } k = 0, \\ \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!} \, C_{2n}^{n-k}, & \text{якщо } k = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

$$b_k(m) := \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n-1)}{2^{4n+2}(2n+1)!} \, C_{2n+1}^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots\,,$$

де C_n^k — біноміальні коефіцієнти. Тепер при $\operatorname{Im} z \neq 0$ лінією розгалуження функції $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}$ будемо вважати множину $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = \operatorname{Re} z, |\operatorname{Im} t| \geq |\operatorname{Im} z|\}$.

В наступній теоремі побудовано розв'язок рівняння (1) при $m \geq 1$ за допомогою компонент U_k гіперкомплексної аналітичної функції (9) (при $m = 1$ твердження теореми доведено І.П. Мельниченком і С.А. Плаксою).

Теорема 3.1.1. *Якщо $m \geq 1$ і $F \colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною функцією в опуклій у напрямку уявної осі області D_z, то функція*

$$u(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m) U_{4k+1}(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(m) U_{4k+3}(x, y) \tag{12}$$

задовольняє рівняння (1) *на множині* $\{(x, y) \in D : y \neq 0\}$. *Крім того, функція* (12) *при* $(x, y) \in D : y \neq 0$ *подається у вигляді*

$$u(x, y) = \frac{2^{(m-3)/2}}{\pi i \, |y|^{m-1}} \int\limits_{\gamma'} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2} \, dt\,,$$

де $z = x + iy$, а γ' — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, що охоплює множину $\{x + i\eta : |\eta| < |y|\}$, перетинаючи пряму $\operatorname{Re} t = x$ лише в точках z і $\bar{z}$. При цьому існує границя

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x, y) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \, \mathrm{B}\!\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) F(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, 0) \in D\,,$$

Справедлива також теорема, обернена до теореми 3.1.1.

Теорема 3.1.2. *Нехай область D є опуклою в напрямку осі Oy і $u(x, y)$ — неперервна в D та парна за змінною y функція, яка при $m \geq 1$ є розв'язком рівняння* (1) *на множині* $\{(x, y) \in D : y \neq 0\}$.

Тоді існує єдина голоморфна в D_z *функція* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ *така, що справедлива рівність* (12), *де* U_k *— компоненти головного продовження* (9) *функції* F *в область* D_ζ.

Спираючись на теореми 3.1.1, 3.1.2 і аналог теореми Рунге для головних продовжень (9) аналітичних функцій комплексної змінної в область D_ζ, в теоремі 3.1.3 побудовано поліноми, які дають рівномірне наближення узагальнених осесиметричних потенціалів на компактних підмножинах області D.

В підрозділі 3.2 доведено деякі аналоги теореми 3.1.1 — теореми 3.2.1, 3.2.2. В них побудовано розв'язки рівняння (1) при $m > 1$ в зовнішності замикання обмеженої області D, опуклої у напрямку осі Oy, за допомогою компонент аналітичних функцій, які приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}_\mathbb{C}$ (при $m = 1$ аналогічні результати одержано І.П. Мельниченком і С.А. Плаксою).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглядається рівняння узагальненого осесиметричного потенціалу, яке має фундаментальне значення в ряді розділів математичного аналізу та математичної фізики.

Основні результати дисертації такі:

1. Встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу через аналітичні функції комплексної змінної, задані в довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. Для певних класів узагальнених осесиметричних потенціалів встановлено взаємно однозначну відповідність між ними та аналітичними функціями комплексної змінної, яка задається вказаними інтегральними зображеннями.

2. Встановлено достатні умови неперервного продовження інтегральних зображень узагальненого осесиметричного потенціалу на границю області та одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень.

3. Здійснено редукцію деяких крайових задач для узагальнених осесиметричних потенціалів до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі за розширених умов на границю області.

4. Знайдено алгоритм побудови узагальнених осесиметричних потенціалів за компонентами моногенних функцій гіперкомплексної змінної, які будуються в явному вигляді як головні продовження аналітичних функцій комплексної змінної.

Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані в теорії узагальнених аналітичних функцій, в теорії крайових задач для розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу з виродженням та їх застосуваннях у математичній фізиці, гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Grishchuk S.V., Plaksa S.A. On constructions of generalized axial-symmetric potentials by means componens of hypercomplex analytic functions // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. **2**, №.3. – P. 67 – 83.
2. Грищук С.В. О непрерывной продолжимости обобщенных осесимметричных потенциалов на границу области // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. **3**, №.4. – С. 347 – 357.
3. Грищук С.В., Плакса С.А. Вирази розв'язків рівняння Ейлера–Пуассона–Дарбу через компоненти гіперкомплексних аналітичних функцій // Доп. НАН України. – 2006.– № 8. – С. 18 – 24.
4. Грищук С.В., Плакса С.А. Интегральные представления обобщенных осесимметричных потенциалов // Краевые задачи для потенциальных полей.– Киев, 2007. – 60 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2). – С. 32 – 59.
5. Grishchuk S.V. Expressions of solutions of the Euler – Poisson – Darboux equation via components of hypercomplex analytic functions // International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis (Kiev, September 25–30, 2005): Abstr.– Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2005.– P. 18 – 20.
6. Grishchuk S.V. Integral expressions of generalized axially-symmetric potentials // Bogolubov Readings 2007 Dedicated to Yu.A. Mitropolskii on the Occasion of His 90-th Birthday (Zhitomir — Kiev, 19 August – 2 September 2007): Abstr.– Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2007.– P. 28 – 30.

АНОТАЦІЇ

Грищук С. В. Інтегральні зображення в крайових задачах для узагальненого осесиметричного потенціалу. — Рукопис. — Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. Інститут математики НАН України, Київ, 2008.

В дисертації розглядається рівняння узагальненого осесиметричного потенціалу, яке має фундаментальне значення в ряді розділів математичного аналізу та математичної фізики. Встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу через аналітичні функції комплексної змінної, задані в довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. Для певних класів узагальнених осесиметричних потенціалів встановлено взаємно однозначну відповідність між ними та аналітичними функціями комплексної змінної, яка задається згаданими інтегральними зображеннями. Здійснено редукцію деяких крайових задач для узагальнених осесиметричних потенціалів до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі за послаблених (у порівнянні з попередніми результатами) умов на границю області. Здійснено характеризацію розв'язків рівняння узагальненого осесиметричного потенціалу за допомогою моногенних функцій, які приймають значення в деякій нескінченновимірній комутативній банаховій алгебрі.

Ключові слова: узагальнений осесиметричний потенціал, інтегральні зображення, крайові задачі, інтегральні рівняння, комутативна банахова алгебра, моногенні функції.

Грищук С. В. Интегральные представления в краевых задачах для обобщенного осесимметричного потенциала. — Рукопись. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 2008.

Диссертация посвящена исследованию решений уравнения обобщенного осесимметричного потенциала:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\;\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0, \qquad m=\mathrm{const}>0$$

в ограниченной односвязной области D, симметричной относительно оси Ox.

Установлено, что этому уравнению удовлетворяют функции вида

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi i|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}}F(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt\,,\qquad z=x+iy,\ y\neq 0\,,$$

где F — голоморфная в области $D_z:=\{z=x+iy:(x,y)\in D\}$ функция, $\Gamma_{z\bar z}$ — гладкая дуга в области D_z, соединяющая точки z и $\bar z$, а непрерывная ветвь аналитической по t функции $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}$ выделяется при помощи разреза комплексной плоскости вдоль жордановой кривой, последовательно соединяющей точки $z,\infty,\bar z$, не пересекающей вещественную прямую и имеющей с кривой $\Gamma_{z\bar z}$ общими только точки $z,\bar z$.

Установлены достаточные условия непрерырвной продолжимости интегральных представлений обобщенного осесимметричного потенциала указанного вида на границу области и получена оценка локального модуля непрерывности их граничных значений.

Доказано, что приведенное интегральное выражение задает взаимно однозначное соответствие между голоморфными в D_z функциями комплексной переменной, принимающими вещественные значения в точках действительной оси $\mathbb{R}$, и обобщенными осесимметричными потенциалами, которые при $m\in[1,2)$ принадлежат классу $C_2(D^+)$ дважды непрерывно дифференцируемых в области $D^+:=$ $:=\{(x,y)\in D:y>0\}$ функций, непрерывно продолжимых на множество $\{(x,0):x\in D_z\cap\mathbb{R}\}$, а при $m\in(0,1)$ — подклассу $N_2(D^+)$ класса $C_2(D^+)$, состоящему из функций $u(x,y)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}y^m\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0\qquad\forall\,(x_0,0)\in\{(x,0):x\in D_z\cap\mathbb{R}\}.$$

Для доказательства рассматриваются следующие краевые задачи:

задача E: при $1\le m<2$ найти обобщенный осесимметрический потенциал класса $C_2(D^+)$, который принимает на кривой Γ, являющейся пересечением границы ∂D области D с полуплоскостью $\{(x,y):y\ge 0\}$, значения заданной непрерывной функции u_Γ;

задача N_0: при $m\in(0;1)$ найти обобщенный осесимметрический потенциал класса $N_2(D^+)$, принимающий на Γ значения заданной непрерывной функции u_Γ.

Метод доказательства основывается на редукции указанных краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, которая осуществляется при ослабленных (по сравнении с предыдущими исследованиями) ограничениях на границу области.

Установлена характеризация решений уравнения обобщенного осесимметричного потенциала в симметричных относительно оси Ox и при этом выпуклых в направлении оси Oy областях с помощью моногенных функций, принимающих значения в некоторой бесконечномерной комутативной банаховой алгебре. При этом найдены алгоритмы построения обобщенных осесимметричных потенциалов по компонентам гиперкомплексных моногенных функций, которые строятся в явном виде как продолжения аналитических функций комплексной переменной.

Ключевые слова: обобщенный осесимметричный потенциал, интегральные представления, краевые задачи, интегральные уравнения, коммутативная банахова алгебра, моногенные функции.

Grishchuk S.V. Integral expressions in boundary problems for generalized axial-symmetric potential. — Manuscript.— The thesis is presented for the scientific degree of the Candidate of Physics and Mathematics by Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2008.

We considered the equation of generalized axial-symmetric potential (another name — the equation of GASPT) playing a great importance in some problems in mathematical analysis and mathematical physics. We have obtained integral expressions of generalized axial-symmetric potential via complex-valued analytic functions in a simply connected domain which is symmetric with respect to the real axis. For some classes of generalized axial-symmetric potentials, we have proved a one-to-one correspondence (which is represented by means of these integral formulas) between them and тне set of complex-valued analytic functions taking real values on the real axes.

If the boundary of domain satisfies some conditions which are weakened in comparison with previous results, then some boundary problems for generalized axial-symmetric potentials are reduced to the Fredholm integral equations of the second kind on the real axes. We have obtained a characterization of solutions of the equation of GASPT by means of components of monogenic functions taking values in an infinite-dimensional commutative associative Banach algebra.

Key words: generalized axial-symmetric potential, integral expressions, boundary problems, integral equations, commutative Banach algebras, monogenic functions.

Підписано до друку 29.01.2008. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Умов. друк. арк. 1,4.Тираж 100 пр. Зам. 26.

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.