Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Грищук Сергій Вікторович

УДК 517.9

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Науковий керівник
ПЛАКСА
Сергій Анатолійович
доктор фіз.–мат. наук

Київ — 2007

ЗМІСТ

В С Т У П

Актуальність теми. Рівняння теорії узагальненого осесиметричного потенціалу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0, \quad m=\mathrm{const}>0 \tag{1}$$

має фундаментальне значення в ряді розділів математичної фізики, гідродинаміки, аеродинаміки, теорії пружності. Воно природньо з'являється при вивченні рівняння Лапласа з певними видами симетрії області визначення або розв'язків. Зокрема, якщо m є натуральним числом, то рівняння (1) задовольняють гармонічні функції $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m+2})$, визначені в $(m+2)$-вимірному дійсному просторі $\mathbb{R}^{m+2}$, за умови, що вони, так би мовити, "володіють симетрією" відносно осі Ox_1 і розглядаються в меридіанній площині $\left\{(x,y):\,x=x_1,\,y=\sqrt{x_2^2+\cdots+x_{m+2}^2}\right\}$: $u(x,y)\;:=\;\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m+2})$. Відзначимо також, що рівняння (1) є об'єктом вивчення узагальненої осесиметричної теорії потенціалу, яка має численні застосування у фізиці (див., наприклад, [79, 80]).

Важливими з точки зору застосувань є крайові задачі для розв'язків рівняння (1) в областях, що лежать у напівплощині $\{(x,y):\,y>0\}$ і прилягають до відрізків осі Ox. М.В. Келдиш встановив (див. [20]), що коректні постановки крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням можуть суттєво відрізнятися від коректних постановок для невироджених рівнянь. Так, для рівняння (1) коректні постановки крайових задач у ряді випадків потребують, щоб відрізки лінії виродження $y=0$ були вільними від крайових умов.

Дослідження з теорії диференціальних рівнянь еліптичного типу другого порядку з виродженням, а також еліптичних систем першого порядку з виродженням відображені в роботах і монографіях багатьох авторів, зокрема, Е.Т. Уіттекера і Д.Н. Ватсона [63], Г. Бейтмена [69], М.В. Келдиша [20], М.О. Лаврентьєва і Б.В. Шабата [29], А.В. Біцадзе [2], Л.Г. Лойцянського [30], А. Вейнштейна [78, 79], П. Хенрічі [75], А. Маккі [77], А. Х'юбера [76], А. Ерделyї [74], Р.П. Гілберта [70], Ю.П. Кривенкова [24], Л.Г. Михайлова [38], Н. Раджабова [54, 56], І.І. Данилюка [12, 13], С.А. Терсенова [60, 61], Г.М. Положого [49], М.Б. Капілевича [16], Л.Д. Кудрявцева [26, 27], А.А. Вашаріна і П.І. Лізоркіна [4], І.О. Кіпріянова [21], М.М. Смирнова [58, 59] та інших.

Проте, не зважаючи на значну кількість досліджень з теорії крайових задач для вказаних рівнянь і їх систем, актуальною залишається розробка методів їх розв'язання, які базуються на інтегральних зображеннях розв'язків. При цьому досить ефективними є зображення розв'язків через аналітичні функції, що дає можливість застосовувати до крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням методи теорії крайових задач аналітичних функцій комплексної змінної і сингулярних інтегральних рівнянь.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Інституті математики НАН України в рамках наукових тем "Дослідження з комплексного аналізу, теорії потенціалу, диференціальних та топологічних властивостей відображень і множин" (номер держреєстрації 0101U000700) і "Аналітичні та геометричні проблеми комплексного аналізу " (номер держреєстрації 0106U000156).

Мета і завдання дослідження. Об'єктом дослідження є рівняння (1) і його розв'язки.

Предметом дослідження є вивчення граничних властивостей узагальненого осесиметричного потенціалу та характеризація розв'язків рівняння (1) за допомогою моногенних функцій, які приймають значення в деякій комутативній банаховій алгебрі.

Метою дисертаційної роботи є встановлення інтегральних зображень розв'язків рівняння (1) через аналітичні функції комплексної змінної і розробка на їх основі функціонально-аналітичного методу розв'язання крайових задач для узагальнених осесиметричних потенціалів.

Для досягнення мети в роботі:

– встановлюються достатні умови неперервного продовження узагальнених осесиметричних потенціалів на границю області і вивчаються їх граничні властивості;

– розробляється схема редукції деяких крайових задач для розв'язків рівняння (1) до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі;

– знаходиться комутативна банахова алгебра така, що моногенні функції зі значеннями в ній, які будуються як продовження аналітичних функцій комплексної змінної, дають ефективний спосіб побудови розв'язків рівняння (1).

При розв'язанні цих задач застосовуються методи теорії аналітичних функцій комплексної змінної і сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші.

Наукова новизна одержаних результатів. Наукову новизну мають такі результати дисертації.

1. Встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу через голоморфні комплексної змінної, задані в довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. При $m \in (0;2)$ для певних класів узагальнених осесиметричних потенціалів доведено взаємну однозначність відповідності між розв'язками рівняння (1) та голоморфними функціями комплексної змінної, яка задається вказаними інтегральними зображеннями.

2. Встановлено достатні умови неперервного продовження інтегральних зображень узагальненого осесиметричного потенціалу на границю області та одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень.

3. Здійснено редукцію деяких крайових задач для розв'язків рівняння (1) при $m \in (0;2)$ до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

на дійсній осі за розширених умов на границю області.

4. Знайдено алгоритми побудови розв'язків рівняння (1) при $m > 1$ за компонентами моногенних функцій гіперкомплексної змінної, які будуються в явному вигляді як продовження аналітичних функцій комплексної змінної.

Зупинимось детальніше на описі основних результатів дисертації. Їх виклад починається з розділу 2.

В розділі 2 встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу у довільній обмеженій однозв'язній і симетричній відносно осі Ox області D декартової площини xOy.

Позначимо через D_z область комплексної площини $\mathbb{C}$, конгруентну області D, а через b_1 і b_2 — точки перетину її границі ∂D_z з дійсною віссю $\mathbb{R}$, при цьому умовимося, що $b_1 < b_2$. Для кожної точки $z \in D_z$, для якої $\operatorname{Im} z \neq 0$, зафіксуємо довільну гладку жорданову криву $\Gamma_{z\bar{z}}$, що лежить в області D_z і з'єднує точки z, $\bar{z}$. Умовимося вважати початком кожної кривої $\Gamma_{z\bar{z}}$ точку з від'ємною уявною частиною.

Якщо $z \in \overline{D_z}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{\alpha}$ розуміємо як неперервну вітку аналітичної функції $L(t) := \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{\alpha}$ з розрізом вздовж жорданової кривої, що послідовно з'єднує точки z, ∞, $\bar{z}$ і має з множиною $\Gamma_{z\bar{z}} \cup \mathbb{R}$ спільними лише точки z, $\bar{z}$, таку, що $L(t) > 0$ при всіх $t > \max\limits_{\tau \in \Gamma_{z\bar{z}}} \operatorname{Re} \tau$.

В підрозділі 2.1 доведено пряму теорему стосовно зображень узагальненого осесиметричного потенціалу, де встановлено інтегральний вираз, який кожній голоморфній в D_z функції ставить у відповідність розв'язок рівняння (1) на множині $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$ при $m > 0$.

Теорема 2.1.1. *Якщо $m > 0$ і функція F голоморфна в області D_z, то функція*

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} F(t)\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{m/2-1}\, dt\,, \quad z = x + iy, \qquad (2)$$

задовольняє рівняння (1) *на множині* $\{(x,y)\in D : y\neq 0\}$. *При цьому*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\,F(x_0) \qquad \forall\, x_0\in\mathbb{R} : (x_0,0)\in D\,,$$

де $\mathrm{B}(p,q)$ *– бета-функція Ейлера.*

Формула (2) узагальнює інтегральні зображення розв'язків рівняння (1), одержані А. Маккі [77], П. Хенрічі [75], Ю.П. Кривенковим [24], Н. Раджабовим [54]. Схожі за виглядом з виразом (2) інтегральні зображення x^m-аналітичних функцій одержано Г.М. Положим [49].

В підрозділі 2.2 встановлено умови, що є достатніми для неперервного продовження інтегрального зображення (2) на границю області D_z, і одержано оцінку локального модуля неперевності його граничних значень.

Нехай n — невід'ємне ціле число, яке задовольняє нерівність $2n<m\leq 2n+2$. Ввівши в розгляд функцію $u(z):=u(x,y)$ комплексної змінної $z:=x+iy$, після інтегрування частинами n разів в рівності (2) одержимо

$$u(z)=\frac{k(m)}{2\pi i\,|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}} \mathcal{F}_n(t)Q_n(t-x,y)\Big((t-z)(t-\bar z)\Big)^{-\nu_m}dt, \qquad (3)$$

де $\nu_m:=\{1-\frac{m}{2}\}$ — дробова частина числа $1-\frac{m}{2}$,

$$k(m):=\begin{cases} 1 & \text{при } n=0,\\ 2^{n/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n}{2}+1) & \text{при } n=2,4,\ldots,\\ -2^{(n+1)/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n-1}{2}) & \text{при } n=1,3,\ldots,\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_n(t):=\begin{cases} F(t) & \text{при } n=0,\\ \int\limits_{t_0}^{t}F(\tau)\,d\tau & \text{при } n=1,\\ \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t_{n-1}}\int\limits_{t_0}^{t_{n-2}}\ldots\int\limits_{t_0}^{t_1}F(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2\ldots\,dt_{n-1} & \text{при } n=2,3,\ldots\end{cases}$$

($t,t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}\in D_z$ і інтегрування ведеться вздовж гладких дуг, що належать D_z та з'єднують кінці інтегрування), $Q_n(t-x,y)$ — конктретний многочлен степеня n від $t-x$ та y, записаний у роботі в явному вигляді.

Нехай тепер $\gamma := \partial D_z$ є замкненою жордановою спрямлюваною кривою. Позначимо через L_p банахів простір сумовних у степені p функцій $f\colon \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_p} := \Big(\int\limits_{\gamma} |f(t)|^p |dt|\Big)^{1/p}$, а через L_∞ — банахів простір істотно обмежених функцій $f\colon \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_\infty} :=$ $:= \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\gamma} |f(t)|$. Позначимо також через E_p клас Смирнова (див. [52, с. 203]) функцій, заданих в D_z, а через E_∞ — клас голоморфних і обмежених в D_z функцій.

Позначимо через $d(z_1, z_2)$ діаметр тієї дуги кривої γ, яка з'єднує точки $z_1, z_2 \in \gamma$ і має не більшу довжину. Будемо говорити, що γ є *k-кривою типу "діаметр-хорда"*, якщо відношення $d(z_1, z_2)/|z_1 - z_2|$ обмежене числом k при довільному виборі точок $z_1, z_2 \in \gamma$. Область D_z назвемо *k-областю*, якщо дві довільні точки множини $\overline{D_z}$ можна з'єднати k-кривою типу "діаметр-хорда" з фіксованим значенням k, і при цьому всі точки зазначеної кривої, за винятком, можливо, кінців, належать області D_z.

Нехай $\theta(\varepsilon) := \sup\limits_{z\in\gamma} \operatorname{mes} \{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$ — метрична характеристика кривої γ, введена В.В. Салаєвим [57] (тут mes — лінійна міра Лебега на γ).

У наступній теоремі наведено достатні умови неперервного продовження функції (3) на границю γ області D_z, при цьому граничне значення функції $u(z)$ в точці $t \in \gamma \cup \{z \in D_z : \operatorname{Im} z = 0\}$ позначається через $u(t)$.

Теорема 2.2.1. *Нехай γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, симетрична відносно дійсної осі і така, що $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Якщо $m > 0$ і $\mathfrak{F}_n$ належить класу E_p, де $1 < p \le \infty$ при $m = 2n+2$ і $\{\frac{m}{2}\}^{-1} < p \le \infty$ при $m \ne 2n+2$, то функція (3) неперервно продовжується з області D_z у точки множини $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$. При цьому* *для кожного* δ *такого, що* $0<\delta<(1/8)\max\limits_{t\in\gamma}|\mathrm{Im}\,t|$, *та довільних точок* $z_0,z_1\in\gamma\setminus\{b_1,b_2\}$ *таких, що* $|\mathrm{Im}\,z_0|\ge\delta$ *і* $|z_1-z_0|\le|\mathrm{Im}\,z_0|/2$, *виконується нерівність*

$$|u(z_1)-u(z_0)|\le c\,\|\mathcal{F}_n\|_{L_p}\Big(d(z_1,z_0)^{1-\nu_m-\chi_p}+\omega_{m,p}(|z_1-z_0|)\Big), \qquad (4)$$

де $\chi_p:=1/p$ *при* $p<\infty$ *і* $\chi_p:=0$ *при* $p=\infty$,

$$\omega_{m,p}(\varepsilon):=\begin{cases} \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n<m<2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1}<p\le\infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } m=2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1}<p<\infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}+\varepsilon^{\nu_m}\ln\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при} \\ \qquad m=2n+1 \text{ і } p=\infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n+1<m<2n+2 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1}<p<(2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1} \text{ або } p=\infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}+\varepsilon^{\nu_m}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2\nu_m} \quad \text{при} \\ \qquad 2n+1<m<2n+2 \text{ і } p=(2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1}, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}+\varepsilon^{\nu_m} \quad \text{при } 2n+1<m<2n+2 \text{ і} \\ \qquad (2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1}<p<\infty, \\ 0 \qquad \text{при } m=2n+2 \text{ і } 1<p\le\infty, \end{cases}$$

а стала c *не залежить від* $\mathcal{F}_n,z_0,z_1$.

Якщо, крім того, для точки b_j, *де* $j=1$ *або* $j=2$, *існує окіл, перетин якого з* D_z *є* k*-областю, і при цьому існує границя*

$$F(b_j):=\lim_{z\to b_j,z\in D_z}\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{F}_n(z),$$

то існує також границя

$$\lim_{z\to b_j,z\in D_z}u(z)=\frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}F(b_j).$$

Очевидним наслідком оцінки (4) є відповідна оцінка для локального модуля неперервності $\omega_{\gamma,z_0}(u,\varepsilon) := \sup\limits_{t\in\gamma,\,|t-z_0|\le\varepsilon} |u(t)-u(z_0)|$.

В підрозділі 2.3 для функції $u(x,y)$ з деяких відомих класів розв'язків рівняння (1) при $m\in(0;2)$ сформульовано теореми (обернені до теореми 2.1.1) про існування голоморфної функції F такої, що виконується рівність (2).

Позначимо $D^+ := \{(x,y)\in D : y>0\}$. З теореми 2.1.1 випливає, що розв'язок (2) рівняння (1) належить класу $C_2(D^+)$ функцій, кожна з яких неперервна на множині $D^+\cup\{(x,0)\in D : b_1<x<b_2\}$ і двічі неперервно диференційовна в D^+. Крім того, функція (2) належить підкласу $N_2(D^+)$ класу $C_2(D^+)$, що складається з функцій, які задовольняють додаткову умову

$$\lim_{(x_0,y)\to(x_0,0)} y^m \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \forall\, x_0\in(b_1,b_2)\,.$$

Теорема 2.3.1. *Для кожної функції $u(x,y)$ класу $C_2(D^+)$, яка при $m\in[1,2)$ задовольняє рівняння (1) в області D^+, існує єдина голоморфна функція $F: D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$F(\bar z) = \overline{F(z)} \qquad \forall\, z\in D_z \tag{5}$$

і така, що рівність (2) виконується при всіх $(x,y)\in D^+$.

Теорема 2.3.2. *Для кожної функції $u(x,y)$ класу $N_2(D^+)$, яка при $m\in(0,1)$ задовольняє рівняння (1) в області D^+, існує єдина голоморфна функція $F: D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову (5) і така, що рівність (2) виконується при всіх $(x,y)\in D^+$.*

Теореми 2.3.1, 2.3.2 при $m\in(0,2)$ узагальнюють аналогічні результати Ю.П. Кривенкова [24] на області більш загального вигляду.

Доведення теорем 2.3.1, 2.3.2 здійснюється в підрозділі 2.4 методом, розробленим С.А. Плаксою для рівняння (1) при $m=1$ в роботі [46]. Схема доведення включає, зокрема, редукцію інтегрального рівняння (2) з шуканою функцією F до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду на дійсній осі і дає можливість одержати (при деяких природніх припущеннях про границю області і задану функцію) формули розв'язків наступних крайових задач для рівняння (1):

задача E: при $1 \le m < 2$ знайти розв'язок рівняння (1) класу $C_2(D^+)$, який приймає на кривій Γ, що є перетином границі ∂D області D з напівплощиною $\{(x, y) : y \ge 0\}$, значення заданої неперервної функції u_Γ;

задача N_0: при $m \in (0; 1)$ знайти розв'язок рівняння (1) класу $N_2(D^+)$, який приймає на Γ значення заданої неперервної функції u_Γ.

Засобом розв'язання задач E і N_0 є допоміжна задача для заданої функції u_Γ про відшукання голоморфної в D_z і неперервної в $\overline{D_z}$ функції F, яка задовольняє додаткову умову симетрії (5), а її граничні значення задовольняють інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i\,|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma^{\gamma}_{z\bar{z}}} F(t)\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{m/2-1}\,dt = u_{\partial D}(x, y)\,,$$

де $(x, y) \in \partial D : y \ne 0$, $z = x + iy$, $\Gamma^{\gamma}_{z\bar{z}}$ позначає дугу границі області D_z γ з кінцями z, $\bar{z}$, що містить точку b_1, при цьому початком кривої $\Gamma^{\gamma}_{z\bar{z}}$ вважаємо ту з точок z, $\bar{z}$, уявна частина якої від'ємна, $u_{\partial D}(x, y) := u_\Gamma(x, |y|)$.

При розв'язанні даної допоміжної задачі використовується деяке конформне відображення $\sigma(Z)$ одиничного круга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z таке, що $\sigma(-1) = b_1$, $\sigma(1) = b_2$ і образом півкруга $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1, \operatorname{Im} Z > 0\}$ при відображенні $\sigma(Z)$ є область $\{z \in D_z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Легко бачити, що таке відображення існує і при всіх $Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| \le 1\}$ задовольняє умову $\sigma(\bar{Z}) = \overline{\sigma(Z)}$.

Введемо в розгляд функцію

$$M(Z, T) := \left(\frac{(T - Z)(T - \bar{Z})}{(\sigma(T) - \sigma(Z))(\sigma(T) - \sigma(\bar{Z}))}\right)^{1-m/2},$$

яку при кожному фіксованому $Z \ne -1$ будемо розуміти як неперервну вітку аналітичної функції в одиничному крузі за змінною T, таку, що $M(Z, -1) > 0$.

Розглянемо також функцію

$$m(\xi,\tau):=-i\,\frac{\exp\left(i\pi m/2\right)}{4^{1-m/2}}\,\frac{(\tau+i)^{2-m}}{\tau+i}\,M\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\,,\frac{\tau-i}{\tau+i}\right),\quad \xi,\tau\in\mathbb{R}\,,$$

де голоморфна вітка функції $(\tau+i)^{2-m}$ визначена поза розрізом $\{\tau=i\eta:\eta\le -1\}$ і приймає значення $-\exp(-i\pi m/2)$ при $\tau=0$.

Нехай $\omega\colon[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ — монотонно неспадна неперервна функція, для якої виконується рівність $\omega(0)=0$, а також існують сталі C і ν такі, що при всіх $k>1$ і всіх $\xi>0$ справедлива нерівність $\omega(k\xi)\le C\,k^{\nu}\,\omega(\xi)$. Тоді при $\alpha\in(0;1]$ введемо в розгляд клас $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}$ функцій $g:\partial D_z\longrightarrow\mathbb{C}$, для кожної з яких виконується умова

$$|g(z_1)-g(z_2)|\le\, c\,\omega(r_{z_1z_2})\left(\frac{|z_1-z_2|}{r_{z_1z_2}}\right)^{\alpha}\quad\forall\, z_1,z_2\in\partial D_z\,,$$

де $r_{z_1z_2}:=\max\{|z_1-b_1||z_1-b_2|,|z_2-b_1||z_2-b_2|\}$ і стала c не залежить від z_1,z_2.

Позначимо через $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}(\partial D)$ клас функцій $g_{\partial D}\colon\partial D\longrightarrow\mathbb{R}$, для кожної з яких функція g, яка визначається рівністю $g(x+iy):=g_{\partial D}(x,y)$ при $(x,y)\in\partial D$, належить класу $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}$.

В теоремі 2.4.1 у випадку $0<m<2$ наведені достатні умови редукції допоміжної задачі для заданої граничної функції $u_{\partial D}(x,y)\in\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}(\partial D)$ до наступного сингулярного інтегрального рівняння на дійсній осі:

$$A(\xi,\xi)\,U_p(\xi)+\frac{2\xi}{\pi}B(\xi,\xi)\int\limits_0^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\;d\tau-$$

$$-\frac{4m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi^2}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\left(\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau\,U_p(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\right)d\tau-$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\tau}^{\xi}\frac{U_p(\tau)\,s\,(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau=f_*(\xi)\;\forall\,\xi>0,\qquad(6)$$

в якому

$$A(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Re}\,m(\xi,\tau),\qquad B(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Im}\,m(\xi,\tau),$$

$$f_*(\xi) := u_*(\xi)\xi^{1-m} - m\,\xi \int\limits_0^\xi \frac{s(u_*(s) - u_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}}\,ds$$

і функція u_* виражається через задану функцію $u_{\partial D}$ рівністю

$$u_*(\xi) := \frac{|y|^{m-1}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}}\Big(u_{\partial D}(x,y) - u_{\partial D}(b_2,0)\Big), \quad x+iy = \sigma\Big(\frac{\xi - i}{\xi + i}\Big).$$

Через $C(\mathbb{R})$ позначимо банахів простір функцій $g_*\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, неперервних на розширеній дійсній прямій $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, з нормою $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})} := := \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |g_*(\tau)|$, а через $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$ — клас функцій $g_* \in C(\mathbb{R})$, модулі неперервності яких задовольняють умовам Діні

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta < \infty$$

при всіх $a > 0$, де $\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon) := \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}:|\tau|\ge 1/\varepsilon} |g_*(\tau_1) - g_*(\infty)|$, $\omega_G(g_*,\varepsilon) := := \sup\limits_{\tau_1,\tau_2\in G\,:\,|\tau_1-\tau_1|\le\varepsilon} |g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)|$. Позначимо через $C_e(\mathbb{R})$ підпростір банахова простору $C(\mathbb{R})$, що складається з парних функцій, а через $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$ — множину парних функцій класу $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$.

Введемо в розгляд функції

$$\widehat{m}(\xi,\tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi} \displaystyle\int\limits_\tau^\xi \frac{s(m(s,\tau) - m(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds & \text{при } \xi\tau > 0,\ |\tau| < |\xi|, \\ 0 & \text{при } \xi\tau < 0 \text{ або } \xi\tau > 0,\ |\tau| > |\xi|, \end{cases}$$

$$\widehat{A}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Re}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,, \qquad \widehat{B}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Im}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,, \qquad \widehat{f_*}(\tau) := f_*(|\tau|)\,,$$

$$k_p(\xi,\tau) := m\,\sin\frac{\pi m}{2}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}\,\widehat{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\xi \frac{\widehat{B}(\xi,\eta)}{\eta - \tau}\,d\eta\right)$$

та інтегральні оператори

$$(k_p f)(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k_p(\xi,\tau)}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,f(\tau)\,d\tau\,,$$

$$(Rf)(\xi) := (\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}\Bigg(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\,f(\xi)+$$

$$+\frac{P(\xi)}{2^m\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\tau^2+1)\left|\operatorname{Im}\sigma\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\,|\tau|}\right)^{1-m/2}\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\Bigg),$$

де $\alpha^* := \max\{0, 1-m\}$, а при визначенні функції $P(\xi) := \exp(-i\pi m/2)\times$ $\times\,(\xi+i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)^{1-m/2} + \exp(i\pi m/2)\,(\xi-i)^{m-1}\left(\sigma'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)\right)^{1-m/2}$ голоморфні вітки аналітичних функцій нормуються так, щоб $P(0)=0$.

В теоремі 2.4.2 встановлено достатні умови того, що кожний розв'язок сингулярного інтегрального рівняння (6) вигляду

$$U_p(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,, \tag{7}$$

де $U_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, одержується в результаті розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма

$$U_0(\xi) + (R(k_pU_0))(\xi) = (R\widehat{f}_*)(\xi) \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

в якому оператор $R\,k_p$ є компактним у просторі $C_e(\mathbb{R})$. При цьому рівняння (8) має єдиний розв'язок у просторі $C_e(\mathbb{R})$, який до того ж належить класу $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

В результаті редукції допоміжної задачі до рівняння (8) доведено наступне твердження.

Теорема 2.4.3. *Нехай* $0<m<2$ *і функція* $u_{\partial D}$ *належить класу* $\mathcal{H}^{\omega}_{\alpha}(\partial D)$, $m/2<\alpha\le 1$, *при цьому конформне відображення* $\sigma(Z)$ *має на колі* $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|=1\}$ *неперервну контурну похідну, яка не обертається в нуль в жодній точці цього кола і модуль неперервності якої задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ \ln^3\frac{1}{\eta}\,d\eta<\infty\,.$$

Тоді розв'язок задачі E *при* $m\in[1,2)$ *або розв'язок задачі* N_0 *при*

$m\in(0,1)$ задається формулою (2), в якій F є єдиним розв'язком допоміжної задачі і має вигляд

$$F(z)=F_0(z)+\frac{2\pi\,u_\Gamma(b_2,0)}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)},$$

де голоморфна функція F_0 виражається рівністю

$$F_0(z)=-\frac{2\sin\frac{\pi m}{2}(\xi+i)}{\pi\,\sigma'(\frac{\xi-i}{\xi+i})}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau,\quad z=\sigma\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right),\ \mathrm{Im}\,\xi>0,$$

при цьому функція U_p має вигляд (7), де U_0 є розв'язком рівняння Фредгольма (8) у просторі $C_e(\mathbb{R})$.

Розділ 2 завершується доведенням теорем 2.3.1 і 2.3.2, яке спирається на теорему 2.4.3.

В розділі 3 встановлено зв'язок між розв'язками рівняння (1) при $m>1$ в областях спеціальної форми і моногенними функціями (тобто функціями, що диференційовні за Гато), які приймають значення в деякій комутативній банаховій алгебрі.

Розглянемо комплексифікацію $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}:=\mathbb{H}\oplus i\mathbb{H}\equiv\{c=a+ib: a,b\in\mathbb{H}\}$ нескінченновимірної комутативної асоціативної банахової алгебри $\mathbb{H}:=\{a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ke_k: a_k\in\mathbb{R},\ \|a\|_{\mathbb{H}}:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty\}$, таблиця множення для елементів базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ якої запропонована І.П. Мельниченком [32]:

$$e_ne_1=e_n,\quad e_me_n=\tfrac{1}{2}\left(e_{m+n-1}+(-1)^{n-1}e_{m-n+1}\right)\quad\forall\, m\ge n\ge 1\,,$$

при цьому норма в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ задається співвідношенням $\|c\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}}:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|$, де $c=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\,e_k,\quad c_k\in\mathbb{C}$.

Нехай тепер D — область декартової площини xOy, *опукла в напрямку осі Oy*. Це означає, що область D разом з кожною своєю точкою (x,y) містить також відрізок, що з'єднує точки (x,y) та $(x,-y)$. Тоді конгруентна області D область D_z комплексної площини є *опуклою в напрямку уявної осі.* Області D поставимо також у відповідність конгруентну їй область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x,y) \in D\}$ в площині $\mu := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

В підрозділі 3.1 встановлено характеризацію розв'язків рівняння (1) при $m > 1$ в опуклій в напрямку осі Oy області D за допомогою компонент головних продовжень в область D_ζ функцій, голоморфних в області D_z. При $m = 1$ така характеризація встановлена в роботах І.П. Мельниченка і С.А. Плакси [34, 36], де для кожної функції $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, голоморфної в опуклій в напрямку уявної осі області D_z, побудовано в явному вигляді її головне продовження в область D_ζ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1 - \zeta)^{-1}F(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y)\; e_k\,, \quad \zeta := xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\,, \tag{9}$$

при цьому

$$U_1(x,y) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt, \tag{10}$$

$$U_k(x,y) := \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)} - (t-x)}{y}\right)^{k-1} dt\,, \tag{11}$$

де $z = x + iy \,:\, y \neq 0$, γ — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, що охоплює відрізок, який з'єднує точки z і $\bar z$ та є спектром елемента ζ і лінією розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ (вважаємо також, що в точках осі Ox функції (10), (11) доозначено за неперервністю).

Позначимо

$$a_k(m) := \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!}\, C_{2n}^{n}, & \text{якщо } k = 0, \\ \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!}\, C_{2n}^{n-k}, & \text{якщо } k = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

$$b_k(m) := \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n-1)}{2^{4n+2}(2n+1)!}\, C_{2n+1}^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots\,,$$

де C_n^k — біноміальні коефіцієнти. Тепер при $\operatorname{Im} z \neq 0$ лінією розгалуження функції $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-1)/2}$ будемо вважати множину $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = \operatorname{Re} z, |\operatorname{Im} t| \geq |\operatorname{Im} z|\}$.

В наступній теоремі побудовано розв'язок рівняння (1) при $m \geq 1$ за допомогою компонент U_k гіперкомплексної аналітичної функції (9) (при $m = 1$ твердження теореми доведено І.П. Мельниченком і С.А. Плаксою в [36]).

Теорема 3.1.1. *Якщо $m \geq 1$ і функція $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною в опуклій в напрямку уявної осі області D_z, то функція*

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m) U_{4k+1}(x,y) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(m) U_{4k+3}(x,y) \tag{12}$$

задовольняє рівняння (1) на множині $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$. Окрім того, функція (12) при $(x,y) \in D : y \neq 0$ подається у вигляді

$$u(x,y) = \frac{2^{(m-3)/2}}{\pi i\ |y|^{m-1}} \int\limits_{\gamma'} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2} dt\,,$$

де $z = x + iy$, а γ' — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, що охоплює множину $\{x + i\eta : |\eta| < |y|\}$, перетинаючи пряму $\mathrm{Re}\, t = x$ лише в точках z і $\bar{z}$. При цьому існує границя

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \,\mathrm{B}\!\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) F(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, 0) \in D\,.$$

Справедлива теорема, обернена до теореми 3.1.1.

Теорема 3.1.2. *Нехай область D є опуклою в напрямку осі Oy і $u(x,y)$ — неперервна в D та парна за змінною y функція, яка при $m \geq 1$ є розв'язком рівняння (1) на множині $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$. Тоді існує єдина голоморфна в D_z функція $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ така, що $u(x,y)$ подається у вигляді (12), де U_k – компоненти головного продовження (9) функції F в область D_ζ.*

Спираючись на теореми 3.1.1, 3.1.2 і аналог теореми Рунге для головних продовжень (9) аналітичних функцій комплексної змінної в область D_ζ (див. [36]), в теоремі 3.1.3 побудовано поліноми, які дають рівномірне наближення узагальнених осесиметричних потенціалів на компактних підмножинах області D.

В підрозділі 3.2 доведено деякі аналоги теореми 3.1.1 — теореми 3.2.1, 3.2.2, де побудовано розв'язки рівняння (1) при $m > 1$ в зовнішності замикання обмеженої області D, опуклої в напрямку осі Oy, за допомогою компонент аналітичних функцій, які приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ (при $m = 1$ аналогічні результати одержано І.П. Мельниченком і С.А. Плаксою в [36]).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані в теорії узагальнених аналітичних функцій, в теорії крайових задач для розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу з виродженням та їх застосуваннях у математичній фізиці, гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень, постановка задач, формулювання робочих гіпотез належать науковому керівнику — С.А. Плаксі. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, проведено особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на наукових семінарах відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник — доктор фізико-математичних наук Ю.Б. Зелінський, 2005 – 2007), на Міжнародному семінарі "Течії з вільними границями і суміжні проблеми аналізу" (Київ, Україна, 2005), на Міжнародній конференції "Комплексний аналіз і хвильові процеси в механіці" (Житомир, Україна, 2007), а також були представлені в доповідях наукового керівника С.А. Плакси на конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань та обчислень ISAAC (Катанія, Італія, 2005) і на Міжнародній конференції з комплексного аналізу і теорії потенціалу (Гебзе, Туреччина, 2006).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у статтях

[9], [10] і [71] у наукових фахових виданнях, а також у препринті Інституту математики НАН України [11]. Частково вони також висвітлені в матеріалах міжнародних конференцій [72] і [73].

Подяки. Висловлюю щиру подяку науковому керівнику С.А. Плаксі за постановку задач, корисні поради та зауваження.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

При вивченні розв'язків $(m+2)$-вимірного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{m+2}^2}=0, \tag{1.1}$$

які, так би мовити, "володіють симетрією" відносно осі Ox_1 і розглядаються в меридіанній площині $\Big\{(x,y):x=x_1,\, y=\sqrt{x_2^2+\cdots+x_{m+2}^2}\,\Big\}$, тобто $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{m+2})\equiv u(x,y)$, з'являється рівняння еліптичного типу з виродженням на осі Ox:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0, \tag{1.2}$$

яке випливає з рівняння (1.1) при $y>0$.

Тому розв'язки рівняння (1.2) при будь-якому $m>0$ називають *узагальненими осесиметричними потенціалами.* Усюди надалі, якщо не сказано інше, в рівнянні (1.2) розглядається випадок $m>0$. Зауважимо, що в ряді робіт (1.2) називається рівнянням Ейлера–Пуассона–Дарбу (див., наприклад, [14, 24, 23, 25, 56]).

Відзначимо також, що при довільному дійсному m кожний розв'язок u рівняння (1.2) за формулою

$$V(y,\vartheta,x)=\exp\{i(m-1)\vartheta/2\}\,y^{(m-1)/2}\,u(x,y)$$

породжує розв'язок рівняння

$$\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(y\,\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{1}{y^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0,$$

яке, очевидно, є тривимірним рівнянням Лапласа в циліндричних координатах y,ϑ,x, що зв'язані з декартовими координатами x_1,x_2,x_3 співвідношеннями

$$x_1=y\cos\vartheta,\quad x_2=y\sin\vartheta,\quad x_3=x\,.$$

Крім того, до рівняння (1.2) перетворенням незалежних змінних зводяться ряд інших рівнянь (див., наприклад, роботи А. Вейнштейна [78], А. Маккі [77], Ю.П. Кривенкова [25], М.Б. Капілевича [16]), які знаходять важливі застосування. Зокрема, рівняння Трікомі

$$\eta \, \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} = 0\,,$$

яке широко застосовується в газовій динаміці (див., наприклад, роботи Ф.І. Франкля [64, 66, 67]), при $\eta > 0$ заміною змінних $\xi = x$, $\eta = (3y/2)^{2/3}$ зводиться до рівняння (1.2), в якому $m = 1/3$.

Вагомим надбанням математики є описання плоских потенціальних полів аналітичними функціями комплексної змінної. Це описання базується на зв'язку між розв'язками двовимірного рівняння Лапласа і аналітичними функціями комплексної змінної, а саме: плоскі гармонічні функції (розв'язки двовимірного рівняння Лапласа), спряжені між собою умовами Коші–Рімана, утворюють комплексний потенціал, який є аналітичною функцією комплексної змінної. Ефективність застосування методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної до дослідження плоских потенціальних полів спонукає математиків до відшукання аналогічних методів для просторових полів.

В зв'язку з цим зазначимо, що розв'язок рівняння (1.2) є компонентою узагальненої аналітичної функції $W(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексної змінної $z = x + iy$, що задовольняє рівняння

$$2\, \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} - \frac{m}{z - \bar{z}} \, \Big(W(z) - \overline{W(z)} \Big) = 0\,, \tag{1.3}$$

де $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Рівняння (1.3) є комплексною формою узагальненої системи Коші–Рімана з сингулярною лінією $y = \operatorname{Im} z = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{m}{y}\, v & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

В монографії І.Н. Векуа [5] розвинено теорію узагальнених аналітичних функцій, які задовольняють рівняння

$$\frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} + a(z)W(z) + b(z)\overline{W(z)} = 0 \tag{1.5}$$

з сумовними в степені $p > 2$ в області D_z коефіцієнтами a і b. Узагальнення цієї теорії на випадок точкових сингулярностей та слабко степеневих особливостей на лініях у коефіцієнтів a, b рівняння (1.5) здійснено в монографії Л.Г. Михайлова [38]. Зауважимо, що теорія узагальнених аналітичних функцій, розвинена в монографіях [5, 38], описує властивості розв'язків рівняння (1.3) лише поза околами дійсної осі, проте в цілому рівняння (1.3) не охоплюється цією теорією, оскільки його коефіцієнти мають особливість більш високого порядку на дійсній осі. Якісні аналітичні властивості розв'язків сингулярного на осі Ox рівняння (1.2) та його узагальнень досліджено в роботах Ердельї [74], Х'юбера [76], Маккі [77], Вейнштейна [78] і в монографії Р.П. Гілберта [70].

В монографії Г.М. Положого [49] розвинено теорію p-аналітичних функцій комплексної змінної, частинним випадком яких при $p = x^m$ є так звані x^m-аналітичні функції. При цьому перша (дійсна) компонента функції $f(y + ix)$ задовольняє рівняння (1.2) при будь-якому $m > 0$ за умови, що $f(z)$ є x^m-аналітичною функцією змінної $z = x + iy$.

В роботах І.П. Мельниченка [31, 32, 33] розвинено алгебраїчно-аналітичний підхід до еліптичних рівнянь математичної фізики, ідея якого полягає в побудові комутативних банахових алгебр таких, що моногенні (тобто диферінційовні) функції зі значеннями в цих алгебрах мають компоненти, які задовольняють задані рівняння з частинними похідними. При цьому грунтовно розвинений аналіз на банахових алгебрах (див., наприклад, монографію І.М. Гельфанда, Д.А. Райкова, Г.Є. Шилова [8] або монографію Е. Хілле і Р. Філліпса [68]) дає ефективні методи дослідження задач математичної фізики, що є аналогічними до методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Так, в роботах [31, 33] побудовано комутативні асоціативні алгебри третього рангу з головною одиницею над полем комплексних чисел такі, що компоненти розкладу гіперкомплексних моногенних функцій за елементами базисів алгебр є розв'язками тривимірного рівняння Лапласа, а в роботі [32] побудовано нескінченновимірну комутативну банахову алгебру $\mathbb{H}$ і встановлено її зв'язок з осесиметричними просторовими потенціальними полями.

В роботі І.П. Мельниченка і С.А. Плакси [36] вивчено основні алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій, що задані в спеціальних двовимірних векторних просторах і приймають значення в комплексифікації $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ алгебри $\mathbb{H}$ та розроблено ефективний спосіб побудови розв'язків рівняння (1.2) при $m = \pm 1$ за допомогою компонент розкладу за елементами базиса моногенних функцій гіперкомплексної змінної, які, в свою чергу, будуються в явному вигляді як головні продовження аналітичних функцій комплексної змінної. Крім того, в роботі І.П. Мельниченка і С.А. Плакси [37] показано, як за допомогою вказаних компонент будуються розв'язки рівняння (1.2) при $m = -3, -5, -7, \ldots$.

Один із розповсюджених методів дослідження диференціальних рівнянь еліптичного типу базується на поданні розв'язків через аналітичні функції комплексної змінної.

Розглянемо в декартовій площині xOy область D, *опуклу в напрямку осі* Oy. Це означає, що область D разом з кожною своєю точкою (x, y) містить також відрізок, що з'єднує точки (x, y) та $(x, -y)$. Через D_z позначимо область комплексної площини $\mathbb{C}$, конгруентну області D при відповідності $z = x + iy$, $(x, y) \in D$; і будемо називати область D_z *опуклою в напрямку уявної осі* у випадку, коли область D є опуклою в напрямку осі Oy.

Відомо (див., наприклад, монографію Г. Бейтмена [69, с. 408]), що функція

$$u(x,y)=\int\limits_0^{\pi} F(x+iy\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}d\tau, \tag{1.6}$$

є розв'язком рівняння (1.2) при $m>0$ в області D, опуклій в напрямку осі Oy, за умови, що функція $F(z)$ є аналітичною в області D_z. Частинний випадок формули (1.6) при $m=1$ наведено також в монографіях Е.Т. Уіттекера і Д.Н. Ватсона [63] та Л.Г. Лойцянського [30].

З результатів П. Хенрічі [75] випливає, що розв'язок $u(x,y)$ рівняння (1.2), який є аналітичним в опуклій в напрямку осі Oy області D (тобто допускає розклад в степеневий ряд за добутками степенів $(x-x_0)$ і $(y-y_0)$ в околі кожної точки $(x_0,y_0)\in D$), подається формулою

$$u(x,y)=\int\limits_0^{1}\frac{F(x+iy(1-2\tau))}{\big(\tau(1-\tau)\big)^{1-m/2}}\,d\tau\,, \tag{1.7}$$

де $F(z)$ — аналітична функція комплексної змінної $z=x+iy$.

Ю.П. Кривенков [23] показав, що у випадку опуклої в напрямку осі Oy області D формулою (1.7) подається кожний розв'язок $u(x,y)$ рівняння (1.2) при $m\geq 1$ в області $D^+ := \{(x,y)\in D:\, y>0\}$, який неперервно продовжується в точки множини $\{(x,y)\in D:\, y=0\}$. Аналогічний результат одержано Ю.П. Кривенковим [24] і при $0<m<1$, але за додаткової умови на розв'язок рівняння (1.2):

$$\lim_{y\to 0+0}\; y^m\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0\,. \tag{1.8}$$

В роботі Н. Раджабова [53] шляхом зведення рівняння (1.7) як рівняння з невідомою функцією F до інтегрального рівняння Абеля одержано формулу обернення інтегрального зображення (1.7), тобто формулу, що виражає аналітичну функцію $F(z)$ через відповідний розв'язок рівняння (1.2).

А.Я. Александров і Ю.І. Соловйов [1] при розв'язанні деяких осесиметричних задач теорії пружності використали інтегральний вираз

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{z}^{\bar z}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt\,,\qquad z=x+iy\,:\,y\neq 0 \tag{1.9}$$

в якому функція F є аналітичною в області D_z, а лінія розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}$ не перетинає відрізок, що сполучає точки z, $\bar z$ і є лінією інтегрування. При цьому функція (1.9) на множині $\{(x,y)\in D:y\neq 0\}$ задовольняє рівняння (1.2) при $m=1$. В роботі А. Маккі [77] запропоновано інтегральні зображення розв'язків рівняння (1.2), подібні за своїм виглядом до виразів (1.9).

В роботі Н.Р. Раджабова [55] для розв'язку рівняння (1.3) в опуклій у напрямку уявної осі області D_z чи в зовнішній по відношенню до D_z області $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ встановлено інтегральні зображення через аналітичну відповідно в D_z чи в $\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}$ функцію $F(z)$ у вигляді, аналогічному до виразів (1.7) та (1.9). Крім того, в [55] одержано формули обернення вказаних інтегральних зображень.

В монографії Г.М. Положого [49] дано ряд інтегральних зображень x^m-аналітичних функцій через аналітичні функції комплексної змінної та встановлено формули обернення вказаних інтегральних зображень вздовж відрізків чи променів, паралельних дійсній осі, або вздовж дуг кіл полярної, біполярної чи видозміненої біполярної системи координат. Відзначимо також, що ряд формул обернення інтегральних зображень x^m-аналітичних функцій одержано в роботах О.О. Капшивого [17], Н.О. Пахарєвої і Н.О. Вірченко [42] та Г.М. Положого і А.Ф. Улитко [51]. Зауважимо, що в роботі Г.М. Положого [50] інтегральні зображення x^m-аналітичних функцій вперше розповсюджено на симетричні відносно уявної осі області довільної форми.

Узагальнюючи попередні результати стосовно інтегральних зображень осесиметричних потенціалів, в роботах С.А. Плакси [46, 47] доведено, що в симетричній відносно осі Ox області D з обмеженою зв'язною границею кожний парний за змінною y розв'язок $\varphi(x,y)$ рівняння (1.2) при $m = 1$ (який, крім того, перетворюється в нуль на нескінченності у випадку необмеженої області D) подається формулою

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt\,, \qquad z = x + iy\,:\, y \neq 0 \qquad (1.10)$$

(в точках осі Ox функція (1.10) доозначується за неперервністю), в якій функція $F(z)$ є аналітичною в D_z, γ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в D_z, що охоплює спрямлювану криву $\Gamma_{z\bar{z}}$, яка сполучає точки z, $\bar{z}$ і є лінією розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$. В роботі [48] за тих же умов на область D одержано аналогічні результати стосовно інтегральних зображень розв'язків рівняння (1.2) при $m = -1$.

В той же час, не зважаючи на значну кількість досліджень, в теорії рівнянь еліптичного типу з виродженням залишається відкритим питання: яким інтегральним зображенням через аналітичні функції комплексної змінної задається довільний розв'язок рівняння (1.2) в області D^+, якщо D є довільною однозв'язною областю?

Важливий клас задач математичної фізики, що мають численні застосування, утворюють крайові задачі для розв'язків рівнянь еліптичного типу. М.В. Келдиш в роботі [20] описав деякі коректні постановки крайових задач для одного еліптичного рівняння другого порядку з виродженням на прямій, що показали певну відмінність цих задач від крайових задач для еліптичних рівнянь без виродження.

Розглянемо рівняння з виродженням на осі $O\xi$:

$$\eta^k \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\, u = 0\,, \quad k > 0\,, \qquad (1.11)$$

в області D^+, границя якої складається з відрізка $[b_1, b_2]$ осі $O\xi$ і гладкої дуги Γ, що спирається на цей відрізок. Вважаємо, що коефіцієнти даного рівняння є аналітичними функціями змінних ξ і η, а коефіцієнт $c(\xi,\eta)$, крім того, приймає лише недодатні значення.

За цих умов в роботі [20] розглядаються наступні крайові задачі:

задача D (задача Діріхле): знайти в області D^+ двічі неперервно диференційовний розв'язок $u(\xi,\eta)$ рівняння (1.11), який є неперервним в замкненій області $\overline{D^+}$ і приймає задані неперервні значення на її границі ∂D^+;

задача E: знайти в області D^+ двічі неперервно диференційовний розв'язок $u(\xi,\eta)$ рівняння (1.11), який приймає задані неперервні значення на кривій Γ і є обмеженим при $\eta \to 0$.

В роботі [20] доведено наступну теорему.

Теорема (М.В. Келдиш)**.** *Якщо* $0 < k < 1$, *то завжди існує розв'язок задачі* D, *а задача* E *невизначена.*

Якщо k *і* $b(\xi,\eta)$ *задовольняють одній з наступних умов:* $k = 1$ *і* $b(\xi,0) < 1$; $1 < k < 2$ *і* $b(\xi,0) \le 0$; $k \ge 2$ *і* $b(\xi,0) < 0$, *то завжди існує розв'язок задачі* D, *а задача* E *невизначена.*

Якщо ж k *і* $b(\xi,\eta)$ *задовольняють одній з таких умов:* $k = 1$ *і* $b(\xi,0) \ge 1$; $1 < k < 2$ *і* $b(\xi,0) > 0$; $k \ge 2$ *і* $b(\xi,0) \ge 0$, *то задача* D *не завжди має розв'язок, а задача* E *завжди має єдиний розв'язок.*

Ця теорема показує, що постановка крайових задач для рівняння (1.11) залежить від k і коефіцієнта $b(\xi,\eta)$. В деяких випадках гранична умова задається на всій границі області D^+ у той час, коли в інших випадках — лише на її частині Γ. Це пояснюється тим, що розв'язок $u(\xi,\eta)$ рівняння (1.11) або його похідна $\partial u/\partial\eta$ можуть, взагалі кажучи, обертатися в нескінченність на лінії виродження.

Рівняння (1.2), яке розглядається в області D^+, перетворенням незалежних змінних $\xi = x$ і $\eta = y^2/4$ зводиться до рівняння (1.11) в деякій області такого ж вигляду, як і D^+, при цьому $k = 1$, $a(\xi,\eta) \equiv \equiv c(\xi,\eta) \equiv 0$ і $b(\xi,\eta) \equiv (m+1)/2$. З наведеної теореми Келдиша випливає, що при $m \in (0,1)$ для рівняння (1.2) в області D^+ завжди розв'язна задача D, а при $m \ge 1$ — задача E.

В роботі Ю.П. Кривенкова [25] встановлено коректність деяких інших крайових задач для розв'язків рівняння (1.2) при $m \in (0,1)$. Зокрема, в [25] доведено існування і єдиність розв'язку наступної крайової задачі:

задача N_0: знайти в області D^+ двічі неперервно диференційовний розв'язок $u(x,y)$ рівняння (1.2) при $m \in (0,1)$, який є неперервним в замкненій області $\overline{D^+}$ і задовольняє додаткову умову (1.8), а також приймає на Γ задані граничні значення.

Один із способів дослідження крайових задач базується на поданні їх розв'язків у вигляді потенціалів простого чи подвійного шару, для побудови яких використовуються фундаментальні розв'язки відповідних рівнянь з частинними похідними.

В роботі А. Вейнштейна [78] побудовано фундаментальні розв'язки рівняння (1.2). Використовуючи ці фундаментальні розв'язки та виходячи з формул Гріна для операторів Ейлера–Пуассона–Дарбу, в роботі Л.Г. Михайлова і Н. Раджабова [39] одержано інтегральні зображення розв'язків рівняння (1.2) через значення цих функцій та їх нормальних похідних на границі області. Далі в роботі [39] у випадку, коли задана область є кругом, із вказаних інтегральних зображень виключено доданки, які містять нормальні похідні, і у такий спосіб, зокрема, розв'язано задачі Діріхле для розв'язків рівняння (1.2) при $m = \pm 1$ в крузі у вигляді аналогів інтеграла Пуассона.

Розвиваючи цей підхід, Н. Раджабов [56] побудував потенціали простого і подвійного шару, що асоціюються з рівнянням (1.2), за допомогою яких ним редуковано до інтегральних рівнянь Фредгольма задачу Діріхле та задачу Неймана для узагальненого осесиметричного потенціалу в області, границя якої є кривою Ляпунова.

Відзначимо також, що в роботі М.Н. Олевського [41] і монографії М.М. Смирнова [59] розв'язуються деякі крайові задачі з використанням виразів розв'язків рівняння (1.2), які будуються за допомогою гіпергеометричних функцій (в [41] це здійснено лише при $0 < m < 1$), а в роботах

Л.Д. Кудрявцева [26, 27], А.А. Вашаріна [3], А.А. Вашаріна і П.І. Лизоркіна [4] для дослідження крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням застосовуються варіаційні методи.

Інший спосіб розв'язання осесиметричних крайових задач полягає в зведенні їх до крайових задач теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Для реалізації цієї мети, як правило, застосовуються інтегральні зображення розв'язків через аналітичні функції комплексної змінної та формули їх обернення на границі області. Такого типу схеми застосування інтегральних зображень x^m-аналітичних функцій до розв'язання осесиметричних крайових задач розроблено в монографії Г.М. Положого [49], при цьому цілий ряд задач розв'язано в явному вигляді в квадратурах. До цього ж напрямку відносяться також роботи О.О. Капшивого [18, 19] та ряд інших його робіт.

У такий же спосіб в роботі Н. Раджабова [54] задачу Діріхле та задачу Неймана для розв'язків рівняння (1.2) в крузі за умови, що задані граничні значення цих розв'язків диференційовні достатню кількість разів, зведено до крайової задачі Гільберта та одержано розв'язки цих задач у явному вигляді.

В роботах І.І. Данилюка [12, 13] для розв'язків рівняння (1.3) при $m = 1$ встановлено узагальнену формулу Коші та досліджено задачу Гільберта. В роботах С.А. Терсенова [60, 61] розглядається система рівнянь, подібна до системи (1.4), і задача Діріхле для її розв'язків досліджується шляхом редукції до задачі Рімана–Гільберта.

З використанням інтегральних зображень вигляду (1.10) і на основі вивчення їх граничних властивостей, яке проведено в [44, 45], в роботах С.А. Плакси [46, 47, 48] розроблено функціонально-аналітичний метод розв'язання задач Діріхле для розв'язків рівняння (1.2) при $m = \pm 1$. При цьому здійснено редукцію задач Діріхле для осесиметричного потенціалу і функції течії Стокса до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші на дійсній осі, а в істотному для застосувань випадку, коли границя області є гладкою кривою, яка задовольняє деякі додаткові умови, одержані сингулярні інтегральні рівняння зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Зауважимо, що в роботах [46, 47] редукцію задачі Діріхле для осесиметричного потенціалу до інтегральних рівнянь Фредгольма здійснено для областей більш загального вигляду, ніж в роботі Н. Раджабова [56].

Отже, зважаючи на численні практичні застосування, актуальною проблемою є вивчення граничних властивостей узагальнених осесиметричних потенціалів і ослаблення умов на границю області, за яких крайові задачі для розв'язків рівняння (1.2) редукуються до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Висновки

Рівняння узагальненого осесиметричного потенціалу має фундаментальне значення для дослідження різноманітних рівнянь з частинними похідними, які мають численні практичні застосування.

Не зважаючи на значну кількість досліджень з теорії рівнянь еліптичного типу з виродженням на осі, актуальним залишається встановлення ефективних для застосувань інтегральних зображень їх розв'язків.

Досить ефективним є зображення розв'язків вказаних рівнянь через аналітичні функції, що дає можливість застосовувати до розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу з виродженням на осі методи теорії аналітичних функцій і сингулярних інтегральних рівнянь. Розробка таких методів є актуальною проблемою з точки зору можливих їх застосувань в математичній фізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

РОЗДІЛ 2

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ І ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

В даному розділі встановлюються інтегральні зображення розв'язків рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)+\frac{m}{y}\;\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

і розв'язуються деякі крайові задачі для них.

2.1. Пряма теорема

Нехай D – обмежена однозв'язна область декартової площини xOy симетрична відносно осі Ox. Позначимо через D_z область комплексної площини $\mathbb{C}$, що конгруентна області D при відповідності $z=x+iy$. Позначимо також через $\mathbb{R}$ дійсну вісь, а через $s[z_1,z_2]$ — відрізок комплексної площини з початком в z_1 и кінцем в z_2.

Для кожної точки $z\in D_z$, для якої $\operatorname{Im} z\neq 0$, зафіксуємо довільну гладку жорданову криву $\Gamma_{z\bar z}$, що міститься в області D_z і з'єднує точки z, $\bar z$, при цьому домовимось початком кривої вважати точку с від'ємною уявною частиною.

Якщо $z\in D_z$, $\operatorname{Im} z\neq 0$ і $\alpha\in\mathbb{R}$, то $\bigl((t-z)(t-\bar z)\bigr)^{\alpha}$ розуміємо як неперервну вітку аналітичної функції $L(t):=\bigl((t-z)(t-\bar z)\bigr)^{\alpha}$ з розрізом вздовж жорданової кривої, яка послідовно з'єднує точки z, ∞, $\bar z$ і має з множиною $\Gamma_{z\bar z}\cup\mathbb{R}$ спільними лише точки z, $\bar z$, таку, що $L(t)>0$ при всіх $t>\max\limits_{\tau\in\Gamma_{z\bar z}}\operatorname{Re}\tau$.

Позначимо $D^+:=\{(x,y)\in D: y>0\}$.

Теорема 2.1.1. *Якщо* $m > 0$ *і функція* F *голоморфна в області* D_z, *то функція*

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} F(t)\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{m/2-1}\,dt\,, \quad z = x+iy, \qquad (2.2)$$

задовольняє рівняння (2.1) *на множині* $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$. *При цьому існує границя*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\, F(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R} : (x_0,0) \in D\,, \qquad (2.3)$$

де $\mathrm{B}(p,q)$ *– бета-функція Ейлера.*

Доведення. Покажемо, що функція (2.2) задовольняє рівняння (2.1) при $(x,y) \in D^+$. З цією метою зафіксуємо додатне число $y_0 < y$ таке, що відрізок $s[x+iy_0, z]$ належить області D_z, і з урахуванням теореми Коші перепишемо рівність (2.2) у вигляді

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\, x+iy_0}} \frac{F(t)}{y^{m-1}} \Big((t-x)^2 + y^2\Big)^{m/2-1} dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i\, y^{m-1}} \Bigg(\int\limits_{s[x+iy_0,z]} + \int\limits_{s[\bar{z},x-iy_0]} \Bigg) F(t)\Big((t-z)(t-\bar{z})\Big)^{m/2-1} dt. \qquad (2.4)$$

Справедливі рівності

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\, x+iy_0}} F(t)\Bigg(\frac{(1-m)}{y^m}\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-1} +$$

$$+\frac{(m-2)}{y^{m-2}}\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-2}\Bigg)\, dt, \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\, x+iy_0}} F(t)\Bigg(\frac{m(m-1)}{y^{m+1}}\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-1} +$$

$$+\frac{(3-2m)(m-2)}{y^{m-1}}\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-2} +$$

$$+\frac{(m-2)(m-4)}{y^{m-3}}\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-3}\Bigg)\, dt. \qquad (2.6)$$

Виконуючи заміну змінної інтегрування $t = x + iy\cos\tau$, зводимо функцію w до вигляду

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_0^{\phi(y)} + \int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Big) F(x + i\,y\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau, \tag{2.7}$$

де $\phi(y) := \arccos(y_0/y)$. Далі одержуємо рівності

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{i}{2\pi}\Big(\int\limits_0^{\varphi(y)} + \int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Big) F'(x + i\,y\cos\tau)\cos\tau(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau +$$

$$+\frac{y_0}{2\pi y^m}\,(y^2 - {y_0}^2)^{m/2-1}\big(F(x+iy_0) + F(x-iy_0)\big), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_0^{\phi(y)} + \int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Big) F''(x + i\,y\cos\tau)\big((\sin\tau)^{m+1} - (\sin\tau)^{m-1}\big)\,d\tau +$$

$$+\frac{iy_0^2}{2\pi y^{m+1}}\,(y^2 - {y_0}^2)^{m/2-1}\big(F'(x+iy_0) - F'(x-iy_0)\big) +$$

$$+\frac{y_0}{2\pi}\big(F(x+iy_0) + F(x-iy_0)\big)\times$$

$$\times\left(-m\frac{(y^2 - {y_0}^2)^{m/2-1}}{y^{m+1}} + (m-2)\frac{(y^2 - {y_0}^2)^{m/2-2}}{y^{m-1}}\right). \tag{2.9}$$

Інтегруючи частинами, переписуємо рівність (2.8) у вигляді

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{i}{2\pi m}\frac{(y^2 - {y_0}^2)^{m/2}}{y^m}\big(F'(x+iy_0) - F'(x-iy_0)\big) -$$

$$-\frac{y}{2\pi m}\Big(\int\limits_0^{\phi(y)} + \int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Big) F''(x + i\,y\cos\tau)(\sin\tau)^{m+1}\,d\tau +$$

$$+\frac{y_0}{2\pi y^m}\,(y^2 - {y_0}^2)^{m/2-1}\big(F(x+iy_0) + F(x-iy_0)\big). \tag{2.10}$$

Далі, замінюючи в рівності вигляду (2.2) для $u(x+\triangle x, y)$ при достатньо малому прирості $\triangle x$ змінної x інтегрування вздовж кривої $\Gamma_{x+\triangle x-iy_0, x+\triangle x+iy_0}$ інтегруванням вздовж кривої, послідовними ланками якої є множини $s[\bar{z}+\triangle x,\ x+\triangle x-iy_0]$, $s[x+\triangle x-iy_0,\ x-iy_0]$, $\Gamma_{x-iy_0\,x+iy_0}$, $s[x+iy_0,\ x+\triangle x+iy_0]$, $s[x+\triangle x+iy_0,\ z+\triangle x]$, аналогічно рівності (2.4) одержуємо

$$u(x+\triangle x,y)=\int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\,x+iy_0}}\frac{F(t)\Big((t-x-\triangle x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}}{2\pi i\,y^{m-1}}\,dt+$$

$$+\Bigg(\int\limits_{s[x+iy_0,x+\triangle x+iy_0]}+\int\limits_{s[x+\triangle x-iy_0,x-iy_0]}\Bigg)\frac{F(t)\Big((t-x-\triangle x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}}{2\pi i\,y^{m-1}}\,dt+$$

$$+\Bigg(\int\limits_{s[x+\triangle x+iy_0,z+\triangle x]}+\int\limits_{s[\bar{z}+\triangle x,x+\triangle x-iy_0]}\Bigg)\frac{F(t)\Big((t-x-\triangle x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}}{2\pi i\,y^{m-1}}\,dt$$

і з урахуванням рівності (2.7) маємо

$$\frac{u(x+\triangle x,y)-u(x,y)}{\triangle x}=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\,x+iy_0}}\frac{F(t)}{2\pi i y^{m-1}}\frac{\Big((t-x-\triangle x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}-\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}}{\triangle x}\,dt+$$

$$+\Bigg(\int\limits_{s[x+iy_0,x+\triangle x+iy_0]}+\int\limits_{s[x+\triangle x-iy_0,x-iy_0]}\Bigg)\frac{F(t)\Big((t-x-\triangle x)^2+y^2\Big)^{m/2-1}}{2\pi i\,y^{m-1}\,\triangle x}\,dt+$$

$$+\Bigg(\int\limits_0^{\phi(y)}+\int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Bigg)\frac{\Big(F(x+\triangle x+i\,y\cos\tau)-F(x+i\,y\cos\tau)\Big)}{2\pi\ \triangle x}\,(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau.$$

Перейдемо тепер в останній рівності до границі при $\triangle x\to 0$ і одержимо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{2-m}{2\pi i\,y^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{x-iy_0\,x+iy_0}}F(t)(t-x)\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-2}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\,y^{m-1}}\,(y^2-{y_0}^2)^{m/2-1}\Big(F(x+iy_0)-F(x-iy_0)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{0}^{\phi(y)}+\int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Bigg)F'(x+i\,y\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau.$$

Аналогічно одержуємо рівність

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2-m}{2\pi i\,y^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{x-iy_0,x+iy_0}}F(t)\Bigg(-\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-2}+$$

$$+(4-m)(t-x)^2\Big((t-x)^2+y^2\Big)^{m/2-3}\Bigg)\,dt+$$

$$+\frac{(2-m)\,y_0}{2\pi y^{m-1}}\,(y^2-y_0^2)^{m/2-2}\big(F(x+iy_0)+F(x-iy_0)\big)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\,y^{m-1}}\,(y^2-y_0^2)^{m/2-1}\big(F'(x+iy_0)-F'(x-iy_0)\big)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{0}^{\phi(y)}+\int\limits_{\pi-\phi(y)}^{\pi}\Bigg)F''(x+i\,y\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau.$$

Нарешті після підстановки одержаних виразів частинних похідних функції u в рівність (2.1) з урахуванням того, що похідна $\frac{\partial u}{\partial y}$ є сумою виразів (2.5) і (2.10), а $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ є сумою виразів (2.6) і (2.9), встановимо, що u задовольняє рівняння (2.1) на множині D^+. Внаслідок парності функції (2.2) за змінною y ця функція також задовольняє рівняння (2.1) і на множині $\{(x,y)\in D: y<0\}$.

Для доведення рівності (2.3) спочатку відзначимо, що при (x,y) з достатньо малого околу точки $(x_0,0)$ з урахуванням теореми Коші інтегрування вздовж $\Gamma_{z\bar z}$ в рівності (2.2) замінюється інтегруванням вздовж відповідно орієнтованого відрізка з кінцями в точках z, $\bar z$, і далі після заміни змінної інтегрування $t=x+i|y|\cos\tau$ одержимо рівність

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}F(x+i|y|\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau\,. \tag{2.11}$$

Нарешті, виконавши граничний перехід в рівності (3.27) при $(x,y)\to(x_0,0)$, прийдемо до рівності (2.3). Теорему доведено.

Зауважимо, що в роботі [50] інтегральні зображення x^k-аналітичних функцій, схожі за своїм виглядом з виразом (2.2), мабуть, вперше були поширені на довільні області, які симетричні відносно лінії виродження відповідних рівнянь.

2.2. Граничні властивості узагальнених осесиметричних потенціалів

Домовимося, що всюди надалі в даному підрозділі $m > 0$, n — невід'ємне ціле число, яке задовольняє нерівність $2n < m \leq 2n + 2$. Позначимо через $\{m\}$ дробову частину числа m. Після інтегрування частинами n разів в рівності (2.2) перепишемо цю рівність у вигляді

$$u(z) = \frac{k(m)}{2\pi i\,|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} \mathcal{F}_n(t) Q_n(t,z) \Big((t-z)(t-\bar{z})\Big)^{-\nu_m} dt, \quad z = x+iy, \quad (2.12)$$

де $\quad u(z) \equiv u(x,y)\,, \quad \nu_m := \{1 - \frac{m}{2}\}\,,$

$$k(m) := \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2^{n/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n}{2}+1) & \text{при } n = 2,4,\ldots, \\ -2^{(n+1)/2}(m-2)(m-4)\ldots(m-\frac{n-1}{2}) & \text{при } n = 1,3,\ldots, \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_n(t) := \begin{cases} F(t) & \text{при } n = 0, \\ \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau & \text{при } n = 1, \\ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{t_{n-1}} \int\limits_{t_0}^{t_{n-2}} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau)\,d\tau\,dt_1\,dt_2 \ldots\,dt_{n-1} & \text{при } n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

(тут $t, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \in D_z$ і інтегрування ведеться вздовж гладких дуг, що належать D_z та з'єднують кінці інтегрування),

$$
Q_n(t,z):=\begin{cases}
1 & \text{при } n=0,\\
t-x & \text{при } n=1,\\
\prod\limits_{j=0}^{n/2-1}(m-2j-3)(t-x)^n+ & \\
\quad+\sum\limits_{k=1}^{n/2-1}\frac{n!}{2^k((n-2k)!)(k!)}\prod\limits_{j=k}^{n/2-1}(m-2j-3)\,y^{2k}(t-x)^{n-2k}+ & \\
\quad\ +\frac{n!}{2^{n/2}((n/2)!)}\,y^n & \text{при } n=2,4,\ldots,\\
\prod\limits_{j=0}^{(n-3)/2}(m-2j-3)(t-x)^n+ & \\
\quad+\sum\limits_{k=1}^{(n-3)/2}\frac{n!}{2^k((n-2k)!)(k!)}\prod\limits_{j=k}^{(n-3)/2}(m-2j-3)\,y^{2k}(t-x)^{n-2k}+ & \\
\quad\ +\frac{n!}{2^{(n-1)/2}(((n-1)/2)!)}\,y^{n-1}(t-x) & \text{при } n=3,5,\ldots
\end{cases}
$$

(тут суми виду $\sum\limits_{k=1}^{0}$ вважаємо рівними нулю).

Нехай тепер область D_z має замкнену жорданову спрямлювану границю γ, яка перетинає дійсну вісь в точках b_1, b_2 і при цьому $b_1<b_2$.

Позначимо через L_p банахів простір сумовних в степені p функцій $f\colon\gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_p}:=\Big(\int\limits_{\gamma}|f(t)|^p|dt|\Big)^{1/p}$, а через L_∞ — банахів простір істотно обмежених функцій $f\colon\gamma\longrightarrow\mathbb{C}$ з нормою $\|f\|_{L_\infty}:=$ $:=\operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\gamma}|f(t)|$. Позначимо також через E_p клас Смирнова (див. [52, с. 203]) функцій, заданих в D_z, а через E_∞ — клас голоморфних і обмежених в D_z функцій.

Зауважимо, що у випадку, коли крива γ задовольняє умову (див., наприклад, [57])

$$\sup_{z\in\gamma}\theta_z(\varepsilon)=O(\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0, \tag{2.13}$$

де $\theta_z(\varepsilon):=\operatorname{mes}\{t\in\gamma:|t-z|\le\varepsilon\}$ і mes означає лінійну міру Лебега на γ, то для функції $\mathcal{F}\in E_p$ при $1\le p<\infty$ виконується нерівність

$$|\mathcal{F}(z)|\le c\,(\rho(z))^{-1/p}\qquad\forall\, z\in D_z\,, \tag{2.14}$$

в якій $\rho(z) := \min\limits_{t\in\gamma} |z-t|$ і стала c не залежить від z.

Маючи на меті описання граничних властивостей узагальненого осесиметричного потенціалу (2.12) визначимо $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{-\nu_m}$ при $z \in \gamma, \operatorname{Im} z \neq 0$. У цьому випадку позначимо через $\Gamma^{\gamma}_{z\bar z}$ ту дугу кривої γ, яка з'єднує точки z, $\bar z$ і містить b_1, при цьому домовимося початком цієї дуги вважати точку з від'ємною уявною частиною. Тоді під $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{-\nu_m}$ розуміємо неперервну вітку аналітичної функції $L_m(t) := \big((t-z)(t-\bar z)\big)^{-\nu_m}$ з розрізом вздовж жорданової кривої, яка послідовно з'єднує точки z, ∞, $\bar z$ і має спільними з множиною $\overline{D}_z \cup \mathbb{R}$ лише точки z, $\bar z$, таку, що $L_m(t) > 0$ при всіх $t > b_1$.

Позначимо

$$\omega_{m,p}(\varepsilon) := \begin{cases} \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n < m < 2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p \le \infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } m = 2n+1 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < \infty, \\ |m-1|\varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m} \ln\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при} \\ \qquad m = 2n+1 \text{ і } p = \infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} \quad \text{при } 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і} \\ \qquad \{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < (2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1} \text{ или } p = \infty, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2\nu_m} \quad \text{при} \\ \qquad 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і } p = (2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1}, \\ \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)} + \varepsilon^{\nu_m} \quad \text{при } 2n+1 < m < 2n+2 \text{ і} \\ \qquad (2\{\frac{m}{2}\}-1)^{-1} < p < \infty, \\ 0 \qquad \text{при } m = 2n+2 \text{ і } 1 < p \le \infty. \end{cases}$$

Позначимо також через $d(z_1,z_2)$ діаметр тієї дуги $\gamma_{z_1z_2}$ кривої γ, яка з'єднує точки $z_1, z_2 \in \gamma$ і має не більшу довжину, тобто $d(z_1,z_2) := \sup\limits_{t_1,t_2\in\gamma_{z_1z_2}} |t_1-t_2|$. Будемо говорити, що γ є k*-кривою типу "діаметр-хорда"*, якщо відношення $d(z_1,z_2)/|z_1-z_2|$ обмежене числом k при довільному виборі точок $z_1, z_2 \in \gamma$. Область D_z назвемо k-*областю*, якщо дві довільні точки її замикання $\overline{D_z}$ можна з'єднати k-кривою типу "діаметр-хорда".

У наступній теоремі наведено достатні умови неперервного продовження функції (2.12) на границю γ області D_z, при цьому граничне значення функції $u(z)$ в точці $t \in \gamma \cup \{z \in D_z : \operatorname{Im} z = 0\}$ позначається через $u(t)$.

Теорема 2.2.1. *Нехай замкнена жорданова спрямлювана крива γ симетрична відносно дійсної осі і задовольняє умову* (2.13). *Якщо $m > 0$ і $\mathcal{F}_n$ належить класу E_p, де $1 < p \leq \infty$ при $m = 2n+2$ і $\{\frac{m}{2}\}^{-1} < p \leq \infty$ при $m \neq 2n+2$, то функція $u(z)$ неперервно продовжується з області D_z в точки множини $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$. При цьому для кожного δ такого, що $0 < \delta < (1/8) \max\limits_{t \in \gamma} |\operatorname{Im} t|$, та довільних точок $z_0, z_1 \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ таких, що $|\operatorname{Im} z_0| \geq \delta$ і $|z_1 - z_0| \leq |\operatorname{Im} z_0|/2$, виконується нерівність*

$$|u(z_1) - u(z_0)| \leq c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \Big(d(z_1, z_0)^{1-\nu_m-\chi_p} + \omega_{m,p}(|z_1 - z_0|) \Big), \qquad (2.15)$$

де $\chi_p := 1/p$ при $p < \infty$ і $\chi_p := 0$ при $p = \infty$, а стала c не залежить від $\mathcal{F}_n, z_0, z_1$.

Якщо, крім того, для точки b_j, де $j = 1$ або $j = 2$, існує окіл, перетин якого з D_z є k-областю, і при цьому існує границя

$$F(b_j) := \lim_{z \to b_j, z \in D_z} \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{F}_n(z), \qquad (2.16)$$

то існує також границя

$$\lim_{z \to b_j, z \in D_z} u(z) = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)}{2\pi} F(b_j), \qquad (2.17)$$

де $\mathrm{B}(p, q)$ — бета-функція Ейлера.

Доведення. При $\mathcal{F}_n \in E_p$ з урахуванням обмеженості функції Q_n на γ легко встановлюється, що значення функції

$$u_\gamma(z) := \frac{k(m)}{|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar{z}}} \mathcal{F}_n(t) Q_n(t, z) \Big((t - z)(t - \bar{z}) \Big)^{-\nu_m} dt$$

скінченні при всіх $z \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$, якщо при цьому $\mathcal{F}_n(t)$ — кутові граничні значення функції $\mathcal{F}_n$.

Встановимо справедливість рівності $u(z) = u_\gamma(z)$ при всіх $z \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ у випадку, коли $2n < m \le 2n+1$ і $\{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < \infty$. Для цього спочатку зафіксуємо довільне число $\delta \in (0, 1/8 \max\limits_{t\in\gamma} |\operatorname{Im} t|)$ і довільну точку $z_0 \in \gamma$, для якої $|\operatorname{Im} z_0| \ge \delta$. Для точки $z \in D_z$ такої, що $\varepsilon := |z - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|/2$, позначимо через z_2 одну з найближчих до z точок кривої γ. З урахуванням теореми Коші замінимо інтегрування вздовж кривої $\Gamma_{z\bar z}$ в рівності (2.21) інтегруванням вздовж належно орієнтованого контура $s[z, z_2] \cup \Gamma^\gamma_{z_2\bar z_2} \cup s[\bar z, \bar z_2]$, і одержимо рівність

$$u(z) - u_\gamma(z_0) = \int\limits_{\Gamma^\gamma_{z_2\bar z_2}} \mathcal{K}(t, z)\, dt - \int\limits_{\Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0}} \mathcal{K}(t, z_0)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{s[z,z_2]} \mathcal{K}(t, z)\, dt + \int\limits_{s[\bar z,\bar z_2]} \mathcal{K}(t, z)\, dt =: I_1 - I_2 + I_3 + I_4,$$

де

$$\mathcal{K}(t, z) := \frac{k(m)}{2\pi i} \frac{\mathcal{F}_n(t)}{|y|^{m-1}}\, Q_n(t, z) \Big((t - z)(t - \bar z)\Big)^{-\nu_m}.$$

Введемо в розгляд множини

$$\Gamma_1 := \{t \in \Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0} : |t - z_0| \le 2\varepsilon\} \cup \gamma_{z_0 z_2}, \qquad \overline{\Gamma}_1 := \{\bar t : t \in \Gamma_1\},$$

$$\Gamma_2 := \{t \in \Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0} : 2\varepsilon < |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|\} \setminus \gamma_{z_0 z_2}, \quad \overline{\Gamma}_2 := \{\bar t : t \in \Gamma_2\},$$

$$\Gamma_3 := \Gamma^\gamma_{z_0\bar z_0} \setminus \big(\{t \in \gamma : |t - z_0| \le |\operatorname{Im} z_0|\} \cup \gamma_{z_0 z_2}\big)$$

і подамо різницю $I_1 - I_2$ у вигляді суми інтегралів:

$$I_1 - I_2 = \int\limits_{\Gamma_1} \mathcal{K}(t, z)\, dt - \int\limits_{\Gamma_1} \mathcal{K}(t, z_0)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \mathcal{K}(t, z)\, dt - \int\limits_{\overline{\Gamma}_1} \mathcal{K}(t, z_0)\, dt + \int\limits_{\Gamma_2} \Big(\mathcal{K}(t, z) - \mathcal{K}(t, z_0)\Big)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\overline{\Gamma}_2} \Big(\mathcal{K}(t, z) - \mathcal{K}(t, z_0)\Big)\, dt + \int\limits_{\Gamma_3} \Big(\mathcal{K}(t, z) - \mathcal{K}(t, z_0)\Big)\, dt =: \sum_{k=5}^{11} I_k.$$

Позначаючи $q := p/(p-1)$ і застосовуючи умову (2.13) на криву γ, нерівність Гельдера, а також нерівності $|t-z_2| \le 2|t-z|$ і $|t-\bar{z}| \ge \delta/2$, які виконуються при всіх $t \in \Gamma_1$, оцінюємо I_5 у такий спосіб, як оцінено відповідний інтеграл в доведенні теореми 4 з [44]:

$$|I_5| \le c\, \|\mathfrak{F}_n\|_{L_p} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|t-z_2|^{q\nu_m}} \right)^{1/q} \le$$

$$\le\ c\, \|\mathfrak{F}_n\|_{L_p} \left(\Biggl(\int\limits_0^{4\varepsilon} + \int\limits_0^{4d(z_0,z_2)} \Biggr) \frac{d\,\theta z_2(\tau)}{\tau^{q\nu_m}} \right)^{1/q} \le$$

$$\le c\, \|\mathfrak{F}_n\|_{L_p} \max\{\varepsilon, d(z_0,z_2)\}^{1-1/p-\nu_m}.$$

Тут і далі в доведенні через c позначено сталі, значення яких не залежать від $\mathfrak{F}_n$, z і z_0, але, взагалі кажучи, різні навіть в межах одного ланцюжка нерівностей. Аналогічно оцінюються інтеграли I_6, I_7, I_8.

Перетворимо інтеграл I_9 до вигляду

$$I_9 = \frac{k(m)}{2\pi i |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_2} \mathfrak{F}_n(t) Q_n(t,z) \Bigl(1/R_{\nu_m}(t,z) - 1/R_{\nu_m}(t,z_0) \Bigr)\, dt +$$

$$+ \frac{k(m)}{2\pi i |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_2} \mathfrak{F}_n(t) \frac{\Bigl(Q_n(t,z) - Q_n(t,z_0) \Bigr)}{R_{\nu_m}(t,z_0)}\, dt +$$

$$+ \frac{k(m)}{2\pi i} \Bigl(|y|^{1-m} - |y_0|^{1-m} \Bigr) \int\limits_{\Gamma_2} \mathfrak{F}_n(t) \frac{Q_n(t,z_0)}{R_{\nu_m}(t,z_0)}\, dt =: I_9' + I_9'' + I_9''', \qquad (2.18)$$

де $\quad R_{\nu_m}(t,z) := \Bigl((t-z)(t-\bar{z}) \Bigr)^{\nu_m}$.

Очевидно, що при $n = 0$ справедлива рівність $I_9'' = 0$, а при $n \ge 1$ виконується нерівність $|I_9''| \le c\, \|\mathfrak{F}_n\|_{L_p} \varepsilon$.

Використовуючи нерівність Гельдера та нерівність

$$\Bigl| R_{\nu_m}(t,z) - R_{\nu_m}(t,z_0) \Bigr| \le c \Bigl(\varepsilon \Bigl(|t-z| + |t-\bar{z}_0| \Bigr) \Bigr)^{\nu_m},$$

яка виконується при всіх $t \in \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \Gamma_3$, одержуємо

$$|I_9'| \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \left(\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\big|R_{\nu_m}(t,z) - R_{\nu_m}(t,z_0)\big|^q}{\big|R_{\nu_m}(t,z)\, R_{\nu_m}(t,z_0)\big|^q} |dt| \right)^{1/q} \le$$

$$\le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \left(\int\limits_{\Gamma_2} \left(\frac{\varepsilon\big(|t-z| + |t-\bar{z}_0|\big)}{|t-z||t-\bar{z}||t-z_0||t-\bar{z}_0|} \right)^{q\nu_m} |dt| \right)^{1/q} .$$

Оцінюючи далі I_9' за схемою оцінювання відповідного інтеграла в доведенні теореми 4 з [44] (див. також теорему 1 з [43]) і враховуючи при цьому нерівності $|t-\bar{z}| \ge |\mathrm{Im}\, z| \ge \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\, z_0| \ge \frac{1}{2}\delta$, $\delta \le |\mathrm{Im}\, z_0| \le |t-\bar{z}_0| \le \le 3|\mathrm{Im}\, z_0|$, $\frac{1}{2}|t-z_0| \le |t-z| \le \frac{3}{2}|\mathrm{Im}\, z_0|$, які виконуються при всіх $t \in \Gamma_2$, одержуємо нерівність

$$|I_9'| \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p}\, \varepsilon^{1-1/p-\nu_m} .$$

З використанням нерівності Гельдера одержуємо також оцінку

$$|I_9'''| \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \Big| |y|^{1-m} - |y_0|^{1-m} \Big| \le$$

$$\le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p}\, |m-1|\, \big| |y| - |y_0| \big|^{|m-1|/(2n+1)} \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} |m-1| \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}.$$

Безпосереднім наслідком рівності (2.18) і оцінок інтегралів I_9', I_9'', I_9''' є нерівність

$$|I_9| \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \big(\varepsilon^{1-1/p-\nu_m} + |m-1|\, \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}\big)\big).$$

Аналогічно оцінюється інтеграл I_{10}.

Оцінюючи I_{11} у такий же спосіб, як і інтеграл I_9, і враховуючи при цьому нерівності $\frac{1}{2}|t-z_0| \le |t-z| \le \frac{3}{2}|t-z_0|$, $\frac{1}{3}|t-z_0| \le |t-\bar{z}_0| \le 3|t-z_0|$, $\frac{1}{6}|t-z_0| \le \frac{1}{2}|t-\bar{z}_0| \le |t-\bar{z}| \le \frac{3}{2}|t-\bar{z}_0| \le \frac{9}{2}|t-z_0|$, які виконуються при всіх $t \in \Gamma_3$, одержуємо оцінку

$$|I_{11}| \le c\, \|\mathcal{F}_n\|_{L_p} \big(\varepsilon^{\nu_m} + |m-1|\, \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}\big).$$

Отже, з отриманих оцінок інтегралів I_j, $j = 5, 6, \ldots, 11$, з урахуванням нерівності $\nu_m \geq 1 - 1/p - \nu_m$, яка є очевидним наслідком нерівності $\nu_m \geq 1/2$ у випадку $2n < m \leq 2n + 1$, випливає нерівність

$$|I_1 - I_2| \leq c\, \|\mathfrak{F}_n\|_{L_p} \Big(\max\{\varepsilon, d(z_0, z_2)\}^{1-\nu_m-1/p} + |m-1|\, \varepsilon^{|m-1|/(2n+1)}\Big)\,. \quad (2.19)$$

Тому, внаслідок того, що з нерівності $p > \{\frac{m}{2}\}^{-1}$ випливає нерівність $1 - 1/p - \nu_m > 0$, різниця $I_1 - I_2$ прямує до нуля при $z \to z_0$.

Для оцінки інтеграла I_3 введемо в розгляд середину відрізка $s[z, z_2]$ — точку z_3 і, використовуючи нерівності $|t - \bar{z}| \geq \delta/2$ для всіх $t \in s[z, z_2]$ і $|t - z| \geq \rho(z)/2$ для всіх $t \in s[z_3, z_2]$, а також оцінку вигляду (2.14) для функції $\mathfrak{F}_n$, будемо мати

$$|I_3| \leq c \left(\int\limits_{s[z,z_3]} \frac{|dt|}{\rho(t)^{1/p}\, |t - z|^{\nu_m}} + \int\limits_{s[z_3,z_2]} \frac{|dt|}{\rho(t)^{1/p}\, |t - z|^{\nu_m}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{\rho(z)^{1/p}} \int\limits_0^{\rho(z)/2} \frac{d\tau}{\tau^{\nu_m}} + \frac{c}{\rho(z)^{\nu_m}} \int\limits_0^{\rho(z)/2} \frac{d\tau}{\tau^{1/p}} \leq c\, \rho(z)^{1-1/p-\nu_m}.$$

Тому $I_3 \to 0$ при $z \to z_0$.

Аналогічно встановлюється, що $I_4 \to 0$ при $z \to z_0$ і тим самим завершується доведення рівності $u(z_0) = u_\gamma(z_0)$ у випадку, коли $2n < m \leq 2n + 1$ і $\{\frac{m}{2}\}^{-1} < p < \infty$.

Тепер в цьому випадку справедливість оцінки (2.15) встановлюється граничним переходом в нерівності (2.19) при $z \to z_1$. В інших випадках, визначених в теоремі, справедливість рівності $u(z) = u_\gamma(z)$ при всіх $z \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ і оцінки (2.15) встановлюється аналогічно.

Доведемо, нарешті, справедливість рівності (2.17). Не зменшуючи загальності, вважаємо, що для всіх z з деякого околу точки b_j, для яких $\operatorname{Im} z \neq 0$, криві $\Gamma_{z\bar{z}}$ є k-кривими типу "діаметр-хорда". Тому, подаючи $u(z)$ у вигляді

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i\, |y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} \Big(F(t) - F(b_j)\Big) \Big((t - z)(t - \bar{z})\Big)^{m/2-1} dt +$$

$$+\frac{F(b_j)}{2\pi i\,|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}}\Big((t-z)(t-\bar z)\Big)^{m/2-1}dt =: I_{12}+I_{13},$$

насамперед, з урахуванням існування границі (2.16) легко встановлюємо, що $I_{12}\to 0$ при $z\to b_j$. Далі, переходячи в I_{13} до інтегрування вздовж відрізка $s[z,\bar z]$ і змінюючи при визначенні виразу $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}$ розріз комплексної площини на розріз $\{t\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,t=x, |\mathrm{Im}\,t|\ge|y|\}$ без зміни значення інтеграла I_{13}, а потім, виконуючи заміну змінних $t=x+i|y|\cos\tau$, і, нарешті, використовуючи рівність (21.4-19) з [22], в якій слід прийняти $p=m/2$ і $q=1/2$, одержуємо рівності

$$I_{13}=\frac{F(b_j)}{2\pi}\int\limits_0^\pi(\sin\tau)^{m-1}d\tau=\frac{F(b_j)}{2\pi}\,\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Тепер для завершення доведення залишається зазначити, що, оскільки функція (2.2) неперервно продовжується в точки множини $D_z\cap\mathbb{R}$, то $u(z)\to\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)F(b_j)/(2\pi)$ при прямування z до b_j по довільному шляху, який міститься в області D_z. Теорему доведено.

Зауважимо, що аналог теореми 2.2.1, який стосується випадку $m=1$, доведено в роботі С.А. Плакси [44].

2.3. Обернені теореми

Позначимо через Γ перетин границі ∂D області D з напівплощиною $\{(x,y):y\ge 0\}$, а через b_1 і b_2, як і в попередньому підрозділі, — точки перетину границі ∂D_z області D_z з дійсною віссю, вважаючи при цьому, що $b_1<b_2$.

Зазначимо, що розв'язок (2.2) рівняння (2.1) належить класу $C_2(D^+)$ функцій, кожна з яких неперервна на множині $D^+\cup\{(x,0)\in D: b_1<x<b_2\}$ і має неперервні частинні похідні першого і другого порядку в області D^+. Окрім того, функція (2.2) належить підкласу $N_2(D^+)$ класу $C_2(D^+)$, що складається з функцій, які задовольняють додаткову

умову

$$\lim_{(x_0,y)\to(x_0,0)} y^m \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \forall\, x_0 \in (b_1, b_2)\,.$$

Справедливі наступні результати про подання розв'язків рівняння (2.1) формулою (2.2).

Теорема 2.3.1. *Для кожної функції* $u(x,y)$ *класу* $C_2(D^+)$, *яка при* $m \in [1,2)$ *задовольняє рівняння* (2.1) *в області* D^+, *існує єдина голоморфна функція* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, *яка задовольняє умову*

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall\, z \in D_z \tag{2.20}$$

і така, що рівність (2.2) *виконується при всіх* $(x,y) \in D^+$.

Теорема 2.3.2. *Для кожної функції* $u(x,y)$ *класу* $N_2(D^+)$, *яка при* $m \in (0,1)$ *задовольняє рівняння* (2.1) *в області* D^+, *існує єдина голоморфна функція* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, *яка задовольняє умову* (2.20) *і така, що рівність* (2.2) *виконується при всіх* $(x,y) \in D^+$.

Доведення теорем 2.3.1, 2.3.2, яке наводиться в наступному підрозділі, здійснюється методом, розробленим С.А. Плаксою в [46] для рівняння (2.1) при $m = 1$. Схема доведення включає, зокрема, редукцію інтегрального рівняння (2.2) з шуканою функцією F до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду на дійсній прямій і дозволяє одержати (при деяких природних припущеннях про границю області і задану функцію) формули розв'язків таких крайових задач для рівняння (2.1):

задача E: при $1 \le m < 2$ знайти розв'язок рівняння (2.1) класу $C_2(D^+)$, який приймає на Γ значення заданої неперервної функції u_Γ;

задача N_0: при $m \in (0;1)$ знайти розв'язок рівняння (2.1) класу $N_2(D^+)$, який приймає на Γ значення заданої неперервної функції u_Γ.

Відомо, що заміною змінних $\xi = x$, $\eta = y^2/4$ рівняння (2.1) зводиться до рівняння

$$\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{(1+m)}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,,$$

для якого в роботі М.В. Келдиша [20] доведено однозначну розв'язність задачі E у випадку гладкої кривої Γ. Існування і єдиність розв'язку задачі N_0 у випадку кусково-гладкої кривої Γ встановлено в роботі Ю.П. Кривенкова [25].

2.4. Застосування інтегральних зображень узагальнених осесиметричних потенціалів до розв'язання крайових задач

2.4.1. Допоміжна задача і її редукція до сингулярного інтегрального рівняння. Нехай визначено функцію $u_\Gamma \colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ на дузі Γ границі ∂D_z. Введемо в розгляд функцію

$$u_{\partial D}(x,y) := \begin{cases} u_\Gamma(x,y) & \text{при} \quad (x,y) \in \Gamma\,, \\ u_\Gamma(x,-y) & \text{при} \quad (x,y) \in \partial D \setminus \Gamma\,. \end{cases}$$

Розглянемо *допоміжну задачу* для заданої граничної функції $u_{\partial D}(x,y)$ про відшукання голоморфної в D_z і неперервної в $\overline{D_z}$ функції F, яка задовольняє додаткову умову симетрії (2.20), а її граничні значення задовольняють інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i\,|y|^{m-1}} \int\limits_{\Gamma^\gamma_{z\bar z}} F(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt = u_{\partial D}(x,y)\,, \tag{2.21}$$

де $(x,y) \in \partial D : y \neq 0\,,\ z = x+iy\,.$

При розв'язанні допоміжної задачі будемо використовувати деяке конформне відображення $\sigma(Z)$ одиничного круга $\{Z \in \mathbb{C}\ :\ |Z| < 1\}$ на область D_z таке, що $\sigma(-1) = b_1\,,\ \sigma(1) = b_2$ і образом півкруга $\{Z \in \mathbb{C}\ :\ |Z| < 1,\ \mathrm{Im}\,Z > 0\}$ при відображенні $\sigma(Z)$ є область $\{z \in D_z\ : \mathrm{Im}\,z > 0\}$. Легко бачити, що таке відображення існує і при всіх $Z \in \{Z \in \mathbb{C}\ :\ |Z| \le 1\}$ задовольняє умову $\sigma(\bar Z) = \overline{\sigma(Z)}\,.$

Введемо в розгляд функцію

$$M(Z,T) := \left(\frac{(T-Z)(T-\bar Z)}{(\sigma(T)-\sigma(Z))(\sigma(T)-\sigma(\bar Z))}\right)^{1-m/2}\,, \tag{2.22}$$

яку при кожному фіксованому $Z \neq -1$ будемо розуміти як неперервну вітку функції, аналітичної за змінною T в одиничному крузі, таку, що $M(Z,-1) > 0$.

Розглянемо також функцію

$$m(\xi,\tau) := -i\,\frac{\exp\left(i\pi m/2\right)}{4^{1-m/2}}\,\frac{(\tau+i)^{2-m}}{\tau+i}\,M\left(\frac{\xi-i}{\xi+i},\frac{\tau-i}{\tau+i}\right), \quad \xi,\tau\in\mathbb{R}, \qquad (2.23)$$

де голоморфна вітка функції $(\tau+i)^{2-m}$ визначена поза розрізом $\{\tau = i\eta : \eta \le -1\}$ і приймає значення $-\exp(-i\pi m/2)$ при $\tau = 0$.

Кажуть, що функція $g(z)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\alpha \in (0;1]$ на множині E, $E \subset \mathbb{C}$, якщо

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le \ c\,|z_1 - z_2|^{\alpha} \qquad \forall\, z_1, z_2 \in E$$

і стала c не залежить від z_1 і z_2.

Нехай $\omega\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ — монотонно неспадна неперервна функція, для якої виконується рівність $\omega(0) = 0$, а також існують сталі C і ν такі, що при всіх $k > 1$ і всіх $\xi > 0$ виконується нерівність $\omega(k\xi) \le C\,k^{\nu}\,\omega(\xi)$. Тоді при $\alpha \in (0;1]$ введемо в розгляд клас $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}$ функцій $g\colon \partial D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, для кожної з яких виконується умова

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le \ c\,\omega(r_{z_1 z_2})\left(\frac{|z_1 - z_2|}{r_{z_1 z_2}}\right)^{\alpha} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \partial D_z\,,$$

де $r_{z_1 z_2} := \max\{|z_1 - b_1||z_1 - b_2|, |z_2 - b_1||z_2 - b_2|\}$ і стала c не залежить від z_1, z_2. Очевидно, що функції класу $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}$ неперервні в точках b_1 і b_2, а поза довільним фіксованим околом цих точок задовольняють умову Гельдера з показником α.

Позначимо через $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}(\partial D)$ клас функцій $g_{\partial D}\colon \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, для кожної з яких функція g, яка визначається рівністю $g(x+iy) := g_{\partial D}(x,y)$ при $(x,y) \in \partial D$, належить класу $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}$. Очевидно, що клас $\widetilde{\mathcal{H}}_{\alpha}(\partial D)$, введений в роботі [46], є підкласом класу $\mathcal{H}_{\alpha}^{\omega}(\partial D)$.

Якщо $0 < \mu < 1$ і функція u_* сумовна на відрізку $[a, a_1]$, а на відрізку $[a_1, a_2]$ вона задовольняє умову Гельдера з показником $\alpha > \mu$, то за стандартною схемою [7, с. 573] при будь-якому $\xi \in (a_1, a_2)$ одержуємо рівність

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_a^\xi \frac{s\ u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^\mu (s^2-a^2)^{1-\mu}}\,ds = -2\,\mu\,\xi\int\limits_a^\xi \frac{s\ (u_*(s)-u_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+\mu}(s^2-a^2)^{1-\mu}}\,ds \qquad (2.24)$$

і, крім того, справедлива також рівність

$$\lim_{\tau\to\xi}\ \int\limits_\tau^\xi \frac{s\ u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^\mu (s^2-\tau^2)^{1-\mu}}\ ds = \frac{\pi}{2\sin(\pi\mu)}\ u_*(\xi) \quad \forall\,\xi\in(a_1,a_2]. \quad (2.25)$$

В наступній теоремі, яка доводиться за схемою доведення теореми 2 з [46], у випадку $0<m<2$ наведено достатні умови редукції допоміжної задачі для заданої граничної функції $u_{\partial D}(x,y)$ до сингулярного інтегрального рівняння на дійсній осі.

Теорема 2.4.1. *Нехай* $0<m<2$ *і функція* $u_{\partial D}$ *належить класу* $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2<\alpha\le 1$. *Нехай при цьому відображення* $\sigma(Z)$ *диференційовне в точках множини* $\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|=1, Z\ne\pm1\}$, *функція* $\sigma'(Z)$ *в тих же точках неперервна і не дорівнює нулю, а в околі точок* $Z=\pm1$ *задовольняє оцінку*

$$|\sigma'(Z)|\le\ c\,(|Z+1|^{-\beta}+|Z-1|^{-\beta}),$$

де $\beta\in(0;1)$ *і стала* c *не залежить від* Z. *Нехай, крім того, функція* $M(Z,T)$ *при будь-яких* $A_1,A_2\in(-1;1)$, $A_1<A_2$, *задовольняє умову*

$$|M(Z_1,T)-M(Z_2,T)|\le\ c\,|Z_1-Z_2|^{\alpha'} \quad \forall\,T,Z_1,Z_2\in$$
$$\in\{Z\in\mathbb{C}\ :\ |Z|=1\}\ :-1<\operatorname{Re}T<A_1<\operatorname{Re}Z_1<\operatorname{Re}Z_2<A_2,$$
$$\operatorname{Im}Z_1\operatorname{Im}T>0,\quad \operatorname{Im}Z_2\operatorname{Im}T>0,$$

де $m/2<\alpha'\le 1$ *і стала* c *не залежить від* Z_1 *і* Z_2.

Тоді справедливі твердження:

1) *кожний розв'язок* F *допоміжної задачі для граничної функції* $u_{\partial D}$ *за формулою*

$$U_p(\xi)=\operatorname{Re}\frac{i\left(F\!\left(\sigma\!\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)-2\pi\,u_{\partial D}(b_2,0)/\mathrm{B}\!\left(\frac{m}{2},\frac12\right)\right)\,\sigma'\!\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)}{2\sin\frac{\pi m}{2}\ (\xi+i)} \quad \forall\,\xi>0$$

породжує розв'язок сингулярного інтегрального рівняння

$$A(\xi,\xi)\,U_p(\xi)+\frac{2\xi}{\pi}B(\xi,\xi)\int\limits_0^\infty \frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\;d\tau-$$

$$-\frac{4m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi^2}\,\xi\int\limits_0^\xi\Bigg(\int\limits_\tau^\xi \frac{s(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\int\limits_0^\infty \frac{\tau\,U_p(\eta)}{\eta^2-\tau^2}\,d\eta\Bigg)d\tau-$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^\xi\int\limits_\tau^\xi \frac{U_p(\tau)\,s\,(A(s,\tau)-A(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau=f_*(\xi)\;\forall\,\xi>0, \quad (2.26)$$

в якому

$$A(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Re}\,m(\xi,\tau),\qquad B(\xi,\tau):=2\,\mathrm{Im}\,m(\xi,\tau), \qquad (2.27)$$

$$f_*(\xi):=u_*(\xi)\xi^{1-m}-m\,\xi\int\limits_0^\xi \frac{s(u_*(s)-u_*(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\;ds \qquad (2.28)$$

і функція u_* *виражається через задану функцію* $u_{\partial D}$ *рівністю*

$$u_*(\xi):=\frac{|y|^{m-1}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}}\bigg(u_{\partial D}(x,y)-u_{\partial D}(b_2,0)\bigg),$$

де $x+iy=\sigma(\frac{\xi-i}{\xi+i})$*;*

2) *якщо в сингулярному інтегральному рівнянні* (2.26) *функції* A, B, f_* *визначаються рівностями* (2.27), (2.28) *і функція* U_p *є таким його розв'язком, що функція*

$$F_0(z)=-\frac{2\sin\frac{\pi m}{2}(\xi+i)}{\pi\,\sigma'(\frac{\xi-i}{\xi+i})}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{U_p(|\tau|)}{\tau-\xi}\,d\tau,\quad z=\sigma\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right),\ \mathrm{Im}\,\xi>0, \quad (2.29)$$

непрерервно продовжується з області D_z *на границю* ∂D_z*, то функція*

$$F(z)=F_0(z)+\frac{2\pi\,u_{\partial D}(b_2,0)}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)} \qquad (2.30)$$

є розв'язком допоміжної задачі для заданої граничної функції $u_{\partial D}$*.*

Доведення. Перепишемо інтегральне рівняння (2.21) у вигляді

$$\frac{1}{2\pi i\,|y|^{m-1}}\int\limits_{\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}} F_0(t)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{m/2-1}\,dt = u_{\partial D}(x,y)-u_{\partial D}(b_2,0)\,, \quad (2.31)$$

де $\quad F_0(t):=F(t)-2\pi\,u_{\partial D}(b_2,0)/\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Використовуючи конформне відображення $z=\sigma(Z)$ одиничного круга на область D_z і позначаючи через $C_{z\bar z}$ прообраз дуги $\Gamma_{z\bar z}^{\gamma}$ при цьому відображенні, перетворимо рівняння (2.31) до вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{z\bar z}} \frac{F_0\big(\sigma(T)\big)\,\sigma'(T)}{\Big(\big(\sigma(T)-\sigma(Z)\big)\big(\sigma(T)-\sigma(\bar Z)\big)\Big)^{1-m/2}}\,dT =$$

$$=\big|\mathrm{Im}\,\sigma(Z)\big|^{m-1}\Big(u_{\partial D}(\mathrm{Re}\,\sigma(Z),\mathrm{Im}\,\sigma(Z))-u_{\partial D}(b_2,0)\Big). \quad (2.32)$$

Нехай $Z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\,Z\neq 0$. Введемо в розгляд неперервну вітку $\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}$ функції $L_m(T):=\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}$, аналітичної поза розрізом $\{T\in\mathbb{C}:|\,\mathrm{Im}\,T|\geq|\,\mathrm{Im}\,Z|\}$, таку, що $L_m(T)>0$ при всіх $T\in\mathbb{R}\ :\ T>1$.

Легко встановлюється рівність

$$\Big(\big(\sigma(T)-\sigma(Z)\big)\big(\sigma(T)-\sigma(\bar Z)\big)\Big)^{1-m/2}=\frac{\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}}{M(Z,T)}\ ,$$

з урахуванням якої рівняння (2.32) набуває вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{z\bar z}} \frac{F_+(T)\,M(Z,T)\,\sigma'(T)}{\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}}\,dT =$$

$$=\big|\mathrm{Im}\,\sigma(Z)\big|^{m-1}\Big(u_{\partial D}(\mathrm{Re}\,\sigma(Z),\mathrm{Im}\,\sigma(Z))-u_{\partial D}(b_2,0)\Big), \quad (2.33)$$

де $\ F_+(T):=F_0(\sigma(T))$.

Виконаємо тепер конформне відображення $\xi=i\,\frac{1+Z}{1-Z}$ комплексної площини. При цьому відображенні образом дуги $C_{z\bar z}$ є відрізок $[-|\xi|,|\xi|]$, причому точки $T,\bar T$ дуги $C_{z\bar z}$, симетричні відносно дійсної прямої, відображаються відповідно в точки τ і $-\tau$ відрізка $[-|\xi|,|\xi|]$, симетричні відносно точки 0. З урахуванням рівності

$$\big((T-Z)(T-\bar Z)\big)^{1-m/2}=-\frac{4^{1-m/2}\exp(-\frac{i\pi m}{2})}{(\tau+i)^{2-m}}\,\frac{\big(\xi^2-\tau^2\big)^{1-m/2}}{(\xi^2+1)^{1-m/2}}\quad \forall\,T\in C_{z\bar z}\,,$$

в якій відповідні точки $T \in C_{z\bar z}$ і $\tau \in [-|\xi|, |\xi|]$ зв'язані співвідношенням $T = \frac{\tau - i}{\tau + i}$, зазначеним конформним відображенням площини рівняння (2.33) зводиться до інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)\ m(\xi,\tau)}{(\xi^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau = u_*(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.34}$$

де функція $F_*(\tau) := i\, F_+(T)\, \sigma'(T)/(\tau + i)$ є голоморфною в напівплощині $\{\tau \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Im} \tau > 0\}$, неперервно продовжується на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ і обертається в нуль на нескінченності.

В силу парності функції u_* рівняння (2.34) рівносильне рівнянню

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\xi} \frac{F_*(\tau)\, m(\xi,\tau) + F_*(-\tau)\, m(\xi,-\tau)}{(\xi^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau = u_*(\xi) \qquad \forall\, \xi > 0. \tag{2.35}$$

Поклавши в рівності (2.35) $\xi = s$, а потім помноживши обидві частини цієї рівності на $s(\xi^2 - s^2)^{-m/2}$ і, нарешті, проінтегрувавши за змінною s на відрізку $[0, \xi]$, одержуємо рівність

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\xi} \frac{s}{(\xi^2-s^2)^{m/2}} \int\limits_0^{s} \frac{F_*(\tau)\, m(s,\tau) + F_*(-\tau)\, m(s,-\tau)}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, d\tau\ ds =$$

$$= \int\limits_0^{\xi} \frac{s\ u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}}\, ds.$$

Змінюючи порядок інтегрування у повторному інтегралі, з цієї рівності одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\xi} \int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s\left(F_*(\tau)\, m(s,\tau) + F_*(-\tau)\, m(s,-\tau)\right)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds\, d\tau = \int\limits_0^{\xi} \frac{s\, u_*(s)}{(\xi^2-s^2)^{m/2}}\, ds. \tag{2.36}$$

Далі, диференціюючи рівність (2.36) за змінною ξ і враховуючи при цьому рівності (2.24), (2.25), одержуємо

$$-\frac{m\xi}{\pi} \int\limits_0^{\xi} \int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{F_*(\tau)\left(m(s,\tau) - m(\xi,\tau)\right) + F_*(-\tau)\left(m(s,-\tau) - m(\xi,-\tau)\right)}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{2}}\big(F_*(\xi)\,m(\xi,\xi)+F_*(-\xi)\,m(\xi,-\xi)\big)=f_*(\xi)\,. \tag{2.37}$$

Очевидно, що при всіх $\tau\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$m(\xi,-\tau)=\overline{m(\xi,\tau)}. \tag{2.38}$$

Функція F_*, в свою чергу, задовольняє (див. рівність (27) роботи [46]) співвідношення

$$F_*(-\tau)=\overline{F_*(\tau)}\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{2.39}$$

Введемо в розгляд функції $U_p(\xi):=\operatorname{Re}F_*(\xi)/(2\sin\frac{\pi m}{2})$, $V_p(\xi):=$ $:=\operatorname{Im}F_*(\xi)/(2\sin\frac{\pi m}{2})$ і з урахуванням співвідношень (2.38), (2.39) перепишемо рівність (2.37) у вигляді

$$A(\xi,\xi)U_p(\xi)-B(\xi,\xi)V_p(\xi)-$$

$$-\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^\xi\int\limits_\tau^\xi\frac{U_p(\tau)\,s\,\big(A(s,\tau)-A(\xi,\tau)\big)}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau+$$

$$+\frac{2m\sin\frac{\pi m}{2}}{\pi}\,\xi\int\limits_0^\xi\int\limits_\tau^\xi\frac{V_p(\tau)\,s\,(B(s,\tau)-B(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds\,d\tau=f_*(\xi). \tag{2.40}$$

Використовуючи формулу Гільберта (див. [7, с. 93]) для обернення сингулярного інтеграла Коші і враховуючи парність функції U_p, маємо

$$V_p(\xi)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=-\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{U_p(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau\qquad\forall\,\xi>0\,. \tag{2.41}$$

Нарешті, підставляючи вираз (2.41) в рівність (2.40), одержуємо сингулярне інтегральне рівняння (2.26) для знаходження функції U_p. Отже, твердження 1 теореми доведено, а для завершення доведення твердження 2 залишається зазначити, що функція F_0 виражається через функцію U_p формулою (2.29) в результаті розв'язання задачі Шварца для напівплощини [28, с. 209].

2.4.2. Допоміжні твердження. Припустимо, що конформне відображення $\sigma(Z)$ має неперервну контурну похідну на одиничному колі $\{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$, яка не обертається в нуль в жодній точці кола. У цьому випадку при всіх $T, Z \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$ виконуються нерівності

$$0 < c_1 \leq \left| \frac{\sigma(T) - \sigma(Z)}{T - Z} \right| \leq c_2, \tag{2.42}$$

де c_1, c_2 — деякі абсолютні сталі, і при всіх T_0, T_1, $Z_1, Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$ таких, що $-1 < \operatorname{Re} T_0 < \operatorname{Re} T_1 < \operatorname{Re} Z_1 < \operatorname{Re} Z_0 < 1$, $\operatorname{Im} T_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$, $\operatorname{Im} Z_1 \operatorname{Im} T_0 > 0$, $\operatorname{Im} Z_0 \operatorname{Im} T_0 > 0$, справедливі оцінки

$$\left| \frac{\sigma(T_0) - \sigma(Z_1)}{T_0 - Z_1} - \frac{\sigma(T_0) - \sigma(Z_0)}{T_0 - Z_0} \right| \leq c \, \frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|} \, |Z_1 - Z_0|, \tag{2.43}$$

$$\left| \frac{\sigma(T_1) - \sigma(Z_0)}{T_1 - Z_0} - \frac{\sigma(T_0) - \sigma(Z_0)}{T_0 - Z_0} \right| \leq c \, \frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|} \, |T_1 - T_0|, \tag{2.44}$$

де c — деяка абсолютна стала і

$$\omega(\sigma', \varepsilon) := \sup_{|T_1| = |T_2| = 1, \, |T_1 - T_2| \leq \varepsilon} |\sigma'(T_1) - \sigma'(T_2)| \, .$$

Лемма 2.4.1. *Нехай $0 < m < 2$, функція $v\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ сумовна на інтервалі $(0, 1)$ і задовольняє умови*

$$\lim_{\xi \to \infty} v(\xi) = 0, \tag{2.45}$$

$$|v(s) - v(\xi)| \leq c \, \omega(s^{-1}) \, \frac{(\xi - s)^\alpha}{s \, \xi^\alpha} \qquad \forall \, s, \xi : 1 \leq s < \xi, \tag{2.46}$$

де $\omega\colon (0, 2] \longrightarrow (0, \infty)$ — монотонно неспадна обмежена функція, $\alpha \in (m/2; 1]$ і стала c не залежить від s і ξ. Тоді при всіх $\xi \geq 2$ справедливі оцінки

$$\left| v(\xi) \xi^{1-m} \right| + \left| \xi \int\limits_0^\xi \frac{s(v(s) - v(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}} \, ds \right| \leq \frac{c}{\xi^{1+m}} \int\limits_{1/\xi}^1 \frac{\omega(\eta)}{\eta^2} \, d\eta \, , \tag{2.47}$$

$$\left| v(\xi + \varepsilon)(\xi + \varepsilon)^{1-m} - v(\xi) \xi^{1-m} \right| +$$

$$
+\left|(\xi+\varepsilon)\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{s(v(s)-v(\xi+\varepsilon))}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds-\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right|\le
$$

$$
\le\frac{c}{\xi^m}\left(\omega(2/\xi)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}}+\frac{\varepsilon}{\xi^2}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\qquad\forall\,\varepsilon\in(0;\xi/2],\tag{2.48}
$$

де стала c *не залежить від* ξ *і* ε *.*

Доведення. Здійснюючи граничний перехід в нерівності (2.46) при $\xi\to\infty$ і враховуючи при цьому умову (2.45), одержуємо допоміжну оцінку

$$
|v(s)|\le c\,\frac{\omega(1/s)}{s}\qquad\forall\,s\ge 1,\tag{2.49}
$$

в якій стала c не залежить від s .

При всіх $\xi\ge 2$ справедлива нерівність

$$
\left|v(\xi)\xi^{1-m}\right|+\left|\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}ds\right|\le\left|v(\xi)\xi^{1-m}\right|+\xi\int\limits_0^{1}\frac{s\,|v(s)|\,ds}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}+
$$

$$
+\xi\,|v(\xi)|\int\limits_0^{1}\frac{s\,ds}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}+\xi\int\limits_1^{\xi/2}\frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}ds+
$$

$$
+\xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}ds=:\sum_{k=1}^{5}L_k.
$$

При оцінюванні доданків $L_1,L_2,\dots,L_5$ через c будемо позначати сталі, значення яких не залежать від ξ , але, взагалі кажучи, різні навіть в межах одного ланцюжка нерівностей.

Враховуючи оцінку (2.49), одержуємо

$$
L_1\le c\,\frac{\omega(1/\xi)}{\xi^m}\le c\,\frac{\omega(1/\xi)}{\xi^{m+1}}\int\limits_{1/\xi}^{2/\xi}\frac{d\eta}{\eta^2}\le\frac{c}{\xi^{m+1}}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\,.
$$

З урахуванням сумовності функції v на інтервалі $(0,1)$ встановлюємо нерівності

$$L_2 \leq \frac{c}{\xi^{m+1}} \leq \frac{c}{\xi^{m+1}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2} d\eta.$$

Застосовуючи оцінку (2.49), встановлюємо нерівність

$$L_3 \leq c\,\omega(1/\xi)/\xi^{2+m} \leq \frac{c}{\xi^{m+1}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2} d\eta.$$

Із застосуванням нерівності (2.46) одержуємо

$$L_4 \leq \frac{c}{\xi^{1+m}} \int\limits_{1}^{\xi/2} \omega(s^{-1})\, ds \leq \frac{c}{\xi^{1+m}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\, d\eta\,.$$

Враховуючи нерівності (2.46), $\alpha > m/2$ і монотонність функції ω, встановлюємо оцінки

$$L_5 \leq \frac{c}{\xi^{m/2+\alpha}} \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \omega(s^{-1})(\xi - s)^{\alpha-1-m/2} \leq c\,\frac{\omega(2/\xi)}{\xi^m} \leq \frac{c}{\xi^{m+1}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\, d\eta.$$

Наслідком одержаних оцінок доданків $L_1, L_2, \ldots, L_5$ є нерівність (2.47).

Доведемо нерівність (2.48). З нерівностей (2.46), (2.49), $\varepsilon/\xi \leq 1/2$ і монотонності функції ω випливають оцінки

$$\left|v(\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon)^{1-m} - v(\xi)\xi^{1-m}\right| \leq c\,\frac{\omega(1/\xi)}{\xi^m}\frac{\varepsilon^\alpha}{\xi^\alpha} \leq c\,\frac{\omega(2/\xi)}{\xi^m}\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}}, \quad (2.50)$$

де стала c не залежить від ξ і ε.

Для оцінки іншого доданка з лівої частини нерівності (2.48) застосуємо нерівність

$$\left|(\xi+\varepsilon) \int\limits_{0}^{\xi+\varepsilon} \frac{s(v(s) - v(\xi+\varepsilon))}{((\xi+\varepsilon)^2 - s^2)^{1+m/2}}\, ds - \xi \int\limits_{0}^{\xi} \frac{s(v(s) - v(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}}\, ds\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left| \int\limits_0^\xi \frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\, ds \right| + (\xi+\varepsilon) \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\, ds +$$

$$+(\xi+\varepsilon) \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{s|v(s)-v(\xi+\varepsilon)|}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\, ds +$$

$$+(\xi+\varepsilon)\,|v(\xi)-v(\xi+\varepsilon)| \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{s\, ds}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}} +$$

$$+(\xi+\varepsilon) \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} s \left| (\xi^2-s^2)^{-1-m/2} - ((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{-1-m/2} \right| |v(s)-v(\xi)|\, ds =:$$

$$:= \sum_{k=1}^{5} M_k \quad \forall\, \xi > 0 \ \ \forall\, \varepsilon \in (0;\xi]. \tag{2.51}$$

Далі в доведенні через c будемо позначати сталі, значення яких, взагалі кажучи, різні, але не залежать від ξ і ε.

Очевидним наслідком нерівності (2.47) є оцінка

$$M_1 \leq c\, \frac{\varepsilon}{\xi^{m+2}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\, d\eta.$$

Оцінюючи вирази M_2 і M_3 аналогічно тому, як вище оцінено вираз L_5, одержуємо нерівності $M_k \leq c\,\omega(2/\xi)\, \varepsilon^{\alpha-m/2}/\xi^{\alpha+m/2}$, $k = 2, 3$. З використанням нерівності (2.46) і монотонності функції ω одержуємо оцінку $M_4 \leq c\,\omega(2/\xi)\, \varepsilon^{\alpha-m/2}/\xi^{\alpha+m/2}$.

Враховуючи рівність

$$(\xi^2-s^2)^{-1-m/2} - ((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{-1-m/2} = (2+m)\, \xi_*\, \varepsilon (\xi_*^2-s^2)^{-2-m/2},$$

де ξ_* — деяка точка відрізка $[\xi, \xi+\varepsilon]$, оцінюємо M_5 сумою чотирьох доданків:

$$M_5 \leq (2+m)\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2 \int\limits_0^1 \frac{s|v(s)|\, ds}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}} +$$

$$+(2+m)\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2\int\limits_0^1 \frac{s\,|v(\xi)|ds}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}}+(2+m)\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2\int\limits_1^{\xi/2}\frac{s\,|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}}\,ds+$$

$$+(2+m)\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s\,|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}}\,ds =: \sum_{k=1}^{4} M_5^k. \tag{2.52}$$

Оцінюючи тепер доданки M_5^1, M_5^2, M_5^3 і M_5^4 подібно тому, як вище оцінено відповідно доданки L_2, L_3, L_4 і L_5, одержуємо нерівності

$$M_5^1 \le c\,\frac{\varepsilon}{\xi^{2+m}}\,, \qquad M_5^2 \le c\,\omega\,(2/\xi)\,\frac{\varepsilon}{\xi^{3+m}}\,,$$

$$M_5^3 \le c\,\frac{\varepsilon}{\xi^{2+m}}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\,, \qquad M_5^4 \le c\,\omega(2/\xi)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha+m/2}}\,.$$

З одержаних оцінок випливає нерівність

$$\sum_{k=1}^{5} M_k \le \frac{c}{\xi^m}\left(\omega(2/\xi)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}}+\frac{\varepsilon}{\xi^2}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right). \tag{2.53}$$

Тепер нерівність (2.48) є наслідком оцінок (2.50), (2.51), (2.53). Лему доведено.

Лемма 2.4.2. *Нехай* $0 < m < 2$ *і функція* $v\colon (0,3) \longrightarrow \mathbb{C}$ *задовольняє умову*

$$|v(s)-v(\xi)| \le c\;\omega(\xi)\,\frac{(\xi-s)^\alpha}{s^{\alpha_0}} \qquad \forall\, s,\xi : 0 < s < \xi < 3, \tag{2.54}$$

де $\omega\colon (0,3) \longrightarrow (0,\infty)$ *– монотонно неспадна обмежена функція,* $\alpha \in (m/2;1]$, $\alpha_0 \in (-\infty;2)$ *і стала* c *не залежить від* s *і* ξ. *Тоді при всіх* $\xi \in (0;2)$ *справедливі оцінки*

$$\left|\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \le c\,\omega(\xi)\,\xi^{1+\alpha-m-\alpha_0}, \tag{2.55}$$

$$\left|(\xi+\varepsilon)\int\limits_0^{\xi+\varepsilon}\frac{s(v(s)-v(\xi+\varepsilon))}{((\xi+\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds-\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \le$$

$$\leq c\,\omega(3\xi/2)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}} \qquad \forall\,\varepsilon\in(0;\xi/2], \tag{2.56}$$

де стала c *не залежить від* ξ *і* ε *.*

Доведення. Оцінимо ліву частину нерівності (2.55) сумою двох доданків:

$$\left|\xi\int\limits_0^{\xi}\frac{s(v(s)-v(\xi))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds\right| \leq \xi\int\limits_0^{\xi/2}\frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds+\xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}\,ds =:$$

$$:= i_1+i_2.$$

Застосовуючи при оцінюванні i_1 нерівності (2.54) і $\alpha_0<2$, одержуємо співвідношення

$$i_1\leq c\,\omega(\xi)\xi^{\alpha-m-1}\int\limits_0^{\xi/2}s^{1-\alpha_0}\,ds\leq c\,\omega(\xi)\xi^{1+\alpha-m-\alpha_0}.$$

З урахуванням нерівностей (2.54) і $\alpha>m/2$ одержуємо оцінки

$$i_2\leq c\,\omega(\xi)\xi^{1-m/2-\alpha_0}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1-m/2}ds\leq c\,\omega(\xi)\xi^{1+\alpha-m-\alpha_0}.$$

Отже, нерівність (2.55) доведено.

Для доведення оцінки (2.56) застосуємо нерівність (2.51) і оцінимо доданки $M_1,M_2,\ldots,M_5$ при $\xi\in(0;2)$. Використовуючи нерівності (2.55), $\varepsilon/\xi\leq 1$, одержуємо оцінки

$$M_1\leq c\,\omega(\xi)\,\frac{\varepsilon}{\xi}\,\frac{\xi^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\leq c\,\omega(\xi)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\,.$$

З урахуванням нерівностей (2.54) і $\varepsilon/\xi\leq 1/2$ встановлюємо оцінки

$$M_k\leq c\,\omega(\xi)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\frac{\varepsilon^{m/2}}{\xi^{m/2}}\leq c\,\omega(\xi)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\,,\quad k=2,3,$$

а використовуючи, крім того, для оцінювання доданка M_4 монотонність функції ω, одержуємо нерівності

$$M_4\leq c\,\omega(\xi+\varepsilon)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\leq c\,\omega(3\xi/2)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\,.$$

Нарешті, аналогічно оцінці (2.52) одержуємо співвідношення

$$M_5 \le (2+m)\,\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2 \int\limits_0^{\xi/2} \frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}}\,ds+$$

$$+(2+m)\,\varepsilon(\xi+\varepsilon)^2 \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{s|v(s)-v(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{2+m/2}}\,ds =: i_1'+i_2'$$

і, оцінюючи доданки i_1', i_2' подібно тому, як вище оцінено відповідно доданки i_1, i_2, одержуємо нерівності

$$i_k' \le c\,\omega(\xi)\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha_0+m/2-1}}\,, \quad k=1,2.$$

Тепер нерівність (2.56) є наслідком одержаних оцінок доданків $M_1, M_2, \ldots, M_5$ і монотонності функції ω. Лему доведено.

Леми 2.4.1, 2.4.2 в сукупності узагальнюють лему 3 роботи [43], доведену у випадку $m=1$.

Лемма 2.4.3. *Нехай $0<m<2$ і функція $u_{\partial D}$ належить класу $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2<\alpha\le 1$. Якщо при цьому конформне відображення $\sigma(Z)$ має неперервну контурну похідну на колі $\{Z\in\mathbb{C} \ : \ |Z|=1\}$, яка не обертається в нуль в жодній точці цього кола, то функція (2.28) має границю*

$$f_*(0) := \lim_{\xi\to 0} f_*(\xi) = (1+a_0)\,\varphi_*(0)\,,$$

де

$$\varphi_*(0) := 2^{m-1}\,|\sigma'(-1)|^{m-1}\big(u_{\partial D}(b_1,0)-u_{\partial D}(b_2,0)\big),$$

$$a_0 := \int\limits_0^1 \frac{\tau^m-\tau}{(1-\tau^2)^{1+m/2}}\,d\tau\,,$$

і при всіх $\xi\in(0;2)$ справедливі оцінки

$$|f_*(\xi)-f_*(0)| \le c\,\left(\omega(\xi)+|m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\right)\,,$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon)-f_*(\xi)| \le$$

$$\le c\left(\omega(\xi)\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}} + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{\xi^{1-m/2}}\right) \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\xi/2],$$

а при всіх $\xi \geq 2$ *— оцінки*

$$|f_*(\xi)| \leq \frac{c}{\xi^{1+m}} \int\limits_{1/\xi}^{1} \frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\, d\eta\,, \tag{2.57}$$

$$|f_*(\xi+\varepsilon)-f_*(\xi)| \leq \frac{c}{\xi^m}\left(\omega(\xi^{-1})\,\frac{\varepsilon^{\alpha-m/2}}{\xi^{\alpha-m/2}}+\frac{\varepsilon}{\xi^2}\int\limits_{1/\xi}^{1}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\ \ \forall\,\varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{2.58}$$

в яких стала c *не залежить від* ξ *і* ε.

Доведення. Легко доводиться справедливість рівності виду (2.45) для функції u_*. Оскільки функція $u_{\partial D}$ належить класу $\mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2 < \alpha \leq 1$, то з урахуванням оцінок (2.42), (2.44) одержуємо нерівність (2.46) при $v = u_*$. Тому оцінки (2.57), (2.58) є наслідком оцінок (2.47), (2.48).

Для доведення інших тверджень леми подамо функцію u_* у вигляді $u_*(\xi) = \xi^{m-1}\varphi_*(\xi)$, де

$$\varphi_*(\xi) := \left(\tfrac{|y|}{\xi}\right)^{m-1} (\xi^2+1)^{m/2-1}\big(u_{\partial D}(x,y) - u_{\partial D}(b_2,0)\big)\,.$$

Використовуючи умову $u_{\partial D} \in \mathcal{H}_\alpha^\omega(\partial D)$, $m/2 < \alpha \leq 1$, а також оцінки (2.42), (2.43) для функції φ_* при всіх s і ξ таких, що $0 < s < \xi < 3$, одержуємо нерівність

$$|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi)| \leq c\,\left(\omega(\xi)\,\frac{(\xi-s)^\alpha}{\xi^\alpha} + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\,\frac{\xi-s}{\xi}\right), \tag{2.59}$$

виконуючи в якій граничний перехід при $s \to 0$, маємо також

$$|\varphi_*(\xi) - \varphi_*(0)| \leq c\,\left(\omega(\xi) + |m-1|\,\omega(\sigma',\xi)\right) \tag{2.60}$$

(в нерівності (2.60) і надалі в доведенні через c позначені сталі, які не залежать від ξ і s).

Подамо тепер функцію f_* у вигляді

$$f_*(\xi) = \varphi_*(\xi) + a_0\,\varphi_*(0) + \xi \int\limits_0^\xi \frac{s\,(\widehat{\varphi}_*(s) - \widehat{\varphi}_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}}\, ds\,,$$

де $\widehat{\varphi}_*(\xi) := \xi^{m-1}(\varphi_*(\xi) - \varphi_*(0))$. Із застосуванням оцінок (2.59), (2.60) при всіх s і ξ таких, що $0 < s < \xi < 3$, легко одержуємо нерівність

$$|\widehat{\varphi}_*(s) - \widehat{\varphi}_*(\xi)| \le c\left(\omega(\xi)\,\frac{(\xi-s)^\alpha}{\xi^{1+\alpha-m}} + |m-1|\Big(\omega(\xi)+\omega(\sigma',\xi)\Big)\frac{\xi-s}{\xi^{1+\alpha_*}\,s^{\alpha^*}}\right),$$

в якій $\alpha_* := \min\{0, 1-m\}$, $\alpha^* := \max\{0, 1-m\}$.

Нарешті, для завершення доведення залишається скористатися лемою 2.4.2 при $v = \widehat{\varphi}_*$. Лему доведено.

Наслідком нерівності (2.42) і оцінок (2.43), (2.44) є аналогічні оцінки для функції (2.22):

$$|M(Z_1,T_0) - M(Z_0,T_0)| \le\ c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ |Z_1 - Z_0|,$$

$$|M(Z_0,T_1) - M(Z_0,T_0)| \le\ c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ |T_1 - T_0|$$

$$\forall\, T_0, T_1, Z_1, Z_0 \in \{Z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\} :\ \ -1 < \mathrm{Re}\, T_0 < \mathrm{Re}\, T_1 <$$

$$< \mathrm{Re}\, Z_1 < \mathrm{Re}\, Z_0 < 1,\ \ \mathrm{Im}\, T_1\, \mathrm{Im}\, T_0 > 0,\ \ \mathrm{Im}\, Z_1\, \mathrm{Im}\, T_0 > 0,\ \ \mathrm{Im}\, Z_0\, \mathrm{Im}\, T_0 > 0,$$

(тут c — деяка абсолютна стала), з використанням яких одержуємо такі нерівності для функції (2.23) при $m \in (0;2)$:

$$|m(\xi_1,\tau_0) - m(\xi_0,\tau_0)| \le c\,\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ \frac{(\tau_0+1)^{1-m}\,(\xi_0 - \xi_1)}{(\xi_0+1)(\xi_1+1)}\,, \quad (2.61)$$

$$|m(\xi_0,\tau_1) - m(\xi_0,\tau_0)| \le c\left(\frac{\omega(\sigma', |T_0 - Z_0|)}{|T_0 - Z_0|}\ \frac{1}{(\tau_1+1)} + 1\right)\frac{(\tau_1 - \tau_0)}{(\tau_0+1)^m}\,, \quad (2.62)$$

$$\forall\, \tau_0, \tau_1, \xi_1, \xi_0\ :\ 0 < \tau_0 < \tau_1 < \xi_1 < \xi_0\,,$$

де c — деяка абсолютна стала, $Z_0 := (\xi_0 - i)/(\xi_0 + i)$, $T_0 := (\tau_0 - i)/(\tau_0 + i)$.

Всюди надалі в розділі вважаємо, що $m \in (0;2)$.

Лемма 2.4.4. *Для функції*

$$\widehat{m}(\xi,\tau) = \frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi} \frac{s(m(s,\tau) - m(\xi,\tau))}{(\xi^2 - s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds$$

справедливі оцінки

$$|\widehat{m}(\xi,\tau)| \le \ c\,\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}\,(\tau+1)^{m/2}} \quad \forall\,\xi>\tau>0, \tag{2.63}$$

$$\begin{gathered}|\widehat{m}(\xi,\tau)-\widehat{m}(\xi-\varepsilon,\tau)| \le \\ \le\ c\,\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}\,(\tau+1)^{m/2}}\,\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2} \\ \forall\,\varepsilon>0 \quad \forall\,\tau>0 \quad \forall\,\xi>\tau+3\varepsilon,\end{gathered} \tag{2.64}$$

$$\begin{gathered}|\widehat{m}(\xi,\tau+\varepsilon)-\widehat{m}(\xi,\tau)| \le \\ \le c\,\left(\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\,\frac{1}{(\tau+1)^{m+1}}+\frac{1}{(\tau+1)^{m}}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{\beta_m} \\ \forall\,\varepsilon\in(0;1) \quad \forall\,\tau>0 \quad \forall\,\xi>\tau+3\varepsilon,\end{gathered} \tag{2.65}$$

де $T:=(\tau-i)/(\tau+i)$, $Z:=(\xi-i)/(\xi+i)$, $\beta_m:=\min\{m/2,1-m/2\}$ *і стала* c *не залежить від* τ, ξ, ε.

Доведення. Оцінка (2.63) є наслідком нерівності (2.62), з урахуванням якої встановлюється також оцінка (2.65) подібно до відповідної оцінки леми 1 роботи [48].

Для доведення оцінки (2.64) подамо приріст функції $\widehat{m}(\xi,\tau)$ за першою змінною у вигляді

$$\widehat{m}(\xi,\tau)-\widehat{m}(\xi-\varepsilon,\tau)=\frac{2\xi}{\pi}\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds-$$

$$-\frac{2(\xi-\varepsilon)}{\pi}\int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau))}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\,ds+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi-2\varepsilon}\frac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\left(\frac{\xi}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}}-\frac{\xi-\varepsilon}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\right)ds-$$

$$-\frac{2(\xi-\varepsilon)(m(\xi,\tau)-m(\xi-\varepsilon,\tau))}{\pi}\int\limits_{\tau}^{\xi-2\varepsilon}\frac{s\,ds}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}=:$$

$$=: \sum_{k=1}^{4} I_k.$$

Враховуючи оцінку (2.61), одержуємо нерівності

$$|I_1| \le \frac{c\,\xi\,\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|(\tau+1)^{m-1}} \int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi} \frac{s}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau)^{1-m/2}} \frac{(\xi-s)\,ds}{(\xi+1)(s+1)} \le$$

$$\le\ c\ \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{(1+\tau)^{1-m}}{(\xi+1)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2};$$

тут, як і скрізь в доведенні, через c позначено сталі, значення яких не залежать від τ, ξ і ε, але, взагалі кажучи, різні навіть в межах одного ланцюжка нерівностей. Аналогічно оцінюються інтеграли I_2 і I_4.

При оцінюванні інтеграла I_3 з урахуванням нерівності

$$\left|\frac{\xi}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}} - \frac{\xi-\varepsilon}{((\xi-\varepsilon)^2-s^2)^{1+m/2}}\right| \le c\frac{\varepsilon}{\xi^{m/2}(\xi-\varepsilon-s)^{2+m/2}}$$

і оцінки (2.61) одержуємо співвідношення

$$|I_3| \le\ c\ \frac{\varepsilon(\tau+1)^{1-m}}{\xi^{m/2}} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \left(\int\limits_{\tau}^{(\xi+\tau)/2-\varepsilon} + \int\limits_{(\xi+\tau)/2-\varepsilon}^{\xi-2\varepsilon} \right) \frac{s}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}} \times$$

$$\times \frac{\xi-s}{(\xi+1)(s+1)} \frac{ds}{(\xi-\varepsilon-s)^{2+m/2}} =: i_3' + i_3''.$$

$$i_3'' \le\ c\ \frac{\varepsilon(\tau+1)^{1-m}}{\xi^{m/2}} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{\xi}{(\xi-\tau)^{1-m/2}\xi^{1-m/2}(\xi+1)} \times$$

$$\times \int\limits_{(\xi+\tau)/2-\varepsilon}^{\xi-2\varepsilon} \left(\frac{1}{(\xi-\varepsilon-s)^{1+m/2}} + \frac{\varepsilon}{(\xi-\varepsilon-s)^{2+m/2}} \right) ds \le$$

$$\le c\frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{(1+\tau)^{1-m}}{(\xi+1)^2} \left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2} \le$$

$$\le c\frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}(\tau+1)^{m/2}} \left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2}.$$

Для оцінювання i_3' розглянемо послідовно випадки: $0 < \xi < 1$, $\xi \geq 1$ і $\tau \geq 1/2$, $\xi \geq 1$ і $0 < \tau < 1/2$.

Якщо $0 < \xi < 1$, то

$$i_3' \leq c\frac{\varepsilon}{\xi^{m/2}}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{(\xi-\tau)^{1+m/2}}\int\limits_{\tau}^{(\xi+\tau)/2-\varepsilon}\frac{s\,ds}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}} \leq$$

$$\leq c\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\varepsilon}{\xi-\tau} \leq \ c\ \frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{(\varepsilon/(\xi-\tau))^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}\ (\tau+1)^{m/2}}.$$

Якщо $\xi \geq 1$ і $\tau \geq 1/2$, то

$$i_3' \leq c\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{\varepsilon(\tau+1)^{1-m}}{(\xi+1)^{1+m/2}(\xi-\tau)^{1+m/2}\,\tau^{1-m/2}}\int\limits_{\tau}^{(\xi+\tau)/2-\varepsilon}\frac{ds}{(s-\tau)^{1-m/2}} \leq$$

$$\leq\ c\ \frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}\ (\tau+1)^{m/2}}\ \frac{\varepsilon}{\xi-\tau} \leq$$

$$\leq\ c\ \frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}\ (\tau+1)^{m/2}}\ \left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2}.$$

Нарешті, якщо $0 < \tau < 1/2$ і $\xi \geq 1$, то

$$i_3' \leq c\frac{\varepsilon}{\xi^{1+m/2}}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{(\xi-\tau)^{1+m/2}}\left(\int\limits_{\tau}^{1}+\int\limits_{1}^{\xi}\right)\frac{s}{(s+1)}\frac{ds}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}} \leq$$

$$\leq c\frac{\varepsilon}{\xi^{1+m/2}}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{(\xi-\tau)^{1+m/2}}\left(\int\limits_{\tau}^{1}\frac{s\,ds}{(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{\xi}\frac{ds}{(s-\tau)^{1-m/2}}\right) \leq\ c\ \frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\ \frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}\ (\tau+1)^{m/2}}\ \frac{\varepsilon}{\xi-\tau}.$$

Отже, справедлива нерівність

$$|I_3| \leq c\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{1}{(\xi+1)^{1+m/2}(\tau+1)^{m/2}}\left(\frac{\varepsilon}{\xi-\tau}\right)^{1-m/2}.$$

Наслідком встановлених оцінок є нерівність (2.64). Лему доведено.

Всюди далі $\alpha^* := \max\{0, 1-m\}, \alpha_* := \min\{0, 1-m\}$.

Лемма 2.4.5. *Нехай модуль неперервності контурної похідної конформного відображення* $\sigma(Z)$ *на колі* $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = 1\}$ *задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, d\eta < \infty\,,$$

а для функції $\widehat{m}(\xi, \tau)$ *справедливі оцінки* (2.63), (2.64). *Тоді справедливі також оцінки*

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{|\widehat{m}(\xi, \tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2+\alpha_*}} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta((\xi+1)^{m/2-1} + \eta^{1-m/2})}\, d\eta \qquad \forall\, \xi \geq 1, \qquad (2.66)$$

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{|\widehat{m}(\xi, \tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\; d\tau \leq c \int\limits_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\; d\eta \qquad \forall\, \xi \in (0; 1]\,, \qquad (2.67)$$

$$\left| \int\limits_0^{\xi+\varepsilon} \frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon, \tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau - \int\limits_0^{\xi} \frac{|\widehat{m}(\xi, \tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq c \frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^{m+\alpha_*}} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1-m/2} + \eta^{1-m/2})}\, d\eta \qquad \forall\, \xi > 4\varepsilon > 0, \qquad (2.68)$$

где $\varepsilon_1 := \varepsilon/(\xi^2+1)$ *і стала* c *не залежить від* ξ *і* ε.

Доведення. Доведемо справедливість оцінок (2.66) – (2.68) при $1 \leq m < 2$. У цьому випадку $(1-\alpha^*)/2 = 1/2$ і $\alpha_* = 1-m$.

Наслідком оцінки (2.63) є нерівність

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\, d\tau \leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|}\; \frac{d\tau}{(\tau+1)^{1+m/2}} =: I_5\,,$$

де стала c не залежить від ξ.

Враховуючи, що при $\xi \in (0; 1)$ справедлива нерівність $c_1(\xi - \tau) \leq$ $\leq |T - Z| \leq c_2(\xi - \tau)$, де сталі c_1, c_2 не залежать від ξ і τ, а також використовуючи властивості модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]), одержуємо оцінку (2.67).

При $\xi \geq 1$ маємо співвідношення

$$I_5 \leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\int\limits_{\xi/2}^{\xi} + \int\limits_{0}^{\xi/2} \right) \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \, (\tau+1)^{1-m/2} \frac{d\tau}{\tau^2+1} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^m} \left(\int\limits_0^{1/\xi} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta} \, d\eta + \frac{1}{(\xi+1)^{1-m/2}} \int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta \right) \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta((\xi+1)^{m/2-1} + \eta^{1-m/2})} \, d\eta$$

(тут через c позначено сталі, значення яких, взагалі кажучи, різні, але не залежать від ξ) і нерівність (2.66) доведено.

Для доведення оцінки (2.68) використовуємо співвідношення

$$\left| \int\limits_0^{\xi+\varepsilon} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi+\varepsilon, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} \, d\tau - \int\limits_0^{\xi} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} \, d\tau \right| \leq \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi+\varepsilon, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} \, d\tau + \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{|\widetilde{m}_0(\xi+\varepsilon, \tau) - \widetilde{m}_0(\xi, \tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}} \, d\tau =: I_6 + I_7 + I_8.$$

Тепер з урахуванням нерівності (2.63) оцінюємо I_6:

$$I_6 \leq \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \, \frac{d\tau}{\tau^2+1} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^{2\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta} \, d\eta \leq c \frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1-m/2} + \eta^{1-m/2})} \, d\eta \, ;$$

тут і далі в доведенні через c позначено сталі, значення яких не залежать від ξ і ε, але, взагалі кажучи, різні навіть в межах одного ланцюжка нерівностей. Аналогічно оцінюється інтеграл I_7.

При оцінюванні інтеграла I_8, використовуючи нерівність (2.64), одержуємо

$$I_8 \leq \; c \, \frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_0^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \, \frac{d\tau}{(\xi-\tau)^{1-m/2}(\tau+1)^{1+m/2}} \, .$$

Далі з цієї нерівності при $\xi \geq 1$ одержуємо співвідношення

$$I_8 \leq \; c \, \frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\int\limits_0^{\xi/2} + \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \right) \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{(\tau+1)^{1-m/2}}{(\xi-\tau)^{1-m/2}} \frac{d\tau}{\tau^2+1} \leq$$

$$\leq \; c \, \frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\frac{1}{\xi^{1-m/2}} \int\limits_0^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} (\tau+1)^{1-m/2} \frac{d\tau}{\tau^2+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\xi+1)^{1-m/2}} \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \left(\frac{(\tau+1)(\xi+1)}{\xi-\tau} \right)^{1-m/2} \frac{d\tau}{\tau^2+1} \right) \leq$$

$$\leq \; c \, \frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2}}{(\xi+1)^m} \left(\int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta + \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta \right) \leq$$

$$\leq \; c \, \frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2}}{(\xi+1)^m} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta \leq c \frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta(\varepsilon_1^{1-m/2} + \eta^{1-m/2})} \, d\eta.$$

При $\xi \in (0;1)$ інтеграл I_8 оцінюється аналогічно. Наслідком одержаних оцінок інтегралів I_6, I_7, I_8 є нерівність (2.68) при $1 \leq m < 2$.

Справедливість оцінок (2.66) – (2.68) при $m \in (0;1)$ доводиться аналогічно. Лему доведено.

Лемма 2.4.6. *Нехай модуль неперервності контурної похідної конформного відображення* $\sigma(Z)$ *на колі* $\{Z \in \mathbb{C} \; : \; |Z| = 1\}$ *задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta} \; \ln \frac{1}{\eta} \, d\eta < \infty \, ,$$

а для функціии $\widehat{m}(\xi,\tau)$ *справедливі оцінки* (2.63) – (2.65). *Тоді для функції*

$$m_p(\xi,\tau) := \int\limits_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\,,$$

в свою чергу, справедливі оцінки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau \le\ c\,\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^{1+m/2+\alpha_*}}\times$$

$$\times\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\frac{\ln(3/\eta)}{(\xi+1)^{m/2-1}\ln(\xi+1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\,d\eta \qquad \forall\,\xi\ge 1, \quad (2.69)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau \le\ c\int\limits_0^{\xi} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ \ln\frac{3}{\eta}\,d\eta \qquad \forall\,\xi\in(0,1]\,, \qquad (2.70)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|m_p(\xi+\varepsilon,\tau)-m_p(\xi,\tau)|}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\,d\tau \le \frac{c}{(\xi+1)^{m+\alpha_*}}\ {\varepsilon_1}^{1-m/2}\ \ln\frac{1}{\varepsilon_1}\times$$

$$\times\int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ \frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\ d\eta \qquad \forall\,\xi>4\varepsilon>0, \quad (2.71)$$

де $\varepsilon_1 := \varepsilon/(\xi^2+1)$ *і стала* c *не залежить від* ξ *і* ε.

Доведення. Доведемо справедливість оцінок (2.69) – (2.71) при $1\le m<2$. У цьому випадку $(1-\alpha^*)/2 = 1/2$ і $\alpha_* = 1-m$.

Для доведення оцінки (2.71) розглянемо довільні ξ і ε, які задовольняють подвійну нерівність $\xi>4\varepsilon>0$, і використаємо співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\,m_p(\xi+\varepsilon,\tau)-m_p(\xi,\tau)|}{\sqrt{\tau^2+1}}\,d\tau \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}=:I_9+I_{10}+I_{11}.$$

Оцінимо тепер I_9 сумою інтегралів:

$$I_9\le\left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\left|\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+\int\limits_{-\xi}^{0}\left|\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{2\xi}\left|\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left|\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\left|\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\widehat{m}(\xi,s)}{s-\tau}\,ds\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}=:\sum_{j=1}^{5}I_9^j. \qquad (2.72)$$

Оцінимо спочатку інтеграли $I_9^1, I_9^2, \ldots, I_9^5$ у випадку $\xi\ge 1$. З урахуванням оцінки (2.63) одержуємо співвідношення

$$I_9^1\le\ c\ \left(\int\limits_{-\infty}^{-2\xi}+\int\limits_{2\xi}^{\infty}\right)\frac{d\tau}{\tau^2+1}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}|\widehat{m}(\xi,s)|\,ds\le$$

$$\le\ c\,\frac{1}{(\xi+1)^{2+m/2}}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\,(s+1)^{2-m/2}\frac{ds}{s^2+1}\le$$

$$\le\ \frac{c}{(\xi+1)^m}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{s^2+1}\le\frac{c}{(\xi+1)^m}\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,d\eta\le$$

$$\le\ c\,\frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\,\ln(1/\varepsilon_1)}{(\xi+1)^m}\int\limits_{0}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,\frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\,d\eta\,;$$

тут і далі в доведенні через c позначено сталі, значення яких не залежать від ξ і ε, але, взагалі кажучи, різні навіть в межах одного ланцюжка нерівностей.

Використовуючи теорему Фубіні та оцінку (2.63), одержуємо співвідношення

$$I_9^2 \leq \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} |\widehat{m}(\xi,s)| \int\limits_{-\xi}^{0} \frac{d\tau}{(s-\tau)\sqrt{\tau^2+1}}\, ds \leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}}\times$$

$$\times \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \left(\int\limits_{0}^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{s} + \int\limits_{s}^{\xi} \right) \frac{d\tau}{(s+\tau)\sqrt{\tau^2+1}} (s+1)^{2-m/2} \frac{ds}{s^2+1} \leq$$

$$\leq\ c\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^m} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \frac{ds}{s^2+1} \leq c\, \frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^m} \int\limits_{0}^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\, d\eta \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_{0}^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta} \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta\,.$$

Аналогічно встановлюється справедливість нерівності

$$I_9^3 + I_9^4 \leq \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_{0}^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta} \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta\,.$$

Нарешті, введемо в розгляд множини $\widetilde{e}_1 := [\tau-\delta_1,\, \tau+\delta_1]$, $\widetilde{e}_2 :=$ $:= [\tau-\delta_1(\xi+1),\, \tau-\delta_1] \cup [\tau+\delta_1,\, \tau+\delta_1(\xi+1)]$, $\widetilde{e}_3 := [\xi-\varepsilon,\, \tau-\delta_1(\xi+1)] \cup$ $\cup [\tau+\delta_1(\xi+1),\, \xi]$, де $\delta_1 = {\varepsilon_1}^{(1-m/2)/\beta_m} \min\{\xi-\tau, \tau-(\xi-\varepsilon)\}/(\xi+1)$, а β_m визначено в оцінці (2.65), і оцінимо I_9^5 сумою трьох інтегралів:

$$I_9^5 \leq \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \int\limits_{\widetilde{e}_1} \frac{|\widehat{m}(\xi,s)-\widehat{m}(\xi,\tau)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \int\limits_{\widetilde{e}_2} \frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \int\limits_{\widetilde{e}_3} \frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} =: i_1+i_2+i_3. \qquad (2.73)$$

З урахуванням оцінки (2.65) та нерівності $\varepsilon < \xi/4$ одержуємо співвідношення

$$i_1 \leq c \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \left(\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|} \frac{(\xi-\tau)^{-\beta_m}}{(\tau+1)^{m+1}} + \frac{(\xi-\tau)^{-\beta_m}}{(\tau+1)^m} \right) \int\limits_{\widetilde{e}_1} \frac{ds}{|s-\tau|^{1-\beta_m}} \frac{d\tau}{\tau+1} \leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^m}\,\varepsilon_1^{1-m/2}\left(\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{d\tau}{\tau^2+1}+1\right)\leq$$

$$\leq \frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,d\eta+\varepsilon_1^{1-m/2}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta\right)\leq$$

$$\leq \quad \frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\,\ln(1/\varepsilon_1)}{(\xi+1)^m}\quad\int\limits_{0}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,\frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\,d\eta\,.$$

При оцінюванні i_2, використовуючи нерівність (2.63), а також властивості модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]), одержуємо

$$i_2\leq \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\widetilde{e}_2}\frac{ds}{|s-\tau|(s+1)^{m/2}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\leq$$

$$\leq c\,\frac{\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^m}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\frac{d\tau}{\tau^2+1}\leq\frac{c}{(\xi+1)^m}\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}\,d\eta\,.$$

Подамо інтеграл i_3 у вигляді суми двох інтегралів:

$$i_3=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\tau-\delta_1(\xi+1)}\frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\int\limits_{\tau+\delta_1(\xi+1)}^{\xi}\frac{|\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}=:i_3'+i_3''$$

і оцінимо кожен з них. Оцінюючи i_3' подібно до i_2, одержуємо співвідношення

$$i_3'\leq\frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi}\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\tau-\delta_1(\xi+1)}\frac{ds}{(\tau-s)(s+1)^{m/2}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\leq$$

$$\leq\frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi-\varepsilon/2}+\int\limits_{\xi-\varepsilon/2}^{\xi}\right)\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\,\ln\left(\frac{\tau-(\xi-\varepsilon)}{\delta_1(\xi+1)}\right)\frac{d\tau}{\tau^2+1}\leq$$

$$\leq\frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\ln(\xi+1)\,\frac{\omega(\sigma',\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_1+\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ln\frac{3}{\eta}\,d\eta\right)\leq$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, d\eta.$$

Використовуючи нерівність (2.63), теорему Фубіні та властивості модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]), а також позначення

$$\delta_* := \max\left\{ \frac{s - \xi\, \varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}}{1 - \varepsilon_1{}^{(1-m/2)/\beta_m}}, \frac{s + (\xi - \varepsilon)\, \varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}}{1 + \varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}} \right\},$$

$$\upsilon_* := \xi - \frac{\varepsilon}{2}\Big(1 - \varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}\Big),$$

оцінюємо інтеграл i_3'':

$$i_3'' \le \frac{c}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi} \frac{\omega(\sigma', |S-Z|)}{|S-Z|} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\delta_*} \frac{d\tau}{(s-\tau)\sqrt{\tau^2+1}} \frac{ds}{(s+1)^{m/2}} \le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m} \left(\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\upsilon_*} + \int\limits_{\upsilon_*}^{\xi} \right) \frac{\omega(\sigma', |S-Z|)}{|S-Z|}\, \ln\left(\frac{s - (\xi-\varepsilon)}{s - \delta_*} \right) \frac{ds}{s^2+1} \le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m} \left(\omega(\sigma', \varepsilon_1)\, \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta \right) \le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta.$$

З одержаних оцінок інтегралів i_3', i_3'' випливає нерівність

$$i_3 \le \frac{c}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, \ln\frac{3}{\eta}\, d\eta\,.$$

Отже, при всіх $\xi \ge 1$ доведено нерівність

$$I_9 \le c\, \frac{\varepsilon_1{}^{1-m/2}\, \ln(1/\varepsilon_1)}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, \frac{\ln(3/\eta)}{\varepsilon_1{}^{1-m/2} \ln(1/\varepsilon_1) + \eta^{1-m/2} \ln(3/\eta)}\, d\eta.$$

Справедливість такої ж нерівності у випадку $\xi \in (0;1)$ встановлюється аналогічно. Інтеграл I_{10} оцінюється у такий же спосіб, як і I_9.

Оцінимо I_{11} сумою інтегралів:

$$I_{11} \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty} \right) \left| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)}{s-\tau} \, ds \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_{-\xi}^{0} \left| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)}{s-\tau} \, ds \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{2\xi} \left| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)}{s-\tau} \, ds \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \left| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)}{s-\tau} \, ds \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\xi/2} \left| \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)}{s-\tau} \, ds \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} =: \sum_{j=1}^{5} I_{11}^{j} \, .$$

Оцінимо спочатку інтеграли $I_{11}^1, I_{11}^2, I_{11}^3, I_{11}^4$ у випадку $\xi \geq 1$. З використанням нерівності (2.64) одержуємо співвідношення

$$I_{11}^1 \leq c \, \frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty} \right) \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma', |S-Z|)}{|S-Z|} \frac{(\xi-s)^{m/2-1}}{(s+1)^{m/2}} \frac{ds}{|s-\tau|} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \leq \frac{c\,\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{-\infty}^{-\xi} + \int\limits_{2\xi}^{\infty} \right) \frac{d\tau}{\tau^2+1} \left(\int\limits_{0}^{\xi/2} + \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \right) \frac{\omega(\sigma', |S-Z|)}{|S-Z|} \frac{(s+1)^{1-m/2}}{(\xi-s)^{1-m/2}} \frac{ds}{s^2+1} \leq$$

$$\leq c \, \frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^2} \left(\int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta + \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta \right) \leq c \, \frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^m} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta^{2-m/2}} \, d\eta.$$

При оцінюванні інтегралів I_{11}^2, I_{11}^3, використовуючи оцінку (2.64), теорему Фубіні і властивості модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]), одержуємо

$$I_{11}^2 \le \frac{c\,\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_{-\xi}^{0} \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \frac{ds}{(\xi-s)^{1-m/2}(s+1)^{m/2}(s-\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \le$$

$$\le \frac{c\,\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\int\limits_{0}^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{\xi-\varepsilon} \right) \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \int\limits_{0}^{\xi} \frac{d\tau}{(s+\tau)\sqrt{\tau^2+1}} \frac{(\xi-s)^{m/2-1}\,ds}{(s+1)^{m/2}} \le$$

$$\le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\frac{1}{\xi^{1-m/2}} \int\limits_{0}^{1/2} \ln\frac{2\xi}{s}\,ds + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{1/2}^{\xi/2} + \int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon} \right) \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \frac{(s+1)^{2-m/2}}{(\xi-s)^{1-m/2}} \frac{\ln s}{s} \frac{ds}{s^2+1} \right) \le$$

$$\le c\,\frac{\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\xi}{(\xi+1)^m} \left(1 + \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta \right) \le c\,\frac{\varepsilon_1^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)}{(\xi+1)^m} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta,$$

$$I_{11}^3 \le \frac{c\,\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon} \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \frac{(s+1)^{2-m/2}}{(\xi-s)^{1-m/2}} \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{2\xi} \frac{d\tau}{(\tau-s)(\tau+1)} \frac{ds}{s^2+1} \le$$

$$\le \frac{c\,\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\int\limits_{0}^{\xi/2} + \int\limits_{\xi/2}^{\xi-2\varepsilon} + \int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} \right) \frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|} \frac{(s+1)^{1-m/2}}{(\xi-s)^{1-m/2}} \times$$

$$\times \ln\left(\frac{2\xi}{\xi-\varepsilon-s}\right) \frac{ds}{s^2+1} \le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}} \left(\frac{1}{\xi^{1-m/2}} \int\limits_{1/\xi}^{2} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta + \right.$$

$$+ \ln\left(\frac{2\xi}{\varepsilon}\right) \frac{1}{(\xi+1)^{1-m/2}} \int\limits_{\varepsilon_1}^{2} \frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta +$$

$$\left. + \frac{\omega(\sigma',\varepsilon_1)(\xi+1)^{1-m/2}}{\varepsilon_1(\xi^2+1)\varepsilon^{1-m/2}} \int\limits_{\xi-2\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} \ln\frac{2\xi}{\xi-\varepsilon-s}\,ds \right) \le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta+\omega(\sigma',\varepsilon_1)\ln\frac{8\xi}{\varepsilon}\right)\le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta+\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ln\frac{3}{\eta}\,d\eta\right).$$

Нарешті, введемо в розгляд множини $e'_{1,\varepsilon}:=[\tau-\delta'_\varepsilon,\tau+\delta'_\varepsilon]$, $e'_{2,\varepsilon}:=$ $:=[\tau-\frac{\xi-\varepsilon-\tau}{2},\tau-\delta'_\varepsilon]\cup[\tau+\delta'_\varepsilon,\tau+\frac{\xi-\varepsilon-\tau}{2}]$, $e'_{3,\varepsilon}:=[0,\xi-\varepsilon]\setminus(e'_{1,\varepsilon}\cup e'_{2,\varepsilon})$, де $\delta'_\varepsilon=(\xi-\varepsilon-\tau)\varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}$, і оцінимо I_{11}^4 сумою трьох інтегралів:

$$I_{11}^4\le\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{1,\varepsilon}}\frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{m}(\xi+\varepsilon,\tau)-(\widehat{m}(\xi,s)-\widehat{m}(\xi,\tau))|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{2,\varepsilon}}\frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$+\int\limits_{\xi/2}^{\xi-\varepsilon}\int\limits_{e'_{3,\varepsilon}}\frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon,s)-\widehat{m}(\xi,s)|}{|s-\tau|}\,ds\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}=:i'_1+i'_2+i'_3. \qquad (2.74)$$

Оцінюючи інтеграли i'_1, i'_2, i'_3 з використанням нерівності (2.64) аналогічно тому, як оцінено відповідно інтеграли i_1, i_2, i_3 з рівності (2.73), одержуємо співвідношення

$$i'_1+i'_2\le\frac{c}{(\xi+1)^m}\,\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta,$$

$$i'_3\le\frac{c}{(\xi+1)^m}\left(\int\limits_{0}^{\varepsilon_1}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\ln\frac{1}{\eta}\,d\eta+\varepsilon_1^{1-m/2}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta\right)\le$$

$$\le c\,\frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\,\ln(1/\varepsilon_1)}{(\xi+1)^m}\int\limits_{0}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,\frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2}\ln(1/\varepsilon_1)+\eta^{1-m/2}\ln(3/\eta)}\,d\eta.$$

Отже, при всіх $\xi \geq 1$ доведено нерівність

$$\sum_{k=1}^{4} I_{11}^{k} \leq c\, \frac{{\varepsilon_1}^{1-m/2} \ln\left(1/\varepsilon_1\right)}{(\xi+1)^m} \int\limits_0^2 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta}\, \frac{\ln(3/\eta)}{{\varepsilon_1}^{1-m/2} \ln(1/\varepsilon_1) + \eta^{1-m/2} \ln(3/\eta)}\, d\eta.$$

Справедливість такої ж нерівності у випадку $\xi \in (0;1)$ встановлюється аналогічно.

Оцінимо, нарешті, інтеграл I_{11}^5 при будь-якому $\xi > 0$. З цією метою введемо в розгляд множини $e''_{1,\varepsilon} := [\tau - \delta\,''_{\varepsilon}, \tau + \delta\,''_{\varepsilon}]$, $e''_{2,\varepsilon} := [0, \tau - \delta\,''_{\varepsilon}]$, $e''_{3,\varepsilon} := [\tau + \delta\,''_{\varepsilon}, 3\xi/4]$, $e''_{4,\varepsilon} := [3\xi/4, \xi - \varepsilon]$, де $\delta\,''_{\varepsilon} = \left(\frac{\tau}{\xi+1}\right)^{m/\beta_m} \varepsilon_1^{(1-m/2)/\beta_m}$, і оцінимо I_{11}^5 сумою чотирьох інтегралів:

$$I_{11}^5 \leq \int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{1,\varepsilon}} \frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi+\varepsilon, \tau) - (\widehat{m}(\xi, s) - \widehat{m}(\xi, \tau))|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{2,\varepsilon}} \frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{3,\varepsilon}} \frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi/2} \int\limits_{e''_{4,\varepsilon}} \frac{|\widehat{m}(\xi+\varepsilon, s) - \widehat{m}(\xi, s)|}{|s-\tau|}\, ds\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} =: i''_1 + i''_2 + i''_3 + i''_4.$$

Використовуючи нерівність (2.65) і властивості модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]), одержуємо

$$i''_1 \leq c \int\limits_0^{\xi/2} \left(\frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{(\xi-\tau)^{-\beta_m}}{(\tau+1)^{m+1}} + \frac{(\xi-\tau)^{-\beta_m}}{(\tau+1)^m} \right) \int\limits_{e''_{1,\varepsilon}} \frac{ds}{|s-\tau|^{1-\beta_m}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \leq$$

$$\leq c\, \frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^{m+\beta_m}} \left(\int\limits_0^{\xi/2} \frac{\omega(\sigma', |T-Z|)}{|T-Z|} \frac{\tau^m}{(\tau+1)^m}\, \frac{d\tau}{\tau^2+1} + \right.$$

$$+\int\limits_{0}^{\xi/2}\frac{\tau^m}{(\tau+1)^m}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\Bigg)\le c\,\frac{\varepsilon_1^{1-m/2}}{(\xi+1)^m}\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta}\,d\eta+\ln(\xi+1)\right)\le$$

$$\le\frac{c}{(\xi+1)^m}\,\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta.$$

Оцінимо інтеграли i_2'', i_3'' при $\xi\ge 1$. Позначимо через $\tau(s)$ функцію, обернену до функції $s=\tau-\delta_\varepsilon''$, і з урахуванням нерівності (2.64), теореми Фубіні та властивостей модуля неперервності (див., наприклад, [15, 62]) одержимо співвідношення

$$i_2''\le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}}\left(\int\limits_{0}^{1/2}\int\limits_{0}^{\tau-\delta_\varepsilon''}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{(\xi-s)^{m/2-1}\,ds}{(s+1)^{m/2}(\tau-s)}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+\right.$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\int\limits_{0}^{1/2-\delta_\varepsilon''}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{(\xi-s)^{1-m/2}(s+1)^{m/2}(\tau-s)}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}+$$

$$\left.+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\int\limits_{1/2-\delta_\varepsilon''}^{\tau-\delta_\varepsilon''}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\,\frac{ds}{(\xi-s)^{1-m/2}(s+1)^{m/2}(\tau-s)}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\right)\le$$

$$\le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}}\left(\frac{1}{\xi^{1-m/2}}\int\limits_{0}^{1/2}\ln\frac{\tau}{\delta_\varepsilon''}\,d\tau+\frac{\ln(\xi+1)}{\xi^{1-m/2}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/2-\delta_\varepsilon''}^{\xi/2-\delta_\varepsilon''}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\int\limits_{\tau(s)}^{\xi/2}\frac{d\tau}{\tau-s}\,\frac{ds}{(\xi-s)^{1-m/2}(s+1)^{m/2+1}}\right)\le$$

$$\le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+\int\limits_{0}^{\xi/2}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}(s+1)^{1-m/2}\frac{ds}{s^2+1}\right)\le$$

$$\le\frac{c}{(\xi+1)^m}\,\varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\tau\,,$$

$$i_3'' \le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^2}\int\limits_0^{\xi/2}\left(\int\limits_{\tau+\delta_\varepsilon''}^{3\tau/2}+\int\limits_{3\tau/2}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{(s+1)^{m/2}(s-\tau)}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \le$$

$$\le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^2}\left(\left(\int\limits_0^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{\xi/2}\right)\frac{\omega(\sigma',|T-Z|)}{|T-Z|}\int\limits_{\tau+\delta_\varepsilon''}^{3\tau/2}\frac{ds}{s-\tau}\,\frac{d\tau}{(\tau+1)^{1+m/2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^{3/4}+\int\limits_{3/4}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma',|T-S|)}{|T-S|}\int\limits_0^{2s/3}\frac{d\tau}{(s-\tau)(\tau+1)}\,\frac{ds}{(s+1)^{m/2}}\right) \le$$

$$\le \frac{c}{(\xi+1)^m}\,\varepsilon_1^{1-m/2}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon_1}+\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta+1+\right.$$

$$\left.+\ln(\xi+1)\int\limits_{1/\xi}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta\right) \le \frac{c}{(\xi+1)^m}\ \varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta.$$

Аналогічно при $\xi\in(0;1)$ одержуємо ланцюжок нерівностей

$$i_2''+i_3'' \le c\,\varepsilon^{1-m/2}\int\limits_0^{\xi/2}\left(\int\limits_0^{\tau-\delta_\varepsilon''}+\int\limits_{\tau+\delta_\varepsilon'}^{3\xi/4}\right)\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{ds}{|s-\tau|(\xi-s)^{1-m/2}}\,d\tau \le$$

$$\le c\,\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^{1-m/2}\frac{\omega(\sigma',\xi)}{\xi}\int\limits_0^{\xi/2}\ln\frac{\xi}{\delta_\varepsilon''}\,ds \le c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{\xi^{1-m/2}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\ \omega(\sigma',\xi) \le$$

$$\le\ c\,\varepsilon^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\xi}^{2\xi}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta \le\ c\,\varepsilon^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta.$$

Оцінюючи i_4'', одержуємо співвідношення

$$i_4'' \le\ c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)^{1+m/2}}\int\limits_0^{\xi/2}\int\limits_{3\xi/4}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\frac{(\xi-s)^{m/2-1}\,ds}{(s+1)^{m/2}(s-\tau)}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}} \le$$

$$\leq\ c\,\frac{\varepsilon^{1-m/2}}{(\xi+1)\xi}\int\limits_0^{\xi/2}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\int\limits_{3\xi/4}^{\xi-\varepsilon}\frac{\omega(\sigma',|S-Z|)}{|S-Z|}\left(\frac{(\xi+1)(s+1)}{\xi-s}\right)^{1-m/2}\frac{ds}{s^2+1}\leq$$

$$\leq\ c\ \frac{\varepsilon^{1-m/2}\ln(\xi+1)}{(\xi+1)^2}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta\leq\frac{c}{(\xi+1)^m}\ \varepsilon_1^{1-m/2}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon_1}^{2}\frac{\omega(\sigma',\eta)}{\eta^{2-m/2}}\,d\eta\,.$$

Внаслідок проведених оцінок інтегралів I_9, I_{10}, I_{11} доведено нерівність (2.71) при $m\in[1;2)$. Подібним способом доводиться нерівність (2.71) при $m\in(0;1)$, а також оцінки (2.69), (2.70). Лему доведено.

2.4.3. Регуляризація сингулярного інтегрального рівняння допоміжної задачі. Позначимо через $C(\mathbb{R})$ банахів простір, що складається з функцій $g_*\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, які неперервні на розширеній дійсній прямій $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, з нормою $\|g_*\|_{C(\mathbb{R})}:=\sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}}|g_*(\tau)|$. При цьому введемо у розгляд локальний центрований (відносно нескінченно віддаленої точки) модуль неперевності

$$\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\varepsilon):=\sup_{\tau\in\mathbb{R}:|\tau|\geq 1/\varepsilon}|g_*(\tau_1)-g_*(\infty)|$$

функції $g_*\in C(\mathbb{R})$, а також її модуль неперервності

$$\omega_E(g_*,\varepsilon):=\sup_{\tau_1,\tau_2\in E:\,|\tau_1-\tau_1|\leq\varepsilon}|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)|$$

на множині $E\subset\mathbb{R}$.

Тепер через $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$ позначимо клас функцій $g_*\in C(\mathbb{R})$, модулі неперервності яких задовольняють умови Діні

$$\int\limits_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R},\infty}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta<\infty,\qquad\int\limits_0^1\frac{\omega_{\mathbb{R}\setminus(-a,a)}(g_*,\eta)}{\eta}\,d\eta<\infty$$

при всіх $a>0$.

Позначимо через $C_e(\mathbb{R})$ підпростір банахова простору $C(\mathbb{R})$, що складається з парних функцій, а через $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$ – множину парних функцій класу $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$.

Введемо у розгляд функції

$$\widehat{m}(\xi,\tau) := \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\pi} \displaystyle\int_{\tau}^{\xi} \dfrac{s(m(s,\tau)-m(\xi,\tau))}{(\xi^2-s^2)^{1+m/2}(s^2-\tau^2)^{1-m/2}}\, ds \ \text{ при } \ \xi\tau>0,\ |\tau|<|\xi|, \\ 0 \qquad\qquad \text{при } \ \xi\tau<0 \ \text{ або } \ \xi\tau>0,\ |\tau|>|\xi|, \end{cases}$$

$$\widehat{A}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Re}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,, \qquad \widehat{B}(\xi,\tau) := 2\,\mathrm{Im}\,\widehat{m}(\xi,\tau)\,,$$

$$k_p(\xi,\tau) := m\,\sin\frac{\pi m}{2}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}\ \widehat{A}(\xi,\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{\widehat{B}(\xi,\eta)}{\eta-\tau}\ d\eta\right)\ ,$$

$$\widehat{f}_*(\tau) := \begin{cases} f_*(\tau) & \text{при} \quad \tau \ge 0\,, \\ f_*(-\tau) & \text{при} \quad \tau < 0 \end{cases}$$

а також інтегральні оператори

$$(k_p f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_p(\xi,\tau)}{(\tau^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}}\ f(\tau)\ d\tau\,,$$

$$(Rf)(\xi) := (\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}\Bigg(\frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2+(B(\xi,\xi))^2}\,f(\xi) +$$
$$+\frac{P(\xi)}{2^m\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\tau^2+1)\left|\mathrm{Im}\,\sigma\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)\right|}{2\ |\tau|}\right)^{1-m/2}\frac{f(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\Bigg),$$

де $P(\xi) := \exp(-i\pi m/2)\ (\xi+i)^{m-1}\ \left(\sigma'\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)\right)^{1-m/2} + {}$ $+\exp(i\pi m/2)\ (\xi-i)^{m-1}\ \left(\sigma'\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)\right)^{1-m/2}$, при цьому голоморфна вітка функції $(\xi+i)^{m-1}$ визначена поза розрізом $\{\xi = i\eta : \eta \le -1\}$ і приймає значення $\exp(i\frac{\pi}{2}(m-1))$ при $\xi=0$, голоморфна вітка функції $(\xi-i)^{m-1}$ визначена поза розрізом $\{\xi = i\eta : \eta \ge 1\}$ і приймає значення $\exp(i\frac{\pi}{2}(1-m))$ при $\xi = 0$, а значення голоморфних відповідно у напівплощинах $\{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$, $\{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,\xi < 0\}$ функцій $(\sigma'((\xi-i)/(\xi+i)))^{1-m/2}$, $(\sigma'((\xi+i)/(\xi-i)))^{1-m/2}$ додатні при $\xi = 0$.

В наступній теоремі наведено умови, достатні для регуляризації сингулярного інтегрального рівняння (2.26).

Теорема 2.4.2. *Нехай* $0 < m < 2$ *і функція* $u_{\partial D}$ *належить класу* $\mathcal{H}^{\omega}_{\alpha}(\partial D)$, $m/2 < \alpha \leq 1$, *при цьому конформне відображення* $\sigma(Z)$ *має на колі* $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = 1\}$ *неперервну контурну похідну, яка не обертається в нуль в жодній точці цього кола і модуль неперервності якої задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sigma', \eta)}{\eta} \ \ln^3 \frac{1}{\eta} \, d\eta < \infty \,. \tag{2.75}$$

Тоді кожний розв'язок сингулярного інтегрального рівняння (2.26) *вигляду*

$$U_p(\xi) = \frac{U_0(\xi)}{(\xi^2 + 1)^{(1-\alpha^*)/2}}, \tag{2.76}$$

де $U_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, *можна одержати в результаті розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма*

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = (R\widehat{f_*})(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.77}$$

в якому оператор $R\, k_p$ *є компактним у просторі* $C_e(\mathbb{R})$. *При цьому рівняння* (2.77) *має єдиний розв'язок у просторі* $C_e(\mathbb{R})$, *який до того ж належить класу* $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

Доведення. В силу леми 5 роботи [48] справедлива рівність

$$\int\limits_0^{\xi} \widehat{m}(\xi, \tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_p(\eta)}{\eta - \tau} \, d\eta \, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_p(\eta) \int\limits_0^{\xi} \frac{\widehat{m}(\xi, \tau)}{\eta - \tau} \, d\tau \, d\eta \quad \forall \xi > 0, \tag{2.78}$$

враховуючи яку, запишемо інтегральне рівняння (2.26) у вигляді

$$A(\xi,\xi) U_p(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_p(\tau)}{\tau - \xi} \, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_p(\xi,\tau) U_p(\tau) \, d\tau = \widehat{f_*}(\xi) \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.79}$$

при цьому внаслідок парності обох частин рівності (2.79) рівняння (2.26) і (2.79) еквівалентні.

Розглянемо відповідне рівнянню (2.79) характеристичне рівняння [7, 40]

$$A(\xi,\xi)\, U_*(\xi) + \frac{iB(\xi,\xi)}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_*(\tau)}{\tau - \xi} \, d\tau = f(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{2.80}$$

в якому $f \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$. Для знаходження розв'язку рівняння (2.80) в класі функцій вигляду $U_*(\xi) = U_0(\xi)/(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}$, де $U_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$, використовуємо класичний метод [7, 40] зведення характеристичного рівняння до крайової задачі Рімана

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\Phi^-(\xi) + g(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{2.81}$$

коефіцієнт G і вільний член g якої визначаються рівностями

$$G(\xi) := \frac{A(\xi,\xi) - i\,B(\xi,\xi)}{A(\xi,\xi) + i\,B(\xi,\xi)}, \quad g(\xi) := \frac{f(\xi)}{A(\xi,\xi) + i\,B(\xi,\xi)}\,.$$

Функція G подається у вигляді $G(\xi) = X^+(\xi)/X^-(\xi)$, де

$$X^+(\xi) = \exp(-i\pi m)(\xi+i)^{m-1}(\sigma'((\xi-i)/(\xi+i)))^{1-m/2},$$

$$X^-(\xi) = -(\xi-i)^{m-1}(\sigma'((\xi+i)/(\xi-i)))^{1-m/2}.$$

Тому, використовуючи розв'язок крайової задачі (2.81) і формули Сохоцького для граничних значень $\Psi^\pm(\xi)$ в точці $\xi \in \mathbb{R}$ функції

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}$$

відповідно з напівплощин $\{\zeta \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im}\,\zeta > 0\}$, одержуємо

$$U_*(\xi) = \Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi) = X^+(\xi)\Psi^+(\xi) - X^-(\xi)\Psi^-(\xi) =$$

$$= \frac{A(\xi,\xi)}{(A(\xi,\xi))^2 + (B(\xi,\xi))^2}\,f(\xi) + \frac{X^+(\xi) - X^-(\xi)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\xi} =$$

$$= (Rf)(\xi)/(\xi^2+1)^{(1-\alpha^*)/2}\,. \tag{2.82}$$

Застосовуючи метод Карлемана – Векуа (див. [7, 40]) регуляризації рівняння (2.79) і використовуючи при цьому формулу (2.82) розв'язку характеристичного рівняння (2.80), одержуємо інтегральне рівняння (2.77), яке рівносильне рівнянню (2.79).

З урахуванням лем 2.4.2, 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 так, як і у випадку $m = 1$ при доведенні теореми 3 з [46], доводиться, що оператор $R\,k_p$

є компактним в просторі $C_e(\mathbb{R})$ і всякий розв'язок U_0 рівняння (2.77) з цього простору належить класу $\widetilde{\mathcal{D}}_e(\mathbb{R})$.

Доведемо, нарешті, що рівняння (2.77) має єдиний розв'язок в просторі $C_e(\mathbb{R})$. Для цого покажемо, що однорідне рівняння

$$U_0(\xi) + (R(k_p U_0))(\xi) = 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \tag{2.83}$$

має в просторі $C_e(\mathbb{R})$ тільки нульовий розв'язок. Дійсно, з урахуванням теореми 2.4.1 рівняння (2.83) рівносильне рівнянню (2.21) з нульовою правою частиною. Тоді в силу єдиності розв'язку задач E і N_0 при всіх $(x,y) \in\ D^+$ виконується рівність

$$\frac{1}{2\pi i\, y^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_{z\bar{z}}} \frac{F(t)}{\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{1-m/2}}\, dt = 0, \qquad z = x + iy\,. \tag{2.84}$$

Зафіксуємо тепер круг з центром в точці осі Ox, що належить області D, і розглянемо рівність (2.84) для довільної фіксованої точки (x,y), яка належить перетину цього круга з областю D^+. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\Gamma_{z\bar{z}} = s[\bar{z}, z]$. Тоді після заміни змінних $t = x + iy(1-2\tau)$ одержимо рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{F(x+iy(1-2\tau))}{\big(\tau(1-\tau)\big)^{1-m/2}}\, d\tau = 0\,,$$

на підставі якої і теореми Ю.П. Кривенкова [24] з урахуванням теореми єдиності аналітичних функцій [28, с. 68] робимо висновок про те, що функція F тотожно рівна нулю.

Єдиному розв'язку $F(t) \equiv 0$ рівняння (2.21) з нульовою правою частиною відповідає єдиний розв'язок $U_0(\xi) \equiv 0$ однорідного рівняння (2.83). Отже, згідно з альтернативою Фредгольма рівняння (2.77) має єдиний розв'язок у просторі $C_e(\mathbb{R})$ і теорему доведено.

Як вказано в роботі [46], умова (2.75) виконується, принаймні, у випадку замкненої гладкої жорданової границі ∂D, у якої кут $\vartheta(s)$ нахилу дотичної до додатнього напрямку осі Ox як функція дугової координати

s має модуль неперервності $\omega_{\mathbb{R}}(\vartheta, \varepsilon)$, який задовольняє умову

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{\mathbb{R}}(\vartheta, \eta)}{\eta} \ \ln^4 \frac{1}{\eta}\, d\eta < \infty\,.$$

Наслідком теорем 2.4.1, 2.4.2 є наступне твердження.

Теорема 2.4.3. *Нехай виконуються умови теореми* 2.4.2*. Тоді розв'язок задачі E при $m \in [1,2)$ або розв'язок задачі N_0 при $m \in (0,1)$ задається формулою* (2.2)*, в якій F є єдиним розв'язком допоміжної задачі для заданої граничної функції $u_{\partial D}$ і має вигляд* (2.30)*, де голоморфна функція F_0 виражається рівністю* (2.29)*; при цьому функція U_p має вигляд* (2.76)*, де U_0 є розв'язком рівняння Фредгольма* (2.77) *у просторі $C_e(\mathbb{R})$.*

2.4.4. Доведення обернених теорем. Нехай функція $u(x,y)$ належить класу $C_2(D^+)$ при $m \in [1,2)$ або класу $N_2(D^+)$ при $m \in (0,1)$ і задовольняє рівняння (2.1) в області D^+. Позначимо через γ_ρ образ кола $\{Z \in \mathbb{C} \ : \ |Z| = \rho < 1\}$ при відображенні $\sigma(Z)$, а через $D_{z,\rho}$ — область, що обмежується кривою γ_ρ. Для кожної точки $(x,y) \in D^+$ розглянемо ту криву γ_ρ, яка містить точку $z = x + iy$, і через $\Gamma_{z\bar{z}}$ позначимо одну з її дуг з кінцями в точках z, $\bar{z}$.

Покажемо, що існує єдина голоморфна в області D_z функція F, яка задовольняє умову (2.20) і рівність (2.2) при всіх $z \in \gamma_\rho : \operatorname{Im} z > 0$ і всіх $\rho \in (0;1)$. Дійсно, з теорем 2.4.1, 2.4.2 випливає існування єдиної голоморфної в області $D_{z,\rho}$ функції F_ρ, яка задовольняє рівність (2.2) при $F = F_\rho$ і умову вигляду (2.20) в області $D_{z,\rho}$. Зауважимо, що при цьому в силу теореми 2.1.1 виконується також рівність $F_\rho(x) = 2\pi\, u(x,0)/\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ при всіх $x \in D_{z,\rho} \cap \mathbb{R}$. З урахуванням останнього зауваження стає очевидним, що функції F_ρ при різних значеннях $\rho \in (0;1)$ є звуженням на область $D_{z,\rho}$ єдиної функції F, яка є голоморфною в області D_z. Теореми 2.3.1 і 2.3.2 доведено.

Висновки

В розділі 2:

1. Встановлено інтегральні зображення (2.2) узагальненого осесиметричного потенціалу через голоморфні функції комплексної змінної, задані у довільній обмеженій однозв'язній області D_z, симетричній відносно дійсної осі. При цьому в теоремах 2.3.1, 2.3.2 доведено взаємну однозначність відповідності (2.2) між узагальненими осесиметричними потенціалами з класу $C_2(D^+)$ при $m \in [1, 2)$ або з класу $N_2(D^+)$ при $m \in (0, 1)$ та голоморфними в області D_z функціями комплексної змінної, що приймають дійсні значення в точках дійсної осі.

2. В теоремі 2.2.1 встановлено достатні умови неперервного продовження інтегральних зображень узагальненого осесиметричного потенціалу на границю області та одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень.

3. В теоремі 2.4.3 здійснено редукцію деяких крайових задач для розв'язків рівняння (1) при $m \in (0; 2)$ до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі за розширених умов на границю області.

РОЗДІЛ 3

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ МОНОГЕННИМИ ФУНКЦІЯМИ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В КОМУТАТИВНІЙ БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

В даному розділі встановлюється зв'язок між узагальненими осесиметричними потенціалами в областях спеціальної форми і моногенними функціями, які приймають значення в деякій комутативній банаховій алгебрі.

3.1. Характеризація узагальнених осесиметричних потенціалів моногенними функціями в обмежених областях

Нехай $\mathbb{H} := \{a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k : a_k \in \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty\}$ — комутативна банахова алгебра над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ з нормою $\|a\|_{\mathbb{H}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ та базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Таблиця множення для елементів базиса запропонована І.П. Мельниченком [32]:

$$e_n e_1 = e_n, \quad e_m e_n = \frac{1}{2}\left(e_{m+n-1} + (-1)^{n-1} e_{m-n+1}\right) \quad \forall\, m \geq n \geq 1\,.$$

Як і в роботі [36], через $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} := \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H} \equiv \{c = a + ib : a, b \in \mathbb{H}\}$ позначимо комплексифікацію алгебри $\mathbb{H}$ таку, що норма в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ задається співвідношенням $\|c\|_{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, де $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, e_k, \quad c_k \in \mathbb{C}$.

Виділимо в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ лінійну оболонку векторів e_1, e_2 над полем $\mathbb{R}$, яка є декартовою площиною $\mu := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Області $D \subset \mathbb{R}^2$ поставимо у відповідність області $D_z := \{z = x + iy \ : \ (x,y) \in D\} \subset \mathbb{C}$ та $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \ : \ (x,y) \in D\} \subset \mu$, які є конгруентними до області D.

Область D_z комплексної площини $\mathbb{C}$ назвемо *опуклою в напрямку уявної осі*, якщо D_z разом з кожною своєю точкою z містить також відрізок, що з'єднує точки z і $\bar{z}$; при цьому відповідну область $D \subset \mathbb{R}^2$ назвемо *опуклою в напрямку осі* Oy.

Домовимося, що скрізь в даному розділі $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\ z := x + iy$ і $\zeta := xe_1 + ye_2$.

В роботі [36] для кожної функції $F \colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$, голоморфної в опуклій у напрямку уявної осі області D_z, побудовано в явному вигляді її головне продовження $F_{p.e.}$ в область D_ζ:

$$F_{p.e.} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (te_1 - \zeta)^{-1} F(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y)\, e_k \,, \tag{3.1}$$

при цьому

$$U_1(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt \,, & \text{якщо } y \neq 0 \,, \\ F(x) \,, & \text{якщо } y = 0 \,, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$U_k(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left(\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t-x)}{y} \right)^{k-1} dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{якщо } y \neq 0 \,, \\ 0 \,, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{якщо } y = 0 \,, \end{cases} \tag{3.3}$$

де $k = 2, 3, \ldots$, γ — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, що охоплює відрізок, який з'єднує точки z та $\bar{z}$, а $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ є неперервною віткою функції $G(t) = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, аналітичної поза розрізом вздовж вказаного відрізка, такою, що $G(t) > 0$ для всіх $t > \operatorname{Re} z$.

Коло комплексної площини $\mathbb{C}$ з центром в точці z і радіусом ε будемо позначати через $c_\varepsilon(z)$.

Позначимо через $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел і $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для кожного числа $k \in \mathbb{N}_0$ та довільного дійсного α розглянемо біноміальні коефіцієнти

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}, & \text{якщо } k \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{якщо } k = 0, \end{cases}$$

які при $\alpha = n \in \mathbb{N} : n \geq k$ позначатимемо також через C_n^k.

Лемма 3.1.1. *Якщо функція* $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ *є голоморфною в опуклій у напрямку уявної осі області* D_z, *то при* $z = x + iy \in \in D_z : y \neq 0$ *справедливі рівності*

$$\int\limits_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2n+1}^{n-k}}{2^{2n}} \left[\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-(t-x)}{y}\right]^{4k+2} dt =$$

$$= \int\limits_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left[\frac{2(t-x)^2+y^2}{y^2}\right]^{2n+1} dt, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{3.4}$$

$$\int\limits_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left(\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{2n}^{n-k}}{2^{2n-1}} \left[\frac{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-(t-x)}{y}\right]^{4k}\right) dt =$$

$$= \int\limits_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left[\frac{2(t-x)^2+y^2}{y^2}\right]^{2n} dt, \qquad n = 1, 2, \dots. \tag{3.5}$$

Доведення. При $n = 0$ рівність (3.4) легко встановлюється з урахуванням теореми Коші.

Доведемо справедливість рівності (3.4) при $n \geq 1$ і $y > 0$. Позначимо через D'_z область, обмежену кривою γ, та візьмемо додатнє число ε, що задовольняє нерівність $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{y, \min\limits_{t\in\gamma}|t-z|\}$.

Введемо в розгляд області

$$E_\varepsilon^{\pm} := \{t \in D'_z : |t-z| > \varepsilon,\ |t-\bar{z}| > \varepsilon, \pm(\mathrm{Re}\, t - x) > 0\}$$

і позначимо:

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm} := \lim_{\tau\to t,\,\tau\in E_\varepsilon^{\pm}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})} \qquad \forall\, t\in\partial E_\varepsilon^{\pm},$$

$$B_n(t,z) := \frac{1}{2^{2n}}F(t)\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k}\left(\frac{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)-(t-x)}{y}\right)^{4k+2} dt\,, \quad (3.6)$$

$$B_n^{\pm}(t,z) := \frac{1}{2^{2n}}F(t)\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k}\left(\frac{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm}-(t-x)}{y}\right)^{4k+2} dt \quad (3.7)$$

при $n=0,1,\ldots$. Тоді ліва частина рівності (3.4) подається у вигляді суми чотирьох інтегралів

$$\int\limits_{\gamma} \frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt = \int\limits_{\partial E_\varepsilon^-} \frac{B_n^-(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^-}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+} \frac{B_n^+(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+}\,dt - \int\limits_{\partial E_\varepsilon^-\setminus\gamma} \frac{B_n^-(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^-}\,dt-$$

$$-\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+\setminus\gamma} \frac{B_n^+(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^+}\,dt := I_1+I_2+I_3+I_4. \quad (3.8)$$

Оскільки $B_n^{\pm}(t,z)$ є аналітичною функцією за змінною t в області $E_\varepsilon^{\pm}$, то за теоремою Коші $I_1=I_2=0$. Позначивши

$$\Gamma^- := \partial E_\varepsilon^- \setminus (\gamma\cup c_\varepsilon(z)\cup c_\varepsilon(\bar{z})\cup s[\bar{z}+i\varepsilon, z-i\varepsilon]),$$

$$\Gamma^+ := \partial E_\varepsilon^+ \setminus (\gamma\cup c_\varepsilon(z)\cup c_\varepsilon(\bar{z})\cup s[\bar{z}+i\varepsilon, z-i\varepsilon])\,,$$

для суми відмінних від нуля інтегралів одержуємо наступне подання:

$$I_3+I_4 = -\left(\int\limits_{\Gamma^-}+\int\limits_{\Gamma^+}\right)\frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt+$$

$$+\left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)}+\int\limits_{c_\varepsilon(\bar{z})}\right)\frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt - \int\limits_{s[\bar{z}+i\varepsilon,z-i\varepsilon]} \frac{B_n^-(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^-}\,dt-$$

$$-\int\limits_{s[z-i\varepsilon,\bar z+i\varepsilon]}\frac{B_n^+(t,z)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+}\,dt := I_5+I_6+I_7+I_8. \tag{3.9}$$

Оскільки множини Γ^- і Γ^+ рівні, а їх орієнтації протилежні, то $I_5=0$.

Оцінимо модуль інтеграла I_6 :

$$|I_6|\le c\left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)}+\int\limits_{c_\varepsilon(\bar z)}\right)\frac{|dt|}{\sqrt{\varepsilon\,(3y/2)}}\le c_1\sqrt{\varepsilon}, \tag{3.10}$$

де сталі c та c_1 не залежать від ε.

Враховуючи рівності

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+=\sqrt{y^2-(\operatorname{Im}t)^2}\qquad\forall\, t\in s[z-i\varepsilon,\bar z+i\varepsilon]\,,$$

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^-=-\sqrt{y^2-(\operatorname{Im}t)^2}\qquad\forall\, t\in s[\bar z+i\varepsilon,z-i\varepsilon]$$

та виконуючи заміну змінних $t=x+i\eta$, одержуємо

$$I_7+I_8=i\int\limits_{-y+\varepsilon}^{y-\varepsilon}\frac{(B_n^+(x+i\eta,z)+B_n^-(x+i\eta,z))}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\,d\eta. \tag{3.11}$$

Тепер, спрямовуючи ε до нуля в рівності (3.8) та враховуючи при цьому співвідношення (3.8) – (3.11) і $I_1=I_2=I_5=0$, одержуємо рівність

$$\int\limits_\gamma\frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt=\int\limits_{-y}^{y}\frac{(B_n^+(x+i\eta,z)+B_n^-(x+i\eta,z))}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\,d\eta\,. \tag{3.12}$$

Далі, використовуючи рівності (3.6), (3.7), (3.12) і виконуючи при цьому заміну змінних $\eta=y\cos\tau$, приходимо до рівності

$$\int\limits_\gamma\frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt=$$

$$=-\frac{2i}{2^{2n}}\int\limits_0^\pi F(x+iy\cos\tau)\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{n-k}\cos(4k+2)\tau\,d\tau. \tag{3.13}$$

Нарешті, після використання формули (див. [22, с. 724])

$$(\cos 2\tau)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k} \cos(4k+2)\tau \tag{3.14}$$

в рівністі (3.13) одержуємо наступний вираз лівої частини рівності (3.4):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{B_n(t,z)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt = -2i \int\limits_{0}^{\pi} F(x+iy\cos\tau)\,(\cos 2\tau)^{2n+1}\, d\tau\,. \tag{3.15}$$

Здійснюючи аналогічні перетворення правої частини рівності (3.4), одержуємо

$$\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \left(\frac{2(t-x)^2+y^2}{y^2}\right)^{2n+1} dt =$$

$$= -2i \int\limits_{0}^{\pi} F(x+iy\cos\tau)\,(\cos 2\tau)^{2n+1}\, d\tau\,,$$

наслідком чого та рівності (3.15) є рівність (3.4) при $y>0$. При $y<0$ справедливість рівності (3.4) встановлюється аналогічно.

Рівність (3.5) доводиться за тією ж схемою, що і рівність (3.4), при цьому аналогічно до формули (3.14) використовується формула (див. [22, с. 724])

$$(\cos 2\tau)^{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{1}{2}\, C_{2n}^{n} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \cos 4k\tau\right).$$

Лему доведено.

Для довільного $m \ge 1$ позначимо

$$a_k(m) := \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!}\, C_{2n}^{n}, & \text{якщо } k=0, \\ \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n+1)}{2^{4n}(2n)!}\, C_{2n}^{n-k}, & \text{якщо } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.16}$$

$$b_k(m) := \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-4n-1)}{2^{4n+2}(2n+1)!}\, C_{2n+1}^{n-k}, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.17}$$

Під $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}$ розуміємо неперервну вітку функції $H(t) := \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}$, аналітичної поза розрізом $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = x, |\operatorname{Im} t| \geq |y|\}$, таку, що $H(t) > 0$ для всіх $t > \operatorname{Re} z$.

В наступній теоремі будується розв'язок рівняння (2.1) при $m \geq 1$ за допомогою компонент U_k гіперкомплексної аналітичної функції (3.1).

Теорема 3.1.1. *Якщо $m \geq 1$ і функція $F\colon D_z \longrightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною в опуклій у напрямку уявної осі області D_z, то функція*

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m) U_{4k+1}(x,y) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(m) U_{4k+3}(x,y) \tag{3.18}$$

задовольняє рівняння (2.1) на множині $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$. Крім того, функція (3.18) при $(x,y) \in D : y \neq 0$ подається у вигляді

$$u(x,y) = \frac{2^{(m-3)/2}}{\pi i \, |y|^{m-1}} \int\limits_{\gamma'} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2} dt\,, \tag{3.19}$$

де $z = x + iy$, а γ' — довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в D_z, яка охоплює множину $\{x + i\eta : |\eta| < |y|\}$, перетинаючи пряму $\operatorname{Re} t = x$ лише в точках z і $\bar{z}$. При цьому існує границя

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) F(x_0) \;\; \forall\, x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, 0) \in D, \tag{3.20}$$

де $\mathrm{B}(p,q)$ — бета-функція Ейлера.

Доведення. При $m = 1$ твердження теореми є наслідком теореми 18 з [36]. Тому надалі розглядатимемо випадок $m > 1$.

Перетворюючи ряд, що знаходиться в правій частині рівності (3.8), з урахуванням його абсолютної збіжності в області D та виразів (3.16) і (3.17), одержуємо рівність

$$u(x,y) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n} \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right) U_1(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n} \frac{C_{2n}^{n-k}}{2^{2n}} U_{4k+1}(x,y) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1} \frac{C_{2n+1}^{n-k}}{2^{2n+1}} U_{4k+3}(x,y). \tag{3.21}$$

Підставляючи вирази (3.2), (3.3) компонент U_k в рівність (3.21) і використовуючи при цьому позначення $K_F(t,z) := F(t)/\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, переписуємо рівність (3.21) у вигляді

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \Biggl(& \int\limits_{\gamma} K_F(t,z)\, dt + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{\frac{m-1}{2}}{2n}}{2^{2n-1}} \int\limits_{\gamma} K_F(t,z) \left(\frac{C_{2n}^{n}}{2} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \left(\mathcal{W}(t,x,y)\right)^{4k} \right) dt + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1}}{2^{2n}} \int\limits_{\gamma} K_F(t,z) \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k} \left(\mathcal{W}(t,x,y)\right)^{4k+2} dt \Biggr), \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

де $\quad \mathcal{W}(t,x,y) := \left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t-x) \right) / \, y.$

Тепер з урахуванням рівностей (3.4) і (3.5) рівність (3.22) набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
& u(x,y) = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \Biggl(\int\limits_{\gamma} K_F(t,z)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n} \int\limits_{\gamma} K_F(t,z) \left(\frac{2(t-x)^2 + y^2}{y^2} \right)^{2n} dt + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1} \int\limits_{\gamma} K_F(t,z) \left(\frac{2(t-x)^2 + y^2}{y^2} \right)^{2n+1} dt \Biggr). \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Введемо в розгляд замкнену криву γ_e, яка є об'єднанням двох жордanових спрямлюваних дуг $\gamma_e^{\pm}$, що розміщені відповідно в множинах $\{t \in D_z : \pm(\mathrm{Re}\, t - x) \geq 0\}$ і мають своїми кінцями точки z та $\bar{z}$, таку, що виконується нерівність

$$
\left| \frac{2(t-x)^2 + y^2}{y^2} \right| \leq 1 \qquad \forall\, t \in \gamma_e \,. \qquad (3.24)
$$

Кривою γ_e може бути, принаймні, крива, що складається з берегів розрізу комплексної площини вздовж відрізка $s[z, \bar{z}]$.

З урахуванням теореми Коші інтегрування вздовж кривої γ в рівності (3.23) легко замінюється інтегруванням вздовж кривої γ_e так, що одержуємо рівність

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_e} K_F(t,z)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{m-1}{2}}{n} \int\limits_{\gamma_e} K_F(t,z) \left[\frac{2(t-x)^2+y^2}{y^2}\right]^n dt\right). \qquad (3.25)$$

Оскільки функція $K_F(t,z)$ є сумовною на кривій γ_e і справедлива нерівність (3.24), то при $m>1$ рівність (3.25) переписується у вигляді

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_e} K_F(t,z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{n}\left[\frac{2(t-x)^2+y^2}{y^2}\right]^n\right)dt\,,$$

звідки з урахуванням рівності

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{n} w^n = (1+w)^{\frac{m-1}{2}} \qquad \forall\, w\in\mathbb{C} : |w|\le 1$$

одержуємо

$$u(x,y) = \frac{2^{(m-1)/2}}{2\pi i\;|y|^{m-1}}\int\limits_{\gamma_e} K_F(t,z)\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-1)/2}\,dt. \qquad (3.26)$$

У випадку, коли γ_e утворена берегами розрізу комплексної площини вздовж відрізка $s[z,\bar z]$, після заміни змінних $t = x + i|y|\cos\tau$ рівність (3.26) набуває вигляду

$$u(x,y) = \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi} F(x+i|y|\cos\tau)(\sin\tau)^{m-1}\,d\tau\,. \qquad (3.27)$$

Оскільки функція (3.27) є розв'язком рівняння (2.1) на множині $\{(x,y)\in D : y\neq 0\}$ (див. [69, 75]), то в результаті виконаних перетворень доведено, що при $m>1$ функція (3.19) є розв'язком рівняння (2.1) на тій же множині.

Тепер граничним переходом в рівності (3.27) при $(x,y)\to(x_0,0)$ одержуємо рівність (3.20), при цьому використовується також рівність (21.4-19) з [22], у якій треба покласти $p=m/2$ та $q=1/2$.

Нарешті, з урахуванням теореми Коші, замінюючи в рівності (3.26) інтегрування вздовж кривої γ_e інтегруванням вздовж кривої γ', одержуємо рівність (3.19). Теорему доведено.

Зауважимо, що клас кривих, що володіють такими властивостями, як крива γ_e в доведенні теореми 3.1.1, складається з континуальної сукупності кривих, які містяться в замиканні множини, що обмежується лемніскатою Бернуллі, точки $\xi+i\eta$ якої задовольняють рівняння

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{|y|}(\xi-x)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{|y|}\eta\right)^2\right)^2=2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{|y|}\eta\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{|y|}(\xi-x)\right)^2\right).$$

Справедлива теорема, обернена до теореми 3.1.1.

Теорема 3.1.2. *Нехай область D є опуклою в напрямку осі Oy і $u(x,y)$ — неперервна в D та парна за змінною y функція, яка при $m\ge 1$ є розв'язком рівняння* (2.1) *на множині* $\{(x,y)\in D : y\ne 0\}$. *Тоді існує єдина голоморфна в D_z функція $F\colon D_z\longrightarrow\mathbb{C}$ така, що $u(x,y)$ подається у вигляді* (3.18), *де U_k — компоненти головного продовження* (3.1) *функції F в область D_ζ.*

Доведення. За умов теореми існує єдина голоморфна в D_z функція $F\colon D_z\longrightarrow\mathbb{C}$ така, що $u(x,y)$ подається у вигляді (3.27) (див. [24]). Тепер твердження теореми випливає з тотожності виразів (3.18) і (3.27), встановленої при доведенні теореми 3.1.1.

Підставляючи компоненти розкладу гіперкомплексної аналітичної функції ζ^n за елементами базису алгебри $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ (див. [36]) у рівність (3.18), одержуємо функції $u_n(x,y)$, які за формулою (3.18) відповідають голоморфній функції $F(z)=z^n$, де n — довільне натуральне число:

$$u_n(x,y)=(x^2+y^2)^{n/2}\Bigg(a_0(m)\,P_n(\cos\theta)+2\sum_{k\in\mathbb{N}_0:4k+1\le n}a_k(m)\frac{n!\,P_n^{4k}(\cos\theta)}{(n+4k)!}+$$

$$+2\sum_{k\in\mathbb{N}_0:4k+3\le n} b_k(m)\frac{n!\,P_n^{4k+2}(\cos\theta)}{(n+4k+2)!}\Bigg)\,, \tag{3.28}$$

де P_n та P_n^k — поліноми та приєднані поліноми Лежандра:

$$P_n(t):=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \qquad P_n^k(t):=(1-t^2)^{k/2}\frac{d^k}{dt^k}P_n(t)$$

і $\cos\theta:=x/\sqrt{x^2+y^2}$.

Теорема 3.1.3. *Нехай область D є опуклою в напрямку осі Oy. Тоді на кожній компактній підмножині K області D кожна неперервна в D та парна за змінною y функція $u(x,y)$, яка при $m\ge 1$ є розв'язком рівняння* (2.1) *на множині $\{(x,y)\in D: y\ne 0\}$, рівномірно наближається лінійними комбінаціями поліномів $u_n(x,y)$.*

Доведення. Нехай $u(x,y)$ — розв'язок рівняння (2.1), який задовольняє умовам теореми. Згідно з теоремою 3.1.2 існує голоморфна в D_z функція $F: D_z\to\mathbb{C}$ така, що $u(x,y)$ подається рівністю (3.18), яку запишемо у вигляді

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k\,U_k(x,y)\,, \tag{3.29}$$

де U_k — компоненти головного продовження (3.1) функції F в область D_ζ, а коефіцієнти d_k визначаються рівностями $d_{4k+1}=a_k(m)$, $d_{4k+3}=$ $=b_k(m)$, $d_{2k+2}=0$ при всіх $k\in\mathbb{N}_0$.

З теореми 19 роботи [36] випливає, що для компактної підмножини $K_\zeta:=\{xe_1+ye_2:(x,y)\in K\}$ множини D_ζ та довільних додатніх чисел ε і a знайдеться поліном з комплексними коефіцієнтами

$$Q_n(\zeta)=\sum_{j=1}^{n} c_j\,\zeta^j$$

такий, що

$$\sup_{\zeta\in K_\zeta}\|F_{p.e.}(\zeta)-Q_n(\zeta)\|_{\mathbb{H}_\mathbb{C}}<\frac{\varepsilon}{a}\,, \tag{3.30}$$

де $F_{p.e.}(\zeta)$ — головне продовження (3.1) функції F в область D_ζ.

Використовуючи розклад

$$\zeta^j=\sum_{k=1}^{j}U_{j,k}(x,y)\,e_k,$$

компоненти якого $U_{j,k}(x,y)$ знайдено в явному вигляді в роботі [36], запишемо розклад полінома $Q_n(\zeta)$ за базисом алгебри $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$:

$$Q_n(\zeta)=\sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{k=1}^{j}U_{j,k}(x,y)\,e_k=\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{j=k}^{n}c_j\,U_{j,k}(x,y).$$

Тепер з урахуванням означення норми в алгебрі $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ з нерівності (3.30) випливає нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|U_k(x,y)-\sum_{j=k}^{n}c_jU_{j,k}(x,y)\Big|<\frac{\varepsilon}{a}\qquad\forall\,(x,y)\in K\,, \tag{3.31}$$

де $\sum\limits_{j=k}^{n}c_jU_{j,k}(x,y):=0$ при $k>n$.

Враховуючи, що функція (3.28) має вигляд

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}d_kU_{n,k}(x,y)\,,$$

а функція $u(x,y)$ подається рівністю (3.29), одержуємо ланцюжок рівностей:

$$u(x,y)-\sum_{j=1}^{n}c_ju_j(x,y)=u(x,y)-\sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{k=1}^{j}d_kU_{j,k}(x,y)=$$

$$=u(x,y)-\sum_{k=1}^{n}d_k\sum_{j=k}^{n}c_jU_{j,k}(x,y)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\Big(U_k(x,y)-\sum_{j=k}^{n}c_jU_{j,k}(x,y)\Big). \tag{3.32}$$

Нарешті, з рівності (3.32), нерівності (3.31) та існування сталої a такої, що $|d_k|\le a$ при всіх $k\in\mathbb{N}$, випливає, що для довільного $\varepsilon>0$

існують $n \in \mathbb{N}$ та комплексні числа $c_1, c_2 \ldots, c_n$ такі, що виконується нерівність

$$\Big| u(x,y) - \sum_{j=1}^{n} c_j\, u_j(x,y) \Big| < \varepsilon \qquad \forall\, (x,y) \in K\,.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що оскільки u_n подається рівністю (3.27), в якій $u = u_n$ і $F(z) = z^n$, то, використовуючи інтегральне зображення поліномів Гегенбауера (див. [6, с.459]), одержуємо рівність

$$u_n(x,y) = \frac{2^{3(m-1)/2}\ \big(\Gamma(m/2)\big)^2\, n!}{\pi\, \Gamma(n+m)}\ (x^2+y^2)^{n/2}\, C_n^{(m/2)}(x(x^2+y^2)^{-1/2}), \quad (3.33)$$

де $C_n^{(\lambda)}$ — поліноми Гегенбауера:

$$C_n^{(\lambda)}(t) := \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\, k!\, (n-2k)!}\ (2\,t)^{n-2k}\,,$$

а $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функція Ейлера.

Тепер, порівнюючи праві частини рівностей (3.28), (3.33), переконуємося у справедливості наступного співвідношення між поліномами Гегенбауера та поліномами і приєднаними поліномами Лежандра:

$$C_n^{(m/2)}(t) = \frac{2^{(5-3m)/2}\, \Gamma(m+n)\, \pi}{\big(\Gamma(m/2)\big)^2\, n!} \left(\frac{a_0(m)}{2} P_n(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\in\mathbb{N}_0 : 4k+1 \le n} a_k(m) \frac{n!\, P_n^{4k}(t)}{(n+4k)!} + \sum_{k\in\mathbb{N}_0 : 4k+3 \le n} b_k(m) \frac{n!\, P_n^{4k+2}(t)}{(n+4k+2)!} \right)$$

при $m \ge 1$ та $t \in [-1,1]$.

3.2. Зв'язок узагальнених осесиметричних потенціалів з моногенними функціями в необмежених областях

Встановимо зв'язок гіперкомплексних аналітичних функцій, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, з розв'язками рівняння (2.1) в зовнішності замикання обмеженої опуклої в напрямку осі Oy області D.

Як і в роботі [36], введемо в розгляд елемент e_0, що не належить алгебрі $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, і постулюємо виконання наступних правил множення для нього:

$$e_0e_1 = e_0,\ e_0e_2 = -e_1,\ e_0e_{2k+1} = e_0 - 2\sum_{m=1}^{k} e_{2m},\ e_0e_{2k+2} = -e_1 - 2\sum_{m=1}^{k} e_{2m+1}$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Постулюємо також, що при цьому залишаються справедливими аксіоми асоціативності, комутативності та дистрибутивності.

Помістимо алгебру $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ в банахів простір $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}} := \{d = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e_k$: $d_k \in \mathbb{C}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k| < \infty\}$ з нормою $\|d\|_{\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}} := \sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|$.

Виділимо в $\widetilde{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}$ декартову площину $\widetilde{\mu} := \{\widetilde{\zeta} = xe_1 + ye_0 : x, y \in \mathbb{R}\}$ та поставимо у відповідність області $D \subset \mathbb{R}^2$ конгруентну їй область $D_{\widetilde{\zeta}} := \{\widetilde{\zeta} = xe_1 + ye_0\ :\ (x, y) \in D\}$ в $\widetilde{\mu}$. Всюди надалі $\widetilde{\zeta} := xe_1 + ye_0$.

В роботі [36] для кожної функції $F\colon \mathbb{C} \setminus \overline{D_z} \longrightarrow \mathbb{C}$, яка є голоморфною в доповненні до замикання опуклої в напрямку уявної осі обмеженої області D_z і має нуль в нескінченно віддаленій точці, побудовано в явному вигляді її продовження в область $\widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1 - \widetilde{\zeta})^{-1}\ F(t)\ dt =$$

$$= -\frac{e_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\ \frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - y}{t-x}\ dt -$$

$$-\frac{y}{\pi i}\ \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\ e_k\ \int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\ (t-x)} \times$$

$$\times\left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - y}{t-x}\right)^{k-1} dt, \qquad \widetilde{\zeta} \in \widetilde{\mu} \setminus \overline{D_{\widetilde{\zeta}}}\,,\ \pm\, y > 0\,, \qquad (3.34)$$

де γ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива в $\mathbb{C}$, яка обмежує опуклу в напрямку уявної осі область D_z' таку, що $\overline{D_z} \subset D_z'$ і $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_z'}$, при цьому γ орієнтована так, що при русі вздовж γ область

D'_z залишається справа, а $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ розуміється як неперервна вітка функції $G(t)=\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, аналітичної поза розрізом $\{t\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,t=x, |\mathrm{Im}\,t|\geq|y|\}$, така, що $G(t)>0$ для всіх $t>\mathrm{Re}\,z$.

Функція (3.34) є продовженням функції F в область $\widetilde{\mu}\backslash\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ у такому сенсі: якщо $x_0\in\mathbb{R}$ і точка $\widetilde{\zeta}$ області $\widetilde{\mu}\backslash\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$ прямує до точки $x_0e_1\in\widetilde{\mu}\backslash\overline{D_{\widetilde{\zeta}}}$, то функція (3.34) покоординатно збігається до $F(x_0)e_1$.

В роботі [37] показано, що у випадку, коли функція F має нуль принаймні порядку n в нескінченно віддаленій точці, то функція (3.34) подається у вигляді

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(te_1-\widetilde{\zeta})^{-1}F(t)\,dt=-(e_2)^n\,\sum_{k=1}^{\infty}\,V_{n,k}(x,y)\,e_k\,, \tag{3.35}$$

де

$$V_{n,1}(x,y):=\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i\;y^{n-1}}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\;(t-x)^{n-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\;dt\,, \tag{3.36}$$

$$V_{n,k}(x,y):=-\frac{(-1)^{n+k-1}}{\pi i\;y^{n-1}}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\;(t-x)^{n-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\times$$

$$\times\left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-y}{t-x}\right)^{k-1}dt\,,\qquad k=2,3,\ldots\,. \tag{3.37}$$

Лемма 3.2.1. *Нехай опукла в напрямку уявної осі область* D_z *є обмеженою, а функція* $F\colon\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z\longrightarrow\mathbb{C}$ *є голоморфною в області* $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ *і має в нескінченно віддаленій точці нуль принаймні порядку* m. *Тоді справедливі рівності*

$$\frac{1}{2^{2n}}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{n-k}\left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-y}{t-x}\right)^{4k+2}dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n+1}dt,\quad n=0,1,\ldots, \tag{3.38}$$

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{C_{2n}^{n}}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{n-k}\left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}-y}{t-x}\right)^{4k}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n}dt,\qquad n=1,2,\ldots. \tag{3.39}$$

Доведення леми 3.2.1 здійснюється аналогічно доведенню леми 3.1.1.

Вираз $\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}$ будемо розуміти надалі як неперервну вітку аналітичної функції $H(t):=\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}$ поза розрізом $\{t\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,t=x,\ |\mathrm{Im}\,t|\le|y|\}$, таку, що $H(t)>0$ для всіх $t\in\mathbb{R}:$ $t>\mathrm{Re}\,z$.

В наступній теоремі при натуральному m будується розв'язок рівняння (2.1) в зовнішності замикання обмеженої області D, опуклої в напрямку осі Oy, за допомогою компонент (3.36), (3.37) гіперкомплексної аналітичної функції.

Теорема 3.2.1. *Нехай опукла в напрямку уявної осі область* D_z *є обмеженою, а функція* $F\colon\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z\longrightarrow\mathbb{C}$ *є голоморфною в області* $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ *і має в нескінченно віддаленій точці нуль принаймні порядку* m. *Тоді функція*

$$u(x,y)=-(\mp1)^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k(m)V_{m,4k+1}(x,y)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(m)V_{m,4k+3}(x,y)\right) \tag{3.40}$$

задовольняє рівняння (2.1) *на множині* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}:\pm y>0\}$.

При цьому функція (3.40) *подається у вигляді*

$$u(x,y)=\frac{2^{(m-3)/2}}{\pi i\ |y|^{m-1}}\int\limits_{\gamma''}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}dt\,, \tag{3.41}$$

де $z = x + iy$ *для* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : \pm y > 0$, *а* γ'' – *довільна замкнена спрямлювана жорданова крива в* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$, *яка охоплює множину* $\{x + i\eta : |\eta| < |y|\}$, *перетинаючи пряму* $\mathrm{Re}\, t = x$ *лише в точках* z *і* $\bar{z}$.

Крім того, для всіх $x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *існує границя*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{(m-1)/2}}{\pi} \mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) F(x), & \text{коли } m \text{ парне}, \\ -2^{(m-1)/2} \binom{\frac{m-2}{2}}{\frac{m-1}{2}} F(x), & \text{коли } m \text{ непарне і } x < b_1, \\ 2^{(m-1)/2} \binom{\frac{m-2}{2}}{\frac{m-1}{2}} F(x), & \text{коли } m \text{ непарне і } x > b_2. \end{cases} \tag{3.42}$$

Доведення. При $m = 1$ твердження теореми є очевидним наслідком теореми 24 з [36]. Тому далі розглядатимемо випадок $m > 1$.

Перетворюючи ряд, який знаходиться в правій частині рівності (3.40), з урахуванням його абсолютної збіжності в області $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ та виразів (3.16) і (3.17), одержуємо рівність

$$u(x, y) = -(\mp 1)^m \left(V_{m,1}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n} \frac{C_{2n}^{n-k}}{2^{2n}} V_{m,4k+1}(x, y) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1} \frac{C_{2n+1}^{n-k}}{2^{2n+1}} V_{m,4k+3}(x, y) \right). \tag{3.43}$$

Підставляючи вирази (3.36), (3.37) компонент $V_{m,k}$ в рівність (3.43), переписуємо її у вигляді

$$u(x, y) = \frac{(\pm 1)^{m-1}}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \frac{F(t) \left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{\frac{m-1}{2}}{2n}}{2^{2n-1}} \int_{\gamma} \frac{F(t) \left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{C_{2n}^{n}}{2} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - y}{t-x} \right)^{4k} \right) dt +$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1}}{2^{2n}} \int_{\gamma} \frac{F(t) \left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{n-k} \left(\frac{\pm\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - y}{t-x} \right)^{4k+2} dt \right). \tag{3.44}$$

З урахуванням співвідношень (3.38) і (3.39) рівність (3.44) набуває вигляду

$$u(x,y)=\frac{(\pm 1)^{m-1}}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n+1}dt+$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{2n}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n}dt\right). \qquad (3.45)$$

Розглянемо криву γ_g, що є об'єднанням чотирьох необмежених локально спрямлюваних жорданових кривих $\gamma_{g,l}^{\pm}$ і $\gamma_{g,r}^{\pm}$, які відповідно належать областям $\{t\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}:\pm\mathrm{Im}\,t\ge|y|,\mathrm{Re}\,t\le x\}$ та $\{t\in\mathbb{C}\setminus\overline{D_z}:\pm\mathrm{Im}\,t\ge|y|,\mathrm{Re}\,t\ge x\}$ і мають точку z або $\bar{z}$ одним із своїх кінців, і, крім того, таку, що виконується нерівність

$$\left|\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right|\le 1 \qquad \forall\, t\in\gamma_g\,. \qquad (3.46)$$

Кривою γ_g може бути, принаймні, крива, що складається з берегів розрізу комплексної площини вздовж півпрямих $\{t\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,t=x,\pm\,\mathrm{Im}\,t\ge|y|\}$.

З урахуванням теореми Коші та існування нуля, принаймні, порядку m функції F у нескінченно віддаленій точці інтегрування вздовж кривої γ в рівності (3.45) легко замінюється інтегруванням вздовж кривої γ_g так, що одержуємо рівність

$$v(x,y)=\frac{(\pm 1)^{m-1}}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_g}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{2n+1}\int\limits_{\gamma_g}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n+1}dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{2n}\int\limits_{\gamma_g}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{2n}dt\Bigg). \qquad (3.47)$$

Оскільки функція $F(t)((t-x)/y)^{m-1}/\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ є сумовною на кривій γ_g і справедлива нерівність (3.46), то при $m>1$ рівність (3.47) переписується у вигляді

$$u(x,y)=$$

$$=\frac{(\pm 1)^{m-1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_g}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{m-1}{2}}{k}\left(\frac{(t-x)^2+2y^2}{(t-x)^2}\right)^{k}\right)dt=$$

$$=\frac{(\pm 1)^{m-1}\,2^{(m-1)/2}}{2\pi i\; y^{m-1}}\int\limits_{\gamma'}\frac{F(t)\left(\frac{t-x}{y}\right)^{m-1}}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\frac{\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}}{(t-x)^{m-1}}\,dt=$$

$$=\frac{2^{(m-3)/2}}{\pi i|y|^{m-1}}\int\limits_{\gamma_g}\frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\big((t-z)(t-\bar{z})\big)^{(m-1)/2}dt. \qquad (3.48)$$

Нарешті, замінюючи в правій частині рівності (3.48) інтегрування вздовж кривої γ_g інтегруванням вздовж кривої γ'', з урахуванням теореми Коші одержуємо рівність (3.41).

Для доведення того, що функція (3.41) задовольняє рівняння (2.1) на множині $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}\,:\,y\neq 0\}$, спочатку на основі теореми Коші переходом до інтегрування вздовж берегів лінії розгалуження функції $\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$ подамо функцію (3.41) у вигляді

$$u(x,y)=\frac{(-2)^{(m-1)/2}}{\pi i\;|y|^{m-1}}\left((-1)^{(m-1)}\int\limits_{-\infty}^{-|y|}-\int\limits_{|y|}^{+\infty}\right)F(x+i\eta)\,(\eta^2-y^2)^{(m-2)/2}\,d\eta\,. \qquad (3.49)$$

Далі, виконавши заміну змінних $\eta=|y|\,\xi$, перетворимо її до вигляду

$$u(x,y)=\frac{(-2)^{(m-1)/2}}{\pi i}\left((-1)^{(m-1)}\int\limits_{-\infty}^{-1}-\int\limits_{1}^{+\infty}\right)F(x+i\,|y|\,\xi)\,(\xi^2-1)^{(m-2)/2}\,d\xi, \qquad (3.50)$$

після чого безпосередня підстановка частинних похідних функції (3.50) в рівняння (2.1) перетворює його в тотожність на множині $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\overline{D} : y\neq 0\}$.

Тепер доведемо рівність (3.42) для парних m і $x > b_2$ (випадок $x < b_1$ розглядається аналогічно). Перетворюючи функцію (3.41) у такий же спосіб, як при доведенні рівності (3.49), і використовуючи при цьому позначення

$$T_F^{\pm}(t,z) := \lim_{\tau\to t, \pm\mathrm{Re}\,(\tau-t)>0} \frac{F(\tau)}{\sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})}}\,((\tau-z)(\tau-\bar{z}))^{(m-1)/2}$$

при всіх $t\in\mathbb{C}$ таких, що $\mathrm{Re}\,t = x$ і $|\mathrm{Im}\,t|\neq|y|$, одержуємо рівність

$$u(x,y) = -\frac{2^{(m-3)/2}}{\pi|y|^{m-1}}\left(\int\limits_{-\infty}^{-|y|} + \int\limits_{|y|}^{\infty}\right)\left(T_F^{+}(x+i\eta,z) - T_F^{-}(x+i\eta,z)\right)\,d\eta\,. \quad (3.51)$$

З урахуванням рівності $T_F^{-}(x+i\eta,z) = -T_F^{+}(x+i\eta,z)$, яка виконується при всіх $|\eta|\geq|y|$, здійснюємо наступні перетворення рівності (3.51):

$$u(x,y) = -\frac{2\cdot 2^{(m-3)/2}}{\pi|y|^{m-1}}\left(\int\limits_{-\infty}^{-|y|} + \int\limits_{|y|}^{\infty}\right) T_F^{+}(x+i\eta,z)\,d\eta =$$

$$= -\frac{2\cdot 2^{(m-3)/2}}{\pi|y|^{m-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_F^{+}(x+i\eta,z)\,d\eta + \frac{2\cdot 2^{(m-3)/2}}{\pi|y|^{m-1}}\int\limits_{-|y|}^{|y|} T_F^{+}(x+i\eta,z)\,d\eta\,. \quad (3.52)$$

Перший із інтегралів в правій частині рівності (3.52) згідно з теоремою Коші за умови існування в нескінченно віддаленій точці нуля функції F порядку не меншого, ніж m, обертається в нуль і після заміни змінних $\eta = |y|\cos\tau$ рівність (3.52) набуває вигляду (3.27). Тепер граничним переходом в рівності (3.27) при $(x,y)\to(x_0,0)$ з використанням рівності (21.4-19) з [22], в якій слід покласти $p = m/2$ і $q = 1/2$, одержуємо рівність (3.42) для парних m і $x > b_2$

Нарешті, для доведення рівності (3.42) у випадку $m = 2n+1$, де $n\in\mathbb{N}_0$, інтегрування в правій частині рівності (3.41) вздовж кривої γ''

з урахуванням теореми Коші замінимо інтегруванням вздовж кривої γ, яка має такі ж властивості, як і в рівності (3.34), і, крім того, лежить у тій же півплощині відносно прямої $\{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, t = x\}$, що й відрізок $[b_1, b_2]$. Оскільки при всіх $t \in \gamma$ та усіх $z = x + iy$ таких, що $|y| < \min\limits_{t\in\gamma} |t - x|$, справедливі рівності

$$\frac{1}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} = \pm\frac{1}{t-x}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{y}{t-x}\right)^{2k}, \qquad \pm\mathrm{Re}\,(t-x) > 0,$$

$$((t-z)(t-\bar{z}))^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\,(t-x)^{2n-2p}\,y^{2p}\,,$$

то переписуємо рівність (3.41) у вигляді

$$u(x,y) = \pm\,2^n\,(S_+(x,y) + S_0(x) + S_-(x,y))\,,\;\; \pm\,(b_1 - x) > 0, \pm\,(b_2 - x) > 0,$$

де

$$S_\pm(x,y) := \frac{1}{2\pi i}\sum_{p,k\in\mathbb{N}_0:\pm(n-p-k)>0}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\,C_n^p\,y^{2p+2k-2n}\times$$
$$\times\int\limits_{\gamma} F(t)\,(t-x)^{2n-2p-2k-1}\,dt$$

і з урахуванням формули Коші для необмежених областей та рівності (див. [22, с. 745])

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{n-p}\binom{n}{p} = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}$$

маємо

$$S_0(x) := \left(\sum_{p=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{n-p}\,C_n^p\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(t)}{t-x}\,dt = -\binom{n-\frac{1}{2}}{n}F(x)\,.$$

Враховуючи теорему Коші та існування у функції F нуля принаймні порядку $(2n+1)$ в нескінченно віддаленій точці, одержуємо рівність $S_+(x,y) = 0$ при всіх $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : y \neq 0$ і для доведення рівності (3.42) залишається зазначити, що $S_-(x,y) \to 0$ при $y \to 0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що клас кривих, які мають такі ж властивості, як крива γ_g в доведенні теореми 3.2.1, складається з континуальної сукупності кривих, кожна з яких розміщується у замиканні множини, що містить промені $\{t \in \mathbb{C} : \pm \mathrm{Im}\, t > |y|\}$ і обмежується гіперболою, точки $\xi + i\eta$ якої задовольняють рівняння

$$\frac{\eta^2}{y^2} - \frac{(\xi - x)^2}{y^2} = 1\,.$$

Відмітимо, що за умови абсолютної збіжності числових рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k,$$

при всіх $\tau \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 4k\tau - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(4k+2)\tau\right)\times$$

$$\times\left(\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos 4k\tau + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k \cos(4k+2)\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{2k+1} \cos 2k\tau\,, \quad (3.53)$$

де

$$h_1 := \frac{1}{2} a_0 \tilde{a}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_n \tilde{a}_n - b_n \tilde{b}_n\Big),$$

$$h_3 := \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_{n-1} + \tilde{b}_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n (b_{n-1} + b_n) + 2(a_0 \tilde{b}_0 - \tilde{a}_0 b_0)\right),$$

$$h_{4k+1} := \frac{1}{2}\Big(2 a_0 \tilde{a}_k - b_0 \tilde{b}_k - b_k \tilde{b}_0 + 2\tilde{a}_0 a_k +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+k} \tilde{a}_n - b_{n+k} \tilde{b}_n + a_n \tilde{a}_{n+k} - b_n \tilde{b}_{n+k}) - \sum_{n=1}^{k} b_{n-1} \tilde{b}_{k-n} + \sum_{n=1}^{k-1} a_n \tilde{a}_{k-n}\Big),$$

$$h_{4k+3} := \frac{1}{2}\Big(2(a_0 \tilde{b}_k - \tilde{a}_0 b_k) + \sum_{n=1}^{k} (a_n \tilde{b}_{k-n} - \tilde{a}_n b_{k-n}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+k} \tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n+k} b_{n-1} + a_n \tilde{b}_{n+k} - \tilde{a}_n b_{n+k})\Big)$$

при $k \in \mathbb{N}$ (тут і надалі суми вигляду $\sum_{n=1}^{0}$ покладаємо рівними нулю).

Для кожної точки $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z : y \neq 0$ зафіксуємо пару довільних розімкнених спрямлюваних жорданових кривих $\Gamma^{+}_{z,\bar z}$, $\Gamma^{-}_{z,\bar z}$ з початком в точці z і кінцем в точці $\bar z$, що розміщені відповідно в множинах $\{t \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z : \pm(\mathrm{Re}\, t - x) \geq 0\}$ і таких, що замкнена крива $\Gamma^{+}_{z,\bar z} \cup \Gamma^{-}_{z,\bar z}$ є жордановою та охоплює множину $\overline{D}_z$.

Вираз $\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-2)/2}$ будемо розуміти надалі як неперервну вітку функції $W(t) := \big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-2)/2}$, аналітичної поза розрізом $\{t \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, t = x, |\mathrm{Im}\, t| \geq |y|\}$, таку, що $W(t) > 0$ при всіх $t \in \mathbb{R} : t > \mathrm{Re}\, z$.

Позначимо через $[m]$, $\{m\}$ відповідно цілу та дробову частини числа m. При визначенні чисел $h_{2k+1}(m) := h_{2k+1}$ покладаємо $a_0 := a_0(m)$, $\tilde a_0 := a_0(2 - \{m\})$, $a_n := 2a_n(m)$, $\tilde a_n := 2a_n(2 - \{m\})$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, $b_k := 2b_k(m)$ і $\tilde b_k := 2b_k(2 - \{m\})$ при всіх $k \in \mathbb{N}_0$.

В наступній теоремі для нецілого $m > 1$ будується розв'язок рівняння (2.1) в зовнішності замикання обмеженої області D, правильної у напрямку осі Oy, за допомогою компонент (3.36), (3.37) гіперкомплексної аналітичної функції.

Теорема 3.2.2. *Нехай опукла в напрямку уявної осі область D_z є обмеженою, а функція $F\colon \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z \longrightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною в області $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ і має в нескінченно віддаленій точці нуль, принаймні, порядку $[m]+1$. Тоді функція*

$$u(x,y) = -(\mp 1)^{[m]} \frac{\pi i^{\{m\}} \lambda_m}{2^{1+\frac{[m]}{2}}} \times$$
$$\times \Big(2h_1(m) V_{[m]+1,1}(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h_{2k+1}(m)\, V_{[m]+1,2k+1}(x,y) \Big), \qquad (3.54)$$

де

$$\lambda_m := \begin{cases} 1 + e^{-m\pi i}, & \text{коли } [m] \text{ непарне}, \\ e^{-m\pi i} - 1, & \text{коли } [m] \text{ парне}, \end{cases}$$

задовольняє рівняння (2.1) *при* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : \pm y > 0$ *та* $m > 1$ *:*

$\{m\} \neq 0$. *При цьому функція* (3.54) *подається у вигляді*

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|y|^{m-1}}\Big(\int\limits_{\Gamma^-_{z,\bar z}} - \int\limits_{\Gamma^+_{z,\bar z}}\Big)F(t)\,\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-2)/2}\,dt, \\ \qquad\qquad \textit{коли } [m] \textit{ парне,} \\ \frac{1}{|y|^{m-1}}\Big(\int\limits_{\Gamma^-_{z,\bar z}} + \int\limits_{\Gamma^+_{z,\bar z}}\Big)F(t)\,\big((t-z)(t-\bar z)\big)^{(m-2)/2}\,dt, \\ \qquad\qquad \textit{коли } [m] \textit{ непарне.} \end{cases} \tag{3.55}$$

Доведення. Здійснивши перетворення виразів (3.36), (3.37) у такий же спосіб, як при доведенні рівності (3.49) здійснені перетворення правої частини рівності (3.41), а потім, виконавши заміну змінних $\eta = \frac{|y|}{\cos\tau}$, одержимо

$$V_{[m]+1,1}(x,y) = \frac{(\mp i)^{[m]-1}}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2} + (-1)^{[m]+1}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)\frac{F(x+i\frac{|y|}{\cos\tau})}{|\cos\tau|^{[m]+1}}\,d\tau, \tag{3.56}$$

$$V_{[m]+1,n}(x,y) = \frac{(\mp i)^{[m]-1}}{\pi}\left(2(\pm i)^{1-n}\right)\left(\int\limits_0^{\pi/2} + (-1)^{[m]+1}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)\frac{F(x+i\frac{|y|}{\cos\tau})}{|\cos\tau|^{[m]+1}}\,d\tau. \tag{3.57}$$

Після підстановки виразів (3.56), (3.57) функцій $V_{[m]+1,n}$ в рівність (3.54) з урахуванням рівномірної збіжності ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{2k+1}(m)\cos 2k\tau$$

і сумовності функції $F(x+i\frac{|y|}{\cos\tau})/|\cos\tau|^{[m]+1}$ при $\tau \in [0,\pi]$ одержимо

$$u(x,y) = \pm i^{m-1}\lambda_m\Big(2^{-\frac{1-\{m\}}{2}}2^{-\frac{m-1}{2}}\Big)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{\pi/2} + (-1)^{[m]+1}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)\frac{F(x+i\frac{|y|}{\cos\tau})}{|\cos\tau|^{[m]+1}}\sum_{k=0}^{\infty} h_{2k+1}(m)\,\cos\,2k\tau\,d\tau\,. \tag{3.58}$$

Тепер ряд з правої частині рівності (3.58) дорівнює правій частині рівності (3.53), з використанням якої та розкладів

$$(\sin\tau)^{m-1} = 2^{-\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \cos 4k\tau - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, \cos(4k+2)\tau \right),$$

$$|\cos\tau|^{1-\{m\}} = 2^{-\left(\frac{1-\{m\}}{2}\right)} \left(\tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \, \cos 4k\tau + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k \, \cos(4k+2)\tau \right),$$

одержуємо

$$u(x,y) = \pm i^{m-1}\lambda_m \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^{\pi/2} + (-1)^{[m]+1} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \right) \frac{F(x + i\frac{|y|}{\cos\tau})}{|\cos\tau|^{[m]+1}} |\cos\tau|^{1-\{m\}} (\sin\tau)^{m-1} \, d\tau =$$

$$= \pm i^{m-1}\lambda_m \left(\int\limits_0^{\pi/2} + (-1)^{[m]+1} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \right) \frac{F(x + i\frac{|y|}{\cos\tau})}{|\cos\tau|^{m}} (\sin\tau)^{m-1} \, d\tau \, . \qquad (3.59)$$

Здійснивши аналогічні перетворення правої частини рівності (3.55), встановимо рівність її та правої частини рівності (3.59), що доводить справедливість рівності (3.55).

Нарешті, доведення того, що функція (3.55) задовольняє рівняння (2.1) на множині $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : y \neq 0\}$, здійснюється у такий же спосіб, як і доведення аналогічного твердження стосовно функції (3.41). Теорему доведено.

Висновки

В розділі 3:

1. В теоремах 3.1.1, 3.1.2 встановлено характеризацію розв'язків рівняння (2.1) при $m > 1$ на множині $\{(x,y) \in D : y \neq 0\}$, де D — опукла в напрямку осі Oy обмежена область, за допомогою компонент головних продовжень (3.1) в комутативну асоціативну банахову алгебру $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ функцій, голоморфних в області D_z, яка є конгруентною області D при відповідності $z = x + iy$.

2. В теоремах 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2 знайдено алгоритми побудови розв'язків рівняння (2.1) при $m > 1$ за компонентами аналітичних функцій гіперкомплексної змінної, які будуються в явному вигляді як продовження голоморфних функцій комплексної змінної.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглядається рівняння узагальненого осесиметричного потенціалу, яке має фундаментальне значення в ряді розділів математичного аналізу та математичної фізики.

Основні результати дисертації такі:

1. Встановлено інтегральні зображення узагальненого осесиметричного потенціалу через аналітичні функції комплексної змінної, задані в довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. Для певних класів узагальнених осесиметричних потенціалів доведено взаємну однозначність відповідності між ними та аналітичними функціями комплексної змінної, яка задається вказаними інтегральними зображеннями.

2. Встановлено достатні умови неперервного продовження інтегральних зображень узагальненого осесиметричного потенціалу на границю області та одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень.

3. Здійснено редукцію деяких крайових задач для узагальнених осесиметричних потенціалів до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на дійсній осі за розширених умов на границю області.

4. Знайдено алгоритми побудови узагальнених осесиметричних потенціалів за компонентами моногенних функцій гіперкомплексної змінної, які будуються в явному вигляді як продовження аналітичних функцій комплексної змінної.

Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані в теорії узагальнених аналітичних функцій, в теорії крайових задач для розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу з виродженням та їх застосуваннях у математичній фізиці, гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А.Я., Соловьев Ю.П. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 1. – С. 138 – 145.

2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.

3. Вашарин А.А. Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$ и их приложения к решению одной краевой задачи математической физики // Изв. АН СССР, серия матем. – 1959. – **23**, № 3. – С. 421 – 454.

4. Вашарин А.А., Лизоркин П.И. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе // Докл. АН СССР. – 1961. – **137**, № 5. – С. 1015 – 1018.

5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.

6. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп.– Москва: Наука, 1991.– 576 с.

7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

8. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. – Москва: Физматгиз, 1960. – 316 с.

9. Грищук С.В. О непрерывной продолжимости обобщенных осесимметричных потенциалов на границу области // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ – 2006. – **3**, №.4. – С. 347 – 357.

10. Грищук С.В., Плакса С.А. Вирази розв'язків рівняння Ейлера-Пуассона-Дарбу через компоненти гіперкомплексних аналітичних функцій // Доповіді НАН України. – 2006.– № 8. – С. 18 – 24.

11. Грищук С.В., Плакса С.А. Интегральные представления обобщенных осесимметричных потенциалов // Краевые задачи для потенциальных полей / Киев, 2007. – 60 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2). – С. 32 – 59.

12. Данилюк И.И. Обобщенная формула Коши для осесимметрических полей // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 1. – С. 48 – 85.

13. Данилюк И.И. Исследование пространственных осесимметрических краевых задач // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1271 – 1310.

14. Джаиани Г.В. Уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та., 1984. – 80 с.

15. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Москва: Наука, 1977. – 512 с.

16. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Мат. сборник. – 1952. – **30 (72)**, № 1. – С. 11 – 38.

17. Капшивый О.О. Про розв'язання осесиметричних задач теорії пружності для шару з циліндричною порожниною // Вісник Київ. ун-ту. Сер. математики та механіки. – 1961. – № 4, вип. 1. – С. 96 – 106.

18. Капшивый А.А. Об основном интегральном представлении x-аналитических функций и его применению к решению некоторых интегральных уравнений // Мат. физика. – 1972. – № 12. – С. 38 – 46.

19. Капшивый А.А. Задачи о комплексном x-аналитическом потенциале системы концентрических сферических дисков // Мат. физика. – 1975. – № 17. – С. 120 – 128.

20. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 2. – С. 181 – 183.

21. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – Москва: Наука, 1997. – 208 с.

22. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– Москва: Наука, 1974.– 832 с.

23. Кривенков Ю.П. О некотором представлении решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 3. – С. 351 – 354.

24. Кривенков Ю.П. О некотором представлении решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 4. – С. 545 – 548.

25. Кривенков Ю.П. Задача D для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Исследование по механике и прикладной математике. Труды МФТИ. – 1960. – № 5. – С. 134 – 145.

26. Кудрявцев Л.Д. О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Докл. АН СССР. – 1956. – **108**, № 1. – С. 16 – 19.

27. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1959. – **55.** – С. 1 – 181.

28. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 688 с.

29. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – Москва: Наука, 1977. – 408 с.

30. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – Москва: Наука, 1987. – 840 с.

31. Мельниченко И.П. О представлении моногенными функциями гармонических отображений // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 606 – 613.

32. Мельниченко И.П. Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 98 – 102.

33. Мельниченко И.П. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1284 – 1290.

34. Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518 – 1529.

35. Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1695 – 1703.

36. Мельниченко И.П., Плакса С.А. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228 – 243.

37. Мельниченко І.П., Плакса С.А. Комутативні алгебри гіперкомплесних аналітичних функцій та розв'язки рівнянь еліптичного типу з виродженням на осі //Доп. НАН України. – 2005. – № 12.– С. 28 – 35.

38. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. – Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1963. – 183 с.

39. Михайлов Л.Г., Раджабов Н. Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений второго порядка с сингулярной линией // Докл. АН Тадж. ССР. – 1972. – **15**, № 11. – С. 6 – 9.

40. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.

41. Олевский М.Н. Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$ для полусферической области // Докл. АН СССР. – 1949. – **66**, № 6. – С. 767 – 770.

42. Пахарєва Н.О., Вірченко Н.О. Про деякі інтегральні перетворення в класі x^k-аналітичних функцій // Доп. АН УРСР. – 1962. – № 8. – С. 998 – 1003.

43. Плакса С.А. Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 491 – 511.

44. Плакса С.А. Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 631 – 646.

45. Плакса С.А. Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 800 – 809.

46. Плакса С.А. Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 12. – С. 1623 – 1640.

47. Плакса С.А. К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1634 – 1641.

48. Плакса С.А. Задача Дирихле для функции тока Стокса в односвязной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 197 – 231.

49. Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. – Киев: Наукова думка, 1973. – 423 с.

50. Положій Г.М. Зауваження до основного інтегрального зображення p-аналітичних функцій з характеристикою $p = x^k$ // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 7. – С. 839 – 841.

51. Положий Г.Н., Улитко А.Ф. О формулах обращения основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ // Прикл. механика. – 1965. – **1**, № 1. – С. 39 – 51.

52. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций.– М.: Гостехиздат, 1950.– 336 с.

53. Раджабов Н. О некоторых интегральных уравнениях, связанных с уравнениями в частных производных осесимметрической теории поля// Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. – Душанбе: АН Тадж. ССР. – 1964. – С. 83 – 98.

54. Раджабов Н. Некоторые краевые задачи для уравнения осесимметрической теории поля // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. – Душанбе: АН Тадж. ССР. – 1965. – С. 79 – 128.

55. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и их обращение для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Докл. АН Тадж. ССР. – 1968. – **11**, № 4. – С. 14 – 18.

56. Раджабов Н. Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // Докл. АН Тадж. ССР. – 1974. – **17**, № 8. – С. 7 – 11.

57. Салаев В.В. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки.– 1976.– **19**, №3.– С.365 – 380.

58. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.– Москва: Наука, 1966 – 292 с.

59. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа: Учеб. пособие для мат. спец. ун-тов.– Москва: Высшая школа, 1985.– 304 с.

60. Терсенов С.А. К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 5. – С. 1120 – 1143.

61. Терсенов С.А. О задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы уравнений первого порядка, вырождающейся на границе области // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 1. – С. 167 – 191.

62. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 540 с.

63. Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н. Курс современного анализа: В 2 ч. – Москва: Физматгиз, 1963. – Ч. 2. – 515 с.

64. Франкль Ф.И. К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР, серия матем. – 1945. – **9**, № 5. – С. 387 – 422.

65. Франкль Ф.И. К теории уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ // Изв. АН СССР, серия матем. – 1946. – **10**, № 2. – С. 135 – 166.

66. Франкль Ф.И. Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу–Трикоми и его применение к приближенному нахождению критического течения в заданном плоско-параллельном сопле Лаваля // Докл. АН СССР. – 1947. – **56**, № 7. – С. 683 – 686.

67. Франкль Ф.И. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука // Докл. АН СССР. – 1947. – **57**, № 7. – С. 661 – 664.

68. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

69. Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics.– Dover publ., 1944.– 522 p.

70. Gilbert R.P. Function theoretic methods in partial differential equations. – New York–London: Academic Press, 1969. – 311 p.

71. Grishchuk S.V., Plaksa S.A. On constructions of generalized axial-symmetric potentials by means componens of hypercomplex analytic functions // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ – 2005. – **2**, №.3. – P. 67 – 83.

72. Grishchuk S.V. Expressions of solutions of the Euler – Poisson – Darboux equation via components of hypercomplex analytic functions // International Workshop on Free Boundary Flows and Related Problems of Analysis, Kiev, September 25–30, 2005: Abstr.– Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2005.– P. 18 – 20.

73. Grishchuk S.V. Integral expressions of generalized axially-symmetric potentials // Bogolubov Readings 2007 Dedicated to Yu.A. Mitropolskii on the Occasion of His 90-th Birthday, Zhitomir – Kiev, 19 August – 2 September 2007: Abstr.– Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2007.– P. 28 – 30.

74. Erdelyi A. Singularities of generalized axially symmetric potentials // Communic. on Pure and Appl. Math. – 1956. – **9**, № 3. – P. 403 – 414.

75. Henrici P. Zur Funktionentheory der Wellengleichung // Comment. Math. Helv. – 1953. – **27**, №№ 3,4. – P. 235 – 293.

76. Huber A. On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials // Annals of Math.– 1954.– **60**, № 2.– P. 351– 358.

77. Mackie A.G.. Contour integral solutions of a class of differential equations // J. Rational Mech. and Analysis. – 1955. – **4**, № 5. – P. 733 – 750.

78. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **63**, № 2. – P. 342 – 354.

79. Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1953. – **59**, № 1. – P. 20 – 38.

80. Weinstein A. Singular partial differential equations and their applications // Proc. Symp. Univ. of Maryland. – 1961. – Fluid Dynamic and Appl. Math. – 1962. – P. 29 – 49.