

Національна академія наук України  
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Сатур Оксана Романівна**

УДК 517.9

**Аналіз поведінки траєкторій в  
моделях складних динамічних систем  
з притягальною взаємодією**

111 — математика

Дисертація  
на здобуття наукового ступеня  
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. \_\_\_\_\_ О.Р. Сатур

Науковий керівник  
доктор фіз.-мат. наук, професор  
**Кошманенко Володимир Дмитрович**

Київ — 2020

## Анотація

**Сатур О.Р. Аналіз поведінки траєкторій в моделях складних динамічних систем з притягальною взаємодією.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 “Математика”. – Інститут математики НАН України, Київ, 2020.

Ця робота присвячена дослідженню та побудові моделей дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Поняття динамічної системи конфлікту виникло як математичний інструмент для опису поведінки різноманітних складних фізичних систем з двох і більше конфліктно взаємодіючих сторін. Фактично, динамічна система конфлікту – це система, що об’єднує декілька динамічних систем, еволюція яких деформується під дією конфліктної взаємодії між окремими підсистемами. Встановлення закону динаміки всієї системи є нетривіальною задачею в кожному конкретному випадку, адже він має включити в себе інформацію про стани окремих її компонент у кожен момент часу, спосіб конфліктної взаємодії і його вплив на поведінку в наступні моменти часу. Навіть найпростіші випадки є цікавими в силу нелінійності. Мета теорії динамічних систем конфлікту – дати адекватний опис реальним фізичним системам, які складаються не тільки двох, але і багатьох альтернативно взаємодіючих сторін.

Основна задача цієї роботи – розвинути теорію динамічних систем конфлікту, побудувати конкретні моделі та дослідити поведінку траєкторій у випадку, коли окремі підсистеми притягуються між собою. В такому разі ефект конфліктності полягає у тому, що деформується вільна поведінка опонентів. Зокрема, вони можуть втрачати регіони успішної присутності, концентруючись у регіонах спільних атракторів. Знаходження таких граничних атракторів, опис їхньої структури, басейнів притя-

гання, нерухомих рівноважних станів, існування циклічних орбіт – типові задачі в цьому напрямку, які досі були досліджені лише частково.

Конкретизація таких задач щодо моделей складних динамічних систем з притягальною взаємодією є актуальною з точки зору можливих застосувань до різних проблем в економіці, екології, соціології. Знаходження рівноваги між виробництвом та споживанням, використанням ресурсів і їхнім природним відновленням в екологічному балансі, зокрема, пошук компромісів у суперечливих, часто гостро конфліктних соціальних процесах (наприклад, етнічних, релігійних, національних, мовних) – напевно чи можливі без побудови адекватних математичних моделей динамічних систем з різного типу взаємодіями, як відштовхувального, так і притягального характеру.

Окрім чисто теоретичних задач про поведінку траєкторій у конкретних моделях складних динамічних системах з притягальною взаємодією в дисертаційній роботі досліджено залежність основних динамічних характеристик системи від вибору стратегічних параметрів, таких, як активність конфліктної взаємодії, роль мережевих зв'язків між агентами системи, вибору пріоритетних регіонів присутності у процесі ітераційного подрібнення простору, випадкових впливів і змін статистичних даних.

Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатка.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їхнє практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувачки, наведено інформацію про апробацію результатів дисертації.

В основній частині дисертаційної роботи розглядаються динамічні системи конфлікту з притягальною взаємодією в дискретно-

му часі в термінах двох або більше стохастичних (нормованих на одиницю) векторів  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ , залежних від часу. Еволюція в часі задається відображенням, яке позначається символом  $\ast$  і діє у просторі  $\mathbb{R}_+^n$ .

Відображення  $\ast$  генерує багатокomпонентну динамічну систему в дискретному часі з траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}_i^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots$$

У загальному випадку координати векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$  визначаються ітеративно за координатами попередніх векторів згідно з системою різницьових рівнянь:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \tau_j^t), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  – деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи, а набір додатних функцій  $\tau_j^t$  (певним чином залежних від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ) відповідає ефекту взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому  $t$  утворюють деякий нестохастичний вектор з невід’ємними координатами, який позначено символом  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$  і названо показником атрактора, оскільки його властивості визначають ефект притягання між початковими векторами. Нормувальний знаменник  $z^t$  забезпечує стохастичність векторів  $\mathbf{p}_i^{t+1}$ . Згідно з наведеними рівняннями, відстань між векторами  $\mathbf{p}_i^t$  в  $l_1$ -нормі збігається до нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

тому відображення  $\ast$ , задане цими рівняннями, описує притягальну взаємодію.

Побудова динамічної системи на основі різницьових рівнянь (1) і аналіз її загальних властивостей наведено у розділі 2 після огляду літе-

ратури за темою дисертації у розділі 1. У підрозділах 2.1–2.4 вивчаються різні моделі динамічних систем конфлікту з притяганням, які описують поведінку спочатку пари, а потім довільної скінченної кількості опонентів, із різним способом задання координат  $\tau_j^t$  для показника атрактора. Зокрема, досліджено модель динамічної системи конфлікту у випадку, коли  $\tau_j^t$  вибирається як мінімальне значення  $j$ -их координат у векторів  $\mathbf{p}^t$ ,  $\mathbf{r}^t$ . Таку динамічну систему узагальнено на випадок скінченної кількості взаємодіючих сторін. Доведено існування нерухомих станів та наведено їхній опис у термінах граничних значень вектора  $\mathcal{T}^{t=\infty}$ . Побудовано декілька конкретних варіантів цієї моделі. Встановлено явний взаємозв'язок граничного стану системи й показника атрактора. Знайдено умови на спосіб визначення  $\mathcal{T}$ , за яких усі траєкторії збігаються до  $\omega$ -граничної множини  $\Gamma^\infty$ , яка є циклом. Доведена нестійкість таких граничних орбіт. Усі результати проілюстровано прикладами з комп'ютерними симуляціями. Важливо, що моделі динамічних систем такого типу можуть описувати динаміку реальних процесів. Як ілюстрація, можна вважати, що показнику атрактора  $\mathcal{T}^t$  відповідає характер зовнішнього впливу на систему (наприклад, інформаційний вплив на суспільство). Керуючи значеннями величин показника атрактора, можна як описувати, так і контролювати поведінку системи.

Розділ 3 повністю присвячений побудові конкретних моделей. Так, підрозділ 3.1 присвячено різним варіантам моделі поширення переконань, які з часом наближаються до консенсусу. Ця модель фактично є аналогом відомих побудов, але ґрунтується на зовсім іншому законі взаємовпливу між агентами й істотно використовує теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Механізм взаємодії між двома агентами задається за допомогою різницевого рівняння виду (1) і припускає детальний аналіз динаміки. Зокрема, в роботі описано поведінку агентів у випадку прийняття бінарних рі-

шень у термінах часової еволюції векторів і траєкторій як з двома, так і з багатьма альтернативними позиціями. Показано, що відмінність між переконаннями агентів впливає на інтенсивність взаємодії.

Підрозділ 3.2 описує проблему існування достовірної події в динамічних системах конфлікту. Тут розглянуто найпростішу абстрактну модель динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією у випадку лише двох векторів  $\mathbf{p}^t$  та  $\mathbf{r}^t$ , коли функція  $\theta^t = 0$ , а координати  $\tau_j^t$  показника атрактора визначено як добутки координат векторів  $\mathbf{p}^t$ ,  $\mathbf{r}^t$ , тобто  $\tau_j^t = p_j^t r_j^t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Достовірність події характеризує стан системи зі скінченною множиною позицій  $\omega_i$ , коли всі координати стають нульовими, крім однієї, яка дорівнює одиниці для обох векторів. Модель припускає інтерпретацію задачі про пошук умов, коли різні дискретні випадкові розподіли притягуються та концентруються у фіксованій позиції із одиничною ймовірністю. Одержано ряд достатніх ознак існування достовірної події при  $t \rightarrow \infty$ . Найпростіші з них формулюються в термінах максимальних значень координат  $p_i$ ,  $r_i$ , добутків цих координат  $\rho_i = p_i r_i$ , їхніх сум  $\sigma_i = p_i + r_i$  або деяких комбінацій з  $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$ . Навіть у цьому простому випадку виникають питання нерозв'язані досі повністю. Зокрема питання про повний опис координат із властивістю  $p_j^t \rightarrow 0$ ,  $r_j^t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Якщо достовірну подію інтерпретувати, як стан консенсусу в соціальних мережах, то одержані результати можуть бути застосовані у моделях виборів та моделях формування поглядів.

У підрозділі 3.3 розглянуто спектральну задачу для розподілів динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією на просторах з ітераційним фрактальним подрібненням. Знайдено критерій у термінах початкових розподілів, який гарантує виникнення точкового спектру у граничних розподілах. Основний результат стверджує, що головна умова виникнення точкового спектру – це стратегія пріоритету над опонентом у єдиному регіоні  $\omega_i$  на кожному кроці.

Нарешті, у підрозділі 3.4 побудовано модель динамічної системи конфлікту, що описує еволюцію поширення біологічних популяцій на ресурсному просторі при постійних зовнішніх умовах для існування. Як і в абстрактному випадку, динаміка розглядається в термінах двох векторів  $\mathbf{p}^t$  та  $\mathbf{r}^t$ . Координати першого з них змінююся згідно з рівняннями (1), де  $\theta^t = 0$ , а  $\tau_j^t$  визначені через координати вектора  $\mathbf{r}^t$  з додатковими параметрами  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Доведено існування рівноважного атрактора, досліджено його стійкість та встановлено явний вигляд граничного стану залежно від  $c_j$ . Параметри  $c_j$  трактуються як незмінні в часі величини, які характеризують умови сприятливості для існування популяції в кожному з регіонів  $\omega_j$ . Обчислення явних значень граничних координат (а також численні комп'ютерні симуляції) доводять, що існує пряма їх залежність цих параметрів: чим більше значення  $c_j$ , тим більше значення відповідної  $j$ -ої граничної координати. Тобто сприятливіші умови для існування популяції в деякому регіоні приводять до збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні. Це підтверджує адекватність математичної моделі.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Ключові слова:** складна динамічна система, динамічна система конфлікту, різницеве рівняння, багатокomпонентна динамічна система, композиція (перетворення чи відображення) конфлікту, притягальна взаємодія, нерухома точка, граничний стан, стійкість граничного стану, дискретна міра, стохастичний вектор, достовірна подія, стратегія пріоритету, ітераційне подрібнення простору, точковий спектр.

## Abstract

**Satur O.R. Analysis of trajectories behavior in models of complex dynamical systems with attractive interaction.** — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 “Mathematics”. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study and construction of models of discrete dynamic conflict systems with attractive interaction. The notion of dynamic conflict system has appeared as a mathematical tool for describing the behavior of various complex physical systems with two or more conflicting sides. In fact, dynamic conflict system is a system that unites several dynamic systems, whose evolution is deformed under influence of conflict interaction between separate subsystems. Identification of the law of the dynamics of the entire system is a non-trivial task in each specific case; this law must include information about the states of individual components of the system at each moment of time, the type of conflict interaction and its influence on behavior of the system at next moments of time. Even the simplest cases are interesting because of their nonlinearity. The purpose of the theory of dynamic systems of conflict is to give an adequate description of real physical systems, which consist not only of two, but also of many interacting sides.

The purpose of the thesis is to develop the theory of dynamic conflict systems, to build specific models and to study the trajectories behavior in the case when separate subsystems attract each other. In this case, the effect of conflict is that the free opponents behavior is deformed. In particular, they can lose regions of successful presence by concentrating in regions of joint attractors. Finding such limiting attractors, describing their structure, basins of attraction, stationary equilibrium states, the existence of cyclic orbits are typical problems in this research area, which have so far been studied only partially.



The specification of such problems in relation to models of complex dynamic systems with attractive interaction is relevant from the point of view of possible applications in various problems in economics, ecology and sociology. Finding a balance between production and consumption, the use of resources and their natural restoration in the ecological balance, in particular, the search for compromises in contradictory, often acutely conflicting social processes (for example, ethnic, religious, national, linguistic) are not possible without constructing adequate mathematical models of dynamic systems with different types of interactions, both repulsive and attractive.

In addition to purely theoretical problems on the trajectories behavior in specific models of complex dynamic systems with attractive interaction, the thesis concerns the dependence of the main dynamic characteristics of the system on the choice of strategic parameters, such as the activity of conflict interaction, the role of network connections between system agents, the choice of priority regions of presence in the iterative process, division of space, random influences and changes in statistical data.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and in English, introduction, three chapters of the main results, conclusions, the list of references and appendix.

The introduction grounds the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, task, and methods of the research, indicates the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been disseminated in both conference talks and journal publications.

The main part of the thesis is devoted to dynamic conflict systems with attractive interaction in discrete time in terms of two and more stochastic (normalized to one) time-dependent vectors  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ . Evolution in time is given by the mapping, which is denoted by the symbol  $\ast$  and acting in space  $\mathbb{R}_+^n$ .

The mapping  $\ast$  generates multicomponent dynamical system in discrete time with trajectories

$$\{\mathbf{p}_i^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots$$

In the general case, the coordinates of the vectors  $\mathbf{p}_i^{t+1}$  are determined iteratively from the coordinates of the previous vectors using the system of difference equations:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \tau_j^t), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

where  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  is some bounded positive function that determines the free evolution of the system, and the set of positive functions  $\tau_j^t$  (depending on the vectors coordinates  $\mathbf{p}_i^t$ ) corresponds to the interaction effect. The values of these functions for each fixed  $t$  form some non-stochastic vector with non-negative coordinates, denoted by the symbol  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$  and called the attractor index, since its properties determine the effect of attraction between the initial vectors. The normalizing denominator  $z^t$  ensures the stochasticity of the vectors  $\mathbf{p}_i^{t+1}$ . According to the above equations, the distance between vectors  $\mathbf{p}_i^t$  in  $l_1$ -norm converges to zero,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

so the mapping  $\ast$  given by these equations describes an attractive interaction.

The construction of dynamical system based on difference equations (1) and an analysis of its general properties are given in Chapter 2 after review of literature on the topic of the thesis given in Chapter 1. In Sections 2.1–2.4 we study various models of dynamic conflict systems with involvement, which firstly describe the behavior of a pair, and then of an arbitrary finite number of opponents, with a different way of specifying the coordinates  $\tau_j^t$  for the attractor index. In particular, a model of dynamic conflict system is investigated in the case when  $\tau_j^t$  is chosen as the minimum value of the coordinates of the index  $j$  in vectors  $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$ . Such dynamical system is generalized

for the case of a finite number of interacting opponents. The existence of fixed points is proved and their description in terms of the limiting values of the vector  $\mathcal{T}^{t=\infty}$  is given. Several specific variants of this model have been constructed is given. An explicit relationship was established between the limiting state of the system and the attractor index. Conditions for the method of defining  $\mathcal{T}$  are found, under which all trajectories coincide with the  $\omega$ -limit set  $\Gamma^\infty$ , which is a cycle. The instability of such limiting orbits is proved. All results are illustrated with examples from computer simulations. It is important that models of dynamical systems of this kind can describe the dynamics of real processes. As an illustration, we can assume that the attractor index  $\mathcal{T}^t$  corresponds to the nature of the external influence on the system (for example, informational influence on society). By controlling the values of the attractor exponent, one can both describe and control the behavior of the system.

Chapter 3 is entirely devoted to building specific models. So Section 3.1 is concerned with various variants of the model of the spread of beliefs, which approach a consensus over time. This model is essentially an analogue of well-known constructions, but is based on a completely different law of mutual influence between agents and essentially uses the theory of dynamic conflict systems with attractive interaction. The mechanism of interaction between two agents is specified using difference equations of the form (1) and involves a detailed analysis of the dynamics. In particular, the thesis describes the behavior of agents in the case of making binary decisions in terms of the time evolution of vectors and trajectories with both two and many alternative positions. It is shown that the difference between agents opinion affects the intensity of interaction.

Section 3.2 deals with the problem of the existence of sure event in dynamic conflict systems. Here we consider the simplest abstract model of dynamic conflict system with attractive interaction in the case of only two vectors  $\mathbf{p}^t$  and  $\mathbf{r}^t$ , where function  $\theta^t = 0$ , and coordinates  $\tau_j^t$  of the attractor

index are defined as the product of coordinates of vectors  $\mathbf{p}^t$ ,  $\mathbf{r}^t$ , that is  $\tau_j^t = p_j^t r_j^t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . The sure event is characterized by the state of a system with finitely many positions  $\omega_i$  when all coordinates of the distribution are equal to zero, except a single fixed coordinate equal to 1. The model assumes the interpretation of the problem of searching for conditions when various discrete random distributions are attracted and concentrated in fixed position with unit probability. We establish a number of sufficient conditions under  $t \rightarrow \infty$ . The simplest of them are formulated in terms of the maximum values of the coordinates  $p_i$ ,  $r_i$ , the products of these coordinates  $\rho_i = p_i r_i$ , their sums  $\sigma_i = p_i + r_i$  or some combinations with  $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$ . Even in this simple case, questions arise that have not yet been fully resolved. In particular, the question of a complete description of coordinates with the property  $p_j^t \rightarrow 0$ ,  $r_j^t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . If the sure event is interpreted as the state of consensus in social networks, then the obtained results can be used in voter and opinion-formation models.

Section 3.3 treated the spectral problem for the distributions of dynamic conflict systems with attractive interaction on spaces with iterative division. Conditions are found in terms of initial distributions that guarantees the existence of the point spectrum in the limiting distributions. The main result states that the main condition for the existence of the point spectrum is the strategy of priority over the opponent in a single region  $\omega_i$  at every step.

Finally in Section 3.4 model of dynamic conflict system is constructed, which describes evolution of the distribution of biological populations on the resource space under constant external conditions for existence. As in the abstract case, the dynamics is considered in terms of two vectors  $\mathbf{p}^t$  and  $\mathbf{r}^t$ . The coordinates of the first of them change according to the equations (1), where  $\theta^t = 0$  and  $\tau_j^t$  are defined through the coordinates of the vector  $\mathbf{r}^t$  with additional parameters  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . The existence of an equilibrium attractor is proved, its stability is investigated and an explicit form of the limiting state is established depending on  $c_j$ . Constants  $c_j$  are interpreted

as time-invariable values that characterize the conditions for the existence of a population in each  $\omega_j$ . Calculations of the explicit values of the limiting coordinates (as well as numerous computer simulations) prove that there is a direct dependence of these parameters: the larger the value of  $c_j$ , the larger the value of the corresponding limit coordinate. Thus favorable conditions for the existence of a population in a certain region lead to an increase in the number of individuals of the population in this region. This confirms the adequacy of the mathematical model.

Appendix contains the applicant's publications list concerning the topic of the thesis and the list of seminars and conferences where the results of the dissertation have been reported and discussed.

**Key words:** complex dynamic system, dynamical conflict system, difference equation, multi-component dynamical system, conflict composition (interaction or mapping), attractive interaction, fixed point, limit state, stability of limit state, discrete measure, stochastic vector, sure event, strategy of priority, iterative division of space, point spectrum.

### Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. *Сатур О.Р.* Граничні стани дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією // Збірник праць Інституту математики НАН України. – **14**, № 2. – Київ: Інститут математики НАН України. – 2017. – С. 122–132.
2. *Сатур О.Р.* Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2017. – **201**. – С. 34–37.
3. *Кошманенко В.Д., Сатур О.Р.* Проблема достовірної події в багатокomпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією // Нелінійні коливання. – 2019. – **22**, № 2. – С. 220–234. (Переклад: *Koshmanenko V.D., Satur O.R.* Sure event problem in multi-component dynamical systems with attractive interaction // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **249**, No. 4. – P. 629–646. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>)
4. *Сатур О.Р., Харченко Н.В.* Модель динамічної системи досягнення консенсусу // Український математичний журнал. – 2019. – **71**, № 9. – С. 1271–1283. (Переклад: *Satur O.R., Kharchenko N.V.* The model of dynamical system for the attainment of consensus – Ukrainian Mathematical Journal. – 2020. – **71**, No. 9. – P. 1456–1469. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01725-w>)
5. *Koshmanenko V., Satur O., Voloshyna V.* Point spectrum in conflict dynamical systems with fractal partition // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019. – **25**, No. 4. – P. 324–338.
6. *Сатур О.Р.* Граничні стани багатокomпонентних динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2020. – **72**, № 1. – С. 77–89.

7. *Satur O.P.* Збіжність до рівноважного атрактора в динамічних моделях з притягальною взаємодією // Міжнародна наукова конференція “Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”. – Київ, 2017. – С. 75–76.
8. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Dynamic model of opinion formation. // 8-ма Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. – Кам’янець-Подільський, 2018. – Р. 8–9.
9. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Opinion dynamics on a network // International conference “Modern Stochastics: theory and application. IV”. – Kyiv, 2018. – Р. 31.
10. *Satur O.R.* The sure event problem in multi-component dynamical systems with attractive interaction // Міжнародна конференція молодих математиків – Київ, 2019. – С. 40.
11. *Satur O.R.* Dynamical picture of biological populations with attractive and repulsive interaction // III International scientific and practical conference “Modeling, control and information technologies”. – Rivne, 2019. – Р. 69–71. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2019.29>

## ЗМІСТ

<b>Перелік умовних позначень</b>	<b>18</b>
<b>Вступ</b>	<b>19</b>
<b>РОЗДІЛ 1</b>	
<b>Огляд літератури і попередні відомості</b>	<b>25</b>
<b>РОЗДІЛ 2</b>	
<b>Динамічні системи конфлікту із взаємодією притягання</b>	<b>32</b>
2.1. Побудова динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією в термінах дискретних мір . . . . .	32
2.2. Опис асимптотики граничних станів. Випадок двокомпонентних систем . . . . .	34
2.3. Існування нерухомих граничних точок для траєкторій багатокомпонентних систем . . . . .	41
2.4. Умови існування граничних циклів . . . . .	53
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
<b>Моделі динамічних систем</b>	<b>57</b>
3.1. Проблема досягнення консенсусу . . . . .	57
3.1.1 Модель прийняття бінарних рішень у випадку двох опонентів . . . . .	61
3.1.2 Випадок прийняття бінарних рішень для системи з багатьма опонентами . . . . .	69
3.1.3 Метод середнього поля . . . . .	70
3.2. Проблема достовірної події в багатокомпонентних динамічних системах . . . . .	74
3.3. Виникнення точкового спектру у граничних розподілах динамічних систем конфлікту . . . . .	93
3.4. Математичне моделювання розподілів біологічних популяцій . . . . .	104



	17
3.4.1 Рівномірно розподілені граничні стани . . . . .	106
3.4.2 Залежність граничного стану від умов середовища .	113
<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>118</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>119</b>
<b>ДОДАТОК</b>	<b>128</b>

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mu, \nu$	ймовірнісні міри
$\mathbf{p}, \mathbf{r}$	стохастичні вектори
$\mathcal{B}$	борелівська $\sigma$ -алгебра
$\lambda$	міра Лебега
$\mathbb{R}_+^n$	$n$ -вимірний простір
$\Delta^{n-1}$	симплекс
$\Omega$	простір існування
$\mathcal{M}(\Omega)$	клас ймовірнісних мір
$\ast$	відображення, перетворення конфлікту
$\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), \ast\}$	динамічна система конфлікту
$\mathcal{M}_1^+(\Omega)$	множина ймовірнісних дискретних мір
$\Gamma^\infty, \Gamma_n$	$\omega$ -гранична множина
$\mathcal{M}_{pp}(\Omega)$	клас чисто точкових мір
$\mathcal{M}^{pud}(\Omega)$	клас рівномірно розподілених мір
$\mathcal{M}^{ss}(\Omega)$	клас структурноподібних мір

## Вступ

**Актуальність теми.** Математичне моделювання таких явищ, як змагання, конкуренція, боротьба, конфлікт, набуває все більшої актуальності, оскільки лише наукові передбачення здатні дати обґрунтований прогноз поведінки складних інтерактивних процесів у суспільстві і природі. Найзручнішим інструментом моделювання таких складних систем є поняття динамічної системи. Перші моделі динамічних систем конфлікту виникають із досліджень явища конкуренції між біологічними популяціями й забезпечення найбільшого виграшу в азартних іграх. Математичні моделі, які запропонували Т. Мальтус (1798), П.Ф. Ферхюльст (1838), А.Дж. Лотка (1920) і В. Вольтерра (1926) істотно використовували звичайні, але нелінійні диференціальні рівняння й системи таких рівнянь для опису конфліктної динаміки біологічних систем. Відома модель “хижак–жертва” є найбільш популярною у цьому напрямку. З іншого боку, аналіз усіх логічних схем прийняття оптимального рішення для конкурентів у різноманітних суперечливих за інтересами ситуаціях, як чисто ігрових, так і реально життєвих, привів до створення сучасної теорії ігор (Дж. фон Нейман, Е. Моргенштерн). Дослідження різноманітних стратегічних моделей, що описують конкурентну боротьбу та поведінку опонентів у світовій економіці, набули величезного значення (К. Ерроу, Т. Шеллінг, І. Ауманн, Дж. Неш – лише частина нобелівських лауреатів за важливі внески в економічну науку із застосуванням методів теорії ігор та нелінійної динаміки).

Ідея об’єднати поняття динамічної системи з проблемою прийняття оптимального рішення у конкурентній боротьбі привела до виникнення терміну “динамічна система конфлікту”. Так у 2003 році В.Д. Кошманенко [9] побудував найпростішу динамічну систему конфлікту, яка задається різницеvими рівняннями. Ці рівняння по суті є узагальненням

рівнянь Лотки–Вольтерри на стохастично векторний випадок довільної розмірності. Побудована модель описувала конфліктний перерозподіл абстрактного ресурсного простору між двома альтернативними сторонами. Згодом виникла назва – динамічна система конфлікту із взаємодією відштовхування. Дослідження теоретичних питань і побудову моделей у цьому напрямі проводили С. Альбеверіо, М. Працьовитий, Г. Торбін [26, 27, 29], К. Салам, К. Такахаші [79], В. Кошманенко [12], І. Самойленко [28, 58, 60], М. Боднарчук, Н. Харченко [10, 59, 65], С. Петренко [7, 11], І. Веригіна [63], В. Волошина [4, 66], К. Кулаковський, Т. Каратаева [54, 64]. Сьогодні вже може йтися про створення оригінальної теорії динамічних систем конфлікту. Вона охоплює серію результатів, у яких досліджуються задачі й моделі, актуальні в сучасному світі, зокрема моделі конфліктного соціуму, моделі виборів, моделі формування поглядів, моделі екологічного типу, моделі міграції, моделі конфліктного перерозподілу ресурсного простору тощо. Перше і, можливо, основне питання полягає у побудові математичного перетворення, адекватного до конфліктної взаємодії, і виведення “правильних” еволюційних рівнянь. При цьому використовується апарат теорії динамічних систем, функціонального аналізу, теорії міри, теорії ймовірностей, фрактальної геометрії.

У зазначених вище роботах переважно розглядалися моделі із взаємодією відштовхування. Динамічні системи конфлікту з притягальною взаємодією є не менш актуальними. Вони моделюють перерозподіл ресурсного простору та присутність конкурентів у різних регіонах у випадку, коли опоненти не відштовхуються, а в певному сенсі зближуються і тим самим деформують свою самостійну “вільну” еволюцію. У застосуваннях ці моделі описують кооперацію, пошук рівноваги, компромісу, консенсусу. Дослідження таких систем є цікавим і потрібним, оскільки відповідне конфліктне перетворення виникає у багатьох природних явищах та задачах [8, 30, 34, 35, 37, 39, 46, 50, 54, 67, 68, 83–85].

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем “Дослідження моделей математичної фізики, що описують детерміновані та стохастичні процеси в складних системах” (номер держреєстрації 0116U00310) і “Аналітичні та групові методи дослідження математичних моделей сучасного природознавства” (номер держреєстрації 0117U002119), а також в рамках проєкту Національного фонду досліджень України 2020.02/0089 “Складні динамічні системи в природничих науках: теорія, математичне моделювання, чисельні методи та застосування до передових технологій” (номер держреєстрації 0120U104004).

**Мета і завдання дослідження.** *Мета* дисертаційної роботи:

1. Розвинути теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією разом із аналізом математичних моделей і описом поведінки траєкторій у моделях з багатьма альтернативними позиціями.
2. Встановити факт існування інваріантних граничних станів і дослідити їхні властивостей для певного класу динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Побудувати конкретні моделі таких систем заданих різницевиими рівняннями.
3. Узагальнити формули, які визначають конфліктне перетворення для пари опонентів на випадок багатьох взаємодіючих сторін. Побудувати й дослідити моделі багатокомпонентних дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Довести існування нерухомих точок і знайти умови існування циклічних орбіт.
4. Одержати достатні умови виникнення достовірної події (одночасної присутності гравців у фіксованому регіоні) для багатокомпонентної динамічної системи з притягальною взаємодією.

5. Знайти умови (критерій) виникнення точкового спектру у граничних розподілах для систем конфлікту на ресурсних просторах з ітераційним фрактальним подрібненням.

*Об'єктом дослідження є динамічні системи конфлікту та їхні моделі.*

*Предметом дослідження є асимптотика траєкторій і властивості граничних станів динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією: умови існування нерухомих точок, їхня стійкість, басейни притягання, спектральна структура.*

*Методи дослідження.* В роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії різницевих і диференціальних рівнянь, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, теорії ймовірностей і фрактального аналізу.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист:

1. Розвинуто теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією разом із аналізом математичних моделей і описом поведінки траєкторій у моделях з багатьма альтернативними позиціями.
2. Доведено існування інваріантних граничних станів і досліджено їхні властивості для певного класу динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Побудовано конкретні моделі таких систем заданих різницевиими рівняннями.
3. Узагальнено формули, які визначають конфліктне перетворення для пари опонентів на випадок багатьох взаємодіючих сторін. Побудовано й досліджено моделі багатокomпонентних дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Доведено існування нерухомих точок і знайдено умови існування циклічних орбіт.
4. Одержано достатні умови виникнення достовірної події (одночасної присутності гравців у фіксованому регіоні) для багатокomпонентної динамічної системи з притягальною взаємодією.

5. Знайдено критерій виникнення точкового спектру у граничних розподілах для систем конфлікту на ресурсних просторах з ітераційним фрактальним подібненням.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані моделі припускають використання в екології, біології, соціології та економіці.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення напряму дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професорові В.Д. Кошманенку. Основні результати, що виносяться на захист, авторка отримала самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації додані лише ті результати, які належать авторці.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародній науковій конференції “Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь” (Київ, 2017);
- 8-мій Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2018);
- International conference “Modern stochastics: theory and application. IV” (Київ, 2018);
- Літній школі у Університеті Градець-Кралове (Чехія, 2018);
- Міжнародній конференції молодих вчених (Київ, 2019);
- III International scientific and practical conference “Modeling, control and information technologies” (Рівне, 2019);

- семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару: член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін);
- семінарі “Складні системи конфлікту: динаміка, моделі, спектральний аналіз” Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор В.Д. Кошманенко).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 11 наукових публікаціях. Шість із них [13, 17, 18, 20, 21, 66] – це статті у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, три з яких [13, 20, 66] входять до наукової бази Scopus або Web of Science. Роботи [19, 56, 57, 80, 81] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (85 найменувань) та додатку. Повний обсяг дисертації становить 130 сторінок.

**Подяки.** Авторка висловлює щирю вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Володимирі Дмитровичу Кошманенку за постановку задач, постійну увагу і допомогу у процесі роботи над дисертацією, конструктивні зауваження, а також співавторам та працівникам відділу математичної фізики за творчі і плідні дискусії.



## РОЗДІЛ 1

### Огляд літератури і попередні відомості

Сучасний розвиток науки характеризується величезною увагою до вивчення складних нелінійних систем і відповідних до них процесів і явищ природи й суспільства. На сьогодні дослідження складних систем – це один із найдієвіших способів пізнання світу. Застосування теорії динамічних систем до опису і прогнозування актуальних процесів сучасного світу має набуває все більшого значення.

Свої початки теорія динамічних систем бере в роботах І. Ньютона з механіки. Саме Ньютон запропонував спосіб описувати різні процеси і явища за допомогою диференціальних рівнянь і динамічних систем. Основоположником якісної теорії динамічних систем вважається А. Пуанкаре. Теорія динамічних систем стала універсальним знаряддям для пояснення різноманітних явищ, що спостерігалися в механіці, астрономії, статистичній фізиці, радіофізиці, електроніці, гідродинаміці, теорії коливань тощо. Ця теорія широко використовує різні галузі математики, зокрема теорію диференціальних і різницевих рівнянь, топологію, теорію множин і дискретних відображень, теорію теорії міри. В Україні значний внесок у розвиток теорії динамічних систем і її застосувань зробили М.М. Боголюбов, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко. Розвитком топологічних проблем теорії динамічних систем активно продовжує займатися О.М. Шарковський.

Узагалі під *динамічною системою* розуміють довільну фізичну систему чи процес, для якого має сенс поняття стану і його еволюція в часі. Математично динамічна система задається набором деяких величин, які

фіксують точку у фазовому просторі станів системи, й відображенням (неперервним або дискретним), яке визначає закон еволюції, зміну стану системи в час у вигляді траєкторії у фазовому просторі. Закон еволюції для динамічних систем зазвичай задається за допомогою диференціальних або різницевих рівнянь, дискретних відображень, теорії графів тощо. Вибір одного зі способів задання визначає конкретний вид математичної моделі відповідної динамічної системи.

Одним із перших абстрактних рівнянь, що описують динаміку біологічних популяцій, було рівняння, яке запропонував Мальтус 1798 року в термінах диференціальних рівнянь [14]

$$\frac{dP}{dt} = (b - d)P,$$

де  $b$  і  $d$  – коефіцієнти народжуваності і смертності. Його розв'язок має вигляд

$$P(t) = P_0 e^{(b-d)t},$$

де  $P_0$  – початкова чисельність популяції. Швидкість зміни популяції  $b-d$  в подальших моделях, Р. Фішер назвав мальтусовим параметром росту популяції [43], а А.Дж. Лотка – внутрішньою швидкістю росту [70, 71]. Цю модель часто називають експоненціальним законом. Мальтус вважав, що всі форми життя мають схильність до експоненціального зростання популяції, коли ресурси в надлишку. Але фактичний ріст обмежений доступом до ресурсів. В 1938 П.Ф. Ферхюльст, прочитавши препринт Мальтуса, ввів модель росту популяції з урахування обмеженості ресурсів:

$$\frac{dP}{dt} = (b - d)P - cP^2,$$

де  $c$  – коефіцієнт насичення ресурсами. Це рівняння враховує конкурентну боротьбу індивідів фіксованої популяції за життєвий ресурс.

Звідси виникає один з найвідоміших законів, що описує динаміку чисельності внутрішньо конкурентної популяції – *логістичне* рівняння,

дискретний варіант якого має вигляд

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

де  $x_n$  відображає чисельність популяції на  $n$ -му році, параметр  $r$  характеризує швидкість росту популяції. Це рівняння є прикладом простого нелінійного рівняння, яке залежно від значення параметра  $r$  описує складну й навіть хаотичну поведінку (див. [23, 24]).

Пізніше, в середині 20-х років минулого століття А.Дж. Лотка [70, 71] і В. Вольтерра [5] узагальнили моделі Мальтуса і Ферхульста та запропонували одну з перших математичних моделей конфліктно взаємодіючих популяцій, сьогодні добре відому модель “жертва–хижак”. Ця модель задана системою диференціальних рівнянь, які сьогодні мають назву рівняння Лотки–Вольтерри:

$$\dot{N} = aN - bNP, \quad \dot{P} = -cP + dNP, \quad (1.1)$$

де  $N$  і  $P$  – чисельність жертв і хижаків, відповідно, а  $a, b, c, d > 0$  – параметри, що описують швидкість росту популяції жертв, швидкість росту–смертності хижаків та природного закону їхньої взаємозалежності (переважно ефективність споживання жертв хижаками). Модель Лотки–Вольтерри має величезну кількість застосувань до спостережень зміни чисельності різних популяцій. Модель набула потужного розвитку та узагальнень в роботах багатьох авторів. Зокрема, ця модель досліджувалась в роботах таких відомих вчених як Р. Мей, Дж. Мюррей, Дж. Хофбауер та К. Зігмунд [46, 47, 49, 51, 73–75, 78]. Цей напрям досліджує еволюцію кількісних характеристик опонентів. В більшості робіт моделі будують з використанням рівнянь Лотки–Вольтерри або логістичного рівняння Верхюльста в неперервному часі і у просторі, не поділеному на регіони. Ця модель має широке застосування в біології, хімії, екології та соціології.

Цікавий варіант дискретної моделі для опису динаміки популяції системи “носій-паразит” розробили в 1930-х роках австралійські вчені

Д. Ніколсон і В.А. Бейлі. Їхній варіант моделі “хижак-жертва” може бути представлений зо допомогою різницевих рівнянь Ніколсона–Бейлі у вигляді [76]:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= rN_t e^{-aP_t}, \\ P_{t+1} &= qN_t(1 - e^{-aP_t}), \end{aligned}$$

де  $a, r, q$  – додатні параметри,  $H$  – розмір популяції носія,  $P$  – розмір популяції паразиту,  $r$  – швидкість відновлення носія,  $a$  – ефективність пошуку паразитоїду та  $q$  – середнє число жизнєздатних яєць, які паразит відкладає на одному носії. Успішно займався дослідженням дискретних моделей такого типу М. П. Хассел [45].

В дисертаційній роботі розвивається новий підхід до побудови моделей з конкуруючими сторонами, який започаткований В.Д. Кошманенком [9, 12, 58, 62, 64]. В цьому підході аналоги скалярних величин  $P, N$ , які мали зміст кількості, замінюються на векторні,  $\mathbf{p}$  та  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad n > 1.$$

Координати  $p_i, r_i$  мають статистичний сенс. Вони відповідають ймовірностям перебування кожного з опонентів у  $i$ -му регіоні (позиції) ресурсного простору. У ще більш загальному підході замість векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  використовуються випадкові розподіли задані ймовірнісними мірами  $\mu, \nu$ . Закон динаміки записується у вигляді системи досить простих але нелінійних різницевих або диференціальних рівнянь.

Так, в роботах [9, 58] вперше було розглянуто математичну модель конфлікту з скінченним набором позицій для двох незнищених противників. В теперішній термінології було побудовано модель динамічної системи конфлікту з відштовхувальною взаємодією у просторі поділеному на регіони. Закон динаміки в цій моделі можна вважати узагальненими векторними варіантами рівнянь Лотки–Вольтерри. Термін *динамічна система конфлікту* введено в роботі [10], а саме це поняття, як інструмент для математичного опису процесу конфліктної боротьби між двома

і декількома протидіючими сторонами розвинуто у ряді наступних робіт В.Д. Кошманенка з його учнями і колегами, (див. докладні посилання у [12]). Опишемо детальніше це поняття.

Розглянемо фізичну систему, яка складається з двох (можна і декількох) протидіючих сторін, які позначимо через  $A$  та  $B$  і назовемо *опонентами*. Вважаємо, що опоненти існують на спільному ресурсному просторі  $\Omega$  і незнищенні. Стани такої системи природно задавати випадковими розподілами у термінах ймовірнісних мір  $\mu, \nu$  визначених на деякій  $\sigma$ -алгебрі підмножин з простору  $\Omega$ . Фіксований клас цих мір позначимо  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Конфліктну взаємодію (композицію конфлікту) між опонентами  $A$  та  $B$ , як відображення (перетворення) в просторі пар мір з  $\mathcal{M}(\Omega)$ , позначаємо символом  $*$ . Це відображення задає еволюцію фізичної системи у вигляді траєкторій:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^{t=0} \\ \nu^{t=0} \end{array} \right\} \xrightarrow{*,t} \left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\}, \quad t \geq 0,$$

де  $*, t$  позначає конфліктне перетворення на момент часу  $t$ . Динамічна система такого типу позначається як  $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), *\}$  і називається *динамічною системою конфлікту*. Звичайно, простір  $\Omega$ , клас мір  $\mathcal{M}(\Omega)$  та відображення  $*$  треба визначати додатково у кожному конкретному випадку.

У ряді важливих випадків, які близькі до застосувань, припускається, що ресурсний простір  $\Omega$ , на якому співіснують опоненти  $A$  та  $B$ , природним чином розкладено на скінчену кількість регіонів:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 2 \leq n < \infty.$$

Кожен окремий регіон  $\Omega_i$  називається *позицією конфлікту*. Розподіл опонентів  $A, B$  на  $\Omega$  зводиться до задання дискретних мір:  $\mu(\Omega_i) = p_i$  та  $\nu(\Omega_i) = r_i$ . Числа  $p_i, r_i$  є координатами стохастичних векторів  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  ( $\|\mathbf{p}\|_1 = \|\mathbf{r}\|_1 = 1$ ). Ці числа є ймовірностями присутності опонентів  $A, B$  в різних позиціях конфлікту.

Конфлікту взаємодію між опонентами  $A$ ,  $B$  можна записати в термінах еволюції векторів  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  під дією перетворення  $\ast$  в прямому добутку просторів  $\mathbb{R}_+^n$ . Відзначимо, що у роботах [18, 60, 79] цей підхід узагальнено для трійки опонентів, а у роботі [21] для довільної скінченної кількості опонентів на  $\Omega$ .

В роботах [2, 26] досліджувались різні задачі, пов'язані з динамічними системами конфлікту у дискретному часі в термінах стохастичних векторів заданих траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

де координати векторів  $\mathbf{p}^{t+1}$ ,  $\mathbf{r}^{t+1}$  визначалися системою різницевих рівнянь. Найпростіший варіант таких рівнянь має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} p_i^t (1 - \alpha r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} r_i^t (1 - \alpha q_i^t), \quad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

де  $z = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  – нормувальний знаменник,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярний добуток в  $\mathbb{R}^n$ .

У подальших працях В.Д. Кошманенка і його учнів було одержано серію результатів, як теоретичного значення так і в побудові та дослідженні конкретних моделей з різним способом задання відображення  $\ast$ . Основна задача – це вивчення поведінки траєкторій системи при  $t \rightarrow \infty$ , встановлення існування і знаходження граничних асимптотичних станів, пошук атракторів та їхніх басейнів, доведення існування нерухомих точок (рівноважних станів) та існування циклічних орбіт.

Динамічні системи конфлікту досліджуються не лише в термінах стохастичних векторів і дискретних мір, а й у термінах кусково рівномірно розподілених мір, абсолютно неперервних мір, структурноподібних мір. У роботах С. Альбоверіо, В. Кошманенка, І. Самойленка, Н. Харченко, С. Петренка [4, 11, 12, 28, 29, 59, 61, 63, 65, 66] досліджено спектральні властивості граничних мір, знайдено зв'язок між структурою граничних розподілів для ймовірнісних мір з класичним розкладом Гана–Жордана для зарядів, породжених різницею початкових мір.

У роботах [7, 8, 12, 54, 60] розвинуто моделі з прикладним застосуванням: модель динамічної системи конфлікту типу вогонь-вода, модель конфліктної тріади, модель соціуму, модель конфліктного перерозподілу ресурсного простору.

Фактично, у всіх зазначених вище роботах досліджувались моделі з мінус взаємодією, тобто із взаємодією відштовхування. Опоненти вважалися альтернативними. Ситуація з плюс взаємодією, коли опоненти притягуються, майже не розглядалася. Розвитку теорії й побудові моделей з притягальною взаємодією присвячена ця дисертація.

## РОЗДІЛ 2

### Динамічні системи конфлікту із взаємодією притягання

#### 2.1. Побудова динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією в термінах дискретних мір

В цьому підрозділі описана побудова багатокомпонентної динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією, яка моделює поведінку довільної скінченної кількості сторін з плюс взаємодією. Основним інструментом для побудови є поняття динамічної системи конфлікту, відображення  $\ast$  в просторі стохастичних векторів, яке відповідає притягальній взаємодії, та показника атрактора, який позначено вектором  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$ . Він характеризує “силу” притягальної взаємодії і тому називається показником атрактора.

Нехай  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ,  $n > 1$  – деяка скінченна множина з дискретною топологією. Позначимо через  $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$  множину дискретних ймовірнісних мір на  $\Omega$ . Розглянемо довільну фіксовану підмножину мір  $\mu_i \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ . Кожну з цих мір  $\mu_i$  можна ототожнити з стохастичним вектором  $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ , якщо покласти

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для побудови динамічної системи визначимо відображення  $\ast$  у просторі стохастичних векторів (перетворення конфлікту) таким чином.



Кожному векторові  $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$  поставимо у відповідність вектор  $\mathbf{p}_i^1 = (p_{ij}^1)_{j=1}^n$  за правилом, визначеним у термінах координат

$$p_{ij}^1 = \frac{1}{z} (p_{ij}(\theta + 1) + \tau_j),$$

де  $\theta = \theta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m)$  – довільна обмежена додатна функція,  $\mathcal{T} = (\tau_j)_{j=1}^n$  – деякий (взагалі не стохастичний) вектор з невід’ємними координатами, які є фіксованими функціями векторів  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ , а  $z$  – нормувальний знаменник.

Ітерація цього відображення генерує багатокomпонентну динамічну систему з траєкторіями

$$\{\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}_1^{t+1}, \mathbf{p}_2^{t+1}, \dots, \mathbf{p}_m^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

де  $\mathbf{p}_i^{t=0} = \mathbf{p}_i$ , а координати кожного вектора  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$  змінюються згідно з рівняннями

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \tau_j^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

$$\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t), \quad z^t = 1 + \theta^t + W^t, \quad W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t > 0. \quad (2.3)$$

Задача полягає в дослідженні поведінки траєкторій динамічної системи (2.1) залежно від способу задання  $\tau_j^t$ , як конкретних функцій. Зокрема, у випадку явного вигляду координат  $\tau_j^t$  як функцій від координат усіх векторів  $\mathbf{p}_i^t$ .

Варто зауважити, що при будь-якому заданні показника атрактора  $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$ , згідно з рівняннями (2.2), відстань між кожною парою векторів  $\mathbf{p}_i^t, \mathbf{p}_k^t$  в  $l_1$ -нормі зменшується на кожному кроці ітерації. Завдяки (2.3) легко помітити, що

$$\|\mathbf{p}_i^{t+1} - \mathbf{p}_k^{t+1}\|_1 < \|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{l=1}^n |p_{il}^t - p_{kl}^t|, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m.$$

Тому взаємодія, задана рівняннями (2.2), є притягальною.

## 2.2. Опис асимптотики граничних станів.

### Випадок двокомпонентних систем

Розглянемо систему (2.1) при  $m = 2$ . Зафіксуємо пару ймовірнісних мір  $\mu, \nu \in M_1^+(\Omega)$  і перейдемо до відповідної цим мірам пари стохастичних векторів  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  та  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , де  $p_j = \mu(\omega_j)$ ,  $r_j = \nu(\omega_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Нелінійне і некомутативне перетворення конфлікту  $\ast$  між векторами  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p} \ast \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{r} \ast \mathbf{p},$$

задаємо явно наступним чином. Покладаємо, що нова пара векторів  $\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1$  визначається покоординатно за правилом:

$$p_j^1 = \frac{1}{z}(p_j(\theta + 1) + \tau_j), \quad r_j^1 = \frac{1}{z}(r_j(\theta + 1) + \tau_j),$$

де  $\theta = \sum_{j=1}^n \sqrt{p_j r_j}$ ,  $\tau_j = \min\{p_j, r_j\}$ . Нормувальний знаменник  $z$ , який забезпечує стохастичність векторів  $\mathbf{p}^1$  та  $\mathbf{r}^1$ , має вид  $z = 1 + \theta + W$ , де  $W = \sum_{j=1}^n \tau_j$ .

Для кожної пари мір  $\mu, \nu \in M_1^+(\Omega)$  або, еквівалентно, для кожної пари стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$  (як початкової точки) ітерація перетворення  $\ast$  породжує траєкторію динамічної системи конфлікту:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\ast} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

При цьому рівняння (2.2), які задають координати векторів на  $t+1$  кроці, зараз набувають вигляду

$$p_j^{t+1} = \frac{p_j^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t}, \quad r_j^{t+1} = \frac{r_j^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t}, \quad (2.5)$$

$$\tau_j^t = \min\{p_j^t, r_j^t\}, \quad (2.6)$$

де  $\theta^t = \sum_{j=1}^n \sqrt{p_j^t r_j^t}$ ,  $z^t = \theta^t + 1 + W^t$ ,  $W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t$ . Доведемо існування граничних мір  $\mu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t$ ,  $\nu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t$  в термінах стохастичних векторів.

**Теорема 2.1.** *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (2.4) з початковою точкою, заданою довільною парою стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$  ( $n > 1$ ), збігається до граничного стану  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ . Тобто для послідовностей векторів  $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$ , координати яких задані формулами (2.5), існують границі:*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t.$$

*Доведення.* Зафіксуємо довільний індекс  $j = 1, \dots, n$ . Розглянемо послідовність  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$ . Оскільки  $\tau_j^t = \min\{p_j^t, r_j^t\}$ , причому  $0 \leq p_j^t, r_j^t \leq 1$ , то

$$0 \leq \tau_j^t \leq 1, \quad (2.7)$$

тобто  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  є обмеженою при  $t \rightarrow \infty$ .

Покажемо, що  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  – монотонна. З рівностей (2.5) і (2.6) випливає, що

$$\begin{aligned} \tau_j^{t+1} &= \frac{1}{z^t} \left( \tau_j^t (\theta^t + 1) + \tau_j^t \right) = \frac{1}{z^t} \left( \tau_j^t (\theta^t + 2) \right), \\ \tau_j^{t+1} &= \tau_j^t \cdot \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Позначимо  $s^t = \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t}$ , тоді  $\tau_j^{t+1} = \tau_j^t \cdot s^t$ . Очевидно, що  $0 \leq s^t \leq 1$ . Оцінимо  $W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t$ . З (2.6) та умови нормованості векторів випливає, що  $W^t \leq 1$ . Звідси  $s^t \geq 1$  і тому

$$\tau_j^{t+1} \geq \tau_j^t. \quad (2.9)$$

Отже,  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  – монотонна.

Оскільки  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  – монотонна обмежена послідовність, то існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_j^t = \tau_j^\infty.$$

Зрозуміло, що це справедливо для усіх  $j = 1, \dots, n$ .

У випадку рівних початкових векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  із врахуванням умови (2.6), отримуємо  $\mathbf{p}^t = \mathbf{r}^t = \mathcal{T}^t$ , тобто  $p_j^t = r_j^t = \tau_j^t$  для довільного

$j = 1, \dots, n$ . У цьому випадку з доведеного вище, впливає існування граничних векторів  $\mathbf{p}^\infty$  та  $\mathbf{r}^\infty$ , причому  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathcal{T}^\infty$ .

Розглянемо випадок різних початкових векторів, тобто  $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$ . Якщо для таких векторів існують деякі пари рівних координат, наприклад,  $p_i = r_i$ , то як і в попередньому випадку, для цих координат одержуємо  $p_i^t = r_i^t = \tau_i^t$ , а також  $p_i^\infty = r_i^\infty = \tau_i^\infty$ . Для всіх нерівних пар координат проводимо наступні міркування. Нехай для деякого  $j$  між координатами виконується  $p_j \neq r_j$ . Без втрати загальності покладемо, що  $p_j > r_j$ . Тоді, виконуючи тотожні перетворення цієї нерівності, а саме, домноживши її на  $(\theta + 1)$ , додавши до обох її частин  $\tau_j$  і поділивши на  $z$ , отримаємо

$$\frac{p_j(\theta + 1) + \tau_j}{z} > \frac{r_j(\theta + 1) + \tau_j}{z},$$

тобто  $p_j^1 > r_j^1$ . Аналогічними міркуваннями отримуємо нерівність для всіх  $t$ :

$$p_j^t > r_j^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Оскільки  $\tau_j^t = \min\{p_j^t, r_j^t\}$ , то  $r_j^t = \tau_j^t$ . Вже доведено, що  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  — монотонна обмежена послідовність, тому  $\{r_j^t\}_{t=0}^\infty$  також монотонна обмежена послідовність, тобто існує границя:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_j^t = r_j^\infty = \tau_j^\infty.$$

Доведення існування  $p_j^\infty$  трохи складніше. Безпосередньо встановлюємо, що для будь-якої пари координат  $\tau_l^t, \tau_j^t$ ,  $l, j = 1, \dots, n$ , вектора  $\mathcal{T}^t$  виконується відношення

$$\frac{\tau_l^t}{\tau_j^t} = \frac{\tau_l}{\tau_j}, \quad (2.10)$$

тобто  $\mathcal{T}^t$  є незалежним від  $t$ . Справді,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_l^{t+1}}{\tau_j^{t+1}} &= \frac{\tau_l^t \cdot \frac{\theta^{t+2}}{\theta^{t+1} + W^t}}{\tau_j^t \cdot \frac{\theta^{t+2}}{\theta^{t+1} + W^t}} = \frac{\tau_l^t}{\tau_j^t}, \\ \frac{\tau_l^t}{\tau_j^t} &= \frac{\tau_l^{t-1} \cdot \frac{\theta^{t-1} + 2}{\theta^{t-1} + 1 + W^{t-1}}}{\tau_j^{t-1} \cdot \frac{\theta^{t-1} + 2}{\theta^{t-1} + 1 + W^{t-1}}} = \frac{\tau_l^{t-1}}{\tau_j^{t-1}}, \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\tau_l^1}{\tau_j^1} = \frac{\tau_l^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}}{\tau_j^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}} = \frac{\tau_l^0}{\tau_j^0} \equiv \frac{\tau_l}{\tau_j}.$$

Тепер розглянемо співвідношення

$$\frac{\tau_j^t}{W^t} = \frac{\tau_j^t}{\tau_1^t + \dots + \tau_j^t + \dots + \tau_n^t} = \frac{1}{\frac{\tau_1^t}{\tau_j^t} + \dots + 1 + \dots + \frac{\tau_n^t}{\tau_j^t}}.$$

З рівності (2.10) випливає, що

$$\frac{\tau_j^t}{W^t} = \frac{1}{\frac{\tau_1^t}{\tau_j^t} + \dots + 1 + \dots + \frac{\tau_n^t}{\tau_j^t}} = \frac{1}{\frac{\tau_1^0}{\tau_j^0} + \dots + 1 + \dots + \frac{\tau_n^0}{\tau_j^0}} = \frac{\tau_j^0}{W^0}.$$

Тобто

$$\frac{\tau_j^0}{W^0} = \frac{\tau_j^t}{W^t}, \quad (2.11)$$

для будь-якого  $t = 0, 1, \dots$

Покажемо, що послідовність  $\{p_j^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонною по  $t$ . Припустимо, що в початковий момент часу виконується нерівність  $p_j < \frac{\tau_j}{W}$ . Помноживши цю нерівність на  $(\theta + 1)$ , додавши до обох її частин  $\tau_j$  та поділивши на  $z$ , отримаємо

$$\frac{p_j(\theta + 1) + \tau_j}{z} < \frac{\tau_j}{W} \cdot \frac{\theta + 1 + W}{z},$$

тобто  $p_j^1 < \frac{\tau_j}{W} \cdot 1$ . Враховуючи доведену вище рівність (2.11), можна стверджувати, що  $p_j^1 < \frac{\tau_j^1}{W^1}$ . Отже, згідно з принципом математичної індукції, нерівність

$$p_j^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}, \quad (2.12)$$

справедлива для довільного  $t$ .

Далі розглянемо різницю фіксованої  $j$ -ої координати вектора  $\mathbf{p}^t$  на  $t$ -му та  $(t + 1)$ -му кроках

$$p_j^{t+1} - p_j^t = \frac{p_j^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t} - p_j^t = \frac{\tau_j^t - p_j^t \cdot W^t}{z^t} = \frac{W^t}{z^t} \left( \frac{\tau_j^t}{W^t} - p_j^t \right).$$

Очевидно,  $\frac{W^t}{z^t} > 0$ . Тому, якщо виконується (2.12), то для довільного  $t = 0, 1, \dots$  виконується нерівність  $p_j^t < p_j^{t+1}$ . Тобто послідовність  $\{p_j^t\}_{t=0}^\infty$  зростає. Аналогічним чином доводиться, що послідовність  $\{p_j^t\}_{t=0}^\infty$  спадає при умові  $p_j > \frac{\tau_j}{W}$  в початковий момент часу.

Таким чином доведено, що у будь-якому випадку послідовність  $\{p_j^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонною по  $t$ . За теоремою про монотонну обмежену послідовність отримуємо, що існує

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j^t = p_j^\infty.$$

Отже, існування граничних векторів  $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$  повністю доведено.  $\square$

Наступна теорема дає опис інваріантних відносно перетворення  $\ast$  граничних мір  $\mu^\infty, \nu^\infty$  у термінах явних значень координат стохастичних векторів  $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ .

**Теорема 2.2.** *Нехай траєкторія динамічної системи конфлікту (2.4) з початковою парою стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$  збігається до граничного стану  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ . Тоді граничний стан  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  є нерухомою точкою, тобто*

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty.$$

*Причому, якщо  $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ , то  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}, \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}$ .*

*Якщо  $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$ , то  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$  і*

$$p_j^\infty = r_j^\infty = \frac{\tau_j}{W} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

*Доведення.* Якщо початкові вектори рівні, то  $p_j = r_j = \tau_j$  для усіх  $j = 1, \dots, n$ . Тоді завдяки стохастичності  $W = 1$ . Використовуючи формулу (2.5), отримуємо  $p_j^1 = p_j = r_j = r_j^1$ . Аналогічно  $p_j^t = p_j = r_j = r_j^t$ . Тому при  $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{r}^\infty.$$

Доведемо теорему для випадку різних початкових векторів. Розглянемо різницю  $j$ -их координат векторів  $\mathbf{p}^{t+1}$  та  $\mathbf{r}^{t+1}$  і покажемо, що вона прямує до нуля. Позначимо  $d_j^{t+1} := p_j^{t+1} - r_j^{t+1}$ , тоді

$$d_j^{t+1} = \frac{p^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t} - \frac{r^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t} = \frac{1}{z^t}(p_j^t - r_j^t)(\theta^t + 1),$$

$$d_i^{t+1} = d_i^t \cdot k^t, \quad (2.13)$$

де  $k^t = \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t}$ . Припустимо супротивне, тобто, що  $d_j^t \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Розглянемо рівність (2.13) при  $t \rightarrow \infty$ . За теоремою 2.1, існують граничні координати  $p_j^\infty$  та  $r_j^\infty$ . Отже, існують границі  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_j^t = d_j^\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta^t = \theta^\infty \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W^t = W^\infty > 0$ . Таким чином отримаємо рівність  $d_j^\infty = \frac{\theta^\infty + 1}{\theta^\infty + 1 + W^\infty} \cdot d_j^\infty$ . Ця рівність можлива лише у випадку  $d_j^\infty = 0$ . Отримали суперечність. Отже, припущення невірне, тобто  $d_j^\infty \rightarrow 0$  для довільного  $j = 1, \dots, n$ . Це означає, що  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathcal{T}^\infty$ , а тому

$$\sum_{j=1}^n p_j^\infty = \sum_{j=1}^n r_j^\infty = \sum_{j=1}^n \tau_j^\infty = 1,$$

тобто  $\lim_{t \rightarrow \infty} W^t = 1$ .

Знайдемо явні значення для  $\tau_j^\infty$ . Використавши формули (2.8) для деякої  $j$ -тої координати вектора  $\mathcal{T}$  та враховуючи рівність (2.11), отримаємо

$$\tau_j^{t+1} = \tau_j^t \cdot \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t} = \frac{\tau_j^t}{W^t} \cdot \frac{\theta^t + 2}{\frac{\theta^t + 1}{W^t} + 1} = \frac{\tau_j}{W} \cdot \frac{\theta^t + 2}{\frac{\theta^t + 1}{W^t} + 1}.$$

Тоді

$$\tau_j^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_j^{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\tau_j}{W} \cdot \frac{\theta^t + 2}{\frac{\theta^t + 1}{W^t} + 1} \right) = \frac{\tau_j}{W} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta^t + 2}{\frac{\theta^t + 1}{W^t} + 1} \right) = \frac{\tau_j}{W}.$$

Як наслідок, одержуємо

$$p_j^\infty = r_j^\infty = \frac{\tau_j}{W}.$$

Інваріантність векторів  $\mathbf{p}^\infty$ ,  $\mathbf{r}^\infty$  відносно перетворення  $\ast$  впливає безпосередньо з явного виду їхніх координат.  $\square$

**Зауваження 2.3.** В роботі [26] досліджується бінарна модель динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією, динаміка якої задана за допомогою системи різницевих рівняння (2.2), в яких  $\theta^t = 0$ , а добуток координат векторів  $\mathbf{p}^t$  і  $\mathbf{r}^t$  – це координати вектора  $\mathcal{T}^t$ , тобто  $\tau_i^t = p_i^t r_i^t$ ,  $i = 1, \dots, n$ . У [26] доведено існування нерухомого граничного стану, який суттєво відрізняється від описаного вище результату. Доведення відповідних фактів проводиться іншим способом та є простішим від випадку, коли  $\tau_i^t = \min\{p_i^t, r_i^t\}$ .



### 2.3. Існування нерухомих граничних точок для траєкторій багатокomпонентних систем

Розглянемо динамічну систему (2.1) з довільною, але скінченною кількістю початкових стохастичних векторів  $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ . Нехай усі вектори  $\mathbf{p}_i$  не є тотожно рівними між собою,  $\mathbf{p}_l \neq \mathbf{p}_k$ ,  $l \neq k$ . Нагадаємо, що  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  – довільна обмежена додатна функція, що залежить від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ .

Доведемо допоміжні твердження, які необхідні для формулювання й доведення основних результатів цього пункту.

**Твердження 2.4.** *Якщо  $p_{ij} \geq p_{kj}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , то*

$$p_{ij}^t \geq p_{kj}^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

*Доведення.* Те, що знак різниці  $j$ -их координат,  $\text{sign}(p_{ij}^t - p_{kj}^t)$ ,  $i \neq k$ , різних векторів не змінюється з часом, встановлюється так само, як при доведенні аналогічного факту в теоремі 2.1.  $\square$

**Твердження 2.5.** *Припустимо граничні значення  $\theta^\infty$  та  $W^\infty$  існують і є строго додатними:  $\theta^\infty > 0$  і  $W^\infty > 0$ . Тоді*

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_l^t\|_1 \rightarrow 0, \quad \forall i, l = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

*Доведення.* Позначимо  $d_{il,j}^t = |p_{ij}^t - p_{lj}^t|$ . Нехай  $p_{ij}^t \neq p_{lj}^t$ , тоді

$$d_{il,j}^{t+1} = |p_{ij}^{t+1} - p_{lj}^{t+1}| = |p_{ij}^t - p_{lj}^t| \cdot \frac{\theta^t + 1}{z^t} = d_{il,j}^t \cdot \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t},$$

тобто

$$d_{il,j}^{t+1} = d_{il,j}^t \cdot k^t, \quad k^t = \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t}. \quad (2.15)$$

Тоді

$$d_{il,j}^{t+1} = d_{il,j}^t \cdot k^t = d_{il,j}^{t-1} \cdot k^{t-1} \cdot k^t = \dots = d_{il,j} \cdot k \cdot k^1 \dots k^t, \quad d_{il,j} = d_{il,j}^{t=0}.$$

Оскільки  $W^t > 0$  для довільного  $t$ , то  $0 < k^t < 1$ , звідси випливає

$$0 < d_{il,j}^t < \dots < d_{il,j}^1 < d_{il,j} < 1,$$

а це означає, що послідовність  $\{d_{il,j}\}_{t=0}^{\infty}$  є обмеженою та монотонною, а тому існує

$$d_{il,j}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{il,j}^t.$$

Припустимо  $d_{il,j}^{\infty} \neq 0$ . З рівності (2.15) одержуємо:

$$d_{il,j}^{\infty} = d_{il,j}^{\infty} \cdot k^{\infty}, \quad k^{\infty} = \frac{\theta^{\infty} + 1}{\theta^{\infty} + 1 + W^{\infty}}.$$

Зрозуміло, що  $k^{\infty} \neq 1$ , оскільки  $\theta^{\infty}, W^{\infty} > 0$ . Тому ця рівність можлива лише у випадку  $d_{il,j}^{\infty} = 0$ . Тим самим (2.14) доведено.  $\square$

Введемо позначення  $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$ . Тоді вектор  $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$  є стохастичним. Один з основних результатів цього підрозділу стверджує, що існують усі граничні вектори  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t = \mathbf{p}_i^{\infty}$ , якщо припустити, що послідовності  $\{w_j^t\}_{t=1}^{\infty}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , є монотонними.

**Теорема 2.6.** *Нехай всі координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної). Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^{\infty}, \mathbf{p}_2^{\infty}, \dots, \mathbf{p}_m^{\infty}\}$*

$$\mathbf{p}_i^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^{\infty}$  співпадають з вектором  $\mathbf{w}^{\infty}$ , тобто

$$p_{ij}^{\infty} = \frac{\tau_j^{\infty}}{W^{\infty}} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

*Доведення.* Доведемо існування граничних векторів  $\mathbf{p}_i^{\infty}$ . Для деякого фіксованого  $j = 1, \dots, n$  маємо

$$p_{ij}^{t+1} - p_{ij}^t = \frac{p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t} - p_{ij}^t = \frac{W^t}{z^t} \left( \frac{\tau_j^t}{W^t} - p_{ij}^t \right). \quad (2.17)$$

Розглянемо далі можливі випадки.

1. Припустимо, що координата  $w_j^t$  є монотонно зростаючою.

1. а) Нехай  $p_{ij} < \frac{\tau_j}{W}$ . Тоді згідно зі (2.17)  $p_{ij}^1 > p_{ij}$ . Оскільки  $\frac{W}{z} = \frac{W}{1+\theta+W} < 1$ , причому координата  $p_{ij}$  зростає на величину, котра не перевищує  $\frac{\tau_j}{W} - p_{ij}$ , то це забезпечує виконання нерівності  $p_{ij}^1 < \frac{\tau_j}{W^1}$ . Далі за індукцією отримуємо  $p_{ij}^t < \frac{\tau_j}{W^t}$  для довільного  $t$ . Це означає монотонне зростання координати  $p_{ij}^t$  з часом  $t$ . А тому існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t.$$

Оскільки  $p_{ij}^{t+1} - p_{ij}^t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}$ .

1. б) Нехай  $p_{ij} > \frac{\tau_j}{W}$ , тоді на наступному кроці можливі випадки

$$p_{ij}^1 > \frac{\tau_j^1}{W^1} \quad \text{або} \quad p_{ij}^1 < \frac{\tau_j^1}{W^1}.$$

Якщо нерівність  $p_{ij}^t > \frac{\tau_j^t}{W^t}$  буде справедливою для всіх моментів часу  $t$ , то в такому разі з формул (2.2), (2.3) випливає, що координата  $p_{ij}^t$  спадає. Тоді з необхідністю існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}.$$

В іншому випадку, тобто, коли виникла нерівність  $p_{ij}^1 < \frac{\tau_j^1}{W^1}$ , або така нерівність виникла на деякому кроці  $t'$ , тобто  $p_{ij}^{t'} < \frac{\tau_j^{t'}}{W^{t'}}$ , то отримуємо випадок, який описано в 1.а).

2. Аналогічно, для випадку монотонно спадної координати  $w_j^t$ . Якщо  $p_{ij} < \frac{\tau_j}{W}$ , то координата  $p_{ij}$  спадає на величину, меншу за  $\frac{\tau_j}{W} - p_{ij}$ . Це забезпечує виконання нерівностей  $p_{ij}^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}$  та  $p_{ij}^{t+1} < p_{ij}^t$  для довільного  $t$ . При  $p_{ij} > \frac{\tau_j}{W}$  на наступному кроці знак нерівності може помінятися, тоді отримуємо описаний вище випадок. Якщо знак цієї нерівності не змінюється, то координата  $p_{ij}^t$  зростає і прямує до  $\frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

З доведеного вище випливає існування граничних векторів

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t.$$

Отже, всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^\infty = (p_{ij}^\infty)_{j=1}^n$  рівні між собою та співпадають з вектором  $\mathbf{w}^\infty$ . □

Далі розглянемо поведінку динамічної системи (2.1) з показником атрактора  $\mathcal{T}^t$ , координати якого задані явно за допомогою координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ . Означимо координати  $\tau_j^t$  одним зі способів:

- 1) як мінімальне значення  $j$ -тих координат множини векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,

$$\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t = \min_i \{p_{ij}^t\}, \quad (2.18)$$

- 2) як максимальне значення  $j$ -тих координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,

$$\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t = \max_i \{p_{ij}^t\}, \quad (2.19)$$

- 3) як середнє значення всіх  $j$ -тих координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,

$$\tau_j^t := \bar{\tau}_j^t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_{ij}^t, \quad (2.20)$$

- 4) всі координати вектора  $\mathcal{T}^t$  є однаковими (задані однаковою функцією від  $t$ )

$$\tau_{j_1}^t = \tau_{j_2}^t > 0, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

**Твердження 2.7.** *Нехай координати показника атрактора  $\mathcal{T}^t$  задано рівністю (2.18) або (2.19). Тоді послідовність  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонною, причому відношення  $\frac{\tau_j^t}{W^t}$  не залежить від часу  $t$*

$$\frac{\tau_j}{W} = \frac{\tau_j^t}{W^t}. \quad (2.22)$$

*Доведення.* Якщо координати  $\tau_j^t$  задано рівністю (2.18) або (2.19), то  $\tau_j^t$  співпадає з  $j$ -тою координатою деякого вектора  $\mathbf{p}_i^t$ . Звідси випливає рівність (2.8). Якщо  $\tau_j^t = \tau_{j,\min}^t$ , то доведення (2.22) є простим узагальненням доведення рівності (2.9).

Якщо ж  $\tau_j^t = \tau_{j,\max}^t$ , то  $W^t \geq 1$ . Звідси випливає, що  $\tau_j^{t+1} \leq \tau_j^t$ . Це означає, що послідовність  $\{\tau_j^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонно спадною.

Тепер рівність (2.11) можна узагальнити для випадку довільної скінченної кількості векторів  $\mathbf{p}_i$ . Тому рівність (2.22) справедлива для довільного моменту часу.  $\square$

Для динамічної системи (2.1) з показником атрактора, координати якого визначаються заданою вище явною залежністю від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ , справедлива така теорема (основний результат підрозділу).

**Теорема 2.8.** *Нехай координати показника атрактора  $\mathcal{T}^t$  задані однією з рівностей (2.18), (2.19), (2.20), (2.21). Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$  збігається до нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому всі граничні вектори  $\mathbf{p}_i^\infty$  співпадають з початковим вектором  $\mathbf{w}$ , тобто

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j}{W} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Граничний стан  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$  є стійким тільки у випадку, коли координати показника атрактора задано рівністю (2.21), тобто коли всі граничні координати дорівнюють  $\frac{1}{n}$ . У всіх інших випадках граничний стан є нестійким.

*Доведення.* 1) Нехай координати показника атрактора  $\mathcal{T}^t$  задано рівністю (2.18) або (2.19). Зі стохастичності векторів  $\mathbf{p}_i^t$  випливає, що для всіх  $t = 0, 1, \dots$  координати показника атрактора є обмеженими, тобто  $0 \leq \tau_j^t \leq 1$ . Враховуючи твердження 2.7 отримуємо існування границь

$$\tau_j^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_j^t, \quad j = 1, \dots, n,$$

а це свідчить про існування граничного вектора  $\mathbf{w}^\infty$ .

Враховуючи теорему 2.6 і рівність 2.22, для всіх  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  отримуємо

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j}{W}.$$

2) Якщо координати показника атрактора  $\mathcal{T}^t$  задані рівністю (2.20), то  $W^t = 1$ . Легко показати, що для довільного  $t$

$$\bar{\tau}_j^{t+1} = \bar{\tau}_j^t = \dots = \bar{\tau}_j = \text{const},$$

а тому  $w_j^\infty = \bar{\tau}_j$ . За теоремою 2.6 це означає, що  $p_{ij}^\infty = \bar{\tau}_j$ .

3) У випадку рівності всіх координат  $\tau_j^t$  рівняння (2.2) набувають вигляду

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau^t}{\theta^t + 1 + n\tau^t}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots$$

Тоді всі координати вектора  $\mathbf{w}$  дорівнюють  $\frac{1}{n}$ , причому вектор  $\mathbf{w}^t$  не залежить від часу  $t$ , тобто  $w_j^t = \frac{1}{n}$  для довільного  $t$ , а тому  $w_j^\infty = \frac{\tau}{W} = \frac{1}{n}$ . У такому випадку будуть справедливими твердження теорема 2.6, причому  $p_{ij}^\infty = \frac{\tau}{W} = \frac{1}{n}$ .

Якщо  $\tau_j^t$  задано рівностями (2.18), (2.19), (2.20), то очевидно, що для довільної точки з  $\varepsilon$ -околу граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$  відношення  $\frac{\tau_j}{W}$  є іншим. Тоді згідно з вище доведеним відповідний граничний стан буде також іншим. Це доводить нестійкість граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$  у таких випадках.

Якщо ж  $\tau_i^t$  задано рівністю (2.21), то відношення  $\frac{\tau_j}{W}$  є однаковим для будь-яких початкових станів. Це забезпечує стійкість граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$ .  $\square$

**Зауваження 2.9.** Якщо вище  $\tau_j^t = \tau_k^t$ , то

$$p_{ij}^\infty = p_{ik}^\infty.$$

**Зауваження 2.10.** Твердження теорема 2.8 залишаються також справедливими, якщо координати показника атрактора  $\mathcal{T}^t$  задані одним із наступних способів:

1) як довільна лінійна комбінації  $j$ -тих координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$

$$\tau_j^t = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ij}^t, \quad \alpha_i = \text{const} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots$$

2) як середнє арифметичне максимального та мінімального значень  $j$ -тих координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$

$$\tau_j^t := \frac{1}{2}(\tau_{j,\max}^t + \tau_{j,\min}^t),$$

3) як лінійна комбінація максимального та мінімального значень  $j$ -тих координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$

$$\tau_j^t = \alpha \tau_{j,\min}^t + \beta \tau_{j,\max}^t, \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0, \quad t = 0, 1, \dots$$

Розглянемо ряд конкретних прикладів, що ілюструють динаміку системи при різних показниках атрактора. Нехай задано набір невід'ємних функцій  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , де  $x \in [a; b]$ . Задамо вектори  $\mathbf{p}_i$  за допомогою значень цих функцій, а саме розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  частин  $a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  і визначимо координати векторів  $\mathbf{p}_i$  наступним способом

$$p_{ik} = \frac{f_i(x_k)}{D_{1,i}},$$

де  $D_{1,i} = \sum_{k=1}^n f_i(x_k)$ .

На рис. 2.1(1) і 2.2(1) задано початкові стани  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$  та  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$  за допомогою функцій  $f_i(x)$ . На рис. 2.1(2–6) та 2.2(2–6) отримано граничний стан, який отримано в результаті динаміки, заданої рівняннями (2.2) залежно від способу задання показника атрактора  $\tau_j^t$ .

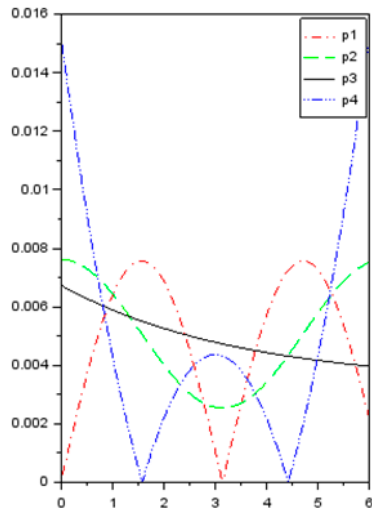
На рис. 2.3(1–3)–2.5(1–3) початкові вектори  $\mathbf{p}_i$  утворені аналогічним способом, але за допомогою функції двох змінних  $f_i(x, y)$ , явний вигляд яких наведено нижче. Ці функції також набувають лише невід'ємних значень, а координати цих векторів дорівнюють

$$p_{ik} = \frac{f_i(x_{k'}, y_{k''})}{D_{2,i}},$$

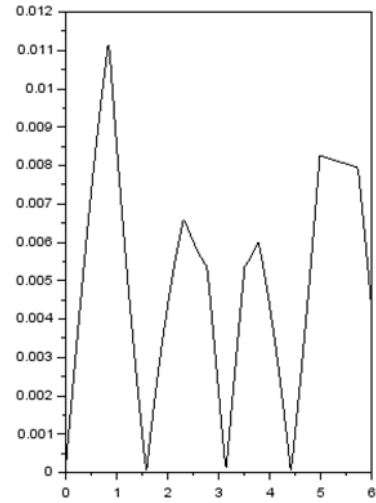
де  $D_{2,i} = \sum_{k'=1}^n \sum_{k''=1}^n f_i(x_{k'}, y_{k''})$ , а  $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . На рис. 2.3–2.5 зображено проєкцію значень координат векторів  $\mathbf{p}_i$  на деяку площину, яка обмежена прямими  $a_1 \leq x \leq b_1$ ,  $a_2 \leq y \leq b_2$ . Причому, чим інтенсивніший колір (червоний, синій, зелений чи білий), тим більше значення координат, а чорний колір відповідає нульовим значенням координат. Граничний стан системи ілюструється рисунками 2.3(4–6)–2.5(4–6) для показника атрактора, визначеного формулами (2.18), (2.19), (2.20).

Комп'ютерні приклади демонструють виконання теорем (2.6), (2.8) для конкретних моделей динамічних системи, еволюція яких у часі  $t$  задається рівняннями (2.2) в термінах координат  $p_{ij}^t$  стохастичних векторів  $\mathbf{p}_i^t$ . Рис. 2.1–2.5 ілюструють залежність граничного стану динамічної системи від способу задання показника атрактора. У більшості випадків незначна зміна початкового вектора  $\mathcal{T}$  істотно впливає на граничний стан системи, оскільки змінюється відношення  $\frac{\tau_j}{W}$  і тим самим змінюються граничні координати  $p_{ij}^\infty$  векторів  $\mathbf{p}_i$ .

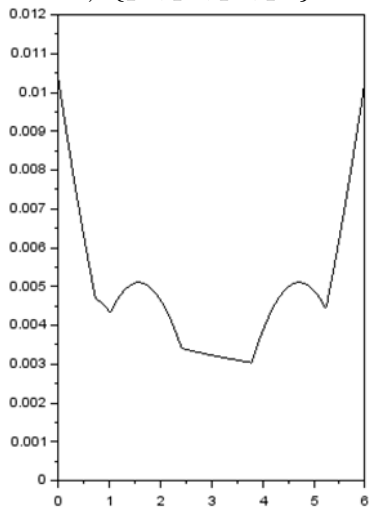




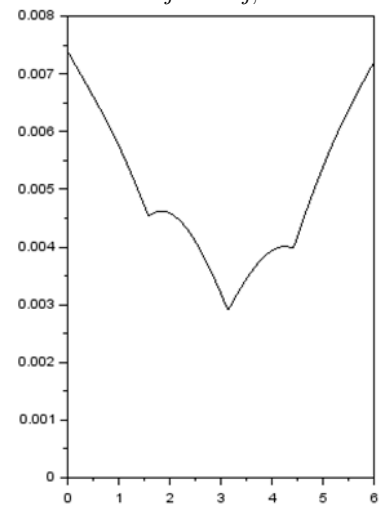
1)  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$



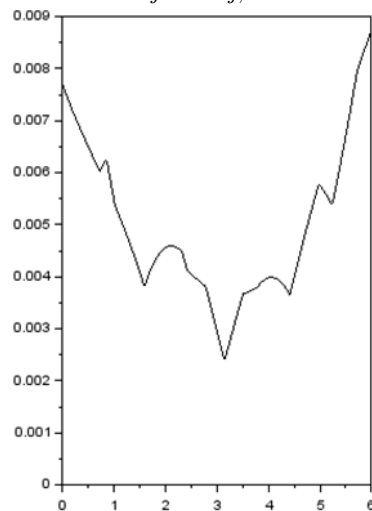
2)  $\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t$



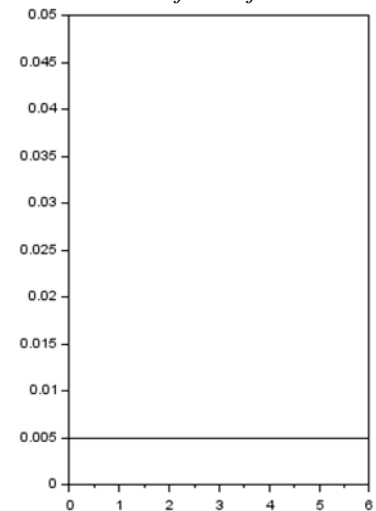
3)  $\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t$



4)  $\tau_j^t = \bar{\tau}_j^t$



5)  $\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t + \tau_{j,\max}^t$



6)  $\tau_j^t := \tau_{1,\max}^t + \tau_{2,\max}^t + \tau_{3,\max}^t$

Рис. 2.1.  $m = 4$ ,  $n = 200$ , 1)  $f_1(x) = 3|\sin(x)|$ ,  $f_2(x) = \cos(x) + 2$ ,  $f_3(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ ,  $f_4(x) = -(x - 3)^2 + 2$ ,  $x \in [0; 6]$  – функції, що задають початковий стан  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ , 2)–6) граничні стани  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty, \mathbf{p}_4^\infty\}$  з показниками атрактора  $\tau_j^t$ , заданими формулами (2.18), (2.19), (2.20), (2.10) і (2.21).

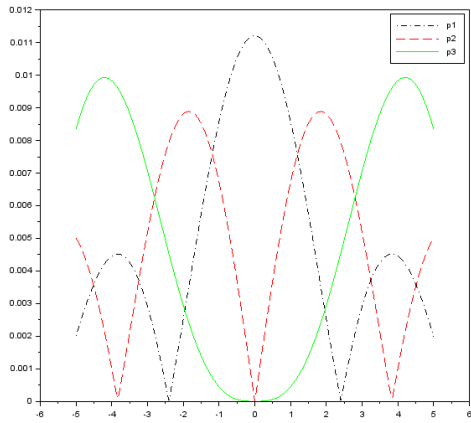
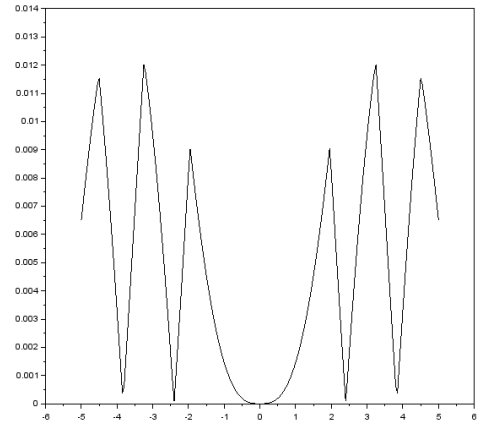
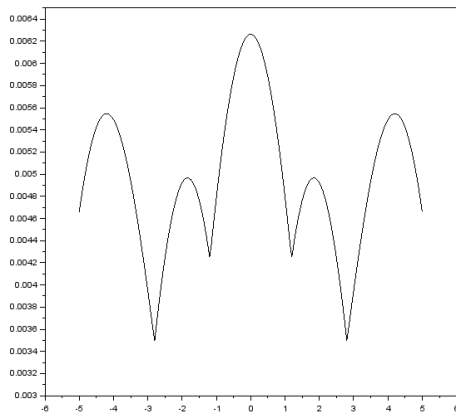
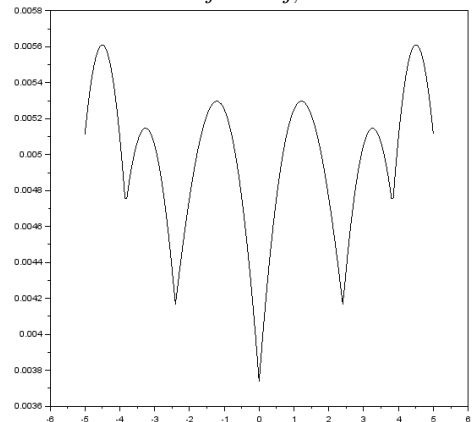
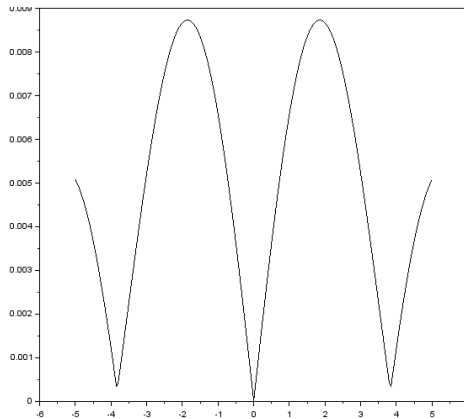
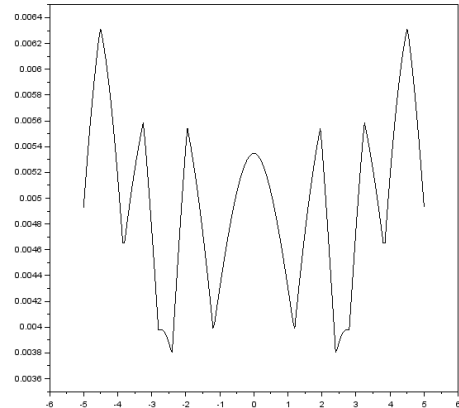
1)  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ 2)  $\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t$ 3)  $\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t$ 4)  $\tau_j^t = \bar{\tau}_j^t$ 5)  $\tau_j^t := 0.2p_{1n}^t + 500p_{2n}^t + 12p_{3n}^t$ 6)  $\tau_j^t := \frac{1}{2}(\tau_{j,\min}^t + \tau_{j,\max}^t)$ 

Рис. 2.2. Рис. 2.  $m = 3, n = 200$ , 1) початковий стан  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$  заданий модулем функції Бесселя першого роду, тобто  $f_i = |J_\alpha(x)|$ , де  $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$  для  $\alpha = 0, 1, 2, x \in [0; 6]$ , 2)–6) граничні стани  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \mathbf{p}_3^\infty\}$  з показниками аттрактора  $\tau_j^t$ , заданими формулами (2.18), (2.19), (2.20), (2.10) і (2.10).

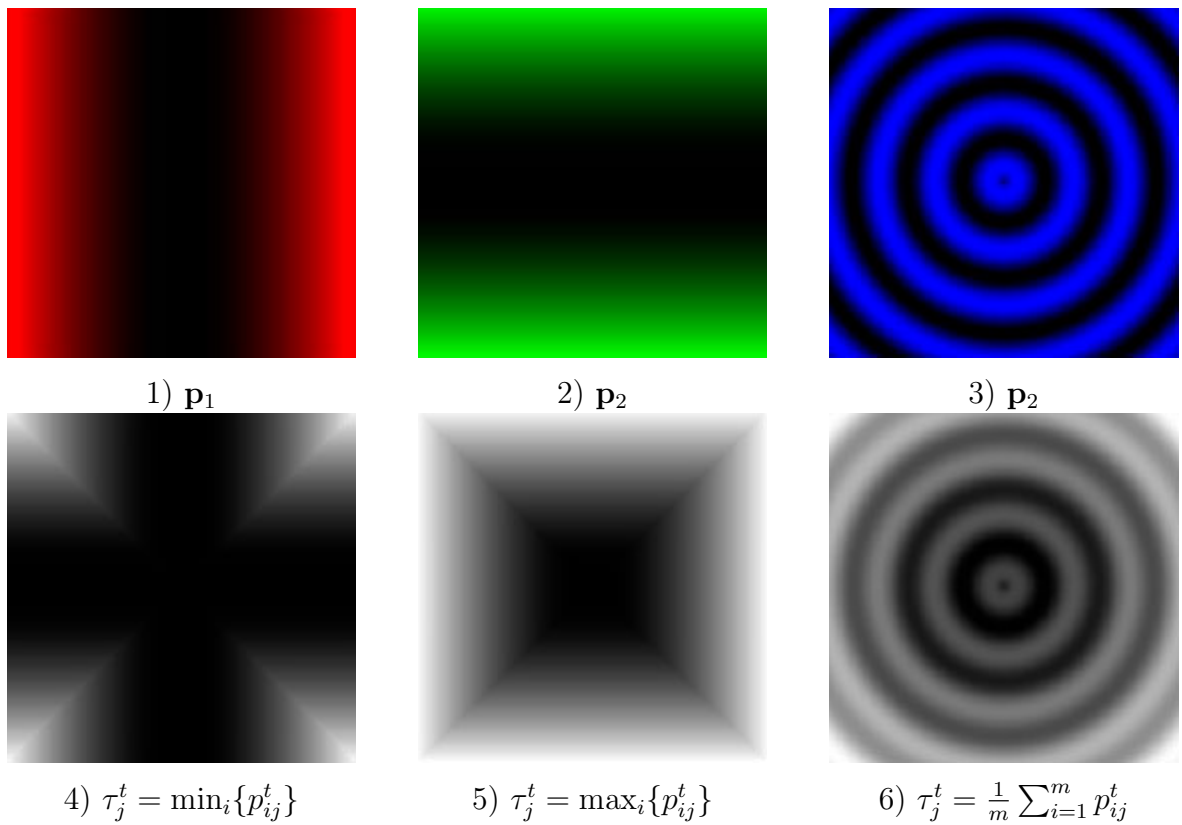


Рис. 2.3. 1)–3) Проекції початкових векторів  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  на площину  $S_1 = [-20; 20] \times [-20; 20]$ , які утворені за допомогою функцій  $f_1(x, y) = y^2$ ,  $f_2(x, y) = x^2$ ,  $f_3(x, y) = 1 + \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ , де  $-20 \leq x \leq 20$ ,  $-20 \leq y \leq 20$ . 4)–6) Проекція граничних векторів  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$  на площину  $S_1$  при мінімальному (2.18), максимальному (2.19) і середньому (2.20) значеннях  $\tau_i^t$  відповідно.

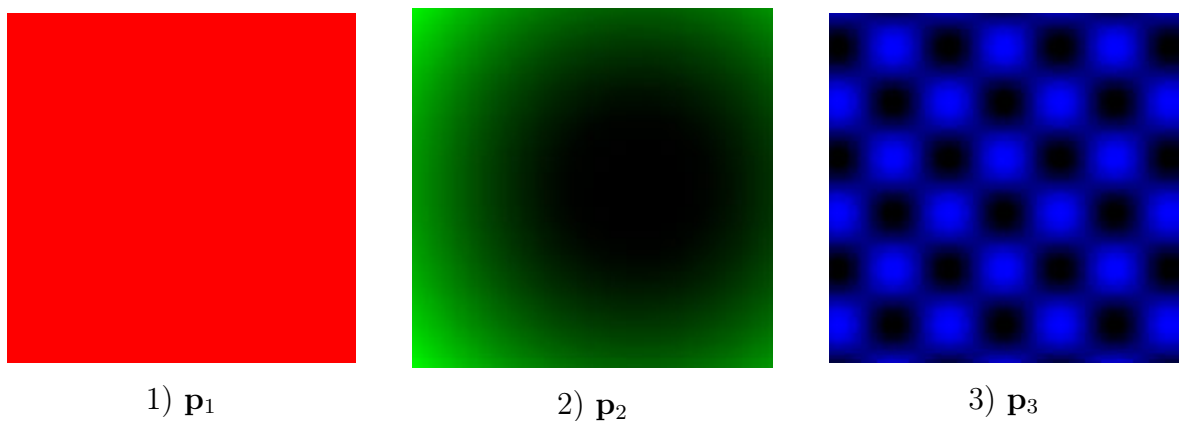


Рис. 2.4. 1)–3) Проекції початкових векторів  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  на площину  $S_1 = [-20; 20] \times [-20; 20]$ , які утворені за допомогою функцій  $f_1(x, y) = 1$ ,  $f_2(x, y) = |5 - (y - 5)^2 - x^2|$ ,  $f_3(x, y) = 1 - \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2}$ , де  $-20 \leq x \leq 20$ ,  $-20 \leq y \leq 20$ .

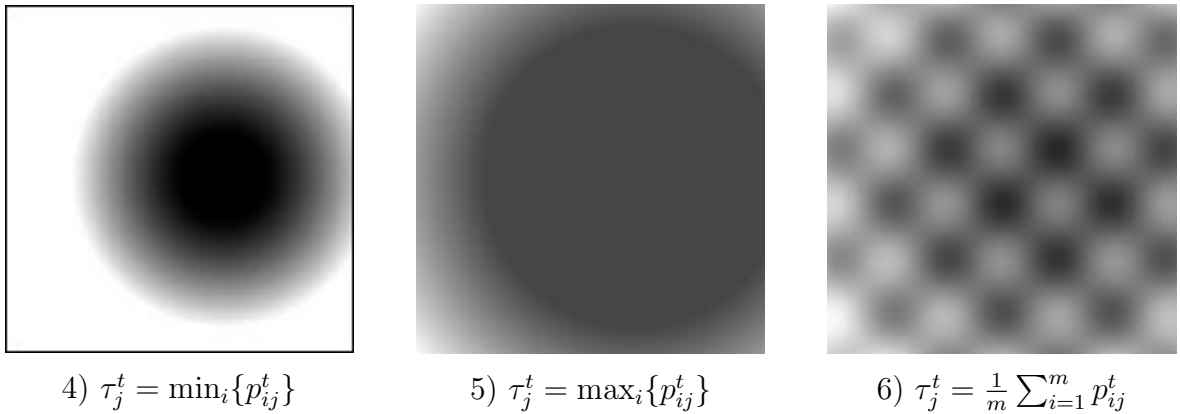


Рис. 3.4. 4)–6) Проекція граничних векторів  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$  на площину  $S_1$  при мінімальному (2.18), максимальному (2.19) і середньому (2.20) значеннях  $\tau_i^t$  відповідно.

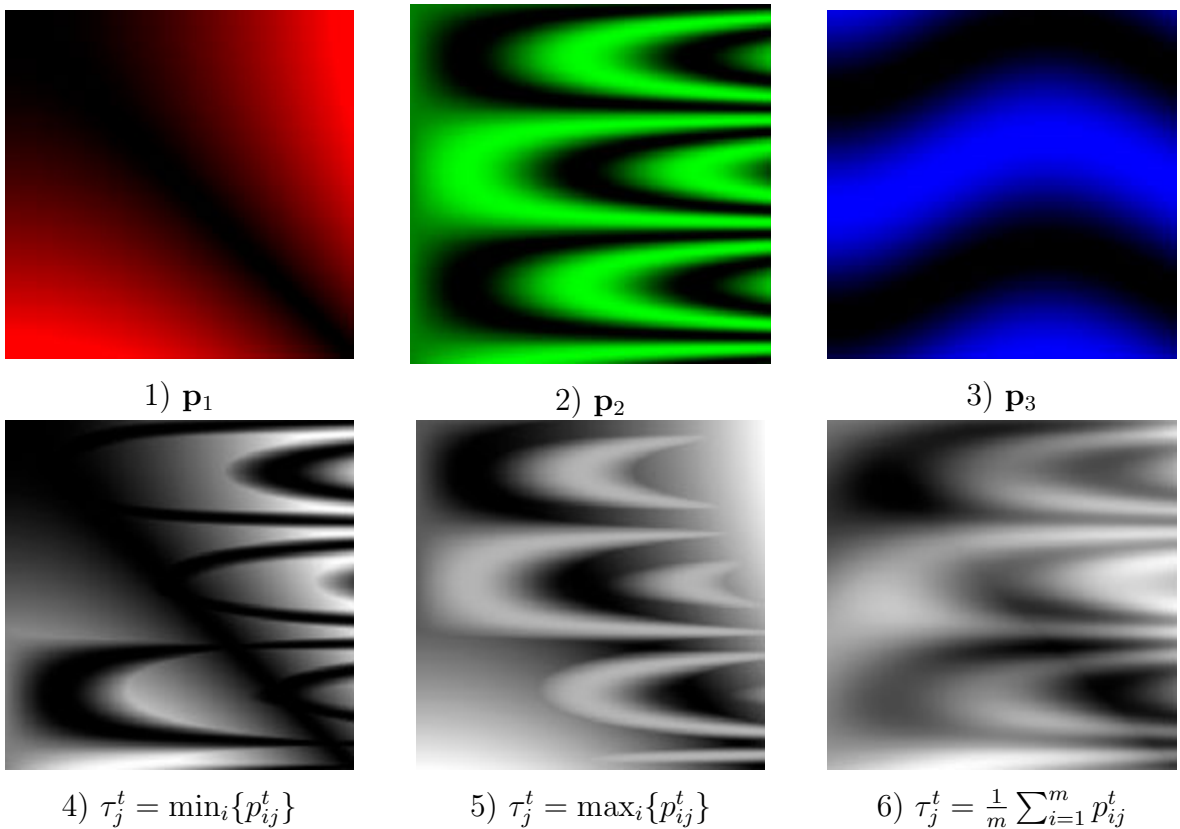


Рис. 2.5. 1)–3) Проекції початкових векторів  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  на площину  $S_2 = [0; 10] \times [0; 10]$ , які утворені за допомогою функцій  $f_1(x, y) = |y^2 - x^2|$ ,  $f_2(x, y) = 1 - \sin(y \sin(x))$ ,  $f_3(x, y) = 1 - \sin(x - \cos \frac{y}{2})$ , де  $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$ . 4)–6) Проекція граничних векторів  $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$  на площину  $S_2$  при мінімальному (2.18), максимальному (2.19) і середньому (2.20) значеннях  $\tau_i^t$  відповідно.

## 2.4. Умови існування граничних циклів

Нехай координати кожного вектора  $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  змінюються згідно з рівняннями (2.2). Припустимо, що координати показника атрактора  $\tau_j^t = \tau_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , де  $\tau_j(t)$  – довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Тоді за властивістю періодичних функцій  $W(t) \equiv W^t$ , координати  $w_j^t = w_j(t) = \frac{\tau_j(t)}{W(t)}$  стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  будуть також періодичними з головним періодом, який позначимо через  $T$ . Знову  $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$  – довільна обмежена додатна функція, що залежить від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ . Можна вважати, що вектор  $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$  характеризує величину періодичного зовнішнього впливу на систему.

**Твердження 2.11.**

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_l^t\|_1 \rightarrow 0, \quad \forall i, l = 1, \dots, m. \quad (2.24)$$

*Доведення.* З доведення твердження 2.5 маємо:

$$d_{il,j}^{t+1} = d_{il,j}^t \cdot k^t, \quad k^t := \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t},$$

$$d_{il,j}^{t+1} = d_j^t \cdot k^t = d_{il,j}^{t-1} \cdot k^{t-1} \cdot k^t = \dots = d_{il,j} \cdot k \cdot k^1 \cdot \dots \cdot k^t, \quad d_{il,j} = d_{il,j}^{t=0}.$$

Оскільки  $\theta^t$  обмежена, а  $W^t > 0$  для довільного  $t$ , то  $0 < k^t \leq c < 1$ , де  $c$  – деяка стала. Звідси випливає

$$0 < \underbrace{k \cdot k^1 \cdot \dots \cdot k^t}_{t+1} \leq (c)^{t+1}.$$

Враховуючи, що  $c < 1$ , маємо  $\lim_{t \rightarrow \infty} (c)^{t+1} = 0$ , а тому при  $t \rightarrow \infty$  добуток  $k \cdot k^1 \cdot \dots \cdot k^t$  прямує до нуля.

Отже,

$$d_{il,j}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{il,j}^t = 0. \quad \square$$

**Теорема 2.12.** *Припустимо, що всі вектори  $\mathbf{w}^t$  є незмінними з часом  $t$ , тобто  $\mathbf{w}^t = \mathbf{w}$ , а їхні координати дорівнюють деяким невід'ємним константам  $c_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1) з початковим станом  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$  збігається до стійкого нерухомого граничного стану  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t = \mathbf{w}, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

*Доведення.* Нехай  $w_j^t = c_j \geq 0$  для довільного  $t = 0, 1, \dots$ . Розглянемо координати з умовою  $p_{ij} < c_j$ . Неважко переконатися, що для них  $p_{ij} < p_{ij}^1$ . Більш за те, очевидно, що

$$p_{ij}^1 - c_j = \frac{1}{z}(\theta + 1)(p - c_j) < 0.$$

Тому  $p_{ij}^1 < c_j$ . За індукцією нерівність  $p_{ij}^t < c_j$  справедлива для довільного  $t$ , а послідовність  $\{p_{ij}^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонно зростаючою. Аналогічно у випадку  $p_{ij} > c_j$  послідовність  $\{p_{ij}^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонно спадною. Далі використовуючи спосіб доведення теореми 2.6 та твердження 2.11 одержуємо:

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = c_j, \quad \forall i, j.$$

Граничний стан  $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$  є очевидно стійким, оскільки його координати визначаються константами  $c_j$  і не залежать від початкового стану.  $\square$

Варто зауважити, що координати стохастичного вектора  $\mathbf{w}^t$  можуть бути сталими незважаючи на залежність від часу координат показника атрактора  $\tau_j^t$ . Наприклад, у випадку  $i = 3, j = 3$ , якщо покласти  $\tau_1(t) = \cos t + 1$ ,  $\tau_2(t) = 2 \cos t + 2$ ,  $\tau_3(t) = 3 \cos t + 3$ , то  $W(t) = 6 \cos t + 6$  і  $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) = \mathbf{p}_i^\infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Далі будемо вважати, що всі координати вектора  $\mathbf{w}^t$  не є сталими в часі, тобто  $w_j^t \neq \text{const}$  для всіх  $j = 1, \dots, n$ . Тоді на границі можуть виникнути цикли.

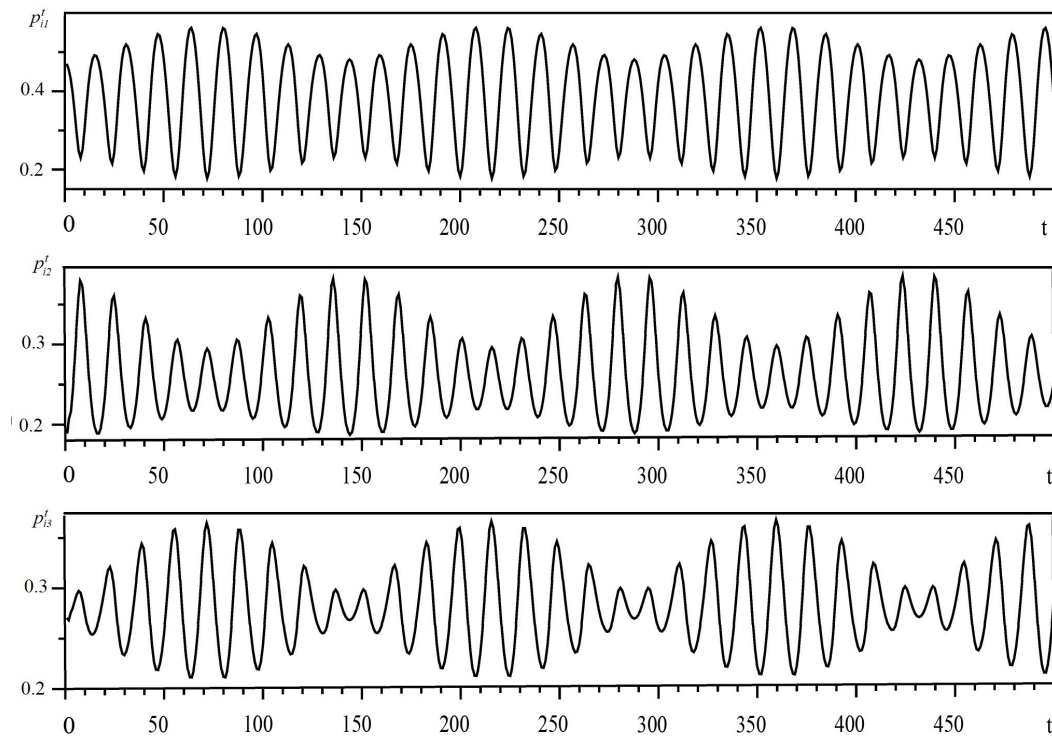


Рис. 2.6. Ілюстрація зміни значень координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$ ,  $i = 3$  при зміні часу  $t = 500$  з початковими значеннями  $p_1^{t=0} = (0,3; 0,2; 0,5)$ ,  $p_2^{t=0} = (0,1; 0,55; 0,35)$ ,  $p_3^{t=0} = (0,8; 0,15; 0,05)$  та набором функцій  $\tau_1(t) = 5 \cos(\frac{\pi t}{8}) + 8$ ,  $\tau_2(t) = 3 \sin(\pi t) + 5$ ,  $\tau_3(t) = 2 \cos(\frac{\pi t}{9}) + 7$ . Значення координат граничних векторів  $p_1^\infty$  повторюються з періодом  $T = 144$ , тобто  $\omega$ -гранична множина складається з векторів  $\Gamma_l$ , де  $l = 144$ .

**Теорема 2.13.** *Припустимо, що головний період функцій  $w_j(t)$  є додатним цілим числом  $T > 1$ . Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2.1), заданої системою різницевих рівнянь (2.2), збігається до  $\omega$ -граничної множини  $\Gamma^\infty$ , яка є циклічною орбітою. Тобто, множина  $\Gamma^\infty$  є інваріантною відносно перетворення  $\ast$  та складається з  $T$  впорядкованих векторів  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, T$*

$$\Gamma_1 \xrightarrow{\ast} \Gamma_2 \xrightarrow{\ast} \Gamma_3 \xrightarrow{\ast} \dots \xrightarrow{\ast} \Gamma_T \xrightarrow{\ast} \Gamma_1.$$

*Гранична  $\omega$ -множина  $\Gamma^\infty$  є нестійкою.*

*Доведення.* З твердження 2.11 випливає, що для всіх  $i = 1, \dots, m$  вектори  $\mathbf{p}_i^\infty$  співпадають між собою та дорівнюють деякому векторові  $\Gamma_l^t = (\gamma_{lj}^t)_{j=1}^n$ .

Оскільки  $\gamma_{lj}^t \in \mathbb{R}_+^1$  для довільного  $j$ , функція  $\theta^t$  залежить від координат векторів  $\mathbf{p}_i^t$  і набуває деякого числового значення, а значення координати  $\gamma_{lj}^t$  змінюється згідно з рівняннями (2.2), тобто визначається за допомогою елементарних дій над періодичними функціями з сумірними періодами, які дорівнюють цілому числу  $T$ . А тому за властивостями періодичних функцій значення координат вектора  $\Gamma_l^t$  будуть повторюватися з мінімальним періодом  $T$ , тобто  $\gamma_{lj}^t = \gamma_{lj}^{t+T}$ . Звідси випливає, що гранична  $\omega$ -гранична множина  $\mathbf{\Gamma}^\infty$ , складається з  $T$  векторів  $\Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, T$ , а кожен вектор  $\Gamma_l$ ,  $l > 1$  визначається зсувом координат вектора  $\Gamma_{l=1}$ . Отже,  $\omega$ -гранична множина є циклічною орбітою.

Граничний вектор  $\mathbf{\Gamma}^\infty$  залежить від початкового стану  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m\}$ . Тоді для довільної точки з  $\varepsilon$ -околу  $\mathbf{\Gamma}^\infty$  вектор  $\Gamma_{l=1}$  буде іншим, а тому  $\omega$ -гранична множина є нестійкою.  $\square$

За основу розділу 2 взято роботи [17, 18, 21]. Вище побудовано та досліджено багатокomпонентну динамічну систему, яка визначається показником атрактора  $\mathcal{T}^t$  (нестохастичним вектором з додатними координатами), доведено існування граничного стану такої системи й наведено його опис у термінах граничного значення показника атрактора. Також розглянуто декілька моделей динамічних систем з різними способами задання координат  $\tau_j^t$ , які є визначальним для системи. Очевидно, що модель є змістовною, якщо  $\tau_j^t$ ,  $j = 1, \dots, n$ , набуває скінченного додатнього значення. Саме значення координат вектора  $\mathcal{T}^t$  та спосіб їхнього задання впливають на стійкість граничного стану системи.

Такі моделі динамічних систем можуть описувати динаміку реальних процесів. Наприклад, показник атрактора може описувати реальний зовнішній вплив на деяку систему (наприклад, інформаційний вплив на суспільство). Задаючи величину показника атрактора, можна контролювати чи описувати поведінку системи, яка підлягає такому впливу.



## РОЗДІЛ 3

### Моделі динамічних систем

#### 3.1. Проблема досягнення консенсусу

У цьому підрозділі побудовано та досліджено модель, що описує процес формування переконань у складній системі з притягальною взаємодією, а відповідні результати було опубліковано в роботі [20]. Ця модель є аналогічною до моделі з робіт [67, 68], але ґрунтується на геть іншому законі взаємозв'язку між агентами. До того ж, проаналізовано багатопозиційні процеси прийняття рішень (бінарні процеси розглядаються, як частинний випадок). У побудованій нижче моделі використано новий спосіб взаємодії між агентами. А саме, у математичній формулі взаємовпливу двох зв'язаних агентів істотним елементом є добуток ймовірностей фіксованого переконання кожного з агентів. Формули записані у вигляді різницевих рівнянь, різні варіанти яких вже використовувалися у роботах [2, 8, 12, 26, 28, 54, 60, 62, 64, 65].

Спочатку коротко нагадаємо підхід розвинутий в роботах [38, 39, 46, 67, 68, 84]. Так, вперше динамічну систему поширення переконань було запропоновано ДеГрутом в роботі [38]. Там розглядається бінарна модель прийняття рішень  $\theta \in \{0, 1\}$  кожним із  $k > 1$  агентів. Початкова ймовірність прийняття  $i$ -им агентом одного з рішень,  $p_i = P(\theta = 1)$ , є величиною з проміжку  $[0, 1]$ . набір цих значень формує початковий вектор ймовірностей. Динамічний процес оновлення координат вектора ймовірностей задано матрицею  $A$  з елементами  $A_{ij}$ , які являють собою відносну довіру, котру агент  $i$  виявляє до переконання аген-

та  $j$ . Переконавання агентів змінюються лінійно, залежно від зваженого середнього значення переконань своїх сусідів, які визначаються вагами  $A_{ij}$ :

$$p_i(t+1) = \sum_{j=1}^k p_j(t) A_{ij}.$$

Результат формулюється в термінах графів. Нехай  $G = (V, E)$  позначає граф, де  $V$  – це набір агентів, а множина ребер  $E$  містить пару  $(i, j)$  тоді і тільки тоді, коли  $A_{ij} > 0$ . Показано, що в усій системі досягається консенсус, тільки якщо граф  $G$  є зв'язним, а інакше, взагалі кажучи, кожна зв'язна компонента системи матиме своє локальне консенсусне значення.

Інша, трохи досконаліша, модель переконань відома як модель Хегсельмана–Краузе [46]. У цій моделі, аналогічно до моделі ДеГрута, кожен агент має переконання, виражене дійсним числом  $p_i \in [0, 1]$  і переконання агентів оновлюються синхронно. Та в моделі Хегсельмана–Краузе введено показник довіри (порогове значення)  $\varepsilon$ , який дозволяє змодельовувати відсутність взаємодії між деякими агентами за умови, що їхні переконання досить далекі одне від одного.

У моделі Дефуанта–Вайсбуха [39, 84] досліджується ефект попарної взаємодії між агентами, чий переконання перебувають на відстані, що є меншою за певне порогове значення. В цій моделі переконання агентів також виражені дійсними числами  $p_i \in [0, 1]$ . Усіх агентів, які можуть безпосередньо взаємодіяти з фіксованим агентом  $i$ , називають його сусідами і їхню множину позначають  $N_i$ . Агенти  $i$  та  $j$  довільним чином вибираються для симетричної взаємодії (якщо  $i \in N_j$ , то  $j \in N_i$ ). Через  $I_i(k, \varepsilon) = \{j \in N_i: |p_i(t) - p_j(t)| < \varepsilon\}$  позначено множину всіх сусідніх з  $i$  агентів, чий переконання досить близькі до переконань агента  $i$ . Якщо  $j \in I_i(k, \varepsilon)$  та  $i \in I_j(k, \varepsilon)$ , тоді після взаємодії переконання набувають

таких значень:

$$\begin{aligned} p_i(t+1) &= (1-\mu)p_i(t) + \mu p_j(t), \\ p_j(t+1) &= (1-\mu)p_j(t) + \mu p_i(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

де  $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$  називають параметром змішування.

Модель, запропонована в [67, 68] ґрунтується на моделі Дефуанта–Вайсбуха, але це вже не обов’язково бінарна модель. Дозволяється процес вибору між більшою кількістю альтернатив. Так, у [68] автори розглядають переконання кожного агента як ймовірнісний вектор, кожна координата такого вектора представляє ймовірність того, що певна альтернатива приймається агентом. В цих роботах (а також у [37, 50, 83, 85]) порогове значення взаємодії  $\mu$  розглядається не як наперед визначений параметр, а як функція, залежна від відстані між агентами, що взаємодіють.

У нашому підході, який далі викладається, порогове значення взаємодії не задане явно, проте відстань між переконаннями для кожної пари агентів впливає на інтенсивність взаємодії. А саме, відстань між переконаннями визначає скалярні добутки ймовірнісних векторів, які явно включені у рівняння, що описують модель.

Позначимо  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$  множини агентів, які взаємодіють між собою по неорієнтованому графу  $G = (V, E)$ , де  $E$  – позначає фіксовану множини ребер графа ( $E \subset V \times V$ ). Далі  $(u, v) \in E$  позначає ребро, що сполучає агентів  $u$  та  $v$ . Для кожного такого ребра  $(u, v)$ , ми припускаємо, що на процес формування переконання агента  $v$  впливає його сусід  $u$ , а також  $v$  впливає на  $u$ .

Нехай  $B(v)$  позначає сукупність сусідів агента  $v$  на графі  $G$ , тобто

$$B(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}.$$

Відзначимо, що  $v \notin B(v)$ . Опишемо процес поширення скінченної кількості, а саме  $k$  ( $k \geq 2$ ), переконань на графі  $G$ . Припускаємо, що в момент дискретного часу  $t$  ( $t \geq 0$ ) агент  $v$  по-

діляє переконання  $i$  з імовірністю  $p_i^v(t)$ . Тобто кожному агентові  $v \in V$  відповідає вектор  $\mathbf{p}^v(t) = (p_1^v(t), \dots, p_i^v(t), \dots, p_k^v(t))$ , де координата  $p_i^v(t)$  – це ймовірність того, що агент  $v$  має переконання  $i$ . Вектори  $\mathbf{p}^v(t)$  назвемо розподілами переконань агентів  $v$  у момент часу  $t$ . За означенням, усі такі вектори є стохастичними, тобто  $\sum_{i=1}^k p_i^v(t) = 1$ .

У кожен наступний момент часу довільним чином вибираємо агента  $v \in V$  та його сусіда  $u \in B(v)$ . Вважаємо, що ймовірність вибору пари агентів не залежить від часу й однакова для всіх агентів. Вибравши пару агентів змінюємо вектор  $\mathbf{p}^v(t)$  на  $\mathbf{p}^v(t+1)$  за правилом конфліктної взаємодії з притяганням [26], яке записується в термінах координат такою формулою:

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} (p_i^v(t) + p_i^v(t)p_i^u(t)), \quad (3.2)$$

де  $z^{v,u}(t)$  – нормувальний знаменник, який забезпечує стохастичність нового вектора  $\mathbf{p}^v(t+1)$ . Легко порахувати, що

$$z^{v,u}(t) = 1 + \sum_{i=1}^k p_i^v(t) \cdot p_i^u(t). \quad (3.3)$$

Зауважимо, вектор  $\mathbf{p}^u(t)$  також змінюється за тим самим законом:

$$p_i^u(t+1) = \frac{1}{z^{v,u}(t)} (p_i^u(t) + p_i^v(t)p_i^u(t)),$$

де нормувальний знаменник  $z^{v,u}(t)$  є таким самим, як і для агента  $v$ . Покладаємо, що на кожному кроці змінюються значення лише однієї пари векторів.

Відзначимо, що якщо  $\mathbf{p}^v(t) \neq \mathbf{p}^u(t)$ , то за один крок взаємодії переконання агентів  $u$  та  $v$  не можуть стати однаковими, але вони стають ближчими в сенсі  $l_1$ -норми. Дійсно, розглянемо різницю довільних

неортогональних векторів  $\mathbf{p}^v(t+1)$  та  $\mathbf{p}^u(t+1)$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}^v(t+1) - \mathbf{p}^u(t+1)|_1 &= \sum_{i=1}^k |p_i^v(t+1) - p_i^u(t+1)| = \\ &= \frac{1}{z^{v,u}(t)} \sum_{i=1}^k |p_i^v(t) - p_i^u(t)| \leq |\mathbf{p}^v(t) - \mathbf{p}^u(t)|_1, \end{aligned}$$

де використано (3.2) і той факт, що для неортогональних векторів  $\frac{1}{z^{v,u}(t)} < 1$  (насправді з (3.3) випливає  $1 \leq z^{v,u}(t) \leq 2$ ). Отже, переконання агентів  $u$  та  $v$  після взаємодії стали ближчими.

Варто зауважити, що у випадку пари агентів з переконаннями, яким відповідають ортогональні вектори, взаємодія не відбувається взагалі, оскільки добуток  $p_i^v(t) \cdot p_i^u(t) = 0$  для всіх  $i$ . Тому можна зробити висновок, що скалярний добуток характеризує силу взаємодії двох агентів: чим ближчі вектори розподілу переконань, тим сильніший вплив агенти мають один на одного.

Загалом опис поведінки векторів розподілу переконань при  $t \rightarrow \infty$  є нетривіальною задачею, але при додаткових обмеженнях можна одержати конкретні результати, наведені далі.

**3.1.1. Модель прийняття бінарних рішень у випадку двох опонентів.** Перш ніж розглядати більш загальний випадок, розглянемо найпростіший випадок прийняття бінарних рішень.

Припустимо, що система складається лише з двох агентів, і їхній розподіл переконань має вигляд  $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t))$ ,  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ , тобто  $k = 2$ . Нагадаємо, що  $\sum_{i=1}^2 p_i(t) = \sum_{i=1}^2 r_i(t) = 1$  для всіх  $t$ .

У такому випадку взаємодія агентів описується за допомогою чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = \frac{1}{z(t)} p_1(t) (1 + r_1(t)), \\ p_2(t+1) = \frac{1}{z(t)} p_2(t) (1 + r_2(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1(t+1) = \frac{1}{z(t)}r_1(t)(1+p_1(t)), \\ r_2(t+1) = \frac{1}{z(t)}r_2(t)(1+p_2(t)), \end{cases} \quad (3.4)$$

де  $z(t) = 1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)$ . Ці рівняння генерують динамічну систему у просторі  $\Omega = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ . Кожну пару двокомпонентних стохастичних векторів  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  можна розглядати як початкову точку траєкторії цієї динамічної системи:

$$\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\} \rightarrow \{\mathbf{p}(1), \mathbf{r}(1)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{\mathbf{p}(t), \mathbf{r}(t)\} \rightarrow \dots \quad (3.5)$$

Неважко показати (так само, як у роботі [26]), що кожна траєкторія (3.5), збігається до нерухомої точки. А саме, вектори наближаються один до одного і при цьому кожен з них прямує до одного з векторів:  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  або  $\mathbf{c} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Тобто для заданої динамічної системи існують лише три стаціонарні стани:  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ ,  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$  чи  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ . Нерухомість цих станів перевіряється безпосередньо на основі формул (3.4).

Проаналізуємо поведінку траєкторії (3.5) на кожному кроці перетворення. З цією метою введемо позначення

$$\Delta_1(t) = |\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}(t)|_1 = |1 - p_1(t)| + |0 - p_2(t)| = 1 - p_1(t) + p_2(t),$$

$$\Delta_2(t) = |\mathbf{e}_2 - \mathbf{p}(t)|_1 = |0 - p_1(t)| + |1 - p_2(t)| = 1 + p_1(t) - p_2(t)$$

і припустимо, що для перших координат початкових векторів  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r} = (r_1, r_2)$  виконуються умова:

$$\begin{cases} p_1 > \frac{1}{2}, \\ r_1 > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким чином, завдяки стохастичності маємо оцінки для других координат:  $p_2 < \frac{1}{2}$  та  $r_2 < \frac{1}{2}$ . З'ясуємо, яким чином зміниться траєкторія на першому кроці:

$$p_1(t=1) = \frac{p_1(1+r_1)}{1+p_1r_1+p_2r_2}.$$

Розглядаючи відношення  $p_1(1)$  до  $p_1$ , знаходимо, що

$$\frac{p_1(1)}{p_1} = \frac{1 + r_1}{1 + p_1 r_1 + p_2 r_2} > 1,$$

оскільки

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = r_1 \left( p_1 + p_2 \frac{r_2}{r_1} \right) < r_1 (p_1 + p_2) = r_1.$$

Отже,  $p_1(t = 1) > p_1$ . Аналогічні міркування доводять, що  $r_1(t = 1) > r_1$ . На наступному кроці знову виконується умова типу (3.6),  $p_1(1) > \frac{1}{2}$ ,  $r_1(1) > \frac{1}{2}$ , а тому можна стверджувати, що послідовності  $\{p_1(t)\}$  й  $\{r_1(t)\}$  зростають при збільшенні  $t$ . За умовою задачі ці послідовності обмежені ( $p_1(t) \leq 1$ ,  $r_1(t) \leq 1$ ), тому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r_1(t) = 1.$$

Припущення, що ці границі менші за одиницю є суперечливим згідно з формулами (3.4). Цим доведено, що  $\Delta_1(t)$  збігається до нуля, тобто вектори  $\mathbf{p}(t)$  та  $\mathbf{r}(t)$  рухаються в одному напрямку до  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ . При цьому на кожному кроці відстань між ними зменшується (відстань оцінюємо за допомогою  $l_1$ -норми):

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{r}(t+1)|_1 &= |p_1(t+1) - r_1(t)| + |p_2(t+1) - r_2(t)| = \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)} (|p_1(t) - r_1(t)| + |p_2(t) - r_2(t)|) = \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^2 p_i(t)r_i(t)} |\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{r}(t+1)|_1 < |\mathbf{p}(t) - \mathbf{r}(t)|_1. \end{aligned}$$

Отже, доведено, що за виконання умов (3.6) траєкторія з початковою точкою  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  збігається до стаціонарної точки  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ .

Аналогічним чином можна показати, що для траєкторії з початковою точкою, координати якої задовольняють умови

$$\begin{cases} p_2 > \frac{1}{2}, \\ r_2 > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

величини виду  $\Delta_2(t)$  прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , що означає збіжність самої траєкторії до стаціонарної точки  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$  (див. рис. 3.1).

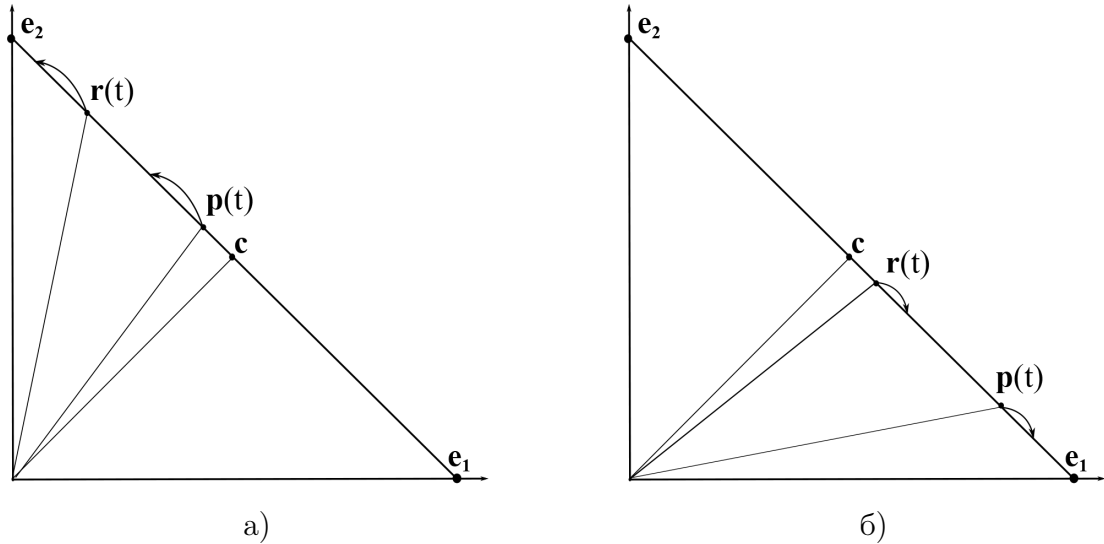


Рис. 3.1. Вектори  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$ , розташовані по один бік від центра  $\mathbf{c}$ , прямують до а)  $\mathbf{e}_2$  та б)  $\mathbf{e}_1$  відповідно.

Розглянемо випадок, коли початкові вектори розташовані не симетрично по різні боки від центру  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ , наприклад, коли перші координати початкових векторів задовольняють умови

$$\frac{1}{2} < p_1 < 1, \quad 0 < r_1 < \frac{1}{2} \quad (\text{див. рис. 3.2}). \quad (3.7)$$

Оскільки  $p_1 + p_2 = 1$  та  $r_1 + r_2 = 1$ , то для других координат виконуються нерівності:

$$0 < p_2 < \frac{1}{2} < r_2 < 1.$$

Розглянувши відношення  $p_1(1)$  до  $p_1$  знаходимо, що

$$\frac{p_1(1)}{p_1} = \frac{1 + r_1}{1 + p_1 r_1 + p_2 r_2} > 1,$$

оскільки

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = r_1 \left( p_1 + p_2 \frac{r_2}{r_1} \right) > r_1 (p_1 + p_2) = r_1.$$

Отже,  $p_1(1) < p_1$ , аналогічно  $r_1(1) > r_1$ . Завдяки стохастичності справедливі також нерівності:  $p_2(1) > p_2$ ,  $r_2(1) < r_2$ . Цим доведено, що вектори



рухаються у напрямку один до одного, тобто зближаються. Та це не приводить до того, що граничним станом буде центр  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ .

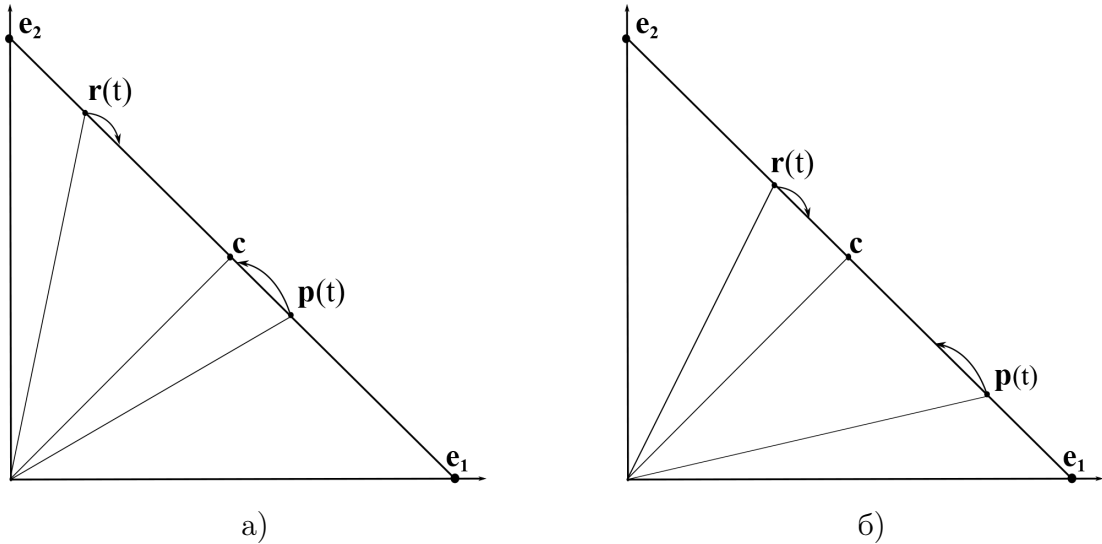


Рис. 3.2. Вектори  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$ , розташовані по різні боки від центру  $\mathbf{c}$ , рухаються у напрямку один до одного до того моменту часу  $t$ , коли вектори опиняться по один бік від центру.

Покажемо, що вектор, який знаходиться ближче до стаціонарної точки ( $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  або  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ ) в результаті взаємодії рухається повільніше, ніж інший. З цією метою, не втрачаючи загальності припустимо, що за виконання умов (3.7) завдяки несиметричності у розташуванні початкових векторів виявилось, що вектор  $\mathbf{r}$  знаходиться ближче до  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , аніж вектор  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ , тобто  $|\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}|_1 > |\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}|_1$ . Розглянемо тепер різниці

$$|\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}|_1 = |1 - p_1| + |0 - p_2| = 1 - p_1 + p_2,$$

$$|\mathbf{e}_2 - \mathbf{r}|_1 = |0 - r_1| + |1 - r_2| = 1 + r_1 - r_2.$$

Очевидно, що з нерівності

$$1 - p_1 + p_2 > 1 + r_1 - r_2$$

отримуємо  $r_1 < p_2$  та  $r_2 > p_1$ .

Далі оцінюємо, як змінився кожен з векторів за один крок, тобто порівняймо різниці  $|\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1$  і  $|\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 &= |p_1(1) - p_1| + |p_2(1) - p_2| = p_1 - p_1(1) + p_2(1) - p_2 = \\ &= \frac{1}{z} \left( p_1 r_1 \left( p_1 + \frac{p_2 r_2}{r_1} - 1 \right) + p_2 r_2 \left( 1 - \frac{p_1 r_1}{r_2} - p_2 \right) \right), \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1 &= |r_1(1) - r_1| + |r_2(1) - r_2| = r_1(1) - r_1 + r_2 - r_2(1) = \\ &= \frac{1}{z} \left( p_1 r_1 \left( 1 - r_1 - \frac{p_2 r_2}{p_1} \right) + p_2 r_2 \left( r_2 + \frac{p_1 r_1}{p_2} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Далі розглянемо різницю

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 - |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1 &= \frac{1}{z} \left( p_1 r_1 \left( p_1 + r_1 + \frac{p_2 r_2}{r_1} + \frac{p_2 r_2}{p_1} - 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + p_2 r_2 \left( 2 - p_2 - r_2 - \frac{p_1 r_1}{r_2} - \frac{p_1 r_1}{p_2} \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

оскільки

$$p_1 + r_1 + r_2 \cdot \frac{p_2}{r_1} + p_2 \frac{r_2}{p_1} - 2 > p_1 + r_1 + p_2 + r_2 - 2 = 0$$

та

$$2 - p_2 - r_2 - r_1 \frac{p_1}{r_2} - p_1 \frac{r_1}{p_2} > 2 - p_2 - r_2 - r_1 - p_1 = 0.$$

Отже,  $|\mathbf{p}(1) - \mathbf{p}|_1 > |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}|_1$ . Зрозуміло, що такого типу нерівності справедливі для всіх  $t$  доти, доки вектори будуть знаходитись по різні сторони від центру. Та оскільки обидва вектори  $\mathbf{p}(t)$  та  $\mathbf{r}(t)$  рухаються до центра і на кожному кроці  $|\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)|_1 > |\mathbf{r}(t+1) - \mathbf{r}(t)|_1$ , то існує момент  $t^*$ , коли вектор  $\mathbf{p}(t^*)$  опиниться по один бік від центра з вектором  $\mathbf{r}(t^*)$ . Починаючи з цього моменту, характер руху пари векторів зміниться, ці вектори продовжать зближатися і одночасно разом почнуть рухатись до точки  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , як це було описано в аналізі попереднього випадку.

Нарешті розглянемо симетричний випадок, коли координати початкової пари векторів  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  задовольняють умови (3.7) і рівно віддалені

від центра  $\mathbf{c} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (наприклад, відстань від  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  дорівнює відстані від  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ ). Це означає, що в такому випадку для координат векторів справедливі рівності  $p_1 = r_2$ ,  $p_2 = r_1$ . Тоді зрозуміло, що за рівні проміжки часу ці вектори зміщатимуться на рівні відстані

$$|\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t)|_1 = |\mathbf{r}(t+1) - \mathbf{r}(t)|_1.$$

Причому для кожного моменту часу  $t$  залишатиметься справедливою умова (3.7), тобто

$$0 < r_1(t) < \frac{1}{2} < p_1(t) < 1.$$

Дійсно, якщо  $p_1(t=0) > \frac{1}{2}$ , то

$$p_1(t=1) - \frac{1}{2} = \frac{p_1 + p_1 r_1}{1 + p_1 r_1 + p_2 r_2} - \frac{1}{2} > 0,$$

оскільки, як вже було доведено вище,  $p_1(1) < p_1$ ,  $p_2(1) > p_2$  та  $r_1(1) > r_1$ ,  $r_2(1) < r_2$ . За індукцією, це виконується для всіх  $t$ . Отже, вектори рухаються у напрямку один до одного. Враховуючи такий закон зміни координат, а також їх обмеженість, доходимо висновку, що кожен з початкових векторів збігається до центра  $\mathbf{c} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Проаналізуємо стійкість стаціонарних станів системи. Нагадаємо, що стаціонарний стан  $\mathbf{x}^*$  є стійким (асимптотично стійким) [1, 3, 15, 23, 36, 42], якщо існує таке досить мале число  $\varepsilon > 0$ , що для будь-якої початкової точки  $\mathbf{x}(0)$  з  $\varepsilon$ -околу точки  $\mathbf{x}^*$  траєкторія, породжена точкою  $\mathbf{x}(0)$ , збігається до  $\mathbf{x}^*$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*.$$

Розглянемо центральну точку  $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$  і зафіксуємо довільне число  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Виберемо точку  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  із  $\varepsilon$ -околу центральної точки. В загальній ситуації її координати можна записати так:

$$\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\} = \left\{ \left( \frac{1}{2} + \delta_1, \frac{1}{2} - \delta_1 \right), \left( \frac{1}{2} + \delta_2, \frac{1}{2} - \delta_2 \right) \right\},$$

де  $0 < |\delta_{1,2}| < \varepsilon$ .

Очевидно,  $\frac{1}{2} + \delta_i > \frac{1}{2} - \delta_i$ , якщо  $\delta_i > 0$  і  $\frac{1}{2} + \delta_i < \frac{1}{2} - \delta_i$ , якщо  $\delta_i < 0$ . Згідно доведеної вище теореми траєкторія породжена точкою  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  буде збігатися до  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$  або  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ , якщо  $\delta_1 \neq \delta_2$ . Отже, центральна точка  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  не є стійкою.

Розглянемо тепер граничну точку  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$  і виберемо довільну початкову точку  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  з  $\varepsilon$ -околу граничної точки. Нагадаємо, що розглядаються лише точки, що утворюються парою стохастичних векторів, тому всі точки  $\varepsilon$ -околу  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$  припускають такий запис:  $\{(1 - \delta_1, \delta_1), (1 - \delta_2, \delta_2)\}$ , де  $\varepsilon > \delta_{1,2} > 0$ . Нехай  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , тоді  $1 - \delta_i > \delta_i$ . Отже, за доведеною вище теоремою, точка  $\{\mathbf{p}(0), \mathbf{r}(0)\}$  буде породжувати траєкторію, що збігається до  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ . Таким чином доведено, що гранична точка  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$  є стійкою. За допомогою аналогічних міркувань доводимо стійкість точки  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$ .

Таким чином доведено наступну теорему.

**Теорема 3.1.** *Нехай  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  – стохастичні вектори з простору  $\mathbb{R}_+^2$ . В результаті взаємодії за формулами (3.4) траєкторія (3.5) з початковою точкою  $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$  збігається до одної з стаціонарних точок  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$ ,  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$  або  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ .*

*При цьому, якщо початкові вектори знаходяться по один бік від центра  $\mathbf{c}$  із сторони вектора  $\mathbf{e}_1$ , то траєкторія (3.5) збігається до точки  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\}$  (аналогічно для  $\mathbf{e}_2$ ).*

*Якщо початкові вектори знаходяться по різні боки від центра  $\mathbf{c}$ , але не симетричні відносно  $\mathbf{c}$ , то траєкторія (3.5) збігається до точки  $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$ , де  $\mathbf{e}_k$  – вектор до якого найближче знаходиться один з векторів  $\mathbf{p}$  чи  $\mathbf{r}$ .*

*Нарешті, якщо початкові вектори знаходяться по різні боки від центра і симетричні відносно  $\mathbf{c}$  (рівновіддалені від  $\mathbf{c}$ ), то траєкторія (3.5) збігається до точки  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ .*

*Нерухомі точки  $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$ ,  $k = 1, 2$  є стійкими, а центральна точка  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}\}$  – не стійка.*

**3.1.2. Випадок прийняття бінарних рішень для системи з багатьма опонентами.** Модель прийняття бінарних ( $k = 2$ ) рішень групою  $n > 2$  агентів описується за допомогою динамічної системи, заданої у просторі  $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \times \dots \times \mathbb{R}_+^2$ . Стан такої системи в момент часу  $t$  описує точка, яку позначаємо набором двовірних векторів  $\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\}$ , де  $\mathbf{p}^u(t)$  – стохастичний вектор з  $\mathbb{R}_+^2$ , що відповідає розподілу переконань агента  $u$ . Траєкторія динамічної системи

$$\{\mathbf{p}^1(t), \mathbf{p}^2(t), \dots, \mathbf{p}^n(t)\} \rightarrow \{\mathbf{p}^1(t+1), \mathbf{p}^2(t+1), \dots, \mathbf{p}^n(t+1)\} \quad (3.8)$$

задається за допомогою перетворень виду (3.4).

Зрозуміло, що для систем, які складаються з понад двох агентів, послідовність їхніх взаємодій *a priori* не впорядкована і тому граничний результат при  $t \rightarrow \infty$  неможливо точно передбачити. Але існують деякі окремі ситуації, коли все-таки можна точно визначити результат взаємодії всіх агентів у системі. Такі ситуації виникають, наприклад, коли у всіх агентів системи розподіли переконань задані векторами, що знаходяться по один бік від центральної нерухомої точки  $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{c}\}$ . Окрім цього, поведінку системи можна точно передбачити у ситуації, коли в усіх агентів системи розподіли переконань описані векторами, що знаходяться на однаковій відстані від центральної точки.

Доведення наступних двох тверджень зводиться до застосування аргументації доведень теореми 3.1.

**Твердження 3.2.** *Якщо всі агенти в системі мають початковий розподіл переконань, який задовольняє умову*

$$p_k^u(t=0) = \max_{i=1,2} \{p_i^u(0)\}, \quad u = 1, \dots, n,$$

де  $k$  фіксоване для всіх агентів  $u$ , то траєкторія динамічної системи збігається до стану консенсусу, тобто, коли розподіли переконань кожного з агентів однакові і мають вигляд  $\mathbf{e}_k$ .

Дійсно, повторюючи логіку міркувань при доведенні теореми 3.1, легко переконатися, що взаємодія будь-якої пари агентів на будь-якому кро-

ці приводить до переміщення усіх векторів  $\mathbf{p}^u(t)$  в сторону  $\mathbf{e}_k$ . Таким чином на кожному кроці стан системи буде наближатись до стаціонарного стану  $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_k\}$ .

Аналогічним чином із доведення теореми 3.1 випливає наступне твердження.

**Твердження 3.3.** *Якщо всі агенти в системі мають такий стартовий розподіл переконань, що  $p_1^v(t) = p_i^u(t)$  для будь-якої пари агентів  $u$  та  $v$  (отже, завдяки стохастичності,  $p_2^v(t) = p_j^u(t)$  також), де  $i = 1, j = 2$  або  $i = 2, j = 1$ , то траєкторія системи збігається до стану центральної нестійкої рівноважної невизначеності, коли розподіл переконань кожного з агентів має вигляд  $\mathbf{c} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .*

**3.1.3. Метод середнього поля.** Як зазначено вище, якщо розподіли переконань агентів представлені стохастичними векторами, що знаходяться по різні боки від центра і розташовані довільним чином (несиметрично), тоді неможливо точно визначити, до якого саме стану збігається система, якщо граничний по часу стан взагалі існує. Для того, щоб визначити найбільш ймовірний граничний стан системи, використовуємо апроксимацію динаміки за допомогою метода середнього поля.

Розглянемо складну систему з  $n$  агентів ( $n > 2$ ) з двома можливими переконаннями ( $k = 2$ ). Нехай зв'язки агентів системи описує повний граф  $G$  з  $n$  вершинами. Припустимо, що жодна з вершин не має розподілу переконань, що є нерухомим стійким станом, тобто коли агент поділяє одне фіксоване переконання з ймовірністю, яка дорівнює одиниці. Якщо  $n$  достатньо велике, ми можемо використовувати метод теорії середнього поля (див., наприклад, [54]) для наближення поведінки системи. Тоді еволюційне рівняння теорії динамічних системи з притягальною взаємодією, яке ми використовували у вигляді (3.2), можна переписати як

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{u,v}(t)} p_i^v(t) (1 + \bar{p}_i(t)), \quad (3.9)$$

де  $\bar{p}_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n p_i^u(t)$  – середнє значення ймовірності переконання  $i$ , визначене за розподілами цього переконання серед усіх агентів. Вектор  $\bar{\mathbf{p}}(t) = (\bar{p}_1(t), \bar{p}_2(t))$  називаємо середнім розподілом переконань системи. В ньому враховано вплив усіх агентів системи.

Далі вивчаємо динамічну систему, траєкторії якої мають вигляд (3.8) але задаються перетворенням (3.9), яке в кожен момент часу  $t$  застосовується до всіх векторів  $\mathbf{p}^u(t)$ .

Використавши результати роботи [65], можемо показати, що при  $t \rightarrow \infty$  розподіл кожної вершини графа  $G$  наближається до граничного середнього значення розподілу переконань усієї системи в сенсі  $l_1$ -норми. Такий стан системи у певному сенсі є консенсусним (усі агенти поділяють однакові переконання).

**Теорема 3.4.** *Кожна траєкторія динамічної системи, породжена відображенням за формулою (3.9) збігається до граничного нерухомого стану, який визначається по граничному значенню середнього поля.*

*А саме, якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що  $\bar{p}_1(t=0) > \bar{p}_2(t=0)$ , то траєкторія збігається до стану консенсусу  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1\}$ .*

*Якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що  $\bar{p}_1(t) < \bar{p}_2(t)$ , то траєкторія збігається до стану консенсусу  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_2\}$ .*

*Нарешті, якщо середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що  $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$ , то траєкторія залишається нерухомою.*

*Доведення.* Припустимо, що  $\bar{p}_1(t) > \bar{p}_2(t)$ . Серед стохастичних векторів, що описують початковий стан системи є вектори, що знаходяться по один бік від центра  $\mathbf{c}$  з вектором  $\bar{\mathbf{p}}(t)$ . Позначимо цю множину  $P_1$ . Усі решта векторів лежать по різні боки відносно центра з вектором  $\bar{\mathbf{p}}(t)$ , позначимо цю множину  $P_2$ .

З доведення теореми 3.1 випливає, що всі вектори з множини  $P_1$  з кожним кроком взаємодії будуть рухатись до вектора  $\mathbf{e}_2$ . Всі вектори з множини  $P_2$  будуть рухатись в сторону центра  $\mathbf{c}$ , що означає, що вони також рухаються в сторону вектора  $\mathbf{e}_2$ . Тобто всі вектори  $\mathbf{p}^u(t) = (p_1^u(t), p_2^u(t))$ , що описують стан системи, будуть змінюватись таким чином, що  $p_1^u(t+1) > p_1^u(t)$  та відповідно  $p_2^u(t+1) < p_2^u(t)$ . Отже і координати вектора  $\bar{\mathbf{p}}(t)$  будуть змінюватись відповідно:  $\bar{p}_1^u(t+1) > \bar{p}_1^u(t)$ . Отже, траєкторія буде прямувати до стану консенсусу  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1\}$  (див. рис. 3.3).

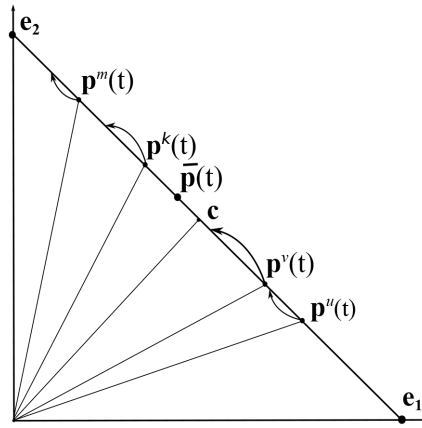


Рис. 3.3. В такому випадку середнє значення розподілу переконань початкового стану системи таке, що  $\bar{p}_1(t=0) > \bar{p}_2(t=0)$ , тому траєкторія прямує до стану консенсусу  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1\}$ .

Аналогічно доводиться прямування траєкторії до  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_2\}$  за умови  $\bar{p}_1(t) < \bar{p}_2(t)$ .

Припустимо тепер, що  $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$ , тобто через стохастичність  $\bar{p}_1(t) = \frac{1}{2}$ . Візьмемо довільний вектор  $\mathbf{p}^u(t) = (p_1^u(t), p_2^u(t))$ . Обчислимо

$$p_1^u(t+1) = \frac{1}{z} p_1^u(t) (1 + \bar{p}_1(t)) = \frac{3}{2z} p_1^u(t),$$

де

$$z = 1 + \frac{1}{2} p_1^u(t) + \frac{1}{2} p_2^u(t) = \frac{3}{2}.$$

Отже,  $p_1^u(t+1) = p_1^u(t)$ . Аналогічно  $p_2^u(t+1) = p_2^u(t)$ .

Таким чином доведено, що траєкторія не рухається за умови, що  $\bar{p}_1(t) = \bar{p}_2(t)$ .  $\square$



Використовуючи рівняння аналогічні (3.2), можна описувати динаміку систем зі станами, які збігаються до поляризованих чи кластерних розподілів переконань. Поляризація описує процес, у якому агенти розділяються на підгрупи, що не взаємодіють, а всередині кожної з таких груп досягається свій стан консенсусу. Система розділяється на кластери (кластеризується), якщо існують групи агентів з подібними розподілами переконань, причому відстань між переконаннями в різних кластерах є значно більшою, ніж всередині кластера. Тобто при кластеризації всередині кластера консенсус не обов'язково досягається, проте відстані між розподілами переконань є відносно незначними.

Отже, було розглянуто декілька варіантів моделі складних систем, що описують поширення переконань, які з часом збігаються до стану консенсусу, тобто на границі по часу (при  $t \rightarrow \infty$ ) у всіх агентів розподіли переконань стають стаціонарно рівними. При побудові моделі поведінки агентів вважалося, що їхні зв'язки представлені у вигляді повного графа. Таке обмеження забезпечило досить просту поведінку системи, коли всі агенти приходять до стану консенсусу. У випадку неповного графа динаміка зв'язків між агентами буде значно складнішою, що потребує подальшого дослідження. Але різні види графів з додатковими симетріями цілком доступні для аналізу. Перспективною для застосувань є модель, в якій ймовірність вибору пари агентів для взаємодії у кожен момент часу не однакова, а задається фіксованим правилом.

### 3.2. Проблема достовірної події в багатокomпонентних динамічних системах

Чи не вперше багатокomпонентні динамічні системи згенеровані відображенням, яке відповідає притягальній взаємодії між *a priori* незнищеними опонентами в  $n$ -вимірному просторі,  $n > 1$ , досліджувались в роботі [26]. В ній вивчалась еволюція стохастичних векторів  $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$  з простору  $\mathbb{R}_+^n$ ,  $n \geq 2$ , які характеризують стан опонентів. Там, зокрема, було показано, що для таких динамічних систем існують рівноважні стаціонарні стани (точкові атрактори) вигляду  $\mathbf{p} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{r} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , де 1 може стояти на будь-якому однаковому для  $\mathbf{p}$  та  $\mathbf{r}$  місці. Такі стани є стійкими. У численних публікаціях присвячених застосуванням, зокрема у моделях формування поглядів та моделях виборів (див., наприклад, [31, 37–39, 46, 50, 67, 68, 72, 83–85]), такого типу стани мають інтерпретацію консенсусу. Актуальною є проблема опису басейнів притягання до таких атракторів, тобто опису всіх початкових станів, які асимптотично при  $t \rightarrow \infty$ , наближаються саме до цих станів. Відзначимо, що парам векторів типу  $\mathbf{p} = (0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m})$ ,  $\mathbf{r} = (0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m})$ ,  $1 < m \leq n$  також відповідають нерухомі точки, але вони є нестійкими.

Розглянемо в метричному просторі  $X$  деяку некомутативну бінарну композицію (відображення)  $\ast$ :

$$\{x, y\} \xrightarrow{\ast} \{x', y'\}, \quad x' = x \ast y, \quad y' = y \ast x, \quad x, y \in X.$$

Далі композицію  $\ast$  називаємо взаємодією між елементами простору  $X$ . За означенням, взаємодія  $\ast$  є притягальною, якщо

$$|x' - y'| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in X \tag{3.10}$$

де  $|x - y|$  позначає відстань між елементами в просторі  $X$ . Використовуючи відображення  $\ast$  побудуємо дискретну динамічну систему з притягальною взаємодією в прямому добутку  $X \otimes X$ .

Співставимо кожній парі елементів  $\{x, y\} \equiv \{x^0, y^0\} \in X \otimes X$  траєкторію

$$\{x^t, y^t\} \xrightarrow{*} \{x^{t+1}, y^{t+1}\} \in X \otimes X, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де  $x^{t+1} := x^t * y^t$ ,  $y^{t+1} := y^t * x^t$ . Завдяки умові притягання (3.10) природньо очікувати, що в  $X$  існують границі

$$x^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t, \quad y^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y^t,$$

і вони тотожні,  $x^\infty = y^\infty$ . Інакше кажучи, пара  $\{x^\infty, y^\infty\}$  утворює нерухому стаціонарну точку динамічної системи згенерованої відображенням  $*$ :

$$x^\infty * y^\infty = x^\infty, \quad y^\infty * x^\infty = y^\infty.$$

Відзначимо, що оскільки станам динамічної системи відповідають елементи з прямого добутку  $X \otimes X$ , то взагалі нерухома точка не єдина, як у відомій теоремі Банаха. В залежності від структури простору  $X$  та властивостей відображенням  $*$  нерухомих точок може бути багато і кожна з них має свій басейн притягання.  $\omega$ -гранична множина може утворювати циклічну траєкторію.

Нехай двом опонентам  $A$  та  $B$ , які далі звуться гравцями, в момент часу  $t = 0$  співставлено незалежні дискретні випадкові розподіли на просторі  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ,  $n \geq 2$  (множина відвідуваних позицій):

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n).$$

Зрозуміло, що вектори  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  є стохастичними:

$$0 \leq p_i, r_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n r_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Далі припускаємо, що вони є різними і неортогональними, тобто в  $\mathbb{R}_+^n$  їх скалярний добуток задовольняє умову  $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$ . Координати  $p_i$ ,  $r_i$  можна інтерпретувати як незалежні ймовірності попадання  $A$ ,  $B$  в  $\omega_i$ . Іншими словами, величини  $p_i$ ,  $r_i$  характеризують випадкові події

відвідування позиції  $\omega_i$  гравцями  $A$  та  $B$  в початковий момент часу  $t = 0$ . Отже,  $p_i = \mathbf{P}(A \text{ перебуває в позиції } \omega_i)$ , де  $\mathbf{P}(\cdot)$  означає ймовірність. Аналогічно для  $r_i$ .

Припустимо, що в наступні моменти дискретного часу  $t = 1, 2, \dots$  гравці  $A$  та  $B$  вступають один з одним у взаємодію, яку позначаємо  $\ast$ . Це приводить до зміни відповідних їм розподілів:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{\ast} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{\ast} \dots \xrightarrow{\ast} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\ast} \dots$$

Покладаємо, що закон зміни координат стохастичних векторів задається ітераційно такими формулами:

$$\begin{aligned} p_i^{t+1} &= \frac{p_i^t(1 + r_i^t)}{z^t}, & r_i^{t+1} &= \frac{r_i^t(1 + p_i^t)}{z^t}, \\ t = 0, 1, \dots, & & p_i^0 &= p_i, & r_i^0 &= r_i, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де нормувальний знаменник  $z^t$  має вигляд

$$z^t = 1 + \theta^t, \quad \theta^t = (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t) = \sum_{i=1}^n p_i^t r_i^t.$$

На множині всіх стохастичних векторів фіксованої розмірності  $n > 1$ , яка є симплексом  $\Delta^{n-1}$ , введемо відстань за формулою

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i d_i, \quad d_i = |p_i - r_i|.$$

Легко перевірити, що тоді  $\Delta^{n-1}$  стає метричним простором.

З формул (3.11) випливає, що взаємодія  $\ast$  задовольняє умову (3.10), тобто є притягальною

$$D(\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}) \leq D(\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad t > 0.$$

Це дійсно так, бо для всіх  $i = 1, \dots, n$ :

$$d_i^{t+1} = \frac{d_i^t}{z^t} < d_i^t, \quad z^t = 1 + \theta^t > 1, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Тому ми говоримо, що гравці  $A$ ,  $B$  притягуються.

Динамічні системи з притягальною взаємодією можна інтерпретувати, як такі, що описують конфліктні події в наступному сенсі. Кожна з позицій  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n > 1$  з достовірним її захопленням обома опонентами є взаємовиключною для всіх інших  $n - 1$  позицій. Тому притягальна взаємодія між опонентами за формулою (3.11) насправді містить у собі конфлікт  $n$ -мірної альтернативності для позицій  $\omega_i$ .

У теорії динамічних систем конфлікту розвинутих в публікаціях [8, 9, 12, 54, 58, 60, 62, 65], координати векторів  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$  мають сенс ймовірностей перебування опонентів в одній із позицій деякого простору  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Граничну нерухому точку  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  називаємо *достовірною подією*, якщо, окрім рівності  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ , ця точка є стійкою (див. [1, 3, 15, 23, 36, 42]). Виявляється, що достовірна подія відповідає вектору з одиничною координатою в якійсь фіксованій позиції  $\omega_i$ .

Задача полягає у знаходженні умов на координати довільної початкової пари стохастичних векторів  $\mathbf{p}^{t=0}, \mathbf{r}^{t=0} \in \mathbb{R}_+^n$ , які забезпечують збіжність траєкторії динамічної системи до граничного стану, що має сенс одночасної достовірної події у фіксованій позиції  $\omega_i$  для обох опонентів. Тобто задача полягає у знаходженні необхідних та достатніх умов належності початкової точки траєкторії до басейну притягання точки достовірної події. Зрозуміло, що це питання еквівалентне задачі опису басейнів притягання до станів вигляду  $\mathbf{p}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{r}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

У цьому підрозділі досліджено наступне питання. Для яких початкових розподілів  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  обидва граничні вектори  $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$  мають єдину, наприклад  $i$ -ту, ненульову координату, тобто існує єдина позиція  $\omega_i$ , де гравці  $A, B$  зустрінуться з одиничною ймовірністю,  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ ? Відзначимо, що формула притягальної взаємодії, яка генерує динамічну систему в  $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ , має досить простий вигляд (див. (3.11)). Це дозволяє встановити цілий ряд простих достатніх ознак достовірної події, зокрема, при

додаткових умовах симетрії на вектори  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  та їх розмірність. Встановлення критерію достовірної події здається нетривіальною задачею, навіть в розмірності  $n = 3$ , принаймні для динамічних систем з дискретним часом, які тут тільки і розглядаються. Це ілюструється прикладами з комп'ютерними симуляціями.

Далі, як і вище,  $\ast$  позначає бінарне відображення векторів записане в термінах їх координат згідно з формулою (3.11). В прямому добутку симплексів  $\Delta^{n-1}$  відображення  $\ast$  породжує  $2(n-1)$ -параметричну динамічну систему:

$$\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1} \ni \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\} \in \Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}. \quad (3.13)$$

Виявляється, що кожна траєкторія цієї динамічної системи збігається до нерухомої точки  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  (див. нижче теорему 3.10). При цьому, питання, які саме координати  $p_i^\infty, r_i^\infty$  граничних векторів є ненульовими та скільки їх є досить нетривіальним. Наведемо декілька попередніх результатів у цьому напрямку досліджень.

**Твердження 3.5** ([26]). *Нехай для деякої пари  $i, k = 1, \dots, n$  відповідні координати початкової точки  $\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\}$ ,  $\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{r}$  траєкторії (3.13) задовольняють нерівності*

$$p_i \geq p_k, \quad r_i > r_k \quad \text{або} \quad p_i > p_k, \quad r_i \geq r_k. \quad (3.14)$$

*Тоді  $k$ -ті координати граничної пари є нульовими,  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ .*

*Доведення.* Просто зі (3.11) випливає, що завдяки умовам (3.14) відношення  $\frac{p_k^t}{p_i^t}$ , як і  $\frac{r_k^t}{r_i^t}$  монотонно спадають при  $t \rightarrow \infty$  і прямують до нуля. Тому  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ .  $\square$

Введемо позначення суми та добутку координат з фіксованим індексом для векторів з траєкторії (3.13):

$$\sigma_i^t := p_i^t + r_i^t, \quad \rho_i^t := p_i^t r_i^t.$$

**Твердження 3.6** ([26]). *Якщо для деякої пари  $i, k = 1, \dots, n$  початкові значення сум та добутків координат задовольняють нерівності*

$$\sigma_i \geq \sigma_k, \quad \rho_i > \rho_k \quad \text{або} \quad \sigma_i > \sigma_k, \quad \rho_i \geq \rho_k, \quad (3.15)$$

то  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ .

*Доведення.* З (3.11) випливає, що

$$\sigma_k^{t+1} = \frac{1}{z^t}(\sigma_k^t + 2\rho_k^t), \quad z^t = 1 + (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad (3.16)$$

та

$$\rho_k^{t+1} = \frac{1}{(z^t)^2}(\rho_k^t + (\rho_k^t)^2 + \rho_k^t \sigma_k^t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Використовуючи формули (3.16), (3.17), з (3.14) отримуємо

$$\sigma_i^1 > \sigma_k^1, \quad \rho_i^1 > \rho_k^1.$$

За індукцією, аналогічні нерівності справджуються для усіх  $t \geq 1$ :

$$\sigma_i^t > \sigma_k^t, \quad \rho_i^t > \rho_k^t.$$

Тому відношення  $\frac{\rho_k^t}{\rho_i^t}$ ,  $\frac{\sigma_k^t}{\sigma_i^t}$  монотонно прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Це означає, що обидві граничні координати  $p_k^\infty$  та  $r_k^\infty$  дорівнюють нулю.  $\square$

Згідно з останніми твердженнями, якщо умови

$$\sigma_{\max} = \sigma_i = p_i + r_i, \quad \rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$$

виконуються для єдиного  $i$ , то  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$  і  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$  для всіх  $k \neq i$ . Тобто ці умови є достатніми для виникнення достовірної граничної події в позиції  $\omega_i$ . Природно було б очікувати, що ці умови є і необхідними для  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ . Незважаючи на те, що таке припущення підтверджують численні комп'ютерні приклади, насправді виявляється це не так. Достовірна гранична подія в позиції  $\omega_i$  може відбутися навіть тоді, коли в (3.15) умови з сумами замінити на протилежні. Таку ситуацію ілюструють приклади на рис. 3.4. В цій ситуації можна знайти іншу достатню

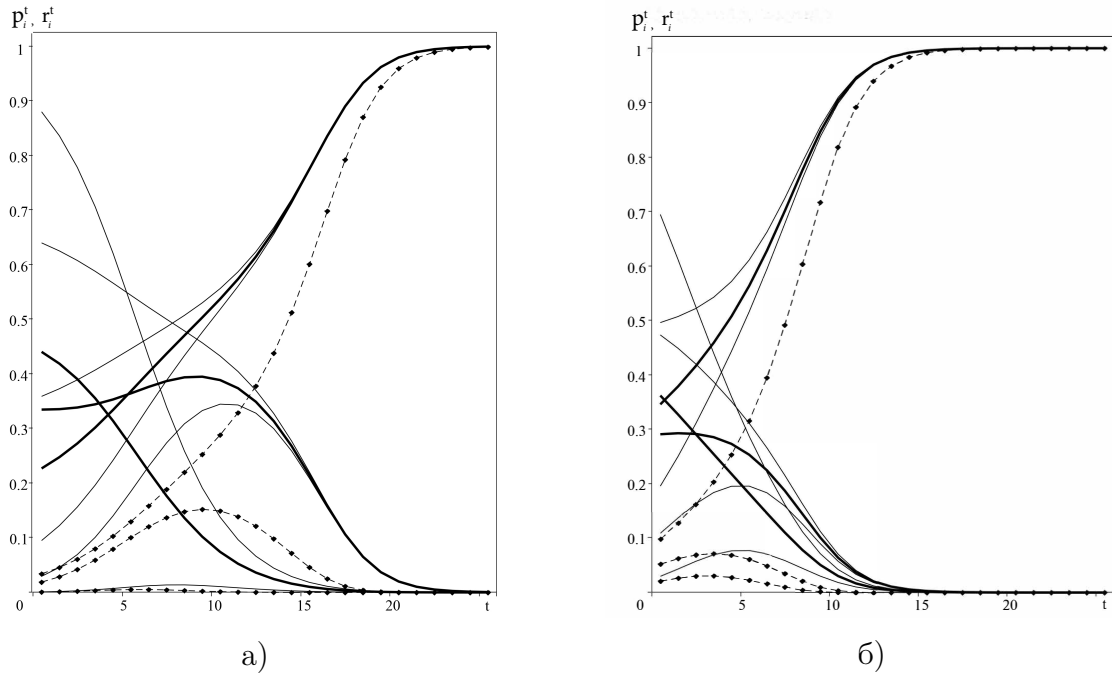


Рис. 3.4. Траєкторії окремих координат позначені тонкими лініями, жирні лінії відповідають нормованим сумах координат  $\frac{1}{2}\sigma_i^t = \frac{1}{2}(p_i^t + r_i^t)$ , лінії з точками – добуткам  $\rho_i^t = p_i^t r_i^t$ . Початкові розподіли задані векторами а)  $\mathbf{p} = (0,4737; 0,4964; 0,0299)$ ,  $\mathbf{r} = (0,109; 0,1961; 0,6949)$ ; б)  $\mathbf{p} = (0,095; 0,88; 0,025)$ ,  $\mathbf{r} = (0,359; 0,001; 0,64)$ . Обидва випадки демонструють ситуацію, коли максимальні значення ймовірності одночасного перебування гравців А, В у фіксованій позиції забезпечують граничну достовірну подію: а)  $p_2^\infty = r_2^\infty = 1$  завдяки  $\rho_2 = \rho_{\max}$ ,  $\kappa_2 = \kappa_{\max}$ ; б)  $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$  тільки завдяки  $\rho_1 = \rho_{\max}$ . В обох випадках значення сум координат не є визначальним фактором, оскільки  $\sigma_3 = \sigma_{\max}$ , але  $\sigma_3^\infty = 0$  для а) та  $\sigma_2 = \sigma_{\max}$ , але  $\sigma_2^\infty = 0$  для б).

умову (див. далі твердження 3.7 та теорему 3.11). Зокрема, рис. 3.4(а) ілюструє ситуацію, коли достовірна подія  $p_2^\infty = r_2^\infty = 1$  виникає в позиції  $\omega_2$ , в якій дві величини  $\rho_2$  та  $\kappa_2 = \sigma_2 + 2\rho_2$  максимальні.

**Твердження 3.7** ([26]). *Нехай для пари  $i, k = 1, \dots, n$  замість умов (3.15) виконуються такі нерівності:*

$$\rho_i > \rho_k, \quad \sigma_i < \sigma_k, \quad (3.18)$$

та

$$\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i \geq \sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k. \quad (3.19)$$

Тоді  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ .



*Доведення.* Якщо показати, що

$$\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1, \quad \rho_k^1 < \rho_i^1, \quad (3.20)$$

то  $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$  буде випливати з твердження 3.6. Переконаємося в справедливості (3.20). Дійсно, перша нерівність з (3.20) випливає прямо з (3.19) і (3.16). Тому потрібно довести лише нерівність  $\rho_k^1 < \rho_i^1$ . За допомогою простих маніпуляцій отримуємо

$$\rho_k^1 = \frac{1}{4z^2} (2z\sigma_k^1 + z^2\sigma_k^1 \cdot \sigma_k^1 - \sigma_k \cdot \sigma_k - 2\sigma_k),$$

де використано формулу

$$\rho_k = \frac{1}{2} (z\sigma_k^1 - \sigma_k)$$

Тепер, порівнюючи  $\rho_k^1$  з  $\rho_i^1$  і враховуючи, що  $\sigma_k \leq \sigma_i$  та  $\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1$  отримуємо  $\rho_k^1 < \rho_i^1$ .  $\square$

З наведених результатів можна було очікувати, що умова максимальності для добутку,  $\rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$  в одній фіксованій позиції є необхідною для  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ . Це також підтверджують багато комп'ютерних прикладів. Але й таке припущення спростовується контрприкладом. Так, рис. 3.5 ілюструє дві різні ситуації, коли достовірна подія відбувається в позицій, де  $\rho$  та  $\sigma$  одночасно не є максимальними. Більш за те, у ситуації рис. 3.5(а) навіть максимальність величини  $\kappa$  не є визначальною, а тому умова максимальності  $\kappa$  у фіксованій позиції не є необхідною для достовірної події у цій позиції.

Неважко переконатися, що в загальному випадку, якщо координати граничних векторів не нульові, то вони обов'язково однакові.

**Твердження 3.8** ([13]). *Для кожної пари координат з індексами  $i, k = 1, \dots, n$  можливий один з двох випадків:*

*а) одна з пар координат  $p_i^t, r_i^t$  або  $p_k^t, r_k^t$  прямує до нуля:*

$$p_i^\infty = r_i^\infty = 0 \quad \text{або} \quad p_k^\infty = r_k^\infty = 0, \quad (3.21)$$

б) усі координати  $p_i^t, r_i^t$  та  $p_k^t, r_k^t$  збігаються до однакової границі (нульової чи додатньої),

$$p_i^\infty = r_i^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty \geq 0. \quad (3.22)$$

*Доведення.* Оскільки відомо, що завжди різниці  $d_i^t, d_k^t$  прямують до нуля (див. (3.12)), то можливі лише два випадки. Існує таке  $T$ , що (3.14) виконується для всіх  $t > T$ . Тоді, з твердження 3.5 отримуємо (3.21). В іншому випадку, перетин  $d_i^t \cap d_k^t$  завжди є не порожньою множиною. Звідси очевидно випливає, що виконується умова (3.22).  $\square$

Таким чином, для кожної пари векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$ ,  $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$ , існує розклад множини  $\Omega$  на дві підмножини

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

де

$$\Omega_0 := \{\omega_k : p_k^\infty = r_k^\infty = 0\}, \quad \Omega_+ := \{\omega_i : p_i^\infty = r_i^\infty > 0\}. \quad (3.23)$$

Тепер з твердження 3.8 отримуємо наслідок, який формулюємо у вигляді наступної теореми.

**Теорема 3.9** ([13, 30]). *Для довільної пари початкових не ортогональних стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r}$  граничний стан динамічної системи (3.13) в термінах координат  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  має такий опис:*

$$p_k^\infty = r_k^\infty = 0, \quad \omega_k \in \Omega_0, \quad p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{|\Omega_+|} > 0, \quad \omega_i \in \Omega_+, \quad (3.24)$$

де  $|\Omega_+|$  – потужність множини  $\Omega_+$ .

**Теорема 3.10** ([13]). *Кожна траєкторія динамічної системи (3.13) збігається до нерухомої точки  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ :*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t, \quad \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty = \mathbf{p}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty.$$

При цьому для довільної пари початкових стохастичних векторів  $\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0 \in \Delta^{n-1}$ ,  $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{r}^0$ , граничні вектори є однаковими,  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ . Відповідна  $\omega$ -гранична множина  $\Gamma_n$  динамічної системи (3.13) складається з  $2^n - 1$  точок,

$$\Gamma_n = \bigcup_{m=1}^n \Gamma_{\binom{n}{m}}, \quad (3.25)$$

де  $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in \Gamma_{\binom{n}{m}}$ , якщо виконується умова:

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{m}, \quad p_i = \left\{ 0, \frac{1}{m} \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (3.26)$$

де  $\|\cdot\|$  позначає норму в  $\mathbb{R}_+^n$ .  $\omega$ -гранична множина  $\Gamma_n$  не містить періодичних орбіт. Підмножини  $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$  утворюють стійкі нерухомі точки. Усі підмножини  $\Gamma_{\binom{n}{m}}$ ,  $2 \leq m \leq n$  складаються лише з нестійких нерухомих точок.

*Доведення.* Існування граничних нерухомих станів вигляду  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  випливає прямо з (3.11) завдяки (3.12) (докладніше див. [26]). Зокрема, умова (3.26) еквівалентна інваріантності граничних координат відносно відображення, заданого формулами (3.11). Зокрема, для відмінних від нуля граничних координат виконується рівність:

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \theta^\infty = \|\mathbf{p}^\infty\|^2.$$

Асимптотична стійкість станів з множини  $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$  випливає з твердження 3.5. Дійсно, зафіксуємо  $k = 1, \dots, n$  і розглянемо стан з цієї множини, утворений вектором  $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}_+^n$  з координатами заданими символом Кронекера,  $e_{ki} = \delta_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тоді з твердження 3.5 випливає, що всі траєкторії (3.13), які стартують із станів  $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$ , координати векторів яких задовольняють нерівностям  $|p_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$ ,  $|r_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$ , з необхідністю збігаються до точки  $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$ . Зрозуміло, що множина всіх таких початкових станів утворює деякий окіл точки  $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$  в просторі  $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$ .

Легко зрозуміти, що в будь-якому околі граничної точки з підмножини  $\Gamma_{\binom{n}{m>1}}$  існують стани утворені векторами, деякі з координат яких

задовольняють нерівності протилежні до (3.14). Тоді траєкторії з такими початковими станами будуть збігатися до іншої граничної точки. Це доводить нестійкість нерухомих точок з  $\Gamma_{(m>1)}^n$ .

Відсутність періодичних орбіт в  $\omega$ -граничній множині  $\Gamma_n$  є наслідком того, що  $\Gamma_n$  складається лише з одноточкових нерухомих станів.  $\square$

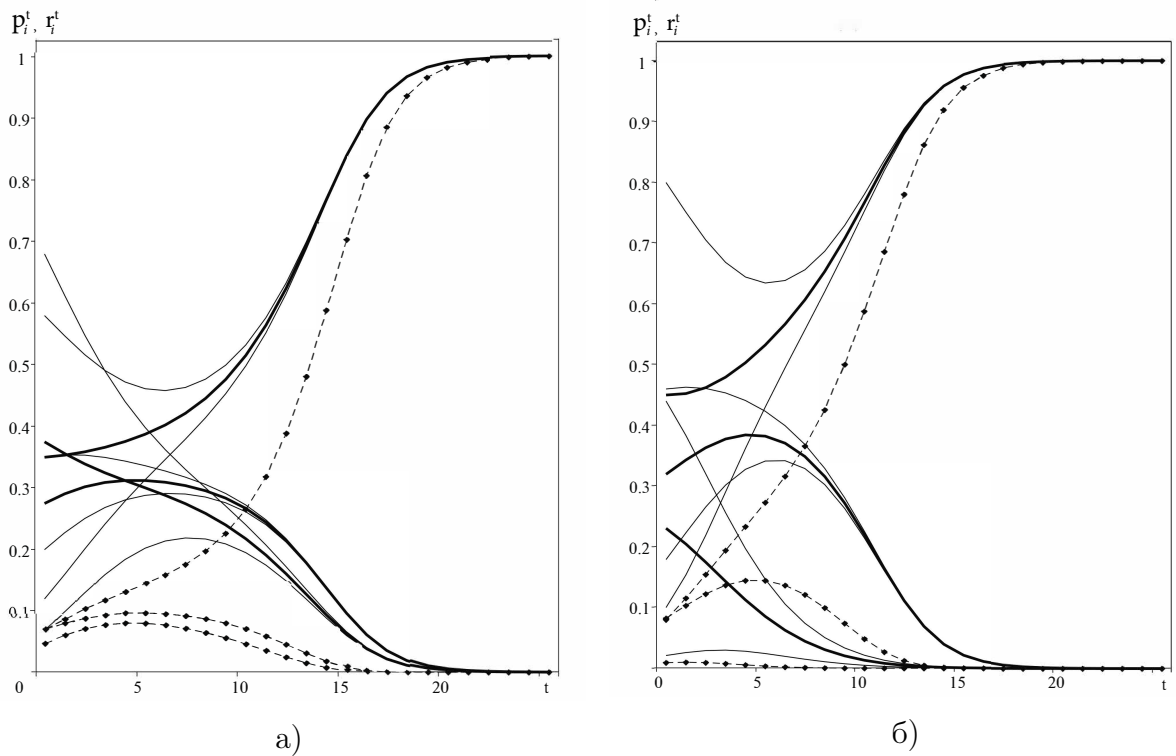


Рис. 3.5. а)  $\mathbf{p} = (0,68; 0,2; 0,12)$ ,  $\mathbf{r} = (0,07; 0,35; 0,58)$ . Незважаючи на те, що жодне з максимальних значень  $\rho_{\max} = \rho_2$ ,  $\sigma_{\max} = \sigma_1$  і навіть  $\kappa_{\max} = \kappa_1$  не належить позиції  $\omega_3$ , достовірною подією,  $p_3^\infty = r_3^\infty = 1$ , відбувається саме в позиції  $\omega_3$ . б)  $\mathbf{p} = (0,021; 0,179; 0,8)$ ,  $\mathbf{r} = (0,44; 0,46; 0,1)$ . Достовірною подією,  $p_3^\infty = r_3^\infty = 1$ , у позиції  $\omega_3$ , забезпечує наявність у цій позиції двох максимальних значень,  $\sigma_3 = \sigma_{\max}$ ,  $\kappa_3 = \kappa_{\max}$ , хоча добуток координат для цієї позиції не є максимальним,  $\rho_{\max} = \rho_2$ .

Зауважимо, що прямо з доведення теореми 3.10 випливає відсутність нейтрально стійких нерухомих точок. Відзначимо також, що множина  $\Gamma_{(m=n)}^n$  містить лише одну нерухому точку, яка утворена з пари однакових векторів з координатами  $p_i = r_i = \frac{1}{n}$  для всіх  $i = 1, \dots, n$ . З твердження 3.5 випливає, що ця точка є не стійкою, з її довільного околу траєкторіями (3.13) можна наблизитися до будь-якої точки з множини  $\Gamma_n$ .

Підкреслимо також, що з доведених вище теорем випливає відсутність різних ненульових граничних координат у фіксованого граничного стану. Тому одне з важливих питань полягає в тому, як в термінах початкової пари векторів  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  здійснити розклад множини позицій  $\Omega$  на підмножину  $\Omega_0$ , в якій усі граничні координати є нульовими, та  $\Omega_+$ , де усі граничні координати є строго додатними і однаковими? А основне питання зводиться до знаходження критерію виконання рівності  $|\Omega_+| = 1$ . Тобто, знаходження необхідних і достатніх умов на пару початкових векторів, коли на границі по часу виникає лише одна ненульова координата,  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ ? Наведені вище результати є лише допоміжними для дослідження поставленої задачі. Опишемо найскладнішу ситуацію.

Нехай для деякої пари векторів  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$  виконується протилежні нерівності для сум та добутків:  $\sigma_k > \sigma_i$ , але  $\rho_k < \rho_i$ . Тоді з твердження 3.7 випливає, що  $\omega_k \in \Omega_0$ , якщо  $\sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k \leq \kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$  (див. нерівність (3.19)). Але ця нерівність є тільки достатньою умовою для  $\omega_k \in \Omega_0$ . Тому, якщо припустити, що  $\kappa_k > \kappa_i$ , тоді  $\sigma_k^1 > \sigma_i^1$ , оскільки з (3.16) випливає, що  $\sigma_k^1 = \kappa_k$ ,  $\sigma_i^1 = \kappa_i$ . І якщо при цьому  $\rho_k^1 < \rho_i^1$ , то ми не можемо визначити, до яких з множин  $\Omega_0$  чи  $\Omega_+$  належать позиції  $\omega_k$ ,  $\omega_i$ . Звичайно, якщо  $\rho_k^1 \geq \rho_i^1$ , то все ясно. Але якщо зазначена вище невизначеність повторюється лише скінченну кількість разів і на якомусь кроці  $t_0$  з'являються обидві нерівності  $\sigma_k^{t_0} > \sigma_i^{t_0}$ ,  $\rho_k^{t_0} > \rho_i^{t_0}$  (або протилежні до них), тоді можна зробити висновок, що  $\omega_i \in \Omega_0$  (або  $\omega_k \in \Omega_0$ ). Складність полягає в тому, що в загальному випадку не ясно, чи існує таке  $t_0$ , а якщо існує, то за яких умов?

Далі розглянуто ряд ситуацій, коли проблема достовірної події розв'язується в сторону достатності. Так, прямо з тверджень 3.5 та 3.6 випливає справедливість такої теореми.

**Теорема 3.11.** *Якщо в початковий момент часу у просторі  $\Omega$  існує єдина позиція  $\omega_{i_0}$ , для якої*

$$p_{i_0}^{t=0} \equiv p_{i_0} = p_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \{p_i\}, \quad r_{i_0}^{t=0} \equiv r_{i_0} = r_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \{r_i\},$$

або

$$\sigma_{i_0}^{t=0} \equiv \sigma_{i_0} = \sigma_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \{\sigma_i\}, \quad \rho_{i_0}^{t=0} \equiv \rho_{i_0} = \rho_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \{\rho_i\},$$

то саме в  $\omega_{i_0}$  граничні координати  $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$ , а усі інші дорівнюють нулю,  $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$ ,  $i \neq i_0$ .

Відзначимо, що твердження 3.7 не гарантує достовірної події в позиції  $\omega_{i_0}$  навіть, якщо це єдина позиція, в якій

$$\kappa_{i_0} = \kappa_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \{\kappa_i\}, \quad (\kappa_i := \sigma_i + 2\rho_i),$$

бо при цьому координата  $p_{i_0}$  може бути досить малою і це приводить до  $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 0$ . Таку ситуацію ілюструє рис. 3.5(а).

Розглянемо декілька випадків з умовами симетрії на початкові розподіли. Нехай для деякого  $i_0$

$$p_{i_0} = r_{i_0} = p, \quad \sigma_j = \sigma_k, \quad j, k \neq i_0. \quad (3.27)$$

**Твердження 3.12.** *Якщо виконується умова (3.27) і  $p > \frac{1}{n}$ , то  $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$ .*

*Доведення.* Зараз усі  $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$ ,  $k \neq i_0$ . Тому  $\sigma_{i_0} > \frac{2}{n} > \sigma_k$ . А також  $\rho_{i_0} = \frac{1}{n^2} > \rho_k$ ,  $\forall k \neq i_0$ . Тепер справедливість твердження впливає з теореми 3.11.  $\square$

Розглянемо випадок з умовою (3.27), при  $p < \frac{1}{n}$ . Тепер  $\sigma_{i_0} < \sigma_k$ ,  $\forall k \neq i_0$ . Чи може при цьому виникнути достовірна подія в позиції  $\omega_{i_0}$ , тобто  $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$ ? Виявляється так, але якщо усі  $\rho_k$  є достатньо малими, щоб виконувалася умова (3.19) при  $i = i_0$  з твердження 3.7. Звичайно, цю умову неможливо задовольнити при будь-якому  $p < \frac{1}{n}$ . Існує

мінімальний поріг  $\lambda$  для  $p$ , який визначається рівнянням  $\kappa_{i_0} = \sigma_k$ . Це рівняння, враховуючи, що  $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$  і покладаючи  $p_{i_0} = p = \lambda$ , має вигляд  $2\lambda + \lambda^2 = \frac{2(1-\lambda)}{n-1}$ . Отже, мінімальний поріг для  $p_{i_0} = p$ , коли можна скористатися умовою (3.19) є

$$\lambda = \frac{(n^2 + 4n - 4)^{\frac{1}{2}} - n}{2(n - 1)}.$$

Якщо  $p < \lambda$ , то при довільному  $\rho_k > 0$  умова (3.19) не справджується. Таким чином справедливим є наступне твердження.

**Твердження 3.13.** *Нехай виконуються умови (3.27) і  $\lambda < p < \frac{1}{n}$ . Тоді існують достатньо малі  $\rho_k$ , такі, що  $\kappa_{i_0} \geq \kappa_k$  для всіх  $k \neq i_0$ , а отже  $p_{i_0}^\infty = 1$ .*

З наведених тверджень випливає, що для розмірності  $n = 3$ , тобто для  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ , і при умовах (3.27), коли

$$\begin{aligned} p_1 = r_1 = p, & & p_2 = r_3 = \frac{1-p}{2} + \varepsilon, \\ p_3 = r_2 = \frac{1-p}{2} - \varepsilon, & & \varepsilon = \frac{1-p}{2} > 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

у позиції  $\omega_1$  відбувається достовірне подія,  $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$  у таких випадках:

- 1)  $p \geq \frac{1}{3}$ ,  $p_2 = r_3 \neq \frac{1}{3}$ ,
- 2)  $p > 0$ ,  $p_2 = r_3 = 0$ ,
- 3)  $\lambda < p < \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$ , але  $\kappa_1 > \kappa_2$ .

Далі наведено більш тонкі достатні умови достовірної події. Почнемо з розмірності  $n = 3$ , коли  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ .

Нехай  $0 < p < \frac{1}{3}$  та  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Тоді очевидно  $\sigma_1 < \sigma_2$ . З попередніх результатів відомо, що забезпечити на границі по часу рівність

$p_1^\infty = r_1^\infty = 1$  можливо лише тоді, коли  $\rho_2 = \rho_3$  є досить малим. Запишемо  $\rho_2$  у формі

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_3 = p_2 r_2 = p_3 r_3 &= \left( \frac{1-p}{2} + \varepsilon \right) \left( \frac{1-p}{2} - \varepsilon \right) = \\ &= \left( \frac{1-p}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 = \frac{1}{4}(1 - 2p + p^2 - 4\varepsilon^2), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1-p}{2}. \end{aligned}$$

Звичайно, якщо  $\varepsilon$  є максимально великим,  $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$ , тоді  $r_2 = p_3 = 0$  і для довільного початкового  $p$ , одержуємо  $p_2^t = r_3^t \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , а  $p_1^\infty = 1$ . Але це крайній випадок. Навпаки, для нульового, або досить малого  $\varepsilon$  обидві координати  $p_2, p_3$  близькі до  $\frac{1}{3}$ . Тоді для  $p < \frac{1}{3}$  добуток  $\rho_2$  перевищує  $\rho_1$  та за твердженням 3.6,  $p_1^\infty = 0$ , а  $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$ . Легко встановити, що таке відбувається завжди, коли  $\varepsilon$  задовольняє умову (3.29) з наступного твердження.

**Твердження 3.14.** *Нехай координати векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$  задовольняють умови (3.28). Припустимо*

$$p < \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \varepsilon^2 \leq f(p), \quad f(p) := \frac{1}{4} - p - \frac{3}{4}p^2. \quad (3.29)$$

Тоді  $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$  і  $p_1^\infty = r_1^\infty = 0$ .

*Доведення.* З умов (3.29) легко одержуємо:  $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\rho_1 \leq \rho_2 = \rho_3$ . Тепер користуємося твердженням 3.6 і теоремою 3.9.  $\square$

Таким чином, для забезпечення достовірної події у  $\omega_1$  з початковою координатою  $p_1 = p < \frac{1}{3}$  потрібно обмежити  $\varepsilon$  знизу.

**Теорема 3.15.** *Нехай координати векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$  мають запис у вигляді (3.28). Припустимо додатково, що  $\lambda \leq p \leq \frac{1}{3}$ , де  $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$ , а  $\varepsilon \leq \frac{1-p}{2}$  задовольняє оцінку знизу:*

$$T(p) \leq \varepsilon^2, \quad T(p) = \frac{3}{4} - 2p - \frac{3}{4}p^2. \quad (3.30)$$

Тоді  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ .



*Доведення.* Покажемо, що вже на першому кроці  $p_1^{t=1} = \frac{p(1+p)}{z} \geq \frac{1}{3}$ . Дійсно, оскільки  $z = 1 + p^2 + 2\rho_2$ , то остання нерівність має такий еквівалентний запис

$$3p(1+p) \geq 1 + p^2 + 2\rho_2,$$

де  $\rho_2 = \rho_3 = p_2 p_3 = \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - \varepsilon^2$ . Це означає, що нерівності  $p_1^{t=1} \geq \frac{1}{3}$  та

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4}(3 - 8p - 3p^2) = T(p)$$

еквівалентні. Легко помітити, що функція  $T(p)$  спадає на відрізку  $[0, \frac{1}{3}]$  від  $\frac{3}{4}$  до 0, причому  $T(p) > \frac{(1-p)^2}{4}$  на  $[0, \lambda)$ . Це означає, що умова (3.30) може виконуватися тільки тоді, коли  $\lambda \leq p$ . Тепер з  $p_1^1 = r_1^1 \geq \frac{1}{3}$  випливає, що  $\sigma_1^1 \geq \sigma_2^1$ . Очевидно також, що  $\rho_1^1 > \rho_2^1$ , оскільки  $\varepsilon^1 = \frac{1}{2}(p_2^1 - p_3^1) > 0$ . Отже, теорема справедлива завдяки твердженню 3.6.  $\square$

Твердження теореми 3.15 проілюстровано на рис. 3.6.

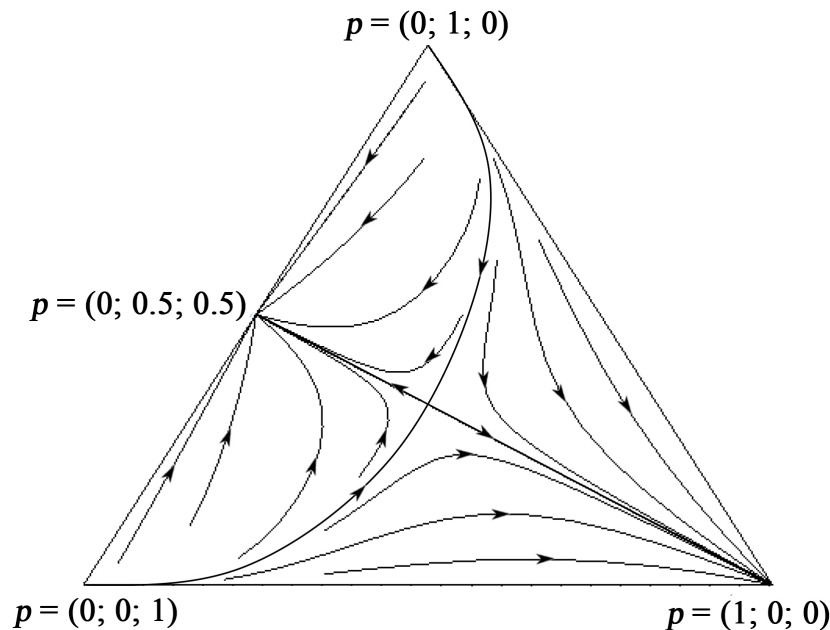


Рис. 3.6. Фазовий портрет траєкторій у симетричному випадку,  $p_1 = r_1 = p$ ,  $p_2 = r_3$ ,  $p_3 = r_2$ , тобто  $\mathbf{p} = (p, a, b)$ ,  $\mathbf{r} = (p, b, a)$ . Симплекс  $\Delta^2$  поділяється на два басейни притягання до стійких точкових атракторів:  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ . Точка  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$  є сідлом. Нерухомі точки  $(0; 0; 1)$ ,  $(0; 1; 0)$  є репелерами.

Результат теореми 3.15 легко узагальнити на вищу розмірність.

Нехай  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$ ,  $n > 2$  є непарним. Припустимо, для деякого  $i$

$$p_i = r_i = p, \quad \sigma_l = \sigma_k, \quad \rho_l = \rho_k, \quad \forall l, k \neq i.$$

Тоді  $\sigma_i = 2p$ ,  $\rho_i = p^2$ ,  $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$ . Позначимо  $\varepsilon := \frac{|p_k - r_k|}{2}$ . В такому випадку, окрім  $p_i = r_i = p$ , маємо  $\frac{n-1}{2}$  рівних координат  $p_k = r_l = \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon$  та  $\frac{n-1}{2}$  рівних координат  $p_l = r_k = \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon$ . При цьому усі

$$\rho_k = \rho_l = \left( \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon \right) \cdot \left( \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon \right) = \left( \frac{1-p}{n-1} \right)^2 - \varepsilon^2.$$

Введемо позначення:

$$f_n(p) := \frac{p(p-1)}{2} + \left( \frac{1-p}{n-1} \right)^2,$$

$$T_n(p) := \frac{1-np + p^2(1-n)}{2} + \left( \frac{1-p}{n-1} \right)^2.$$

Очевидно,  $f_n(p) < T_n(p)$  для  $p < \frac{1}{n}$ .

**Теорема 3.16.** *Нехай координати векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$  задовольняють умови: для фіксованого  $i$*

$$p_i = r_i = p, \quad \lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}, \quad \lambda_n = \frac{(n^2 + 4n - 4)^{1/2} - n}{2(n-1)},$$

а для всіх  $l, k \neq i$ ,

$$p_k = r_l = \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon, \quad p_l = r_k = \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1-p}{n-1}.$$

Тоді

1) якщо  $\varepsilon^2 < f_n(p)$ , то  $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$ , а  $p_l^\infty = r_l^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty = \frac{1}{n-1}$ ,

2) якщо

$$T_n(p) \leq \varepsilon^2, \tag{3.31}$$

то  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ .

*Доведення.* 1) Нехай  $\varepsilon^2 < f_n(p)$ . Тоді

$$\begin{aligned} p_i^1 - p_i &= \frac{p(1+p)}{z} - p = -\frac{2p}{z} \left( \frac{p(1-p)}{2} + \left( \frac{1-p}{n-1} \right)^2 - \varepsilon^2 \right) = \\ &= -\frac{2p}{z} (f_n(p) - \varepsilon^2) < 0, \end{aligned}$$

тобто  $p^1 < p$ , причому, очевидно, значення функції  $f_n(\cdot)$  зростає,  $f_n(p^1) > f_n(p)$ . З першої нерівності випливає, що всі  $\rho_k^1$ ,  $k \neq i$  також зростають. Тому  $(\varepsilon^1)^2 < \varepsilon^2$ , де, нагадаємо,  $\varepsilon^1 = \frac{|p_k^1 - r_k^1|}{2}$  не залежить від  $k$ . Отже, на першому кроці нерівність  $(\varepsilon^1)^2 < f_n(p^1)$  посилюється. За індукцією маємо

$$(\varepsilon^t)^2 < \dots < \varepsilon^2 < f_n(p) < \dots < f_n(p^t), \quad t \geq 1.$$

Отже, для всіх  $t \geq 0$  виконується нерівність

$$(\varepsilon^t)^2 < f_n(p^t).$$

Це означає, що послідовність  $\{p^t\}_{t=0}^\infty$  монотонно спадає і тому  $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$ , а  $p_i^\infty = r_i^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty = \frac{1}{n-1}$ .

2) Відзначимо, що аналогічно до (3.30), нерівність (3.31) може виконуватися лише тоді, коли  $\lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}$ . Безпосередньо переконаємося, що ця нерівність рівносильна тому, що  $p_i^1 = \frac{p(1+p)}{1+p^2+2\rho_k} \geq \frac{1}{n}$ . Це означає, що  $\rho_i^1 > \rho_k^1$  і  $\sigma_i^1 > \sigma_k^1$  для всіх  $k \neq i$ . Тепер за допомогою твердження 3.6 отримуємо  $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ .  $\square$

Результати цього підрозділу опубліковано в роботі [13]. Вище одержано ряд достатніх ознак існування достовірної події, чи встановлення консенсусу при  $t \rightarrow \infty$ . Найпростіші з них зводяться до наявності в одній фіксованій позиції  $\omega_i$  максимальних значень координат  $p_i$ ,  $r_i$ , добутків цих координат  $\rho_i = p_i r_i$ , їхніх сум  $\sigma_i = p_i + r_i$ , або деяких комбінацій з  $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$ . Проте численні комп'ютерні симуляції показують, що ці ознаки є далекими від необхідних. Зокрема, якщо згадані максимальні значення не зосереджені у фіксованій позиції, тобто досягаються для різних  $i \neq k$ , то достовірна подія може існувати, але її місце (позиція  $\omega_{i_0}$ ,

де вона відбувається) передбачити досить складно. Питання про знаходження явного вигляду функціоналу  $F_i(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ , максимальне значення якого для єдиного фіксованого  $i_0$  є критерієм виникнення достовірної події у  $\omega_{i_0}$  є відкритим не тільки у ситуації довільних стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ , а навіть у розмірності  $n = 3$  з умовами симетрії типу (3.27).

Варто підкреслити, що проблему достовірної події можна сформулювати і як динамічну задачу встановлення консенсусу між парою гравців  $A$  та  $B$  у прийнятті рішення щодо різних можливих варіантів поведінки відносно позицій  $\omega_i, 1, \dots, n$ . У початковий момент часу кожен гравець  $A$  ( $B$ ) схильний до варіанту  $\omega_i$  лише з деякою ймовірністю  $\mathbf{P}^A(\omega_i) = p_i, (\mathbf{P}^B(\omega_i) = r_i)$ , відповідно. З часом,  $t = 1, 2, \dots$ , погляди індивідів зближаються завдяки притягальній взаємодії за формулою (3.11). Треба знайти критерій консенсусу,  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} r_i^t$ , щодо якогось фіксованого варіанту поведінки  $\omega_i$  в термінах початкових значень  $p_i = p_i^0, r_i = r_i^0, i = 1, \dots, n$ . У різних постановках такого типу задача досліджувалася в багатьох роботах (див., наприклад, [31, 33, 40, 41, 44, 53, 55, 72, 77]), зокрема, її можна навіть інтерпретувати, як ефект синхронізації в моделях фазових осциляторів [30, 34, 35]. Фактично у цих роботах також вивчається питання про існування консенсусу та опис достатніх умов його досягнення (басейнів притягання до відповідних нерухомих точок).

### 3.3. Виникнення точкового спектру у граничних розподілах динамічних систем конфлікту

Спектральні властивості граничних станів для динамічних систем конфлікту в термінах абстрактних випадкових розподілів (ймовірнісних мір) на просторі з фрактальним подрібненням вивчали С. Альбоверіо, В.Д. Кошманенко, М.В. Працьовитий і Г.М. Торбін в декількох роботах [25, 27, 29] (див. також [59, 61, 62]). Зазвичай, ці розподіли є чисто сингулярно неперервними й мають фрактальну структуру, хоча точкові розподіли також можуть виникати, проте лише за екстремальних умов дуже швидкої локальної концентрації послідовності апроксимаційних мір. Це було доведено в роботі [4]. В ній встановлено критерій виникнення точкового спектру для динамічних систем конфлікту з відштовхувальною взаємодією у випадку  $\Omega = [0; 1]$ . Нижче цей результат узагальнено на випадок, коли  $\Omega$  є компактом з метричного простору  $\mathbb{R}^d$ , а динамічні системи конфлікту можуть бути як із взаємодією притягання так і відштовхування. Результати цього підрозділу було опубліковано в роботі [66]. Тут описано явище виникнення точкового спектра в граничних розподілах динамічних систем конфлікту з притяганням на просторах з фрактальним подрібненням.

Наведемо коротко основні поняття теорії динамічних систем конфлікту в термінах абстрактних ймовірнісних мір. Детальніше ці поняття викладені в роботах [4, 11, 12, 63, 65]

Нехай  $\Omega$  – компакт із метричного простору  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Борелівську  $\sigma$ -алгебру й міру Лебега позначимо через  $\mathcal{B}$  й  $\lambda$ , відповідно. Компакт  $\Omega$  розглядається як простір існування (простір життєвих ресурсів) для пари альтернативних сторін  $A$  та  $B$ , яких називаємо опонентами. Початковий розподіл опонентів  $A$  та  $B$  на  $\Omega$  визначається ймовірнісними мірами  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ . Вважаємо, що перетин їхніх носіїв є непорожнім:

$$\text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(\nu) \neq \emptyset,$$

саме це становить причину для конфлікту між  $A$  та  $B$ . Поставимо у відповідність конфліктній взаємодії між опонентами  $A$  та  $B$  деяке некомутативне бінарне відображення  $\ast$  у класі ймовірнісних мір  $\mathcal{M}(\Omega)$ :

$$\mu \ast \nu = \mu^1, \quad \nu \ast \mu = \nu^1.$$

Перетворення  $\ast$  з фіксованими початковими мірами  $\mu^0 = \mu$ ,  $\nu^0 = \nu$  генерує траєкторію з дискретним часом:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\} \xrightarrow{\ast} \left\{ \begin{array}{c} \mu^{t+1} \\ \nu^{t+1} \end{array} \right\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (3.32)$$

Усі такі траєкторії з законом ітерації  $\ast$ , явний вигляд якого задано пізніше, генерують динамічну систему, яка описує конфліктний перерозподіл простору  $\Omega$  між опонентами  $A$  та  $B$ .

Введену таким чином динамічну систему називаємо *динамічною системою конфлікту* та позначаємо  $\{X, \ast\}$ , де  $X = \mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{M}(\Omega)$ . Відображення  $\ast$  задає в дискретному часі  $t = 1, 2, \dots$  ітерацію конфліктної взаємодії між опонентами (детальніше див. [7, 9, 59, 65]).

Не втрачаючи загальності можемо вважати, що  $\Omega = [0, 1]$  або  $\Omega = [0, 1]^d$ ,  $d \geq 1$ .  $\mathcal{M}(\Omega)$  позначає деякий клас ймовірнісних мір на  $\Omega$ , у термінах яких можна адекватно описувати властивість пріоритетності опонентів одного над іншим на борелевських підмножинах.

Типовими питаннями для дослідження є поведінка траєкторій  $\mu^t$ ,  $\nu^t$ ,  $t = 0, 1, \dots$  та існування граничних мір  $\mu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t$ ,  $\nu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t$ .

Далі досліджується питання, за яких умов граничні міри  $\mu_\infty$ ,  $\nu_\infty$  є чисто точковими,

$$\mu_\infty, \nu_\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}(\Omega),$$

де pp – pure point, у випадку притягальної взаємодії?

В якості  $\mathcal{M}(\Omega)$  виберемо клас кусково рівномірно розподілених мір,  $\mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$ , де rud – piecewise uniformly distributed, або клас структурно-подібних мір,  $\mathcal{M}^{\text{ss}}(\Omega)$ , де ss – structural similarity (докладніше див. [12]).

Опишемо явно процедуру ітераційної побудови мір  $\mu^{t=k}$ ,  $\nu^{t=k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , яка об'єднує еволюцію в дискретному часі з фрактальним подрібненням простору.

Перудусім опишемо конструкцію фіксованої процедури фрактального подрібнення (регіоналізації) простору  $\Omega$ . Вона полягає у послідовному ітеративному розбитті (фрактальному подрібненні)  $\Omega$ . Це означає, що  $\Omega$  допускає послідовний розклад на подібні регіони все меншої лебегової міри:

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_{i_1=1}^n \Omega_{i_1}, \quad 2 \leq n < \infty, \\ \Omega_{i_1} &= \bigcup_{i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, \quad \Omega = \bigcup_{i_1, i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, \dots \\ \Omega_{i_1 \dots i_{k-1}} &= \bigcup_{i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad \Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \dots\end{aligned}$$

з умовою:  $|\Omega_{i_1 \dots i_k}| = \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}) \longrightarrow 0, k \rightarrow \infty$ .

Більш точно і загально ця процедура описується в термінах так званих ітераційних функціональних систем (IFS) (див. [32, 52, 82]). Нагадаємо, що сімейство стискаючих перетворень  $K = \{K_i\}_{i=1}^n, 2 \leq n < \infty$  в  $\mathbb{R}^d$  називають *ітераційною функціональною системою (IFS)* на  $\Omega$ , якщо виконуються умови:

$$\forall i, \quad \Omega_i \subset \Omega, \quad \text{де} \quad \Omega_i := K_i \Omega,$$

$$\text{int}(\Omega_i) \cap \text{int}(\Omega_j) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

та

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 0 < |\Omega_i| = q_i < 1, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1. \quad (3.33)$$

Кожна IFS з умовою (3.33) визначає фрактальне подрібнення  $\Omega$ :

$$\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad \Omega_{i_1 \dots i_k} := K_{i_1} \circ \dots \circ K_{i_k} \Omega.$$

Якщо на  $\Omega$  задано деяку IFS та певним чином визначену за допомогою перетворення  $\ast$  послідовність стохастичних векторів

$$P = \{\mathbf{p}^k\}_{k=1}^\infty, \quad \mathbf{p}^k \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{p}^k = (p_{i_k}^k)_{i_k=1}^n, \quad \sum_i p_{i_k}^k = 1,$$

то з ними можна асоціювати послідовність кусково рівномірно розподілених мір  $\mu^k \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$  на  $\Omega$ :

$$\mu^k(\Omega_{i_1 i_2 \dots i_k}) = p_{i_1}^1 p_{i_2}^2 \cdots p_{i_k}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Згідно з роботами [52] та [82] (див. також [16, 22, 61]) послідовність  $\mu^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  слабо збігається до ймовірнісної міри

$$\mu^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k.$$

Міра  $\mu^\infty$  є самоподібною, якщо всі вектори  $\mathbf{p}^k$  є однаковими. В загальному випадку  $\mu^\infty \in \mathcal{M}^{\text{ss}}(\Omega)$ , тобто є структуроподібною і тоді відношення

$$\frac{\mu^\infty(\Omega_{i_1 \dots i_k})}{\mu^\infty(\Omega_{i_1 \dots i_{k-1}})} = p_{i_k}^k$$

залежить тільки від останнього індексу  $i_k$ . Лише в цьому випадку гранична міра може бути дискретною. Взагалі, існує взаємооднозначна відповідність між послідовностями  $P$  та класом структуроподібних мір  $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}(\Omega)$  при фіксованому IFS на  $\Omega$  (детальніше див. [12, 61]).

У подальшому припускаємо, що ітераційна функціональна система  $K$  та початкові міри  $\mu, \nu$  є *узгодженими*. Це означає, на прикладі міри  $\mu$ , що існує звуження системи стисків  $K$  на борелівську підмножину  $\Omega^\sharp \subseteq \Omega$  (не обов'язково замкнену), таке, що  $\mu(\Omega^\sharp) = \mu(\Omega)$  і всі властивості фрактального подрібнення виконуються в термінах  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^\sharp = \Omega_{i_1 \dots i_k} \cap \Omega^\sharp$ , причому

$$\mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}^\sharp \cap \Omega_{j_1 \dots j_k}^\sharp) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

якщо  $i_l \neq j_l$  хоча б для одного  $1 \leq l \leq k$ . Отже, далі припускаємо, що  $K$  та початкові міри  $\mu, \nu$  є узгодженими та можна замінити  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  на  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^\sharp$  не змінюючи позначень.



Використовуючи фрактальне подрібнення простору  $\Omega$  та пару ймовірнісних мір  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , які асоційовані з розподілами опонентів  $A$  та  $B$  в початковий момент часу, побудуємо дві послідовності мір  $\mu_k, \nu_k, k = 1, 2, \dots$  наступним чином.

На першому кроці апроксимації,  $k = 1$ , замінимо початкові міри  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$  на їхні грубі версії  $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$ , котрі визначені так:

$$\mu_1(\Omega_{i_1}) = \mu(\Omega_{i_1}) := p_{i_1}, \quad \nu_1(\Omega_{i_1}) = \nu(\Omega_{i_1}) := r_{i_1}, \quad i_1 = 1, \dots, n,$$

а всередині кожного регіону  $\Omega_{i_1}$  покладаємо їх рівномірно розподіленими. Остання умова відрізняє  $\mu_1, \nu_1$  від  $\mu, \nu$  відповідно. Два набори значень  $p_{i_1}, r_{i_1}, i_1 = 1, \dots, n$  утворюють два стохастичні вектори  $\mathbf{p}_1 = (p_1, \dots, p_n)$  та  $\mathbf{r}_1 = (r_1, \dots, r_n)$ . Тепер можна описати деяку грубу версію перерозподілу простору конфлікту  $\Omega$  між опонентами  $A$  та  $B$  в термінах цих векторів використовуючи формули (3.36).

Щоб отримати детальнішу картину опису конфліктного перерозподілу простору, виконуємо другий крок апроксимацій та замінюємо  $\mu, \nu$  на точніші їхні версії  $\mu_2, \nu_2 \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$ :

$$\mu_2(\Omega_{i_1 i_2}) = \mu(\Omega_{i_1 i_2}) := p_{i_1 i_2}, \quad \nu_2(\Omega_{i_1 i_2}) = \nu(\Omega_{i_1 i_2}) := r_{i_1 i_2}.$$

Мірам  $\mu_2, \nu_2$  ставимо у відповідність нову пару стохастичних векторів  $\mathbf{p}_2 = (p_{i_2})_{i_2=1}^n, \mathbf{r}_2 = (r_{i_2})_{i_2=1}^n$  з координатами

$$p_{i_2} := \frac{p_{i_1 i_2}}{p_{i_1}}, \quad r_{i_2} := \frac{r_{i_1 i_2}}{r_{i_1}}.$$

Повторивши процедуру  $k$  разів, отримаємо більш близькі версії  $\mu_k, \nu_k \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$  початкових мір  $\mu, \nu$ :

$$\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = \mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) := p_{i_1 \dots i_k}, \quad \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = \nu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) := r_{i_1 \dots i_k}.$$

З  $\mu_k, \nu_k$  асоціюється пара стохастичних векторів  $\mathbf{p}_k = (p_{i_k})_{i_k=1}^n, \mathbf{r}_k = (r_{i_k})_{i_k=1}^n$  із координатами

$$p_{i_k} := \frac{p_{i_1 \dots i_k}}{p_{i_1 \dots i_{k-1}}}, \quad r_{i_k} := \frac{r_{i_1 \dots i_k}}{r_{i_1 \dots i_{k-1}}}.$$

Таким чином, маючи послідовності векторів  $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{\infty}$  можна розв'язати проблему конфліктного перерозподілу простору  $\Omega$  між опонентами  $A$  та  $B$  з довільною точністю в термінах векторів  $\mathbf{p}_k$ ,  $\mathbf{r}_k$  згідно з теорією, розвинутою в роботах [58, 59].

Навпаки, маючи дві послідовності стохастичних векторів  $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\mathbf{p}_k = (p_{i_k})_{i_k=1}^n$ ,  $\mathbf{r}_k = (r_{i_k})_{i_k=1}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n p_{i_k} = \sum_{i=1}^n r_{i_k} = 1$ ,  $p_{i_k}, r_{i_k} \geq 0$ ,  $\forall k$ , можна реконструювати дві послідовності кусково рівномірно розподілених ймовірнісних мір  $\mu_k, \nu_k \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$ :

$$\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = p_{i_1} \cdots p_{i_k}, \quad \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1} \cdots r_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Згідно з вище описаним (див. [16, 22, 52, 61, 82]), послідовності  $\mu_k, \nu_k$  мають слабкі границі  $\mu, \nu$ , які є структурноподібними мірами. Таким чином можна констатувати, що постановка задачі динаміки конфлікту опонентів, представленої структурними мірами  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , допускає розгляд з довільною точністю в термінах мір  $\mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$  або в термінах стохастичних векторів.

Зауважимо, що в застосуваннях значення  $\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}), \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k})$  мають ймовірнісну інтерпретацію спостереження деякої властивості в регіоні  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ , наприклад, присутності опонента чи кількості популяції. Використовуючи ці величини для всіх  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ ,  $k \geq 1$  і враховуючи умови на IFS, можна вирахувати ймовірності знаходження цієї величини в борелівській множині  $E \in \mathcal{B}$  з  $\Omega$ . Більше того, фрактальна структура регіонального поділу  $\Omega$  дає можливість розв'язати задачу про спектральну структуру граничних мір  $\mu^{\infty}$  та  $\nu^{\infty}$ , яка виникла внаслідок конфліктної взаємодії між опонентами.

Тепер переходимо до опису змін розглядуваних вище мір  $\mu_k, \nu_k$  під дією притягальної взаємодії між опонентами, тобто, опишемо еволюцію станів динамічної системи (3.32) в термінах кусково рівномірно розподілених мір в припущенні, що в початковий момент часу на  $\Omega$  задано пару ймовірнісних мір,  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , які узгоджені з деякою IFS.

У момент часу,  $t = 1$ , будемо пару мір  $\mu^{t=1}, \nu^{t=1} \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$ , яка відповідає парі стохастичних векторів  $\mathbf{p}^1 = (p_{i_1}^1)_{i_1=1}^n$  та  $\mathbf{r}^1 = (r_{i_1}^1)_{i_1=1}^n$ , координати яких визначені наступним чином

$$p_{i_1}^1 = \frac{p_{i_1}(1 + r_{i_1})}{1 + \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}, \quad r_{i_1}^1 = \frac{r_{i_1}(1 + p_{i_1})}{1 + \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}, \quad (3.36)$$

де

$$p_{i_1} = \mu(\Omega_{i_1}), \quad r_{i_1} = \nu(\Omega_{i_1}). \quad (3.37)$$

У момент часу  $t = 2$ , міри  $\mu^{t=2}, \nu^{t=2}$  визначаються так:

$$\mu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = p_{i_1 i_2} := p_{i_1}^1 \cdot p_{i_2}^2, \quad \nu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = r_{i_1 i_2} := r_{i_1}^1 \cdot r_{i_2}^2,$$

де

$$p_{i_2}^2 = \frac{p_{i_2}^1(1 + r_{i_2}^1)}{1 + \sum_i p_i^1 r_i^1}, \quad r_{i_2}^2 = \frac{r_{i_2}^1(1 + p_{i_2}^1)}{1 + \sum_i p_i^1 r_i^1}. \quad (3.38)$$

Надалі ітераційно визначаємо

$$\begin{aligned} \mu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= p_{i_1 \dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \\ \nu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= r_{i_1 \dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

де

$$p_{i_k}^k = \frac{p_{i_{k-1}}^{k-1}(1 + r_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 + \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}, \quad r_{i_k}^k = \frac{r_{i_{k-1}}^{k-1}(1 + p_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 + \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}. \quad (3.40)$$

Таким чином, формули (3.36)–(3.40) описують ітераційну побудову станів динамічної системи конфлікту в термінах кусково рівномірно розподілених мір  $\mu^t, \nu^t, t = 1, 2, \dots$ . Цю конструкцію запишемо символічно як

$$\mu^t * \nu^t = \mu^{t+1}, \quad \nu^t * \mu^t = \nu^{t+1},$$

де відображення  $*$  згідно з формулами (3.36) відповідає притягальній взаємодії між опонентами. Обидві послідовності простих мір  $\mu^t, \nu^t$ , визначені рівністями (3.39), є, очевидно, слабо збіжними при  $t \rightarrow \infty$ , оскільки всі множники у (3.39) не перевищують одиниці. Більш за те, завдяки притягальній взаємодії, згідно з попередніми результатами, значення мір

у кожному регіоні  $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$ ,  $\nu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$  зближуються і стають однаковими при  $t \rightarrow \infty$ .

Згідно з [16, 22], майже всі граничні міри  $\mu^\infty = \nu^\infty$  будуть сингулярно неперервними, бо взагалі  $\lim_{t=k \rightarrow \infty} \mu^t(\Omega_{i_1\dots i_k}) = 0$  для будь-яких послідовностей  $i_1, \dots, i_k, \dots$ . Однак, це не завжди так. Далі наведено умови, які забезпечать збіжність  $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$  та  $\nu^{t=k}(\Omega_{i_1\dots i_k})$  до ненульових значень хоча б для деяких послідовностей  $i_1, \dots, i_k, \dots$ .

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \mu_{i_1\dots i_k\dots} &= \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_1\dots i_k}, \\ \nu_{i_1\dots i_k\dots} &= \prod_{k=1}^{\infty} r_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{i_1\dots i_k}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

де

$$p_{i_1\dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \quad r_{i_1\dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k, \quad (3.42)$$

та  $p_{i_k}^k, r_{i_k}^k$  визначаються згідно (3.40). Відзначимо, що кожна точка з  $\Omega$  може бути представлена як

$$\Omega \ni \omega_{i_1\dots i_k\dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{i_1\dots i_k}, \quad (3.43)$$

тобто їй відповідає деяка послідовність індексів  $i_1, \dots, i_k, \dots$ .

Нагадаємо, що гранична міра  $\mu^\infty$  асоціюється з нескінченною матрицею  $P = \{\mathbf{p}^k\}_{k=1}^{\infty} = (p_{i_k}^k)_{k=1, i_k=1}^{\infty, n}$  (див. (3.39)) та є структуроподібною.

**Означення 3.17.** Послідовність елементів  $p_{i_k}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  з матриці  $P = (p_{i_k}^k)_{k=1, i_k=1}^{\infty, n}$  називається 0-збіжною, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k < \infty.$$

Послідовність  $p_{i_k}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  називається 1-збіжною, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k > 0. \quad (3.44)$$

Умову (3.44) можна записати в еквівалентній формі так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_{i_k}^k) < \infty.$$

У загальному випадку існування та побудова 1-збіжної послідовності з елементів матриці  $P$  є нетривіальною задачею, оскільки всі вектори  $\mathbf{p}^k$  є стохастичними, тобто  $0 \leq p_{i_k}^k \leq 1$ .

Наступна лема встановлює достатні умови існування 1-збіжних послідовностей.

**Лема 3.18.** *Якщо серед регіонів  $\Omega_i := K_i\Omega$  існує лише одиний регіон, позначимо його  $\Omega_{\mathbf{i}}$ , такий, що*

$$p_{\mathbf{i}} = \max_{i=1,\dots,n} \{p_i\}, \quad r_{\mathbf{i}} = \max_{i=1,\dots,n} \{r_i\}, \quad (3.45)$$

або

$$\sigma_{\mathbf{i}} = \sigma_{\max} = \max_{i=1,\dots,n} \{\sigma_i\}, \quad \rho_{\mathbf{i}} = \rho_{\max} = \max_{i=1,\dots,n} \{\rho_i\}, \quad (3.46)$$

де  $\sigma_i = p_i + r_i$ ,  $\rho_i = p_i r_i$ , то кожна з послідовностей  $p_{\mathbf{i}}^t, r_{\mathbf{i}}^t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  є 1-збіжною, тобто

$$\prod_{t=1}^{\infty} p_{\mathbf{i}}^t > 0, \quad \prod_{t=1}^{\infty} r_{\mathbf{i}}^t > 0. \quad (3.47)$$

*Доведення.* Припустимо, що одна з умов (3.46) або (3.45) виконується для єдиного  $\mathbf{i}$ . Це означає, що для всіх  $i \neq \mathbf{i}$

$$\sigma_i < \sigma_{\mathbf{i}}, \quad \rho_i < \rho_{\mathbf{i}}$$

або

$$p_i < p_{\mathbf{i}}, \quad r_i < r_{\mathbf{i}}.$$

Покажемо, що кожна з послідовностей  $\{p_i^t\}_{t=1}^{\infty}$ ,  $i \neq \mathbf{i}$ , є 0-збіжною, тобто

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_i^t < \infty. \quad (3.48)$$

З теореми 3.11 отримуємо, що при виконанні однієї з умов (3.45), (3.46), всі координати  $p_i^t, r_i^t, i \neq \mathbf{i}$  прямують до нуля

$$p_i^t \rightarrow 0, \quad r_i^t \rightarrow 0, \quad \theta^t \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty, \quad i \neq \mathbf{i}.$$

З (3.11) отримуємо

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot c_i^t = p_i \prod_{t=0}^{\infty} c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 + r_i^t}{1 + \theta^t}. \quad (3.49)$$

У випадку  $r_i^t < \theta^t$  отримуємо  $c_i^{t+1} < c_i^t$ . Навпаки, якщо  $r_i^t > \theta^t$ , то  $c_i^{t+1} > c_i^t$ . Оскільки  $r_i^t \rightarrow 0$  і  $\theta^t \rightarrow 1$ , то починаючи з деякого  $T$  всі  $c_i^t, t > T$  стають меншими за одиницю і монотонно спадають, тобто

$$0 < c_i^t \leq c < 1, \quad c := c_i^t.$$

Нехай  $T = 1$ . Тоді ряд (3.48) можна порівняти з рядом геометричної прогресії  $\sum_{l=1}^{\infty} p_i c^l$ , оскільки кожен член першого ряду менший за відповідний член збіжного ряду. Очевидно, цей ряд збігається завдяки знаменнику  $c < 1$ . Це доводить, що сума ряду (3.48) є скінченною. Якщо  $T > 1$ , то ряд (3.48) також є збіжним, оскільки часткова сума перших  $T - 1$  членів цього ряду скінчена.

Таким чином вище доведено, що

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{i \neq \mathbf{i}} p_i^t \right) = \sum_{t=1}^{\infty} (1 - p_{\mathbf{i}}^t) < \infty.$$

Більше того, послідовність  $\{p_{\mathbf{i}}^t\}_{t=1}^{\infty}$  є 1-збіжною, тобто  $\prod_{t=0}^{\infty} p_{\mathbf{i}}^t > 0$ .  $\square$

Відзначимо, що 1-збіжними будуть також усі послідовності, у яких лише скінченна кількість індексів відрізняється від  $\mathbf{i}$ .

Нагадаємо, що за теоремами типу Джессена–Вінтнера, міри  $\mu^{\infty}, \nu^{\infty}$  є чисто точковими, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{i_1 \dots i_k} \mu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) > 0, \quad \prod_{k=1}^{\infty} \max_{i_1 \dots i_k} \nu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) > 0, \quad (3.50)$$

де потрібно розглядати  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{\sharp}$  замість  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ .

Далі встановленні достатні умови того, щоб  $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$ .

**Теорема 3.19.** *Граничні міри  $\mu^\infty$  та  $\nu^\infty$ , побудовані відповідно до формул (3.37)–(3.40) є чисто точковими,  $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$ , якщо існує єдиний регіон  $\Omega_i$ , такий, що виконується одна з умов (3.45) або (3.46).*

*Доведення.* Зауважимо, що умови (3.47) і (3.50) еквівалентні. Тому доведення теореми випливає з леми 3.18.  $\square$

Варто відзначити, що знайдені умови на початкові розподіли динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією гарантують виникнення чисто точкового спектру в граничних розподілах у випадку, коли в кожен момент часу  $t = 1, 2, \dots$  відбувається перехід до наступного рангу  $k = 1, 2, \dots$  фрактального подрібнення простору  $\Omega$ . Результат теореми 3.19 можна пререформулювати: головна умова виду (3.50) з теореми типу Джессена-Вінтнера, яка забезпечує дискретність міри, виконується тоді і тільки тоді, коли обидва опоненти обирають стратегію найбільшого пріоритету в деякому єдиному регіоні  $\Omega_i$  (див. умови (3.45), (3.46)).

### 3.4. Математичне моделювання розподілів біологічних популяцій

Згідно з класифікацією Швердтфегера [69] розподіл особин у популяції може бути випадковим, груповим або рівномірним. Останні два найбільш поширені. Випадковий розподіл може бути притаманний для популяцій, у яких відсутня територіальна поведінка, умови середовища однорідні й ресурси розподілені рівномірно. Зазвичай в природних екосистемах такі умови бувають в дуже малих масштабах, на великих територіях виконуються дуже рідко. Тому випадковий тип розподілу в природі буває нечасто.

Рівномірний розподіл значно частіше фігурує у математичних теоріях, ніж у реальному житті. Політичні системи, в основу яких покладені ідеї соціальної рівності й рівномірного розподілу благ, є приреченими на розпад. У біологічних популяціях відносно рівномірний розподіл особин можливий у випадку, коли між ними існує дуже сильна конкуренція. Це означає, що ймовірність перебування двох особин поруч є досить малою, що сприяє рівномірному розподілу. Такий тип розподілу присутній у хижих риб і тварин, яким притаманна територіальність. У математичних моделях такі системи зазвичай описуються конфліктною взаємодією з відштовхуванням.

Найчастіше у природі спостерігається груповий розподіл. Причинами утворення різних скупчень може бути просторова нерівномірність розподілу ресурсів для існування, складні внутрішньовидові взаємини або ж розмноження особин, нездатних дистанціюватися одні від одних.

Далі побудовано модель динамічної системи, що описує рівномірний або груповий розподіл особин популяції на деякому ресурсному просторі існування  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ,  $n > 1$ . Зафіксуємо на  $\Omega$  деяку ймовірнісну дискретну міру  $\mu$ , яка відповідатиме деякій популяції. Значення цієї



міри

$$\mu(\omega_i) =: p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

інтерпретуємо як щільність розподілу популяції в регіоні існування  $\omega_i$ . За побудовою  $\sum_i p_i = 1$ . Тому послідовність  $\mu(\omega_i)$  визначає в  $\mathbb{R}_+^n$  стохастичний вектор  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ .

Боротьбу за життєві ресурси, зосереджені в кожному з регіонів простору, описуємо в термінах міри  $\nu$ , значення якої в точках  $\omega_i$  визначаються так:

$$\nu(\omega_i) = \frac{1 - \mu(\omega_i)}{n - 1} = \frac{1 - p_i}{n - 1} =: r_i.$$

Легко перевірити, що ці значення також утворюють стохастичний вектор  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Величини  $\nu(\omega_i)$  можна інтерпретувати як усереднення розподілу  $\mu$  (mean field) на підмножині  $\Omega \setminus \omega_i$ .

Дослідимо поведінку траєкторій динамічної системи з дискретним часом у термінах стохастичних векторів

$$\mathbf{p}^t \xrightarrow{*,t} \mathbf{p}^{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p}), \quad (3.51)$$

де  $*$  позначає перетворення, яке відповідає динаміці зміни популяції на просторі існування  $\Omega$ .

У термінах координат закон конфліктної динаміки визначимо так:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 + c_i r_i^t)}{z^t}, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.52)$$

де

$$r_i^t = \frac{1 - p_i^t}{n - 1},$$

а нормувальний знаменник  $z^t$  забезпечує стохастичність вектора  $\mathbf{p}^{t+1}$ . Набір сталих  $c_i$  трактується як незмінні з часом  $t$  сприятливі умови для існування популяції в кожному з регіонів  $\omega_i$  відповідно.

Зауважимо, що у роботах [8, 54] побудовано математичну модель динамічної системи конфлікту, що описує поведінку індивідів у соціумі.

Динаміка в цій моделі описується рівняннями з відштовхувальною взаємодією:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - c_i r_i^t)}{z^t}, \quad 0 \leq c_i \leq 1.$$

Вибір притягальної взаємодії докорінно змінює динаміку системи й істотно впливає на її властивості.

Далі проведено аналіз поведінки траєкторій (3.51), заданих рівняннями (3.52), у термінах координат стохастичних векторів  $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$ .

**3.4.1. Рівномірно розподілені граничні стани.** Припустимо, що у формулах (3.52) всі  $c_i = 1$  для всіх  $i = 1, \dots, n$ , тобто умови для існування популяції однакові в кожному з регіонів  $\omega_i$  та незмінні з часом. Тоді рівняння (3.52) можна переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + r_i^t)}{1 + (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.53)$$

Далі дослідимо властивості траєкторій (3.51) в такому випадку. Зауважимо, що поведінка динамічної системи є аналогічною для випадку, коли всі сталі  $c_i$  дорівнюють деякому додатному числу  $c$ . Для простоти доведення розглянуто випадок, коли  $c_i = 1$ . Нижче буде доведено, що зміна координат векторів  $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$  згідно з рівняннями (3.53) приводить до того, що всі ненульові координати цих векторів стають рівними між собою при  $t \rightarrow \infty$ , а це відповідає рівномірному розподілові на просторі  $\Omega$ .

**Зауваження 3.20.** Рівність  $\mathbf{p} = \mathbf{r}$  можлива тоді і тільки тоді, коли  $p_i = r_i = \frac{1}{n}$  для усіх  $i = 1, \dots, n$ .

Якщо ввести величину

$$L^t := \sum_{i=1}^n (p_i^t)^2 = \|\mathbf{p}^t\|^2,$$

то перетворення  $*$  можна переписати лише в термінах координат вектора  $\mathbf{p}^t$ :

$$p_i^{t+1} = p_i^t k_i^t, \quad k_i^t = \frac{n - p_i^t}{n - L^t}. \quad (3.54)$$

Позначимо через  $M$  множину всіх нульових координат вектора  $\mathbf{p}$ , тобто

$$M = \{p_i : p_i = 0\},$$

а через  $\gamma(M)$  – потужність цієї множини. З рівнянь (3.54) зрозуміло, що  $M$  та  $\gamma(M)$  не залежать від  $t$ .

**Теорема 3.21.** *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (3.51) з довільною парою початкових стохастичних векторів  $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$  ( $n > 1$ ), еволюція якої задана формулами (3.54), збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t.$$

При цьому,

1) якщо  $\gamma(M) = 0$ , то  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$  і

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{n};$$

2) якщо  $\gamma(M) = m$ ,  $m < n$ , то  $\mathbf{p}^\infty \neq \mathbf{r}^\infty$  і для всіх  $p_j \in M$

$$p_j^\infty = 0, \quad r_j^\infty = \frac{1}{n-1},$$

а для всіх  $p_i \notin M$

$$p_i^\infty = \frac{1}{n-m}, \quad r_i^\infty = \frac{n-m-1}{(n-1)(n-m)}.$$

Граничний стан стійкий лише у випадку  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ .

Для доведення цієї теореми використаємо наступні твердження та леми.

З рівнянь (3.54) випливає, що при  $p_i^t > L^t$

$$p_i^t > p_i^{t+1},$$

а при  $p_i^t < L^t$

$$p_i^t < p_i^{t+1}.$$

**Твердження 3.22.** Якщо  $p_i \geq p_j$  для деяких  $i, j$ , то для всіх  $t = 0, 1, \dots$

$$p_i^t \geq p_j^t.$$

*Доведення.* Нехай  $p_i \geq p_j$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} d_{ij}^1 &= p_i^1 - p_j^1 = \frac{1}{n-L} (p_i(n-p_i) - p_j(n-p_j)) = \\ &= \frac{1}{n-L} (n(p_i - p_j) - (p_i + p_j)(p_i - p_j)) = \frac{n - p_i - p_j}{n-L} (p_i - p_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Отже,  $p_i^1 \geq p_j^1$ . Аналогічними міркуваннями отримуємо  $p_i^t \geq p_j^t$  для довільного  $t$ .  $\square$

**Твердження 3.23.** Якщо для деякого  $i = 1, \dots, n$

$$p_i = 0,$$

то для довільного  $t$

$$p_i^t = 0, \quad r_i^t = \frac{1}{n-1}.$$

*Доведення.* Випливає з рівнянь (3.53).  $\square$

**Твердження 3.24.** Нехай  $p_{\min}^t$  та  $p_{\max}^t$  – мінімальна й максимальна координати вектора  $\mathbf{p}^t$  відповідно,  $L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2$ . Тоді для будь-якого  $t = 0, 1, \dots$  справедливі нерівності

$$p_{\min}^t \leq L^t \leq p_{\max}^t. \quad (3.55)$$

*Доведення.* З твердження 3.22 і стохастичності вектора  $\mathbf{p}^t$  випливає, що для довільного  $t = 0, 1, \dots$

$$p_{\min}^t \leq \sum_{i=1}^n p_i^t p_{\min}^t \leq \sum_{i=1}^n (p_i^t)^2 \leq \sum_{i=1}^n p_i^t p_{\max}^t \leq p_{\max}^t. \quad \square$$

Очевидно, що послідовність  $\{p_{\max}^t\}_{t=0}^{\infty}$  спадна, оскільки  $p_{\max}^t \geq L^t$  для довільного  $t$ .

**Лема 3.25.** Послідовність  $L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2$ ,  $t = 0, 1, \dots$  є спадною.

*Доведення.* Розглянемо різницю  $L^{t+1}$  та  $L^t$ . Враховуючи нерівності (3.55) отримаємо

$$L^{t+1} - L^t \leq p_{\max}^{t+1} - p_{\max}^t = \frac{p_{\max}^t(L^t - p_{\max}^t)}{n - L^t} \leq 0.$$

Отже, послідовність  $\{L^t\}_{t=0}^{\infty}$  є спадною.  $\square$

**Лема 3.26.** *Якщо  $p_i > L$ , то послідовність  $\{p_i^t\}_{t=0}^{\infty}$  є спадною.*

*Доведення.* Нехай  $p_i > L$ . Тоді

$$p_i^1 - p_i = \frac{p_i(n - p_i) - p_i(n - L)}{n - L} = \frac{p_i(L - p_i)}{n - L} < 0,$$

тобто  $p_i^1 < p_i$ . Покажемо, що  $p_i^1 > L^1$ . З (3.54) маємо

$$\begin{aligned} p_i^1 - L &= \frac{np_i - (p_i)^2 - nL + (L)^2}{n - L} = \frac{n(p_i - L) - ((p_i)^2 - (L)^2)}{n - L} = \\ &= (p_i - L) \frac{n - p_i - L}{n - L} > 0. \end{aligned}$$

З врахуванням леми 3.25 маємо  $p_i^1 > L^1$ .

Методом математичної індукції отримуємо справедливість нерівності  $p_i^t > L^t$  для довільного  $t$ . Звідси випливає, що послідовність  $\{p_i^t\}_{t=0}^{\infty}$  спадає, якщо  $p_i > L$ .  $\square$

**Лема 3.27.** *Послідовність  $L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2$ ,  $t = 0, 1, \dots$  змінюється у межах:*

$$\frac{1}{n - m} \leq L^t \leq 1,$$

де  $m = \gamma(M)$ .

*Доведення.* Зі стохастичності вектора  $\mathbf{p}^t$  випливає, що  $L^t \leq 1$ . Лише у випадку, коли  $\gamma(M) = n - 1$ , маємо  $L^t = 1$ .

Для доведення другої частини нерівності припустимо, що  $\gamma(M) = 0$ . Далі методом множників Лагранжа шукатимемо екстремуми функції  $n$  змінних

$$L(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n (p_i)^2, \quad p_i \neq 0,$$

враховуючи рівняння зв'язку

$$\phi(p_1, \dots, p_n) = -1 + \sum_{i=1}^n p_i.$$

Складемо функцію Лагранжа та позначимо її через  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n (p_i)^2 + \lambda \left( -1 + \sum_{i=1}^n p_i \right),$$

де  $\lambda$  – так званий множник Лагранжа.

Стаціонарні точки знайдемо з наступної системи:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{p_1} = 2p_1 + \lambda = 0, \\ \mathcal{L}'_{p_2} = 2p_2 + \lambda = 0, \\ \dots \\ \mathcal{L}'_{p_n} = 2p_n + \lambda = 0, \\ \phi(p_1, \dots, p_n) = -1 + \sum_{i=1}^n p_i = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \frac{1}{n}, \\ p_2 = \frac{1}{n}, \\ \dots \\ p_n = \frac{1}{n}, \\ \lambda = -\frac{2}{n}. \end{cases}$$

Отже, маємо стаціонарну точку  $M' \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{2}{n} \right)$ .

Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму для функції Лагранжа. Для цього знайдемо другі частинні похідні функції  $\mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, \lambda)$ :

$$\mathcal{L}''_{p_i p_i} = 2, \quad \mathcal{L}''_{p_i p_k} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n, \quad i \neq k.$$

Запишемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2 \mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, \lambda) = 2dp_1^2 + 2dp_2^2 + \dots + 2dp_n^2 = 2(dp_1^2 + dp_2^2 + \dots + dp_n^2).$$

Оскільки  $d^2 \mathcal{L} > 0$ , то функція  $\mathcal{L}(p_1, \dots, p_n, \lambda)$  у точці  $M'$  має локальний мінімум  $\mathcal{L}_{\min} = \mathcal{L}(M') = \frac{1}{n}$ .

Таким чином, функція  $L(p_1, \dots, p_n)$  за наявності зв'язку  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  має локальний умовний мінімум у точці  $M \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$

$$L_{\min} = L \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n}.$$

Звідси випливає, що  $L \geq \frac{1}{n}$ .

Якщо  $\gamma(M) = m$ , ( $m < n$ ), то шукаємо екстремум функції  $n - m$  змінних. У такому випадку  $L_{\min} = \frac{1}{n-m}$ , тобто  $L \geq \frac{1}{n-m}$ .

Із побудови задачі випливає, що ітерація перетворення  $\ast$  не змінює мінімального значення функції  $L^t(p_1^t, \dots, p_n^t)$ , тобто  $L^t \geq \frac{1}{n-m}$ .

Отже, для довільного  $t$  справедливо

$$\frac{1}{n-m} \leq L^t \leq 1. \quad \square$$

**Твердження 3.28.** *Послідовність  $L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2$ ,  $t = 0, 1, \dots$  є збіжною, тобто існує*

$$L^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} L^t.$$

*Доведення.* Вище показано, що  $\{L^t\}_{t=1}^\infty$  – монотонна обмежена послідовність. Тому послідовність  $\{L^t\}_{t=1}^\infty$  є збіжною.  $\square$

*Доведення теореми 3.21.* Якщо деяка  $i$ -та координата  $p_i$  вектора  $\mathbf{p}$  дорівнює нулю, то з твердження 3.23 випливає, що  $p_i^t = 0 = p_i^\infty$ .

Розглянемо вектор  $\mathbf{p}$ , всі координати якого строго додатні. Без втрати загальності можна вважати, що координати вектора  $\mathbf{p}$  впорядковані за зростанням:

$$0 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < 1. \quad (3.56)$$

З твердження 3.22 випливає, що ця впорядкованість не змінюється, тобто порядок координат не залежить від  $t$ .

Враховуючи твердження 3.24 маємо, що всі координати вектора  $\mathbf{p}$  у кожен момент дискретного часу  $t$  діляться на три множини: ті, що менші за  $L^t$ , ті, що дорівнюють  $L^t$ , та ті, що більші за  $L^t$ . За лемою 3.26 послідовність координат  $\{p_n^t\}_{t=0}^\infty$  є спадною. Покажемо, що мінімальна координата  $p_1^t$  завжди зростає. Розглянемо різницю

$$p_1^{t+1} - p_1^t = \frac{p_1^t(n - p_1^t) - p_1^t(n - L^t)}{n - L^t} = \frac{p_1^t}{n - L^t}(L^t - p_1^t).$$

З твердження 3.24 випливає, що

$$p_1^{t+1} > p_1^t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

тобто мінімальна координата зростає.

Оскільки послідовності  $\{p_1^t\}_{t=0}^\infty$  та  $\{p_n^t\}_{t=0}^\infty$  монотонні і обмежені, то існують границі

$$p_{\min}^\infty = p_1^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1^t, \quad p_{\max}^\infty = p_n^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n^t.$$

З рівнянь (3.54) при  $t \rightarrow \infty$  отримуємо, що  $p_1^\infty = p_n^\infty = L^\infty$ .

Враховуючи умову (3.56), маємо

$$p_1^\infty = p_2^\infty = \dots = p_j^\infty = \dots = p_{n-1}^\infty = p_n^\infty. \quad (3.57)$$

Тому існує границя  $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$ . З існування граничного вектора  $\mathbf{p}^\infty$  та рівнянь (3.53) випливає, що існує  $\mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t$ .

Припустимо  $\gamma(M) = 0$ , враховуючи (3.57) та стохастичність векторів, маємо для довільного  $i = 1, \dots, n$ :

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{n},$$

тобто  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ .

Нехай  $0 < \gamma(M) = m < n$ , тобто  $m$  координат вектора  $\mathbf{p}$  дорівнюють нулю. Тоді відповідні координати вектора  $\mathbf{r}$  дорівнюють  $\frac{1}{n-1}$ . Розглянемо додатні координати вектора  $\mathbf{p}$ . Кількість таких координат дорівнює  $n - m$ . З доведеного вище випливає, що

$$p_i^\infty = \frac{1}{n - m}.$$

Тоді відповідні координати вектора  $\mathbf{r}$  дорівнюють

$$r_i^\infty = \frac{1 - \frac{1}{n-m}}{n-1} = \frac{n-m-1}{(n-1)(m-n)}.$$

Граничний стан  $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$  є стійким лише у випадку  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ , бо в такому випадку  $\gamma(M) = 0$ . Якщо  $\mathbf{p}^\infty \neq \mathbf{r}^\infty$ , то  $\gamma(M) \neq 0$ , а при довільному збуренні нульова координата в  $\varepsilon$ -околі граничного стану може стати додатньою і тоді її граничне значення також стане додатнім. Це означає, що стійкою є лише одна гранична точка  $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ .  $\square$



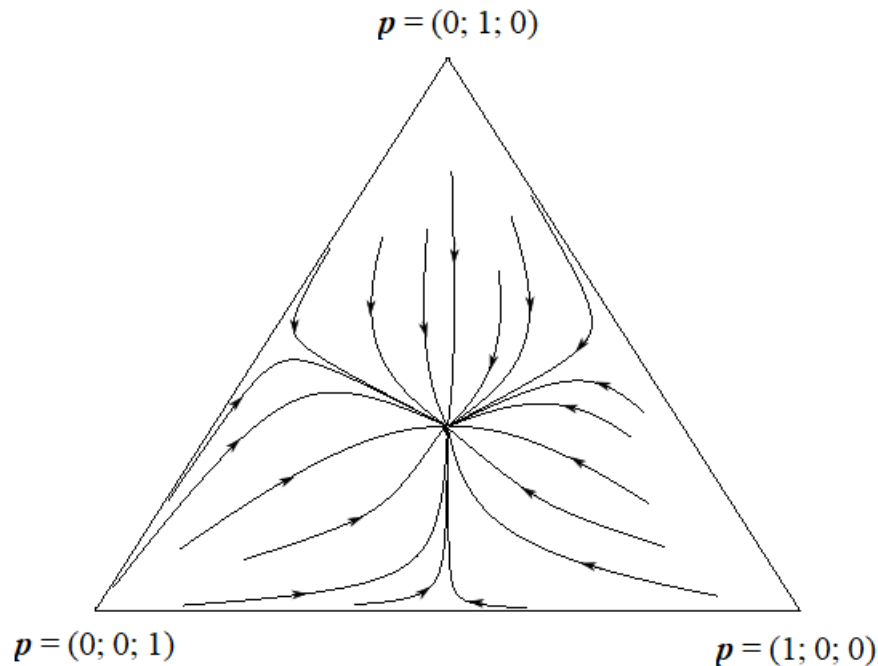


Рис. 3.7. Траєкторії динамічної системи конфлікту для випадку тривимірного простору під дією конфліктного перетворення (3.53), тобто динаміка зміни довільних стохастичних векторів  $\mathbf{p} = (p_1; p_2; p_3)$ . Вершини трикутника ототожнюються з наборами координат  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$  та  $(0; 0; 1)$ . Граничні значення векторів  $\mathbf{p}$  збігаються до центру цього трикутника, тобто центр трикутника є атрактом. Вершини трикутника  $(1; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 0)$  та  $(0; 0; 1)$  є нестійкими репелерами. Лише центр трикутника, тобто точка  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ , є стійкою. Всі інші точки трикутника є нестійкими.

**3.4.2. Залежність граничного стану від умов середовища.** Далі розглянемо випадок, коли всі параметри  $c_i$  є різними. Саме вони впливають на розподіл популяції та призводять до збільшення чи зменшення популяції по деяких регіонах  $\omega_i$ . Адже граничний стан повністю визначається набором параметрів  $c_i$ . Так, порушення умови (3.60) для деякого  $i$  в теоремі 3.31 призводить до  $p_i^\infty = 0$ , що можна трактувати як повне зникнення особин популяції з цього  $i$ -го регіону. Це підтверджено численними комп'ютерними симуляціями (див. рис. 3.8). А явний вигляд граничних векторів демонструє, що чим більше значення сталої  $c_i$ , тим більше значення відповідної  $i$ -ої граничної координати. Тобто сприятливі умови для існування популяції в деякому регіоні приводять до збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні.

Враховуючи, що  $r_i^t = \frac{1-p_i^t}{n-1}$ , рівняння (3.52) можна записати як

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot \frac{n-1 + c_i(1-p_i^t)}{n-1 + L_c^t} = p_i^t \cdot k_{i,c}^t, \quad t \geq 1, \quad (3.58)$$

де

$$k_{i,c}^t = \frac{n-1 + c_i(1-p_i^t)}{n-1 + L_c^t}, \quad L_c^t = \sum_{i=1}^n c_i p_i^t (1-p_i^t).$$

Надалі використовуватимемо позначення  $\kappa_i^t := c_i^t(1-p_i^t)$ .

**Твердження 3.29.** *Нехай для деяких  $i, j$  ( $i \neq j$ ) параметр  $c_i$  дорівнює параметру  $c_j$ , тобто  $c_i = c_j = c$ , причому  $p_i^t < p_j^t$ . Тоді*

$$\kappa_i^t > \kappa_j^t \Leftrightarrow \kappa_i^{t+1} > \kappa_j^{t+1}.$$

*Доведення.* Нерівності  $\kappa_i^t > \kappa_j^t$  та  $p_i^t < p_j^t$  еквівалентні, оскільки

$$\kappa_i^t - \kappa_j^t = c(1-p_i^t) - c(1-p_j^t) = c(p_j^t - p_i^t) > 0.$$

Тому достатньо показати, що з  $p_i^t < p_j^t$  випливає  $p_i^{t+1} < p_j^{t+1}$ . Розглянемо

$$\begin{aligned} p_j^{t+1} - p_i^{t+1} &= \frac{1}{n-1 + L_c} (p_j^t(m-1 + c(1-p_j^t)) - p_i^t(m-1 + c(1-p_i^t))) = \\ &= \frac{1}{n-1 + L_c} ((p_j^t - p_i^t)(m-1 + c) - c(p_j^t)^2 + c(p_i^t)^2) = \\ &= \frac{1}{n-1 + L_c} ((p_j^t - p_i^t)(m-1 + c) + c(p_i^t - p_j^t)(p_j^t + p_i^t)) = \\ &= \frac{p_j^t - p_i^t}{n-1 + L_c} (m-1 + c - c(p_j^t + p_i^t)) = \\ &= \frac{p_j^t - p_i^t}{n-1 + L_c} (m-1 + c(1-p_j^t - p_i^t)) > 0, \end{aligned}$$

тобто  $p_i^{t+1} < p_j^{t+1}$ .

Отже, якщо  $\kappa_i^t > \kappa_j^t$ , то  $\kappa_i^{t+1} > \kappa_j^{t+1}$ . □

**Теорема 3.30.** Нехай  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^2$ . Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (3.51) збігається до стійкого граничного стану, який є нерухомою точкою

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t,$$

причому

$$\mathbf{p}^\infty = \left( \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \frac{c_2}{c_1 + c_2} \right). \quad (3.59)$$

*Доведення.* Нехай маємо  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  та  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ . Очевидно, що  $\mathbf{p} = (1; 0) = \mathbf{p}^\infty$ , аналогічно  $\mathbf{p} = (0; 1) = \mathbf{p}^\infty$ .

Розглянемо  $p_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Припустимо  $\frac{c_1}{c_2} < \frac{p_1}{p_2}$ . Тоді

$$\begin{aligned} p_1^1 - p_1 &= \frac{p_1}{1 + L_c} (c_1(1 - p_1) - c_1 p_1(1 - p_1) - c_2 p_2(1 - p_2)) = \\ &= \frac{p_1}{1 + L_c} (c_1(1 - p_1)^2 - c_2 p_2(1 - p_2)) = \\ &= \frac{p_1}{1 + L_c} (c_1 p_2^2 - c_2 p_2 p_1) = \frac{p_1 p_2}{1 + L_c} (c_1 p_2 - c_2 p_1) < 0, \end{aligned}$$

тобто  $p_1^1 < p_1$ . Тоді  $p_2^1 = 1 - p_1^1 > 1 - p_1 = p_2$ . Звідси випливає, що  $\frac{c_1}{c_2} < \frac{p_1}{p_2} < \frac{p_1^1}{p_2^1}$ . Таким чином, отримуємо  $\frac{c_1}{c_2} < \frac{p_1^t}{p_2^t} \quad \forall t$ .

Аналогічно для випадку  $\frac{c_1}{c_2} > \frac{p_1}{p_2}$ .

Отже,  $\{p_i^t\}_{t=0}^\infty$  – монотонна обмежена послідовність, тобто існує границя

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t.$$

Тоді з інваріантності граничного стану маємо систему

$$\begin{cases} k_{1,c}^\infty = 1, \\ k_{2,c}^\infty = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} c_1(1 - p_1^\infty) = L_c^\infty, \\ c_2(1 - p_2^\infty) = L_c^\infty, \end{cases} \iff \begin{cases} p_1^\infty = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \\ p_2^\infty = \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \end{cases}$$

що доводить рівність (3.59).  $\square$

Далі розглянуто випадок тривимірного простору, тобто  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^3$ . Зазначимо, що теорема 3.30, а також наступна теорема 3.31 припускають узагальнення на випадок  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $n > 3$ . При цьому умова (3.60) значно

ускладнюється, а опис граничного вектора  $\mathbf{p}^\infty$  розпадається на декілька нетривіальних випадків, які потребують додаткового аналізу.

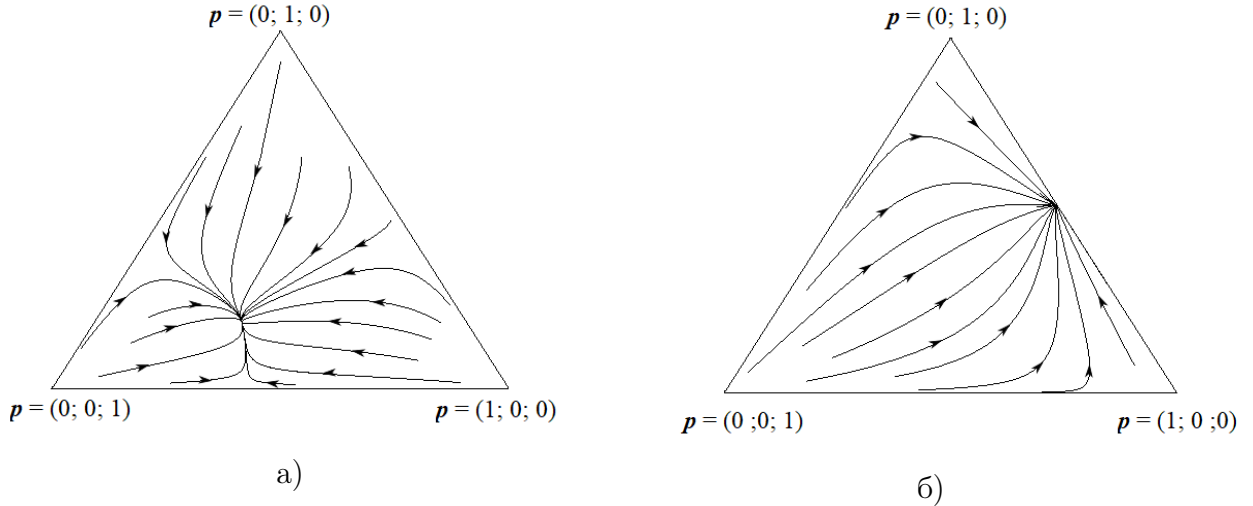


Рис. 3.8. Траєкторії динамічної системи конфлікту для випадку тривимірного простору під дією конфліктного перетворення (3.58). Динаміка зміни довільних стохастичних векторів  $\mathbf{p} = (p_1; p_2; p_3)$  з набором сталих: а)  $\mathbf{c} = (0,3; 0,4; 0,25)$ ,  $\mathbf{p}^\infty = (0,322; 0,4915; 0,1865)$  та б)  $\mathbf{c} = (0,8; 0,1; 0,9)$ ,  $\mathbf{p}^\infty = (0,4706; 0; 0,5294)$ . В б) умова порушується, тобто  $c_2 < \frac{c_1 c_3}{c_1 + c_3}$ , і тому  $p_2^\infty = 0$ .

**Теорема 3.31.** Нехай  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^3$ , причому для кожного  $i = 1, 2, 3$  виконується одна з умов  $\kappa_i^t > L_c^t$  або  $\kappa_i^t < L_c^t$  для довільного  $t$ . Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (3.51) збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t.$$

Причому,

$$\mathbf{p}^\infty = \left( \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 - c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \frac{c_1 c_2 - c_1 c_3 + c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \frac{c_1 c_3 - c_1 c_2 + c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} \right),$$

якщо для всіх  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j \neq k$

$$c_i > \frac{c_j c_k}{c_j + c_k}. \quad (3.60)$$

*Доведення.* Умова  $\kappa_i^t > L_c^t$  ( $\kappa_i^t < L_c^t$ ) є необхідною і достатньою для зростання (спадання)  $p_i^t$ , тобто

$$\kappa_i^t > L_c^t \Leftrightarrow p_i^{t+1} > p_i^t \quad (\kappa_i^t < L_c^t \Leftrightarrow p_i^{t+1} < p_i^t).$$

Це впливає просто з рівнянь (3.58). Якщо ця умова виконується для всіх  $t$ , то послідовність  $\{p_i^t\}_{t=0}^\infty$  є монотонною. Обмеженість цієї послідовності впливає з постановки задачі. А тому існує граничний вектор  $\mathbf{p}^\infty$ . Припустимо всі граничні координати  $p_i^\infty$  є ненульовими. Тоді інваріантність граничного стану означає, що  $k_{i,c}^t = 1$  для всіх  $i = 1, 2, 3$ . Тобто маємо систему

$$\begin{cases} c_1(1 - p_1^\infty)^2 = c_2 p_2^\infty(1 - p_2^\infty) + c_3 p_3^\infty(1 - p_3^\infty), \\ c_2(1 - p_2^\infty)^2 = c_1 p_1^\infty(1 - p_1^\infty) + c_3 p_3^\infty(1 - p_3^\infty), \\ c_3(1 - p_3^\infty)^2 = c_1 p_1^\infty(1 - p_1^\infty) + c_2 p_2^\infty(1 - p_2^\infty), \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$\begin{cases} p_1^\infty = \frac{c_1(c_2 + c_3) - c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \\ p_2^\infty = \frac{c_2(c_1 + c_3) - c_1 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \\ p_3^\infty = \frac{c_3(c_1 + c_2) - c_1 c_2}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}. \end{cases} \quad (3.61)$$

За постановкою задачі всі координати вектора  $\mathbf{p}^t$  є невід'ємними. Тому рівності (3.61) справедливі лише при  $c_i > \frac{c_j c_k}{c_j + c_k}$  для всіх  $i \neq j \neq k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Відзначимо, що граничний стан є стійким, оскільки визначається лише фіксованим набором сталих параметрів  $c_i$ , які в свою чергу задаються при  $t = 0$  та не залежать від часу  $t$ .

Якщо для деякого  $i$  виконується нерівність  $c_i \leq \frac{c_j c_k}{c_j + c_k}$ , то

$$p_i^\infty = \frac{c_i(c_j + c_k) - c_j c_k}{c_i c_j + c_i c_k + c_j c_k} \leq \frac{\frac{c_j c_k}{c_j + c_k}(c_j + c_k) - c_j c_k}{c_i c_j + c_i c_k + c_j c_k} = \frac{c_j c_k - c_j c_k}{c_i c_j + c_i c_k + c_j c_k} = 0,$$

але випадок  $p_i^\infty < 0$  неможливий, тому  $p_i^\infty = 0$ . Отже, якщо для деякого  $i$ -го індексу умова (3.60) порушується, то відповідна координата  $p_i^t$  прямує до 0 при  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню динамічних систем конфлікту, зокрема знаходженню граничних асимптотичних станів, пошуку атракторів і їхніх басейнів, доведенню існування рівноважних станів. Основні результати дисертаційної роботи можна сформулювати наступним чином:

1. Розвинуто теорію динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією разом із аналізом математичних моделей і описом поведінки траєкторій у моделях з багатьма альтернативними позиціями.
2. Доведено існування інваріантних граничних станів і досліджено їхні властивості для певного класу динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Побудовано конкретні моделі таких систем, заданих різницевиими рівняннями.
3. Узагальнено формули, які визначають конфліктне перетворення для пари опонентів на випадок багатьох взаємодіючих сторін. Побудовано й досліджено моделі багатокomпонентних дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією. Доведено існування нерухомих точок і знайдено умови існування циклічних орбіт.
4. Одержано достатні умови виникнення достовірної події (одночасної присутності гравців у фіксованому регіоні) для багатокomпонентної динамічної системи з притягальною взаємодією.
5. Знайдено критерій виникнення точкового спектру у граничних розподілах для систем конфлікту на ресурсних просторах з ітераційним фрактальним подрібненням.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1984. – 275 с.
2. *Боднарчук М.В., Кошманенко В.Д., Харченко Н.В.* Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 446–461.
3. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. – Москва: Физматлит, 2010. – 400 с.
4. *Волошина В.О., Кошманенко В.Д.* Граничні розподіли динамічних систем конфлікту з точковим спектром // Український математичний журнал. – 2018. – **70**, № 12. – С. 1615–1624.
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – Москва: Наука, 1876. – 288 с.
6. *Заславский А.* Собственные миры динамических систем. – Москва: Наука, 1986.
7. *Каратаєва Т.В., Кошманенко В.Д., Петренко С.М.* Явно розв'язувані моделі перерозподілу конфліктного простору // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, № 1. – С. 98–112.
8. *Каратаєва Т.В., Кошманенко В.Д.* Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту // Нелінійні коливання. – 2019. – **22**, № 1. – С. 66–85.
9. *Кошманенко В.Д.* Теорема про конфлікт для пари стохастических векторов // Український математичний журнал. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555–560.

10. Кошманенко В.Д., Харченко Н.В. Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // Український математичний журнал. – 2004. – **56**, № 7. – С. 927–938.
11. Кошманенко В.Д., Петренко С.М. Розклад Гана–Жордана як рівноважний стан системи конфлікту // Український математичний журнал. – 2016. – **67**, № 1. – С. 64–77.
12. Кошманенко В.Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова думка, 2016. – 287 с.
13. Кошманенко В.Д., Сатур О.Р. Проблема достовірної події в багатокомпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією // Нелінійні коливання. – 2019. – **22**, № 2. – С. 220–234. (Переклад: *Koshmanenko V.D., Satur O.R. Sure Event Problem in Multicomponent Dynamical Systems with Attractive Interaction // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – 249, No. 4. – P. 629–646. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>*)
14. Мальтус Т. Опыт закона о народонаселении. – Петрозаводск: Петроком, 1993. – 318 с.
15. Месарович М., Тахара Я. Общая теория систем: Математические основы. – Москва: Мир, 1978. – 316 с.
16. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ : Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
17. Сатур О.Р. Граничні стани дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією // Збірник праць Інституту математики НАН України. – **14**, № 2. – Київ: Інститут математики НАН України. – 2017. – С. 122–132.
18. Сатур О.Р. Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – **201**. – 2017. – С. 34–37.



19. *Сатур О.Р.* Збіжність до рівноважного атрактору в динамічних моделях з притягальною взаємодією // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь». – Київ, 2017. – С. 75–76.
20. *Сатур О.Р., Харченко Н.В.* Модель динамічної системи досягнення консенсусу // Український математичний журнал. – 2019. – **71**, № 9. – С. 1271–1283. (Переклад: *Satur O.R., Kharchenko N.V.* The model of dynamical system for the attainment of consensus – Ukrainian Mathematical Journal. – 2020. – **71**, No. 9. – P. 1456–1469. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01725-w>)
21. *Сатур О.Р.* Граничні стани багатокomпонентних динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2020. – **72**, № 1. – С. 77–89.
22. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наукова думка, 1992. – 208 с.
23. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 280 с.
24. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наукова думка, 1986. – 260 с.
25. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2003. – **9**, No. 2. – P. 101–119.
26. *Albeverio S., Bodnarchuk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2005. – **11**, No. 4. – P. 309–319.
27. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. – 2006. – **10**. – P. 39–49.

28. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // *Journal of Interdisciplinary Mathematics*. – 2008. – **11**, No. 2. – P. 163–185.
29. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi V., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent  $\tilde{Q}$ -symbols // *Methods of Functional Analysis and Topology*. – 2011. – **17**, No. 2. – P. 97–111.
30. *Ashwin P., Bick C., Burylko O.* Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. – 2016. – **2**, 7. – 17 p.
31. *Axelrod R.* The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization // *Journal of Conflict Resolution*. – 1997. – **41**, No. 2. – P. 203–226.
32. *Barnsley M. F.* *Fractals everywhere*. – Morgan Kaufmann. – 2000. – 567 p.
33. *Bellomo N., Brezzi F., Pulvirenti M.* Modeling behavioral social systems // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2017. – **27**, No 1. – P. 1–11.
34. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // *Physical Review E*. – 2014.– **90** (2). – P. 022911-1–022911-18.
35. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation // *Scientific Reports*. – 2018. – **8**, 416. – P. 24.
36. *Bring M., Stuck G.* *Introduction to Dynamical Systems*. – Cambridge University Press. – 2016. – 260 p.
37. *Castellano C., Fortunato S., Loreto V.* Statistical physics of social dynamics // *Reviews of Modern Physics* – 2009. – **81**. – P. 591–646.

38. *DeGroot M.* Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. – 1974. – **69**. – P. 118–121.
39. *Deffuant G., Neau D., Amblard F., Weisbuch G.* Mixing beliefs among interacting agents // Advances in Complex Systems. – 2000. – **3**. – P. 87–98.
40. *Epstein J.M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology and social science. – CRC Press, 1997. – 180 p.
41. *Epstein J.M.* Why model? // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2008. – **11**, No. 4. – P. 1–12.
42. *Elaidy S.* An introduction to difference equations. – New York: Springer, 3rd ed., 2005. – 546 p.
43. *Fisher R.* The genetical theory of natural selection. – Oxford University Press, 2000. – 360 p.
44. *Flachea A., Mas M., Feliciania T., Chattoe-Brownb E., Deffuantc G., Huetc S., Lorenzd J.* Models of social influence: towards the next frontiers // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2017. – **20**(4), 2. – 31 p.
45. *Hassel M. P.* Host-parasitoid population dynamics // Journal of Animal Ecology. – **69**, 2000. – P. 543–566.
46. *Hegselmann R., Krause U.* Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis and simulations // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2002. – **5**, No. 3. – 33 p.
47. *Hofbauer J., Hutson V., Jansen W.* Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka–Volterra type // Journal of Mathematical Biology. – **25**, 1987. – P. 553–570.
48. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. – Cambridge University Press. – 1998.

49. *Hofbauer J., Kon R., Saito Ya.* Qualitative permanence of Lotka–Volterra equations // *Journal of Mathematical Biology.* – **57**, 2008. – P. 863–881.
50. *Hu H.* Competing opinion diffusion on social networks // *Royal Society Open Science.* – 2017. – **4**. – 171160, 13 p.
51. *Hutchinson G.E.* Circular causal system in ecology // *Annals of the New York Academy of Sciences.* – 1948. – **50**. – P. 221–246.
52. *Hutchinson J. E.* Fractals and selfsimilarity // *Indiana University Mathematics Journal.* – 1981. – **30**. – P. 713–747.
53. *Jalili M.* Social power and opinion formation in complex networks // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* – 2013. – **392**. – P. 959–966.
54. *Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K.* Mean field model of a game for power // *Physica A.* – 2019. – 525. – P. 535–547.
55. *Kimura M., Saito K., Ohara K., Motoda H.* Opinion formation by voter model with temporal decay dynamics // *ECML PKDD: Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases.* – Bristol, UK, September 24–28, 2012. Proceedings, Part II, 2012.– P. 565–580.
56. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Dynamic model of opinion formation // 8-ма Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. – Кам’янець-Подільський, 2018. – С. 8–9.
57. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Opinion dynamics on a network // *International conference “Modern Stochastics: theory and application. IV”.* – Kyiv, 2018. – P. 31.
58. *Koshmanenko V.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // *Math. Methods of Operations Research.* – 2004. – **59**, No. 2. – P. 303–313.

59. *Koshmanenko V.D., Kharchenko N.V.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory of Stochastic Processes. – 2004. – **10** (26), No. 3–4. – P. 73–81.
60. *Koshmanenko V.D., Samoilenko I.V.* A dynamical system model for a conflict triad // Nonlinear Oscillations. – 2011. – **14**, No 1. – P. 55–75.
61. *Koshmanenko V.D.* Quasisipoint spectral measures in the theory of dynamical systems of conflict // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – **63**, No. 2. – P. 222–235.
62. *Koshmanenko V. D.* Existence theorems of the  $\omega$ -limit states for conflict dynamical systems // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2014 – **20**, No. 4. – P. 379–390.
63. *Koshmanenko V., Verygina I.* Dynamical systems of conflict in terms of structural measures // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2016. – **22**, No. 1. –P.81–93.
64. *Koshmanenko V., Karataieva T., Kharchenko N., Verygina I.* Models of the conflict redistribution of vital resources // Social Simulation Conference. – Italy, Rome, 2016. – P. 4.
65. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Fixed points of complex system with attarachtive interaction // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2017. – **23**, No. 2. – P. 164–176.
66. *Koshmanenko V., Satur O., Voloshyna V.* Point spectrum in conflict dynamical systems with fractal partition // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019. – **25**, No. 4. – P. 324–338.
67. *Li L., Scaglione A., Swami A., Zhao Q.* Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2013. – **31**, No. 6. – P. 1072–1083.
68. *Li L., Scaglione A., Swami A., Zhao Q.* Trust, opinion diffusion and radicalization in social networks // Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. – 2011. – P. 691–695.

69. *Schwerdtfeger F.* Ökologie der Tiere, Bd. II: Demökologie. Struktur und Dynamik tierischer Populationen. – Berlin: Paul Parey Vlg. – 1968. – 450 s.
70. *Lotka A.J.* Elements of physical biology, 1924. Reprinted by Dover in 1956 as Elements of Mathematical Biology.
71. *Lotka A.J.* Analytical theory of biological populations. – New York. Plenum Press, 1998. – 241 p.
72. *Marvel S.A., Hong H., Papush A., Strogatz S.H.* Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict // Physical Review Letters. – 2012. – **109**. – P 118702-1–118702-4.
73. *May R.M.* Stability and complexity in model ecosystems. – Princeton: Princeton Univ. Press., 1973. – 515 p.
74. *Murray J.D.* Mathematical biology I: An introduction. – Springer, 2002. – 551 p.
75. *Murray J.D.* Mathematical biology II: Spatial models and biometrical applications. – Springer, 2004. – 811 p.
76. *Nicholson A.J., Bailey V.A.* The balance of animal populations // Proceedings of the Zoological Society of London – 1935.– **1** . – P. 551–598.
77. *Pareschi L., Toscani G., Tosin A., Zanella M.* Hydrodynamic models of preference formation in multi-agent societies // <https://arXiv:1901.00486v1> [physics.soc-ph]
78. *Sigmund K.* The population dynamics of conflict and cooperation // Doc. Math. J. DMV. – 1998. – P. 487–506.
79. *Salam K.M.M., Takahashi K.I.* Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent // Unifying Themes in Complex Systems. – 2010. – P. 299–306. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85081-638>

80. *Satur O.R.* The sure event problem in multi-component dynamical systems with attractive interaction // Міжнародна конференція молодих вчених – Київ, 2019. – С. 40.
81. *Satur O.R.* Dynamical picture of biological populations with attractive and repulsive interaction // III International scientific and practical conference “Modeling, control and information technologies” – Rivne, 2019. – P. 69–71. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2019.29>
82. *Triebel H.* Fractals and spectra: related to fourier analysis and functional spaces. – Springer Basel. – 2011. – 272 p.
83. *Watts D., Strogatz S.* Collective dynamics of 'small world' networks // Nature. – 1998. – **393**. – P. 440–442.
84. *Weisbuch G.* Bounded confidence and social networks // The European Physical Journal B. – 2004. – **38**, No. 2. – P. 339–343.
85. *Yildiz M.E. et al.* Voting models in random networks // Information Theory and Applications Workshop. – 2010. – P. 1–7.

## ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача на тему дисертації, а також відомості про апробацію результатів дисертаційної роботи.

**Наукові праці, у яких опубліковані наукові результати дисертації:**

1. *Сатур О.Р.* Граничні стани дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією // Збірник праць Інституту математики НАН України. – **14**, № 2. – Київ: Інститут математики НАН України. – 2017. – С. 122–132.
2. *Сатур О.Р.* Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2017. – **201**. – С. 34–37.
3. *Кошманенко В.Д., Сатур О.Р.* Проблема достовірної події в багатокомпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією // Нелінійні коливання. – 2019. – **22**, № 2. – С. 220–234. (Переклад: *Koshmanenko V.D., Satur O.R.* Sure Event Problem in Multicomponent Dynamical Systems with Attractive Interaction // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **249**, No. 4. – P. 629–646. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>)
4. *Сатур О.Р., Харченко Н.В.* Модель динамічної системи досягнення консенсусу // Український математичний журнал. – 2019. – **71**, № 9. – С. 1271–1283. (Переклад: *Satur O.R., Kharchenko N.V.* The model of dynamical system for the attainment of consensus. – Ukrainian Mathematical Journal. – 2020. – **71**, No. 9. – P. 1456–1469. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01725-w>)



5. *Koshmanenko V., Satur O., Voloshyna V.* Point spectrum in conflict dynamical systems with fractal partition // *Methods of Functional Analysis and Topology*. – 2019. – **25**, No. 4. – P. 324–338.
6. *Сатур О.Р.* Граничні стани багатокomпонентних динамічних систем // *Нелінійні коливання*. – 2020. – **72**, № 1. – С. 77–89.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. *Сатур О.Р.* Збіжність до рівноважного атрактора в динамічних моделях з притягальною взаємодією // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь». – Київ, 2017. – С. 75–76.
2. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Dynamic model of opinion formation // 8-ма Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. – Кам’янець-Подільський, 2018. – P. 8–9.
3. *Kharchenko N.V., Satur O.R.* Opinion dynamics on a network // International conference “Modern Stochastics: theory and application. IV”. – Kyiv, 2018. – P. 31.
4. *Satur O.R.* The sure event problem in multi-component dynamical systems with attractive interaction // Міжнародна конференція молодих математиків. – Київ, 2019. – С. 40.
5. *Satur O.R.* Dynamical picture of biological populations with attractive and repulsive interaction // III International scientific and practical conference “Modeling, control and information technologies”. – Rivne, 2019. – P. 69–71. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2019.29>

## Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародній науковій конференції “Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь” (Київ, 2017);
- 8-мій Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2018);
- International conference “Modern stochastics: theory and application. IV” (Київ, 2018);
- Літній школі у Університеті Градець-Кралова (Чехія, 2018);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 2019);
- III International scientific and practical conference “Modeling, control and information technologies” (Рівне, 2019);
- семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару: член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін);
- семінарі “Складні системи конфлікту: динаміка, моделі, спектральний аналіз” Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор В.Д. Кошманенко).