А.К. Бахтин

Экстремальные задачи о неналегающих областях и емкостные методы в геометрической теории функций комплексного переменного

Работа посвящена исследованию экстремальних проблем геометрической теории функций комплексного переменного, связаных с оценками функционалов, заданных на системах неналегающих областей. В частности, основное внимание приделяется исследованию известной проблемы В.Н. Дубинина и обобщению некоторых известных результатов в данной проблеме.

Робота присвячена дослідженню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплксної змінної, пов'язаних з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей. Зокрема, основна увага приділяється дослідженню відомої проблеми В.М. Дубиніна та узагальненню деяких відомих результатів цієї проблеми.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1 — 16]. Многие задачи такого плана сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий (см., например, [3]). Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1 — 16].

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [5], [10], [11]) и $\chi(t) = \frac{1}{2}(t+t^{-1})$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} :\ k = \overline{1,n}\right\}$, назовем ***n*-лучевой**, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Пусть Q_0 — множество всех наборов $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ различных точек лежащих на единичной окружности, занумерованных в порядке возрастания аргумента и таких что $a_1 = 1$. А через Q_1 обозначим класс n-лучевых систем для которых $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$. Ясно, что $Q_0 \subset Q_1$ так как, если $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, то $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$, $k = \overline{1,n}$ и $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$.

Покажем, что произвольную n-лучевую систему точек, можно привести к системе для которой $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$. Пусть задана произвольная n-лучевая система точек $A_n^\star$ для которой $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n^\star) = T_0$ и пусть $t_0 = T_0^{\frac{1}{n+\gamma}}$. Рассмотрим следующую n-лучевую систему

$$A_n^0 = \left\{a_k^0\right\}_{k=1}^n = \left\{\frac{a_k^\star}{t_0}\right\}_{k=1}^n.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n^0) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{\frac{a_k^\star}{t_0}}{\frac{a_{k+1}^\star}{t_0}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k^\star}{t_0}\right|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\cdot\prod_{k=1}^{n}t_0^{-(1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1}))}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\cdot t_0^{-(n+\gamma)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\cdot\left(T_0^{\frac{1}{n+\gamma}}\right)^{-(n+\gamma)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k^\star}{a_{k+1}^\star}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k^\star|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\cdot T_0^{-1}=T_0\cdot T_0^{-1}=1.$$

Таким образом, класс Q_1 значительно шире класса Q_0.

Функционалы такого вида получили название "управляющих" функционалов и, по-видимому, впервые появились в работах А.К. Бахтина (см., например, [10]).

Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционала следующего вида

$$J_n(\gamma)=r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right), \tag{1}$$

где $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек, $a_0=0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей (то есть $B_p\cap B_j=\emptyset$ при $p\neq j$) таких, что $a_k\in B_k$ при $k=\overline{0,n}$.

В работах [5, с. 68, №9.2], [11, с. 381, №16] была сформулирована следующая экстремальная задача:

Задача В.Н. Дубинина. Доказать, что максимум функционала (1), где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n\geq 2$ - попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, $r(B_j,a_j)$ - внутренний радиус области B_j в точке a_j ($a_j\in B_j$), $j=\overline{0,n}$ и $\gamma\leq n$, достигается для некоторой конфигурации областей, которые имеют n-кратную симметрию.

Эта проблема вызвала большой интерес и изучалась в различных направлениях (см., например, [4], [8], [10], [12], [16]).

При $\gamma=1$ и $n\geqslant 2$ эта задача была решена В. Н. Дубининым в работе [4], причем из его метода следует, что результат верен и при $0<\gamma<1$. Л.В. Ковалев [8] в 1996 году получил решение этой проблемы при некоторых ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно для подкласса систем точек, удовлетворяющих условию

$$0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ k=\overline{1,n},\ n\geqslant 5.$$

Следует отметить, что результат работы [8] интересен как сам по себе, так и методом исследования. Действительно, как оказывается из его метода можно получить оценки при

$n = 2, 3, 4$, которые не были рассмотрены в теореме Л.В. Ковалева. Г. В. Кузьмина [9] подтвердила результат работы [4] для односвязных областей другим методом.

В работах [10], [14] был предложен метод "управляющих" функционалов, который дает возможность ослабить условия на геометрию расположения систем точек. Благодаря этому методу, удалось обобщить постановку проблемы В. Н. Дубинина. На этом пути в работе [10, с. 255] было показано, что аналог результата В.Н. Дубинина выполняется для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, но начиная с некоторого номера $n_0(\gamma)$. Далее А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Р.В. Подвысоцкий [15] впервые доказали, что при $n \geqslant 5$ можно получить более сильные результаты для $\gamma > 1$. В 2011 году Я.В. Заболотный [16] впервые решил эту проблему при $n \geqslant 8$ и для $0 < \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$.

2. Основные результаты.

В связи с исследованиями работ [10], [14] и введением общих n-лучевых систем точек можно рассмотреть обобщенную задачу В.Н. Дубинина. То есть вместо единичной окружности рассматривать n-лучевую систему, подчиненную некоторым условиям.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma_2 = 1,2$, $\gamma_3 = 2,3$, $\gamma_4 = 3,7$, а $\gamma_n = n$ при $n \geqslant 5$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 < \gamma \leq \gamma_n$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leq 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{0,n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0$, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

В частном случае, когда точки a_k лежат на единичной окружности мы получаем известный результат Л.В. Ковалева [8].

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = \begin{cases} \sqrt[4]{n}, & n = \overline{3,6} \\ \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3}, & n \geq 7 \end{cases}$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n) \leq 1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1,n})$ справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, d_k),$$

где D_k, d_k, $k = \overline{0,n}$, $d_0 = 0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, справедливо неравенство*

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}n^n}{(n^2 - \gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\,dw^2,$$

где $R^{n+\gamma} = \mathcal{L}^{(\gamma)}\left(A_n\right)$.

Список литературы

[1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934.– 5.– С. 159 – 245.

[2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М: Наука, 1966. – 628 с.

[3] Дженкинс Дж.А. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

[4] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.

[5] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.

[6] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – 237. – С. 56 – 73.

[7] Колбина Л. И. *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области* // Вестник Ленинград. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37 – 43.

[8] Ковалев Л.В. *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности.* // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – **2**. – С. 96 – 98.

[9] Кузьмина Г.В. О связи различных задач об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1998. – **254.** – С. 116 – 131.

[10] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе.* // Праці ін-ту мат-ки НАН України. – 2008. – 308 с.

[11] Дубинин В. Н.*Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* // Владивосток "Дальнаука"ДВО РАН – 2009. – 390с.

[12] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Подвисоцкий Р.В. *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей*// Доп. НАН України. – 2009. – №9. – 7 – 11 с.

[13] Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. *Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций*// Дальвост. мат. журн. – 2010. – Т. 10. – №2. – С. 130 – 152.

[14] Бахтин А. К., Подвысоцкий Р.В. *Квадратичные дифференциалы и экстремальные задачи о неналегающих областях*// Нелінійні коливання. – 2011. – Т.14, №1. – 439 – 442 с.

[15] Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Подвысоцкий Р.В. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей// Доп. НАН України. – 2009. – №9. – 7 – 11 с.

[16] Заболотний Я.В. Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області// Доп. НАН Україны. – 2011. – №9. – 11 – 14 с.