Київський національний університет імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
кафедра математичного аналізу

Олексій Р Е Б Е Н К О

К У Р С Л Е К Ц І Й

зі спеціальності

“Методи нескінченновимірного аналізу та їх застосування в математичній фізиці.”

для магістрів механіко-математичного факультету
(спеціальність —математика),
(спеціалізації: математичний аналіз; теорія імовірності; математична фізика)

(В процесі підготовки до лекцій використані наступні джерела: [9, 7, 2, 5, 6])

К и ї в — 2 0 1 1

Зміст

Лекція 1

Приклади нескінченних систем, основні характеристики та методи їх математичного опису

1.0. Вступ

Основні поняття аналізу, як *топологія, збіжність, похідна, інтеграл*, визначені в $\mathbb{R}^1$ легко узагальнити на скінченновимірний простір $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, але є зовсім іншими у випадку нескінченновимірних просторів. Наприклад, в $\mathbb{R}^n$ інтеграли вигляду

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x_1, ..., x_n)| dx_1 \cdots dx_n \tag{1.1}$$

можуть мати скінченну границю $I_\infty = \lim_{n\to\infty} I_n < \infty$ для досить багатого запасу функцій-послідовностей $\{f_n\}$. Але чи можемо ми записати для граничного значення I_∞ вираз

$$I_\infty = \int_? |f(?)| \, d?, \tag{1.2}$$

тобто інтеграл по деякому нескінченновимірному простору від функції нескінченної кількості змінних, за деякою строго визначеною мірою ? Це питання не є тривіальним і потребує окремого підходу. Перш ніж перейти до побудови такого аналізу, обговоримо для чого це потрібно і де це має застосування.

Тому перша лекція буде присв'ячена загальному погляду на нескінченні системи, приклади таких систем, а також можливі підходи до їх математичного опису.

Звичайно на перший погляд усі відомі системи, які ми намагаємося вивчити, є скінченними. Наприклад, газ у колбі має скінчене число атомів чи молекул. Але це скінчене число навіть в невеликому об'ємі $1cm^3$ має $10^{23} - 10^{25}$ молекул. Тому здоровий глузд нам підкаже, що слідкувати за таким числом частинок це все одно, що слідкувати за нескінченним числом частинок. Більш того, виявляється, що хоч системи з нескінченним числом змінних і потребують нового аналізу, але описувати їх легше ніж системи зі скінченим , але дуже великим числом змінних, і саме для математичних моделей з нескінченним числом змінних можна описати фізичні явища, які є наслідком колективної взаємодії великого числа частинок.

Отже нескінченні системи є деякою математичною ідеалізацією великих скінчених систем, яку зручно застосувати при вивченні реальних великих систем.

1.1. Приклади нескінченних систем.

Нехай ми маємо якусь нескінченну (але злічену) множину різних об'єктів

$$\widetilde{\gamma} := \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n, ...\}, \quad \widetilde{x}_n \in X, \tag{1.3}$$

де X деякий многовид, але ми зараз не будемо вкладати в це поняття якогось визначення, а краще розглянемо конкретні приклади.

1. Класичний неперервний газ точкових масивних частинок.

Нескінченна система точок, кожна з яких у даний момент має своє місце положення(координату) і свою швидкість або імпульс, тобто пару

$$\widetilde{x}_n = (x_n, p_n), \quad x_n \in \mathbb{R}^d, \quad p_n = m_n v_n \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

є (хоч і грубою) моделлю деяких атомарних газів. Сукупність $\{\widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ утворюють *фазовий простір* системи $\tilde{\Gamma}$. Фазовий простір називають також *конфігураційним простором*, у якому кожна окрема конфігурація $\tilde{\gamma} = \{\widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{\Gamma}$ характеризує стан системи у даний конкретний момент.

Розрізняють два види станів газу:

1)**Стан рівноваги.** У цьому випадку частинки хаотично рухаються, пробігаючи деякий середній шлях між черговими зіткненнями(*шлях вільного пробігу*), який залежить від густини газу. Тоді фазовим простором є лише простір координат частинок, який визначається як множина усіх локально-скінчених підмножин простору $\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \middle| \; |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{1.5}$$

де $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ це σ-алгебра обмежених множин. Умова локальної скінченності випливає з фізики. Дійсно, якщо розглядати реальні частинки у деякому обмеженому об'ємі ($vol\Lambda := V < \infty$) і якщо ці частинки є кульками радіусу a, то ясно, що в обмеженому об'ємі Λ не може бути більш ніж $V/c(d)a^d$ ($c(3) = 4/3\pi a^3$)

частинок. Тому, розглядаючи частинки як точкові треба зберегти умову, що забезпечує скінчену кількість (хоч і довільну) частинок в обмеженому об'ємі. Середні значення фізичних величин у рівноважному стані не залежать від часу.

2)**Нерівноважний стан.**Нерівноважний стан може виникнути як збурення рівноважного стану якимсь імпульсом, який математично описується додатковою взаємодією на частинки початкової рівноважної системи. Якщо розглядати **нерівноважні процеси**, тоді треба враховувати і швидкості або імпульси частинок. У цьому випадку фазовий простір є

$$\widetilde{\Gamma} \ni \widetilde{\gamma} := \{(x_1, p_1), ..., (x_n, p_n)...\}, \quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \gamma \in \Gamma, \quad p_n \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

Нерівноважні процеси є дуже швидкими, а середні значення фізичних величин залежать від часу.

Взаємодія між частинками.

Якщо частинки не взаємодіють, то таку систему називають класичним *ідеальним газом.* Взаємодія між частинками описується потенціалом, який у самому загальному вигляді задається послідовністю

$$\mathbf{V} \equiv (0, 0, V_2(x_1, x_2), \ldots, V_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots). \tag{1.7}$$

Для довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma$ енергія взаємодії між частинками визначається за формулою:

$$U(\gamma) = \sum_{\eta \Subset \gamma} V(\eta) = \sum_{n\geq 2} \sum_{\{x_1,...,x_n\}\subset\gamma} V_n(x_1, ..., x_n). \tag{1.8}$$

Повна енергія системи

$$E(\widetilde{\gamma}) = \sum_{x\in\gamma} \frac{p_x^2}{2m_x} + U(\gamma). \tag{1.9}$$

Це дуже важливі характеристики системи, які визначають її поведінку. Частіше за все, для практичних розрахунків використовують парний потенціал. Тоді

$$U(\gamma) = \sum_{\{x_1,x_2\}\subset\gamma} V_2(x_1, x_2) = \sum_{1\leq i<j\leq|\gamma|} V_2(x_i, x_j). \tag{1.10}$$

Формули (1.8)-(1.10) є формальними і набувють змісту лише для скінченних конфігурацій γ тобто при $|\gamma| < \infty$.

Такі системи моделюють газоподібний і рідкий стани фізичної системи, а також перехід від одного до іншого, який називають фазовим переходом. Виявляється, що на мові математики також можна описати фазовий перехід, хоч це є досить складною проблемою, яка на сьогодні є відкритою для більшості фізичних систем, які моделюють реальні гази або рідини. В принципі і твердий стан, який для більшості твердих речовин характеризується *кристалічною ґраткою*, повинен виникати у вище описаному випадку при досить низьких температурах, але поки що такі результати не вдалось отримати на строгому математичному рівні. Тому при вивченні кристалічних систем визначають модель твердого тіла як наперед задану кристалічну ґратку. Таким чином ми приходимо до наступного прикладу нескінченних систем.

2.Класичні ґраткові системи або системи на графах. У цьому випадку конфігураційний простір визначається як

$$\Gamma \ni \widetilde{\gamma} := \{(j_1, x_{j_1}), ..., (j_n, x_{j_n}), ...\}, \quad j_n \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.11}$$

Така конфігурація може описувати різні системи фізичної або іншої природи:

1) $x_{j_k} = \pm 1$– модель Ізінга. Це найпростіша модель, яка описує явище намагніченості у феромагнетику. У цьому випадку

$$\Gamma = (\pm 1)^{\mathbb{Z}^d}; \tag{1.12}$$

2) $x_{j_k} = n_{j_k} \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$–модель ґраткового газу. Тоді простір конфігурацій можна подати у вигляді:

$$\Gamma = (\mathbb{N}_0)^{\mathbb{Z}^d}, \tag{1.13}$$

або для взаємодії з твердим кором (коли у вузлі $j \in \mathbb{Z}^d$ може знаходитись не більше однієї молекули):

$$\Gamma = (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}; \tag{1.14}$$

3) $x_{j_k} \in \mathbb{R}^\nu, \nu \leq d$–модель гармонійного або ангармонійного кристалу ($\nu < d$– поляризований кристал);

4) така система може також описувати економічні зв'язки між трейдерами, біологічні системи типу *хижак-жертва*, екологічні системи, тощо. З деякими з цих моделей ми познайомимося у цьому курсі. Ми познайомимося ,також, з *квантовими* системами.

3. Квантовий Бозе газ.

Згідно постулатів квантової механіки пару (x, p) треба замінити парою операторів $(\hat{x}, \hat{p})$, що діють у просторі $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ за правилами:

$$(\hat{x}f)(x) = xf(x); \quad (\hat{p}f)(x) = -i\hbar\nabla f(x). \tag{1.15}$$

Тоді виразу для енергії буде відповідати оператор

$$\hat{E}(\gamma) = -\sum_{x\in\gamma} \frac{\hbar}{2m_x}\Delta_x + U(\gamma). \tag{1.16}$$

Квантова частинка не є локалізованою в точці з координатою x, тобто є, фактично, парою $(x, \omega(\tau))$, причому (ми це пізніше покажемо) $\tau \in [0, \beta], \beta = 1/k_B T$, а $\omega(0) = \omega(\beta) = x$, де T- температура системи, k_B–постійна Больцмана, а $\omega(\tau)$ є Вінерівською траекторією. Простір конфігурацій виглядає наступним чином:

$$\widetilde{\Gamma} \ni \widetilde{\gamma} := \{(x_1, \omega_1), ..., (x_n, \omega_n), ...\}. \tag{1.17}$$

Аналогічно будуються простори конфігурацій для ґраткових квантових систем, які моделюють ангармонійні квантові кристали.

1.2. Методи математичного опису нескінченних систем.

Реальна фізична чи біологічна система у кожний момент часу t займає якусь конфігурацію $\widetilde{\gamma}(t)$ фазового простору $\widetilde{\Gamma}$. Під впливом внутрішніх або ще й зовнішніх взаємодій така система перебуває у постійному русі, тобто, кожна частинка описує якусь неперервну траєкторію, а мікроскопічний стан усієї системи визначається усіма такими траєкторіями. Але для дослідження системи необхідно знати не мікроскопічну поведінку, а макроскопічні наслідки такої поведінки, тобто, деякі макроскопічні характеристики: тиск, енергія, теплоємність, тощо. Такі фізичні характеристики називають *спостережуваними величинами*. Спостережувані величини це функції на просторі конфігурацій, тобто функції від нескінченного числа змінних. Про те яким чином будувати такі функції ми будемо говорити пізніше. Нехай $F(\widetilde{\gamma}(t))$ є такою функцією, яка описує деяку спостережувану величину. Тоді макроскопічна характеристика, яка їй відповідає, і яку ми можемо спостерігати на експерименті є середнє значення цієї величини. Воно обраховується за відомою формулою

$$\overline{F} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\widetilde{\gamma}(t))dt. \tag{1.18}$$

Підрахувати такий інтеграл для реальної системи неможливо. На початку XX століття американський математик Джозайя Віллард Гіббс (див. [4]) запропонував замість однієї системи ввести ансамбль тотожних систем, які кожної миті, з якоюсь імовірністю займають ту чи іншу конфігурацію. Такі однакові екземпляри систем отримали назву *ансамблів Гіббса.*

Отже, основним постулатом Гіббса є існування деякої імовірнісної міри μ на просторі конфігурацій $\widetilde{\Gamma}$:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} \mu(d\widetilde{\gamma}) \;=\; 1, \tag{1.19}$$

такої, що

$$\overline{F} =< F(\cdot) >_{\mu} = \int_{\widetilde{\Gamma}} F(\widetilde{\gamma})\mu(d\widetilde{\gamma}). \tag{1.20}$$

Таким чином, замість детерміністичного опису однієї системи ми розглядаємо статистичний опис поведінки ансамблю ідентичних систем.

Виникає проблема: яким чином будувати таку міру?

Існує три основних підходи, які виникли у фізиці і спираються на ідеї Больцмана, Гельмгольца і Гіббса. У наші часи ці ідеї переносять на вивчення великих систем в економіці, біології, соціології, та в інших науках.

Побудуємо таку міру на прикладі класичного газу тотожних точкових частинок. Ця побудова не є математично строгою і її можна розглядати лише як обґрунтування постулату Гіббса. Незважаючи на те, що наша мета побудувати таку міру для нескінченної системи, ми спершу побудуємо за Гіббсом таку міру для дуже великої скінченної макросистеми. До побудови цих великих систем можна підійти по різному, спираючись на різні види таких систем у природі.

Існують три види ансамблів.

1^o. **Мікроскопічний(ансамбль) розподіл Гіббса.**

Будемо вважати, що наша система є замкнутою ізольованою системою, яка знаходиться в деякій дуже великій посудині Λ об'єму V, містить фіксоване число частинок N і має фіксовану енергію E_0. Це означає, що рівняння

$$E(\widetilde{\gamma}) = E_0 \tag{1.21}$$

є рівнянням гіперповерхні у фазовому просторі $\widetilde{\Gamma}$, на якій відбуваються усі фізичні процеси у системі. Тоді функція

$$D(\widetilde{\gamma}) = C\delta\Big(E(\widetilde{\gamma}) - E_0\Big), \tag{1.22}$$

де $\delta-$ узагальнена функція Дірака, а C постійна нормування, що знаходиться з рівняння

$$C\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} \delta\Big(E(\widetilde{\gamma}) - E_0\Big) d\widetilde{\gamma} = 1, \tag{1.23}$$

буде щільністю шуканої імовірнісної міри. Тут

$$\widetilde{\Gamma}_\Lambda = \widetilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)} = \Gamma_\Lambda^{(N)} \otimes \mathbb{R}^{3N},\ N = |\gamma|,\ d\widetilde{\gamma} = \prod_{x\in\gamma} dxdp_x. \tag{1.24}$$

Цю міру називають *мірою Гіббса*, що відповідає мікроканонічному ансамблю або просто *мікроканонічним розподілом*. Відповідні середні спостережуваної F є:

$$\overline{F} =< F >_\mu = C \int_{\widetilde{\Gamma}} F(\widetilde{\gamma})\delta\Big(E(\widetilde{\gamma}) - E_0\Big) d\widetilde{\gamma}. \tag{1.25}$$

Щоб їх порахувати, треба знати явну залежність $E(\widetilde{\gamma})$ від $\widetilde{\gamma}$.

2^o. Канонічний(ансамбль) розподіл Гіббса.

Система, що займає область Λ знаходиться в, так званому, *термостаті* Λ_t, деякій іншій значно більшій системі, що має об'єм V_t, однакову фіксовану температуру T і являє собою ідеальний газ молекул з координатами $\mathbf{Q}_i$, імпульсами $\mathbf{P}_i$, $i = 1, ..., N_t$. Система знаходиться в непроникливій посудині і може обмінюватись енергією з термостатом.

Вважається, що система+термостат (s+t) є замкнутою системою, в якій встановилася рівновага. У цьому випадку у термодинамічній границі, що здійснюється за змінними термостату

$$V_t \to \infty, \quad N_t \to \infty$$

щільність міри розподілу канонічного ансамблю у скінченному об'ємі визначається за формулою

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{Q(\Lambda, N)} e^{-\beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \tag{1.26}$$

де $E(\widetilde{\gamma})$ це вираз для повної енергії системи, що знаходиться в посудині Λ, а

$$Q(\Lambda, N) \ = \ \int e^{-\beta E(\widetilde{\gamma})} d\widetilde{\gamma} \tag{1.27}$$

називають *конфігураційним інтегралом* або *малою статистичною сумою*. Формулу (1.26) можна вважати постулатом, який є обґрунтований на фізичному рівні строгості. Для того, щоб у читача не виникало відчуття незавершеності наведемо коротко ці евристичні міркування.

Для повної системи (s+t)запишемо формулу для мікроканонічного розподілу:

$$D_{s+t}(\widetilde{\gamma}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) = C_{s+t}\delta(\sum_{i=1}^{N_t} \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + E(\widetilde{\gamma}) - E_{s+t}^0). \tag{1.28}$$

Нас буде цікавити тільки система. Тому за змінними термостату можна виконати інтегрування:

$$D_s(\widetilde{\gamma}) = C_{s+t}V_t^{N_t} \int \delta(\sum_{i=1}^{N_t} \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + E(\widetilde{\gamma}) - E_{s+t}^0)(d\mathbf{P})^{N_t}. \tag{1.29}$$

Перейдемо у просторі $\mathbb{R}^{3N_t}$ до сферичної системи координат. Тоді $P = (\sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{P}_i^2)^{1/2}$ це радіус $3N_t$-вимірної сфери, а

$$(d\mathbf{P})^{N_t} \;=\; J(\Omega, d\Omega)P^{3N_t-1}dP, \tag{1.30}$$

де $J(\Omega, d\Omega)$ кутова частина якобіана переходу. Після інтеграції за кутовими змінними отримуємо вираз:

$$D_s(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{C}_{s+t}V_t^{N_t} \int \delta(\sum_{i=1}^{N_t} \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + E(\widetilde{\gamma}) - E_{s+t}^0)P^{3N_t-1}dP. \tag{1.31}$$

Скористаємося відомою формулою з теорії узагальнених функцій(див. [8], Гл.I, §1, п.9):

$$\delta(f(P)) \;=\; \sum_i \frac{1}{|f'(P_i)|}\delta(P - P_i), \quad f(P_i) = 0. \tag{1.32}$$

Отримуємо вираз:

$$D_s(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{C}_{s+t}V_t^{N_t}(2m)^{3N_t/2}\left(E_{s+t}^0 - E(\widetilde{\gamma})\right)^{\frac{3N_t}{2}-1}. \tag{1.33}$$

Зробимо припущення, що енергія термостату набагато більша за енергію системи і, враховуючи, що для ідеального газу на кожну ступінь вільності припадає по $1/2kT$ енергії, приймемо, що

$$E_{s+t}^0 \approx \left(\frac{3N_t}{2} - 1\right)kT. \tag{1.34}$$

Тоді у виразі для середніх, для функцій, що залежать тільки від змінних системи ми можемо виконати перший термодинамічний перехід $V_t \to \infty,\ N_t \to \infty$ і враховуючи, що

$$\Big(1 - \frac{E(\widetilde{\gamma})}{\left(\frac{3N_t}{2} - 1\right) kT}\Big)^{\frac{3N_t}{2}-1} \to e^{-\frac{E(\widetilde{\gamma})}{kT}}, \tag{1.35}$$

а константи, що прямують до нескінченності у виразі для середнього скоротяться. В результаті отримуємо вираз для щільності канонічного розподілу у скінченному об'ємі:

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{Q(\Lambda, N)} e^{-\beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{1.36}$$

Відповідні середні будуються за формулою

$$< F(\cdot) >_\Lambda = \frac{\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} F(\widetilde{\gamma}) D_\Lambda(\widetilde{\gamma}) d\widetilde{\gamma}}{\int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda} D_\Lambda(\widetilde{\gamma}) d\widetilde{\gamma}}. \tag{1.37}$$

Отриманий розподіл відповідає скінченній системі. Щоб отримати вираз для міри, що відповідає нескінченній системі, треба у виразі для середнього перейти до границі$\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ $(V \to \infty,\ N \to \infty)$. Таку границю виконують при умові, що середня густина частинок залишається постійною$(N/V = \rho = const)$.

Зауваження. При виконанні термодинамічної границі вираз (1.26) для щільності міри Гіббса втрачає математичний зміст. Але відповідна міра може бути визначена для певного класу взаємодій між частинками. Вивчення цієї проблеми буде присв'ячено декілька лекцій.

3^o.**Великий канонічний(ансамбль) розподіл Гіббса.**

Цей випадок буде відрізнятись від попереднього тим, що стінки посудини, які відокремлюють систему від термостату будуть проникливі для частинок. Це означає, що випадкові конфігурації системи $\widetilde{\gamma}$ будуть характеризуватися не тільки випадковими положеннями частинок $x \in \mathbb{R}^d$ та їх випадковими швидкостями(або імпульсами) $p \in \mathbb{R}^d$, але й випадковими значеннями кількості частинок N у фіксованому об'ємі Λ. З точки зору реальних фізичних систем це більш природно. У цьому випадку рівновага системи і термостату буде означати рівність хімічних потенціалів системи і термостату. *Хімічний потенціал* системи μ це величина, яка характеризує зміну внутрішньої енергії системи при зміні числа частинок системи на одну частку і тому у формулі для щільності до повної енергії треба додати величину μN, тобто фактор $e^{\beta\mu N}$ буде відповідати за розподіл кількості частинок. Тоді вираз для щільності буде мати вигляд:

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}, N) = \frac{1}{Z_\Lambda} \frac{1}{N! h^{3N}} e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad N = |\widetilde{\gamma}|, \tag{1.38}$$

де постійна нормування Z_Λ носить назву *великої статистичної суми* і виражається формулою:

$$Z_\Lambda = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)}} \frac{d\widetilde{\gamma}}{h^{3N}} e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})} d\widetilde{\gamma}, \tag{1.39}$$

де h– постійна Планка. Фізичне обґрунтування цієї формули більш заплутане і ми не будемо його наводити.

Лекція 2.

Нескінченні компактні гіббсові системи на ґратці

2.1. Простір конфігурацій.

Нехай $\mathbb{Z}^d$ d-вимірна кубічна ґратка. Кожному $j \in \mathbb{Z}^d$ припишемо спін $s_j \in S$, де S деякий метричний компакт або просто скінченна множина. Тоді простір конфігурацій

$$\Gamma \;=\; S^{\mathbb{Z}^d} \tag{2.1}$$

буде складатися з елементів

$$\gamma \;=\; \{s_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}. \tag{2.2}$$

Відповідно для кожного $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

$$\gamma_\Lambda \;=\; \{s_j\}_{j\in\Lambda} \in \Gamma_\Lambda = S^\Lambda. \tag{2.3}$$

2.2. Гамільтоніани взаємодії.

Нехай $X \subset \mathbb{Z}^d$ і $|X| < \infty$, а V це деякий потенціал взаємодії спінів в X, тобто функція на Γ_X. Тоді формальний Гамільтоніан має вигляд

$$H(\gamma) \;=\; \sum_{\eta\Subset\gamma} V(\eta) \equiv \sum_{X\Subset\mathbb{Z}^d} V(\gamma_X). \tag{2.4}$$

Локальний Гамільтоніан

$$H(\gamma_\Lambda) \;=\; \sum_{X\subseteq\Lambda} V(\gamma_X). \tag{2.5}$$

Гамільтоніан взаємодії спінів в Λ і поза Λ, тобто в $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$ є:

$$H(\gamma_\Lambda;\gamma_{\Lambda^c}) \;=\; \sum_{\substack{X\Subset\mathbb{Z}^d,\\ X\cap\Lambda\neq\emptyset,\\ X\cap\Lambda^c\neq\emptyset}} V(\gamma_X). \tag{2.6}$$

Позначимо енергію конфігурації γ_Λ з урахуванням її взаємодії з конфігурацією γ_{Λ^c} формулою

$$H_\Lambda(\gamma) \ := \ H(\gamma_\Lambda) + H(\gamma_\Lambda; \gamma_{\Lambda^c}). \tag{2.7}$$

Важливим класом взаємодій є *взаємодія найближчих сусідів.*

Означення 2.1.

Два вузли $i, j \in \mathbb{Z}^d$ називають найближчими сусідами якщо

$$|i - j| \ = \ 1. \tag{2.8}$$

Для кубічної гратки число найближчих сусідів i-го вузла $N_i = 2d$.

Означення 2.2.

Межею скінченної множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d (|\Lambda| < \infty)$ є множина

$$\partial\Lambda \ := \ \{j \in \Lambda^c \mid \exists\, i \in \Lambda \text{ таке, що } |i - j| = 1\}. \tag{2.9}$$

Означення 2.3.

Гамільтоніан відповідає взаємодії найближчих сусідів, якщо

$$H(\gamma_\Lambda; \gamma_{\Lambda^c}) \ = \ H(\gamma_\Lambda; \gamma_{\partial\Lambda}). \tag{2.10}$$

Введемо також поняття *відносного Гамільтоніану*:

$$H(\gamma \mid \gamma') \ = \ H(\gamma) - h(\gamma'). \tag{2.11}$$

Цей Гамільтоніан є не формальним, якщо $\gamma = \gamma' - a.s.$ (майже всюди), тобто, якщо $s_i \neq s_i^{'}$ тільки для скінченного числа вузлів. Він збігається з Гамільтоніаном $H_\Lambda(\gamma)$ якщо в ньому покласти $\gamma' = \gamma_{\Lambda^c}$ для деякого $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$.

2.3.Основний стан.

Означення 2.4.

Конфігурацію γ_0 називають основним станом Гамільтоніана H, якщо

$$H(\gamma \mid \gamma_0) \ \geq \ 0 \text{ для всіх } \gamma \ = \ \gamma_0 - a.s.. \tag{2.12}$$

2.4.Приклад: модель Ізінга.

Простір конфігурацій

$$S \ = \ \{-1, 1\}, \quad \Gamma \ = \ (\pm 1)^{\mathbb{Z}^d}. \tag{2.13}$$

Гамільтоніан

$$H_\Lambda(\gamma) \ = \ -J \sum_{\substack{\{i,j\} \subset \Lambda, \\ |i-j|=1}} s_i s_j - J \sum_{\substack{i \in \Lambda, \\ j \in \Lambda^c, \\ |i-j|=1}} s_i s_j. \tag{2.14}$$

Якщо $J > 0$, систему називають феромагнетиком, якщо $J < 0$, систему називають антиферомагнетиком.

2.5. Гіббсові розподіли.

Умовний розподіл Гіббса.

Нехай $\mu_0^{\{i\}}(\cdot) = \mu_0(\cdot)$ деякий (не обов'язково імовірнісний) розподіл значення спінів у кожному з вузлів $i \in \mathbb{Z}^d$. Визначимо для деякого $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ на просторі Γ_Λ міру μ_0^Λ як добуток мір μ_0:

$$\mu_0^\Lambda \ = \ \bigotimes_{i\in\Lambda} \mu_0^{\{i\}}. \tag{2.15}$$

Розглянемо Гамільтоніани, для яких $H_\Lambda(\gamma) < \infty, \gamma \in \Gamma$ і

$$Q_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c}) \ = \ \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\gamma)} d\mu_0^\Lambda(\gamma_\Lambda) < \infty. \tag{2.16}$$

Означення 2.5.

Умовним розподілом Гіббса в об'ємі Λ з граничними умовами γ_{Λ^c} називають розподіл імовірності на просторі Γ_Λ конфігурацій γ_Λ, щільність якого відносно міри μ_0^Λ має вигляд

$$p(\gamma_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \ = \ \frac{1}{Q_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c})} e^{-\beta H_\Lambda(\gamma)} \tag{2.17}$$

Зауваження 2.1.

Якщо радіус взаємодії між спінами є скінченним, то $H_\Lambda(\gamma)$ є завжди скінченною величиною.

Твердження 2.1.

Нехай $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Тоді

$$p(\gamma_{\Lambda_1} \mid \gamma_{\Lambda_1^c}) \ = \ \frac{p(\gamma_{\Lambda_2} \mid \gamma_{\Lambda_2^c})}{\int_{\Gamma_{\Lambda_1}} p(\gamma_{\Lambda_2} \mid \gamma_{\Lambda_2^c}) \mu_0^{\Lambda_1}(d\gamma_{\Lambda_1})}. \tag{2.18}$$

Доведення є наслідком означень (2.7), (2.16), (2.17). Дійсно, згідно означення (2.7) для довільних $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_2}(\gamma) &= H(\gamma_{\Lambda_2}) + H(\gamma_{\Lambda_2}; \gamma_{\Lambda_2^c}) = \\ &= H(\gamma_{\Lambda_1}) + H(\gamma_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) + H(\gamma_{\Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}) + \\ &+ H(\gamma_{\Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2^c}) + H(\gamma_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2^c}) + H(\gamma_{\Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2^c}), \end{aligned}$$

де

$$H(\gamma_{\Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}; \gamma_{\Lambda_2^c}) \ = \sum_{\substack{X \Subset \mathbb{Z}^d, \\ X \cap \Lambda_1 \neq \emptyset, \\ X \cap \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \neq \emptyset, \\ X \cap \Lambda_2^c \neq \emptyset}} V(\gamma_X).$$

Далі розпишемо праву частину (2.18), використовуючи означення (2.17) і розписавши $H_{\Lambda_2}(\gamma)$ згідно передостанньої та останньої рівностей.

Граничний розподіл Гіббса.

Означення 2.6.

Розподіл P на Γ називають граничним розподілом Гіббса, що відповідає Гамільтоніану H, якщо для будь якого $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$:

1) *множина конфігурацій Γ, для яких*

$$H_\Lambda(\gamma) < \infty \text{ і } Q_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c}) < \infty \tag{2.19}$$

має P-імовірність 1;

2) *з P-імовірністю 1 умовний розподіл, індукований розподілом P на Γ_Λ при фіксованих граничних конфігураціях γ_{Λ^c} є абсолютно неперервним відносно міри μ_0^Λ, а його щільність відносно цієї міри визначається формулою (2.17).*

Таке визначення розподілу Гіббса для нескінченної системи було впеше запропоновано незалежно Добрушиним (Р.Л. Добрушин)(1968) та Ленфоррдом-Руеллом (O.E. Lanford, D. Ruelle) (1968).

2.5. Існування граничних розподілів Гіббса.

Нехай S – метричний компакт. Тоді по теоремі Тихонова Γ теж буде метричним компактом в топології прямого добутку. Сформулюємо основну теорему цього підрозділу.

Теорема 2.1.

Припустимо, що для будь якої скінченної множини $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ функція $H_\Lambda(\gamma)$ є неперервною функцією на Γ, а міра μ_0 є скінченною. Тоді існує принаймні один граничний розподіл Гіббса.

Доведення. Розглянемо довільну зростаючу послідовність множин

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots \subset \Lambda_n \subset \ldots, \ \bigcup_n \Lambda_n \ = \ \mathbb{Z}^d \tag{2.20}$$

і довільну послідовність граничних умов $\gamma_{\Lambda_k}, k = 1, 2, \ldots$. Побудуємо за допомогою щільностей (2.17) відповідну послідовність мір

$$\mu_k(\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) \ = \ p(\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c})\mu_0^{\Lambda_k}(d\gamma_{\Lambda_k}). \tag{2.21}$$

Внаслідок компактності Γ, послідовність μ_k включає підпослідовність, що слабо збігається до деякої граничної міри μ, що відповідає розподілу P. Для простоти можна вважати, що сама послідовність μ_k збігається до μ. Залишилось довести, що відповідний умовний розподіл (тобто умовний розподіл, індукований розподілом P) має щільність, яка збігається з (2.17), тобто, що міра μ є мірою Гіббса. Це означає, що, якщо для довільної скінченної множини $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ і довільної обмеженої $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірної функції f побудувати по щільності (2.17) умовне математичне сподівання відносно σ-алгебри $\mathfrak{B}(\Gamma_{\Lambda^c})$ за формулою:

$$E[f \mid \mathfrak{B}(\Gamma_{\Lambda^c})](\gamma_{\Lambda^c}) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\gamma_\Lambda) p(\gamma_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \mu_0^\Lambda(d\gamma_\Lambda), \tag{2.22}$$

то згідно визначення умовного математичного сподівання для довільної скінченної множини $\Lambda' \Subset \mathbb{Z}^d,\ \Lambda \cap \Lambda' = \emptyset$) і довільної обмеженої $\mathfrak{B}(\Gamma'_\Lambda)$-вимірної функції g виконується рівність:

$$\int_\Gamma g(\gamma_{\Lambda'}) f(\gamma_\Lambda) \mu(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma g(\gamma_{\Lambda'}) E[f \mid \mathfrak{B}(\Gamma_{\Lambda^c})](\gamma_{\Lambda^c}) \mu(d\gamma) \;=$$

$$=\; \int_\Gamma g(\gamma_{\Lambda'}) \left[\int_{\Gamma_\Lambda} f(\gamma'_\Lambda) p(\gamma'_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \mu_0^\Lambda(d\gamma'_\Lambda) \right] \mu(d\gamma). \tag{2.23}$$

Це рівняння є, фактично, визначенням міри Гіббса для нескінченної системи спінів на $\mathbb{Z}^d$. Воно має назву *ДЛР-рівняння (рівняння Добрушина-Ленфорда-Руелла.* Щоб довести існування граничного розподілу для системи, яку ми розглядаємо, виберемо в послідовності мір μ_k номер k настільки великий, щоб $\Lambda \cup \Lambda' \subset \Lambda_k$. Тоді за визначенням міри μ_k маємо:

$$L_k := \int_{\Gamma_{\Lambda_k}} g(\gamma_{\Lambda'}) f(\gamma_\Lambda) \mu_k(d\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) = \int_{\Gamma_{\Lambda_k}} g(\gamma_{\Lambda'}) f(\gamma_\Lambda) p(\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) \mu_0^{\Lambda_k}(d\gamma_{\Lambda_k}). \tag{2.24}$$

З формули (2.17) знаходимо

$$p(\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) = p(\gamma_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \int_{\Gamma_\Lambda} p(\gamma_{\Lambda_k \setminus \Lambda} \cup \gamma'_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) \mu_0^\Lambda(d\gamma'_\Lambda). \tag{2.25}$$

Підставимо цей вираз у праву частину формули (2.24). Тоді, розбиваючи одночасно інтегрування за мірою $\mu_0^{\Lambda_k}$ на два інтеграли:

$$\int_{\Gamma_{\Lambda_k}} (\cdots) \mu_0^{\Lambda_k}(d\gamma_{\Lambda_k}) = \int_{\Gamma_{\Lambda_k \setminus \Lambda}} \int_{\Gamma_\Lambda} (\cdots) \mu_0^{\Lambda_k \setminus \Lambda}(d\gamma_{\Lambda_k \setminus \Lambda}) \mu_0^\Lambda(d\gamma_\Lambda), \tag{2.26}$$

зробимо заміну змінних $\gamma_\Lambda \leftrightarrow \gamma'_\Lambda$ і переставимо інтеграли за мірами $\mu_0^\Lambda(d\gamma_\Lambda)$ і $\mu_0^\Lambda(d\gamma'_\Lambda)$. Отримаємо вираз

$$\int_{\Gamma_{\Lambda_k}} g(\gamma_{\Lambda'}) \left[\int_{\Gamma_\Lambda} f(\gamma'_\Lambda) p(\gamma'_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \mu_0^\Lambda(d\gamma'_\Lambda) \right] p(\gamma_{\Lambda_k} \mid \gamma_{\Lambda_k^c}) \mu_0^{\Lambda_k}(d\gamma_{\Lambda_k}) = R_k. \tag{2.27}$$

Виконавши граничний перехід $k \to \infty$, бачимо, що L_k прямує до лівої частини рівняння (2.23), а R_k прямує до правої частини рівняння (2.23). **Теорема доведена.**

Отже для нескінченної системи спінів, що приймають значення в деякому компактному метричному просторі S існує принаймні один стан Гіббса. У наступній лекції ми покажемо, що єдиність чи неєдиність гіббсового стану залежить від параметра β, тобто від температури системи.

Лекція 3.

Двовимірна модель Ізінга. Контурна техніка

3.1.Гамільтоніан. Гіббсові стани.

Нагадаємо, що простір конфігурацій

$$S \;=\; \{-1,1\}, \quad \Gamma \;=\; (\pm 1)^{\mathbb{Z}^d}, \tag{3.1}$$

а Гамільтоніан конфігурації спінів в обмеженій області $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^2$ з граничними умовами $\bar{\gamma} = \{\bar{s}_i\}_{\Gamma_{\Lambda^c}}$ має вигляд:

$$H(\gamma_\Lambda) + H(\gamma_\Lambda;\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) \;=\; -J\sum_{<i,j>\subset\Lambda} s_i s_j - J\sum_{\substack{i\in\Lambda,\\ j\in\Lambda^c,\\ <i,j>}} s_i\bar{s}_j. \tag{3.2}$$

Тут введене позначення $< i,j >:= |i-j| = 1$. Будемо розглядати випадок $J > 0$, тобто феромагнетик.

Легко переконатися, що основні стани, тобто, стани, що відповідають найменшому значенню енергії є:

$$\Psi_0^{(+)} \;=\; \{s_i = +1\}_{i\in\mathbb{Z}^2}, \quad \Psi_0^{(-)} \;=\; \{s_i = -1\}_{i\in\mathbb{Z}^2} \tag{3.3}$$

Очевидно, що

$$H(\Psi_{0;\Lambda}^{(+)}) \;=\; H(\Psi_{0;\Lambda}^{(-)}), \tag{3.4}$$

тобто стани є виродженими. Щоб зняти виродженість, треба включити зовнішнє поле, тобто розглянути гамільтоніан

$$H_I(\gamma_\Lambda) \;=\; H(\gamma_\Lambda) + B\sum_{i\in\Lambda} s_i. \tag{3.5}$$

Умовний розподіл, що відповідає заданим граничним умовам(конфігураціям) $\bar{\gamma} = \{\bar{s}_i\}_{\Gamma_{\Lambda^c}}$ має вигляд:

$$p(\gamma_\Lambda \mid \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) \;=\; \frac{1}{Q_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c})} e^{-\beta(H(\gamma_\Lambda)+H(\gamma_\Lambda;\bar{\gamma}_{\Lambda^c}))}, \tag{3.6}$$

$$Q_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c}) \;=\; \sum_{\{s_i\}_{i\in\Lambda}} e^{-\beta(H(\gamma_\Lambda)+H(\gamma_\Lambda;\bar{\gamma}_{\Lambda^c}))} \tag{3.7}$$

Введемо два розподіли, що відповідають граничним умовам, які в області $\Lambda^c = \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda$ збігаються або $\Psi_0^{(+)}$ з або з $\Psi_0^{(-)}$:

$$p_+^\Lambda(\gamma_\Lambda) \;=\; p(\gamma_\Lambda \mid \Psi_{0;\Lambda^c}^{(+)}), \;\; p_-^\Lambda(\gamma_\Lambda) \;=\; p(\gamma_\Lambda \mid \Psi_{0;\Lambda^c}^{(-)}). \tag{3.8}$$

Ми зараз покажемо, що при достатньо низьких температурах ($\beta >> 1$) відповідні граничні розподіли будуть різні, тобто

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^2} p_+^\Lambda \;\neq\; \lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^2} p_-^\Lambda. \tag{3.9}$$

3.2.Межа конфігурації. Контури конфігурації.

Нехай $\widetilde{\mathbb{Z}}^2$–розбиття $\mathbb{R}^2$ на одиничні квадрати Δ_j, центри яких знаходяться у вузлах $j \in \mathbb{Z}^2$. Нехай $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^2$ є квадратом, тобто відповідне $\widetilde{\Lambda} \Subset \widetilde{\mathbb{Z}}^2$ має вигляд:

$$\widetilde{\Lambda} \;=\; \underset{j\in\Lambda}{\cup} \Delta_j. \tag{3.10}$$

Нехай в Λ задана конфігурація $\gamma_\Lambda = \{s_j\}_{j\in\Lambda}$, а в Λ^c гранична конфігурація $\Psi_{0;\Lambda^c}^{(+)}$. Позначимо через $\Lambda^{(-)} \subset \Lambda$ множину

$$\Lambda^{(-)} = \Lambda^{(-)}(\gamma_\Lambda) := \{j \in \Lambda \mid s_j = -1\}. \tag{3.11}$$

Відповідна множина в $\widetilde{\mathbb{Z}}^2$ є

$$\widetilde{\Lambda}^{(-)} \;=\; \underset{j\in\Lambda^{(-)}}{\cup} \Delta_j. \tag{3.12}$$

Означення 3.1. *Межею конфігурації γ_Λ будемо називати межу множини $\widetilde{\Lambda}^{(-)}$:*

$$\partial\gamma_\Lambda := \partial\widetilde{\Lambda}^{(-)}, \tag{3.13}$$

тобто контур, складений з ребер кубиків Δ_j, що оточує $\widetilde{\Lambda}^{(-)}$. На малюнку межа $\partial\gamma_\Lambda$ буде виглядати як межа множини острівців зі значеннями спінів $s_j = -1$ (мінусів) у морі плюсів, тобто квадратиків, у яких значення спіну $s_j = +1$. Межу кожного з острівців будемо називати *контурами конфігурації* і позначати літерою C. Отже кожна межа конфігурації буде деяким набором контурів:

$$\partial\gamma_\Lambda \;=\; \{C_1, ..., C_k\}, \;\; k = k(\gamma_\Lambda) = 0, 1, 2, ... \tag{3.14}$$

Кожній конфігурації γ_Λ однозначно відповідає певний набір контурів, по яким можна відновити конфігурацію.

3.3. Імовірність окремого контуру. Нерівність Пайєрлса.

Зрозуміло, що деякий контур C може належати багатьом конфігураціям. Позначимо через $P_+^\Lambda(C)$ імовірність того, що заданий контур C належить межі деякої конфігурації $\partial\gamma_\Lambda$ з граничними умовами $\Psi_{0;\Lambda^c}^{(+)}$. Тоді

$$P_+^\Lambda(C) \ = \ \frac{\sum\limits_{\{s_i\}_{i\in\Lambda}:C\in\partial\gamma_\Lambda} e^{-\beta H(\gamma_\Lambda|+)}}{Q_\Lambda(+)}, \tag{3.15}$$

де

$$H(\gamma_\Lambda\mid +) \ = \ H(\gamma_\Lambda) + H(\gamma_\Lambda;\Psi_{0;\Lambda^c}^{(+)}), \tag{3.16}$$

а $Q_\Lambda(+)$ збігається з виразом (3.7) при $\bar{\gamma}_{\Lambda^c} = \Psi_{0;\Lambda^c}^{(+)}$.

Лема 3.1. (R. Peierls (1936)

Імовірність контуру C довжиною $|C|$ оцінюється формулою:

$$P_+^\Lambda(C) \ = \ P_+(C) \ \le \ e^{-2\beta J|C|}. \tag{3.17}$$

Доведення. Нехай N_Λ^c число сусідів в об'ємі Λ. Якщо Λ є квадратом, то

$$N_\Lambda^c \ = \ 2|\Lambda| + 2(|\Lambda|)^{1/2}, \tag{3.18}$$

бо кожний вузол має чотири сусіди, але враховується два рази, а граничні один раз. Позначимо число сусідів з однаково направленими спінами $s_i = s_j,\ |i-j| = 1$ через

$$N_\Lambda^+ \ = \ N_{++} + N_{--}, \tag{3.19}$$

а число сусідів з $s_i \neq s_j,\ |i-j| = 1$ через $N_\Lambda^- = N_{+-}$. Тоді

$$N_\Lambda^c \ = \ N_\Lambda^+ + N_\Lambda^-. \tag{3.20}$$

Виразимо Гамільтоніан через N^+ і N^-:

$$H(\gamma_\Lambda\mid +) \ = \ -J(N_\Lambda^+ - N_\Lambda^-). \tag{3.21}$$

З означення контуру випливає, що пара сусідів, для яких $s_i \neq s_j$ завжди лежать по різні сторони ребер, які утворюють межу контуру. Отже

$$N^- \ = \ |\partial\gamma_\Lambda| \ = \ \sum_{i=1}^k |\partial C_i|. \tag{3.22}$$

Тоді

$$N_\Lambda^+ \ = \ N_\Lambda^c - N^- \ = \ N_\Lambda^c - |\partial\gamma_\Lambda|, \tag{3.23}$$

а

$$H(\gamma_\Lambda \mid +) \;=\; -J(N_\Lambda^c - 2|\partial\gamma_\Lambda|). \tag{3.24}$$

Остаточно отримаємо для $P_+(C)$ наступний вираз:

$$P_+^\Lambda(C) \;=\; \frac{\sum\limits_{\{s_i\}_{i\in\Lambda}:C\in\partial\gamma_\Lambda} e^{-2\beta J|\partial\gamma_\Lambda|}}{\sum\limits_{\{s_i\}_{i\in\Lambda}} e^{-2\beta J|\partial\gamma_\Lambda|}}, \tag{3.25}$$

бо вираз $e^{\beta J N_\Lambda^c}$ скорочується з таким самим виразом у знаменнику. Нехай тепер $\mathcal{M}_C^+$ це множина конфігурацій, для яких $C \in \partial\gamma_\Lambda$, а $\mathcal{M}_C^-$ це множина конфігурацій, для яких $C \cap \partial\gamma_\Lambda = \emptyset$. Побудуємо відображення I_C між $\mathcal{M}_C^+$ і $\mathcal{M}_C^-$. Для довільної конфігурації $\gamma_\Lambda \in \mathcal{M}_C^+$ задамо дію I_C таким чином, що в конфігурації $I_C\gamma_\Lambda$ в середині контуру C усі спіни змінюють свій знак на протилежний. Це означає, що контур C зникає, тобто конфігурація $I_C\gamma_\Lambda \in \mathcal{M}_C^-$. Зрозуміло, що

$$\partial\gamma_\Lambda \;=\; \partial(I_C\gamma_\Lambda) \cup C. \tag{3.26}$$

Звідси маємо:

$$|\partial\gamma_\Lambda| \;=\; |\partial(I_C\gamma_\Lambda)| + |C|. \tag{3.27}$$

Замінимо у знаменнику виразу (3.25) суму по усім можливим конфігураціям на суму по конфігураціям в $\mathcal{M}_C^-$, збільшуючи тим самим праву частину (3.25). Отримуємо нерівність:

$$P_+^\Lambda(C) \;\leq\; \frac{\sum\limits_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^+} e^{-2\beta J|\partial\gamma_\Lambda|}}{\sum\limits_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^-} e^{-2\beta J|\partial\gamma_\Lambda|}}. \tag{3.28}$$

Множина конфігурацій $\mathcal{M}_C^+$ відрізняється від $\mathcal{M}_C^-$ тим, що всі конфігурації в $\mathcal{M}_C^-$ утворюються з конфігурацій множини $\mathcal{M}_C^+$ шляхом знищення контуру C. Це означає, що для довільної вимірної функції на Γ_Λ має місце формула:

$$\sum_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^-} f(\gamma_\Lambda) \;=\; \sum_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^+} f(I_C\gamma_\Lambda). \tag{3.29}$$

Враховуючи цю формулу і співвідношення (3.27) нерівність (3.28) можна переписати таким чином:

$$P_+^\Lambda(C) \;\leq\; \frac{\sum\limits_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^+} e^{-2\beta J|\partial\gamma_\Lambda|}}{\sum\limits_{\gamma_\Lambda\in\mathcal{M}_C^+} e^{-2\beta J|\partial(I_C\gamma_\Lambda)|}} = e^{-2\beta J|C|}, \tag{3.30}$$

що й завершує доведення леми. ■

Наслідок 3.1. *Для достатньо великих β імовірність появи великих контурів є малою. Або більш точно, існує постійна $C_1 = C_1(\beta)$ така, що*

$$P_+^1 := P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid |C| > C_1 \ln|\Lambda| \text{ хоч для одного } C \in \partial\gamma_\Lambda\} \to 0, \tag{3.31}$$

$$\text{при } \Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2, \text{ а } C_1 \to 0 \text{ при } \beta \to \infty.$$

Доведення. Виберемо на кожному контурі початкову точку, наприклад, найнижчу крайню ліву. Підрахуємо імовірність того, що точка $k_0 \in \mathbb{Z}^2$ належить квадрату Δ_{k_0}, нижній лівий кут якого є початком контуру C, довжина якого більше ніж $C_1 \ln|\Lambda|$. Константу C_1 визначимо пізніше.

Число контурів, довжиною L з початком k_0 позначимо $N_{k_0}(L)$. Легко підрахувати, що

$$N_{k_0}(L) \le 3^{L-1}, \tag{3.32}$$

бо, внаслідок означення початку контуру, з точки k_0 можна провести наступне ребро тільки у 3-х напрямках. Виходячи з того, що за Лемою Пайерлса імовірність появи контуру довжиною L не перевищує правої частини нерівності (3.17), імовірність конфігурацій γ_Λ, у яких з'явиться хоча б один контур довжиною L можна оцінити наступною нерівністю:

$$P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid k_0 - \text{початок контуру},\ C \in \partial\gamma_\Lambda,\ |C| = L\} \le 3^{L-1}e^{-2\beta JL}. \tag{3.33}$$

Виберемо параметр β таким, що

$$3e^{-2\beta J} \ < \ 1 \ \ \Rightarrow \ \ \beta \ > \ \frac{1}{2J}\ln 3. \tag{3.34}$$

Тоді

$$P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid k_0,\ C \in \partial\gamma_\Lambda,\ |C| \ge C_1 \ln|\Lambda|\} \le \sum_{L \ge C_1 \ln|\Lambda|} 3^{L-1}e^{-2\beta JL} \le \tag{3.35}$$

$$\le \frac{1}{3}\frac{\exp[(\ln 3 - 2\beta J)C_1 \ln|\Lambda|]}{1 - 3e^{-2\beta J}} \ \le \ \frac{|\Lambda|^{(\ln 3 - 2\beta J)C_1}}{1 - 3e^{-2\beta J}}. \tag{3.36}$$

Враховуючи, що k_0 можна вибрати $|\Lambda|$-способами остаточно отримуємо нерівність

$$P_+^1 \ \le \ \frac{|\Lambda|^{(\ln 3 - 2\beta J)C_1 + 1}}{1 - 3e^{-2\beta J}}. \tag{3.37}$$

Для того, щоб забезпечити справедливість нашого твердження, необхідно, щоб виконувалась нерівність:

$$(\ln 3 - 2\beta J)C_1 + 1 < 0, \text{ тобто, щоб } C_1 \ > \ \frac{1}{2\beta J - \ln 3}. \tag{3.38}$$

■

3.4. Теорема Пайерлса.

Теорема Пайерлса. *Існує критична температура T_c (або $\beta_c = 1/k_B T$), така що для всіх $T < T_c$ ($\beta > \beta_c$) система може перебувати принаймні у двох різних трансляційно-інваріантних станах, що відповідають двом основним станам Гамільтоніану H: $\Psi_0^{(+)}$ і $\Psi_0^{(-)}$.*

Доведення теореми спирається на наступний наслідок з Леми Пайерлса.

Наслідок 2. *Нехай вузол* $\mathbf{0} = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \mathbf{\Lambda}$. *Тоді*

$$P_+^\Lambda := P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid s_{\mathbf{0}} = -1\} \to 0 \text{ при } \beta \to \infty. \tag{3.39}$$

Доведення. $s_{\mathbf{0}} = -1$, то $\mathbf{0} \in Int\{C\}$. Нехай початок кожного контуру визначається вузлом $k_0 = (p,q) \in \Lambda$. Тоді довжина найменшого контуру з початком k_0 і такого, що охоплює вузол $\mathbf{0}$ дорівнює $2(|p|+|q|)+4$. Тоді, так само, як і при доведенні **наслідку 1**, отримуємо:

$$P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid \mathbf{0} \in Int\{C\}, k_0 = (p,q),\ C \in \partial\gamma_\Lambda,\ |C| \le C_1 \ln|\Lambda|\} \le \tag{3.40}$$

$$\le \sum_{L=2(|p|+|q|)+4}^{C_1 \ln|\Lambda|} 3^{L-1} e^{-2\beta J L} \le \frac{3^{2(|p|+|q|)+3} e^{-4\beta J(|p|+|q|+2)}}{1-3e^{-2\beta J}}.$$

Тоді

$$P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid s_{\mathbf{0}} = -1\} = \tag{3.41}$$

$$= \sum_{(p,q)\in\Lambda} P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid \mathbf{0} \in Int\{C\}, k_0 = (p,q),\ C \in \partial\gamma_\Lambda,\ |C| \le C_1 \ln|\Lambda|\} +$$

$$+ P_+^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid \mathbf{0} \in Int\{C\},\ |C| \ge C_1 \ln|\Lambda|,\ \text{хоч для одного } C \in \partial\gamma_\Lambda\} \le$$

$$\le \frac{27 e^{-8\beta J}}{1-3e^{-2\beta J}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2(m+1)(9e^{-4\beta J})^m\right] + \frac{|\Lambda|^{(\ln 3 - 2\beta J)C_1 + 1}}{1-3e^{-2\beta J}}.$$

У передостанньому доданку правої частини нерівності (3.41) враховано, що кількість p і q для яких $|p|+|q| = m$ дорівнює $2(m+1)$. Легко бачити, що права частина нерівності (3.41) прямує до нуля при $\beta \to \infty$, що й стверджує наслідок 2.

Доведення Теореми Пайєрлса. Позначимо граничні розподіли

$$P_\pm := \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2} P_\pm^\Lambda\{\gamma_\Lambda \mid \Psi_{0;\Lambda^c}^{(\pm)}\}. \tag{3.42}$$

Тоді з наслідку 2 випливає, що знайдеться β таке, що

$$P_+\{s_{\mathbf{0}} = -1\} < \frac{1}{3}. \tag{3.43}$$

Якщо тепер провести такі самі міркування, замінивши знак + на знак −, отримаємо нерівність

$$P_{-}\{s_{\mathbf{0}} = +1\} < \frac{1}{3}. \tag{3.44}$$

З нерівності (3.44) знаходимо, що

$$P_{-}\{s_{\mathbf{0}} = -1\} = 1 - P_{-}\{s_{\mathbf{0}} = +1\} > \frac{2}{3}. \tag{3.45}$$

Отже

$$P_{+}\{s_{\mathbf{0}} = -1\} \neq P_{-}\{s_{\mathbf{0}} = -1\}, \tag{3.46}$$

тобто імовірність тої самої події при різних граничних умовах є різною, що свідчить про різні граничні розподіли.

Теорема доведена. ■

Лекція 4.

Гратчасті гази: гіббсові розподіли

4.1.Гіббсові ансамблі гратчастих газів.

Гратчастим газом будемо називати нескінченну систему точкових частинок, які знаходяться у вузлах гратки $\mathbb{Z}^d$ і можуть перестрибувати в інші вузли під впливом деякої взаємодії

$$V \ := \ (0, 0, V^{(2)}_{j_1 j_2}, ..., V^{(n)}_{j_1 \cdots j_n}, ...). \tag{4.1}$$

Ми будемо розглядати найпростіший випадок парної трансляційно-інваріантної взаємодії

$$V^{(n)}_{j_1 \cdots j_n} \equiv 0, \text{ для } n \neq 2, \ V_{j_1 j_2} \ = \ V^{(2)}_{j_1 j_2} \ = \begin{cases} \phi_0, & \text{для } j_1 = j_2, \\ \phi_{|j_1 - j_2|}, & \text{коли } j_1 \neq j_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\phi_0 = +\infty$ потенціал ϕ називають *потенціалом з твердою серцевиною* (hard-core potential). Частіше всього саме таку систему називають гратчастим газом.

Простір конфігурацій такої системи визначається наступним чином:

$$\Gamma \ = \ \{\gamma = \{n_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d} \mid n_j \in \mathbb{N}_0, \ \}. \tag{4.3}$$

У випадку системи, що взаємодіє через потенціал твердої серцевини $n_j \in \{0, 1\}$, тобто у вузлі гратки може знаходитись не більше однієї частинки. Легко бачити, що у цьому випадку прстір конфігурацій збігається з множиною усіх підмножин гратки $\mathbb{Z}^d$:

$$\Gamma \ = \ C_{\mathbb{Z}^d} \ = \ \{c \subseteqq Z^d\}. \tag{4.4}$$

У випадку скінченої гратки $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$

$$\Gamma_\Lambda \;=\; C_\Lambda \;=\; \{c \subseteqq \Lambda\}. \tag{4.5}$$

У першій лекції ми відзначали, що існують три способи побудови рівноважних гіббсових станів, які пов'язані з так званими гіббсовими ансамблями: мікроканонічний, канонічний і великий канонічний.

1^o. **Мікроканонічний розплділ.**

В обмеженому об'ємі $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ число частинок $N \leq |\Lambda|$ і енергія

$$E_\Lambda(\gamma) \;=\; E_\Lambda(c) \;=\; \sum_{\{j,k\}\subset c} \phi_{|j-k|}, \;\; c \subseteqq \Lambda \tag{4.6}$$

є фіксованими. Простір конфігурацій

$$\Gamma_\Lambda \;=\; C_{\Lambda,N,E} \;=\; \{c \subseteqq \Lambda \mid |c| = N, \;\; E_\Lambda(c) = E_0\}. \tag{4.7}$$

Відповідний розподіл є рівномірним

$$Pr_{\Lambda,N,E}(\{c\}); = \frac{1}{|C_{\Lambda,N,E}|} \;=\; \mu^\Lambda_{(MCA)}(c). \tag{4.8}$$

Величина

$$S(\Lambda, N, E) \;:=\; \ln |C_{\Lambda,N,E}| \tag{4.9}$$

має назву *конфігураційна ентропія.*

2^o. **Канонічний розподіл.**

В обмеженому об'ємі $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ число частинок $N \leq |\Lambda|$ і температура β є фіксованими. Простір конфігурацій

$$\Gamma_\Lambda \;=\; C_{\Lambda,N} \;=\; \{c \subseteqq \Lambda \mid |c| = N, \; \beta - \text{фіксоване}\}. \tag{4.10}$$

Імовірність кожної конфігурації визначається формулою

$$Pr_{\Lambda,N,\beta}(\{c\}); = \frac{1}{Q_{\Lambda,N}(\beta)} e^{-\beta E_\Lambda(c)} \;=\; \mu^\Lambda_{(CA)}(c), \tag{4.11}$$

де нормувальна постійна

$$Q_{\Lambda,N}(\beta) \;=\; \sum_{c\in C_{\Lambda,N}} e^{-\beta E_\Lambda(c)} \tag{4.12}$$

має назву *конфігураційного інтегралу*, а її логарифм, а точніше

$$F(\Lambda, N, \beta) \;:=\; -kT \ln Q_{\Lambda,N}(\beta) \tag{4.13}$$

вільною енергією Гельмгольца або *просто вільною енергією.*

3^o. Великий канонічний розплділ.

В обмеженому об'ємі $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ хімічний потенціал μ і температура β є фіксованими. Частинки можуть вільно проникати через межу системи $\partial\Lambda$, але зовні посудини Λ вони не взаємодіють між собою, а лише з частинками системи в Λ. Простір конфігурацій

$$\Gamma_\Lambda \;=\; C_\Lambda \;=\; \{c \subseteqq \Lambda \mid (\mu, \beta) - \text{фіксовані}\}. \tag{4.14}$$

Імовірність кожної конфігурації визначається формулою

$$Pr_{\Lambda,z,\beta}(\{c\}) \;=\; \frac{1}{Z_\Lambda(z,\beta)} e^{-\beta E_\Lambda(c)+\mu|c|} \;=\; \frac{z^{|c|}}{Z_\Lambda(z,\beta)} e^{-\beta E_\Lambda(c)} = \mu^\Lambda_{(GCA)}(c), \tag{4.15}$$

де нормувальна постійна

$$Z_\Lambda(z,\beta) \;=\; \sum_{c\in C_\Lambda} z^{|c|} e^{-\beta E_\Lambda(c)} \tag{4.16}$$

має назву *Велика статистична сума*, а її логарифм, а точніше

$$p(\Lambda, z, \beta) \;:=\; \frac{kT}{|\Lambda|} \ln Z_\Lambda(z,\beta) \tag{4.17}$$

тиском. Постійну $z = e^{\beta\mu}$ називають *активністю.*

4.2. Термодинамічна границя. Граничні розподіли.

Що означає дослідити систему, наприклад газ, який складається з дуже великого числа атомів, тобто є макро-системою? Очевидно, що це означає дослідити його макроскопічні характеристики, такі як тиск, густина, теплоємність, тощо. Такі характеристики не повинні залежати від розмірів системи, тобто об'єму Λ. Отже для всіх спостережуваних величин треба знайти їх середнє значення за деякий проміжок часу і ці середні не повинні залежати від Λ. Іншими словами, треба виконати |it термодинамічний граничний перехід $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$. Спостережувані величини це функції, які залежать від того яким чином розташовані частинки системи, тобто є функціями на просторі конфігурацій Γ. У нашому випадку $\Gamma = C$ це усі можливі злічені (або скінченні) підмножини $\mathbb{Z}^d$. Але в реальному експерименті ми спостерігаємо тільки деяку обмежену область системи і ці функції залежать тільки від змінних цієї області, тобто для деякої області $B \Subset \mathbb{Z}^d$

$$F_B(c) \;=\; F(c \cap B). \tag{4.18}$$

Такі функції від нескінченного числа змінних називаються *локальними спостережуваними* і є циліндричними функціями на $\mathbb{Z}^d$. Тоді термодинамічний граничний перехід можна визначити як існування граничного розподілу Гіббса, за яким визначається відповідне середнє.

Означення 4.1. *Якщо для довільної обмеженої локально спостережуваної функції* F_B *і довільної зростаючої послідовності*

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \subset \cdots , \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d \tag{4.19}$$

існує границя

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} < F_B >_{\mu^\Lambda} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \sum_{c \in C_\Lambda} F_B(c) \mu^\Lambda(c) = < F_B >_\mu = \int_C F_B(c) d\mu(c), \tag{4.20}$$

тоді μ *називають граничним розподілом Гіббса.*

Зауваження. В сенсі ДЛР такий граничний розподіл відповідає порожнім граничним умовам. Тобто

$$w - \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu^\Lambda(c \mid \emptyset) = \mu(c \mid \emptyset),$$

де $\mu^\Lambda(c \mid \bar{c}),\ \bar{c} \in \Gamma_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ визначається аналогічно формулі (2.17)-Лекція 2.

Побудова такого граничного розподілу залежить від вибору ансамблю, тобто розподілу в обмеженому об'ємі.

1^o**. Мікроканонічний розподіл.** У цьому випадку граничний перехід виконується таким чином, щоб енергія на одиницю об'єму і число частинок на одиницю об'єму залишались сталими:

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d : E/|\Lambda| \to e, N/|\Lambda| \to \rho} < F_B >_{\mu^\Lambda_{(MCA)}} = < F_B >_{e,\rho} . \tag{4.21}$$

2^o**. Канонічний розподіл.** У цьому випадку температура і число частинок на одиницю об'єму залишаються сталими:

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d : N/|\Lambda| \to \rho} < F_B >_{\mu^\Lambda_{(CA)}} = < F_B >_{\beta,\rho} . \tag{4.22}$$

3^o**. Великий канонічний розплділ.** У цьому випадку температура і хімічний потенціал є сталими:

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} < F_B >_{\mu^\Lambda_{(GCA)}} = < F_B >_{\beta,\mu} \equiv < F_B >_{\beta,z} . \tag{4.23}$$

Відповідні сімейства мір позначимо $\mu_{e,\rho}$, $\mu_{\beta,\rho}$, $\mu_{\beta,z}$.

Основна гіпотеза – гіпотеза еквівалентності ансамблів:

Існує тільки одне сімейство мір з різною параметризацією, тобто існують такі функціональні залежності:

$$z \mapsto \rho \ = \ \rho(z), \ \ \beta - \text{фіксоване}, \tag{4.24}$$

що

$$\mu_{(GCA)} \equiv \mu_{\beta,z} = \mu_{(CA)} \equiv \mu_{\beta,\rho(z)} = \mu; \tag{4.25}$$

або

$$e \mapsto \beta = \beta(e), \ \rho - \text{фіксоване}, \tag{4.26}$$

що

$$\mu_{(MCA)} \equiv \mu_{\rho,e} = \mu_{(CA)} \equiv \mu_{\rho,\beta(e)} = \mu; \tag{4.27}$$

і

$$(\beta, z) \mapsto (e, \rho(e)), \tag{4.28}$$

що

$$\mu_{(GCA)} \equiv \mu_{\beta,z} = \mu_{(MCA)} \equiv \mu_{e,\rho(e)} = \mu. \tag{4.29}$$

Ця гіпотеза доведена тільки для деяких специфічних простих систем.

Нашим наступним кроком є побудова граничного розподілу для системи гратчастого газу. Зауважимо, що спосіб такої побудови, тобто спосіб вибору ансамблю залежить від конкретної системи. У випадку гратчастого газу найзручніше працювати у *великому канонічному ансамблі.*

4.3. Побудова скінченновимірних розподілів.

Нехай $\mu^\Lambda = \mu^\Lambda_{(GCA)} \equiv \mu^\Lambda_{\beta,z}$ розподіл в обмеженому об'ємі Λ визначається формулами (4.15), (4.16). Це означає, що ми маємо імовірнісну міру на $\mathfrak{B}(C_\Lambda)$. Визначимо звуження $\mu^\Lambda_{\beta,z} = \mu^\Lambda$ на C_B, де $B \subseteqq \Lambda$:

$$\mu^\Lambda_B := \mu^\Lambda \upharpoonright C_B \tag{4.30}$$

як імовірнісний розподіл на конфігураціях

$$c_0 := c \cap B, \ c \subseteqq \Lambda. \tag{4.31}$$

Таке звуження можна описати більш конструктивно, а саме для будь якого $c_0 \subseteqq B$ визначимо множину

$$V^B_{c_0} := \{c \in C_\Lambda \mid c \cap B = c_0\}. \tag{4.32}$$

Тоді за означенням

$$\mu^\Lambda_B(c_0) := \mu^\Lambda(V^B_{c_0}) = \sum_{c' \subseteqq \Lambda \setminus B} \mu^\Lambda(c_0 \cup c'). \tag{4.33}$$

З означення (4.33) випливає тотожність

$$< F_B >_{\mu^\Lambda} := \sum_{c \subseteqq \Lambda} F_B(c)\mu^\Lambda(c) = \sum_{c_0 \subseteqq B} \sum_{c' \subseteqq \Lambda \setminus B} F_B(c_0)\mu^\Lambda(c_0 \cup c') =$$

$$= \sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu^\Lambda(V^B_{c_0}) = \sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu^\Lambda_B(c_0) = < F_B >_{\mu^\Lambda_B} . \tag{4.34}$$

Зауваження. *Якщо замість міри μ^Λ розглядається міра μ на просторі нескінченних конфігурацій $\Gamma = C$*, то формула

$$\mu_B(c_0) \ := \ \mu(V^B_{c_0}) \tag{4.35}$$

також визначає звуження міри μ на C_B, але друга рівність у формулі (4.33) вже немає смислу, бо $\mu(c) \equiv 0, \ c \in C$. Разом з тим рівності першого і останнього виразів в (4.34) збережеться. Справедливе наступне твердження.

Твердження 4.1 *Для будь якого $B \Subset \mathbb{Z}^d$*

$$< F_B >_\mu = < F_B >_{\mu_B} \tag{4.36}$$

Доведення.

$$< F_B >_\mu := \sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu(V^B_{c_0}) = \sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu_B(c_0) = < F_B >_{\mu_B} . \tag{4.37}$$

■

З цього твердження випливає

Твердження 4.2 *Розподіл μ є граничним розподілом Гіббса на $\Gamma = C$ тоді, і тільки тоді, коли для довільної обмеженої множини $B \Subset \mathbb{Z}^d$ і $c \subseteqq B$ має місце рівність:*

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu^\Lambda_B(c) \ = \ \mu_B(c). \tag{4.38}$$

Доведення. З рівностей (4.34), (4.36) і скінченності $|B| < \infty$ випливає, що

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} < F_B >_{\mu^\Lambda} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} < F_B >_{\mu^\Lambda_B} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu^\Lambda_B(c_0) =$$

$$\sum_{c_0 \subseteqq B} F_B(c_0)\mu_B(c_0) = < F_B >_{\mu_B} = < F_B >_\mu . \tag{4.39}$$

Отже для того, щоб довести існування граничного розподілу Гіббса треба, по перше, встановити поточкову збіжність скінченновимірних розподілів μ^Λ_B, тобто рівність (4.38), а, по друге, довести *умову узгодженості* для усього сімейства скінченновимірних розподілів $\{\mu_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$:

Означення 4.2. *Сімейство скінченновимірних розподілів $\{\mu_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$ є попарно узгоджені, якщо для довільних обмежених множин $B_1 \subset B_2 \Subset \mathbb{Z}^d$ виконується рівність*

$$\mu_{B_2} \restriction C_{B_1} \ = \ \mu_{B_1}. \tag{4.40}$$

Узгодженість сімейства розподілів, які визначені рівністю (4.35) випливає з наступного твердження.

Твердження 4.3 *Якщо для* μ_B^Λ *існує границя (4.38), то сімейство розподілів* $\{\mu_B\}_{B\Subset\mathbb{Z}^d}$ *є попарно узгоджене.*

Доведення. Очевидно, що для цього достатньо встановити узгодженість скінченновимірних розподілів $\{\mu_B^\Lambda\}_{B\subseteqq\Lambda}$. Дійсно, з означення (4.33)

$$\mu_{B_2}^\Lambda \restriction_{C_{B_1}} (c_0) = \sum_{c'\subseteqq B_2\setminus B_1} \mu_{B_2}^\Lambda (c_0 \cup c') =$$

$$= \sum_{c'\subseteqq B_2\setminus B_1} \sum_{c''\subseteqq\Lambda\setminus B_2} \mu^\Lambda(c_0\cup c'\cup c'') = \sum_{c\subseteqq\Lambda\setminus B_1} \mu^\Lambda(c_0\cup c) = \mu_{B_1}^\Lambda(c_0). \tag{4.41}$$

З умови існування границі як для правої, так і для лівої частин рівності (4.41) випливє рівність (4.40).

■

Виявляється, що існування границі (4.38) для сімейства розподілів $\{\mu_B\}_{B\Subset\mathbb{Z}^d}$ та їх попарна узгодженість є не тільки необхідними, а й достатніми умовами існування єдиної міри на просторі нескінченних конфігурацій $\Gamma = C$. Це випливає з відомої теореми Колмогорова.

Теорема 4.1 *Нехай* $\{\mu_B\}_{B\Subset\mathbb{Z}^d}$ *сім'я імовірнісних розподілів, визначених на відповідних просторах* C_B *таких, що умови узгодженості* (4.40) виконуються для кожної пари множин $B_1 \subset B_2 \Subset \mathbb{Z}^d$. *Тоді існує єдиний імовірнісний розподіл* μ *на* C *такий, що*

$$\mu \restriction C_B \;=\; \mu_B \tag{4.42}$$

для кожного $B \Subset \mathbb{Z}^d$.

Зауваження. *На завершення цієї лекції треба зауважити, що доведення існування границі (4.38) для гратчастого газу з* $n_j \in \{0,1\}$ *і взаємодією найближчих сусідів таке саме як і в моделі Ізінга для спінів. Більш того ці моделі є еквівалентними, якщо в моделі гратчастого газу зробити заміни:*

$$n_j \;=\; \frac{s_j+1}{2},\;\; \phi_{|j-k|} \;=\; -J\delta_{1,|j-k|},\; j,k\in\mathbb{Z}^d. \tag{4.43}$$

Лекція 5.

Гратчасті гази: кореляційні функції та рівняння для них.

5.1. Кореляційні функції гіббсових мір.

Нехай μ (μ^Λ) розподіл Гіббса на C (C_Λ). Кореляційні функції визначаються на просторі скінченних конфігурацій

$$C_0 \; = \; C^{fin}_{\mathbb{Z}^d} \; = \; \coprod_{n\geq 0} C^{(n)}, \;\; C^{(0)} = \emptyset, \tag{5.1}$$

а

$$C^{(n)} \; := \; \{c \in C \mid |c| = n\}. \tag{5.2}$$

Тоді для $s \in C_0$ визначимо *кореляційний функціонал* формулою:

$$\rho_\mu(s) \equiv \rho(s) \; := \; Pr(\{c \in C \mid s \Subset c\}). \tag{5.3}$$

У випадку міри μ^Λ на C_Λ

$$\rho^\Lambda_\mu(s) \equiv \rho^\Lambda(s) \; = \sum_{c \in C_\Lambda : s \subseteqq c} \mu^\Lambda(c) \equiv \sum_{c \subseteqq \Lambda \setminus s} \mu^\Lambda(s \cup c). \tag{5.4}$$

Тоді n-точкова *кореляційна функція визначаєтьса як звуження*

$$\rho_n(k_1, ..., k_n) \; := \; \rho(s) \restriction_{C^{(n)}}, \; s = \{k_1, ..., k_n\}, \; k_j \in \mathbb{Z}^d. \tag{5.5}$$

Справедлива також обернена формула до формули (5.4):

$$\mu^\Lambda(c) \; = \sum_{s \in C_\Lambda : c \subseteqq s} (-1)^{|s \setminus c|} \rho^\Lambda_\mu(s) \tag{5.6}$$

для будь якого $c \in C_\Lambda$. Дійсно,

$$\sum_{s\in C_\Lambda : c\subseteq s}(-1)^{|s\setminus c|}\rho_\mu^\Lambda(s) \;=\; \sum_{s\in C_\Lambda : c\subseteq s}(-1)^{|s\setminus c|}\sum_{c'\in C_\Lambda : s\subseteq c'}\mu^\Lambda(c') \;=$$

$$= \sum_{c'\in C_\Lambda : c\subseteq c'}\mu^\Lambda(c')\sum_{s\in C_\Lambda : c\subseteq s\subseteq c'}(-1)^{|s\setminus c|}, \tag{5.7}$$

але

$$\sum_{s\in C_\Lambda : c\subseteq s\subseteq c'}(-1)^{|s\setminus c|} \;=\; \sum_{s'\in C_\Lambda : s'\subseteq c'\setminus c}(-1)^{|s'|} \;=$$

$$= \sum_{n=0}^{|c'\setminus c|} C^n_{|c'\setminus c|}(-1)^n \;=\; (1-1)^{|c'\setminus c|} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{для } c'\setminus c = \emptyset, \\ 0, & \text{коли } c'\setminus c \neq \emptyset \end{cases} \tag{5.8}$$

Отже у сумі у виразі (5.7) зберігається тільки доданок з $c \equiv c'$, тобто ліва частина (5.6).

Висновок: *розподіл μ^Λ на C_Λ однозначно визначений сім'єю своїх кореляційних функцій.*

Покажемо, що таке саме твердження справедливе і для граничних μ і ρ, якщо вони існують. Дійсно, з означення скінченновимірного розподілу (4.33) для будь яких $B \subseteq \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ і $c_0 \subseteq B$ і формули (5.6) маємо:

$$\mu_B^\Lambda(c_0) \;:=\; \sum_{c'\subseteq\Lambda\setminus B}\mu^\Lambda(c_0\cup c') \;=\; \sum_{c'\subseteq\Lambda\setminus B}\;\sum_{s\in C_\Lambda : c_0\cup c'\subseteq s}(-1)^{|s\setminus(c_0\cup c')|}\rho_\mu^\Lambda(s) \tag{5.9}$$

Усі суми в (5.9) є скінченими, тому можна спрямувати $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ і отримати рівність для граничних об'єктів:

$$\mu_B(c_0) \;:=\; \sum_{c'\subseteq B^c}\;\sum_{s\in C_0 : c_0\cup c'\subseteq s}(-1)^{|s\setminus(c_0\cup c')|}\rho_\mu(s) \tag{5.10}$$

Отже сім'я кореляційних функцій (або кореляційний функціонал) однозначно визначають сім'ю скінченновимірних розподілів, і тим самим за теоремою Колмогорова граничний гіббсовий розподіл.

Зауваження 5.1. *Останнє твердження, яке справедливе для системи гратчастого газу, не є загальним. Для довільних систем сім'я кореляційних функцій ρ_μ визначається мірою μ однозначно, але не навпаки. Щоб було справедливе обернене твердження, треба накласти на ρ_μ додаткові обмеження.*

На завершення цього підрозділу відзначимо практичне значення кореляційних функцій: за допомогою цих функцій обраховуються середні значення локальних спостережуваних величин. Дійсно, кожна локальна спостережувана величина може бути представлена своїми локальними *квазіспостережуваними* формулою:

$$F_B(c) \ := \ \sum_{s \Subset c} f_B(s). \tag{5.11}$$

Тоді

$$< F_B >_{\mu^\Lambda} = \sum_{c \in C_\Lambda} F_B(c) \mu^\Lambda(c) = \sum_{c \in C_\Lambda} \sum_{s \subseteqq c} f_B(s) \mu^\Lambda(c) \ =$$

$$\sum_{s \in C_\Lambda} f_B(s) \sum_{c \in C_\Lambda : s \subseteqq c} \mu^\Lambda(c) \ = \ \sum_{s \in C_\Lambda} f_B(s) \rho^\Lambda(s). \tag{5.12}$$

У першому і останньому виразі рівності (5.12) можна перейти до границі $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$. Тобто, якщо такі границі існують, то формула для середнього зберігається і для граничних розподілів Гіббса.

5.1. Рівняння Кірквуда Зальцбурга.

Отже для системи гратчастого газу проблема існування граничної міри Гіббса зводиться до проблеми існування граничних кореляційних функцій

$$\rho(s) \ = \ \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \rho^\Lambda(s), \quad s \in C_0. \tag{5.13}$$

Цю проблему можна розв'язати, побудувавши деякі рівняння для функціоналів $\rho^\Lambda(s)$. Запишемо для цього вигляд $\rho^\Lambda(s)$ через визначений формулами (4.15) і (5.4) розподіл $\mu^\Lambda = \mu_\Lambda^{(GCA)} = \mu_{\beta,z}^\Lambda$. Для будь якого $s \in C_\Lambda$

$$\rho^\Lambda(s) \equiv \rho_{\beta,z}^\Lambda(s) \ = \ \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{c \subseteqq \Lambda \setminus s} z^{|s \cup c|} e^{-\beta E_\Lambda(s \cup c)}. \tag{5.14}$$

Розпишемо вираз для енергії. Для будь якого $k_0 \in s$

$$E_\Lambda(s \cup c) = \sum_{\{k,k'\} \subset s \cup c} V_{kk'} \ =$$

$$= \sum_{k' \in s'} V_{k_0 k'} + \sum_{k' \in c} V_{k_0 k'} + \sum_{\{k,k'\} \subset s' \cup c} V_{kk'}, \tag{5.15}$$

де $s' = s \setminus \{k_0\}$. Тоді

$$\rho^\Lambda(s) \ = \ z \frac{e^{-\beta \sum_{k' \in s'} V_{k_0 k'}}}{Z_\Lambda} \sum_{c \subseteqq \Lambda \setminus s} z^{|s' \cup c|} e^{-\beta \sum_{k' \in c} V_{k_0 k'}} e^{-\beta E_\Lambda(s' \cup c)} =$$

$$= \ z \frac{e^{-\beta \sum_{k' \in s'} V_{k_0 k'}}}{Z_\Lambda} \sum_{c \subseteqq \Lambda \setminus s'} z^{|s' \cup c|} e^{-\beta \sum_{k' \in c} V_{k_0 k'}} e^{-\beta E_\Lambda(s' \cup c)}. \tag{5.16}$$

Остання сума має на один доданок більше, бо $s' = s\backslash\{k_0\}$, але перша експонента у цій сумі буде містить фактор $e^{-\beta V_{k_0 k_0}} \equiv 0$, бо $V_{k_0 k_0} = +\infty$. Представимо цю експоненту у такому вигляді:

$$e^{-\beta \sum_{k' \in c} V_{k_0 k'}} = \prod_{k' \in c} \left[(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1) + 1 \right] = \sum_{t \subseteqq c} \prod_{k' \in t} (e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1) \tag{5.17}$$

і введемо позначення:

$$\sum_{k' \in s'} V_{k_0 k'} \ := \ W(k_0; s'). \tag{5.18}$$

Тоді (5.16) перепишеться таким чином:

$$\rho^\Lambda(s) \ = \ z e^{-\beta W(k_0; s')} \sum_{c \subseteqq \Lambda \backslash s'} \left\{ 1 + \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq c} \prod_{k' \in t} (e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1) \right\} \times$$
$$\times \frac{z^{|s' \cup c|} e^{-\beta E_\Lambda(s' \cup c)}}{Z_\Lambda}. \tag{5.19}$$

У другому доданку поміняємо порядок сумування, скориставшись формулою

$$\sum_{\emptyset \neq c \subseteqq \Lambda \backslash s'} \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq c} \left(\prod_{k' \in t} a_{k_0 k'} \right) b(s' \cup c) \ =$$
$$= \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda \backslash s'} \left(\prod_{k' \in t} a_{k_0 k'} \right) \sum_{\emptyset \neq c \subseteqq \Lambda \backslash (t \cup s')} b(t \cup s' \cup c) \tag{5.20}$$

отримуємо вираз:

$$\rho^\Lambda(s) \ = \ z e^{-\beta W(k_0; s')} \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{c \subseteqq \Lambda \backslash s'} z^{|s' \cup c|} e^{-\beta E_\Lambda(s' \cup c)} +$$
$$+ z e^{-\beta W(k_0; s')} \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda \backslash s'} \prod_{k' \in t} \left(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1 \right) \sum_{\emptyset \neq c \subseteqq \Lambda \backslash (t \cup s')} \frac{z^{|t \cup s' \cup c|}}{Z_\Lambda} e^{-\beta E_\Lambda(t \cup s' \cup c)}. \tag{5.21}$$

Враховуючи означення (5.14) отримуємо рівняння:

$$\rho^\Lambda(s) \ = \ z e^{-\beta W(k_0; s')} \left[\rho^\Lambda(s') + \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda \backslash s'} \prod_{k' \in t} \left(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1 \right) \rho^\Lambda(s' \cup t) \right]. \tag{5.22}$$

У випадку коли $s = \{k_0\}, \ |s| = 1, \ s' = \emptyset$ рівняння має вигляд:

$$\rho^\Lambda(\{k_0\}) \ = \ z \left[1 \ + \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda} \prod_{k' \in t} \left(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1 \right) \rho^\Lambda(t) \right]. \tag{5.23}$$

Лекція 6.

Рівняння КЗ у нескінченному об'ємі. Побудова розв'язків.

Побудову міри Гіббса μ_G, що відповідає кореляційним функціям ρ, виконаємо в три етапи: 1) спершу побудуємо розв'язки рівнянь, які ми визначимо на нескінченній гратці $\mathbb{Z}^d$ у певному банаховому просторі так само як і рівняння (5.22),(5.23); 2) потім побудуємо розв'язки рівнянь (5.22),(5.23); 3) доведемо, що розв'язки других рівнянь прямують до розв'язків перших у тому самому просторі коли розміри скінченної гратки $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$.

6.1. Визначення рівнянь КЗ у просторі Банаха E_ξ.

Рівняння (5.22),(5.23) є тотожними співвідношеннями між кореляційними функціоналами різних аргументів. Ми зараз введемо (постулюємо) такі самі рівняння, замінивши в рівняннях (5.22),(5.23) скінченну множину Λ на нескінченну гратку $\mathbb{Z}^d$. Позначимо

$$\rho(s) \;:=\; \rho^{\mathbb{Z}^d}(s). \tag{6.1}$$

Нехай функціонали $\rho(s)$ задовольняють наступним співвідношенням:

$$\rho(\{k_0\}) \;=\; z\left[1 \;+ \sum_{\emptyset\neq t\subseteqq\mathbb{Z}^d}\;\prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right)\rho(t)\right], \tag{6.2}$$

$$\rho(s) \;=\; ze^{-\beta W(k_0;s')}\left[\rho^{\Lambda}(s') + \sum_{\emptyset\neq t\subseteqq\mathbb{Z}^d\setminus s'}\;\prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right)\rho(s'\cup t)\right], \tag{6.3}$$

де $s' = s\setminus\{k_0\}$, $s\in C_0$, (або $s \Subset \mathbb{Z}^d$).

Перш ніж визначити ці рівняння, як одне операторне рівняння у певному банаховому просторі, накладемо необхідні і достатні умови на потенціал взаємодії між частинками, що знаходяться у різних вузлах.

AI.

$$-D \;\le\; \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d\setminus\{k_0\}} V_{k_0k'} \;=\; V_0 \;<\; \infty. \tag{6.4}$$

Для спрощення доведення ми будемо вважати, що потенціал $V_{kk'}$ є фінітним, тобто для деякого $R>0$

$$V_{kk'} \equiv 0, \;\; \text{якщо} \;\; |k-k'| \;>\; R. \tag{6.5}$$

Зауважимо, що у цьому випадку умова **AI.** автоматично виконується.

Означення 6.1. *Нехай E_ξ це лінійний простір функціоналів*

$$f \;:=\; \{f(s)\}_{s\in C_0} \tag{6.6}$$

таких, що

$$\|f\|_\xi \;:=\; \sup_{s\in C_0} |f(s)|\xi^{-|s|} \;<\; \infty. \tag{6.7}$$

У просторі E_ξ визначимо оператор K, що діє на функцію $f\in E_\xi$ за формулами:

$$(Kf)\left(\{k_0\}\right) \;:=\; \sum_{\emptyset\neq t\subseteq\mathbb{Z}^d}\prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right) f(t), \tag{6.8}$$

$$(Kf)\,(s) \;:=\; e^{-\beta W(k_0;s')}\times \tag{6.9}$$

$$\times\left[f(s') + \sum_{\emptyset\neq t\subset\mathbb{Z}^d\setminus s'}\prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right) f(s'\cup t)\right],\; |s|\ge 2.$$

Нехай

$$\rho \;:=\; \{\rho(s)\}_{s\in C_0}, \;\; \rho_0 \;:=\; \{\rho_0(s)\}_{s\in C_0}, \tag{6.10}$$

де

$$\rho_0(s) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{для } |s|=1, \\ 0, & \text{коли } |s|\ge 2 \end{cases} \tag{6.11}$$

Тоді співвідношення (6.2), (6.3) можна записати у вигляді одного операторного рівняння

$$\rho \;=\; zK\rho \;+\; \rho_0. \tag{6.12}$$

6.2. Розв'язки рівнянь КЗ у просторі Банаха E_ξ.

Лема 6.1. *Якщо потенціал взаємодії задовольняє умові (6.4) (або (6.5)), тоді для довільного $\beta>0$ існує $z_0=z_0(\beta)$ таке, що для будь якого $z<z_0$ існує єдиний розв'язок рівняння (6.12), який можна подати у наступному вигляді:*

$$\rho \;=\; (\mathbb{1} \;-\; zK)^{-1}\rho_0 \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n K^n \rho_0. \tag{6.13}$$

Доведення. Очевидно, що для доведення Леми треба довести, що при довільному значенні $\beta > 0$ оператор K є обмеженим оператором у просторі E_ξ, тобто

$$\|K\| \ = \sup_{f \in E_\xi : \|f\|=1} \|Kf\|_{E_\xi} \ < \ \infty. \tag{6.14}$$

Розглянемо спершу випадок $|s| = 1$. Тоді з рівняння (6.9) і визначення норми (6.7) маємо

$$|\left(Kf\right)(\{k_0\})| \ \le \ \|f\|_{E_\xi} \sum_{t \subset \mathbb{Z}^d} \prod_{k' \in t} \left(|e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1|\xi\right) \ \le$$

$$\le \ \|f\|_{E_\xi} \prod_{k' \in \mathbb{Z}^d} \left(1 \ + \ |e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1|\xi\right) \ \le \ \|f\|_{E_\xi} \prod_{k' \in \mathbb{Z}^d} e^{|e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1|\xi} \ \le$$

$$\le \ \|f\|_{E_\xi} e^{\xi \sum k \in \mathbb{Z}^d |e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1|} \ = \ e^{\xi C(\beta)} \|f\|_{E_\xi}, \tag{6.15}$$

де фактор

$$C(\beta) \ = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1| \ < \ \infty \tag{6.16}$$

є скінченний внаслідок умови (6.4). Отже

$$\|Kf\|_{E_\xi} \ \le \ \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)} \|f\|_{E_\xi} \tag{6.17}$$

Аналогічно для $|s| \ge 2$:

$$|\left(Kf\right)(s)|\xi^{-|s|} \ \le$$

$$\le \xi^{-1} e^{\beta D} \left[|f(s')|\xi^{-|s'|} + \sum_{\emptyset \ne t \subset \mathbb{Z}^d} \prod_{k' \in t} \left(|e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1|\xi\right) |f(s' \cup t)|\xi^{-(|s'|+|t|)} \right] \le$$

$$\le \xi^{-1} e^{\beta D + \xi C(\beta)} \sup_{t \subset \mathbb{Z}^d} |f(s' \cup t)|\xi^{-(|s'|+|t|)}. \tag{6.18}$$

Враховуючи означення норми (6.7) для вектора простору E_ξ і норми оператора (6.14), отримуємо з нерівностей (6.17) і (6.18) оцінку для норми оператора K:

$$\|K\|_{E_\xi} \ \le \ \xi^{-1} e^{\beta D + \xi C(\beta)}. \tag{6.19}$$

Для того, щоб оцінка була як найкращою треба знайти мінімум функції

$$\varphi(\xi) \ = \ \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)}. \tag{6.20}$$

Легко підрахувати, що це буде виконуватися при $\xi = \xi_0 = C(\beta)^{-1}$ і $\varphi(\xi_0) = eC(\beta)$, а норма оператора K буде:

$$\|K\|_{E_{\xi_0}} \ < \ C(\beta) e^{\beta D + 1} := k_0(\beta). \tag{6.21}$$

Отже при

$$m_0 \ := \ |z|k_0(\beta) \ < \ 1, \ \text{тобто} \ |z| \ < \ z_0 = C(\beta)^{-1}e^{-\beta D-1} \tag{6.22}$$

рівняння (6.12) буде мати єдиний розв'язок у просторі E_{ξ_0}.

$\square$

Лекція 7.

Існування граничних кореляційних функцій.

У попередній лекції були побудовані розв'язки рівняння КЗ (6.12) у Банаховому просторі E_ξ. Зараз ми покажемо, що ці розв'язки є граничними значеннями кореляційних функціоналів $\rho^\Lambda(s)$, які задовольняли рівняння (5.22), (5.23). Основним результатом є наступна лема.

Лема 7.1. *Якщо потенціал взаємодії задовольняє умові (6.4) (або (6.5)), тоді для довільного $\beta > 0$ існує $z_0 = z_0(\beta)$ таке, що для будь якого $z < z_0$ існує єдиний розв'язок нескінченної системи рівнянь (5.22), (5.23), який у границі $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ збігається до розв'язку (6.13):*

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \rho^\Lambda(s) \; = \; \rho(s). \tag{7.1}$$

Доведення. Доведемо цю лему у випадку, коли потенціал взаємодії $V_{kk'}$ є фінітним, тобто задовольняє умові (6.5). Визначимо в E_ξ оператор $\mathbb{1}_\Lambda$ як оператор множення на характеристичний функціонал

$$\chi_\Lambda(s) \; = \; \begin{cases} 1, & \text{коли } s \subseteqq \Lambda, \\ 0, & \text{коли } s \nsubseteqq \Lambda, \end{cases} \tag{7.2}$$

і введемо оператор

$$K_\Lambda \; = \; \mathbb{1}_\Lambda K \mathbb{1}_\Lambda \tag{7.3}$$

та вектор

$$\rho_0^\Lambda \; = \; \mathbb{1}_\Lambda \rho_0. \tag{7.4}$$

Тоді, так само, як і у випадку нескінченної системи рівняння (5.22), (5.23)можна переписати у вигляді одного операторного рівняння у просторі E_ξ:

$$\rho^\Lambda \ = \ zK_\Lambda\rho^\Lambda \ + \ \rho_0^\Lambda. \tag{7.5}$$

Очевидно, що $\rho_0^\Lambda \in E_{\xi_0}$ і $z\|K_\Lambda\|_{\xi_0} = m_0 < 1$ при тих самих значеннях z, β, а, отже $\rho^\Lambda \in E_{\xi_0}$. Тоді так само як і в попередньому випадку

$$\rho^\Lambda \ = \ (\mathbb{1}_\Lambda \ - \ zK_\Lambda)^{-1}\,\rho_0^\Lambda \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} z^n K_\Lambda^n \rho_0^\Lambda. \tag{7.6}$$

Отже треба довести існування границі (7.1) для кожного $s \in C_0$, тобто в сенсі поточкової збіжності. Для кожної конфігурації $s \in C_\Lambda$ виберемо Λ таким чином, щоб

$$nR \ < \ d(s,\Lambda^c) \ \le (n+1)R \tag{7.7}$$

для деякого $n \geq 0$, $(\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda)$, де R радіус взаємодії, а

$$d(s,\Lambda^c) \ := \ \min_{k\in s, j\in\Lambda^c} |k-j|. \tag{7.8}$$

Тоді

$$\left(K_\Lambda^p \rho_0^\Lambda\right)(s) \ = \ \left(K^p \rho_0\right)(s) \tag{7.9}$$

для всіх $0 \leq p \leq n$.

Щоб довести це твердження, запишемо дію операторів K_Λ і K на функції f_1, f_2 такі, що $f_1(s) = f_2(s)$ при $s \subseteqq \Lambda$ з $d(s,\Lambda^c) \geq pR$ і $f_1(\emptyset) = f_2(\emptyset) = 1$:

$$\left(K_\Lambda f_1\right)(s) \ := \ e^{-\beta W(k_0;s')}\times \tag{7.10}$$

$$\times\left[f_1(s') + \sum_{\emptyset\neq t\subseteqq (R(k_0)\setminus s')\cap\Lambda}\ \prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right)f_1(s'\cup t)\right],\ |s|\geq 2,$$

$$\left(K f_2\right)(s) \ := \ e^{-\beta W(k_0;s')}\times \tag{7.11}$$

$$\times\left[f_2(s') + \sum_{\emptyset\neq t\subseteqq (R(k_0)\setminus s')}\ \prod_{k'\in t}\left(e^{-\beta V_{k_0k'}}-1\right)f_2(s'\cup t)\right],\ |s|\geq 2,$$

де

$$R(k_0) \ := \ \{k' \in \mathbb{Z}^d \mid |k_0 - k'| \leq R\}. \tag{7.12}$$

Це означає, що

$$e^{-\beta V_{k_0k'}} \ - \ 1 \ = \ 0, \ \text{ якщо } \ |k_0 - k'| > R. \tag{7.13}$$

Тоді рівність (7.10) буде випливати з наступного твердження.

Твердження 7.1. *Якщо* $f_1(s) = f_2(s)$ *для всіх* $s \subsetneqq \Lambda$, *таких, що* $d(s, \Lambda^c) \geq pR$, *тоді*

$$\left(K_\Lambda f_1\right)(s) \; = \; \left(K f_2\right)(s) \tag{7.14}$$

для всіх $s \subsetneqq \Lambda$, *для яких* $d(s, \Lambda^c) \geq (p+1)R$.

Доведення. Дійсно, якщо $s \subsetneqq \Lambda$ то і $s' \subsetneqq \Lambda$, а, отже, перші доданки в (7.11) і (7.12) збігаються, бо $f_1(s') = f_2(s')$. У других доданках $t \subsetneqq R(k_0)$, бо інакше вони рівні нулю внаслідок (7.13). Але тоді із нерівності $d(s, \Lambda^c) \geq (p+1)R$ випливає, що $d(s' \cup t, \Lambda^c) \geq pR$, що в свою чергу забезпечує рівність $f_1(s' \cup t) = f_2(s' \cup t)$, а отже і (7.14). Таким чином, з твердження 7.1 випливає, що з рівності $\rho_0^\Lambda(s) = \rho_0(s)$ для будь якого $s \subsetneqq \Lambda$ слідує, що

$$\left(K_\Lambda \rho_0^\Lambda\right)(s) \; = \; \left(K \rho_0\right)(s) \tag{7.15}$$

для кожного $s \subsetneqq \Lambda$, такого, що $d(s, \Lambda^c) \geq R$. Аналогічно з рівності (7.15) випливає, що

$$\left(K_\Lambda^2 \rho_0^\Lambda\right)(s) \; = \; \left(K^2 \rho_0\right)(s) \tag{7.16}$$

для кожного $s \subsetneqq \Lambda$, такого, що $d(s, \Lambda^c) \geq 2R$. Продовжуючи цей процес, приходимо до рівності (7.10) для всіх $p \leq n$ при умові, що $d(s, \Lambda^c) \geq nR$.

Таким чином з рівності (7.10) випливає, що якщо $nR \; < \; d(s, \Lambda^c) \; \leq (n+1)R$, тоді

$$\rho(s) - \rho^\Lambda(s) \; = \; \sum_{l=n+1}^{\infty} z^l \left(K^l \rho_0\right)(s) - \sum_{l=n+1}^{\infty} z^l \left(K_\Lambda^l \rho_0^\Lambda\right)(s). \tag{7.17}$$

Тепер з оцінок норм операторів K і K_Λ (див. (6.21)) випливають наступні оцінки:

$$|\left(K^l \rho_0\right)(s)| \; \leq \; k_0(\beta)^l \|\rho_0\|_{\xi_0} \xi_0^{|s|}, \tag{7.18}$$

$$|\left(K_\Lambda^l \rho_0^\Lambda\right)(s)| \; \leq \; k_0(\beta)^l \|\rho_0^\Lambda\|_{\xi_0} \xi_0^{|s|}. \tag{7.19}$$

Домноживши ці нерівності на z^l і підсумувавши за l від $n+1$ до нескінченності, отримаємо нерівності:

$$|\sum_{l=n+1}^{\infty} z^l \left(K^l \rho_0\right)(s)| \; \leq \; C m_0^{n+1} \xi_0^{|s|}, \tag{7.20}$$

$$|\sum_{l=n+1}^{\infty} z^l \left(K_\Lambda^l \rho_0^\Lambda\right)(s)| \; \leq \; C m_0^{n+1} \xi_0^{|s|}, \tag{7.21}$$

де константа $C = (1 - m_0)^{-1}$ з m_0 визначеним в (6.22). Остаточно для різниці (7.17) отримуємо оцінку

$$|\rho(s) - \rho^\Lambda(s)| \; \leq \; 2C m_0^{n+1} \xi_0^{|s|}, \tag{7.22}$$

або внаслідок того, що за умовою

$$n + 1 \;\geq\; \frac{d(s, \Lambda^c)}{R}, \tag{7.23}$$

і $m_0 < 1$, остаточно маємо:

$$|\rho(s) - \rho^{\Lambda}(s)| \;\leq\; 2Cm_0^{\frac{d(s,\Lambda^c)}{R}}\xi_0^{|s|}. \tag{7.24}$$

Отже при $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$

$$\rho(s) \;=\; \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \rho^{\Lambda}(s) \;\text{ для будь якого} s \in C_0. \tag{7.25}$$

Це остаточно встановлює існування і вигляд граничних кореляційних функцій і відповідної міри Гіббса при малих значеннях хімічної активності z.

Лекція 8.

Гіббсові розподіли з непорожніми граничними умовами.

8.1. Умовний розподіл Гіббса для скінченної системи.

У попередніх лекціях ми розглядали скінченну систему гратчастого газу в обмеженій області $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, вважаючи, що в області $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$ відсутні частинки, тобто конфігурація $C_{\Lambda^c} = \emptyset$. Розглянемо тепер скінченну систему в Λ, яка може взаємодіяти з деякою фіксованою конфігурацією $\bar{c} \in C_{\Lambda^c}$. Енергія такої конфігурації дорівнює

$$E_\Lambda(c \mid \bar{c}) \; = \; E_\Lambda(c) \; + \; W_\Lambda(c; \bar{c}), \tag{8.1}$$

де

$$W_\Lambda(c; \bar{c}) \; = \; \sum_{\substack{k \in c, \\ k' \in \bar{c}}} V_{kk'}. \tag{8.2}$$

У випадку фінітного потенціалу, який ми розглядаємо

$$k' \in \overline{C}_R \; := \; \{k' \in \bar{c} \mid d(k', \Lambda) \; \leq \; R\}\,. \tag{8.3}$$

Означення 8.1. *Розподіл Гіббса, який визначається формулами*

$$\mu^\Lambda(c \mid \bar{c}) \; = \; \frac{z^{|c|}}{Z_\Lambda(\bar{c})} e^{-\beta E_\Lambda(c|\bar{c})}, \quad c \in C_\Lambda, \tag{8.4}$$

$$Z_\Lambda(\bar{c}) \; = \; \sum_{c \in C_\Lambda} z^{|c|} e^{-\beta E_\Lambda(c|\bar{c})} \tag{8.5}$$

називають умовним розподілом Гіббса в об'ємі Λ *з граничними умовами* $\bar{c}$.

8.2. Граничні розподіли Гіббса для нескінченної системи.

Означення 8.2. *Розподіл Гіббса* μ *називають чистим граничним розподілом, якщо існує послідовність скінченних множин*

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \cdots \subset \Lambda_n \subset \cdots , \bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d \tag{8.6}$$

і послідовність граничних конфігурацій $\{\bar{c}_n\}$, *такі, що для довільної локально обмеженої* $\mathfrak{B}_B(C)$*-вимірної функції* F_B *існує границя*

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^d} < F_B >_{\mu^\Lambda} = \lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{Z}^d} \sum_{c\in C_\Lambda} F_B(c)\mu^\Lambda(c) = < F_B >_\mu = \int_C F_B(c)d\mu(c \mid \bar{c}). \tag{8.7}$$

Означення 8.3. *Розподіл Гіббса* μ *називають граничним розподілом, якщо він є або випуклою лінійною комбінацією чистих гіббсових розподілів* μ_k, *тобто*

$$\mu \ = \ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k, \ \ \alpha_k \ > \ 0, \ \ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \ = \ 1. \tag{8.8}$$

або граничною точкою такої лінійної комбінації розподілів $\mu_k^{\Lambda_n}$.

Означення 8.3. *Розподіл* μ *називають граничним розподілом Гіббса у сенсі ДЛР, якщо його умовні розподіли визначаються формулами (8.4), (8.5). Для системи гратчастого газу це означає, що для довільного* $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{Z}^d)$ *і довільної конфігурації* $\bar{c} \in C_{\Lambda^c}$ *імовірність конфігурації* $c \in C$ *, яка в* Λ^c *збігається з* $\bar{c}$ *дорівнює*

$$Pr\left(\{c \cap \Lambda = c_\Lambda \mid c \cup \Lambda^c = \bar{c}\}\right) \mu^\Lambda(c \mid \bar{c}) \ = \ \frac{z^{|c|}}{Z_\Lambda(\bar{c})} e^{-\beta E_\Lambda(c|\bar{c})}, \quad c \in C_\Lambda. \tag{8.9}$$

8.3. Єдиність розподілу Гіббса для нескінченної системи гратчастого газу.

Визначимо у площині $\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}_+$ область параметрів (β, z):

$$\Gamma \ = \ \left\{ (\beta, z) \subset \mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}_+ \mid |z| \ < \ \frac{e^{-\beta D-1}}{C(\beta)} \right\}. \tag{8.10}$$

Теорема 8.1. *Нехай потенціал* $V_{kk'}$ *задовольняє умову*

$$\sum_{k:k\neq k_0} V_{kk_0} \ \geq \ -D, \ \ D \geq 0 \tag{8.11}$$

і є фінітним (див. (6.5)). Тоді при $(\beta, z) \in \Gamma$ *існує тільки один граничний розподіл Гіббса.*

Доведення теореми 8.1. Виберемо послідовність зростаючих об'ємів Λ_n згідно (8.6) і для довільної $\bar{c} \in C$ послідовність $\bar{c}_n = \bar{c} \cap \Lambda_n^c$, $\Lambda_n^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n$. Послідовність кореляційних функціоналів, що відповідає системам гратчастого газу в об'ємах Λ_n з граничними конфігураціями $\bar{c}_n$ має вигляд:

$$\rho^{\Lambda_n}(s \mid \bar{c}_n) \equiv \rho^{\Lambda_n}_{\beta,z}(s \mid \bar{c}_n) \; = \; \frac{1}{Z_\Lambda(\bar{c})} \sum_{c \subseteqq \Lambda_n \setminus s} z^{|s \cup c|} e^{-\beta E_{\Lambda_n}(s \cup c | \bar{c}_n)}. \tag{8.12}$$

Нагадаємо, що

$$E_{\Lambda_n}(s \cup c \mid \bar{c}_n) \; = \; E_{\Lambda_n}(s \cup c) \; + \; W_{\Lambda_n}(s \cup c; \bar{c}_n) \tag{8.13}$$

Повторивши усі викладки лекції 5, отримаємо рівняння:

$$\rho^{\Lambda_n}(\{k_0\} \mid \bar{c}_n) \; = \; z e^{-\beta W_{\Lambda_n}(k_0; \bar{c}_n)} \left[1 \; + \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda_n} \prod_{k' \in t} \left(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1 \right) \rho^{\Lambda_n}(t \mid \bar{c}_n) \right]. \tag{8.14}$$

$$\rho^{\Lambda_n}(s \mid \bar{c}_n) \; = \; z e^{-\beta W_{\Lambda_n}(k_0; s' \cup \bar{c}_n)} \times \tag{8.15}$$

$$\times \left[\rho^{\Lambda_n}(s') + \sum_{\emptyset \neq t \subseteqq \Lambda_n \setminus s'} \prod_{k' \in t} \left(e^{-\beta V_{k_0 k'}} - 1 \right) \rho^{\Lambda_n}(s' \cup t \mid \bar{c}_n) \right], \; |s| \geq 2.$$

Нагадаємо, що $s' = s \setminus \{k_0\}$. Якщо визначити таким самим чином у банаховому просторі E_ξ оператор $K_\Lambda^{\bar{c}}$, який визначається правими частинами рівнянь (8.12) і (8.13), тоді розв'язок запишеться так само, як і рівнянь (5.22), (5.23), тобто у вигляді (7.6):

$$\rho^{\Lambda_n}(\cdot \mid \bar{c}_n) \; = \; \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(K_{\Lambda_n}^{\bar{c}_n} \right)^m \rho_0^{\Lambda_n}. \tag{8.16}$$

Легко бачити, що якщо вибрати Λ_n для довільної фіксованої конфігурації $s \in C_0$ достатньо великим, тоді внаслідок скінченного радіусу взаємодії

$$W_{\Lambda_n}(k_0; \bar{c}_n) \; = \; 0, \;\; \text{а} \;\; W_{\Lambda_n}(k_0; s' \cup \bar{c}_n) = W_{\Lambda_n}(k_0; s'). \tag{8.17}$$

Це означає, що оператор $K_{\Lambda_n}^{\bar{c}_n} = K_{\Lambda_n}$, а, отже, оцінка (7.24), яка була отримана в попередній лекції може бути записана для оцінки різниці між граничною кореляційною функцією і функцією $\rho^{\Lambda_n}(s \mid \bar{c}_n)$

$$|\rho(s) - \rho^{\Lambda_n}(s \mid \bar{c}_n)| \; \leq \; 2C m_0^{\frac{d(s, \Lambda_n^c)}{R}} \xi_0^{|s|}. \tag{8.18}$$

Це означає, що граничні кореляційні функції, а, отже, і гранична міра Гіббса не буде залежати від вибору граничних умов, тобто буде єдиною. ■

8.3. Властивості гіббсових мір для нескінченної системи гратчастого газу.

8.3.1. Властивість перемішування.

Фізично ця властивість означає, що у великих системах при температурах вищих за деяку критичну температуру ($\beta < \beta_c$) поведінка далеких (за відстанню) підсистем є статистично незалежною. Математично цю властивість можна записати нерівністю на кореляційні функції.

Лема 8.1 *Нехай $\rho(s;\beta,z)$ кореляційні функції гіббсовського розподілу μ на просторі конфігурацій C і нехай $s_1, s_2 \in C_0$ дві підконфігурації, що не перетинаються. Тоді існує таке β_0 (або $z_0 = z_0(\beta)$), що для всіх $\beta < \beta_0$:*

$$|\rho(s_1 \cup s_2) - \rho(s_1)\rho(s_2)| \ \le \ 2Cm_0^{d(s_1,s_2)}\xi^{|s_1|+|s_2|}, \tag{8.19}$$

де $m_0 < 1$ (див. (6.21), (6.22)), а константи C, ξ залежать від β, z.

Ідея доведення. Розглянемо об'єм $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ такий, що $s_1 \cup s_2 \in C_\Lambda$, і $s_1 \cap s_2 = \emptyset$. Нехай μ^Λ гіббсовий розподіл на C_Λ. Розглянемо умовну імовірність того, що деяка конфігурація $c \in C_\Lambda$ містить у собі s_1:

$$\mu^\Lambda(c \mid s_1 \subseteqq c) \ = \ \frac{\mu^\Lambda(c)}{\sum_{c': s_1 \subseteqq c'} \mu^\Lambda(c')} \ = \ \frac{\mu^\Lambda(c)}{\rho^\Lambda(s_1)}. \tag{8.20}$$

Тоді за означенням кореляційних функцій (5.3), (5.4) випливає співвідношення:

$$\rho^\Lambda(s \mid s_1) \ = \ \frac{\rho^\Lambda(s)}{\rho^\Lambda(s_1)}, \tag{8.21}$$

де $\rho^\Lambda(s \mid s_1)$– кореляційна функція умовної гіббсової міри $\mu^\Lambda(\cdot \mid s_1)$. Покладемо у формулі (8.21) $s = s_1 \cup s_2$ і врахуємо, що з означення кореляційної функції 5.3), (5.4) випливає, що

$$\rho^\Lambda(s_1 \cup s_2 \mid s_1) \ = \ \rho^\Lambda(s_2 \mid s_1). \tag{8.22}$$

Тоді маємо

$$\rho^\Lambda(s_2 \mid s_1) \ = \ \frac{\rho^\Lambda(s_2 \cup s_1)}{\rho^\Lambda(s_1)}. \tag{8.23}$$

Отже

$$\rho^\Lambda(s_2 \cup s_1) \ = \ \rho^\Lambda(s_2 \mid s_1)\rho^\Lambda(s_1). \tag{8.24}$$

Тоді

$$|\rho(s_1 \cup s_2) - \rho(s_1)\rho(s_2)| = |\rho(s_1)||\rho(s_2 \mid s_1) - \rho(s_2)|. \tag{8.25}$$

Оцінка різниці $|\rho(s_2 \mid s_1) - \rho(s_2)|$ обчислюється так само як і оцінка (8.16), тобто прямує до нуля, коли $d(s_1, s_2) \to \infty$.

8.3.2. Властивість ергодичності.

Теорема Біркгофа–Вінера. *Якщо F_B є локальною спостережуваною, то*

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} F_{B+x}(c) \ = < F_B >_{\mu} \tag{8.26}$$

майже для всіх $c \in C$.Множина $B + x$ це зсув множини B на вектор x у просторі $\mathbb{Z}^d$.

Лекція 9.

Простори конфігурацій неперервних систем та їх топологічна структура. Функції на просторах конфігурацій.

Нехай X це деякий зв'язний ріманів C^∞ многовид, на який накладемо наступні умови:

1) існує борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$: літерою $\mathcal{B}_c(X)$ будемо позначати усі вимірні множини, що мають компактне замикання; існує впорядкована послідовність $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}, \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n = X$$

і для кожного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\Lambda \subset \Lambda_n$;
2) на X задана невироджена, не атомарна міра Радона σ: тобто для будь якої відкритої множини $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(\mathcal{O}) > 0$, для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, $\sigma(\Lambda) < \infty$ і $\sigma(\{x\}) = 0$ для будь якого $x \in X$.

Зауваження 9.1. *Будемо розглядати випадок некомпактного многовиду: $\sigma(X) = \infty$. У випадку систем класичного неперервного точкового газу $X = \mathbb{R}^d$, а σ, буде мірою Лебега в $\mathbb{R}^d$.*

9.1. Простір нескінченних конфігурацій.

Простір конфігурацій на многовиді X визначається як множина усіх локально скінченних підмножин в X:

$$\Gamma_X \equiv \Gamma \ := \ \{\gamma \subset X | \ |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \quad \text{для} \quad \text{всіх} \ \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)\}, \tag{9.1}$$

де $|A| := cardA, \ A \in \mathcal{B}_c(X)$. Символ $|\cdot|$ може також означати міру Лебега на множині, але значення його завжди буде зрозуміле з контексту, крім того

$$\gamma \ := \ \{x_1, ..., x_n, ...\} \equiv \{x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}, ...\} \tag{9.2}$$

і $x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$, а $\pi \in P_{\mathbb{N}}$.

Це досить природне визначення з точки зору застосувань, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченне число об'єктів (частинок). З визначення (2.1), (2.2) видно, що Γ не є лінійною множиною. Але Γ можна зробити топологічним нелінійним простором; кожний елемент $\gamma \in \Gamma$ можна ототожнити з невід'ємною мірою Радона:

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x \in \mathcal{M}^+(X), \tag{9.3}$$

де ε_x–міра Дірака:

$$\varepsilon_x(f) = f(x), \quad f \in C_0(X), \tag{9.4}$$

де $C_0(X)$–простір неперервних функцій з компактним носієм, а $\mathcal{M}^+(X)$–простір невід'ємних мір Радона на $\mathcal{B}(X)$. Відповідна диференціальна міра є

$$\gamma(d\sigma) = \sum_{x\in\gamma} \varepsilon_x d\sigma. \tag{9.5}$$

Простір Γ можна наділити топологією, яка індукована *vague* топологією в $\mathcal{M}^+(X)$, що визначається як найслабша топологія, по відношення до якої відображення

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto < \gamma, f > = \int_X f(x)\gamma(d\sigma) = \sum_{x\in\gamma} f(x) \tag{9.6}$$

є неперервним для кожної $f \in C_0(X)$. Можна навести еквівалентний (може більш прозорий) опис цієї топології на мові збіжності послідовності конфігурацій $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ до конфігурації $\gamma \in \Gamma$.

Означення 9.1. *Послідовність γ_n збігається до $\gamma \in \Gamma$ тоді і тільки тоді, коли для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, такої, що $\gamma \cap \partial\Lambda = \emptyset$ ($\partial\Lambda$ це межа Λ) має місце*

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n \cap \Lambda| = |\gamma \cap \Lambda|. \tag{9.7}$$

Передбазою в цій топології є множини вигляду:

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \ |\gamma_\Lambda| = n, \ \gamma_{\partial\Lambda} = \emptyset, \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(X), \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Позначимо $\mathfrak{B}(\Gamma)$ борелівську σ-алгебру, що відповідає цій топології. Цю σ-алгебру можна також визначити по іншому

Означення 9.2. $\mathfrak{B}(\Gamma)$ *є найменша σ-алгебра на Γ, по відношенню до якої усі відображення*

$$N_\Lambda : \Gamma \mapsto \mathbb{N}_0 \ ; \ \gamma \mapsto |\gamma \cap \Lambda| \tag{9.8}$$

є вимірними для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$.

Будемо це позначати формулою:

$$\mathfrak{B}(\Gamma) \ := \ \sigma(\{N_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)\}) \tag{9.9}$$

9.2. Простір конфігурацій Γ_Y.

Нехай $Y \in \mathfrak{B}(X)$. Визначимо простір конфігурацій

$$\Gamma_Y \ := \ \{\gamma \in \Gamma \mid \ |\gamma \cap X \setminus Y| = 0\}. \tag{9.10}$$

Відповідна σ-алгебра є

$$\mathfrak{B}(\Gamma_Y) \ := \ \sigma(\{N_\Lambda \restriction \Gamma_Y \mid \Lambda \in \mathfrak{B}_c(X)\}). \tag{9.11}$$

Ця σ-алгебра є ізоморфною до

$$\mathfrak{B}_Y(\Gamma) \ := \ \sigma(\{N_\Lambda \mid \Lambda \in \mathfrak{B}_c(X),\ \Lambda \subset Y\}). \tag{9.12}$$

Для $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$

$$\Gamma_\Lambda \ := \ \{\gamma \in \Gamma \mid \ |\gamma \cap X \setminus \Lambda| = 0\} \tag{9.13}$$

буде простором конфігурацій в обмеженому об'ємі Λ. З визначення (2.1) випливає, що усі конфігурації у просторі Γ_Λ є скінченними. Щоб зрозуміти ізоморфізм σ-алгебр $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ і $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$ визначимо проектор

$$p_\Lambda \ : \ \Gamma \mapsto \Gamma_\Lambda \ ; \ \gamma \mapsto \gamma \cap \Lambda := \gamma_\Lambda. \tag{9.14}$$

Отже, кожному $\gamma_\Lambda \in \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ співставляється цілий клас $\widetilde{\gamma} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cap \Lambda = \gamma_\Lambda\}$.

9.3. Простір скінченних конфігурацій Γ_0.

Визначимо спочатку простір конфігурацій з фіксованим числом точок:

$$\Gamma_Y^{(n)} \ := \ \{\gamma \in \Gamma_Y \mid \ |\gamma| = n,\ n \in \mathbb{N}\},\ \Gamma_Y^{(0)} := \emptyset. \tag{9.15}$$

Ми будемо розглядати два випадки: коли Y приймає значення $Y = X$, тобто збігається з усім многовидом X, або ж $Y = \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$. Тепер простір усіх можливих скінченних конфігурацій в X визначається формулою:

$$\Gamma_0 \ := \ \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_X^{(n)}. \tag{9.16}$$

Зрозуміло, що Γ_0 є підмножиною Γ, але ми будемо розглядати його як самостійний простір і введемо в ньому топологію іншим чином. Визначимо для будь якої множини $Y \in \mathcal{B}(X)$ множину

$$\widetilde{Y}^{(n)} := \{(x_1, ..., x_n) \in Y^n \mid x_i \in Y,\ x_i \neq j,\ \text{для } i \neq j\}, \tag{9.17}$$

тобто з декартового добутку Y^n вилучим усі діагоналі. Топологічну структуру у просторі $\Gamma_Y^{(n)}$ визначимо за допомогою відображення

$$sym_Y^n : \widetilde{Y}^{(n)} \mapsto \Gamma_Y^{(n)};\ (x_1, ..., x_n) \mapsto \{x_1, ..., x_n\}. \tag{9.18}$$

Таке відображення задає ізоморфізм між фактор множиною $\widetilde{Y}^{(n)}/P_n$ і $\Gamma_Y^{(n)}$. Зрозуміло, що будь яка множина $U \subset \Gamma_Y^{(n)}$ є відкритою тоді і тільки тоді, коли $(sym_Y^n)^{-1}U$ є відкритою в $\widetilde{Y}^{(n)}$.

Зауваження 9.2. *З наведених вище побудов випливає, що для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ простори $\Gamma_{0;\Lambda}$ і Γ_Λ збігаються як множини, але є різними топологічними просторами.*

Обмежені множини в Γ_0. *Множина $A \in \mathfrak{B}(\Gamma_0)$ називається обмеженою, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}(X)$ і $N \in \mathbb{N}_0$ таке, що*

$$A \subset \coprod_{n=0}^{N} \Gamma_\Lambda^{(n)}$$

. Клас $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$-вимірних обмежених множин будемо позначати через $\mathfrak{B}_b(\Gamma_0)$.

9.4. Функції на Γ_0 і Γ.

Різні простори функцій, які пов'язані з просторами конфігурацій Γ_0 і Γ ми визначимо пізніше, коли введемо міри на цих просторах. Зараз ми наведемо деякі приклади функцій та деякі загальні класи функцій. Важливою функцією на просторі Γ_0 є так звана **Лебег-Пуассонівська експонента:**

$$e_\lambda(f, \eta) = \prod_{x \in \eta} f(x), \quad \eta \in \Gamma_0,\ f \in C(X). \tag{9.19}$$

В загальному випадку функція G на Γ_0 задається нескінченною послідовністю функцій із зростаючим числом змінних:

$$G = \{G_n(x_1, ..., x_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0},\ G_n = G \restriction \Gamma_0^{(n)},\ G_0 = G(\emptyset) = \text{const}. \tag{9.20}$$

Нехай $L^0(\Gamma, \mathfrak{B}(\Gamma))$ це простір усіх $\mathfrak{B}(\Gamma)-$вимірних функцій. На просторі нескінченних конфігурацій Γ важливим класом функцій є так звані циліндричні функції:

$$\mathcal{F}L^0(\Gamma) = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)} L^0(\Gamma, \mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)).$$

Область Λ називається областю циліндричності. Функція $F \in L^0(\Gamma, \mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma))$ тоді і тільки тоді, коли

$$F \upharpoonright \Gamma_\Lambda \in L^0(\Gamma, \mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)) \text{ і } F(\gamma) = F(\gamma_\Lambda).$$

Приклади. Нехай $f \in C_0(X)$ і $\operatorname{supp} f = \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$. Тоді для довільного $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} < f, \gamma > &= \int_X f(X)\gamma(d\sigma) = \int_\Lambda f(X)\gamma(\sigma(dx)) = \\ &= \int_X f(X)\gamma + \Lambda(\sigma(dx)) =< f, \gamma_\Lambda > . \end{aligned} \tag{9.21}$$

Аналогічно можна побудувати більш загальну функцію. Нехай $f_1, ..., f_n \in C_0(X)$ і $\operatorname{supp} f_i \subset \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ і $F_n \in C(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$F(\gamma) = F_n(< f_1, \gamma >, < f_2, \gamma >, ..., < f_n, \gamma >) \in \mathcal{F}L^0(\Gamma). \tag{9.22}$$

Пуассонівська експонента:

$$e_\pi(f, \gamma) = e^{<\gamma, \ln(1+f)> - <f>_\sigma}, \ \ \gamma \in \Gamma, \ f \in C_0(X), \tag{9.23}$$

$$< f >_\sigma := \int_X f(x)\sigma(dx) \tag{9.24}$$

Фоківська експонента:

$$e_F(f) = \left(\frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}} \right)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(1, f(x_1), ..., \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{i=1}^n f(x_i), ... \right). \tag{9.25}$$

Лекція 10.

Міри на просторах конфігурацій неперервних систем:міра Пуассона.

10.1. Міра Лебега-Пуассона на Γ_0 і Γ_Λ.

Нехай на X задана невироджена, не атомарна міра Радона σ: тобто для будь якої відкритої множини $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(\mathcal{O}) > 0$, для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$, $\sigma(\Lambda) < \infty$ і $\sigma(\{x\}) = 0$ для будь якого $x \in X$.

Тоді для будь якого $n \in \mathbb{N}$ визначимо міру $\sigma^{\otimes n}$ на $(X^n, \mathcal{B}(X^n))$. Внаслідок її неатомарності, для будь якої множини $Y \in \mathcal{B}(X)$

$$\sigma^{\otimes n}(Y^n \setminus \widetilde{Y}^{(n)}) \;=\; 0, \tag{10.1}$$

де $\widetilde{Y}^{(n)}$ визначена в Лекції 9 формулою (9.17).

Визначимо міру $\sigma_Y^{(n)}$ на $\mathfrak{B}(\Gamma_Y^{(n)})$ за допомогою формули

$$\sigma_Y^{(n)} \;:=\; \sigma_Y^{\otimes n} \circ (sym_Y^n)^{-1}, \;\; \sigma_Y := \sigma \upharpoonright Y, \tag{10.2}$$

де права частина означає образ міри $\sigma^{\otimes n}$ відносно відображення (9.18).

Означення 10.1 *Мірою Лебега-Пуассона, що породжена мірою інтенсивності σ називають сігма-скінченну міру на $(\Gamma_0, \mathfrak{B}(\Gamma_0))$, що визначаєтьcя нескінченним рядом:*

$$\lambda_\sigma \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sigma_X^{(n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sigma^{(n)}, \;\; \sigma^{(0)}(\emptyset) := 1. \tag{10.3}$$

Для $\Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$ визначимо обмеження λ_σ на $(\Gamma_\Lambda, \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda))$ формулою

$$\lambda_\sigma^\Lambda := \lambda_\sigma \upharpoonright \Gamma_\Lambda \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sigma_\Lambda^{(n)}. \tag{10.4}$$

З визначення (10.4) легко порахувати, що

$$\lambda_\sigma^\Lambda(\Gamma_\Lambda) \;=\; e^{\sigma(\Lambda)}. \tag{10.5}$$

Для $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$-вимірної функції F інтеграл за мірою λ_σ визначається формулою

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} F(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_X\cdots\int_X F(\{x\}_1^n)\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_X\cdots\int_X F_n(x_1,...,x_n)\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n), \\ &\{x\}_1^n := \{x_1,...,x_n\}.\end{aligned} \tag{10.6}$$

10.2. Міра Пуассона на Γ.

10.2.1. Визначення міри Пуассона на Γ. За допомогою міри λ_σ^Λ визначимо ймовірносну міру на $(\Gamma_\Lambda, \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda))$ формулою

$$\pi_\sigma^\Lambda \ := \ e^{-\sigma(\Lambda)}\lambda_\sigma^\Lambda. \tag{10.7}$$

Справедливе наступне твердження

Пропозиція 10.1 *Сімейство мір $\{\pi_\sigma^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)\}$ є попарно узгодженим, тобто для будь яких $\Lambda_1 \subseteqq \Lambda_2$*

$$\pi_\sigma^{\Lambda_2} \restriction \Gamma_{\Lambda_1} \ = \ \pi_\sigma^{\Lambda_1}. \tag{10.8}$$

Доведення. Для цього достатньо довести, що для довільної циліндричної функції $F_{\Lambda_1}(\gamma),\ \gamma \in \Gamma_{\Lambda_2}$ справедлива формула

$$\int_{\Gamma_{\Lambda_2}} F(\gamma\cap\Lambda_1)\pi_\sigma^{\Lambda_2}(d\gamma) \ = \ \int_{\Gamma_{\Lambda_1}} F(\gamma\cap\Lambda_1)\pi_\sigma^{\Lambda_1}(d\gamma). \tag{10.9}$$

Скористаємося означенням (10.7) і формулою (10.6)і розпишемо ліву частину формули (10.9).

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_{\Lambda_2}} F(\gamma\cap\Lambda_1)\pi_\sigma^{\Lambda_2}(d\gamma) = \\ &= e^{-\sigma(\Lambda_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\Lambda_2}\sigma(dx)\right)^n F(\{x\}_1^n\cap\Lambda_1) = \\ &= e^{-\sigma(\Lambda_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int_{\Lambda_1}\sigma(dx) + \int_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\sigma(dx)\right)^n F(\{x\}_1^n\cap\Lambda_1) = \\ &= e^{-\sigma(\Lambda_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\int_{\Lambda_1}\sigma(dx)\right)^k\left(\int_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\sigma(dx)\right)^{n-k} F(\{x\}_1^n\cap\Lambda_1) = \\ &= e^{-\sigma(\Lambda_2)}e^{\sigma(\Lambda_2\setminus\Lambda_1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{\Lambda_1}\sigma(dx)\right)^k F(\{x\}_1^k) = \\ &= \int_{\Gamma_{\Lambda_1}} F(\gamma\cap\Lambda_1)\pi_\sigma^{\Lambda_1}(d\gamma).\end{aligned}$$

Для скорочення запису ми використали дещо нестандартне позначення для кратних інтегралів. ■

За теоремою Колмогорова (див., наприклад, K.R. Parthasarathy "Prbability Measures on Metric Spaces". Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, New York and London, 1967) сім'я $\{\pi_\sigma^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)\}$ єдиним чином визначає міру π_σ на $(\Gamma, \mathfrak{B}(\Gamma))$ таким чином, що

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{B}_c(X), \quad \pi_\sigma^\Lambda \;=\; \pi_\sigma \circ (p_\Lambda)^{-1}. \tag{10.10}$$

10.1.2. Перетворення Лапласа міри Пуассона. Нехай функція $f \in C_0(X)$ є такою, що існує Λ таке, що $\operatorname{supp} f \subset \Lambda \in \mathcal{B}_c(X)$. Тоді

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad <\gamma, f> = <p_\Lambda \gamma, f> . \tag{10.11}$$

За означенням перетворення Лапласа міри π_σ визначається інтегралом:

$$\begin{aligned} l_{\pi_\sigma}(f) := \int_\Gamma e^{<\gamma,f>}\pi_\sigma(d\gamma) = \int_\Gamma e^{<p_\Lambda\gamma,f>}\pi_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{<\gamma,f>}\pi_\sigma^\Lambda(d\gamma) = \\ = e^{-\sigma(\Lambda)}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} e^{\sum_{k=1}^n f(x_k)}\sigma(dx_1)\cdots\sigma(dx_n) = \\ = e^{-\sigma(\Lambda)} e^{\int_\Lambda e^{f(x)}\sigma(dx)} = e^{\int_X (e^{f(x)}-1)\sigma(dx)} \end{aligned} \tag{10.12}$$

10.3. Властивості мір Пуассона і Лебега-Пуассона.

10.3.1. Нескінченно-подільність мір.

Лема 10.1. *Нехай $X_1 \in \mathcal{B}(X)$ і $X_2 \in \mathcal{B}(X)$ є такими, що $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ і $X_1 \cup X_2 = X$, а функції F_i, $(i = 1, 2)$ є $\mathfrak{B}_{X_i}(\Gamma_0)$-вимірні. Тоді*

$$\int_{\Gamma_0} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_{0,X_1}} F_1(\gamma)\lambda_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{0,X_2}} F_2(\gamma)\lambda_\sigma^{X_2}(d\gamma). \tag{10.13}$$

Доведення. За означенням 10.1 (див. ф-лу (10.6)

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_0} F_1(\gamma)F_2(\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma) \;= \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_X \sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n \cap X_1)F_2(\{x\}_1^n \cap X_2) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\int_{X_1} \sigma(dx) + \int_{X_2}\sigma(dx)\right)^n F_1(\{x\}_1^n \cap X_1)F_2(\{x\}_1^n \cap X_2) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\int_{X_1}\sigma(dx)\right)^k \left(\int_{X_2}\sigma(dx')\right)^{n-k} F_1(\{x\}_1^k)F_2(\{x'\}_1^{n-k}) = \\ &= \int_{\Gamma_{0,X_1}} F_1(\gamma)\lambda_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{0,X_2}} F_2(\gamma)\lambda_\sigma^{X_2}(d\gamma). \end{aligned}$$

■

Лема 10.2. *Нехай* $X_1 \in \mathcal{B}(X)$ *і* $X_2 \in \mathcal{B}(X)$ *є такими, що* $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ *і* $X_1 \cup X_2 = X$*, а функції* F_i*,* $(i = 1, 2)$ *є* $\mathfrak{B}_{X_i}(\Gamma)$*-вимірні. Тоді*

$$\int_\Gamma F_1(\gamma)F_2(\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\pi_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\pi_\sigma^{X_2}(d\gamma). \tag{10.14}$$

Доведення. Приймемо, поки що, на віру, що лінійна оболонка множини експоненціальних векторів $\{e^{<\gamma,f>} \mid \; f \in C_0(X)\}$ є всюди щільною в $L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$. Тому нам буде достатньо довести лему для функцій

$$F_i(\gamma) \;=\; e^{<\gamma,f_i>}, \;\; i = 1, 2, \;\;\; \operatorname{supp} f_i \subsetneqq X_i, \;\; f_i \in C_0(X). \tag{10.15}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma F_1(\gamma)F_2(\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_X} e^{<\gamma,f_1>}e^{<\gamma,f_2>}\pi_\sigma(d\gamma) = \\
&= \int_{\Gamma_X} e^{<\gamma,(f_1+f_2)>}\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; e^{\int_X (e^{f_1(x)+f_2(x)}-1)\sigma(dx)} \;= \\
&= e^{\int_{X_1}(e^{f_1(x)+f_2(x)}-1)\sigma(dx)+\int_{X_2}(e^{f_1(x)+f_2(x)}-1)\sigma(dx)} \;= \\
&= \int_{\Gamma_{X_1}} e^{<\gamma,f_1>}\pi_\sigma(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} e^{<\gamma,f_2>}\pi_\sigma(d\gamma) = \\
&= \int_{\Gamma_{X_1}} F_1(\gamma)\pi_\sigma^{X_1}(d\gamma)\int_{\Gamma_{X_2}} F_2(\gamma)\pi_\sigma^{X_2}(d\gamma).
\end{aligned}$$

■

10.3.2. Формула Мекке.

Для довільної позитивної $\mathcal{B}(X)\otimes\mathfrak{B}(\Gamma)$-вимірної функції H справедлива формула:

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} H(x;\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma\int_X H(x;\gamma\cup\{x\})\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma). \tag{10.16}$$

Доведення. Скористаємося тими самими аргументами, що і при доведенні попередньої леми і візьмемо функцію H у вигляді:

$$H(x;\gamma) \;=\; h(x)e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}, \;\;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \;\;\; h, g \in C_0(X). \tag{10.17}$$

Тоді

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} h(x)e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma <\gamma, h> e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma) = \frac{d}{d\alpha} e^{\int_X (e^{\alpha h(x)+\beta g(x)}-1)\sigma(dx)} =$$

$$\int_\Gamma e^{<\gamma,(\alpha h+\beta g)>}\pi_\sigma(d\gamma)\int_X h(x)e^{\alpha h(x)+\beta g(x)}\sigma(dx) \ =$$

$$= \int_\Gamma\int_X h(x)e^{<\gamma\cup\{x\},(\alpha h+\beta g)>}\sigma(dx)\pi_\sigma(d\gamma).$$

10.3.3. Множини міри нуль.

Нехай $\overline{\Delta}$ це розбиття X на d-куби, такі що для будь яких $\Delta, \Delta' \in \overline{\Delta}$, $\Delta\cap\Delta' = \emptyset$ і

$$X \ = \ \coprod_{\Delta\in\overline{\Delta}} \Delta. \tag{10.18}$$

Визначимо множину

$$\mathbb{O}_{\overline{\Delta}}(N_0) \ := \ \left\{\gamma\in\Gamma \mid \forall\Delta\in\overline{\Delta},\ |\gamma_\Delta| \le N_0,\ N_0\in\mathbb{N}\right\}. \tag{10.19}$$

Лема 10.3.

$$\pi_\sigma(\mathbb{O}_{\overline{\Delta}}(N_0)) \ = \ 0. \tag{10.20}$$

Доведення. Запишемо індикатор множини $\mathbb{O}_{\overline{\Delta}}(N_0)$:

$$1\!\!1_{\mathbb{O}_{\overline{\Delta}}(N_0)}(\gamma) \ = \ \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}} 1\!\!1_{\{\gamma_\Delta:|\gamma_\Delta|\le N_0\}}(\gamma). \tag{10.21}$$

Тоді

$$\pi_\sigma(\mathbb{O}_{\overline{\Delta}}(N_0)) \ = \ \int_\Gamma \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}} 1\!\!1_{\{\gamma_\Delta:|\gamma_\Delta|\le N_0\}}(\gamma)\pi_\sigma(d\gamma) =$$

$$\prod_{\Delta\in\overline{\Delta}}\int_{\Gamma_\Delta} 1\!\!1_{\{\gamma_\Delta:|\gamma_\Delta|\le N_0\}}(\gamma)\pi_\sigma^\Delta(d\gamma) = \prod_{\Delta\in\overline{\Delta}} e^{-\sigma(\Delta)}\int_{\Gamma_\Delta} 1\!\!1_{\{\gamma_\Delta:|\gamma_\Delta|\le N_0\}}(\gamma)\lambda_\sigma^\Delta(d\gamma) =$$

$$\prod_{\Delta\in\overline{\Delta}} e^{-\sigma(\Delta)}\left(1+\sigma(\Delta)+\frac{1}{2!}\sigma(\Delta)^2+\cdots+\frac{1}{N_0!}\sigma(\Delta)^{N_0}\right) = 0.$$

Остання рівність слідує з того, що для довільного кубика $\Delta\in\overline{\Delta}$ множник під знаком нескінченного добутку є меншим одиниці.

■

Наслідок.

$$\pi_\sigma(\Gamma_0) \ = \ 0. \tag{10.22}$$

Доведення. Скористаємося визначенням (9.16) та сігма-адитивністю міри π_σ. Тоді

$$\pi_\sigma(\Gamma_0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \pi_\sigma(\Gamma_X^{(n)}) = 0. \tag{10.23}$$

Лекція 11.

Міри Гаусса на нескінченновимірних просторах.

11.1. Міра Гаусса в $\mathbb{R}^n$.

Почнемо з $\mathbb{R}^1$. Гауссова міра в $\mathbb{R}^1$ визначається формулами:

$$\mu^G(\Delta) = \pi^{-1/2} \int_\Delta e^{-x^2} dx = \int_\Delta \mu^G(dx),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1), \tag{11.1}$$

або

$$\mu^G(\Delta) = (2\pi)^{-1/2} \int_\Delta e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_\Delta \mu^G(dx),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1). \tag{11.2}$$

Ми будемо притримуватись визначення формулою (11.2). Відповідну міру в $\mathbb{R}^n$ можна визначити як продакт-міру n-однакових копій:

$$\mu_1^G(dx) = \mu^G(dx_1) \times \cdots \times \mu^G(dx_n) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

$$x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2,\ dx = dx_1 \cdots dx_n,\ x_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, ..., n.$$

Така міра має назву *канонічної гауссової міри.* Загальне визначення гауссової міри в $\mathbb{R}^n$ формулюється таким чином.

Визначення 11.1. *Гауссовою мірою в $\mathbb{R}^n$ з кореляційним оператором (матрицею) C (додатній оператор в $\mathbb{R}^n$) і середнім значенням a називається наступна ймовірнісна міра*

$$\mu_{C,a}^G(\Delta) = (2\pi)^{-n/2} (DetC)^{-1/2} \int_\Delta e^{-\frac{1}{2}((x-a), C^{-1}(x-a))_{\mathbb{R}^n}} dx =$$
$$= \int_\Delta \mu_{C,a}^G(dx), \qquad x, a \in \mathbb{R}^n,\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{11.3}$$

Зробимо в інтегралі (11.3) заміну змінних

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto y \in \mathbb{R}^n : x \ = \ a + A(y - b), \tag{11.4}$$

де A– матриця, що має обернену, а $b \in \mathbb{R}^n$– фіксований вектор. Внаслідок того, що якобіан перетворення $J = DetA$ і властивостей визначника, отримуємо

$$\mu^G_{C,a}(\Delta) = (2\pi)^{-n/2}(DetC_A)^{-1/2}\int_{\widetilde{\Delta}} e^{-\frac{1}{2}((y-b),C_A^{-1}(y-b))_{\mathbb{R}^n}}dy,$$
$$C_A = A^{-1}C(A^*)^{-1}, \tag{11.5}$$

де $\widetilde{\Delta}$ це образ множини Δ при відображенні (11.4). Порівнюючи (11.3) і (11.5) маємо:

$$\mu^G_{C,a}(\Delta) = \mu^G_{C_A,b}(\widetilde{\Delta}). \tag{11.6}$$

Внаслідок того, що оператори $C_A = A^{-1}C(A^*)^{-1}$ при фіксованому позитивному операторі C і довільному A, що має обернений, пробігають усю множину позитивних операторів в $\mathbb{R}^n$, то рівність (11.6) вказує на те, що будь які дві гауссові міри в $\mathbb{R}^n$ виражаються одна через другу. Користуючись правилом заміни змінної легко обрахувати перетворення Фур'є міри $\mu^G_{C,a}$:

$$\widetilde{\mu}^G_{C,a}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,x)_{\mathbb{R}^n}}\mu^G_{C,a}(dx) = e^{i(y,a)_{\mathbb{R}^n}-\frac{1}{2}(y,Cy)_{\mathbb{R}^n}}. \tag{11.7}$$

Пропозиція 4.1 *Нехай $K = \mathbb{R}^m$, $(m < n)$ є підпростір в $\mathbb{R}^n$. Тоді для довільної множини $\Delta \in \mathcal{B}(K)$ міра $\mu^G_{C,a}(\Delta\times\mathbb{R}^{n-m})$ є гауссовою мірою в K з коваріацією $C_K = P_K C P_K$ і середнім $a_K = P_K a \in K$, де P_K– проектор: $P_K : R^n \mapsto K = \mathbb{R}^m$. Тобто*

$$\mu^G_{C,a}(\Delta\times\mathbb{R}^{n-m}) = \mu^G_{C_K,a_K}(\Delta). \tag{11.8}$$

Доведення слідує з рівності перетворень Фур'є мір $\mu^G_{C,a} \upharpoonright K$ і $\mu^G_{C_K,a_K}$, тобто рівності:

Вправа 11.1.

$$\widetilde{\mu}^G_{C,a}(\cdot\times\mathbb{R}^{n-m})(y) = \widetilde{\mu}^G_{C_K,a_K}(y),\ y\in K. \tag{11.9}$$

Легко також перевірити наступне твердження:

Вправа 11.2. *Для довільного вектора $b \in \mathbb{R}^n$ і оператора A в $\mathbb{R}^n$ справедливі формули:*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(x,b)_{\mathbb{R}^n}\mu^G_{C,a}(dx) = (b,a)_{\mathbb{R}^n}. \tag{11.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Ax,x)_{\mathbb{R}^n}\mu^G_{C,a}(dx) = \mathrm{Tr}\,(CA) + (Aa,a)_{\mathbb{R}^n}. \tag{11.11}$$

11.2. Міра Гаусса в $\mathbb{R}^\infty$.

Розглянемо випадок нескінченного зліченого добутку гауссових мір, так звані гауссові продакт-міри. У цій ситуації простір $\mathbb{R}^\infty$ наділяється сігма-алгеброю $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}^\infty)$, яка породжена циліндричними множинами вигляду:

$$Z = Z(i_1, ..., i_n; \Delta) := \{x \in \mathbb{R}^\infty \mid \ (x_{i_1}, ..., x_{i_n}) \in \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{11.12}$$

Зауважимо, що якщо розглядати простір $\mathbb{R}^\infty$ як топологічний простір з тихонівською топологією, то

$$\mathfrak{Z}(\mathbb{R}^\infty) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty). \tag{11.13}$$

Дивись доведення в [2](гл.3,§1, п.4).

Для заданої послідовності $C = (c_k)_{k=1}^\infty$ і $c_k > 0$ введемо в $\mathbb{R}^\infty$ гауссову продакт-міру:

$$\mu_C^G = \underset{k\geq 1}{\otimes} \mu_{c_k}^G, \ \mu_{c_k}^G(dx_k) = (\pi c_k)^{-1/2} e^{-\frac{x_k^2}{c_k}} dx_k, \ k \in \mathbb{N}, \ x_k \in \mathbb{R}^1. \tag{11.14}$$

Важливим питанням є встановлення множин повної міри і множин нульової міри. Щоб з'ясувати це питання, будемо розглядати простір $\mathbb{R}^\infty$ як оснащення простору $l_2 = l_2(\mathbb{R}^1)$ з допомогою ядерного підпростору $\mathbb{R}_0^\infty$, тобто трійку(див. детальніше [2](гл.1,§1)

$$\mathbb{R}^\infty \supset l_2 \supset \mathbb{R}_0^\infty. \tag{11.15}$$

Сформулюємо спершу допоміжну лему.

Лема 11.1. *Для кожного вектора-ваги $p = (p_k)_{k=1}^\infty$, $p_k > 0$ гільбертів простір*

$$l_2(p) := \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty x_k^2 p_k := ||x||_{l_2(p)} < \infty \right\} \tag{11.16}$$

входить в $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}^\infty)$.

Доведення. Представимо $l_2(p)$ у вигляді об'єднання замкнутих куль:

$$l_2(p) = \bigcup_{R=1}^\infty \widetilde{B}_R(0), \ \widetilde{B}_R(0) = \{x \in l_2(p) \mid \ ||x||_{l_2(p)} \leq R\}, \ n, R \in \mathbb{N}.$$

Введемо множини

$$\beta_{n,R} := \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k < R^2 \right\} \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}^\infty).$$

Тоді, очевидно, що $\widetilde{B}_R(0) = \bigcap_{n=1}^\infty \beta_{n,R}$. Тому $\widetilde{B}_R(0)$, а значить і $l_2(p)$ входять в $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}^\infty)$. ■

Теорема 11.1(критерій Колмогорова-Хінчина).
Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k c_k < \infty$, *то* $\mu_C^G(l_2(p)) = 1$. *В іншому випадку* $\mu_C^G(l_2(p)) = 0$.

Доведення. Функція

$$\mathbb{R}^\infty \ni x \mapsto f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^2},\ \varepsilon > 0$$

має таку властивість, що $f_\varepsilon(x) > 0$, якщо $x \in l_2(p)$ і $f_\varepsilon(x) = 0$, якщо $x \notin l_2(p)$. Послідовність циліндричних функцій $f_{\varepsilon,n}(x) = \exp\{-\varepsilon \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2\}$ монотонно спадає і поточково збігається до $f_\varepsilon(x)$ при $n \to \infty$. Тоді за теоремою Б. Леві

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} f_\varepsilon(x)\mu_C^G(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^\infty} f_{\varepsilon,n}(x)\mu_C^G(dx). \qquad (11.17)$$

Але

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} f_{\varepsilon,n}(x)\mu_C^G(dx) = \prod_{k=1}^{n}(\pi c_k)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-x_k^2(\varepsilon p_k + c_k^{-1})} dx_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon p_k + c_k^{-1})c_k}} = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon p_k c_k)\right)^{-1/2}.$$

Тоді з рівності (11.17) маємо:

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} f_\varepsilon(x)\mu_C^G(dx) = \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon p_k c_k)\right)^{-1/2}. \qquad (11.18)$$

Тоді, якщо $\sum_{k=1}^{\infty} p_k c_k = \infty$, то в наслідок (11.18) $\int_{\mathbb{R}^\infty} f_\varepsilon(x)\mu_C^G(dx) = 0$, звідки отримуємо, що $\mu_C^G(l_2(p)) = 0$.

Якщо ж $\sum_{k=1}^{\infty} p_k c_k < \infty$, то $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon p_k c_k)$ є збіжний і $\int_{\mathbb{R}^\infty} f_\varepsilon(x)\mu_C^G(dx) > 0$ існує, а $f_\varepsilon(x) \to \mathbb{1}_{l_2(p)}(x)$ поточково при $\varepsilon \to 0$. Тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^\infty} f_\varepsilon(x)\mu_C^G(dx) = \mu_C^G(l_2(p)).$$

Але

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon p_k c_k) = 1,$$

звідки й слідує, що $\mu_C^G(l_2(p)) = 1$. ■

11.2. Гауссові міри у гільбертовому просторі.

Гауссова міра у гільбертовому просторі може бути визначена за допомогою продовження міри, що визначається на циліндричних множинах, які визначаються наступним чином. Нехай $\mathcal{H}$– дійсний гільбертів простір, у якому заданий позитивний ядерний оператор C. Позначимо через $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ортонормований базис в $\mathcal{H}$, який складається з власних векторів оператора C:

$$Ce_j \ = \ \lambda_j e_j, \ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \ = \mathrm{Tr}\, C \ < \ \infty. \tag{11.19}$$

Позначимо через $\mathcal{K}$ сукупність усіх скінчено-вимірних підпросторів $\mathcal{H}$, натягнутих на базисні вектори $(e_j)_{j \in I_k}$, де $I_k \subset \{1, 2, ...\}$, $\ |I_k| = k,\ k = 1, 2, ...$, тобто для відповідного простору $K \in \mathcal{K}$, $\dim K = k$. Для деякого $K \in \mathcal{K}$ і фіксованого $\Delta \in \mathcal{B}(K)$ визначимо множину

$$\begin{aligned} Z = Z(K; \Delta) : = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \ P_K \phi \in \Delta \in \mathcal{B}(K)\} = \\ = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \ ((\phi, e_{i_1}), ..., (\phi, e_{i_k})) \in \Delta \in \mathcal{B}(K)\}, \end{aligned} \tag{11.20}$$

де P_K ортогональний проектор: $\mathcal{H} \mapsto K$. Таку множину в $\mathcal{H}$ називають циліндричною множиною з "основою"Δ і координатою K.

Введемо множину

$$\mathcal{C} := \{Z(K; \Delta) \mid \ \Delta \in \mathcal{B}(K), \ K \in \mathcal{K}\}, \tag{11.21}$$

яка є алгеброю циліндричних множин $Z(K, \Delta)$, бо для двох довільних множин $Z_1(K_1; \Delta_1)$ і $Z_2(K_2; \Delta_2)$ їх об'єднання можна представити у вигляді $Z(K; \Delta)$, де K=л.о.(K_1, K_2), а $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Відповідну сігма-алгебру позначимо $\mathcal{C}_\sigma$. Справедливе наступне твердження.

Лема 11.2. $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{H})$=$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Доведення. Включення $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ є наслідком того, що множина $\cup_{K \in \mathcal{K}} K$ є всюди щільною множиною в $\mathcal{H}$ (див. детальніше [БК'88, гл.2, §1, п.4]). Обернене включення випливає з того, що для будь якого $K \in \mathcal{K}$, $\ Z(K, \Delta) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. ■

Тепер на алгебрі $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$визначимо циліндричну міру Гаусса, що відповідає коваріаційному оператору C і деякому фіксованому вектору $a \in \mathcal{H}$, наступною формулою:

$$\mu^G_{c;C,a}(Z(K, \Delta)) = (2\pi)^{-k/2}(DetC_K)^{-1/2} \int_\Delta e^{-\frac{1}{2}((\phi - a_K), C_K^{-1}(\phi - a_K))_\mathcal{H}} dm_K(\phi), \tag{11.22}$$

де $\ C_K = P_K C P_K,\ a_K = P_K a$, а m_K лебегова міра в K, індукована метрикою в $\mathcal{H}$. Існування міри Гаусса в усьому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ слідує з наступної теореми.

Теорема 11.2.
Формула (11.22) *визначає циліндричну міру в* $\mathcal{H}$*, яка продовжується до міри*

на $\mathcal{C}_\sigma(\mathcal{K},\mathcal{H}) = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. *Отриману міру* $\mu^G_{C,a}$ *будемо називати мірою Гаусса з коваріаційним оператором* C *і середнім значенням* a.

Доведення теореми спирається на загальний критерій продовження циліндричних мір до мір на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, який ми сформулюємо наступною лемою.

Лема 4.3. *Для того, щоб циліндричну міру* μ_c *можна було продовжити до ймовірнісної міри* μ *на* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась наступна умова: для будь якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $R > 0$, *що* $\mu_c(Z) < \varepsilon$ *для кожного* $Z \in \mathcal{C}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, *яке лежить зовні кулі* $\widetilde{B}_R(0) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \ ||\phi||_{\mathcal{H}} \le R\}$.

Доведення дивись в [2](гл. 2, §1, п.4 (Лема 1.3).

Доведення т. 11.2. Отже треба перевірити чи виконуються умови леми 11.3.

Розглянемо в $\mathcal{H}$ кулю $\widetilde{B}_R(0) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \ ||\phi||_{\mathcal{H}} \le R\}$ і циліндричну множину $Z(K;\Delta)$ $(K \in \mathcal{K})$, яка лежить зовні цієї кулі. Тоді внаслідок того, що Δ лежить зовні кулі, а $\phi \in \Delta$ отримаємо, використавши (11.22) і (11.11):

$$\begin{aligned}\mu^G_{c;C,a}(Z(K,\Delta)) \le\ & \frac{(DetC_K)^{-1/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int_\Delta \frac{||\phi||^2_{\mathcal{H}}}{R^2} e^{-\frac{1}{2}((\phi-a_K),C_K^{-1}(\phi-a_K))_{\mathcal{H}}} dm_K(\phi) = \\ &= \frac{1}{R^2}\int_\Delta (\phi,\phi)_{\mathbb{R}^n}\mu^G_{C,a}(d\phi) = \frac{1}{R^2}\left(\mathrm{Tr}\, C_K + ||a_K||^2_{\mathcal{H}}\right) \le \\ &\le \frac{1}{R^2}\left(\mathrm{Tr}\, C + ||a||^2_{\mathcal{H}}\right). \end{aligned} \tag{11.23}$$

З нерівності (11.23) слідує, що міра $\mu^G_{c;C,a}(Z(K,\Delta))$ може бути зроблена як завгодно малою при великих R. ■

11.3. Гауссові міри у гільбертових оснащеннях.

Ці питання детально обговорюються в монографії [БК'88, гл. 2]. Тут ми лише звернемо увагу на деякі основні моменти і сформулюємо дві важливі теореми. Перш за все звернемо увагу, що перетворення Фур'є довільної міри μ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ визначається формулою

$$\widetilde{\mu}(f) = \int_{\mathcal{H}} e^{i(f,\phi)_{\mathcal{H}}} d\mu(\phi). \tag{11.24}$$

Для гауссової міри, що відповідає коваріаційному оператору C (виберемо $a = 0$ для спрощення запису), цей інтеграл легко порахувати на циліндричних множинах, які ми визначали формулою (11.20), скориставшись (13.2), тобто фактично вибравши вектори $f, \phi \in \mathcal{H}$ у вигляді:

$$f = \sum_{j=1}^N f_j e_j, \quad \phi = \sum_{k=1}^N \phi_k e_k, \tag{11.25}$$

де $(e_j)_{j=1}^{\infty}$–ортонормований базис в $\mathcal{H}$, який збігається з повною системою власних векторів оператора C. Тоді

Вправа 11.3.

$$\widetilde{\mu}_{C,0}^{G}(f) = \int_{\mathcal{H}} e^{i(f,\phi)_{\mathcal{H}}} d\mu_{C,0}^{G}(\phi) = e^{-\frac{1}{2}(Cf,f)_{\mathcal{H}}}. \qquad (11.26)$$

Виберемо тепер для $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ трійку

$$\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_+. \qquad (11.27)$$

(Дивись детальніше [2](гл. 1, §1).

Тоді для довільної циліндричної міри μ_c в $\mathcal{H}_0$ можна визначить перетворення Фур'є формулою (11.24) на лінійній множині векторів $f \in \mathcal{L} := \cup_{K\in\mathcal{K}} K$, яка щільна в $\mathcal{H}_0$. Розширення міри μ_c на $\mathcal{H}_-$ задає наступна теорема.

Теорема 11.3.
Нехай перетворення Фур'є $\widetilde{\mu}_c(f), f \in \mathcal{L}$ неперервно в топології простору $\mathcal{H}_0$. Тоді вихідна циліндрична міра μ_c продовжується до міри μ на $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_-)$.

Сформулюємо ще одну важливу теорему, яка слідує з деяких більш загальних конструкцій (див., наприклад, [2](гл. 5)і яку називають теоремою Мінлоса.

Теорема 11.4.
Нехай $\chi(f)$ є додатно-визначеним функціоналом на $\mathcal{H}_+$, тобто для довільних $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ і $f_j \in \mathcal{H}_+ (j = 1, ..., N)$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{\lambda}_i \lambda_j \chi(f_i - f_j) \geq 0, \qquad (11.28)$$

тоді існує ймовірнісна міра μ на $\mathcal{H}_-$ така, що

$$\chi(f) = \int_{\mathcal{H}} e^{i(f,\phi)_{\mathcal{H}}} d\mu(\phi). \qquad (11.29)$$

Лекція 12.

Властивості інтегралів за гауссовою мірою.

Будемо розглядати Міру Гаусса, що відповідає коваріаційному оператору C та середньому $a = 0$ в деякому гільбертовому оснащенні $\Phi' \supset \mathcal{H} \supset \Phi$. Тоді (див. (11.26)) для довільного $f \in \Phi$

$$\int_{\Phi'} e^{i\phi(f)} d\mu_C^G(\phi) = e^{-\frac{1}{2}C(f,f)}, \tag{12.1}$$

де через $\phi(f)$ ми позначаємо значення лінійного функціоналу $\phi \in \Phi'$ на функції $f \in \Phi$. Наприклад для $\phi \in \mathcal{H}$ $\phi(f) = (f,\phi)_{\mathcal{H}}$. Крім того для довільних $f, g \in \mathcal{H}$ введемо позначення $C(f,g) = (f, Cg)_{\mathcal{H}}$ і $\mu_C^G = \mu_{C,0}^G$.

12.1. Формула моментів.

Лема 12.1. *Для довільних $f_1, ..., f_{2n+1} \in \Phi$ виконуються рівності*

$$\int_{\Phi'} \phi(f_1)\cdots\phi(f_{2n}) d\mu_C^G(\phi) = \sum_{\pi}{}' C(f_{\pi(1)}, f_{\pi(2)}) \cdots C(f_{\pi(2n-1)}, f_{\pi(2n)})$$

$$\int_{\Phi'} \phi(f_1)\cdots\phi(f_{2n+1}) d\mu_C^G(\phi) = 0, \tag{12.2}$$

де сума $\sum_\pi'$ це сума по $(2n)!/n!2^n$ способами розбиття чисел $1, 2, ..., n$ на n різних пар $(\pi(1), \pi(2)), ..., (\pi(2n-1), \pi(2n))$.

Доведення. Підставимо у формулу (12.1) $f = t_1 f_1 + \cdots + t_{2n} f_{2n}$. Тоді

$$\int_{\Phi'} \phi(f_1)\cdots\phi(f_{2n}) d\mu_C^G(\phi) = (-i)^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial t_1 \cdots \partial t_{2n}} \int_{\Phi'} e^{i\sum_{i=1}^{2n} t_i \phi(f_i)} d\mu_C^G(\phi)|_{t_i=0,\, i=\overline{1,2n}} =$$

$$= (-i)^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial t_1 \cdots \partial t_{2n}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} C(f_i,f_j) t_i t_j}|_{t_i=0,\, i=\overline{1,2n}}. \tag{12.3}$$

■

12.2. Формула інтегрування за частинами.

Щоб записати цю формулу нам треба визначити похідну деякого функціоналу $A(\phi)$, який ми для визначеності будемо вважати функціоналом з простору $\Phi' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Тоді похідну функціонала $A(\phi)$ вздовж напрямку $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ визначимо формулою:

$$(D_\psi A)(\phi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(\phi + \varepsilon\psi) - A(\phi)}{\varepsilon}. \tag{12.4}$$

Наприклад для функціоналів типу монома та експоненти з формули (12.4) слідує, що

$$D_\psi \phi(f)^n = n\psi(f)\phi(f)^{n-1}, \;\; D_\psi e^{\phi(f)} = \psi(f) e^{\phi(f)}. \tag{12.5}$$

У випадках, які ми будемо розглядати, $\psi = \delta_x$– функція Дірака в точці x. Тоді ми будемо це позначати так:

$$(D_{\delta_x} A)(\phi) := \frac{\delta A(\phi)}{\delta \phi(x)}. \tag{12.6}$$

Легко підрахувати, що

$$\frac{\delta \phi(f)}{\delta \phi(x)} = \delta_x(f) = f(x). \tag{12.7}$$

Або формально можна записувати:

$$\frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi(x)} = \delta_x(y) = \delta(x-y). \tag{12.8}$$

Лема 12.2. *Нехай $F \in L^2(\Phi', \mu_C^G)$. Тоді*

$$\int_{\Phi'} \phi(f) F(\phi) d\mu_C^G(\phi) = \int_{\Phi'} d\mu_C^G(\phi) C(f, \frac{\delta}{\delta\phi}) F(\phi) := \tag{12.9}$$
$$:= \int_{\Phi'} \int_{\mathbb{R}^d} dy C(x,y) \frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(y)} d\mu_C^G(\phi),$$

де $C(x,y)$ ядро коваріаційного оператора C.

Доведення. Так само, як і у випадку з простором $L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ (див. лекцію 3) лінійна оболонка множини експоненціальних векторів $\{e^{<\gamma,f>} \mid \;\; f \in C_0(X)\}$ є всюди щільною в $L^2(\Phi', \mu_C^G)$. Тому нам буде достатньо довести лему для функцій

$$F(\phi) \; = \; e^{i\phi(g)}, \; \operatorname{supp} g \in C_0(\mathbb{R}^d). \tag{12.10}$$

Розглянемо для цього функцію

$$I(t) = \int_{\Phi'} e^{i\phi(g+tf)} d\mu_C^G(\phi) = e^{-\frac{1}{2} C(g+tf, g+tf)}.$$

Тоді

$$\int_{\Phi'} \phi(f)F(\phi)d\mu_C^G(\phi) = -i\frac{dI(t)}{dt}|_{t=0} = iC(f,g)e^{-\frac{1}{2}C(g,g)} =$$
$$= iC(f,g)\int_{\Phi'} e^{i\phi(g)}d\mu_C^G(\phi) = \int_{\Phi'} d\mu_C^G(\phi)C(f,\frac{\delta}{\delta\phi})e^{i\phi(g)} \tag{12.11}$$

■

12.3. Заміна змінних типу зсуву.

Лема 12.3. *Нехай $g \in \mathcal{D}(C^{-1})$. Тоді в гауссовому інтегралі можна зробити заміну змінної $\phi = \psi + g$:*

$$\int_{\Phi'} F(\phi)d\mu_C^G(\phi) = e^{-\frac{1}{2}(g,C^{-1}g)}\int_{\Phi'} e^{-(\psi,C^{-1}g)}F(\psi+g)d\mu_C^G(\phi). \tag{12.12}$$

Доведення. Нехай $F(\phi) = e^{i\phi(f)}$. Тоді права частина (12.12) буде мати вигляд:

$$e^{-\frac{1}{2}(g,C^{-1}g)}\int_{\Phi'} e^{-(\psi,C^{-1}g)}e^{i(\psi,f)+i(g,f)}d\mu_C^G(\psi) =$$
$$= e^{i(g,f)-\frac{1}{2}(g,C^{-1}g)}\int_{\Phi'} e^{i(\psi,f+iC^{-1}g)}d\mu_C^G(\psi) =$$
$$= e^{i(g,f)-\frac{1}{2}(g,C^{-1}g)}e^{-\frac{1}{2}(f+iC^{-1}g,f+iC^{-1}g)} =$$
$$= e^{i(g,f)-\frac{1}{2}(g,C^{-1}g)}e^{-\frac{1}{2}\left(f+iC^{-1}g,C(f+iC^{-1}g)\right)} =$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(f,Cf)} = \int_{\Phi'} e^{i(f,\phi)}d\mu_C^G(\phi).$$

■

12.4. Формула заміни коваріації.

Лема 12.4. *Нехай $\hat{N}$ обмежений самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$ такий, що*

$$||C^{1/2}\hat{N}C^{1/2}|| < 1. \tag{12.13}$$

Тоді

$$\int_{\mathcal{H}} e^{\frac{1}{2}(\phi,\hat{N}\phi)}d\mu_C^G(\phi) = \left(Det(\mathbb{I} - C^{1/2}\hat{N}C^{1/2})\right)^{-1/2}, \tag{12.14}$$

а гауссова міра $\mu_{C'}^G$ з коваріацією $C' = (C^{-1} - \hat{N})^{-1}$ є абсолютно неперервна відносно міри μ_C^G, а відповідна похідна Радона-Нікодима дорівнює

$$\frac{d\mu_{C'}^G}{d\mu_C^G} = I_N^{-1}e^{\frac{1}{2}(\phi,\hat{N}\phi)},\ I_N = \int_{\mathcal{H}} e^{\frac{1}{2}(\phi,\hat{N}\phi)}d\mu_C^G(\phi). \tag{12.15}$$

Зауваження 12.1. *У випадку позитивних самоспряжених операторів A має місце рівність $DetA = \exp(Tr \ln A)$.*

Доведення. Інтеграл (12.14) легко розрахувати на довільному скінченновимірному підпросторі $K \in \mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ і продовжити результат на весь простір $\mathcal{H}$. Дійсно

$$
\begin{aligned}
I_N &= (2\pi)^{-k/2}(\mathrm{Det}C)^{-1/2}\int_K e^{-\frac{1}{2}(\phi,(C^{-1}-\hat{N})\phi)}d\phi = \qquad (12.16)\\
&= (2\pi)^{-k/2}(\mathrm{Det}C)^{-1/2}(2\pi)^{k/2}\left(\mathrm{Det}(C^{-1}-\hat{N})^{-1}\right)^{1/2} = \\
&= \left(\mathrm{Det}(\mathbb{I}-C^{1/2}\hat{N}C^{1/2})\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Щоб перевірити друге твердження обчислимо перетворення Фур'є міри $\mu^G_{C'}$ на просторі K:

$$
\begin{aligned}
&\int_K e^{i(\phi,f)_K}dmu^G_{C'} = I_N^{-1}\int_K e^{i(\phi,f)_K+\frac{1}{2}(\phi,\hat{N}\phi)}d\mu^G_C(\phi) = \\
&= I_N^{-1}(2\pi)^{-k/2}(\mathrm{Det}C)^{-1/2}\int_K e^{i(\phi,f)_K+\frac{1}{2}(\phi,\hat{N}\phi)-\frac{1}{2}(\phi,C^{-1}\phi)}d\phi = \\
&= (2\pi)^{-k/2}\left(\mathrm{Det}(C^{-1}-\hat{N})^{-1}\right)^{-1/2}\int_K e^{i(\phi,f)_K-\frac{1}{2}(\phi,(C^{-1}-\hat{N})\phi)}d\phi = \\
&= \int_K e^{i(\phi,f)_K}d\mu^G_{C'}(\phi) = e^{-\frac{1}{2}(f,C'f)}. \qquad (12.17)
\end{aligned}
$$

■

12.5. Елементи віківського числення.

Історично операцію віківського множення (добуток Віка) було введено Віком (G.C. Wick) з метою регуляризації при множенні квантових полів, які розглядалися як операторнозначні узагальнені функції. Такий самий зміст можна придати цій операції і з операцією множення узагальнених функцій, яка, як відомо, є не визначеною у просторі узагальнених функцій. Нового змісту ця операція набула у гауссівському численні як операція ортогоналізації мономів у просторі $L^2(\Phi', \mu^G_C)$. Ми визначимо її аксіоматично, а в наступній лекції покажемо яке відношення вона має до нескінченновимірного аналізу.

Визначення степені Віка узагальненого гауссового поля.

Тут узагальненим гауссовим полем ми будемо називати функціонали $\phi \in \Phi'$, за якими будуються елементи простору $L^2(\Phi', \mu^G_C)$.

Означення 12.1. *n-та степінь гауссового поля $\phi(f) = (\phi, f),\ f \in \Phi \subset \mathcal{H}$ називають величину $:\phi(f)^n:$, що визначаєтьcя наступними формулами:*

$$
\begin{aligned}
:\phi(f)^0 : &:= \ 1, \\
\frac{\partial}{\partial\phi(f)} :\phi(f)^n : &:= \ n :\phi(f)^{n-1} :, \\
\int_{\Phi'} d\mu_C^G(\phi) :\phi(f)^n : &:=<:\phi(f)^n :>= \ 0, \ n \geq 1.
\end{aligned}
\tag{12.18}
$$

З означення 5.1 легко виразити степінь Віка через звичайну степінь. Наприклад для $n = 1$ з (12.18)(друга рівність) слідує, що $:\phi(f) := \phi(f) + C_1$, а з (12.18)(третя рівність) і з (12.2) слідує, що $C_1 = - < \phi(f) >= 0$.

Для $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial\phi(f)} :\phi(f)^2 : = \ 2 :\phi(f) := 2\phi(f).$$

Звідси $:\phi(f)^2 : = \ \phi(f)^2 + C_2$, а після інтегрування маємо:

$$C_2 \ = \ - < \phi(f)^2 >= -C(f,f).$$

Отже

$$:\phi(f)^2 : = \ \phi(f)^2 \ - \ C(f,f). \tag{12.19}$$

Якщо записати формулу (12.19) для узагальненого гауссового поля (тобто на мові узагальнених функцій з $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$), вона буде виглядати наступним чином:

$$:\phi(x)\phi(y) : = \ \phi(x)\phi(y) \ - \ C(x,y). \tag{12.20}$$

У випадку коли при $x = y$ функція $C(x,x) = \infty$ це означає регуляризацію добутку $\phi(x)\phi(x)$, який не є визначеним у просторі узагальнених функцій.

Вправа 12.1. *Обчислити* $:\phi(f)^3 :$ і $:\phi(f)^4 :$.

Визначення віківської експоненти.

Нехай $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Розкладаючи експоненту в ряд, маємо:

$$:e^{\alpha\phi(f)} : = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} :\phi(f)^n : . \tag{12.21}$$

Тоді з другого рівняння (12.18) слідує, що

$$\frac{\partial}{\partial\phi(f)} :e^{\alpha\phi(f)} : = \ \alpha :e^{\alpha\phi(f)} :$$

Розв'язок цього рівняння є функція

$$: e^{\alpha\phi(f)} : = \ C_3 e^{\alpha\phi(f)}.$$

Використовуючи третє рівняння в (12.18) маємо

$$<: e^{\alpha\phi(f)} :> = \ 1, \ \ C_3 \ = \ \frac{1}{< e^{\alpha\phi(f)} >}.$$

Але

$$< e^{\alpha\phi(f)} > = \ \int_{\Phi'} e^{\alpha\phi(f)} d\mu_C^G(\phi) \ = \ e^{\frac{1}{2}\alpha^2 C(f,f)}.$$

Отже

$$: e^{\alpha\phi(f)} : = \ e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 C(f,f)} e^{\alpha\phi(f)}. \tag{12.22}$$

З цієї формули легко отримати вираз довільного степеня Віка гауссового поля, продифиринціювавши за параметром α відповідне число раз і прирівнявши $\alpha = 0$:

$$: \phi(f)^n : = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} C(f,f)^m \phi(f)^{n-2m}. \tag{12.23}$$

І навпаки, записавши

$$e^{\alpha\phi(f)} \ = \ e^{\frac{1}{2}\alpha^2 C(f,f)} : e^{\alpha\phi(f)} : \tag{12.24}$$

отримаємо вираз звичайного степеня через віківську степінь:

$$\phi(f)^n \ = \ \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{1}{2^m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} C(f,f)^m : \phi(f)^{n-2m} : . \tag{12.25}$$

Якщо ввести позначення $\phi(f) = t$ і покласти $C(f,f) = 1$, тоді рівність (12.23) набуде вигляду $: t^n := h_n(t)$, де h_n ортонормовані поліноми Ерміта:

$$h_n(t) \ = \ (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Це дозволяє сформулювати наступну лему.

Лема 12.5. *Для довільних $f, g \in \Phi_0$*

$$\int_{\Phi'} : \phi(f)^n :: \phi(g)^m : \mu_C^G(d\phi) \ = \ \delta_{nm} C(f,g)^n. \tag{12.26}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} l.h.s.(12.26) &= \frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{d^m}{d\beta^m}\int_{\Phi'} :e^{\alpha\phi(f)}::e^{\beta\phi(g)}:\mu_C^G(d\phi)\Big|_{\alpha=\beta=0} = \\ &= \frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{d^m}{d\beta^m}\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 C(f,f)-\frac{1}{2}\beta^2 C(g,g)}\int_{\Phi'} e^{\alpha\phi(\alpha f+\beta g)}\mu_C^G(d\phi)\right]_{\alpha=\beta=0}, \\ &= \frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{d^m}{d\beta^m}\left[e^{\alpha\beta C(f,g)}\right]_{\alpha=\beta=0} = r.h.s.(12.26) \end{aligned}$$

■

Аналогічно означенню 12.1 можна визначити добуток Віка довільного числа полів у довільних степенях:

$$\begin{aligned} :\phi(f_1)^0\cdots\phi(f_k)^0: &:= 1, \qquad (12.27) \\ \frac{\partial}{\partial\phi(f_i)}:\phi(f_1)^{n_1}\cdots\phi(f_k)^{n_k}: &:= n_i:\phi(f_1)^{n_1}\cdots\phi(f_i)^{n_i-1}\cdots\phi(f_k)^{n_k}:, \\ \int_{\phi'} d\mu_C^G(\phi):\phi(f_1)^{n_1}\cdots\phi(f_k)^{n_k}: &:=<:\phi(f_1)^{n_1}\cdots\phi(f_k)^{n_k}:>= 0,\ n\geq 1. \end{aligned}$$

Лекція 13.

Деякі найбільш важливі функціональні простори нескінченновимірного аналізу:простір Фока бозонів.

13.1. Простір Фока, побудований за гільбертовим простором $\mathcal{H}$.

Нехай $\mathcal{H}$ дійсний або комплексний сепарабельний гільбертів простір. За допомогою простору $\mathcal{H}$ побудуємо тензорну степінь $\mathcal{H}^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, поклавши за означенням $\mathcal{H}^{\otimes 0} := \mathbb{C}$ (або $\mathcal{H}^{\otimes 0} := \mathbb{R}$). Тоді простір Фока $\mathcal{F}$ визначається як ортогональна сума

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n} \tag{13.1}$$

Простори такого вигляду використовують у квантовій механіці, квантовій теорії поля і статистичній механіці для опису взаємодії нескінченного числа частинок. Але, як правило, використовують два найбільш важливі підпростори: це простір Фока бозонів $\mathcal{F}_B$ і простір Фока ферміонів $\mathcal{F}_F$, або ж їх тензорний добуток $\mathcal{F}_B \otimes \mathcal{F}_F$, якщо треба описати взаємодію бозонів і ферміонів. У випадку, коли розглядається взаємодія декількох сортів частинок, треба розглядати тензорний добуток усіх просторів Фока, кожний з яких відповідає певному сорту частинок.

Розглянемо, як приклад, простір Фока, що відповідаю взаємодії бозонів одного сорту, тобто простір $\mathcal{F}_B$. Нехай для визначеності $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d, \sigma)$, де σ це міра Лебега ($\sigma(dx) = dx$). Тоді

$$\mathcal{F}_B = \mathcal{F}_B(L^2(\mathbb{R}^d, \sigma)) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right), \tag{13.2}$$

де $\otimes_s n$ означає симетричну тензорну степінь. Елементами простору $\mathscr{F}$ є послідовності-стовпчики:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{13.3}$$

де $F_n = F_n(x_1, ..., x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}^d$ є симетричними функціями своїх аргументів. Причому $F \in \mathcal{F}_B$, якщо

$$\|F\| = \|F\|_{\mathcal{F}_B} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)} \right)^{1/2} < \infty. \tag{13.4}$$

13.2. Множина фінітних векторів. Найбільш зручною всюди-щільною множиною в $F \in \mathcal{F}_B$ є множина фінітних векторів $\mathcal{D}_0$:

$$\mathcal{D}_0 := \left\{ F \in \mathcal{F}_B \mid \exists N \in \mathbb{N}_0 \text{ s.th. for } n \geq N,\ F_n \equiv 0 \right\}. \tag{13.5}$$

Твердження 13.1. $\overline{\mathcal{D}_0} = \mathcal{F}_B$.

Доведення. Для довільного $F \in \mathcal{F}_B \setminus \mathcal{D}_0$ побудуємо послідовність векторів $F^{(n)} \in \mathcal{D}_0$ таким чином:

$$F^{(n)} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Тоді за означенням норми (13.4)

$$\|F - F^{(n)}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|F_k\|^2_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s k}, \sigma^{\otimes_s k}\right)}. \tag{13.7}$$

З умови того, що $F \in \mathcal{F}_B$ (тобто збіжності ряду (13.4)) слідує, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|F_k\|^2_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s k}, \sigma^{\otimes_s k}\right)} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{13.8}$$

■

13.3. Оператори народження і знищення. Простір Фока є простором станів системи, в якій відбуваються взаємодія частинок, в результаті якої можуть народжуватись нові частинки і зникати ті, які приймають участь у цій взаємодії. Для опису таких процесів були введені відповідні оператори, які так і називаються *операторами народження і знищення*. В теорії взаємодіючих полів вони задаються своїми комутаційними співвідношеннями, які мають одну важливу властивість, що їх комутатор (чи антикомутатор) є звичайною узагальненою функцією, яка описує характер розповсюдження даного поля. Ми зараз не вивчаємо ці системи і тому задамо оператори народження і знищення як деяку абстрактну алгебру операторів, яка якісно відображає характерні риси бозонних систем. Отже комутаційні співвідношення між сім'єю операторів народження $a^+(f),\ \ f\in\Phi\subset\mathcal{H}$ і сім'єю операторів знищення $a^-(g),\ \ g\in\Phi\subset\mathcal{H}$ мають такий вигляд:

$$[a^-(g),a^+(f)]_- := a^-(g)a^+(f)\ -\ a^+(f)a^-(g)\ =\ (g,f)_{\mathcal{H}}. \tag{13.9}$$

Представлення комутаційних співвідношень (13.9) у вищевизначеному прсторі Фока (тобто $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^d,\sigma)$) має такий вигляд. Для довільного $F\in\mathcal{D}_0$ визначимо дію цих операторів такими формулами:

$$\begin{aligned}\big(a^+(f)F\big)_0\ &=\ 0, &(13.10)\\ \big(a^+(f)F\big)_n(x_1,...,x_n)\ &=\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)F_{n-1}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n),\ \ n\geq 1,\\ \big(a^-(g)F\big)_n(x_1,...,x_n)\ &=\ \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d}dx\ g(x)F_{n+1}(x,x_1,...,x_n),\ n\geq 0. &(13.11)\end{aligned}$$

Вправа 13.1. *Користуючись* (13.10) *і* (13.11) *довести справедливість* (13.9).

Оператори $a^{\pm}(f)$ можна подати у вигляді матриць:

$$a^+(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdot\\ a_{1,0}(f)&0&0&0&\cdot\\ 0&a_{2,1}(f)&0&0&\cdot\\ 0&0&a_{3,2}(f)&0&\cdot\\ .&.&.&.&.\end{pmatrix}, \tag{13.12}$$

$$a^-(f)=\begin{pmatrix}0&a_{0,1}(f)&0&0&\cdot\\ 0&0&a_{1,2}(f)&0&\cdot\\ 0&0&0&a_{2,3}(f)&\cdot\\ 0&0&0&0&\cdot\\ .&.&.&.&.\end{pmatrix}, \tag{13.13}$$

де матричні елементи $a_{n,n-1}$ і $a_{n,n+1}$ це оператори, що діють відповідно з просторів $\mathcal{H}^{\otimes_s n-1}$ і $\mathcal{H}^{\otimes_s n+1}$ у простір $\mathcal{H}^{\otimes_s n}$ так, що

$$\left(a^+(f)F\right)_n = a_{n,n-1}(f)F_{n-1}, \quad \left(a^-(f)F\right)_n = a_{n,n+1}(f)F_{n+1}. \tag{13.14}$$

Матриці (13.12) називаються якобієвими матрицями операторів $a^\pm(f)$.

Далі за визначенням норми у просторі $\mathcal{H}^{\otimes_s n} = L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)$ легко довести обмеженість цих операторів, як операторів з одного простору в інший. Це слідує з простих нерівностей, які отримуються з допомогою нерівностей Шварца, і які ми запишемо у вигляді вправи.

Вправа 13.2. *Користуючись* (13.10) *і* (13.11) *та визначенням норми у просторі* $L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)$ *довести наступні нерівності:*

$$\|a_{n,n-1}(f)F_{n-1}\|_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n},\sigma^{\otimes_s n}\right)} \leq \sqrt{n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\sigma)}\|F_{n-1}\|_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n-1},\sigma^{\otimes_s n-1}\right)}, \tag{13.15}$$

$$\|a_{n,n+1}(f)F_{n+1}\|_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n},\sigma^{\otimes_s n}\right)} \leq \sqrt{n+1}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\sigma)}\|F_{n+1}\|_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n+1},\sigma^{\otimes_s n+1}\right)}. \tag{13.16}$$

З нерівностей (13.15) і (13.16) слідує, що

$$\|a_{n,n-1}(f)\| \leq \sqrt{n}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\sigma)}, \quad \|a_{n,n+1}(f)\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\sigma)}, \tag{13.17}$$

а також наступне твердження.

Твердження 13.1. *Оператори* $a^\pm(f)$ *є необмеженими операторами у фоківському просторі* $\mathcal{F}_B$ *і визначені на всюди щільній множині фінітних векторів* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{F}_B$.

Справедлива, також, наступна лема.

Лема 13.1. *Для довільних векторів* $F \in \mathcal{D}_0$ *і* $G \in \mathcal{D}_0$ *виконується наступна рівність:*

$$\left(a^+(f)F, G\right) = \left(F, a^-(f)G\right). \tag{13.18}$$

Доведення. За визначенням (13.10)

$$\left(a^+(f)F, G\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{nd}} dx_1\cdots dx_n \times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)F_{n-1}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)G_n(x_1,...,x_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{nd}} dx_1\cdots dx_n F_n(x_1,...,x_n)\sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} dx\; f(x)G_{n+1}(x,x_1,...,x_n) =$$

$$= \big(F, a^-(f)G\big)\,.$$

■

Рівність (13.18) означає, що оператор $a(f) := a^+(f) \; + \; a^-(f)$ є симетричним оператором в $\mathcal{F}_B$. Його матриця Якобі має вигляд (13.12), але як з наддіагональною так і піддіагональною нетривіальною частиною. Крім того, внаслідок нерівностей (13.17) оператор $a(f) := a^+(f) \; + \; a^-(f)$ задовольняє відомій лемі Карлеммана (див., наприклад, [3] або [1]).

Лема Карлеммана. *Для того, щоб оператор $a(f) := a^+(f) \; + \; a^-(f)$, заданий на множині фінітних векторів у просторі $\mathcal{F}_B$ якобієвою симетричною матрицею з операторів $a_{n,n+1}$ і $a_{n,n-1}$ мав індекси дефекту (0.0), достатньо, щоб виконувалась наступна умова:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\max\{\|a_{n,n+1}\|, \|a_{n,n-1}\|\}} = \infty.$$

Отже симетричний оператор $a(f) := a^+(f) \; + \; a^-(f)$ має індекси дефекту (0,0) і за теорією самоспряжених розширень є суттєво самоспряженим оператором.

13.4. Циклічний вектор.

Вектор

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{13.19}$$

має назву *вакуумного вектора*, бо дія оператора знищення обертає цей вектор в нуль:

$$a^-(f)\Omega_0 = 0, \tag{13.20}$$

а оператор народження переводить цей вектор в одночастинковий стан:

$$a^+(f)\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{13.21}$$

Вектор Ω_0 є циклічним вектором оператора $a^+(f)$, бо лінійна оболонка векторів $\{a^+(f)^n\}_{n=0}^{\infty}$ є всюди щільною множиною в $\mathcal{F}_B$, тобто множина

$$\big\{a^+(f)^n\Omega_0 \mid \; n \in \mathbb{N}_0, \;\; f \in \mathcal{H}\big\} \tag{13.22}$$

є тотальною множиною в $\mathcal{F}_B$. В лекції 2 ми наводили приклад експоненційного вектора $e_F(f)$ (див. (9.25)). Тоді з (13.10) слідує, що

$$e^{a^+(f)}\Omega_0 \;=\; e_F(f), \;\; \|e_F(f)\|^2_{\mathcal{F}_B} \;=\; e^{\|f\|^2_{\mathcal{H}}}. \tag{13.23}$$

Такі вектори у просторі Фока називаються когерентними станами. Легко довести наступне твердження

Твердження 13.2. *Множина* $\{e_F(f) \mid \; f \in \mathcal{H}\}$ *є тотальною в* $\mathcal{F}_B$.

Доведення. Виберемо в (13.23) функцію $f \in \mathcal{H}$ у вигляді $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \; \alpha_i \in \mathbb{R}^1, \;\; f_i \in \mathcal{H}$ і продиференціюємо вектор $e^{a^+(f)}\Omega_0$ за параметрами α_i відповідне число разів, прирівнявши $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Тоді доведення слідує з того, що отримана множина векторів $\{a^+(f_1)\cdots a^+(f_n)\Omega_0 \mid \; n \in \mathbb{N}_0, \; f_i \in \mathcal{H}\}$ є тотальною в $\mathcal{F}_B$ і факту існування сильної похідної. ■

13.5. Базис у просторі Фока $\mathcal{F}_B(L^2(\mathbb{R}^d, \sigma))$.

Нехай $(\widetilde{e}_i(t))_{i=0}^{\infty}$ є базис у просторі $L^2(\mathbb{R}^1, \sigma)$. Цей базис можна вибрати, наприклад, у вигляді послідовності ортонормованих функцій Чебишева-Ерміта:

$$\widetilde{e}_i(t) \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}2^i i!}\right)^{1/2} H_i(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \; i = 0, 1, 2, ... \tag{13.24}$$

Тоді базис в $L^2(\mathbb{R}^d, \sigma)$ будується звичайним чином:

$$e_{\mathbf{k}}(x) = \widetilde{e}_{k^{(1)}}(x^{(1)}) \cdots \widetilde{e}_{k^{(d)}}(x^{(d)}), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d_+. \tag{13.25}$$

Щоб визначити базис у просторі $L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)$ визначимо функції

$$E_{\mathbf{k_1},...,\mathbf{k_n}}(x_1, ..., x_n) \;=\; e_{\mathbf{k_1}}(x_1) \cdots e_{\mathbf{k_n}}(x_n). \tag{13.26}$$

Ця система функцій є ортонормованою, але не є симетричною функцією своїх аргументів. Тому наступним кроком є симетризація:

$$\begin{aligned} E^S_{\mathbf{k_1},...,\mathbf{k_n}}(x_1, ..., x_n) \; &= \hat{S}_n E_{\mathbf{k_1},...,\mathbf{k_n}}(x_1, ..., x_n) := \\ &:= \; \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} E_{\mathbf{k_1},...,\mathbf{k_n}}(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}). \end{aligned} \tag{13.27}$$

Але тепер функції (13.27) вже не є нормовані на одиницю. Щоб побудувати нормований злічений базис введемо якимось чином впорядкування векторів базису (13.25), тобто в одночастинковому просторі $L^2(\mathbb{R}^d, \sigma)$. Наприклад

$$e_1(x) := e_{(0,...,0)}(x), e_2(x) := e_{(1,0,...,0)}(x), ..., \tag{13.28}$$

тобто надаючи вектору $\mathbf{k} = (k^{(1)}, ..., k^{(d)})$ всеможливі значення $k^{(i)} = 0, 1, 2, ...$ Тоді у побудованому векторі $E^S_{\mathbf{k_1},...,\mathbf{k_n}}(x_1, ..., x_n)$ кожний з векторів e_j, $j \in \mathbb{N}$ може повторитись відповідне число разів. Нехай n_j– це кількість векторів e_j в побудові (13.27). Тоді вектор $(\mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k_n})$ можна перепозначити нескінченною послідовністю $\mathbf{n} := (n_1, n_2, ..., n_j, ...)$ з $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_j + \cdots$, а вектор (13.27) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} E^S_{\mathbf{n}}(x_1, ..., x_n) &= E^S_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_2}, \ldots}(x_1, ..., x_n) := \\ &= \hat{S}_n \left(e_1(x_1) \cdots e_1(x_{n_1}) e_2(x_{n_1+1}) \cdots e_2(x_{n_1+n_2}) \cdots \right). \end{aligned} \tag{13.29}$$

Базисні вектори у просторі $L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)$ визначимо формулою:

$$e_{\mathbf{n}}(x_1, ..., x_n) \ := \ N_{\mathbf{n}} E^S_{\mathbf{n}}(x_1, ..., x_n), \tag{13.30}$$

де $N_{\mathbf{n}}$ поки що не визначений множник, який треба визначити з умови:

$$(e_{\mathbf{n}}, e_{\mathbf{n}})_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)} \ = \ 1. \tag{13.31}$$

Кожний доданок у сумі (13.27) або (13.29) має $n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots$ собі подібних, а кількість таких різних груп є $n!/n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots$. Тоді, враховуючи множник $n!$ в знаменнику суми в (13.27), отримуємо:

$$\begin{aligned} (E^S_{\mathbf{n}}, E^S_{\mathbf{n}})_{L^2\left((\mathbb{R}^d)^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}\right)} &= \frac{1}{n!}(n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots)^2 \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots} = \\ &= \frac{n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots}{n!}. \end{aligned}$$

Отже

$$N_{\mathbf{n}} \ = \ \left(\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_j! \cdots} \right)^{1/2}. \tag{13.32}$$

Остаточний вигляд базису в $\mathcal{F}_B$ буде мати вигляд:

$$\hat{e}_{\mathbf{n}} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{\mathbf{n}}(x_1, ..., x_n) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{13.33}$$

Для довільного $F \in \mathcal{F}_B$ справедливий розклад:

$$F \ = \ \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \hat{e}_{\mathbf{n}} = \sum_{n_1, n_2, ...} f(n_1, n_2, ...) \hat{e}_{\mathbf{n}}. \qquad (13.34)$$

Цей базис має назву *базису чисел заповнення*. Послідовність $\hat{f} = (f(n_1, n_2, ...)) \in l_2$, а формула (13.34) задає ізоморфізм між l_2 і простором Фока $\mathcal{F}_B$.

Лекція 14.

Деякі найбільш важливі функціональні простори нескінченновимірного аналізу:простір Фока ферміонів.

Лекція 15.

Ізоморфізм просторів $L^2(\Phi', \mu^G)$, $L^2(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$, $L^2(\Gamma, \lambda_\pi)$ та $\mathcal{F}_B$.

Звичайно усі сепарабельні гільбертові прстори є ізоморфні. Але побудувати такі ізоморфізми у явному вигляді є складною математичною проблемою. У випадку вище приведених просторів ми спробуємо це зробити. Розглянемо спершу простори $L^2(\Phi', \mu^G)$ та простір Фока $\mathcal{F}_B$.

15.1. Розклад Вінера-Іто. Ізоморфізм Сігала.

Ізоморфізм Сігала є важливим конструктивним прикладом побудови ізоморфізму між просторами $L^2(\Phi', \mu^G)$ та $\mathcal{F}_B$. Для побудови такого ізоморфізму зручно спершу побудувати розклад $L^2(\Phi', \mu^G_C)$ в ортогональну нескінченну суму "одновимірних"підпросторів. Ідею такої побудови можна зрозуміти на такому прикладі. Виберемо в $L^2(\mathbb{R}^1, \mu^G_1)$,базис у вигляді нормованих поліномів Єрміта:

$$h_i(t) \; = \; \left(\frac{1}{2^i i!}\right)^{1/2} H_i(t), \; t \in \mathbb{R}^1 \; i = 0, 1, 2, ... \tag{15.1}$$

Цей базис будується ортогоналізацією за Шмідтом послідовності мономів $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ Тоді для довільної функції $\in L^2(\mathbb{R}^1, \mu^G_1)$ справедливий розклад Фур'є-Єрміта:

$$f(t) \; = \; \sum_{i=0}^{\infty} f_i h_i(t), \quad f_i = (f, H_i)_{L^2(\mathbb{R}^1, \mu^G_1)}, \tag{15.2}$$

який встановлює унітарний ізоморфізм між $L^2(\mathbb{R}^1, \mu^G_1)$ і $l_2(\mathbb{C})$. Скористаємося цією ідеєю і побудуємо розклад, який узагальнює розклад (15.2). При цьому роль простору $l_2(\mathbb{C})$ буде відігравати простір Фока, який ми детально розглянули на попередній лекції.

Позначимо через $\mathcal{P}_{n;\mu_C^G}(\Phi')$– замкнутий підпростір в $L^2(\Phi', \mu_C^G)$, що складається з усіх вимірних поліномів степені не вище n. Такий підпростір можна визначити як замкнуту лінійну оболонку мономів

$$\prod_{k=1}^{m}(f_k, \phi) \ = \ \prod_{k=1}^{m}\phi(f_k), \ f_k \in \Phi, \ m = 1, ..., m \tag{15.3}$$

і констант. Далі визначимо підпростори $\Gamma_n(\Phi', \mu_C^G) \subset L^2(\Phi', \mu_C^G)$ таким чином:

$$\Gamma_n(\Phi', \mu_C^G) := \mathcal{P}_{n;\mu_C^G}(\Phi') \ominus \mathcal{P}_{n-1;\mu_C^G}(\Phi'), n \geq 1; \ \mathcal{P}_{0;\mu_C^G}(\Phi') := \mathbb{C}. \tag{15.4}$$

За означенням підпростори $\Gamma_n(\Phi', \mu_C^G)$ попарно ортогональні і внаслідок щільності поліномів у просторі $L^2(\Phi', \mu_C^G)$ справедливий розклад:

$$L^2(\Phi', \mu_C^G) \ = \ \bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(\Phi', \mu_C^G). \tag{15.5}$$

Цей розклад називають розкладом Вінера–Іто. Наступна теорема пов'язує операцію віківського добутку з з просторами $\Gamma_n(\Phi', \mu_C^G)$.

Теорема 15.1.

Нехай $f_i, g_j \in \Phi, \ i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., m$. Тоді

$$\int_{\Phi'} : \prod_{i=1}^{n}\phi(f_i) :: \prod_{j=1}^{m}\phi(g_j) : d\mu_C^G(\phi) = \delta_{nm}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} C(f_1, g_{\pi(1)}) \cdots C(f_n, g_{\pi(n)}), \tag{15.6}$$

крім того для довільного $f \in \Phi'$

$$: \phi(f)^n : = \ 2^{-n/2}C(f, f)^{n/2}H_n\left(\frac{\phi(f)}{\sqrt{2C(f, f)}}\right). \tag{15.7}$$

Доведення. З формул (12.22), (12.1) слідує, що

$$\int_{\Phi'} : e^{\phi(f)} :: e^{\phi(g)} : d\mu_C^G(\phi) \ = \ e^{C(f,g)}. \tag{15.8}$$

Виберемо $f = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ і $g = \sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j$, продиференціюємо (15.8) за $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m$ і прирівняємо $\alpha_1 = \cdots = \beta_m = 0$. В результаті отримуємо рівність (15.6).

Рівність (15.7) слідує з формули (12.22). Дійсно, прирівнюючи $1/2\alpha^2 G(f, f) = z^2, \ \alpha\phi(f) = 2zt$ і враховуючи те, що функція $\exp[2tz - z^2]$ є твірною функцією поліномів Ерміта, тобто

$$e^{2tz - z^2} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}H_n(t), \tag{15.9}$$

отримаємо рівність (15.7), диференціюючи n разів за змінною z. ■

Зауваження 15.1. *З теореми 15.1 слідує, що мономи Віка* $:\phi(f)^n:\in\Gamma_n(\Phi',\mu_C^G)$*, а операція віківського добутку(або степені) відповідає ортогоналізації послідовності степенів* $(\phi(f)^n)_{n=0}^{\infty}$.

Тепер ізоморфізм між простором $L^2(\Phi',\mu_C^G)$ і простором Фока вводиться наступним чином. Задамо його спершу на тотальній множині в $\mathcal{F}_B(\mathcal{H})$ векторів вигляду $\hat{S}_n(f_1\otimes\cdots\otimes F_n)$:

$$I_G\hat{S}_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n):=(n!)^{-1/2}:\prod_{k=1}^{n}\phi(f_k):,\ n\geq 1;\ I_G=1\!\!1 \text{ для } n=0. \qquad (15.10)$$

Тоді для кожного фоківського вектора $F\in\mathcal{F}_B$ вигляду (13.3) поставимо у відповідність функцію

$$\left(I_GF\right)(\phi):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}:(F_n,\phi^{\otimes n})_{\mathcal{H}^{\otimes n}}:\in L^2(\Phi',\mu_C^G), \qquad (15.11)$$

де функції $(F_n,\phi^{\otimes n})_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$ визначаються як замикання степенів тотальної множини векторів $\hat{S}_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)$.

Явний вигляд функції в $L^2(\Phi',\mu_C^G)$ можна виписати, наприклад, для когерентних векторів простору Фока (13.23), тобто векторів вигляду (9.25):

$$\left(I_Ge_F\right)(\phi):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}:\phi(f)^n):=:e^{\phi(f)}:=e^{\phi(f)-\frac{1}{2}C(f,f)}. \qquad (15.12)$$

Зауваження 15.2. *Щоб узгодити викладки цього підрозділу з відповідними формулами монографії [БК, Гл. 2, §, пп. 2,3] треба взяти оператор коваріації* $S=2C$.

15.2. Ізоморфізм просторів $L^2(\Gamma_0,\lambda_\sigma)$ та $\mathcal{F}_B$.

Нехай $G:\Gamma_0\mapsto\mathbb{C}$ – комплексно-значна функція на просторі скінченних конфігурацій Γ_0. Визначимо послідовність функцій $F_n, n=0,1,2,...$ наступним чином:

$$G(\eta)\restriction\Gamma_0^{(n)}=G(\{x_1,...,x_n\})=G_n(x_1,...,x_n):=\sqrt{n!}F_n(x_1,...,x_n). \qquad (15.13)$$

Тоді за визначенням міри Лебега-Пуассона (10.6) маємо:

$$\int_{\Gamma_0} |G(\eta)|^2 \lambda_\sigma(d\gamma) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_X \cdots \int_X |G(\{x_1, ..., x_n\})|^2 \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_n) = \tag{15.14}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \cdots \int_X |F_n(x_1, ..., x_n)|^2 \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_n) = \|F\|^2_{\mathcal{F}_B}.$$

Виходячи з рівності (15.14) можна визначити унітарний ізоморфізм I_λ наступним чином:

$$I_\lambda : L^2(\Gamma_0, \lambda_\sigma) \ni G \mapsto F \in \mathcal{F}_B. \tag{15.15}$$

З визначення (15.29) слідує, що фоківська експонента (9.25) переходить в вектор $e_\lambda(f) = I_\lambda^{-1} e_F(f)$, такий, що

$$e_\lambda(f;\eta) \restriction \Gamma_0^{(n)} = e_\lambda(f;\{x_1, ..., x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{15.16}$$

Отже відповідна експонента у просторі $L^2(\Gamma_0, \lambda_\sigma)$ визначається формулами:

$$\begin{aligned} e_\lambda(f;\eta) &:= \prod_{x\in\eta} f(x),\; \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\emptyset\}, \\ e_\lambda(f;\emptyset) &:= 1. \end{aligned} \tag{15.17}$$

Вправа 15.1. *Довести, що*

$$\|e_\lambda(f;\cdot)\|^2_{L^2(\Gamma_0,\lambda_\sigma)} \;=\; e^{\|f\|^2_{L^2(X,\sigma)}},$$

$$\int_{\Gamma_0} e_\lambda(f;\eta)\lambda_\sigma(d\eta) \;=\; e^{<f>_\sigma} \;=\; e^{\int_X f(x)\sigma(dx)}.$$

15.2. Ізоморфізм просторів $L^2(\Gamma, \pi_\sigma)$ та $\mathcal{F}_B$.

На 10-й лекції ми встановили, що перетворення Лапласа міри Пуассона визначається формулою (10.12):

$$l_{\pi_\sigma}(f) = e^{\int_X (e^{f(x)} - 1)\sigma(dx)} \tag{15.18}$$

Міру Пуассона можна також розглядати на лінійному просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'$, який включає в себе нелінійний простір нескінченних конфігурацій Г. І тоді

$$l_{\pi_\sigma}(f) = \int_{\mathcal{D}'} e^{<\omega,f>}\pi_\sigma(d\omega) = e^{\int_X (e^{f(x)}-1)\sigma(dx)} \qquad (15.19)$$

Тоді простір $L^2(\mathcal{D}', \pi_\sigma)$ є добре вивченим об'єктом, а відповідний аналіз має назву "poissonian white noise analysis". Щоб встановити розклад, подібний розкладу Вінера-Іто у випадку простору $L^2(\Phi', \mu^G)$ розглянемо функціонал

$$e_\pi(f,\omega) \;=\; e^{<\omega,\ln(1+f)>-<f>_\sigma}. \qquad (15.20)$$

Цей функціонал можна розглядати як твірний функціонал так званих мономів Шарле, які визначаються розкладом:

$$e_\pi(f,\omega) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} < C_n^\sigma(\omega), f^{\otimes n} > . \qquad (15.21)$$

Справедлива наступна лема.

Лема 15.1. *Для довільних $f, g \in \mathcal{D}_0$ виконується рівність*

$$\int_{\mathcal{D}'} < C_n^\sigma(\omega), f^{\otimes n} >< C_m^\sigma(\omega), g^{\otimes m} > \pi_\sigma(d\omega) \;=\; \delta_{mn}(f^{\otimes n}, g^{\otimes n})_{L^2(X^{\otimes n},\sigma^{\otimes n})}. \quad (15.22)$$

Доведення. Розглянемо для $f, g \in \mathcal{D}_0$ і $z_1, z_2 \in o(\mathbb{C})$ інтеграл

$$\int_{\mathcal{D}'} e_\pi(z_1 f,\omega)e_\pi(z_2 g,\omega)\pi_\sigma(d\omega) = \qquad (15.23)$$

$$= e^{-z_1<f>_\sigma - z_2<g>_\sigma} \int_{\mathcal{D}'} e^{<\omega,\ln[(1+z_1 f)(1+z_2 g)]>}\pi_\sigma(d\omega) =$$

$$= e^{-z_1<f>_\sigma - z_2<g>_\sigma} e^{\int_X ((1+z_1 f)(1+z_2 g)-1)\sigma(dx)}$$

$$= e^{z_1 z_2 (f,g)_{L^2(X,\sigma)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^n}{n!}(f^{\otimes n}, g^{\otimes n})_{L^2(X^{\otimes n},\sigma^{\otimes n})}.$$

Але внаслідок (15.21)

$$\int_{\mathcal{D}'} e_\pi(z_1 f,\omega)e_\pi(z_2 g,\omega)\pi_\sigma(d\omega) =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{z_1}{\sqrt{n!}}\frac{z_2}{\sqrt{m!}} \int_{\mathcal{D}'} < C_n^\sigma(\omega), f^{\otimes n} >< C_m^\sigma(\omega), g^{\otimes m} > \pi_\sigma(d\omega).$$

(15.24)

Прирівнюючи в (15.23) і (15.24) коефіцієнти при однакових степенях z_1 і z_2 отримаємо (15.22) ■

За допомогою мономів Шарле будується лінійний простір усіх вимірних поліномів:

$$\mathfrak{P}_n(\mathcal{D}') := \left\{ \mathcal{P} \mid \; \mathcal{P}(\omega) = \sum_{n=0}^{N} < C_n^\sigma(\omega), f_n >, \; \omega \in \mathcal{D}', \; f_n \in \mathcal{D}^{\otimes_s n}, \; N \in \mathbb{N}_0 \right\}. \tag{15.25}$$

Внаслідок щільності поліномів $\mathfrak{P}_n(\mathcal{D}')$ в $L^2(\mathcal{D}', \pi_\sigma)$, для довільної функції $F \in L^2(\mathcal{D}', \pi_\sigma)$ існує послідовність $F_n \in L^2(X^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n}), n \geq 0$ така, що

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} < C_n^\sigma(\omega), F_n > \tag{15.26}$$

і

$$\|F\|^2_{L^2(\mathcal{D}', \pi_\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|^2_{L^2(X^{\otimes_s n}, \sigma^{\otimes_s n})}. \tag{15.27}$$

Це означає, що вектор

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_B. \tag{15.28}$$

Розклад (15.26) задає унітарний ізоморфізм

$$I_\pi : L^2(\mathcal{D}', \pi_\sigma) \ni F \mapsto \hat{F} \in \mathcal{F}_B. \tag{15.29}$$

Лекція 16.

Міра Гіббса на просторах конфігурацій неперервних систем.

16.1. Міра Гіббса на $\Gamma_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$**.**

У першій лекції були приведені фізичні міркування, які дозволили визначити імовірнісну міру на множині конфігурацій

$$\widetilde{\Gamma}_\Lambda \ni \widetilde{\gamma} := \{(x_1, p_1), ..., (x_N, p_N)\}, \tag{16.1}$$
$$\{x_1, ..., x_N\} = \gamma \in \Gamma_\Lambda,\ |\gamma| = N \in \mathbb{N}_0 \quad p_n \in \mathbb{R}^d.$$

Такі конфігурації називають *маркованими*, бо кожній точці $x \in \gamma \in \Gamma_\Lambda$ приписують деяку змінну (марку) $p_x \in \mathbb{R}^d$. У випадку, коли конфігурації γ відповідають положенням точкових ідентичних частинок, які взаємодіють між собою, а змінні $p_x = mv_x,\ x \in \gamma$, де v_x- швидкості частинок, а m-їх маси, міра має назву міри Гіббса. Існує три способи побудови такої міри в залежності від умов, які накладаються на систему, що знаходиться в деякій обмеженій області простору $\mathbb{R}^d$. Нагадаємо, що Гіббс запропонував замість однієї системи ввести ансамбль тотожних систем, які кожної миті, з якоюсь імовірністю займають ту чи іншу конфігурацію. Такі однакові екземпляри систем отримали назву *ансамблів Гіббса.* Перший спосіб введення міри пов'язаний з так званим *мікроканонічним ансамблем*, коли система є повністю ізольована і має фіксовану енергію E_0. Тоді усі процеси в системі відбуваються на гіперповерхні (1.21) і очевидно, що загальна міра системи пропорційна функції Дірака, тобто має вигляд (1.22). Для більшості систем така міра є досить не зручна для математичного опису, бо треба знати явну залежність $E(\widetilde{\gamma})$ від $\widetilde{\gamma}$, яка як правило є складною.

Другий спосіб відповідає ансамблю систем з фіксованою кількістю частинок N, що займають обмежену область $\Lambda \Subset \mathbb{R}^d$ ($|\Lambda| = V$) і знаходяться в, так званому, *термостаті*– нескінченній системі, що має фіксовану температуру T

і являє собою ідеальний газ молекул з координатами $\mathbf{Q}_i$, імпульсами $\mathbf{P}_i$, $i = 1, \ldots$. Система знаходиться в непроникливій посудині і може обмінюватись енергією з термостатом. Такий ансамбль систем називається *канонічним ансамблем.*

В першій лекції, виходячи з фізичних міркувань, ми визначили, що ймовірнісна міра, за якою треба розраховувати середні усіх фізичних величин (спостережуваних в експериментах) є абсолютно неперервна відносно міри Лебега $(d\sigma \otimes dp)^N$, а її щільність (*щільність розподілу канонічного ансамблю*) в обмеженому об'ємі визначається за формулою (1.26):

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}) = \frac{1}{Q(\Lambda, N)} e^{-\beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \tag{16.2}$$

де

$$E(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \frac{p_x^2}{2m_x} + U(\gamma). \tag{16.3}$$

це повна енергія системи, а постійна нормування

$$Q(\Lambda, N) = \int_{\widetilde{\Gamma}} e^{-\beta E(\widetilde{\gamma})} (d\sigma \otimes dp)^N \tag{16.4}$$

називається *конфігураційним інтегралом* або *малою статистичною сумою.* Формулу (16.2) можна вважати постулатом, який є обґрунтований на фізичному рівні строгості. Відповідні середні будуються за формулою (1.37).

Третій спосіб введення міри відповідає так званому *великому канонічному ансамблю.* Він відрізняється від попереднього канонічного ансамблю тим, що кількість частинок в Λ є випадковою величиною, розподіл якої задається за допомогою деякого додаткового параметра μ, який називається *хімічним потенціалом.* Вираз для щільності буде мати вигляд:

$$D_\Lambda(\widetilde{\gamma}, N) = \frac{1}{Z_\Lambda} \frac{1}{N! h^{3N}} e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})}, \quad N = |\widetilde{\gamma}|, \tag{16.5}$$

де постійна нормування Z_Λ має назву *великої статистичної суми* і виражається формулою:

$$Z_\Lambda = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \int_{\widetilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)}} \frac{d\widetilde{\gamma}}{h^{3N}} e^{\beta\mu N - \beta E(\widetilde{\gamma})} (d\sigma \otimes dp)^N, \tag{16.6}$$

де h– постійна Планка.

Для рівноважних систем усі спостережувані величини є функціями координат. Тому у виразах для середніх та у виразі для великої статистичної суми можна виконати інтегрування по імпульсним змінним $p_i \in \mathbb{R}^d$, $i = \overline{1, N}$ і переписати вираз для міри Гіббса для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій Γ_Λ у такому вигляді:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{16.7}$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{16.8}$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега-Пуассона (10.4), (10.6), а постійна

$$z \;=\; \frac{e^{\beta\mu}}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{p^2}{2m}} dp \;=\; e^{\beta\mu} \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{d/2} \tag{16.9}$$

і називається *активністю* системи.

Легко бачити, що визначення (16.7), (16.8) може бути некоректним, якщо експонента $e^{-\beta U(\gamma)}$ не є інтегровною функцією за мірою $\lambda_{z\sigma}^\Lambda$. Щоб зробити це визначення коректним, треба накласти на взаємодію певні обмеження.

Достатньою умовою існування міри Гіббса на Γ_Λ є умова стійкості **(S)** взаємодії:

$$(\mathbf{S}): \quad \forall \gamma \in \Gamma_0 \quad \exists\, B \geq 0, \quad U(\gamma) \;\geq\; -B|\gamma|. \tag{16.10}$$

У цьому курсі будемо розглядати найбільш простий випадок парної взаємодії між частинками. Це означає, що енергія взаємодії має такий вигляд:

$$U(\gamma) \;=\; \sum_{\{x,y\}\in\gamma} V_2(x,y) \;:=\; \sum_{\{x,y\}\in\gamma} \phi(|x-y|), \quad \gamma \in \Gamma_0. \tag{16.11}$$

Найбільш реалістичними потенціалами в молекулярній фізиці, для яких виконується умова (16.10), є потенціали вигляду:

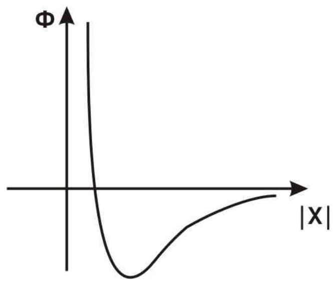

Рис. 1.1

Наступним кроком є визначення міри Гіббса на просторі нескінченних конфігурацій Γ. У цьому випадку втрачають сенс усі три множники у формулі

(16.7). Визначення міри Гіббса для нескінченних систем також можна зробити двома способами. Користуючись визначеннями (16.7), (16.8), можна побудувати сім'ю скінченно-вимірних розподілів на сігма-алгебрі циліндричних множин в Г, а потім за теоремою Колмогорова поширити міру, яка відповідає цим розподілам на всю сігма-алгебру $\mathfrak{B}(\Gamma)$. Вперше така конструкція була запропонована російським математиком Р.А. Мінлосом у 1967 році. Другий спосіб більш конструктивний був запропонований російським математиком Р.Л. Добрушиним і незалежно американцем О.Є. Ленфордом і французом Д. Рюеллом теж у 1967 році. Сформулюємо цю конструкцію детально.

16.2. Умовна міра Гіббса.

Введемо деякі позначення. Енергія взаємодії двох конфігурацій $\eta, \gamma \in \Gamma_0$:

$$W(\eta;\gamma) \;=\; \sum_{\substack{x\in\eta,\\ y\in\gamma}} V_2(x,y). \tag{16.12}$$

Будемо розглядати такий клас потенціалів і таку множину конфігурацій в Г, для яких для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$

$$W(\gamma_\Lambda;\gamma_{\Lambda^c}) \;<\; \infty, \quad \gamma\in\Gamma. \tag{16.13}$$

Введемо для таких конфігурацій таку величину:

$$U(\gamma_\Lambda \mid \gamma_{\Lambda^c}) \;=\; U(\gamma_\Lambda) \;+\; W(\gamma_\Lambda;\gamma_{\Lambda^c}) \tag{16.14}$$

і сім'ю множин $\{R_\Lambda : \Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}$, де

$$R_\Lambda \;:=\; \{\gamma\in\Gamma \mid \forall\eta\in\Gamma_\Lambda,\;\; \exists B\geq 0,\;\; \text{таке, що}\;\; U(\eta\mid\gamma_{\Lambda^c}) \geq -B|\eta|\}\,. \tag{16.15}$$

Означення 16.1 *Імовірнісні міри на* Г, *породжені сімейством множин* $\Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ *і задані за допомогою щільностей*

$$f_\Lambda(\eta\mid\gamma) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c})} e^{-\beta U(\eta|\gamma_{\Lambda^c})}, \;\eta\in\Gamma_\Lambda,\;\; \gamma\in R_\Lambda, \\ 0, \;\; \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{16.16}$$

$$Z_\Lambda(\gamma_{\Lambda^c}) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta|\gamma_{\Lambda^c})}\lambda_{z\sigma}(d\eta) \tag{16.17}$$

відносно міри Лебега-Пуассона λ_σ *називають умовною мірою Гіббса.*

Умовна міра Гіббса задається сімейством специфікацій

$$\{\Pi_\Lambda(\cdot\mid\gamma) : \Lambda\in\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\; \gamma\in\Gamma\}$$

за формулою:

$$\forall A \in \mathfrak{B}(\Gamma), \;\; \Pi_\Lambda(A \mid \gamma) \; = \; \int_{A_\gamma} f_\Lambda(\eta \mid \gamma)\lambda_{z\sigma}(d\eta), \tag{16.18}$$

$$A_\gamma \; := \; \{\eta \in \Gamma_\Lambda \mid \eta \cup \gamma_{\Lambda^c} \in A\}. \tag{16.19}$$

16.3. Визначення міри Гіббса на Γ і рівняння ДЛР.

Означення 16.2 *Мірою Гіббса на* Γ *називають таку міру* μ*, умовний розподіл якої збігається з* Π_Λ*, тобто*

$$E_\mu \left[1\!\!1_A \mid \mathfrak{B}(\Gamma_{\Lambda^c}) \right](\cdot) \; = \; \Pi_\Lambda(A \mid \cdot) \quad \mu - a.e., \; A \in \mathfrak{B}(\Gamma). \tag{16.20}$$

За означенням умовного математичного сподівання

$$\mu\left(\Pi_\Lambda(A \mid \cdot)\right) \; = \; \int_\Gamma \Pi_\Lambda(A \mid \gamma)\mu(d\gamma) \; = \; \mu(A). \tag{16.21}$$

Це рівняння має назву рівняння Добрушина-Ленфорда-Рюелла (ДЛР). Позначимо множину мір Гіббса, що відповідають потенціалу V через $\mathcal{G}_V$.

Лекція 17.

Характеризація мір Гіббса.

Теорема 17.1. *Нехай* $\mu \in \mathcal{G}_V$ *. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

(1)– DLR–рівняння.

$$\int_\Gamma \Pi_\Lambda(A \mid \gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_\Gamma 1\!\!1_A(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \mu(A). \tag{17.1}$$

(2)– RE–рівняння Рюелла (Ruelle).

Для будь якої позитивної $\mathfrak{B}(\Gamma)$-вимірної функції F і $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ має місце рівність:

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta|\gamma)} \mu(d\gamma) \right] \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{17.2}$$

(3)– GNZ–рівняння (Georgii,Nguen,Zessin).

Для довільної позитивної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{B}(\Gamma)$-вимірної функції H справедлива формула:

$$\int_\Gamma \sum_{x \in \gamma} H(x;\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; z\int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} H(x; \gamma \cup \{x\}) e^{-\beta W(\{x\};\gamma)} \sigma(dx)\mu(d\gamma). \tag{17.3}$$

Доведення.

1) $\mathbf{DLR(1)} \Rightarrow \mathbf{GNZ(3)}$

Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. σ-алгебру множин $\mathfrak{B}(\Gamma)$ можна представити множинами $A_1 \cap A_2$, де $A_1 \in \mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$, а $A_2 \in \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$. Дійсно нехай $A \in \mathfrak{B}(\Gamma)$. Позначимо $A_\Lambda = A \cap \Gamma_\Lambda$, $A_{\Lambda^c} = A \cap \Gamma_{\Lambda^c} = \Gamma_{\Lambda^c} \cap A$. Тоді множину A можна записати у вигляді: $A_\Lambda \times \Gamma_{\Lambda^c} \cap \Gamma_\Lambda \times A_{\Lambda^c} = A_1 \cap A_2$. Тому, для того, щоб довести 1) достатньо довести справедливість рівняння GNZ для функції

$$H(x;\gamma) \;=\; 1\!\!1_\Lambda(x) 1\!\!1_{A_1}(\gamma) 1\!\!1_{A_2}(\gamma). \tag{17.4}$$

Тоді

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} H(x;\gamma)\mu(d\gamma) = \int_\Gamma N_\Lambda(\gamma)1\!\!1_{A_1}(\gamma)1\!\!1_{A_2}(\gamma)\mu(d\gamma) =$$
$$= \int_{A_2} N_\Lambda(\gamma)1\!\!1_{A_1}(\gamma)\mu(d\gamma) := (I). \tag{17.5}$$

Тут $N_\Lambda(\gamma) := |\gamma_\Lambda| = \sum_{x\in\gamma} 1\!\!1_\Lambda(x)$. Далі скористаємося означенням умовного математичного сподівання, згідно якого для довільного $A_2 \in \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$ умовне математичне сподівання $\mathfrak{B}_\Lambda$-вимірної функції g задовольняє рівняння

$$\int_{A_2} E_\mu\left[g(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right](\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{A_2} g(\gamma)\mu(d\gamma). \tag{17.6}$$

Тоді, вибираючи в (17.6) $g(\gamma) = N_\Lambda(\gamma)1\!\!1_{A_1}(\gamma)$, маємо

$$(I) = \int_\Gamma 1\!\!1_{A_2}(\gamma)E_\mu\left[N_\Lambda(\cdot)1\!\!1_{A_1}(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right](\gamma)\mu(d\gamma) =: (II).$$

Скористаємося тим, що $\mu \in \mathcal{G}_V$, тобто справедливе рівняння (16.20), яке для функції $g(\gamma) = N_\Lambda(\gamma)1\!\!1_{A_1}(\gamma)$ приводить (II) до вигляду:

$$(II) = \int_\Gamma 1\!\!1_{A_2}(\gamma)\Pi_\Lambda(N_\Lambda(\cdot)1\!\!1_{A_1}(\cdot) \mid \gamma)\mu(d\gamma) =$$
$$= \int_{A_2}\int_{\Gamma_\Lambda} N_\Lambda(\eta)1\!\!1_{A_1}(\eta)f_\Lambda(\eta \mid \gamma_{\Lambda^c})\lambda_{z\sigma}(d\eta)\mu(d\gamma) =$$
$$= \int_{A_2}\int_{\Gamma_\Lambda}\sum_{x\in\eta} 1\!\!1_\Lambda(x)1\!\!1_{A_1}(\eta)f_\Lambda(\eta \mid \gamma_{\Lambda^c})\lambda_{z\sigma}(d\eta)\mu(d\gamma) =: (III).$$

Застосуємо в останньому інтегралі за мірою $\lambda_{z\sigma}$ формулу Мекке. Отримуємо:

$$= z\int_{A_2}\int_{\Gamma_\Lambda}\int_\Lambda 1\!\!1_{A_1}(\eta\cup\{x\})f_\Lambda(\eta\cup\{x\} \mid \gamma_{\Lambda^c})\sigma(dx)\lambda_{z\sigma}(d\eta)\mu(d\gamma) =: (III).$$

Далі за означенням щільності (16.16)-(16.17)

$$f_\Lambda(\eta\cup\{x\} \mid \gamma_{\Lambda^c}) = e^{-\beta W(x;\eta\cup\gamma_{\Lambda^c})}f_\Lambda(\eta \mid \gamma_{\Lambda^c})$$

і ми остаточно отримуємо, використовуючи знову визначення умовного математичного сподівання (17.6):

$$(III) = z\int_{A_2}\int_{\Gamma_\Lambda}\int_\Lambda 1\!\!1_{A_1}(\eta\cup\{x\})f_\Lambda(\eta \mid \gamma_{\Lambda^c})e^{-\beta W(x;\eta\cup\gamma_{\Lambda^c})}\sigma(dx)\lambda_{z\sigma}(d\eta)\mu(d\gamma) =$$
$$= z\int_{A_2}\int_\Lambda E_\mu\left[1\!\!1_{A_1}(\cdot\cup\{x\})e^{-\beta W(x;\cdot\cup\gamma_{\Lambda^c})} \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right](\gamma_{\Lambda^c})\sigma(dx)\mu(d\gamma_{\Lambda^c}) =$$
$$= z\int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_\Lambda(x)1\!\!1_{A_1}(\gamma\cup\{x\})1\!\!1_{A_2}(\gamma)e^{-\beta W(x;\gamma)}\sigma(dx)\mu(d\gamma) =$$
$$= z\int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} H(\gamma\cup\{x\})e^{-\beta W(x;\gamma)}\sigma(dx)\mu(d\gamma)$$

Перший і останній члени цієї рівності збігаються з рівнянням GNZ.

2) **GNZ(3)** $\Rightarrow$ **RE(2)**

Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, а F це $\mathfrak{B}(\Gamma)$-вимірна позитивна функція. Розглянемо інтеграли ($m \geq 0$):

$$I_m(F) := \int_\Gamma 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m\}}(\gamma)F(\gamma)\mu(d\gamma). \tag{17.7}$$

При $m = 0$ маємо:

$$I_0(F) := \int_\Gamma 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=0\}}(\gamma)F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\gamma)\mu(d\gamma). \tag{17.8}$$

При $m \geq 1$ запишемо інтеграл (17.7) у вигляді:

$$\begin{aligned} I_m(F) &:= \int_\Gamma 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m\}}(\gamma)F(\gamma)\mu(d\gamma) \;= \\ &= \frac{1}{m}\int_\Gamma \sum_{x_1\in\gamma} 1\!\!1_\Lambda(x_1)1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m\}}(\gamma)F(\gamma)\mu(d\gamma). \end{aligned} \tag{17.9}$$

Застосуємо рівняння GNZ (17.3) з функцією $H(x;\gamma) = 1\!\!1_\Lambda(x)1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m\}}(\gamma)F(\gamma)$. Тоді

$$\begin{aligned} I_m(F) &= \frac{z}{m}\int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_\Lambda(x_1)1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma\cup\{x_1\})=m\}}(\gamma\cup\{x_1\})\times \\ &\times F(\gamma\cup\{x_1\})e^{-\beta W(\{x_1\};\gamma)}\sigma(dx_1)\mu(d\gamma) = \\ &= \frac{z}{m}\int_\Gamma\int_\Lambda 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m-1\}}(\gamma)\times \\ &\times F(\gamma\cup\{x_1\})e^{-\beta W(\{x_1\};\gamma)}\sigma(dx_1)\mu(d\gamma) = \\ &= \frac{1}{m}I_{m-1}(F_1), \end{aligned} \tag{17.10}$$

де

$$F_1(\gamma) := z\int_\Lambda F(\gamma\cup\{x_1\})e^{-\beta W(\{x_1\};\gamma)}\sigma(dx_1). \tag{17.11}$$

Повторивши такі самі операції отримуємо, що

$$I_m(F) \;=\; \frac{1}{m(m-1)}I_{m-2}(F_2), \tag{17.12}$$

де

$$F_2(\gamma) := z^2\int_\Lambda\int_\Lambda F(\gamma\cup\{x_1,x_2\})e^{-\beta U(\{x_1,x_2\})-\beta W(\{x_1,x_2\};\gamma)}\sigma(dx_1)\sigma(dx_2). \tag{17.13}$$

Після m кроків отримуємо формулу

$$I_m(F) \ = \ \frac{1}{m!} I_0(F_m), \tag{17.14}$$

де

$$F_m(\gamma) := z^m \int_{\Lambda^{\otimes m}} F(\gamma \cup \{x_1, ..., x_m\}) e^{-\beta U(\{x_1,...,x_m\}) - \beta W(\{x_1,...,x_m\};\gamma)} \sigma(dx)^{\otimes m}. \tag{17.15}$$

Враховуючи (17.8), просумовуючи від $m = 0$ до $m = \infty$ і враховуючи, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=m\}}(\gamma) \ = \ 1 \tag{17.16}$$

отримуємо рівняння (RE)(17.2).

3) **RE(2)** $\Rightarrow$ **DLR(1)**

Для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ візьмемо довільну множину $A \cap A'$, $A \in \mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$, $A' \in \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$. Тоді для міри μ, що задовольняє рівняння (RE) (17.2), справедливе співвідношення:

$$\mu(A \cap A') \ = \ \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} 1\!\!1_{A \cap A'}(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta|\gamma)} \mu(d\gamma) \right] \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{17.17}$$

Скористаємося очевидною рівністю

$$1\!\!1_{A \cap A'}(\eta \cup \gamma) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\eta) 1\!\!1_{\Gamma_{\Lambda^c}}(\gamma) \ = \ 1\!\!1_A(\eta) 1\!\!1_{A'}(\gamma) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\eta) 1\!\!1_{\Gamma_{\Lambda^c}}(\gamma). \tag{17.18}$$

Тоді

$$\mu(A \cap A') \ = \ \int_{A'} 1\!\!1_{\{N_\Lambda(\gamma)=0\}}(\gamma) \left[\int_A e^{-\beta U(\eta|\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\eta) \right] \mu(d\gamma). \tag{17.19}$$

За означенням умовного математичного сподівання, для довільної $\mathfrak{B}(\Gamma)$-вимірної функції f і довільної множини $A' \in \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$

$$\int_{A'} E_\mu \left[f(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma) \right] (\gamma) \mu(d\gamma) \ = \ \int_{A'} f(\gamma) \mu(d\gamma). \tag{17.20}$$

Тоді (17.17) можна перепмсати у вигляді:

$$\mu(A \cap A') \ = \ \int_{A'} E_\mu \left[1\!\!1_{\{N_\Lambda(\cdot)=0\}}(\cdot) \int_A e^{-\beta U(\eta|\cdot)} \lambda_{z\sigma}(d\eta) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma) \right] \mu(d\gamma). \tag{17.21}$$

Якщо тепер розглянути (18.20) з $A = \Gamma_\Lambda$, тоді за означенням ітеграл під знаком математичного сподівання є $Z_\Lambda(\cdot)$, а рівняння (18.20) набуде вигляду:

$$\mu(A') \;=\; \int_{A'} E_\mu\left[\mathbb{1}_{\{N_\Lambda(\cdot)=0\}}(\cdot) Z_\Lambda(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right]\mu(d\gamma). \tag{17.22}$$

Внаслідок того, що це рівняння справедливе при довільних $A' \in \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$ має місце формула:

$$E_\mu\left[\mathbb{1}_{\{N_\Lambda(\cdot)=0\}}(\cdot) Z_\Lambda(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right] \;=\; 1, \quad \mu - a.e. \tag{17.23}$$

Але $Z_\Lambda(\cdot)$ є $\mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)$-вимірною функцією, яка за означенням більше одиниці, тому за властивістю умовного математичного сподівання маємо:

$$E_\mu\left[\mathbb{1}_{\{N_\Lambda(\cdot)=0\}}(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right](\gamma) \;=\; \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma)}. \tag{17.24}$$

Повертаючись до рівняння (18.20),з тих самих міркувань запишемо інтеграл по множині A після функції $E_\mu\left[\mathbb{1}_{\{N_\Lambda(\cdot)=0\}}(\cdot) \mid \mathfrak{B}_{\Lambda^c}(\Gamma)\right](\gamma)$ і врахуємо (17.22). Остаточно отримуємо:

$$\mu(A \cap A') \;=\; \int_{A'} \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma)}\left[\int_A e^{-\beta U(\eta|\cdot)} \lambda_{z\sigma}(d\eta)\right]\mu(d\gamma) = \int_{A'} \Pi_\Lambda(A,\gamma)\mu(d\gamma). \tag{17.25}$$

Ця формула при $A' = \Gamma$ і є рівняння DLR:

$$\mu(A) \;=\; \int_\Gamma \Pi_\Lambda(A,\gamma)\mu(d\gamma). \tag{17.26}$$

■

Лекція 18.

Основні характеристики мір Гіббса: кореляційні функції.

18.1. Кореляційні міри та кореляційні функції.

Якщо міра, властивості якої треба вивчити, не є абсолютно неперервною відносно деякої добре вивченої міри, то дослідження властивостей такої міри є досить важкою проблемою. Тоді важливо знати деякі непрямі характеристики такої міри. Однією з основних характеристик є послідовність моментів. Наприклад, для міри μ, що задана на $\mathbb{R}^1$ моменти визначаються за формулою

$$m_k \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} t^k \mu(dt). \tag{18.1}$$

Але існування послідовності невід'ємних чисел m_k, $(k = 0, 1, 2, ...)$ ще не означає, що такій послідовності відповідає деяка міра μ. *Необхідною* умовою існування такої міри є нерівність

$$\sum_{j,k=0}^{N} m_{j+k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \ \geq \ 0, \tag{18.2}$$

яка повинна виконуватися для довільних $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. *Достатньою* умовою є існування константи $C > 0$, такої, що

$$|m_k| \ \leq \ C^k k!. \tag{18.3}$$

Ця умова забезпечує існування перетворення Лапласа:

$$L_\mu(z) \ = \ \int_{\mathbb{R}^1} e^{tz} \mu(dt) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} m_k. \tag{18.4}$$

Умова (18.2) випливає з нерівності

$$\int_{\mathbb{R}^1} |\sum_{k=0}^{N} \lambda_k t^k|^2 \mu(dt) \ \geq \ 0. \tag{18.5}$$

Розглянемо тепер аналог проблеми моментів на просторі конфігурацій Γ. Перш за все треба зауважити, що кожну конфігурацію γ можна ототожнити з узагальненою функцією (див. (9.3), (9.4)). Але у просторі узагальнених функцій операція множення (зведення у степінь)не є визначеною. У гауссовому аналізі (тобто на просторах функцій, які інтегровні за мірою Гаусса) вводять так звану віківську регуляризацію (див. лекцію 5). Так само можна зробити і у випадку пуассонівського аналізу.

Перша степінь визначається звичайним чином за визначенням узагальненої функції. Нехай G є функцією на просторі конфігурацій Γ_0 ($G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$), такою, що

$$G \restriction \Gamma_0^{(n)} \ = \ G^{(n)}(\{x_1, ..., x_n\}) \ := \ G_n(x_1, ..., x_n), \ \ G_n \in C_0(\mathbb{R}^{dn}). \tag{18.6}$$

Тоді

$$< G^{(1)}, \gamma > := \sum_{x_1 \in \gamma} < G^{(1)}, \varepsilon_{x_1} > = \sum_{x_1 \in \gamma} G_1(x_1). \tag{18.7}$$

n-у ступінь визначимо формулою

$$< G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> := \sum_{\{x_1, ..., x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n). \tag{18.8}$$

Тоді аналогом формули моментів є формула

$$\int_{\Gamma} < G^{(n)}, : \gamma^{\otimes n} :> \mu(d\gamma) \ := \ \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n) \rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)) \right). \tag{18.9}$$

Функцію $\rho^{(n)}$, будемо називати кореляційною мірою міри μ на $\Gamma^{(n)}$. Якщо кореляційна міра $\rho^{(n)}$ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{dn}$, тоді її щільність визначає відповідну кореляційну функцію:

$$\rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)) \right) \ := \ \frac{1}{n!} \rho_n(x_1, ..., x_n) \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_n) \tag{18.10}$$

З урахуванням (18.8) формулу (18.9) можна переписати у вигляді

$$\int_{\Gamma} \sum_{\{x_1, ..., x_n\} \subset \gamma} G_n(x_1, ..., x_n) \mu(d\gamma) = \tag{18.11}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{dn}} G_n(x_1, ..., x_n) \rho^{(n)} \left((\sigma(dx_1), ..., \sigma(dx_n)) \right).$$

Кореляційну міру тепер можна визначити на просторі усіх скінченних конфігурацій Γ_0, просумувавши рівність (18.11) за всіма $n \geq 0$. Для того, щоб записати цю формулу у компактному вигляді, визначимо оператор $K : C_0(\Gamma_0) \to C_0(\Gamma)$ наступною формулою:

$$(KG)(\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{x_1,...,x_n\}\subset\gamma} G_n(x_1,...,x_n) = \sum_{\eta\Subset\gamma} G(\eta). \tag{18.12}$$

Тоді з (18.11) отримуємо формулу:

$$\int_{\Gamma} (KG)(\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta)\rho(d\eta), \tag{18.13}$$

А у випадку (18.10)

$$\int_{\Gamma} (KG)(\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} G(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta). \tag{18.14}$$

Підставляючи в (18.13) $G = 1\!\!1_A$, $A \in \mathfrak{B}(\Gamma_0)$ отримуємо означення кореляційної міри на $\mathfrak{B}(\Gamma_0)$:

$$\rho_\mu(A) = \rho(A) = \int_{\Gamma} (K 1\!\!1_A)(\gamma)\mu(d\gamma). \tag{18.15}$$

18.1. Кореляційні функції гіббсових мір.

Перш ніж встановити вигляд кореляційних функцій, що відповідають мірам Гіббса, доведемо наступну лему.

Лема 18.1. *Для всіх позитивних вимірних функцій $G : \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ і $H : \Gamma_0 \times \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ справедлива наступна рівність:*

$$\int_{\Gamma_0} G(\gamma) \sum_{\eta\subset\gamma} H(\eta, \gamma\setminus\eta)\lambda_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} G(\eta\cup\gamma)H(\eta,\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma)\lambda_\sigma(d\eta). \tag{18.16}$$

Доведення. Нехай $\eta \upharpoonright \Gamma_0^{(k)} = \{x_1,...,x_k\} := \{x\}_1^k$, $\gamma \upharpoonright \Gamma_0^{(m)} = \{x_{k+1},...,x_{k+m}\} := \{x\}_{k+1}^{k+m}$. Тоді

$$\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} G(\eta\cup\gamma)H(\eta,\gamma)\lambda_\sigma(d\gamma)\lambda_\sigma(d\eta) =$$

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} \int_{\mathbb{R}^{dk}}\int_{\mathbb{R}^{dm}} G(\{x\}_1^{k+m})H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^{k+m})\sigma(dx)^{k+m} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_{\mathbb{R}^{dn}} G(\{x\}_1^n)H(\{x\}_1^k, \{x\}_{k+1}^n)\sigma(dx)^n =$$

$$\int_{\Gamma_0} G(\gamma) \sum_{\eta \subset \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma).$$

■

Ознпчення 18.1. *Міра μ називається локально абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, якщо для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ міра $\mu^\Lambda = \mu \circ p_\Lambda^{-1}$ є абсолютно-неперервна відносно міри $\lambda_{z\sigma}^\Lambda$, тобто існує похідна Радона-Нікодима:*

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\gamma). \tag{18.17}$$

Наступна лема дає можливість визначити цю похідну для $\mu \in \mathcal{G}_V$:

Лема 18.2. *Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$. Тоді вона є локально-неперервна відносно $\lambda_{z\sigma}$, і*

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta) \;=\; \int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma). \tag{18.18}$$

Доведення. Нехай F є позитивною $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірною функцією. Тоді існує $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірна функція f така, що $F = f \circ p_\Lambda$ $(F(\gamma) = f(\gamma_\Lambda))$. Тоді за означенням проекції міри

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta). \tag{18.19}$$

Скористаємося тим, що міра μ є гіббсовою і задовольняє рівняння **RE** (17.2). Тоді

$$\int_\Gamma F(\gamma)\mu(d\gamma) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} F(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta|\gamma)} \mu(d\gamma) \right] \lambda_{z\sigma}(d\eta) =$$

$$\int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta) \left[\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma) \right] \lambda_{z\sigma}(d\eta) \tag{18.20}$$

Враховуючи, що за визначенням похідної Радона-Нікодима

$$\int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta)\mu^\Lambda(d\eta) \;=\; \int_{\Gamma_\Lambda} f(\eta) \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta) \lambda_{z\sigma}(d\eta) \tag{18.21}$$

і порівнюючи (18.21) з (18.20) отримуємо (18.18).

■

Лема 18.3. *Нехай $\mu \in \mathcal{G}_V$ і для будь якого $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ існує постійна $C_\Lambda > 0$ така, що*

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta) \;= \le C_\Lambda^{|\eta|}. \tag{18.22}$$

Тоді кореляційна міра (18.15) *є абсолютно неперервною відносно міри $\lambda_{z\sigma}$, а її щільність виражається кореляційним функціоналом, який має такий вигляд:*

$$\rho(\eta) \;=\; \int_\Gamma e^{-\beta U(\eta) - \beta W(\eta;\gamma)} \mu(d\gamma). \tag{18.23}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що для будь якого $A \in \mathfrak{B}_c(\Gamma_0)$ існує $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ таке, що функція $(K\mathbb{1}_A)(\gamma)$ є $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma_0)$-вимірною, а

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda} (K\mathbb{1}_A)(\gamma)\mu^\Lambda(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta\subset\gamma} \mathbb{1}_A(\eta)\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\gamma)\lambda_{z\sigma}^\Lambda(d\gamma). \tag{18.24}$$

Застосуємо до правої частини (18.24) Лему 10.1 (рівність (18.16)) з

$$G(\gamma) = \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\gamma),\ H(\eta, \gamma \setminus \eta)) = \mathbb{1}_A(\eta)\mathbb{1}_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \eta). \tag{18.25}$$

Отримуємо, що

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda} \mathbb{1}_A(\eta)\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}^\Lambda(d\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\eta). \tag{18.26}$$

Звідси отримуємо

$$\rho(\eta) = \int_{\Gamma_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}^\Lambda}(\eta\cup\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{18.27}$$

Підставимо в (18.27) вираз (18.18). Тоді маємо

$$\begin{aligned}\rho(\eta) &= \int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)-\beta W(\eta\cup\gamma;\xi)}\mu(d\xi)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \\ &= \int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_{\Lambda^c}} e^{-\beta U(\eta)-\beta W(\eta;\gamma\cup\xi)}e^{-\beta U(\gamma)-\beta W(\gamma;\xi)}\mu(d\xi)\lambda_{z\sigma}(d\gamma).\end{aligned} \tag{18.28}$$

Застосовуючи в останньому виразі (18.28) рівняння Рюелла (**RE**) (17.2) отримуємо (18.23). ■

На завершення наведемо вираз для кореляційних функцій, що відповідають умовному розподілу Гіббса в обмеженому об'ємі Λ та фіксованим граничним конфігураціям $\bar\gamma \in \Gamma_{\Lambda^c}$:

$$\rho_\Lambda(\eta \mid \bar\gamma) \;=\; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(\bar\gamma)}\int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma|\bar\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{18.29}$$

Лекція 19.

Рівняння для кореляційних функцій.

Проблема побудови граничної міри Гіббса (гіббсового стану) пов'язана з побудовою кореляційних функцій у просторі Γ_0. Рівняння (18.23) однозначно визначає кореляційний функціонал $\rho(\eta)$ якщо задана міра μ. Обернене твердження не є вірним. Так само, як і у звичайній проблемі моментів, для того, щоб сім'ї кореляційних функціоналів

$$\{\rho(\eta) \;\mid\; \eta \in \Gamma_0\}$$

однозначно відповідала міра Гіббса $\mu \in \mathcal{G}_V$ треба накласти деякі умови на $\rho(\eta)$. Це питання ми розглянемо у наступній лекції. Зараз ми обговоримо питання для чого потрібні кореляційні функції і як їх будувати для системи частинок з заданою взаємодією.

19.1. Локальні спостережувані та кореляційні функції.

Метою статистичної теорії є знаходження формул для обрахунку фізичних величин (або величин іншої природи), які можна спостерігати в експерименті або в природі. Такі величини називаються спостережуваними величинами і є функціями конфігураційних змінних. Природно, що ця залежність повинна бути тільки від деякої локальної кількості змінних, бо ми можемо спостерігати тільки обмежену область системи. Тому математично визначити локальну спостережувану величину можна таким чином.

Означення 19.1 *Будь яка вимірна функція F_B, визначена на конфігураційному просторі Γ, називається локальною спостережуваною, якщо вона залежить тільки від частини конфігурації частинок, що міститься у області $B \Subset \mathbb{R}^d$, тобто*

$$F_B(\gamma) = f(\gamma \cap B) = f(\gamma_B)$$

є циліндричною функцією.

Її середнє значення визначається з допомогою ймовірнісного розподілу μ за формулою

$$< F_B >_\mu = \int\limits_\Gamma F_B(\gamma) d\mu(\gamma), \tag{19.1}$$

З усіх фізичних величин (тобто функцій, що введені на множині станів Γ фізичної системи) частіше всього зустрічаються так звані *суматорні величини*. Отже, введемо поняття суматорної величини.

Означення 19.2 *Величина $F(\cdot)$ називається суматорною величиною k-го порядку, якщо її можна подати у вигляді*

$$F_B(\gamma) = \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\dots,x_k), \tag{19.2}$$

де $f_{B;k}(x_1,\dots,x_k)$ — деяка симетрична функція своїх змінних.

В загальному випадку локальну спостережувану величину можна записати у вигляді:

$$F_B(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{x_1,\dots,x_k\}\subset\gamma} f_{B;k}(x_1,\dots,x_k) \; = \; \sum_{\eta\Subset\gamma} f_B(\eta). \tag{19.3}$$

Тоді, враховуючи формули (18.12), (18.14) вираз (19.1) для середніх від функцій (19.3) можна записати у вигляді:

$$< F_B >_\mu = \int_\Gamma F_B(\gamma)\mu(d\gamma) = \int_{\Gamma_0} f_B(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta). \tag{19.4}$$

Отже, знаючи вираз для кореляційної функції, можна обчислити середні спостережуваних величин обраховуючи інтеграли за мірою Лебега-Пуассона.

19.2. Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій.

Кореляційної функції нескінченної системи (18.23) можна побудувати виходячи з їх виразу для обмежених множин $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Покладаючи у виразі (18.29) $\bar\gamma = \emptyset$ отримаємо вираз:

$$\rho_\Lambda(\eta) \; = \; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{19.5}$$

Достатньою умовою існування кореляційних функцій на Γ_Λ є умова стійкості **(S)**(див. ф-лу (16.10)). Ця умова дозволяє отримати оцінки:

$$1 \; \leq \; Z_\Lambda \; \leq \; e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)} \tag{19.6}$$

та

$$0 \;\le\; \rho_\Lambda(\eta) \;\le\; Z_\Lambda^{-1} e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)}. \tag{19.7}$$

Ці оцінки слідують з умови (16.10) і визначення інтегралу за мірою Лебега-Пуассона (10.6). Але оцінка (19.7) не дає підстав зробити висновок, що послідовність функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ має термодинамічну границю при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

Одним із способів побудови кореляційних функцій при нескінченному об'ємі є метод рівнянь. Треба отримати рівняння для функцій ρ і знайти їх розв'язок. Отримаємо спершу такі рівняння для функцій ρ_Λ, тобто у скінченному об'ємі. Виділимо для цього в конфігурації η деяку точку $x \in \eta$ і введемо позначення $\eta^{(\hat{x})} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді вираз (19.5) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta W(x;\gamma)} e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{19.8}$$

Скористаємося тим, що у випадку парного потенціалу взаємодії енергія взаємодії двох конфігурацій задається формулою (16.12). Тоді експоненту в (19.8) можна записати у вигляді:

$$e^{-\beta W(x;\gamma)} = \prod_{y\in\gamma} \left[(e^{-\beta V_2(x,y)} - 1) + 1 \right]. \tag{19.9}$$

Далі для довільної неперервної функції $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ і довільного $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ справедлива проста комбінаторна формула:

$$\prod_{y\in\gamma} [1 + \varphi(y)] = \sum_{\xi\subseteq\gamma} \prod_{y\in\xi} \varphi(y) = \sum_{\xi\subseteq\gamma} e_\lambda(\varphi;\xi). \tag{19.10}$$

Введемо наступне позначення:

$$K(x;\xi) := e_\lambda(e^{-\beta V_2(x,y)} - 1;\xi) = \begin{cases} \prod_{y\in\xi}(e^{-\beta V_2(x,y)} - 1), |\xi| \ge 1, \\ 1,\ \xi = \emptyset. \end{cases} \tag{19.11}$$

Тоді вираз (19.8) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\xi\subseteq\gamma} K(x;\xi) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{19.12}$$

Застосуємо до правої частини (19.12) Лему 10.1 (рівність (18.16)) з Γ_Λ замість Γ_0 і

$$G(\gamma) = e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\gamma)}, \tag{19.13}$$

$$H(\xi, \gamma \setminus \xi)) = K(x;\xi) \equiv K(x;\xi) 1\!\!1_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \xi).$$

Тоді

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; z^{|\eta|}\frac{e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda}\int_{\Gamma_\Lambda} K(x;\xi)e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi\cup\gamma)}\lambda_{z\sigma}(d\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\xi). \qquad (19.14)$$

Використовуючи означення кореляційного функціоналу (19.5) отримаємо остаточне співвідношення:

$$\rho_\Lambda(\eta) \;=\; ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_\Lambda} K(x;\xi)\rho_\Lambda(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi). \qquad (19.15)$$

В останньому інтегралі була використана рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} z^{-|\xi|}f(\xi)\lambda_{z\sigma}(d\xi) = \int_{\Gamma_\Lambda} f(\xi)\lambda_\sigma(d\xi), \qquad (19.16)$$

Яка слідує з означення інтеграла за мірою Лебега-Пуассона.

Формально таке саме рівняння можна записати і для нескінченної системи в усьому просторі $\mathbb{R}^d$:

$$\rho(\eta) \;=\; ze^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})}\int_{\Gamma_0} K(x;\xi)\rho(\eta^{(\hat{x})}\cup\xi)\lambda_\sigma(d\xi),\ \eta\in\Gamma_0. \qquad (19.17)$$

Якщо існують розв'язки обох рівнянь (19.15), (19.17) , і розв'язок рівняння (19.15) в деякому сенсі прямує до розв'язку рівняння (19.17) при $\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d$, то він відповідає сім'ї кореляційних функцій міри Гіббса. Якщо такий розв'язок є єдиним при певних значеннях термодинамічних параметрів z,β, то відповідна міра Гіббса буде відповідати єдиному гіббсівському стану. Якщо ж є декілька розв'язків при певних значеннях термодинамічних параметрів z,β, тоді ці розв'язки будуть відповідати різним гібсівським станам і тоді кажуть, що в системі в околі цих термодинамічних параметрів відбувається *фазовий перехід*.

19.2. Розв'язок рівнянь Кірквуда-Зальцбурга для розріджених систем.

Побудуємо розв'язок рівняння (19.17) при умові, що активність частинок системи z є достатньо малою. Будемо також припускати, що енергія системи U, побудована за допомогою парного потенціалу взаємодії (див. ф-лу (16.11)) і задовольняє умову стійкості (16.10), а парний потенціал взаємодії задовольняє умову *регулярності*:

$$C(\beta) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|e^{-\beta V_2(x,y)}-1|\sigma(dy) \;<\; \infty. \qquad (19.18)$$

Модифікуємо рівняння (19.17), застосувавши *симетризацію Рюелля.* Визначимо $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{B}(\Gamma_0)$-вимірну функцію:

$$\widetilde{\chi}_W(x;\eta^{(\hat{x})}) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } W(x;\eta^{(\hat{x})}) \geq -2B, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \tag{19.19}$$

З умови стійкості (16.10) слідує, що для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_0$ знайдеться точка $x \in \eta$ така, що

$$W(x;\eta^{(\hat{x})} \geq -2B, \tag{19.20}$$

бо за умовою (16.10)

$$\sum_{x\in\eta} W(x;\eta^{(\hat{x})} = 2U(\eta) \geq -2B|\eta|. \tag{19.21}$$

Якщо б нерівність (19.20) не виконувалася, тоді б

$$\sum_{x\in\eta} W(x;\eta^{(\hat{x})} = 2U(\eta) \ < \ -2B|\eta|, \tag{19.22}$$

що протирічило б (19.21). З цих простих міркувань отримаємо нерівність:

$$\sum_{x\in\eta} \widetilde{\chi}_W(x;\eta^{(\hat{x})}) \ \geq \ 1., \tag{19.23}$$

Тепер можна визначити функцію

$$\chi(x;\eta^{(\hat{x})}) \ = \ \frac{\widetilde{\chi}_W(x;\eta^{(\hat{x})})}{\sum_{y\in\eta} \widetilde{\chi}_W(y;\eta^{(\hat{x})})} \tag{19.24}$$

Тепер, домноживши рівняння (19.17) на функцію $\chi(x;\eta^{(\hat{x})})$ і просумувавши за всіма $x \in \eta$ отримаємо рівняння:

$$\rho(\eta) \ = \ z \sum_{x\in\eta} \chi(x;\eta^{(\hat{x})}) e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})} \int_{\Gamma_0} K(x;\xi)\rho(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi)\lambda_\sigma(d\xi), \ \eta \in \Gamma_0. \tag{19.25}$$

Будемо розглядати рівняння (19.25) як абстрактне операторне рівняння

$$\rho \ = \ z\hat{K}\rho \ + \ \rho_0 \tag{19.26}$$

в банаховому просторі $E_\xi = E_\xi(\Gamma_0)$ з нормою:

$$\forall G \in E_\xi, \quad \|G\|_\xi := \sup_{\eta\in\Gamma_0} |G(\eta)|\xi^{-|\eta|} \ < \ \infty. \tag{19.27}$$

Вектор

$$\rho_0(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \eta = \emptyset, \\ z & \text{якщо } \eta = \{x\},\ |\gamma| = 1, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \tag{19.28}$$

оператор $\hat{K}$ діє на функцію $G \in E_\xi$ за правилом:

$$\left(\hat{K}G\right)(\emptyset) \ = \ 0, \tag{19.29}$$

$$\left(\hat{K}G\right)(\{x\}) \ = \ \int_{\Gamma_0} \left(1\!\!1_{\Gamma_0}(\gamma) - 1\!\!1_{\{\emptyset\}}(\gamma)\right) K(x;\xi)G(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi)\lambda_\sigma(d\xi).$$

$$\left(\hat{K}G\right)(\eta) = \sum_{x\in\eta} \chi(x;\eta^{(\hat{x})})e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})} \int_{\Gamma_0} K(x;\xi)G(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi)\lambda_\sigma(d\xi), |\eta| > 1.$$

Справедлива наступна лема.

Лема 19.1. *Нехай потенціал* V_2 *задовольняє умови* (16.10), (19.18). *Тоді оператор* $\hat{K}$ *є обмеженим оператором в* E_ξ *і для довільного* $G \in E_\xi$ *виконується така нерівність:*

$$\|\hat{K}G\|_\xi \ \leq \ K(\xi)\|G\|_\xi, \tag{19.30}$$

де

$$K(\xi) = \xi^{-1}e^{2\beta B + \xi C(\beta)}. \tag{19.31}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} &|\int_{\Gamma_0} K(x;\xi)G(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi)\lambda_\sigma(d\xi)|\xi^{-|\eta|} \leq \\ &\leq \|G\|_\xi \xi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{i=1}^{n} |e^{-\beta V_2(x,y_i)} - 1| \right) \sigma(dy_1)\cdots\sigma(dy_n) \leq \\ &\leq \xi^{-1}e^{\xi C(\beta)}\|G\|_\xi. \end{aligned} \tag{19.32}$$

Далі за визначенням (19.19)

$$\widetilde{\chi}_W(x;\eta^{(\hat{x})})e^{-\beta W(x;\eta^{(\hat{x})})} \leq e^{2\beta B}\widetilde{\chi}_W(x;\eta^{(\hat{x})}). \tag{19.33}$$

Враховуючи (19.32), (19.33), (19.24) та (19.27) отримуємо оцінку (19.30). ■

Наслідок. Рівняння (19.26) має єдиний розв'язок

$$\rho \ = \ \left(1\!\!1 - z\hat{K}\right)^{-1}\rho_0 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{K}^n \rho_0 \tag{19.34}$$

якщо

$$|z| \ < \ \xi e^{-2\beta B - \xi C(\beta)}. \tag{19.35}$$

Найоптимальніше значення параметра ξ є $\xi = C(\beta)^{-1}$, тобто при

$$|z| \ < \ e^{-2\beta B - 1} C(\beta)^{-1}. \tag{19.36}$$

Зауваження. *Аналогічне рівняння можна розглянути для кореляційних функцій ρ_Λ в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$. Його розв'язки задаються відповідним рядом, кожний член якого буде прямувати до відповідного члена ряду* (19.34) *при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.*

ЛІТЕРАТУРА

[1] *Березанский Ю.М.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе.– Киев: Наукова думка, 1988.– 680 С.(English transl. *Berezansky Yu.M.* ??????. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.)

[2] *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.– Киев: Наукова думка, 1965.– 800 С.(English transl. *Berezansky Yu.M. and Kondratiev Yu.G.* Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.)

[3] *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования.– М.: Наука, 1965.– 235 С.(English transl. *Berezin F.A.* ??????. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.)

[4] *Гиббс Дж. В.* Термодинамика: Статистическая механика.– М.: Наука, 1982.– 584 С.

[5] *Glimm J., Jaffe A.* Quantum Physics. A Functional Integral Point of View.– Springer-Verlag, N.Y.-Heidelberg-Berlin, 1981. (Пер. с англ. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики.– М.: Мир, 1984.– 445 С.

[6] *Kuna T.* Studies in configuration space analysis and applications. Dissert. Bonn, 1999.

[7] *Minlos R.A.* Introduction to mathematical statistical physics. AMS, Providence, Rhode Island, 2000.– 103 P.

[8] *Владимиров В.С.* Обобщённые функции в математической физике.– М.: Наука, 1976.– 280 С.

[9] *Синай Я.Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты.– М.: Наука, 1980.– 208 С. (English transl. *Sinai Ya.* "Theory of phase transitions. Rigorous results Pergamon, London, 1982.)

[10]

[11]

[12]