НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Милейко Ганна Леонідівна

УДК 519.642

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКО НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ. АПРОКСИМАЦІЙНІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ АСПЕКТИ

01.01.07 – обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук
СОЛОДКИЙ Сергій Григорович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії наближень.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
ХАПКО Роман Степанович,
Львівський національний університет
імені І. Франка,
завідувач кафедри обчислювальної математики;

кандидат фізико-математичних наук, професор
БІЛЕНКО Валентин Іванович,
Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова.

Захист відбудеться "____" _____________ 2015 р. о _____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "____" _______ 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор Г.П. ПЕЛЮХ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Як відомо, дослідження багатьох складних об'єктів і явищ у різних галузях науки потребують побудови й обґрунтування відповідних математичних моделей. Однак, дуже часто наявна інформація дозволяє записати лише формальну модель, для якої за традиційних підходів не існує ефективних обчислювальних алгоритмів. Йдеться насамперед про ті випадки, коли подібні моделі призводять до некоректних задач. Складність розв'язування таких задач полягає в тому, що для них здебільшого неможливо встановити умови існування та єдиності розв'язку в якому-небудь "природньому" функціональному просторі, а найголовніше, немає стійкості розв'язку (що розуміється в класичному сенсі) від вхідних даних задачі. І лише у 50-60-х роках минулого сторіччя в роботах А.М. Тіхонова, М.М. Лаврентьєва, В.К. Іванова, В.О. Морозова були закладені основи теорії некоректних задач і дано строге математичне означення стійкості розв'язування відповідних задач.

На сьогодні існує численна література, присвячена дослідженню некоректних задач. Тут, в першу чергу, слід відзначити монографії А.М. Тіхонова та В.Я. Арсеніна, В.К. Іванова, В.В. Васіна та В.П. Танани, М.М. Лаврентєва, В.О. Морозова та О.І. Грєбєннікова, Г.М. Вайнікко та А.Ю. Вєрєтєннікова, А.Б. Бакушинського та О.В. Гончарського, H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, C.W. Groetsch, A.K. Louis.

Зазначимо, що найбільш досліджуваними на даний час є помірно некоректні задачі, щодо жорстко некоректних задач, то вперше вони були розглянуті у роботі B.A. Mair у 1994 році. Далі жорстко некоректні задачі вивчалися у роботах T. Hohage, А. Б. Бакушинського, М.Ю. Кокурина, P. Mathe, S.V. Pereverzev, U. Tautenhahn, E. Schock та багатьох інших.

В межах даної дисертації досліджуються проблеми побудови оптимальних за точністю регуляризованих наближень до розв'язків жорстко некоректних задач зі збуреними вхідними даними. З цією метою як регуляризатори застосовуються стандартний метод Тіхонова та його ітерований варіант, де параметр регуляризації вибирається згідно з принципом рівноваги. Крім того, в дисертації розроблені та обґрунтовані ефективні (у сенсі інформаційної та алгоритмічної складності) алгоритми розв'язування жорстко некоректних задач, зокрема, вивчаються питання про мінімально можливі обсяги інформаційних і обчислювальних витрат, що забезпечують наперед задану точність наближення.

Щодо історії дослідження питань складності, зауважимо, що вивчення складності різного роду задач бере свій початок з робіт Дж. Трауба і Х. Вожьняковського, які заклали основи загальної теорії оптимальних алгоритмів. Коротко кажучи, у рамках цієї теорії під інформаційною складністю задачі розуміється найменший обсяг дискретної інформації, що необхідна для знаходження наближеного розв'язку із заданою точністю, а під алгоритмічною складністю – мінімальне число арифметичних дій, які потрібно виконати для побудови такого розв'язку.

Варто підкреслити, що питання про складність саме некоректних задач довгий час залишалося відкритим. Вперше в роботі Г.М. Вайнікко і Р. Плато у 1990 р. для помірно некоректних задач був запропонований клас економічних (у сенсі обсягу задіяної дискретної інформації) проекційних методів, де за схему дискретизації використовувалася стандартна схема Гальоркіна. Пізніше С.В. Переверзєвим і С.Г. Солодким були отримані перші порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації для рівнянь Фредгольма I роду з операторами, ядра яких мають ізотропну гладкість. Надалі ці дослідження були продовжені багатьма авторами, серед яких виділимо роботи С.Г. Солодкого. При цьому, як виявилося, оптимальні порядки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність, реалізуються не в рамках стандартної схеми Гальоркіна, а деякої її модифікації, що називають гіперболічним хрестом. Важливо зазначити, що складність некоректних задач донедавна вивчалася лише у разі помірно некоректних задач. Що стосується жорстко некоректних задач, то дослідження в цьому напрямку до останнього часу взагалі не проводилися. Тут можна згадати лише статтю S.V. Pereverzev, P. Mathe, що є продовженням досліджень Р. Плато, Г.М. Вайнікко на випадок жорстко некоректних задач. В цій роботі за схему дискретизації використовувалася виключно стандартна схема Гальоркіна, проте оцінки складності знайдені не були. Саме знаходженню порядкових оцінок складності жорстко некоректних задач присвячений заключний розділ дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилася згідно з загальним планом досліджень відділу теорії наближень Інституту математики НАН України в рамках держбюджетної теми "Оптимізація методів розв'язування некоректних задач та розвиток теорії паралельних асинхронних обчислень" за номером № 0111U001010.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є побудова стійких наближень до розв'язків рівнянь з широких класів жорстко некоректних задач; розробка й обґрунтування алгоритмів, що гарантують оптимальну за порядком точність та є економічними у сенсі обсягу обчислювальних витрат.

Об'єктом дослідження є жорстко некоректні задачі, що подаються у вигляді операторних та інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними.

Предметом дослідження є оптимальні за порядком точності та економічні за обсягом обчислювальних ресурсів методи розв'язування жорстко некоректних задач.

Методи дослідження. У дисертації досліджуються методи теорії некоректних задач, математичного й функціонального аналізу, обчислювальної математики.

Завдання дослідження:

1. На базі стандартного регуляризатора Тіхонова побудувати наближений метод, який забезпечує оптимальну за порядком точність розв'язування жорстко некоректних задач.
2. На базі ітерованого регуляризатора Тіхонова побудувати наближений метод, який забезпечує оптимальну за порядком точність розв'язування жорстко некоректних задач.
3. Обчислити мінімальний радіус гальоркінської інформації на класах жорстко некоректних задач, що подані у вигляді інтегральних рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості.
4. Знайти мінімальний радіус обчислювальних витрат на класах жорстко некоректних задач, що подані у вигляді інтегральних рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати роботи, що виносяться на захист є новими і полягають у наступному:

Розглянуто проблему ефективного розв'язування жорстко некоректних задач, що подані у вигляді операторних й інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними та:

- Запропоновано два підходи до побудови стійких наближень, що полягають у комбінації правилу зупинки згідно принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова та з його ітерованим варіантом, відповідно.
- Встановлено, що запропоновані підходи гарантують оптимальний порядок точності на досліджуваних класах жорстко некоректних задач.
- Здійснено порівняльний аналіз цих підходів.
- Побудована економічна у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації проекційна схема дискретизації для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості.
- За допомогою запропонованої схеми дискретизації отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач, що досліджуються.
- Для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості розроблено проекційний метод, що є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат.
- Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини реалізується в рамках запропонованого проекційного методу.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Запропоновані і обґрунтовані у ній алгоритми розв'язування жорстко некоректних задач дозволяють отримувати стійкі наближення з оптимальною за порядком точністю. Досліджені у роботі проекційні методи розв'язування широких класів інтегральних рівнянь Фредгольма I роду дозволяють, у порівнянні з відомими раніше методами, істотно скоротити обсяг задіяної дискретної інформації та обсяг обчислювальних ресурсів без втрати точності.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності і постановка задач належать науковому керівнику та співавтору праць С.Г. Солодкому. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на семінарах в Інституті математики НАН України, а також були зроблені виступи на таких наукових конференціях:

- Міжнародній конференції «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Росія, Новосибірськ, 5-12 серпня 2012 року);
- 5-ій міжнародній конференції «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 10-11 вересня 2012 року);
- 18-th International Conference «Mathematical Modeling and Analysis» (Estonia, Tartu, 27-30 May 2013);
- 6-ій міжнародній конференції «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 5-6 вересня 2013 року);
- 40-ій Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень» (Крим, Велика Ялта, смт. Кацивелі, 30 вересня – 4 жовтня 2013 року);
- 19-ій Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 3-4 жовтня 2013 року).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 12 роботах, з них 6 статей у спеціалізованих фахових виданнях, три з яких знаходяться у міжнародній базі даних Scopus, а також додатково висвітлено у матеріалах 6 наукових конференцій.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури, що налічує 71 найменування. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів.

У *першому* розділі наведені основні поняття й означення теорії некоректних задач. Основним об’єктом дослідження даної дисертації є операторне рівняння *I* роду

$$Ax = f \tag{1}$$

де A – лінійний оператор, що діє між гільбертовими просторами X та Y. Наша мета – знайти (наближено) деякий розв'язок $x \in X$ операторного рівняння (1), що відповідає правій частині $f \in \mathrm{Range}(A) \subset Y$. При цьому припускається, що замість f відомо лише її збурення f_δ таке, що $\|f - f_\delta\| \le \delta$, де $\delta > 0$.

Далі в *параграфі* 1.1 сформульована загальна умова джерела, яка характеризує гладкісні властивості шуканого розв'язку, що має мінімальну норму в X. Такий розв'язок прийнято називати нормальним і позначати $x^\dagger$. Зазначимо, що в межах цієї дисертації досліджуються задачі (1) з розв'язками, що задовольняють умову джерела логарифмічного типу

$$x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A) := \{u: \quad u = (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \quad \|v\| \le \rho\}. \tag{2}$$

Тут A^* означає оператор, що є спряженим до A. Як відомо, такі задачі належать до жорстко некоректних. Цілком природньо вважати, що

$$\|\mathrm{A}\| \le M_K,\ M_K = m_K^{1/2}, \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2,\ldots,K \end{cases}.$$

Наприкінці першого параграфа наведені деякі приклади жорстко некоректних задач, що зустрічаються в теорії градієнтометрії супутника, в дифракційній оптиці і в теорії рівноваги осаду.

У *параграфі* 1.2 введено поняття методу регуляризації за Тіхоновим, за допомогою якого здійснюється перехід від некоректної задачі до деякої близької до неї коректної задачі або до послідовності таких задач.

Означення 1. Сім'я обмежених операторів $R_\alpha : Y \to X$ називається методом регуляризації (регуляризатором) задачі (1), якщо для кожного $f \in \mathrm{Range}(A)$ виконується

$$\sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta} \ \inf_{x \in A^{-1}f} \|R_\alpha f_\delta - x\| \to 0 \tag{3}$$

при $\alpha \to 0$, де $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тут $A^{-1}f$ – повний прообраз елемента f, а $R_\alpha f_\delta$ приймається за наближення до точного розв'язку x.

Наслідуючи А.Б. Бакушинського, обмежимося розглядом таких методів регуляризації, які можна подати у вигляді

$$R_\alpha := g_\alpha(A^*A)A^* \tag{4}$$

за допомогою твірної функції g_α, що задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^\mu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_\mu \alpha^\mu, \tag{5}$$

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2} \tag{6}$$

при деяких додатних константах χ_*, χ_μ та параметрі $0 \le \mu \le \mu_*$. При цьому величину μ_* називають кваліфікацією методу R_α. Щодо умови (5), то вона для всіх розв'язків $x^\dagger$ з множини $M^K_{p,\rho}(A)$ (2) при $\forall\, 0 < p < \infty$ гарантує оптимальний порядок точності наближення, який у разі δ-збурення в правих частинах рівняння (1) складає величину $O((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \delta^{-1})^{-p})$.

Наприкінці параграфа 1.2 наведені приклади методів регуляризації, які задовольняють умови (4) – (6).

Другий *розділ* присвячено дослідженню проблем побудови стійких наближень, що гарантують оптимальну за порядком точність на широких класах жорстко некоректних задач.

У *параграфі* 2.1 детально описується принцип рівноваги, який полягає у виборі значення параметра регуляризації α таким чином, щоб врівноважити дві функції Φ та Ψ в оцінці похибки $\|x^\dagger - R_\alpha f_\delta\| \le \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)$, де функція Φ визначає точність методу регуляризації і є монотонно зростаючою по α, а Ψ характеризує стійкість такого методу і є монотонно спадною. Далі вводиться у розгляд дискретна множина можливих значень параметра регуляризації

$$\Delta_N = \{\alpha_i = (q^2)^i \alpha_0, \quad i = 1,2,\ldots,N\}, \quad q > 1,$$
$$\alpha_0 = n(h+\delta)^2, \quad N:\ \alpha_{N+1} > m_k, \quad k = 1,\ldots K,$$

де n - параметр дискретизації.

Принцип рівноваги полягає у побудові множини

$$M^+(\Delta_N) = \left\{\alpha_i \in \Delta_N : \left\| R_{\alpha_i} f_\delta - R_{\alpha_j} f_\delta \right\| \le 4\Psi(\alpha_j), \quad j = 1,2,\ldots,i\right\},$$

яка не потребує ніякої додаткової інформації про гладкість розв'язку $x^\dagger$, та в виборі значення параметра регуляризації за правилом

$$\alpha = \alpha_+ := \max\left\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\right\}. \tag{7}$$

При цьому в алгоритмі задіяні допоміжні множина та величина

$$M(\Delta_N) = \{\alpha_i \in \Delta_N : \Phi(\alpha_i) \le \Psi(\alpha_i), \quad i = 1,2,\ldots,N\},$$

$$\alpha_* := \max\{\alpha \in M(\Delta_N)\}.$$

Наприкінці параграфа продемонстровано роботу принципу рівноваги на прикладі оберненої задачі реконструкції профілю в дифракційній оптиці.

Параграф 2.2 містить доведення допоміжних тверджень і фактів, що необхідні для встановлення основних результатів другого розділу.

У *параграфах* 2.3, 2.4 досліджуються жорстко некоректні задачі (1) з неточно заданими вхідними даними f_δ і $A_h \in L(X,Y)$, $\|A - A_h\| \le h$, $h > 0$, та розв'язками з множини $M^K_{p,\rho}(A)$ (2) (при деяких відомих параметрах $\rho > 0$, $K = 1,2,\ldots$ і невідомому значенні $p > 0$). Для розв'язування таких задач застосовуються два підходи, що складаються з комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно.

Нагадаємо, що за стандартним методом Тіхонова регуляризований розв'язок $x_{\alpha}^{h,\delta}$ визначається як розв'язок варіаційної задачі

$$I_{\alpha}^{h}(x) := \|A_h x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min. \tag{8}$$

Оскільки для чисельної реалізації тіхоновського методу необхідно виконувати всі обчислення зі скінченним обсягом вхідних даних, то варіаційна задача (8) замінюється на наступну

$$I_{\alpha,n}^{h}(x) := \|A_{h,n} x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

де $A_{h,n}$ – деяке скінченновимірне наближення до A_h, таке що $\mathrm{rank}(A_{h,n}) = n$.

Не обмежуючись якоюсь конкретною схемою дискретизації, будемо припускати, що скінченновимірне наближення $A_{h,n}$ вибрано так, щоб

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \le \delta, \\ h, & h > \delta \end{cases}.$$

Знаходження наближеного розв'язку вимагає в цьому випадку розв'язування лінійного операторного рівняння другого роду

$$\alpha x + A_{h,n}^{*} A_{h,n} x = A_{h,n}^{*} f_\delta,$$

інакше кажучи, наближення шукаються у вигляді

$$x_{\alpha,n}^{h,\delta} = (\alpha I + A_{h,n}^{*} A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^{*} f_\delta. \tag{9}$$

За ітерованим методом Тіхонова необхідно вибрати натуральне m та послідовно обчислити елементи $x_{i,\alpha}^{h,\delta}$, $i = 1,2,\ldots,m$, за правилом

$$x_{i,\alpha}^{h,\delta} = \alpha(A_h^{*} A_h + \alpha I)^{-1} x_{i-1,\alpha}^{h,\delta} + \alpha(A_h^{*} A_h + \alpha I)^{-1} A_h^{*} f_\delta,$$

де $x_{0,\alpha}^{h,\delta} = 0$, $m \ge p_1$, а за наближений розв'язок береться $x_{m,\alpha}^{h,\delta}$, що подається наступним чином

$$x_{m,\alpha}^{h,\delta} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1} (A_h^{*} A_h + \alpha I)^{-1} A_h^{*} f_\delta.$$

Наближений розв'язок дискретизованого рівняння, знайдений в межах ітерованого методу Тіхонова, визначається як

$$x_{m,\alpha,n}^{h,\delta} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1} (A_{h,n}^{*} A_{h,n} + \alpha I)^{-1} A_{h,n}^{*} f_{\delta}. \qquad (10)$$

Основні результати другого розділу викладені у таких твердженнях.

Теорема 2.3. *Нехай параметр регуляризації* $\alpha = \alpha_{+}$ *вибирається за правилом (7). Тоді для будь-яких* $x^{\dagger} \in M_{p,\rho}^{K}(A)$ *й* $K = 1, 2, \ldots$ *справджується наступна оцінка*

$$\left\| x^{\dagger} - x_{\alpha_{+},n}^{h,\delta} \right\| \le 6q\rho C_{1} (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p},$$

де C_1 *залежить лише від величини* p*, а* $x_{\alpha_{+},n}^{h,\delta}$ *визначається співвідношенням (9).*

Теорема 2.4. *Нехай* $x^{\dagger} \in M_{p,\rho}^{K}(A)$*,* $K = 1, 2, \ldots$*, і виконується умова теореми 2.3. Тоді для достатньо малих* $h, \delta > 0$ *має місце наступна оцінка*

$$\left\| x^{\dagger} - x_{\alpha_{+},n}^{h,\delta} \right\| \le 6q\rho C_{p}^{'} (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

де $C_{p}^{'}$ *залежить лише від* q, ρ, p *й* K*, а* $x_{\alpha_{+},n}^{h,\delta}$ *визначається співвідношенням (9).*

Теорема 2.5. *Нехай параметр регуляризації вибирається за правилом (7). Тоді для будь-яких* $x^{\dagger} \in M_{p,\rho}^{K}(A)$, $0 < p \le p_1$ *й* $K = 1, 2, \ldots$ *справджується наступна оцінка*

$$\left\| x^{\dagger} - x_{m,\alpha_{+},n}^{h,\delta} \right\| \le 6q\rho (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p},$$

де $x_{m,\alpha_{+},n}^{h,\delta}$ *визначається співвідношенням (10).*

Теорема 2.6. *Нехай* $x^{\dagger} \in M_{p,\rho}^{1}(A)$*,* $0 < p \le p_1$*, і виконується умова теореми 2.5. Тоді для будь-яких* $\delta, h > 0$ *має місце наступна оцінка*

$$\left\| x^{\dagger} - x_{m,\alpha_{+},n}^{h,\delta} \right\| \le C_{p}^{''} (\ln \frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

де $C_{p}^{''} = 6q\rho (\frac{2p+1}{2})^{p}$*, а* $x_{m,\alpha_{+},n}^{h,\delta}$ *визначається співвідношенням (10).*

Теорема 2.7. *Нехай* $x^{\dagger} \in M^{K}_{p,\rho}(A)$, $0 < p \le p_1$, $K = 2, 3, \ldots$ *і виконується умова теореми 2.5. Тоді для достатньо малих h,δ* > 0 *має місце оцінка*

$$\left\| x^{\dagger} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n} \right\| \le C^{'''}_{p} (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

де $C^{'''}_{p} = 2^p 6 q \rho$, *а* $x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}$ *визначається співвідношенням (10).*

Зауважимо, що в теоремах 2.3, 2.5 оцінки похибки стандартного та ітерованого методів Тіхонова залежать від значення параметра регуляризації, разом з тим теореми 2.4, 2.6, 2.7 дозволяють виразити знайдені в теоремах 2.3, 2.5 оцінки точності тільки через відомі величини: рівні похибки вхідних даних h і δ. Підкреслимо, що теорема 2.7 дозволяє узагальнити результат теореми 2.6 на випадок довільного $K \in \mathbb{N}$.

Як випливає з теорем 2.3, 2.6 й 2.7, для $h \le O(\delta^{\xi})$ при будь-якому $\xi > 0$ запропоновані підходи забезпечують оптимальну за порядком точність на класах жорстко некоректних задач, що досліджуються.

У *параграфі* 2.5 наведені результати обчислювальних експериментів, що підтверджують ефективність запропонованих вище підходів.

Третій розділ присвячений знаходженню інформаційної та алгоритмічної складності жорстко некоректних задач, які можуть бути подані у вигляді рівнянь Фредгольма І роду

$$Ax(t) = f(t), \qquad t \in [0;1], \tag{11}$$

з інтегральним оператором

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau) x(\tau) d\tau, \tag{12}$$

що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$. При цьому припускається, що множина Range(A) не замкнена в L_2 й $f \in$ Range(A). Також вважається, що права частина рівняння (11) задана з деякою похибкою $\delta > 0$, тобто замість f відомо її збурення $f_\delta \in L_2$: $\| f - f_\delta \| \le \delta$. Метою наших досліджень є наближене знаходження розв'язку $x^{\dagger}$ (11) з мінімальною нормою в L_2, що належить множині

$$M^{1}_{p,\rho}(A) = M_p(A) := \{u : u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1} v, \quad \|v\| \le \rho\}. \tag{13}$$

Тут величини $p,\rho > 0$ припускаються відомими. Будемо досліджувати оператори (12), що при деяких $r,s > 0$ належать до класу

$$H^{r,s}_{\gamma} := \left\{ A : \|A\| \le \gamma_0, \ \sum_{n+m=1}^{\infty} \hat{a}^2_{n,m} \underline{n}^{2r} \underline{m}^{2s} \le \gamma_1^2 \right\}, \qquad \gamma = (\gamma_0, \gamma_1), \quad \gamma_0 \le e^{-\frac{1}{2}},$$

де

$$\hat{a}_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 e_n(t) e_m(\tau) a(t,\tau) d\tau dt,$$

$n,m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ і $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Через $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ позначимо клас рівнянь (11) з операторами (12) із $H_\gamma^{r,s}$ та розв'язками з множини (13).

Далі за допомогою довільно взятої обмеженої області $\Omega \subset [1;\infty) \times [1;\infty)$ координатної площини здійснюємо перехід від (11) до дискретизованого рівняння $A_\Omega x = P_{\omega_1} f_\delta$, де $\omega_1 = \{i : (i, j) \in \Omega\}$ і

$$A_\Omega x = \sum_{(i,j)\in\Omega} (Ae_j, e_i)(x, e_j) e_i, \quad P_{\omega_1} f_\delta = \sum_{k\in\omega_1} (f_\delta, e_k) e_k . \tag{14}$$

Набір скалярних добутків вигляду

$$(Ae_j, e_i), \ (f_\delta, e_k), \qquad (i, j) \in \Omega, \ \ k \in \omega_1, \tag{15}$$

задіяних при побудові (14), називається гальоркінською інформацією про (11), а під card(Ω) будемо розуміти загальну кількість скалярних добутків вигляду (Ae_j, e_i) з (15).

Третій розділ присвячений оптимізації проекційних методів розв'язування рівнянь із $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ при $r \geq s$. Тут під проекційним методом розв'язування (11) розуміємо будь-яке відображення $P = P(\Omega)$: $L_2 \to L_2$, яке за допомогою гальоркінської інформації (15) про рівняння (11) зіставляє правій частині рівняння елемент $P(A_\Omega) f_\delta \in L_2$, що є многочленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ з номерами гармонік із $\omega_2 := \{j : \ (i, j) \in \Omega\}$. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (11). Зауважимо, що від методу $P(\Omega)$ ми не вимагаємо ані лінійності, ані неперервності. Таке загальне розуміння методу корисне тоді, коли йдеться про порівняння апроксимаційних властивостей різних методів розв'язування (11).

Під похибкою методу $P(\Omega)$ на класі рівнянь $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, зазвичай, розуміється його найбільше відхилення

$$\varepsilon_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P(\Omega)) = \sup_{A\in H_\gamma^{r,s}} \ \sup_{x^\dagger \in M_p(A)} \ \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta} \left\| x^\dagger - P(A_\Omega) f_\delta \right\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задається наступним чином

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) = \inf_{\Omega : \mathrm{card}(\Omega) \leq N} \ \inf_{P(\Omega)} \ \varepsilon_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P(\Omega)).$$

Ця величина характеризує інформаційну складність класу задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Позначимо через Π_M множину усіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій (е.а.о.). Мінімальний радіус обсягу обчислювальних витрат задається величиною

$$\overline{R}_{M,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) = \inf_{\Omega:\,\mathrm{card}(\Omega)\le M}\ \inf_{P(\Omega)\in\Pi_M} \varepsilon_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P(\Omega)).$$

Ця величина характеризує алгоритмічну складність класу задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Як відомо, методи, що гарантують для величини $\varepsilon_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P(\Omega))$ порядок точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ на досліджуваному класі задач, є оптимальними за порядком.

У розділі 3 знайдені порядкові оцінки величин $R_{N,\delta}$ і $\overline{R}_{M,\delta}$ для класів жорстко некоректних задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \ge s$.

Для економічної дискретизації рівнянь (11) замість стандартної схеми Гальоркіна P_nAP_m скористаємося її модифікацією, в межах якої за область Ω для індексів (i,j) береться гіперболічний хрест

$$\Gamma_{b,n} = \{1\}\times[1;2^{bn}]\bigcup_{k=1}^{n}(2^{k-1};2^k)\times[1;2^{bn-rk/s}] \ \subset\ [1;2^n]\times[1;2^{bn}], \tag{16}$$

де $r/s < b \le 2r/s$, $n \in \mathbb{N}$. При цьому вважаємо, що r/s - ціле число.

Наближений розв'язок шукається у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_n^*A_n)A_n^*P_{2^n} f_\delta\,, \tag{17}$$

де

$$A_n = A_n^b := P_1AP_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n}(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})AP_{2^{bn-rk/s}}\,, \tag{18}$$

а твірна функція g_α задовольняє (5)–(6).

Зазначимо, що більшість відомих регуляризаторів (у тому числі, стандартний метод Тіхонова та його ітерований варіант) відповідають умовам (5)–(6), виконання яких забезпечує оптимальний порядок точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ відповідним методам.

Проекційний метод (17)–(18) з апріорним правилом вибору параметра регуляризації α

$$\ln^{-p}\alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha} \tag{19}$$

позначимо через $P_g^{'}(\Gamma_{b,n}) = P^{'}(\Gamma_{b,n})$.

У *параграфах* 3.2, 3.3 наведені допоміжні твердження і факти, що описують апроксимаційні властивості проекційної схеми (18).

Параграф 3.4 присвячений дослідженню інформаційної складності класів задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \ge s$. Основні результати цього параграфа містяться у наступних трьох теоремах, де під N розуміється обсяг задіяної в обчисленнях гальоркінської інформації (15).

Теорема 3.1 *При N таких, що*

$$N^{-s}\ln^{-p}N^{2s} \asymp \begin{cases} \frac{\delta}{\ln^{s+1}\delta^{-1}}, & r=s \\ \frac{\delta}{\ln\delta^{-1}}, & r>s \end{cases}, \tag{20}$$

виконується

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \le \varepsilon_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P^{'}(\Gamma_{b,n})) \le \tilde{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\tilde{C}_p$ *залежить лише від параметрів задачі* $p,\rho,r,s,\gamma_0,\gamma_1$, *від параметра дискретизації* b *і від параметрів регуляризації* χ_0, χ_p, χ_*.

Теорема 3.3 *При N таких, що*

$$N^{-s}\ln^{-p}N^{2s} \le \delta, \tag{21}$$

має місце оцінка

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \ge \hat{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\hat{C}_p = 2^{-p-1}$.

Комбінація теорем 3.1 і 3.3 дає наступне твердження.

Теорема 3.4. *При N, що задовольняють (20), справджується*

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) = O(\ln^{-p} N^{2s}) = O(\ln^{-p}\delta^{-1}).$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ *реалізується в рамках проекційного методу* $P^{'}(\Gamma_{b,n})$ *(17) - (19).*

Параграф 3.5 присвячений дослідженню алгоритмічної складності класів задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \ge 2s$.

На початку §3.5 встановлюється порядкова оцінка обсягу обчислювальних витрат (тобто кількість виконуваних арифметичних дій) для проекційного методу з роботи П. Мате, С.В. Переверзєва[1], що полягає в комбінації ординарного тіхоновського

[1] Mathe P. Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales / P. Mathe, S.V. Pereverzev // Inverse Problems. – 2003. – V. 19, no. 6. – P. 1263 – 1277.

методу регуляризації зі стандартною гальоркінською схемою дискретизації. В рамках цього методу наближений розв'язок задачі (11) знаходиться з рівняння другого роду

$$\alpha x_{n,m} + A^*_{n,m} A_{n,m} x_{n,m} = A^*_{n,m} f_\delta, \tag{22}$$

де

$$A_{n,m} = P_n A P_m, \tag{23}$$

а α, як і раніше, вибирається за правилом

$$\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta / \sqrt{\alpha}. \tag{24}$$

Теорема 3.5. *Для побудови наближеного розв'язку в межах проекційного методу (22) – (24) необхідно виконати*

$$O(\delta^{-\frac{1}{s}} \delta^{-\frac{2s}{r}} \ln^{-p/s} \delta^{-1})$$

е.а.о. над значеннями функціоналів

$$(e_i, Ae_j), \quad (e_k, f_\delta), \qquad (i; j) \in [1, n] \times [1, m], \quad k = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Основний результат §3.5 викладений у наступному твердженні.

Теорема 3.6. *Покладемо в (16)* $b = 1 + r/s$. *Тоді мають місце співвідношення*

$$\overline{R}_{N,\delta}(H^{r,s}_\gamma, M_p(A)) = O(\ln^{-p} \delta^{-1}) = O(\ln^{-p} N^{2s}), \tag{26}$$

де N – обсяг обчислювальних витрат. При цьому

$$N = \begin{cases} O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}\right), & r = 2s \\ O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}\right), & r > 2s \end{cases}. \tag{27}$$

Зазначений оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $P'(\Gamma_{b,n})$ *(17)–(19), де за регуляризатор обрано ординарний метод Тіхонова (9).*

Порівняння результатів теорем 3.5 і 3.6 дозволяє дістатися висновку, що запропонований вище проекційний метод не тільки призводить до скорочення обсягу обчислень по відношенню до стандартної гальоркінської схеми дискретизації, а й реалізує порядкові оцінки величини $\overline{R}_{N,\delta}$ на класах рівнянь $(H^{r,s}_\gamma, M_p(A)),\ r \geq 2s.$

ВИСНОВКИ

Досліджено проблему побудови стійких наближень до розв’язків жорстко некоректних задач, що подаються у вигляді операторних та інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними. При цьому отримані такі основні результати:

- Запропоновано два підходи, що полягають в комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно.
- Доведено, що побудовані в рамках зазначених підходів стійкі наближення гарантують порядок точності $O((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на класах жорстко некоректних задач, що розглядаються.
- Встановлено, що при $h \le O(\delta^{\xi})$, $\forall \xi > 0$, ці методи забезпечують оптимальний порядок точності.
- Побудована економічна (у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації) проекційна схема дискретизації для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості.
- За допомогою запропонованої схеми дискретизації отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач, що досліджуються.
- Для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості розроблено проекційний метод, який є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат.
- Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини реалізується в рамках запропонованого проекційного методу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові статті у фахових виданнях

1. Myleiko G.L. Balancing Principle for Iterated Tikhonov Method of Severely Ill-Posed Problems / G.L. Myleiko, S.G. Solodky // J. of Num. and Appl. Math. – 2012. – **3 (109)**. – P. 72 – 88.
2. Myleiko G.L. About Regularization of Severely Ill-Posed Problems by Standard Tikhonov's Method with the Balancing Principle / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // Mathematic Modeling and Analysis. – 2014. – **19 (2)**. – P. 199 – 215.
3. Милейко Г.Л. Гіперболічний хрест і складність жорстко некоректних задач / С.Г. Солодкий, Г.Л. Милейко // Доповіді НАНУ. – 2013. – **8.** – С. 21 – 27.

4. Myleiko G.L. The minimal radius of Galerkin information for severely ill-posed problems / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2014. – **22** (**5**). – P. 739 – 757.
5. Милейко Г.Л. Про інформаційну та алгоритмічну складність деяких класів рівнянь Фредгольма I роду / С.Г. Солодкий, Г.Л. Милейко // Доповіді НАНУ. – 2014. – **9**. – С. 33 – 39.
6. Myleiko G.L. On optimization of projection methods for solving some classes of severely ill-posed problems / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // J. Appl. Anal. DOI: 10.1080/00036811.2015.1036748.

Матеріали конференцій:

1. Милейко А.Л. О решении жестко некорректных задач итерированным методом Тихонова с применением принципа равновесия / А.Л. Милейко, С.Г. Солодкий // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика Михаила Михайловича Лаврентьева (Новосибирск, Россия, 5 – 12 августа 2012 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Сибирское научное издательство. – 2012. – С. 217.
2. Милейко Г.Л. Застосування принципу рівноваги до розв’язування жорстко некоректних задач / Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий // Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» до 90-річчя від дня народження академіка І.І. Ляшка (Київ, 10,11 вересня 2012р.): Матеріали конференції. – Київ: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка. – 2012. – С. 68.
3. Myleiko G.L. On information complexity of severely ill-posed problems / G.L. Myleiko, S.G. Solodky 18th international Conference on Mathematical Modeling and Analysis is dedicated to the 75th birthday of professor G.Vainikko (Tartu, Estonia, May 27-30, 2013): Abstracts. – Tartu: Institute of Mathematics of the University of Tartu. – 2013. – P. 121.
4. Милейко Г.Л. Інформаційні аспекти чисельного розв’язування жорстко некоректних задач / Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий // Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І.І. Ляшка (Київ, 5,6 вересня 2013 р.): Матеріали конференції. – Київ: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка. – 2013. – С. 168 -169.
5. Милейко Г.Л. Мінімальний радіус та інформаційна складність жорстко некоректних задач / Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий// XIX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 3,4 жовтня 2013 р.): Матеріали конференції. – Львів: Львівський національний університет ім. Івана Франка. – 2013. – С. 98 - 99.
6. Милейко Г.Л. Про інформаційну складність жорстко некоректних задач / Г.Л. Милейко, С.Г. Солодкий // Міжнародна наукова конференція

«Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)» (Крим, Велика Ялта, с.м.т. Кацивелі, 30 вересня – 4 жовтня 2013 р.): Праці конференції. – Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – 2013. – С. 171 - 172.

АНОТАЦІЇ

Милейко Г.Л. Чисельне розв'язування жорстко некоректних задач. Апроксимаційні та інформаційні аспекти. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

У дисертаційній роботі досліджуються проблеми підвищення ефективності чисельних методів розв'язування жорстко некоректних задач. Зокрема, вивчаються питання про мінімально можливі обсяги інформаційних та обчислювальних витрат, що забезпечують оптимальний порядок точності наближень.

Для побудови стійких наближень жорстко некоректних задач зі збуреними оператором та правою частиною розроблені два підходи, суть яких полягає у комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова та з його ітерованим варіантом. Встановлено, що запропоновані алгоритми забезпечують оптимальний порядок точності на широких класах досліджуваних рівнянь. Ефективність цих підходів підтверджено чисельними прикладами.

Для інтегральних рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості розроблена проекційна схема дискретизації, що є економічною у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації. На основі цієї схеми побудовано проекційний метод, який є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат. Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації та мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначених величин реалізується в рамках запропонованого методу.

Ключові слова: жорстко некоректна задача, метод регуляризації, принцип рівноваги, мінімальний радіус гальоркінської інформації.

Милейко А.Л. Численное решение жестко некорректных задач. Аппроксимационные и информационные аспекты. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

В диссертационной работе исследуются проблемы повышения эффективности численных методов решения жестко некорректных задач. В частности, изучается вопрос о минимально возможных объемах информационных и вычислительных затрат, обеспечивающих оптимальный порядок точности приближений.

Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов и библиографии.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность ее тематики, сформулированы основные результаты работы и раскрыта их научная новизна, приведены данные об апробации результатов.

В первой главе кратко освещена история исследования некорректных задач, а также приводятся основные понятия и определения таких задач.

Основные результаты диссертации содержатся во второй и третьей главах.

Вторая глава посвящена построению устойчивых приближений к решениям жестко некорректных задач, гарантирующих оптимальный порядок точности. Предложены два подхода, состоящие в комбинации правила останова согласно принципу равновесия со стандартным методом Тихонова, а также с его итерированным вариантом, соответственно. Установлено, что указанные подходы обеспечивают оптимальный порядок точности на исследуемом классе задач. Кроме того, проведен сравнительный анализ указанных подходов. В конце второй главы приводятся численные примеры, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов.

В третьей главе исследуются вопросы сложности жестко некорректных задач. Для интегральных уравнений Фредгольма I рода с ядрами конечной гладкости разработана проекционная схема дискретизации, которая является экономичной в смысле объема задействованной галеркинской информации. На основе этой схемы построен проекционный метод, являющийся экономичным в смысле объема вычислительных затрат. Найдены порядковые оценки минимального радиуса галеркинской информации и минимального радиуса вычислительных затрат. При этом установлено, что оптимальный порядок указанных величины реализуется в рамках предложенного метода.

Ключевые слова: жестко некорректная задача, метод регуляризации, принцип равновесия, минимальный радиус галеркинской информации.

Myleyko H.L. Numerical solving severely ill-posed problems. Approximation and informational aspects. – Manuscript.

The thesis for a scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by specialty 01.01.07 – Computational Mathematics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

In the thesis the problems of increasing efficiency of approximate methods for solving severely ill-posed problems are studied. Namely the issue about the minimal possible amount of information and computational efforts, providing order-optimal accuracy of approximations, is considered.

The thesis organized as follows: introduction, three chapters, conclusions and the list of references.

In the introduction a general description of the work and the urgency of its subjects are given. The main results of the work and disclosure of their scientific novelty are also stated here. Moreover, the information about evaluation of results is presented.

In the first chapter the history regarding to the research of ill-posed problems is

briefly described. Moreover, the main notation and definitions of such problems are given here.

The main results of the thesis are presented in the second and third chapters.

The second chapter is devoted to constructing stable approximations of severely ill-posed problems, which provide optimal order of accuracy. The two approaches are developed. The approaches consist in combination of the stop rule according to balancing principle with the standard Tikhonov method and its iterated version correspondingly. It is established that proposed algorithms provide optimal order of accuracy on the wide classes of equations under consideration. In addition, the comparative analysis is presented. The efficiency of these algorithms is confirmed by numerical examples.

In the third chapter the issue regarding to complexity of severely ill-posed problems is studied. For Fredholm's integral equations of the first kind with finite-smooth kernels a projection scheme which is economical in the sense of amount of used Galerkin information is proposed. Based on this scheme a projection method that is economical in the sense of amount of computional efforts is developed. The order estimates of the minimal radius of the Galerkin information and the minimal radius of computional efforts are obtained. It is established that the optimal orders of these values are achieved under proposed method.

Key words: severely ill-posed problem, regularization method, balancing principle, minimal radius of the Galerkin information.

Підписано до друку 24.07.2015. Формат А5. Папір офс. Офс. Друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Ум. друк. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 51.

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.