НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МИЛЕЙКО ГАННА ЛЕОНІДІВНА

УДК 519.642

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКО НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ. АПРОКСИМАЦІЙНІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ АСПЕКТИ

01.01.07 - обчислювальна математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник :

доктор фізико-математичних наук,

Солодкий Сергій Григорович

Київ 2015

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Як відомо, дослідження багатьох складних об'єктів і явищ у різних галузях науки потребують побудови й обґрунтування відповідних математичних моделей. Однак, дуже часто наявна інформація дозволяє записати лише формальну модель, для якої за традиційних підходів не існує ефективних обчислювальних алгоритмів. Йдеться про ті випадки, коли подібні моделі призводять до некоректних задач. Складність розв'язування таких задач полягає в тому, що для них здебільшого неможливо встановити умови існування та єдиності розв'язку в якому-небудь "природньому" функціональному просторі, а найголовніше, немає стійкості розв'язку (що розуміється в класичному сенсі) від вхідних даних задачі. І лише на початку 60-х років минулого сторіччя в роботах А.М. Тіхонова, М.М. Лаврентьєва, В.О. Морозова і В.К. Іванова були закладені основи теорії некоректних задач і дано строге математичне означення стійкості розв'язування відповідних задач. Одним з основних понять цієї теорії є метод регуляризації (регуляризуючий алгоритм). Коротше кажучи, під регуляризацією некоректної задачі розуміється таке її включення в параметричну сім'ю коректних задач, що при граничному значенні параметра отримуємо некоректну вихідну або еквівалентну їй.

В межах даної дисертації розглянуто проблему побудови оптимальних за точністю регуляризованих наближень до розв'язків жорстко некоректних задач $Ax = f$ зі збуреними вхідними даними A_h, f_δ. З цією метою як регуляризатори застосовуються стандартний метод Тіхонова і його ітерований варіант, де параметр регуляризації вибирається згідно принципу рівноваги. При цьому встановлено, що запропоновані підходи забезпечують точність $O((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на класах жорстко некоректних задач, що розглядаються.

Крім того, в дисертації досліджується проблема ефективності побудованих наближень до розв'язків жорстко некоректних задач у сенсі інформаційної та алгоритмічної складності. Інакше кажучи, вивчається питання про мінімально можливий обсяг інформаційних і обчислювальних витрат, що забезпечують наперед задану точність розв'язку.

Щодо історії питання, зауважимо, що вперше в роботі Г.М. Вайнікко і Р. Плато [52] для помірно некоректних задач був запропонований клас економічних (у сенсі обсягу задіяної дискретної інформації) проекційних методів, де за схему дискретизації використовувалася стандартна схема Гальоркіна. Пізніше в роботі С.В. Переверзєва і С.Г. Солодкого [49] були отримані перші порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації для рівнянь Фредгольма I роду з операторами, ядра яких мають ізотропну гладкість. Надалі дослідження, ініційовані в [49], були продовжені в низці робіт, серед яких виділимо [13], [61]. При цьому, як виявилося, оптимальні порядки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність, реалізуються не в рамках стандартної схеми Гальоркіна, а деякої її модифікації, що називають гіперболічним хрестом. Важливо підкреслити, що складність некоректних задач до недавна вивчалася лише у разі помірно некоректних задач. Що стосується жорстко некоректних задач, то дослідження в цьому напрямку довгий час взагалі не проводилися. Тут можна згадати лише роботу С.В. Переверзєва і П. Мате [40], де розглядалося питання економічної дискретизації у межах стандартної схеми Гальоркіна для некоректних задач, розв'язки яких задовольняють загальн умові джерела.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота проводилася згідно із загальним планом досліджень відділу теорії наближень Інституту математики НАН України в рамках держбюджетної теми "Оптимізація методів розв'язування некоректних задач та розвиток теорії паралельних асинхронних обчислень" за номером № 0111U001010.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є побудова стійких наближень до розв'язків рівнянь з широких класів жорстко некоректних задач; розробка й обґрунтування алгоритмів, що гарантують оптимальну за порядком точність, та є економічними у сенсі обчислювальних витрат.

Об'єктом дослідження є жорстко некоректні задачі, що подаються у вигляді операторних та інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними.

Предметом дослідження є оптимальні за порядком точності та економічні за обсягом обчислювальних ресурсів методи до розв'язування жорстко некоректних задач.

Методи дослідження. У дисертації досліджуються методи теорії некоректних задач, математичного й функціонального аналізу, обчислювальної математики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати роботи, що визначають наукову новизну і виносяться на захист, полягають у наступному: розглянуто проблему ефективного розв'язування жорстко некоректних задач, що подані у вигляді операторних та інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними та

- запропоновано два підходи до наближеного розв'язування, що полягають у комбінації правилу зупинки за принципом рівноваги зі стандартним методом Тіхонова та з його ітерованим варіантом, відповідно;
- встановлено, що запропоновані підходи гарантують оптимальний порядок точності на досліджуваних класах жорстко некоректних задач;
- здійснено порівняльний аналіз цих підходів;
- побудована економічна у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації проекційна схема дискретизації для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості;
- за допомогою запропонованої схеми дискретизації отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач, що досліджуються;

- для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості розроблено проекційний метод, побудований на основі цієї схеми, що є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат;
- знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини реалізується в рамках проекційного методу, що досліджується.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Запропоновані і обґрунтовані у ній алгоритми розв'язування жорстко некоректних задач дозволяють отримувати стійкі наближення з оптимальною за порядком точністю. Досліджені у роботі проекційні методи розв'язування широких класів інтегральних рівнянь Фредгольма I роду дозволяють, у порівнянні з відомими раніше методами, істотно скоротити обсяг задіяної дискретної інформації та обсяг обчислювальних ресурсів без втрати точності.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності і постановка задач належать науковому керівнику та співавтору праць С.Г. Солодкому. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на семінарах в Інституті математики НАН України, а також були зроблені виступи на конференціях:

- Міжнародній конференції "Обратные и некорректные задачи математической физики" (Росія, Новосибірськ, 5-12 серпня 2012 року);
- П'ятій міжнародній конференції "Обчислювальна та прикладна математика" (Київ, 10–11 вересня 2012 року);
- 18th International Conference "Mathematical Modeling and Analysis" (Estonia, Tartu, 27–30 May 2013);
- Шостій міжнародній конференції "Обчислювальна та прикладна математика" (Київ, 5–6 вересня 2013 року);

- Сороковій Міжнародній науковій конференції “Питання оптимізації обчислень"(Крим, Велика Ялта, смт. Кацивелі, 30 вересня – 4 жовтня 2013 року);
- Дев‘ятнадцятій Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики"(Львів, 3–4 жовтня 2013 року).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 12 роботах, з них 6 статей – у спеціалізованих фахових виданнях, три з яких знаходяться у міжнародній базі даних Scopus, а також додатково висвітлено у матеріалах 6 наукових конференцій.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів та списку літератури. У першому розділі наведені основні поняття й означення теорії некоректних задач. Основним об’єктом дослідження даної дисертації є операторне рівняння I роду

$$Ax = f, \tag{1}$$

де A – лінійний оператор, що діє між гільбертовими просторами X та Y. Наша мета – знайти (наближено) деякий розв’язок $x \in X$ операторного рівняння (1), що відповідає правій частині $f \in \mathrm{Range}(A) \subset Y$. При цьому припускається, що замість f відомо лише її деяке збурення f_δ таке, що $\|f - f_\delta\| \le \delta$, де $\delta > 0$.

Далі в §1.1 сформульована загальна умова джерела, яка характеризує гладкісні властивості шуканого розв’язку, що має мінімальну норму в X. Такий розв’язок прийнято називати нормальним і позначати $x^\dagger$. Зазначимо, що в межах цієї дисертації досліджуються задачі (1) з розв’язками, що задовольняють умові джерела логарифмічного типу

$$x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A) := \{u : \quad u = (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p} v, \quad \|v\| \le \rho\}, \tag{2}$$

де через A^* позначається оператор, спряжений до A. Як відомо, такі задачі належать до жорстко некоректних.

Наприкінці першого параграфа наведені деякі приклади жорстко некоректних задач, що зустрічаються в теорії градієнтометрії супутника, в дифракційній оптиці і в теорії рівноваги осаду.

У параграфі 1.2 введено поняття методу регуляризації за Тіхоновим, за допомогою якого здійснюється перехід від некоректної задачі до деякої близької до неї коректної задачі або послідовності коректних задач.

Означення 0.1. Сім'я обмежених операторів $R_\alpha : Y \to X$ називається методом регуляризації (регуляризатором) задачі (1), якщо для кожного $f \in \mathrm{Range}(A)$ виконується

$$\sup_{f_\delta :\, \|f-f_\delta\| \le \delta} \quad \inf_{x \in A^{-1}f} \|R_\alpha f_\delta - x\| \to 0 \tag{3}$$

при $\alpha \to 0$, де $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тут $A^{-1}f$ – повний прообраз елемента f, а $R_\alpha f_\delta$ приймається за наближення до точного розв'язку x.

Наслідуючи А.Б. Бакушинського [1], обмежимося розглядом таких методів регуляризації, які можна подати у вигляді

$$R_\alpha := g_\alpha(A^*A)A^* \tag{4}$$

за допомогою твірної функції g_α, що задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^\mu |1-\lambda g_\alpha(\lambda)| \le \varkappa_\mu \alpha^\mu, \tag{5}$$

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \varkappa_* \alpha^{-1/2} \tag{6}$$

при деяких додатних константах $\varkappa_\mu, \varkappa_*$ та параметрі $0 \le \mu \le \mu_*$. При цьому величину μ_* називають кваліфікацією методу R_α. Щодо умови (5), то вона забезпечує оптимальний порядок точності наближення до нормальних розв'язків $x^\dagger$ з множини (2), який у разі $\delta-$збурення в правих частинах рівняння (1) складає величину $O((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \tfrac{1}{\delta})^{-p})$

Наприкінці параграфа 1.2 наведені приклади методів регуляризації, що задовольняють умови (4) – (6).

Другий розділ присвячено дослідженню проблем побудови стійких наближень, що гарантують оптимальну за порядком точність на широких класах жорстко некоректних задач.

У параграфі 2.1 детально описується принцип рівноваги, який полягає у виборі значення параметра регуляризації α таким чином, щоб врівноважити дві функції Φ і Ψ в оцінці похибки $\|x^\dagger - R_\alpha f_\delta\| \leq \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha)$, де функція Φ визначає точність методу регуляризації і є монотонно зростаюча по α, а Ψ характеризує стійкість методу і є монотонно спадною. Далі вводиться у розгляд дискретна множина можливих значень параметра регуляризації

$$\Delta_N = \{\alpha_i = (q^2)^i \alpha_0, \quad i = 1, 2, ..., N\}, \quad q > 1,$$
$$\alpha_0 = n(h + \delta)^2, \quad N : \alpha_{N+1} > m_k, \quad k = 1, ..., K,$$

де n – параметр дискретизації. Принцип рівноваги полягає в побудові множини

$$M^+(\Delta_N) = \{\alpha_i \in \Delta_N : \|R_{\alpha_i} f_\delta - R_{\alpha_j} f_\delta\| \leq 4\Psi(\alpha_j), \quad j = 1, 2, ..., i\}$$

та в виборі значення параметра регуляризації за правилом

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}. \tag{7}$$

При цьому в алгоритмі задіяні допоміжні множина та величина

$$M(\Delta_N) := \{\alpha_i \in \Delta_N : \Phi(\alpha_i) \leq \Psi(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N\}$$

$$\alpha_* := \max\{\alpha \in M(\Delta_N)\}.$$

Наприкінці параграфа продемонстровано роботу принципу рівноваги на прикладі оберненої задачі реконструкції профілю в дифракційній оптиці.

Параграф 2.2 містить доведення допоміжних тверджень і фактів, що необхідні для встановлення основних результатів другого розділу.

У параграфах 2.3, 2.4 для дослідження жорстко некоректних задач (1) з неточно заданими вхідними даними A_h, f_δ та розв'язками з множини $M^K_{p,\rho}(A)$ (2) (при деяких відомих параметрах $\rho > 0, \quad K = 1, 2, \dots$ і невідомому значенні $p > 0$) застосовуються два підходи, що складаються з комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно. При цьому встановлено, що запропоновані стратегії забезпечують порядок точності $O((\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на всій множині розв'язків (2).

Нагадаємо, що за стандартним методом Тіхонова регуляризований розв'язок $x^{h,\delta}_\alpha$ визначається як розв'язок варіаційної задачі

$$I^h_\alpha(x) := \|A_h x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min. \tag{8}$$

Оскільки для чисельної реалізації тіхонівського методу необхідно виконувати всі обчислення зі скінченним обсягом вхідних даних, то варіаційна задача (8) замінюється на наступну

$$I^h_{\alpha,n}(x) := \|A_{h,n} x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

де $A_{h,n}$ – деяке скінченновимірне наближення до A_h, таке що $\operatorname{rank}(A_{h,n}) = n$. Не обмежуючись якоюсь конкретною схемою дискретизації, будемо припускати, що скінченновимірне наближення $A_{h,n}$ з $\operatorname{rank}(A_{h,n}) = n$ вибрано так, щоб

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \le \delta, \\ h, & h > \delta \end{cases}.$$

Знаходження наближеного розв'язку вимагає в цьому випадку розв'язування лінійного операторного рівняння другого роду

$$\alpha x + A^*_{h,n} A_{h,n} x = A^*_{h,n} f_\delta,$$

інакше кажучи, наближення шукаються у вигляді

$$x^{h,\delta}_{\alpha,n} = (\alpha I + A^*_{h,n} A_{h,n})^{-1} A^*_{h,n} f_\delta. \tag{9}$$

За ітерованим методом Тіхонова необхідно вибрати натуральне m, початкове наближення $x^{h,\delta}_{0,\alpha} = 0$ і послідовно обчислити елементи $x^{h,\delta}_{i,\alpha}, i = 1, 2, \dots, m$, за правилом

$$x^{h,\delta}_{i,\alpha} = \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} x^{h,\delta}_{i-1,\alpha} + \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} A^*_h f_\delta,$$

де $m \geq p_1$, а за наближений розв'язок береться $x^{h,\delta}_{m,\alpha}$. Тоді елемент $x^{h,\delta}_{m,\alpha}$ можна переписати у вигляді

$$x^{h,\delta}_{m,\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*_h A_h + \alpha I)^{-i} A^*_h f_\delta.$$

Наближений розв'язок дискретизованого рівняння, знайдений в межах ітерованого методу Тіхонова, позначимо через

$$x^{h,\delta}_{m,\alpha,n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*_{h,n} A_{h,n} + \alpha I)^{-i} A^*_{h,n} f_\delta. \tag{10}$$

Основні результати другого розділу викладені у таких твердженнях.

Теорема 0.1. *Нехай параметр регуляризації $\alpha = \alpha_+$ вибирається за правилом (7). Тоді для будь-яких $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$ й $K = 1, 2, \dots$ справджується наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \leq 6q\rho C_1(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p},$$

де C_1 залежить лише від величини p, а $x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}$ визначається співвідношенням (9).

Теорема 0.2. *Нехай $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $\quad K = 1, 2, \dots,$ і виконується умова теореми 0.1. Тоді для достатньо малих $h, \delta > 0$ має місце наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \leq C'_p(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h + \delta})^{-p},$$

де C'_p залежить лише від q, ρ, p й K, а $x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}$ визначається співвідношенням (9).

Теорема 0.3. *Нехай параметр регуляризації вибирається за правилом (7). Тоді для будь-яких* $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A), \quad 0 < p \le p_1$ *й* $K = 1, 2, \dots$ *справджується наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\rho(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\widehat{\alpha}})^{-p},$$

де $x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}$ *визначається співвідношенням (10).*

Теорема 0.4. *Нехай* $x^\dagger \in M^1_{p,\rho}(A)$, $0 < p \le p_1$, *і виконується умова теореми 0.3. Тоді для будь-яких* $\delta, h > 0$ *має місце наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le C''_p \left(\ln \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4 \delta} \right)^{-p},$$

де $C''_p = 6q\rho \left(\frac{2p+1}{2}\right)^p$, *а* $x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}$ *визначається співвідношенням (10).*

Теорема 0.5. *Нехай* $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $0 < p \le p_1$, $K = 2, 3, \dots$ *і виконується умова теореми 0.3. Тоді для достатньо малих* $h, \delta > 0$ *має місце оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le C'''_p \left[\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4 \delta} \right]^{-p},$$

де $C'''_p = 2^p 6q\rho$, *а* $x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}$ *визначається співвідношенням (10).*

Зауважимо, що в теоремах 0.1, 0.3 оцінка похибки стандартного та ітерованого методів Тіхонова залежить від значення параметра регуляризації, в той час як теореми 0.2, 0.4, 0.5 дозволяють виразити знайдену в теоремах 0.1, 0.3 оцінку точності тільки через відомі величини: рівні похибки вхідних даних h і δ. Підкреслимо, що теорема 0.5 дозволяє узагальнити результат теореми 0.4 на випадок довільного $K \in \mathbb{N}$.

Як випливає з теорем 0.2, 0.4 й 0.5, для $h \le O(\delta^\xi)$ при будь-якому $\xi > 0$ запропоновані підходи забезпечують оптимальну за порядком точність на класах жорстко некоректних задач, що досліджуються.

У параграфі 2.5 наведені результати обчислювальних експериментів, що підтверджують ефективність запропонованих вище підходів.

Третій розділ присвячений знаходженню інформаційної та алгоритмічної складності жорстко некоректних задач, які можуть бути подані у вигляді рівнянь Фредгольма I роду

$$Ax(t) = f(t), \qquad t \in [0;1], \tag{11}$$

з інтегральним оператором

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{12}$$

що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$. При цьому припускається, що множина $\mathrm{Range}(A)$ не замкнена в L_2 й $f \in \mathrm{Range}(A)$. Також вважається, що права частина рівняння (11) задана з деякою похибкою $\delta > 0$, тобто замість f відомо її збурення $f_\delta \in L_2 : \|f - f_\delta\| \le \delta$. Метою наших досліджень є наближене знаходження розв'язку $x^\dagger$ (11) з мінімальною нормою в L_2, що належить множині

$$M^1_{p,\rho}(A) = M_p(A) := \{u : u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \quad \|v\| \le \rho\}. \tag{13}$$

Тут величини $p, \rho > 0$ припускаються відомими. Будемо досліджувати оператори (12), що при деяких $r, s > 0$ належать до класу

$$\mathcal{H}^{r,s}_\gamma := \{A : \|A\| \le \gamma_0, \quad \sum_{n+m=1}^{\infty} \hat{a}^2_{n,m} \ \underline{n}^{2r} \cdot \underline{m}^{2s} \le \gamma_1^2\}, \quad \gamma = (\gamma_0;\gamma_1),\ \gamma_0 \le e^{-\frac{1}{2}},$$

де

$$\hat{a}_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 e_n(t)e_m(\tau)a(t,\tau)d\tau dt,$$

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ і $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Через $(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$ позначимо клас рівнянь (11) з операторами (12) із $\mathcal{H}^{r,s}_\gamma$ та розв'язками з (13).

Далі за допомогою довільно взятої обмеженої області $\Omega \subset [1;\infty) \times [1;\infty)$ координатної площини здійснюємо перехід від (11) до дискретизованого рівняння $A_\Omega x = P_{\omega_1} f_\delta$, де $\omega_1 = \{i : (i;j) \in \Omega\}$ і

$$A_\Omega x = \sum_{(i,j)\in\Omega} (Ae_j, e_i)(x, e_j)e_i, \qquad P_{\omega_1} f_\delta = \sum_{k\in\omega_1} (f_\delta, e_k)e_k. \tag{14}$$

Набір скалярних добутків вигляду

$$(Ae_j, e_i), \quad (f_\delta, e_k), \quad (i;j) \in \Omega, \quad k \in \omega_1, \tag{15}$$

задіяних при побудові (14), називається гальоркінською інформацією про (11), а під $\mathrm{card}(\Omega)$ будемо розуміти загальну кількість скалярних добутків вигляду (Ae_j, e_i) з (15).

У розділі 3 зосередимося на дослідженні проекційних методів розв'язування рівнянь із $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ при $r \geq s$. Тут під проекційним методом розв'язування (11) розуміємо будь-яке відображення $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Omega) : L_2 \to L_2$, яке за допомогою гальоркінської інформації (15) про рівняння (11) зіставляє правій частині рівняння елемент $\mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta \in L_2$, що є многочленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ з номерами гармонік із $\omega_2 := \{j : (i;j) \in \Omega\}$. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (11).

Під похибкою методу $\mathcal{P}(\Omega)$ на класі рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, зазвичай, розуміється його найбільше відхилення

$$\varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right) = \sup_{A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}} \; \sup_{x^\dagger \in M_p(A)} \; \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta} \|x^\dagger - \mathcal{P}(A_\Omega) f_\delta\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задається величиною

$$R_{N,\delta}\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)\right) = \inf_{\Omega :\, \mathrm{card}(\Omega) \leq N} \; \inf_{\mathcal{P}(\Omega)} \; \varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right).$$

Ця величина характеризує інформаційну складність класу задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Позначимо через Π_M множину усіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій (е.а.о.). Мінімальний радіус обсягу обчислювальних витрат задається величиною

$$\overline{R}_{M,\delta}\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)\right) = \inf_{\Omega :\; \mathrm{card}(\Omega) \leq M} \; \inf_{\mathcal{P}(\Omega) \in \Pi_M} \; \varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right).$$

Ця величина характеризує алгоритмічну складність класу задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Як відомо (див. [63]), методи, що гарантують для величини $\varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right)$ порядок точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ на досліджуваному класі рівнянь є оптимальними за порядком. Очевидно, що серед усіх наближених методів має сенс вивчати в першу чергу ті, які є оптимальними на класах задач, що досліджуються.

У розділі 3 вперше знайдені оцінки величин $R_{N,\delta}$ і $\overline{R}_{M,\delta}$ для класів жорстко некоректних задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)), \quad r \geq s$.

Для економічної дискретизації рівнянь (11) замість стандартної схеми Гальоркіна $P_n A P_m$ скористаємося її модифікацією, в межах якої за область Ω для індексів (i,j) береться гіперболічний хрест

$$\Gamma_{b,n} = \{1\} \times [1; 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn-rk/s}] \subset [1; 2^n] \times [1; 2^{bn}], \qquad (16)$$

де $\frac{r}{s} < b \leq \frac{2r}{s}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Наближений розв'язок шукається у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f_\delta, \qquad (17)$$

де

$$A_n = A_n^b := P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}, \qquad (18)$$

а твірна функція g_α задовольняє умови (5)–(6).

Зазначимо (див., наприклад, [34]), що більшість відомих регуляризаторів (у тому числі, стандартний метод Тіхонова та його ітерований варіант) відповідають (5)–(6).

Проекційний метод (17)–(18) з апріорним правилом вибору параметра регуляризації α

$$\ln^{-p}\alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha} \qquad (19)$$

позначимо через $\mathcal{P}_g^{'}(\Gamma_{b,n}) = \mathcal{P}^{'}(\Gamma_{b,n})$.

У параграфах 3.2, 3.3 наведені допоміжні твердження і факти, що описують апроксимаційні властивості проекційної схеми (18).

Параграф 3.4 присвячений дослідженню інформаційної складності класів задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)), \quad r \geq s$.

Основні результати §3.4 містяться в наступних трьох теоремах, де під N розуміється обсяг задіяної в обчисленнях гальоркінської інформації (15).

Теорема 0.6. *При N таких, що*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \asymp \begin{cases} \frac{\delta}{\ln^{s+1}\delta^{-1}}, & r = s \\ \frac{\delta}{\ln \delta^{-1}}, & r > s \end{cases}, \tag{20}$$

виконується

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \leq \varepsilon_\delta \left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})\right) \leq \tilde{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\tilde{C}_p$ залежить лише від параметрів задачі $p, \rho, r, s, \gamma_0, \gamma_1$, від параметра дискретизації b і від параметрів регуляризації $\varkappa_0, \varkappa_p, \varkappa_*$.

Теорема 0.7. *При N таких, що*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \leq \delta, \tag{21}$$

має місце оцінка

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \geq \hat{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\hat{C}_p = 2^{-p-1}$.

Комбінація теорем 0.6 і 0.7 дає наступне твердження.

Теорема 0.8. *При N, що задовольняють (20), справджується*

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} N^{2s} \asymp \ln^{-p} \delta^{-1}.$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (17) - (19).

Параграф 3.5 присвячений дослідженню алгоритмічної складності класів задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)), \quad r \geq 2s$.

На початку §3.5 встановлюється порядкова оцінка обсягу обчислювальних витрат (тобто кількість виконуваних арифметичних дій) для проекційного методу з [40], що полягає в комбінації ординарного тіхоновського методу регуляризації зі стандартною гальоркінською схемою дискретизації. В рамках цього методу наближений розв'язок задачі (11) знаходиться з рівняння другого роду

$$\alpha x_{n,m} + A^*_{n,m} A_{n,m} x_{n,m} = A^*_{n,m} f_\delta, \tag{22}$$

де

$$A_{n,m} = P_n A P_m, \tag{23}$$

а α, як і раніше, вибирається за правилом

$$\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta / \sqrt{\alpha}. \tag{24}$$

Теорема 0.9. *Для побудови наближеного розв'язку в межах проекційного методу (22) - (24) необхідно виконати*

$$O(\delta^{-\frac{1}{s}} \delta^{-\frac{2\varepsilon}{r}} \ln^{-p/s} \delta^{-1})$$

е.а.о. над значеннями функціоналів

$$(e_i, Ae_j), \quad (e_k, f_\delta), \qquad (i;j) \in [1,n] \times [1,m], \quad k = \overline{1,n}. \tag{25}$$

Основний результат §3.5 викладений у наступній теоремі.

Теорема 0.10. *Покладемо в (16)* $b = 1 + \frac{r}{s}$. *Тоді мають місце співвідношення*

$$\overline{R}_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} \delta^{-1} \asymp \ln^{-p} N^{2s}, \tag{26}$$

де N *– обсяг обчислювальних витрат. При цьому*

$$N = \begin{cases} O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}\right), & r = 2s \\ O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}\right), & r > 2s \end{cases}. \tag{27}$$

Зазначений оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ *(17)–(19), де за регуляризатор обрано ординарний метод Тіхонова.*

Порівняння результатів теорем 0.9 і 0.10, дозволяє дістатися висновку, що запропонований проекційний метод не тільки призводить до скорочення обсягу обчислень по відношенню до стандартної гальоркінської схеми дискретизації, а й реалізує порядкові оцінки величини $\overline{R}_{N,\delta}$ на класах рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)), \quad r \geq 2s.$

РОЗДІЛ 1
ЖОРСТКО НЕКОРЕКТНІ ЗАДАЧІ. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Основні поняття та означення теорії некоректних задач

У цьому розділі будуть викладені основні поняття теорії некоректних задач, розглянуті методи, що забезпечують їх стійке розв'язування, а також наведені приклади таких задач.

Основним об'єктом досліджень в теорії лінійних некоректних задач є операторне рівняння

$$Ax = f, \tag{1.1}$$

де A – лінійний оператор, що діє між просторами X та Y. Потрібно (наближено) знайти деякий розв'язок $x \in X$ операторного рівняння (1.1), що відповідає правій частині $f \in Y$.

Слід зазначити, що зацікавленість до некоректних задач помітно зросла на початку XX сторіччя, коли французьким математиком Ж. Адамаром (1902 р.) були сформульовані умови коректності задач (див. [32]). Отже, згідно Адамару, коректно поставленою (або коректною) називають задачу, розв'язок якої існує, єдиний і неперервно залежить від вхідних даних, тобто якщо $f_n \to f \in Y$, то $x_n \to x \in X$ при $Ax_n = f_n$. Якщо хоча б одна з цих трьох умов порушується, то задача вважається некоректно поставленою (або некоректною). Там же Адамаром був наведений приклад некоректної задачі, а саме, задача Коші для рівняння Лапласа. До того ж, автор висловив припущення, що тільки коректні задачі має сенс розглядати при розв'язуванні практичних проблем. Тривалий час ця точка зору залишалася чільною, і лише у 1943 році А.М. Тіхонов вказав на практичну важливість некоректних задач і можливість їх стійкого розв'язування. У 50–60 роках минулого століття з'явилася низка принципово нових підходів, які склали основу сучасної теорії некоректних задач і знайшли своє відображення у працях таких відомих авторів як А.М. Тіхонов, М.М. Лаврентьєв, В.К. Іванов, В.О. Морозов та багатьох інших.

Зазначимо, що на даний час некоректні задачі інтенсивно вивчаються у різних розділах класичної математики (наприклад, в обчислювальній алгебрі, в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в теорії рівнянь з частинними похідними, у функціональному аналізі та ін.). З іншого боку, теорія некоректних задач знайшла своє широке застосування при розв'язуванні практичних задач майже у всіх галузях науки, зокрема, таких як астрономія, геофізика, екологія (діагностика стану повітря, води тощо), економіка (теорія оптимального керування, фінансова математика й ін.), медицина (рентгенівська томографія, УЗД тощо).

На сьогодні існує обширна література, присвячена дослідженню некоректних задач. Тут, в першу чергу, слід відзначити монографії А.М. Тіхонова та В.Я. Арсеніна [15], В.К. Іванова, В.В. Васіна та В.П. Танани [5], М.М. Лаврентєва [8], В.О. Морозова та О.І. Грєбєннікова [9], Г.М. Вайнікко та А.Ю. Вєрєтєннікова [3] , А.Б. Бакушинського та О.В. Гончарського [2], С.І. Кабаніхіна [6], H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer [27], C.W. Groetsch [31], A.K. Louis [36].

Повернемося до лінійного операторного рівняння (1.1)

$$Ax = f,$$

де $A : X \to Y$, а X й Y – гільбертови простори. Для скорочення позначимо скалярні добутки в обох просторах через $(\cdot, \cdot)$ і відповідні їм норми через $\|\cdot\|$. До того ж, таким самим символом $\|\cdot\|$ позначатимемо стандартну операторну норму. З контексту буде зрозуміло, який саме простір або норма маються на увазі. Нагадаємо, що нам належить знайти розв'язок рівняння (1.1), що відповідає правій частині f. Слід підкреслити, що стійкість і нестійкість розв'язку пов'язані з тим, яким чином визначаються простори X та Y

(в тому числі і їх норми). При цьому багато задач можуть бути некоректно поставлені при одному виборі пари просторів і коректно поставлені – при іншому. Варто також відзначити, що ми часто не вільні у виборі просторів X та Y; в окремих випадках можна отримати неперервність оператора A^{-1} за рахунок відповідного вибору топології, але це лише формальний підхід до подолання труднощів, оскільки на практиці простори X та Y (так само як і норми в них) зазвичай визначаються умовами конкретної задачі. Враховуючи можливість невиконання умови єдиності (в умовах коректності за Адамаром), надалі будемо шукати наближення до точного розв'язку (1.1), що має мінімальну норму в просторі X. Такий розв'язок (див., наприклад, [27]) зазвичай називають нормальним розв'язком (1.1) і позначають символом $x^\dagger$.

Зауважимо, що одного тільки вибору конкретного розв'язку недостатньо для встановлення теоретичних оцінок точності побудованих наближень. Для отримання таких оцінок також необхідна деяка додаткова інформація про властивості гладкості шуканого розв'язку. Тому зазвичай припускається, що розв'язок $x^\dagger$ задовольняє деякій умові джерела. Загальна умова джерела має вигляд

$$x^\dagger \in M_\rho(A) := \{u : \quad u = \varphi(A^*A)v, \quad \|v\| \le \rho\},$$

де A^* – оператор, спряжений до A, а індексна функція φ є монотонно зростаюча і така, що $\varphi(0) = 0$. При цьому φ може припускатися як відомою, так і невідомою. Найбільш досліджуваною на сьогодні є умова джерела гельдерівського типу. Тут φ є степенева функція $\varphi(\lambda) = \lambda^p$, де $p > 0$ – параметр, що характеризує гладкість розв'язку. У цьому випадку

$$x^\dagger \in M_{p,\rho}(A) := \{u : \quad u = (A^*A)^p v, \quad \|v\| \le \rho\}. \tag{1.2}$$

Задачі (1.1), розв'язки яких задовольняють умову (1.2), називаються помірно некоректними.

Інший, не менш поширений, тип гладкості розв'язків характеризується умовою джерела логарифмічного типу. У цьому випадку маємо

$$x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A) := \{u : \quad u = (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \quad \|v\| \leq \rho\}. \tag{1.3}$$

Задачі (1.1) з розв'язками із (1.3) називаються жорстко некоректними. Саме дослідженню жорстко некоректних задач присвячена дана дисертація.

Далі наведемо деякі конкретні приклади жорстко некоректних задач, що зустрічаються на практиці.

Приклад 1.1. *Обернена задача у градієнтометрії супутника.*

Нехай функція u задовольняє рівняння Лапласа

$$\triangle u = 0$$

в області $\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \colon |x| \geq 1\}$. Зауважимо, що у разі $m = 2$ функція u описує гравітаційний потенціал Землі в сферичній системі координат. При цьому радіус Землі нормований до 1. Поведінка u на нескінченності характеризується умовою

$$|u(x)| = O(|x|^{1-m}), \qquad |x| \to \infty.$$

Наша мета – визначити потенціал

$$f = u|_{S^m},$$

що заданий на поверхні Землі $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \colon |x| = 1\}$ за вимірюваннями, отриманими зі супутника

$$g = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{RS^m} \qquad (r = |x|),$$

що задаються на поверхні орбіти супутника $RS^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \colon |x| = R\}, \quad R > 1$, де $-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ – швидкість зміни гравітаційної сили.

Нехай v – розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа з граничними умовами f. При $r = |x|$ та $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ функцію v можна представити за допомогою формули Пуассона у вигляді

$$v(r\hat{x}) = v(\hat{x}, r) = \frac{1-r^2}{\gamma_m} \int_{S^m} \frac{f(\hat{y})\, ds(\hat{y})}{|r\hat{x} - \hat{y}|^{m+1}},$$

де $\gamma_m = \frac{2\pi^{(m+1)/2}}{\Gamma((m+1)/2)}$ – площа поверхні S^m, а $\Gamma(n)$ – Гамма функція. Далі, скориставшись формулою

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m+1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^m},$$

отримуємо

$$u(\hat{x}, r) = r^{1-m} v(\hat{x}, \frac{1}{r}).$$

Таким чином, задачу, що розглядається, можна подати як інтегральне рівняння першого роду (1.1) з оператором $A = A_{SG} \colon L^2(S^m) \to L^2(S^m)$, який має вигляд

$$(A_{SG}f)(\hat{x}) = \frac{c}{\gamma_m} \int_{S_m} \frac{\partial^2}{\partial R^2}\{R^{1-m}\frac{1-R^{-2}}{|R^{-1}\hat{x} - \hat{y}|^{m+1}}\} f(\hat{y})\, ds(\hat{y}), \tag{1.4}$$

де c – деяка стала, що обирається таким чином, щоб обмежити норму $\|A^*_{SG}A_{SG}\| = \|A_{SG}\|^2 \leq \exp(-1)$.

Варто зауважити, що в теорії градієнтометрії супутника зазвичай припускають, що точний розв'язок задачі (1.1) з оператором (1.4) є елементом сферичного простору Соболєва

$$\mathcal{H}_p(S_m) = \{f \in L_2(S_m) \colon \|f\|_p^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2l+1} (l+1)^{2p} |(\Psi_{l,k}, f)|^2 < \infty\}.$$

З іншого боку, оскільки для сингулярних значень $\{\sigma_l\}$ оператора (1.4) виконується

$$\ln \sigma_l^{-2} \asymp (l+1),$$

то знайдуться додатні константи $c_2 \geq c_1 > 0$ такі, що для кожного елемента f соболєвського простору $\mathcal{H}_p$ має місце двостороння оцінка

$$c_1\|f\|_p \leq \|\ln^p(A^*A)^{-1}f\| \leq c_2\|f\|_p.$$

А це в свою чергу означає, що кожен елемент з $\mathcal{H}_p$ належить множині (1.3) при $K = 1$.

Приклад 1.2. *Обернена задача у дифракційній оптиці.*

Розглянемо двовимірну модель процесу розсіювання ідеальної відбиваючої періодичної поверхні. Згідно роботам Ж.Бао [19], Хеттліха і Кірша [33] цю проблему можна сформулювати наступним чином. Нехай $f \in C^2(\mathbb{R})$ – 2π-періодична функція, причому $f(x) < 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. І нехай

$$\Omega_f = \{(x, y) : y > f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Через

$$\partial\Omega_f = \{(x, y) : y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

позначимо періодичну поверхню, яку необхідно визначити за даними розсіювання. Для цього введемо у розгляд поле відбиття $u^I(x, y; k)$, яке утворює гармонічну у часі плоску електромагнітну хвилю, що визначається формулою

$$u^I(x, y; k) = \exp\{ik(x \sin\theta - y \cos\theta)\}. \tag{1.5}$$

Тут $i = \sqrt{-1}$, а константа $k \in \mathbb{R}$ – індекс розсіювання речовини, що наповнює Ω_f, й визначається формулою $k = \omega c_0^{-1}\sqrt{\varepsilon\mu}$, де ω - кутова частота, c_0 - швидкість світла, $\mu > 0$ - магнітна проникність, а ε - діелектрична стала. Через θ в (1.5) позначено кут відбиття.

Припустимо, що $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$, $0 < k < \frac{1}{2\pi}$. Тоді результуюче поле розсіювання $u^S(x, y; k)$ задовольняє рівняння Гельмгольца з граничною умовою ідеального відбиття:

$$\Delta u^S + k^2 u^S = 0 \text{ в } \Omega_f, \tag{1.6}$$

$$u^S + u^I = 0 \text{ на } \partial\Omega_f, \tag{1.7}$$

u^S задовольняє так звану умову вихідної хвилі

$$u^S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{i(\alpha_n x + \beta_n y)}, \text{ якщо } y > \|f\|_{C[0;2\pi]}. \tag{1.8}$$

У цьому прикладі функція u^S вважається комплекснозначною. Тут і надалі будемо вважати

$$\alpha_n = n + k\sin\theta, \quad \beta_n = \sqrt{k^2 - (n + k\sin\theta)^2}, \quad 0 \leq \arg\beta_n < \pi. \tag{1.9}$$

Крім того, на u^S накладемо умову $(k\sin\theta)$-квазіперіодичності:

$$u^S(x + 2\pi, y; k) = \exp(2\pi i k\sin\theta)u^S(x, y; k) \tag{1.10}$$

для усіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (див. [19]).

Тепер можна сформулювати обернену задачу.

Визначимо $y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$, за вимірюваннями $u^S(x, y; k), \quad x \in (0; 2\pi)$, де u^S задовольняє умови (1.6)-(1.8) й (1.10).

Врахувавши $(k\sin\theta)$-квазіперіодичність, покладемо

$$u = u(x, y; k) = u^I(x, y; k) + u^S(x, y; k).$$

Тоді (1.6)-(1.8) і (1.10) можна переписати у термінах загального поля u:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega_f, \tag{1.11}$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega_f, \tag{1.12}$$

$$u(x + 2\pi, y; k) = \exp(2\pi i k\sin\theta)u(x, y; k), \tag{1.13}$$

$$u - u^I \text{ задовольняє умову вихідної хвилі.} \tag{1.14}$$

Оскільки k зафіксовано таким чином, що виконується (1.9), то будемо писати $u(x, y)$ замість $u(x, y; k)$. Тоді наша обернена задача еквівалентна наступній задачі: необхідно визначити $y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$, за даними вимірювання $u(x, 0), \quad x \in (0; 2\pi)$, де u задовольняє (1.11)–(1.14).

Для фіксованих додатних констант M_0, M, k і a_0, a таких, що $0 < M \leq a_0 \leq a$ і $0 < k < 1$, покладемо

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{f \in C^{3+k}(\mathbb{R}) : \|f\|_{C^{3+k}[0;2\pi]} \leq M_0, \quad & f - 2\pi\text{-періодична}, \\ & \frac{d^j f}{dx^j}(0) = \frac{d^j f}{dx^j}(2\pi),\ j = 0, 1, 2, 3, \\ & f(0) = f(2\pi) = -a_0, \quad -a \leq f(x) \leq -M,\ 0 \leq x \leq 2\pi\} -\end{aligned}$$

припустима множина невідомих поверхонь.

Нехай

$$\|f\|_{C^{3+k}[0;2\pi]} := \sum_{j=0}^{3} \left\| \frac{d^j f}{dx^j} \right\|_{C[0;2\pi]} + \sup_{0<x,x'\le 2\pi, x\neq x'} \frac{|(\frac{d^3 f}{dx^3})(x) - (\frac{d^3 f}{dx^3})(x')|}{|x-x'|^k}.$$

Покладемо $\Omega_f = \{(x,y) : y > f(x), x \in \mathbb{R}\}$ для $f \in \mathcal{F}$. Для $f_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2,$ розглянемо

$$\Delta u_j + k^2 u_j = 0 \text{ в } \Omega_{f_j},$$

$$u_j = 0 \text{ на } \partial\Omega_{f_j},$$

u_j – $(k \sin\theta)$-квазіперіодична, тобто $u_j(x + 2\pi, y) = \exp(2\pi i k \sin\theta) u_j(x,y)$. Далі, будемо вважати, що $u_j - u^I$ задовольняє умову вихідної хвилі.

У теоремі 2.1 [33] встановлено, що в наведених вище умовах існує стала $c = c(k, \theta, \mathcal{F}) > 0$ така, що для всіх $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ має місце оцінка

$$\|f_1 - f_2\|_{C[0;2\pi]} \le \frac{c}{|\ln|\ln \frac{1}{\|(u_1-u_2)(\cdot,0)\|_{H^1(0;2\pi)}}||}.$$

Отже, розв'язок рівняння (1.6) належить множині (1.3) при $K = 2$ і $p = 1$.

Ще одним прикладом жорстко некоректної задачі, що представлена у вигляді (1.1), є рівняння Фуджити, яке зустрічається в теорії рівноваги осаду і описується наступним чином

$$Ax(t) := \int_0^1 a(t,\tau) x(\tau)\, d\tau = f(t),$$

де $a(t,\tau) = \frac{c\tau e^{-ct\tau}}{1-e^{-c\tau}}$, а $c > 0$ – деяка стала.

1.2. Стійкі методи розв'язування лінійних некоректних задач

У цьому параграфі будуть наведені означення стійкості методів (регуляризаторів) розв'язування некоректних задач, а також розглянуто деякі конкретні приклади таких методів.

Як відомо, в основі сучасної теорії некоректно поставлених задач лежить поняття регуляризуючого алгоритму (регуляризуючої сім'ї операторів), яке було введено у 1963 році А.М. Тіхоновим. Коротко кажучи, регуляризуюча сім'я $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ складається з операторів R_α, кожен з яких дозволяє побудувати наближений розв'язок $x_\alpha = R_\alpha f$ рівняння (1.1), що прямує до точного розв'язку при $\alpha \to +0$, забезпечуючи тим самим стійкість наближення. Такий підхід дозволяє знайти розв'язок з досить високою точністю для широкого кола некоректних задач, тоді як традиційні чисельні методи, що не враховують особливості некоректних задач, дають, взагалі кажучи, нестійкі результати.

Далі перейдемо до більш строгих означень. Як і раніше, розглянемо лінійне операторне рівняння (1.1)

$$Ax = f,$$

де $A : X \to Y$ – лінійний компактний оператор, що діє між гільбертовими просторами X та Y, при цьому множина $\mathrm{Range}(A)$ незамкнена в Y. Також будемо припускати, що замість правої частини f відомо деяке її збурення $f_\delta \colon \|f - f_\delta\| \le \delta, \quad \delta > 0$.

Означення 1.1. Сім'я обмежених операторів $R_\alpha : Y \to X$ називається методом регуляризації (регуляризатором) задачі (1.1), якщо для кожного $f \in \mathrm{Range}(A)$ виконується

$$\sup_{f_\delta \colon \|f - f_\delta\| \le \delta} \ \inf_{x \in A^{-1} f} \|R_\alpha f_\delta - x\| \to 0 \tag{1.15}$$

при $\alpha \to 0$, де $\alpha = \alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тут $A^{-1}f$ – повний прообраз елемента f.

Якщо α залежить лише від рівня похибки δ і не залежить від f_δ, то правило вибору α називається апріорним. В іншому випадку – апостеріорним вибором параметра регуляризації.

Більш ретельний аналіз некоректних задач вимагає врахування збурень також і в операторі A, які виникають, зокрема, через неточності математичної моделі явищ, що описуються, та (або) в результаті похибки дискретизації на стадії підготовки до чисельного розв'язування задачі. Отже, візьмемо рівняння (1.1) і будемо припускати, що замість A відоме деяке його збурення $A_h\colon \|A - A_h\| \le h, \quad h > 0$. При цьому A_h – також лінійний оператор, що діє між гільбертовими просторами X та Y, інакше кажучи, у нашому розпорядженні є збурене рівняння

$$A_h x = f_\delta. \tag{1.16}$$

У цьому випадку більш зручним є

Означення 1.2. Регуляризатором задачі (1.1),(1.16) називається сім'я операторів $R_\alpha = R_\alpha(A_h)\colon (Y \times [X \to Y]) \to X \quad (\delta > 0,\, h > 0)$ таких, що для кожних $A_h \in \mathcal{L}(X, Y)$ та $f \in \mathrm{Range}(A)$ виконується

$$\sup_{A_h\colon \|A - A_h\| \le h} \; \sup_{f_\delta\colon \|f - f_\delta\| \le \delta} \; \inf_{x \in A^{-1}f} \; \|R_\alpha(A_h) f_\delta - x\| \to 0 \tag{1.17}$$

при $\alpha \to 0$, де $\alpha = \alpha(\delta, h) \to 0$ при $\delta, h \to 0$.

Далі розглянемо такі важливі поняття теорії некоректних задач, як оптимальність і оптимальність за порядком наближених методів розв'язування.

Точність метода $\mathcal{P}$ на множині $M \subset X$ характеризується його найбільшим відхиленням

$$\varepsilon(\delta, M, \mathcal{P}) := \sup_{x \in M} \; \sup_{f_\delta\colon \|f - f_\delta\| \le \delta} \|x - \mathcal{P} f_\delta\|.$$

Метод $\mathcal{P}_\delta : Y \to X$ називається оптимальним (за точністю) на M, якщо

$$\varepsilon(\delta, M, \mathcal{P}_\delta) = \inf_{\mathcal{P}} \; \varepsilon(\delta, M, \mathcal{P}),$$

й оптимальним за порядком на M, якщо

$$\varepsilon(\delta, M, \mathcal{P}_\delta) \le C \quad \inf_{\mathcal{P}} \ \varepsilon(\delta, M, \mathcal{P}),$$

де $0 < \delta < \delta_0$, а $C \ge 1$ – деяка стала. Тут під методом розв'язування задачі (1.1) будемо розуміти будь-яке відображення $\mathcal{P}\colon Y \to X$, що зіставляє правій частині $f_\delta \in Y$ елемент $\mathcal{P} f_\delta \in X$, який приймається за наближений розв'язок рівняння. Від $\mathcal{P}$ не вимагається ані лінійності, ані неперервності. Настільки загальне розуміння методу корисно тоді, коли йдеться про порівняння точності усіх можливих методів розв'язування (1.1).

Відомо (див., наприклад, [3, с.14],[63]), що для помірно некоректних задач з розв'язками (1.2) оптимальний порядок точності складає $O\left(\delta^{p/p+1}\right)$, а у разі жорстко некоректних задач з розв'язками (1.3) – $O\left((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\tfrac{1}{\delta})^{-p}\right)$.

Наслідуючи А.Б. Бакушинського [1], будемо розглядати такі оператори регуляризації, які можна подати у вигляді

$$R_\alpha := g_\alpha(A^* A) A^* \tag{1.18}$$

за допомоги твірної функції g_α, що задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^\mu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \varkappa_\mu \alpha^\mu, \tag{1.19}$$

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \varkappa_* \alpha^{-1/2} \tag{1.20}$$

при деяких додатних сталих $\varkappa_\mu, \varkappa_*$ та параметрі $0 \le \mu \le \mu_*$. Величину μ_* при цьому називають кваліфікацією методу R_α.

У межах будь-якого методу (1.18) під наближенням до нормального розв'язку $x^\dagger$ розуміється елемент x_α^δ, який знаходиться за правилом

$$x_\alpha^\delta = g_\alpha(A^* A) A^* f_\delta.$$

Встановлено (див., наприклад, [7]), що виконання умов (1.19)–(1.20) забезпечує регуляризуючим методам оптимальний порядок наближення до нормального розв'язку $x^\dagger$ на класах помірно та жорстко некоректних задач. Далі наведемо приклади методів регуляризації з описуваного класу.

Приклад 1.3. *Метод Лаврентьєва (1957)*

Перший метод регуляризації був запропонований і обґрунтований М.М. Лаврентьєвим спершу для наближеного розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа (класичний приклад некоректної задачі) і полягає в заміні оператора вихідної задачі на близький до нього і такий, що перетворена в такий спосіб задача стає коректною за Адамаром. Для довільних операторних рівнянь (зі самоспряженим і невід'ємним оператором) першого роду цей метод був сформульований ним у 1959 році.

Отже, метод Лаврентьєва полягає в переході від рівнянь (1.1), (1.16), де $A = A^* \geq 0, \quad A_h = A_h^* \geq 0$, до регуляризованого рівняння 2-го роду

$$\alpha x_\alpha + A_h x_\alpha = f_\delta$$

з малим додатнім параметром α. Твірна функція цього методу має вигляд

$$g_\alpha = (\alpha + \lambda)^{-1}, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

Кваліфікація методу Лаврентьєва дорівнює $\mu_* = 1$.

Приклад 1.4. *Метод Тіхонова (1963)*

Метод Тіхонова належить до варіаційних методів, іншими словами, знаходження наближеного розв'язку за цим методом пов'язане з розв'язанням екстремальної задачі

$$\|A_h x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

і полягає у переході від рівнянь (1.1), (1.16) до регуляризованого рівняння 2-го роду

$$\alpha x + A_h^* A_h x = A_h^* f_\delta. \tag{1.21}$$

Цей метод має вигляд (1.18) з твірною функцією

$$g_\alpha = (\alpha + \lambda)^{-1}$$

та параметрами $\varkappa_* = 1/2$, $\varkappa_\mu = \mu^\mu(1-\mu)^{1-\mu}$. Кваліфікація метода Тіхонова $\mu_* = 1$.

Зауважимо, що на відміну від методу Лаврентьєва метод (1.21) не потребує ані самоспряженості, ані позитивності оператора вхідної задачі.

Приклад 1.5. *Ітерований варіант методу Тіхонова*

Задамо натуральне число $m \geq 1$ і покладемо $x_0 = 0$, послідовно знаходимо елементи $x_1, x_2, \ldots x_m$ як розв'язки рівнянь

$$\alpha x_l + A_h^* A_h x_l = \alpha x_{l-1} + A_h^* f_\delta, \quad l = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.22}$$

де $\alpha > 0$ – деякий додатній параметр. За наближений розв'язок рівняння (1.1) приймається елемент x_m. Для метода (1.22) твірна система функцій має вигляд

$$g_{m,\alpha}(\lambda) = \lambda^{-1}\left(1 - (1+\alpha^{-1}\lambda)^{-m}\right), \quad \lambda \neq 0,$$

і задовольняє умови (1.19) – (1.20) при $\varkappa_* = m^{1/2}$, $\varkappa_\mu = (\frac{\mu}{m})^\mu(1-\frac{\mu}{m})^{m-\mu}$. Кваліфікація цього методу $\mu_* = m$. Очевидно, при $m = 1$ ми приходимо до методу Тіхонова (1.21).

На закінчення цього параграфа наведемо ще один приклад сім'ї методів регуляризації, що належать до напівітеративних методів.

Приклад 1.6. *ν–методи*

Розглянемо сім'ю напівітеративних методів регуляризації, що прийнято називати ν–методами. Вперше ν–методи були введені у розгляд Г. Бракхаге у 1987 р. для знаходження оцінок методу спряжених градієнтів [22]. Пізніше ν–методи почали використовуватися як самостійні методи регуляризації. При цьому варто відзначити, що (1/2)–метод розглядався трохи раніше (у 1984 р.) А.С. Неміровським та Б.Т. Поляком [46]. Цей варіант ν–методу прийнято називати в спеціальній літературі методом Чебишова.

Наведемо строге означення ν–методів. Зауважимо, що такі методи легко реалізуються на практиці за допомогою рекурсивної процедури. А саме, послідовні наближення обчислюються наступним чином

$$x_k^\delta = x_{k-1}^\delta + \sigma_k(x_{k-1}^\delta - x_{k-2}^\delta) + \theta_k A^*(f_\delta - Ax_{k-1}^\delta),$$

де $\sigma_1 = 0$, $\theta_1 = (4\nu+2)/(4\nu+1)$, а

$$\sigma_k = \frac{(k-1)(2k-3)(2k+2\nu-1)}{(k+2\nu-1)(2k+4\nu-1)(2k+2\nu-3)},$$
$$\theta_k = 4\,\frac{(2k+2\nu-1)(k+\nu-1)}{(k+2\nu-1)(2k+4\nu-1)(2k+2\nu-3)}, \qquad k > 1.$$

Цей метод вигляду (1.18) з твірною функцією

$$g_k(\lambda) = P_k^{(2\nu-1/2,-1/2)}(1-2\lambda)/P_k^{(2\nu-1/2,-1/2)}(1), \qquad \nu > 0.$$

Тут $P_k^{(\alpha,\beta)}$ – поліноми Якобі. Кваліфікація ν–методів дорівнює $\mu_* = \nu$.

РОЗДІЛ 2
ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКО НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

Даний розділ присвячений проблемам побудови стійких наближень, що забезпечують оптимальний порядок точності на широких класах жорстко некоректних задач. Отже, розглянемо операторне рівняння I роду

$$Ax = f, \tag{2.1}$$

де $A : X \to Y$ – лінійний компактний оператор, що діє між гільбертовими просторами X та Y, при цьому множина $\mathrm{Range}(A)$ незамкнена в Y. Також, будемо припускати, що замість правої частини f відомо лише деяке її збурення $f_\delta \in Y$, $\|f - f_\delta\| \le \delta, \delta > 0$, а замість A – оператор $A_h : \|A - A_h\| \le h$, де $A_h : X \to Y$ – також лінійний компактний оператор.

Нагадаємо, що жорстко некоректні задачі мають таку особливість, що точний розв'язок рівняння (2.1) задовольняє деяку умову джерела логарифмічного типу. Метою наших найближчих досліджень є наближене відшукання розв'язку $x^\dagger$ (2.1), який має мінімальну норму в X та належить множині

$$M^K_{p,\rho}(A) := \{x : x = (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p} v, \quad \|v\| \le \rho\} \tag{2.2}$$

при деяких відомих параметрах $\rho > 0$, $\quad K = 1, 2, \ldots$ й невідомому значенні $p > 0$, де операторна функція $(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}$ задається спектральним розкладом оператора

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (\Psi_k, \cdot) \Psi_k$$

наступним чином

$$(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p} v = \sum_{l=1}^{\infty} (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}}(\sigma_l^{-2}))^{-p} (\Psi_l, v) \Psi_l.$$

При цьому цілком природньо припускати, що

$$\|A\| \le M_K, \quad M_K = m_K^{1/2}, \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k=1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k=2,\dots,K \end{cases},$$

тобто

$$\sigma_l \le M_K, \quad l = 1, 2, \dots\ .$$

2.1. Принцип рівноваги

Питання про неявний (апостеріорний) вибір параметра регуляризації за відсутності точних даних про гладкість розв'язку традиційно вважається одним з ключових в теорії регуляризації. Вперше апостеріорне правило вибору параметра регуляризації було описано в роботі Д.Л. Філліпса [50]. На сьогодні в теорії регуляризації відома велика кількість різних методів апостеріорного вибору параметра, серед яких, в першу чергу, слід назвати принцип нев'язки (див. [50, 44, 39, 56]), метод Гфререра (див. [30, 25, 54]), який деколи називають методом мінімальних границь [37], правило монотонної похибки, що було запропоноване У. Таутенханом та У. Хямаріком (див. [64]), і принцип рівноваги, який також називають принципом Лепського (див. [35, 41, 47, 53, 40]). Безумовно, найбільш досліджуваним на сьогоднішній день правилом апостеріорного вибору є принцип нев'язки. Зауважимо, що метод мінімальних границь та правило монотонної похибки були розроблені для некоректних задач виключно в гільбертових просторах, в той час як принцип нев'язки застосовний і до задач у банахових просторах (див., наприклад, [51]). До того ж недоліком методу мінімальних границь і правила монотонної похибки можна вважати те, що для їх реалізації потрібен додатковий наближений розв'язок, який необхідно попередньо знайти за допомогою методу регуляризації більш високої кваліфікації. У цьому параграфі буде детально розглянуто один з названих вище апостеріорних методів, а саме, принцип рівноваги. Щодо історії питання, зауважимо, що вперше цей метод був застосований О.В. Лепським в задачах статистики (див. [35]), далі для лінійних некоректних задач цей принцип був реалізований в роботі [41], а для нелінійних операторних рівнянь – у роботі [20].

Тепер перейдемо до опису принципу рівноваги, що застосовується безпосередньо до некоректних задач. Нехай $\mathcal{R}_\alpha$ – деякий регуляризуючий оператор (сюди входять, зокрема, методи з описаного у першому розділі класу регуляризаторів за Бакушинським). Зазвичай, похибка методу регуляризації для задач (2.1) зі збуреною правою частиною задається у вигляді

$$\|x^\dagger - \mathcal{R}_\alpha f_\delta\| \leq \|x^\dagger - \mathcal{R}_\alpha f\| + \|\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\alpha f_\delta\|, \tag{2.3}$$

де перший доданок у правій частині (2.3) є точністю методу регуляризації, в той час як другий характеризує стійкість методу регуляризації. Будемо вважати, що шуканий розв'язок має вигляд $x^\dagger = \varphi(A^*A)v, \quad \|v\| \leq \rho$, де функція $\varphi(\alpha)$ є неперервно зростаючою й такою, що $0 = \varphi(0) \leq \varphi(\alpha) \leq 1$, та

$$\|x^\dagger - \mathcal{R}_\alpha f\| \leq \varphi(\alpha). \tag{2.4}$$

Другий доданок у правій частині (2.3) можна оцінити наступним чином

$$\|\mathcal{R}_\alpha f - \mathcal{R}_\alpha f_\delta\| \leq \frac{\delta}{\lambda(\alpha)}, \tag{2.5}$$

де $\lambda(\alpha) = \|\mathcal{R}_\alpha\|$, якщо задача (2.1) – лінійна, або $\lambda(\alpha) = \|\mathcal{R}'_\alpha\|$ у нелінійному випадку. (Тут $\mathcal{R}'_\alpha$ позначає похідну за Фреше оператора $\mathcal{R}_\alpha$.) Відзначимо, що для стандартних методів регуляризації таких, як метод Тіхонова, Лаврентьєва та ін., виконується $\lambda(\alpha) = \gamma\sqrt{\alpha}$, де γ – деяка відома константа. Таким чином, скориставшись (2.4) і (2.5), співвідношення (2.3) можна записати у вигляді

$$\|x^\dagger - \mathcal{R}_\alpha f_\delta\| \leq \varphi(\alpha) + \frac{\delta}{\lambda(\alpha)}. \tag{2.6}$$

Практично всі відомі результати про точність методів регуляризації є асимптотичними при $\delta \to 0$. Ці результати показують, що вибір

$$\alpha = \hat{\alpha} := (\varphi\lambda)^{-1}(\delta), \tag{2.7}$$

який врівноважує дві функції $\varphi(\alpha)$ й $\frac{\delta}{\lambda(\alpha)}$, приводить до оцінки похибки

$$\|x^{\dagger} - \mathcal{R}_{\alpha} f_{\delta}\| \le 2\varphi\left((\varphi\lambda)^{-1}(\delta)\right),$$

що є оптимальною відносно δ.

На жаль, апріорний вибір параметра регуляризації (2.7), взагалі кажучи, не завжди можливий, оскільки гладкість шуканого розв'язку $x^{\dagger}$ визначається функцією φ, яка, зазвичай, невідома.

На практиці для вибору параметра α потрібні такі правила, які не вимагають додаткових знань про гладкість розв'язку. Наприклад, різні значення параметра регуляризації α_i можуть вибиратися з деякої скінченної множини

$$\Delta_N = \{\alpha_i : \quad 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N\}. \tag{2.8}$$

Тоді відповідні регуляризовані розв'язки матимуть вигляд

$$x_{\alpha_i}^{\delta} = \mathcal{R}_{\alpha_i} f_{\delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Згідно подання

$$\hat{\alpha}: \qquad \varphi(\hat{\alpha}) = \frac{\delta}{\lambda(\hat{\alpha})}$$

оптимальним вибором значення $\alpha_i \in \Delta_N$ буде

$$\alpha_* = \alpha_l = \max\{\alpha_i : \quad \alpha_i \in M(\Delta_N)\},$$

де $M(\Delta_N) := \{\alpha_i : \quad \alpha_i \in \Delta_N, \quad \varphi(\alpha_i) = \frac{\delta}{\lambda(\alpha_i)}\}$. Тут варто відзначити, що у разі невідомого φ такий вибір параметра регуляризації також неможливий. В той же час, для будь-яких $\alpha_i, \alpha_j : \quad \alpha_i \ge \alpha_j$, що належать множині $M(\Delta_N)$, оцінка норми $\|x_{\alpha_i}^{\delta} - x_{\alpha_j}^{\delta}\|$ не потребує ніякої інформації про φ. Неважко впевнитися (див. [41]), що

$$\|x_{\alpha_i}^{\delta} - x_{\alpha_j}^{\delta}\| \le \frac{4\delta}{\lambda(\alpha_j)}.$$

А це, в свою чергу, призводить до того, що верхня границя множини

$$M^+(\Delta_N) := \{\alpha_i \in \Delta_N : \quad \|x^\delta_{\alpha_i} - x^\delta_{\alpha_j}\| \le \frac{4\delta}{\lambda(\alpha_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, i\} \tag{2.9}$$

буде достатньо близькою до шуканого значення α_*. Таким чином, можна покласти

$$\alpha_+ = \max\{\alpha_i : \quad \alpha_i \in M^+(\Delta_N)\}. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що за множину Δ_N можна розглядати геометричну сітку

$$\Delta_N = \{\alpha_i : \quad \alpha_i = \mu^i \alpha_0, \quad i = 0, 1, \cdots, N\},$$

де $\mu > 1$.

Слід зазначити, що вперше за множину можливих значень параметра регуляризації геометрична сітка була задіяна в роботах А.М. Тіхонова і В.Б. Гласко (див. [65, 66]), а метод вибору параметра $\alpha_m = \mu^m \alpha_0$ з такої сітки отримав назву квазіоптимального критерію.

Далі опишемо принцип рівноваги, що застосовується безпосередньо до нашої задачі. Як вже зазначалося раніше (див. (2.6)), оцінка похибки методу регуляризації задачі (2.1) зі збуреними вхідними даними має вигляд

$$\|x^\dagger - \mathcal{R}_\alpha f_\delta\| \le \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha), \tag{2.11}$$

де функція $\Phi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ – монотонно зростаюча по α, а $\Psi(\alpha) = \frac{\delta}{\lambda(\alpha)}$ – монотонно спадна.

Нагадаємо, що принцип рівноваги полягає у виборі значення параметра регуляризації α таким чином, щоб врівноважити дві функції, які задають оцінку похибки (2.11). Враховуючи поведінку функцій Φ та Ψ (а саме, їх монотонність та угнутість), вибір значення параметра регуляризації $\alpha = \widehat{\alpha}$, який теоретично мінімізує праву частину оцінки похибки, буде врівноважувати величини $\Phi(\alpha)$ та $\Psi(\alpha)$, тобто

$$\Phi(\widehat{\alpha}) = \Psi(\widehat{\alpha}),$$

а у межах принципу рівноваги за параметр регуляризації, як зазначалось раніше, береться елемент

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}. \tag{2.12}$$

Поведінка функцій $\Phi(\alpha)$ та $\Psi(\alpha)$, а також вибір $\widehat{\alpha}$, α_+ і α_* схематично зображені на рисунку 2.1.

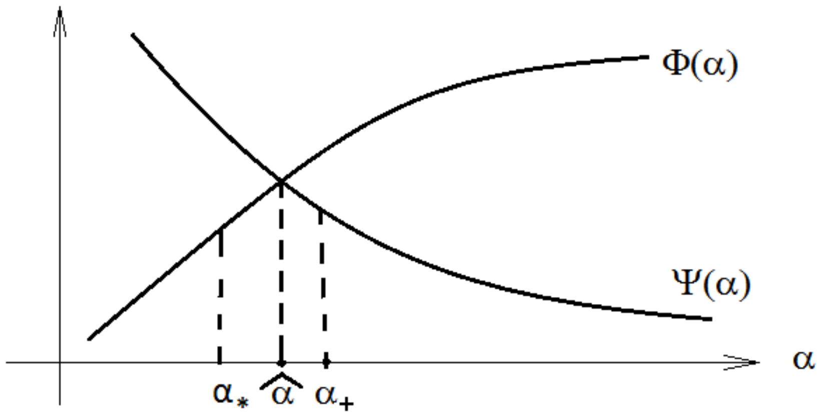

рис. 2.1

При цьому варто зазначити (див., наприклад, [47]), що принцип рівноваги дозволяє вибрати значення α_+ досить близьким до теоретично найкращого $\widehat{\alpha}$ таким чином, щоб гарантувати оптимальний порядок точності розв'язування рівняння (2.1) з $x^\dagger = \varphi(A^*A)v, \quad \|v\| \le \rho$, де φ – невідома функція.

Нижче наведемо детальний опис роботи принципу рівноваги на конкретному прикладі.

Приклад 2.1. *Обернена задача реконструкції профілю в дифракційній оптиці.*

Нехай профіль дифракційної решітки в двовимірному просторі характеризується кривою $\Lambda_f := \{(x_1, f(x_1)) \colon x_1 \in \mathbb{R}\}$, де $f - 2\pi$–періодична функція, і нехай $\Omega_f := \{x = (x_1, x_2) \colon x_2 > f(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}\}$ – поле з показником заломлення речовини k, де k – деяке додатне число.

Припустимо, що плоска хвиля, яка задається у вигляді $u^{in}(x) = \exp(i\alpha x_1 - i\beta x_2)$, падає зверху на Λ_f. Тут $\alpha = k\sin\theta, \quad \beta = k\cos\theta$, а $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – кут падіння. Тоді процес розсіювання такої хвилі через Λ_f

описується задачею Діріхле для рівняння Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u = 0 \qquad & \text{в} \quad \Omega_f, \\ u = -u^{in} \qquad & \text{на} \quad \Lambda_f. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Тут припускається, що поле розсіювання u задовольняє деякій умові випромінювання, інакше кажучи, u складається з обмежених плоских хвиль

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \exp[i(n+\alpha)x_1 + i\beta_n x_2], \tag{2.14}$$

де $\beta_n = \sqrt{k^2 - (n+\alpha)^2} \in \mathbb{C}$, $A_n \in \mathbb{C}$ – коефіцієнти Релея. Щоб уникнути резонансу, будемо вважати, що $\beta_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Обернена задача реконструкції профілю полягає у відновленні функції f, що визначає профіль, за проекцією $u_b(x) = u(x, b)$ поля розсіювання $u(x_1, x_2)$ на пряму $x_2 = b$ для заданих падаючих хвиль u^{in}. Без втрати загальності можна вважати, що невідомий профіль Λ_f розташований між прямими $x_2 = b_0$ і $x_2 = b$, тобто

$$b_0 < f(x_1) < b, \qquad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Подамо поле розсіювання у вигляді потенціалу простого шару

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{2\pi} z(t) G(x_1, x_2, t, 0)\, dt$$

з невідомою функцією щільності $z \in L_2(0, 2\pi)$ і з просторовою квазіперіодичною функцією Гріна

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_n} \exp[i(n+\alpha)(x_1 - y_1) + i\beta_n(x_2 - y_2)].$$

Далі обернену задачу відновлення профілю можна звести до наступної системи інтегральних рівнянь

$$Tz(x_1) \ := \int_0^{2\pi} z(t) G(x_1, b, t, 0)\, dt = u_b(x_1), \tag{2.16}$$

$$S_f z(x_1) \ := \int_0^{2\pi} z(t) G(x_1, f(x_1), t, 0)\, dt = -u^{in} \circ f(x_1), \tag{2.17}$$

що є нелінійною відносно f. Тут $u^{in} \circ f(x_1) = \exp(in\alpha x_1 + i\beta f(x_1))$.

Варто зазначити, що в обчисленнях можна використовувати лише деякий скінченний вектор $\left(A_n^\delta\right)_{n\in U}$, який визначає "збурену проекцію" $u_b^\delta(x_1) = \sum_{n\in U} A_n^\delta \exp[i(n+\alpha)x_1 + i\beta_n b]$ таку, що

$$\|u_b - u_b^\delta\| \leq \delta, \tag{2.18}$$

де U – деяка обмежина множина, а $\|\cdot\|$ означає норму в комплексному гільбертовому просторі $L_2(0, 2\pi)$. Таким чином, замість рівняння (2.16) матимемо збурене рівняння $Tz = u_b^\delta$, а система (2.16)–(2.17) набуває вигляд

$$\begin{aligned} Tz &= u_b^\delta, \\ S_f z(x_1) &= -u^{in} \circ f(x_1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

З роботи [47] випливає, що досліджувану в цьому прикладі задачу доцільно розглядати в просторі

$$L_{2,\exp}^{-b_0+h} := \left\{ z \colon \|z\|^2_{L_{2,\exp}^{-b_0+h}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2 |e^{2i\beta_n}||\beta_n|^{-2} < \infty \right\}$$

де z_n – значення функціоналу $(z, e^{i(n+\alpha)})_{L_2(0,2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Крім того, в [47] була знайдена оцінка похибки системи (2.19):

$$\|z_0 - z_{m,\delta}\|_{L_{2,\exp}^{-b_0+h}} \leq \varphi(\frac{1}{m}) + \delta e^{|\beta_m|(b+h-b_0)}. \tag{2.20}$$

Нагадаємо, що наша мета полягає у мінімізації правої частини (2.20) за рахунок вибору параметра регуляризації m за принципом рівноваги. Оцінка (2.20) є оцінкою (2.6) при $\alpha = \frac{1}{m}$ та

$$\lambda(\alpha) = \exp[-\sqrt{|k^2 - (\alpha^{-1} + k\sin\theta)^2|}(b + h - b_0)].$$

Для таких α й λ множина Δ_M (2.8) набуває вигляд $\Delta_M = \{\alpha_i = \frac{1}{M-i+1}\}_{i=0}^M$, а критерій вибору за принципом рівноваги (2.10) можна записати наступним чином

$$m_+ = \min\{m \colon \|z_{m,\delta} - z_{n,\delta}\|_{L_{2,\exp}^{-b_0+h}} \leq 4\delta e^{|\beta_m|(b+h-b_0)}, \quad n = M+1, M, \ldots, m\}.$$

2.2. Допоміжні результати

Як зазначалось раніше, мета наших досліджень полягає в побудові оптимальних за точністю наближених розв'язків жорстко некоректних задач (2.1) зі збуреними вхідними даними, точні розв'язки яких задовольняють умову джерела вигляду (2.2).

Відзначимо, що при розв'язуванні жорстко некоректних задач, на відміну від помірно некоректних, щоб забезпечити оптимальний порядок точності на всій шкалі (по p) класів досліджуваних задач, досить використовувати регуляризатори простої структури, наприклад, стандартний (ординарний) метод Тіхонова або його ітерований варіант. Тому для розв'язування зазначених задач нами буде розглянуто два підходи, які полягають у комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно. При цьому буде показано, що обидві ці стратегії дозволяють досягти порядок точності $O((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на всій множині розв'язків (2.2). Далі буде проведено порівняльний аналіз цих двох підходів.

У цьому параграфа будуть наведені деякі означення та факти, а також встановлено низку тверджень допоміжного характеру, які знадобляться надалі.

Насамперед введемо у розгляд наступні елементи:

$$x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f, \tag{2.21}$$

$$x^h_{\alpha,n} = (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}f, \tag{2.22}$$

$$x^{h,\delta}_{\alpha,n} = (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}f_\delta, \tag{2.23}$$

$$x_{m,\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*A + \alpha I)^{-i}A^*f, \tag{2.24}$$

$$x^h_{m,\alpha,n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*_{h,n}A_{h,n} + \alpha I)^{-i}A^*_{h,n}f, \tag{2.25}$$

$$x_{m,\alpha,n}^{h,\delta} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A_{h,n}^* A_{h,n} + \alpha I)^{-i} A_{h,n}^* f_\delta. \qquad (2.26)$$

Тут $x_\alpha, x_{m,\alpha}$ – наближені розв'язки регулярізованих рівнянь (без збурення у вхідних даних) стандартним і ітерованим методами Тіхонова відповідно, $x_{\alpha,n}^h, x_{m,\alpha,n}^h$ – наближені розв'язки дискретизованих рівнянь (зі збуреним оператором) стандартним і ітерованим методами Тіхонова і, нарешті, $x_{\alpha,n}^{h,\delta}, x_{m,\alpha,n}^{h,\delta}$ – наближені розв'язки дискретизованих рівнянь (зі збуреним оператором і збуреною правою частиною) стандартним і ітерованим методами Тіхонова, відповідно. Оскільки для чисельної реалізації зазначених методів необхідно виконувати всі обчислення зі скінченним обсягом вхідних даних, то через $A_{h,n}$ позначимо деяке скінченновимірне наближення до A_h, таке що $\operatorname{rank}(A_{h,n}) = n$. При цьому будемо вважати скінченновимірне наближення $A_{h,n}$ обране таким чином, щоб виконувалась умова

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1} & , \quad 0 < h \le \delta \\ h & , \quad h > \delta \end{cases}. \qquad (2.27)$$

Раніше Т. Хоаге (див. [34, лема 3.13]) було доведено, що для всіх $p > 0$ при деякій величині $C_1 = C_1(p)$ виконується нерівність

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} \ln^{-p} \frac{1}{\lambda} \le C_1 \ln^{-p} \frac{1}{\alpha}, \qquad \alpha, \lambda \in (0; e^{-1}]. \qquad (2.28)$$

Насамперед уточнимо константу C_1 у нерівності (2.28). Отже, розглянемо два випадки.

1) Нехай $0 < \lambda \le \alpha$. Тоді згідно монотонності функції ln маємо

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} \ln^{-p} \frac{1}{\lambda} \le \ln^{-p} \frac{1}{\alpha}.$$

2) Нехай тепер $\lambda \ge \alpha$. Нагадаємо, що в цьому випадку нерівність (2.28) безпосередньо випливає з наступного результату (див. [34, лема 3.13]): якщо покласти $q := \frac{\alpha}{\lambda}$, то справджується

$$q \le C_1(-\ln q + 1)^{-p}, \quad 0 < q \le 1,$$

або

$$q(\ln\frac{1}{q}+1)^p \le C_1, \quad 0<q\le 1. \tag{2.29}$$

Отже, нам належить знайти найменшу константу C_1, для якої виконується нерівність (2.29). Для цього введемо допоміжну функцію

$$\vartheta(q) := q(\ln\frac{1}{q}+1)^p, \quad 0<q\le 1,$$

і обчислимо найбільше значення цієї функції на інтервалі $(0;1]$.

Спершу знайдемо критичні точки $\vartheta(q)$. Легко бачити, що

$$\vartheta^{'}(q) = (\ln\frac{1}{q}+1)^{p-1}[\ln\frac{1}{q}+1-p].$$

Очевидно, що $\vartheta^{'}(q)=0$ лише при $q=e^{1-p}$. І знову розглянемо два випадки.

a) $0<p\le 1$, тоді $q=e^{1-p}\notin(0;1]$. Очевидно $\vartheta^{'}(q)>0$ на всьому інтервалі $(0;1]$, а це означає, що функція $\vartheta(q)$ є монотонно зростаючою на $(0;1]$. Отже, своє найбільше значення вона досягає при $q=1$, тобто $\max\limits_{(0;1]} \vartheta(q)=\vartheta(1)=1$.

b) $p\ge 1$. У цьому випадку $q=e^{1-p}\in(0;1]$. Для встановлення найбільшого значення функції $\vartheta(q)$ на $(0;1]$ ми маємо обчислити значення цієї функції у критичній точці, а також на кінцях інтервалу. Через те що функція $\vartheta(q)$ не визначена в нулі, знайдемо її граничне значення при $q\to 0$. Оскільки $p\ge 1$, то число p можна подати у вигляді $p=k+\gamma$, де $k\in\mathbb{N}, \quad 0\le\gamma<1$, і застосувавши до обчислення границі $\lim\limits_{q\to 0} f(q)$ k разів правило Лопіталя, знаходимо

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0} f(q) \quad &= \quad p(p-1)...(p-k+1)\lim_{q\to 0}\frac{(\ln\frac{1}{q}+1)^{\gamma}}{\frac{1}{q}} = \\ = \ldots = \ &\ p(p-1)...(p-k)\lim_{q\to 0}\frac{(\ln\frac{1}{q}+1)^{\gamma-1} \quad q(-\frac{1}{q^2})}{-\frac{1}{q^2}} = 0.\end{aligned}$$

Крім того, $\vartheta(1)=1$ і $\vartheta(e^{1-p})=e^{1-p}p^p$. Безпосереднє порівняння знайдених значень дозволяє переконатися в тому, що при будь-якому $p\ge 1$

$$\max_{(0;1]} \vartheta(q)=\vartheta(e^{1-p})=e^{1-p}p^p.$$

Таким чином, об'єднавши знайдені вище оцінки, отримуємо, що у співвідношенні (2.28) C_1 набуває вигляду

$$C_1 = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < p \leq 1 \\ e\left(\frac{p}{e}\right)^p & , \quad p \geq 1 \end{cases}. \tag{2.30}$$

Обчислена вище константа $C_1(p)$ буде неодноразово задіяна в наших подальших твердженнях. До того ж, тепер ми можемо уточнити один відомий результат Т. Хоаге, що знадобиться в наших подальших міркуваннях. А саме, сформулюємо пропозицію 3.12 [34] у прийнятих тут позначеннях:
Нехай $x^\dagger \in M^1_{p,\rho}(A)$. Тоді має місце нерівність

$$\|x^\dagger - x_\alpha\| \leq C_1 \rho \ln^{-p}\frac{1}{\alpha}, \tag{2.31}$$

де $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f$ (див. (2.21)) і C_1 задовольняє співвідношення (2.30).

Тепер узагальнимо цей результат на випадок довільного $K \in \mathbb{N}$.

Лема 2.1. *Нехай*

$$\|A\| \leq M_K, \qquad M_K = m_K^{1/2}, \qquad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, ..., K \end{cases}$$

і $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $\;p > 0$, $\;K = 1, 2, \ldots$. Тоді має місце наступна оцінка

$$\|x^\dagger - x_\alpha\| \leq C_1 \rho ((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p}, \tag{2.32}$$

де $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f$ (див. (2.21)), а константа C_1 задовольняє співвідношення (2.30).

Доведення. Насамперед оцінимо норму відхилення

$$
\begin{aligned}
&\|x^\dagger - x_\alpha\| = \\
&= \|((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v - (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*A((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v\| \leq \\
&\leq \rho \sup_{0<\lambda\leq m_k} \left|(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} - \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}\right| = \\
&= \rho \sup_{0<\lambda\leq m_k} \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Далі оцінимо вираз, що знаходиться під знаком супремуму:

$$
\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \geq 0. \tag{2.34}
$$

Нехай спершу $0 < \lambda \leq \alpha$. Очевидно, що функція $(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}$ є монотонно зростаючою по λ. Тоді з того, що $\lambda \leq \alpha$, випливає

$$
(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \leq (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}.
$$

Отже, отримаємо

$$
\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \leq (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}.
$$

Нехай тепер $0 < \alpha \leq \lambda \leq m_k$. Тут в свою чергу також розглянемо два випадки.

а) $0 < p \leq 1$. Вираз (2.34) перетворимо наступним чином

$$
\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha+\lambda}\hat{h}(\lambda),
$$

де

$$
\hat{h}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}, \quad \lambda \in (0; m_k].
$$

Легко бачити, що

$$
\hat{h}'(\lambda) = \frac{(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p-1}}{\lambda^2\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K-1\text{ раз}}\frac{1}{\lambda}\cdots\ln\frac{1}{\lambda}}\left[p - \underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda}\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K-1\text{ раз}}\frac{1}{\lambda}\cdots\ln\frac{1}{\lambda}\right].
$$

Очевидно, що $\hat{h}^{'}(\lambda) < 0$ для будь-якого $\lambda \in (0; m_k]$, а це означає, що функція $\hat{h}(\lambda)$ - монотонно спадна на $(0; m_k]$. Тоді $\hat{h}(\lambda) \leq \hat{h}(\alpha)$ для $\lambda \geq \alpha$. Таким чином, знаходимо

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha+\lambda}\hat{h}(\lambda) \leq \frac{\alpha\lambda}{\alpha+\lambda}\frac{1}{\alpha}(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p} =$$
$$= \frac{\lambda}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p} \leq (\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

б) Залишилося розглянути випадок $p \geq 1$. Нагадаємо, що ми хочемо встановити істинність нерівності

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p} \leq C_1(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p}, \tag{2.35}$$

$$\lambda \in (0; m_k], \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, ..., K \end{cases},$$

для довільних $K = 2, 3, 4, \dots$.

Спершу розглянемо випадок $K = 2$, тобто встановимо правильність нерівності

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\ln\ln\frac{1}{\lambda})^{-p} \leq C_1(\ln\ln\frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

Позначимо

$$\nu(\lambda) := \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}(\ln\ln\frac{1}{\lambda})^{-p}, \quad \alpha \leq \lambda \leq e^{-e}.$$

Далі $h(\lambda)$ перепишемо у вигляді

$$\nu(\lambda) = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\ln^{-p}\frac{1}{\lambda}\ln^{p}\frac{1}{\lambda}(\ln\ln\frac{1}{\lambda})^{-p}.$$

І розглянемо допоміжну функцію

$$v(\lambda) := \ln^{p}\frac{1}{\lambda}(\ln\ln\frac{1}{\lambda})^{-p}, \quad \lambda \in (0; e^{-e}].$$

Легко переконатися, що

$$v^{'}(\lambda) = \frac{p\ln^{p-1}\frac{1}{\lambda}(\ln\ln\frac{1}{\lambda})^{-p-1}}{\lambda}[1 - \ln\ln\frac{1}{\lambda}]$$

і $v'(\lambda) < 0$ для будь-якого $\lambda \in (0; e^{-e})$; отже, функція $v(\lambda)$ – монотонно спадна на $(0; e^{-e}]$. А це означає, що для $\lambda \geq \alpha$ виконується

$$v(\lambda) \leq v(\alpha). \tag{2.36}$$

Оскільки $(0; e^{-e}] \subset (0; 1]$, то згідно (2.28) й (2.36) знаходимо

$$\nu(\lambda) \leq C_1 \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} \ln^p \frac{1}{\alpha} (\ln \ln \frac{1}{\alpha})^{-p} = C_1 (\ln \ln \frac{1}{\alpha})^{-p},$$

де константа C_1 визначається співвідношенням (2.30). Що і треба було довести.

Для доведення нерівності (2.35) у випадку довільного $K \geq 3$ скористаємося методом математичної індукції. Отже, при $K = 2$ нерівність (2.35) була встановлена вище. Далі припустимо, що нерівність (2.35) справджується при деякому довільно узятому $K - 1 \geq 2$, інакше кажучи, нехай має місце співвідношення

$$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} (\underbrace{\ln ... \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda})^{-p} \leq C_1 (\underbrace{\ln ... \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\alpha})^{-p}, \tag{2.37}$$

$$\lambda \in (0; m_{k-1}], \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, ..., K-1 \end{cases},$$

і залишилося довести нерівність (2.35) для K. Для цього введемо у розгляд функцію

$$\varkappa(\lambda) := \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} (\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} (\underbrace{\ln ... \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda})^{-p} (\underbrace{\ln ... \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda})^{p} (\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p}, \quad \lambda \in (0; m_k], \quad K > 2.$$

Позначимо

$$\hat{\varkappa}(\lambda) = (\underbrace{\ln ... \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda})^{p} (\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p}, \quad \lambda \in (0; m_k].$$

Тепер знаходимо

$$\hat{\varkappa}'(\lambda) = \frac{p(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(K-1)\text{ раз}}\frac{1}{\lambda})^{p-1}(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p-1}}{\lambda\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(K-2)\text{ рази}}\frac{1}{\lambda}\cdots\ln\frac{1}{\lambda}}[1-\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda}].$$

Очевидно, що $\hat{\varkappa}'(\lambda) < 0$ для будь-якого $\lambda \in (0; m_k]$, а це означає, що функція $\hat{\varkappa}(\lambda)$ - монотонно спадна на інтервалі $(0; m_k]$, отже, $\hat{\varkappa}(\lambda) \leq \hat{\varkappa}(\alpha)$ при $\lambda \geq \alpha$. Оскільки інтервали $(0; m_k]$ утворюють вкладену послідовність, тобто $(0; m_k] \subset (0; m_{k-1}], \quad k = 2, ..., K$, то згідно припущення (2.37) справджується

$$\hat{\varkappa}(\lambda) \leq C_1(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(K-1)\text{ раз}}\frac{1}{\alpha})^{-p}(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{(K-1)\text{ раз}}\frac{1}{\alpha})^{p}(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p} = C_1(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

Об'єднавши усі знайдені вище оцінки, отримуємо нерівність (2.35).

І нарешті, підставивши (2.35) в оцінку норми (2.33), знаходимо

$$\|x^\dagger - x_\alpha\| \leq C_1\rho(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p},$$

де константа C_1 визначається співвідношенням (2.30). Таким чином, лема повністю доведена. $\square$

Зауваження 2.1. Як зазначалося вище, вперше подібний результат у випадку $K = 1$ був отриманий Т. Хоаге (см. [34]). Далі узагальнення цього результату з [34] на випадок довільного $K = 1, 2, \ldots$ було приведено у монографії [1, с. 38, лема 2] у разі самоспряжених невід'ємних операторів. Таким чином, лема 2.1 в свою чергу узагальнює згаданий результат із [1] на випадок довільних лінійних операторів. Крім того, нами обчислена константа C_1, яка, як виявилося, не залежить від K.

Далі нагадаємо (див., наприклад, [68]), що для будь-якого лінійного обмеженого оператора B виконуються співвідношення

$$\begin{gathered} B(\alpha I + B^*B)^{-1} = (\alpha I + BB^*)^{-1}B, \\ \|(\alpha I + B^*B)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}, \quad \|(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \leq \tfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \\ \|B(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \leq 1. \end{gathered} \tag{2.38}$$

Для обчислення оцінки точності підходу, що полягає у комбінації стандартної тіхоновської регуляризації з принципом рівноваги, нам знадобиться наступний допоміжний результат.

Лема 2.2. *Нехай*

$$\|A\| \leq M_K, \quad M_K = m_K^{1/2}, \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k=1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k=2,\dots,K \end{cases},$$

і $x^\dagger \in M_{p,\rho}^K(A)$, $K = 1, 2, \dots$. *Тоді має місце наступна нерівність*

$$\|x_\alpha - x_{\alpha,n}^h\| \leq \frac{(h+\varepsilon)\rho}{\sqrt{\alpha}},$$

$$\textit{де} \quad x_{\alpha,n}^h = (\alpha I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* f, \quad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \leq \delta \\ h, & h > \delta \end{cases}.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\|x^\dagger\| = \|(\underbrace{\ln\dots\ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p} v\| \leq \rho \sup_{0<\lambda\leq e^{-1}} (\underbrace{\ln\dots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \leq \rho$$

і

$$\|A - A_{h,n}\| \leq \|A - A_h\| + \|A_h - A_{h,n}\| \leq h + \varepsilon. \tag{2.39}$$

Оцінимо норму відхилення

$$\|x_\alpha - x_{\alpha,n}^h\| := \|(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f - (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}A_{h,n}^*f\|.$$

Для цього перетворимо останній вираз, що стоїть під знаком норми:

$$\begin{gathered}
(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f - (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}A_{h,n}^*f = \\
= A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}f - (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}A_{h,n}^*f = \\
= \left[A^* - (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}A_{h,n}^*(\alpha I + AA^*)\right](\alpha I + AA^*)^{-1}f = \\
= (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}\left[(\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})A^* - A_{h,n}^*(\alpha I + AA^*)\right](\alpha I + AA^*)^{-1}f = \\
= (\alpha I + A_{h,n}^*A_{h,n})^{-1}\left[\alpha(A^* - A_{h,n}^*) + A_{h,n}^*(A_{h,n} - A)A^*\right](\alpha I + AA^*)^{-1}Ax^\dagger.
\end{gathered}$$

Таким чином,

$$\|x_\alpha - x^h_{\alpha,n}\| = \|\alpha(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}(A^* - A^*_{h,n})(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax^\dagger +$$
$$+ (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}(A_{h,n} - A)A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax^\dagger\| \le I_1 + I_2,$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &:= \alpha\|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}(A^* - A^*_{h,n})(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax^\dagger\|, \\ I_2 &:= \|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}(A_{h,n} - A)A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax^\dagger\|. \end{aligned}$$

Для оцінки кожного з доданків I_1 і I_2 застосуємо (2.27) та (2.38). Отже, маємо

$$\begin{aligned} I_1 \le \ & \|A^* - A^*_{h,n}\|\tfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\rho \ \le \frac{(h+\varepsilon)\rho}{2\sqrt{\alpha}}, \\ I_2 \le \ & \tfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|A - A_{h,n}\|\rho \ \le \frac{(h+\varepsilon)\rho}{2\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

Нарешті, об'єднавши знайдені оцінки для I_1 й I_2, знаходимо

$$\|x^\dagger - x^h_{\alpha,n}\| \le \frac{(h+\varepsilon)\rho}{\sqrt{\alpha}}.$$

Лема доведена. □

Тепер можна сформулювати результат, який дає оцінку точності підходу, що полягає у комбінації стандартної тіхоновської регуляризації з принципом рівноваги, через рівні похибки вхідних даних h, δ, а також через величину параметра регуляризації α.

Теорема 2.1. *Нехай*

$$\|A\| \le M_K, \quad M_K = m_K^{1/2}, \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, \dots, K \end{cases},$$

й $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $K = 1, 2, \dots$. *Тоді має місце оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha,n}\| \le \rho C_1(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p} + \frac{2(h+\varepsilon)\rho + \delta}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{2.40}$$

де $x^{h,\delta}_{\alpha,n} = (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}f_\delta, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \le \delta \\ h, & h > \delta \end{cases},$

а C_1 *визначається співвідношенням (2.30).*

Доведення. Скористаємося правилом трикутника

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\| \le \|x^\dagger - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_{\alpha,n}^{h}\| + \|x_{\alpha,n}^{h} - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\|$$

й оцінимо останній доданок

$$\begin{aligned}\|x_{\alpha,n}^{h} - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\| =&\|(\alpha I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* f - (\alpha I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* f_\delta\| \le \\ \le&\|(\alpha I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* (f - f_\delta)\|.\end{aligned}$$

Звідки за допомогою (2.38) знаходимо

$$\|x_{\alpha,n}^{h} - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{2.41}$$

Згідно лем 2.1, 2.2 й співвідношення (2.41) остаточно отримуємо шукану оцінку. □

Наряду зі стандартним методом Тіхонова за регуляризатор будемо використовувати також його ітерований варіант. Наведені нижче відомості і факти відносяться саме до останнього підходу.

Як відомо (див. [68, с. 92]), для будь-яких лінійних операторів $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ й натурального m має місце розкладання

$$A^m - B^m = \sum_{j=0}^{m-1} A^j (A - B) B^{m-j-1}. \tag{2.42}$$

Лема 2.3. *(див. [68, с. 34])*

Якщо g – обмежена вимірна за Борелем функція на $[0;\ M_K^2]$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\|A\| \le M_K$, $K = 1, 2, ...,$ то

$$A^* g(AA^*) = g(A^*A) A^*,$$

$$A g(A^*A) = g(AA^*) A.$$

Крім того, нагадаємо (див.[68], с. 21), що твірна функція $g(\lambda) := g_{m,\alpha}(\lambda)$ ітерованого методу Тіхонова набуває вигляд

$$g_{m,\alpha}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1} (\alpha + \lambda)^{-i} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\alpha^m}{(\alpha + \lambda)^m}\right), \quad \lambda \ne 0, \tag{2.43}$$

і задовольняє нерівність (див. [68], с. 22)

$$\sup_{0<\lambda<\infty} \sqrt{\lambda} g_{m,\alpha}(\lambda) \le \sqrt{\frac{m}{\alpha}}. \tag{2.44}$$

Далі встановимо низку допоміжних тверджень, які знадобляться надалі для аналізу апроксимаційних властивостей підходу, що складається з комбінації ітерованого методу Тіхонова з принципом рівноваги.

Лема 2.4. *Нехай*

$$\|A\| \le M_K, \qquad M_K = m_K^{1/2}, \qquad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, ..., K \end{cases}.$$

Тоді має місце наступна оцінка

$$\|x^\dagger - x_{m,\alpha}\| \le \rho(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p},$$

де $x_{m,\alpha}$ визначається співвідношенням (2.24).

Доведення. Насамперед зазначимо

$$\begin{aligned} \|x^\dagger - x_{m,\alpha}\| &= \|[(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v - \\ &- \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*A+\alpha I)^{-i}A^*A(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v]\| \le \\ &\le \rho\|[I - \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*A+\alpha I)^{-i}A^*A](\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}\| \le \\ &\le \rho \sup_{0<\lambda\le m_K} \left| [I - \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}\frac{\lambda}{(\lambda+\alpha)^i}](\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \right| \le \\ &\le \rho \sup_{0<\lambda\le m_K} \quad (\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})^m(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}. \end{aligned}$$

Для оцінки виразу, що знаходиться під знаком супремуму, розглянемо два випадки:

1) Нехай спершу $\lambda \le \alpha$. Оскільки функція $(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}$ є монотонно зростаючою по λ, то

$$(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda})^m(\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p} \le (\underbrace{\ln ... \ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

2) Тепер нехай $\lambda \geq \alpha$. Розглянемо функцію

$$y(\lambda) = \frac{1}{\lambda^m}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p}, \qquad \lambda \in (0; m_K].$$

Легко показати, що

$$y'(\lambda) = \lambda^{-m-1}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p-1}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda})^{-1} \ldots (\ln \frac{1}{\lambda})^{-1} \times$$

$$\times [p - m \underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1) \text{ раз}} \frac{1}{\lambda} \cdot \ldots \cdot \ln \frac{1}{\lambda}].$$

Оскільки $y'(\lambda) < 0$ при $p < m$, то $y(\lambda)$ монотонно спадає при $0 < p < m$. Значить, $y(\lambda) \leq y(\alpha)$ при $\lambda \geq \alpha$ й

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^m (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^m \cdot \lambda^m \cdot \frac{1}{\lambda^m}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\lambda})^{-p} \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^m}{(\alpha + \lambda)^m}(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p} \leq (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

Таким чином, у загальному випадку маємо

$$\|x^\dagger - x_{m,\alpha}\| \leq \rho(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p},$$

отже, твердження леми доведено. □

Лема 2.5. *Нехай*

$$\|A\| \leq M_K, \qquad M_K = m_K^{1/2}, \qquad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, \ldots, K \end{cases}.$$

Тоді справджується наступна оцінка

$$\|x_{m,\alpha} - x^h_{m,\alpha,n}\| \leq \frac{\rho(m + \sqrt{m})(h + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha}},$$

де $x_{m,\alpha}$ і $x^h_{m,\alpha,n}$ визначаються співвідношеннями (2.24), (2.25) відповідно, а

$$\varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \leq \delta \\ h, & h > \delta \end{cases}.$$

Доведення. Очевидно, що

$$\|x^\dagger\| = \|(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v\| \le \rho \sup_{0<\lambda\le m_K} |(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\lambda})^{-p}| \le \rho,$$

$$\|A - A_{h,n}\| \le \|A - A_h\| + \|A_h - A_{h,n}\| \le h + \varepsilon.$$

Далі оцінимо норму

$$\|x_{m,\alpha} - x^h_{m,\alpha,n}\| = \|g_{m,\alpha}(A^*A)A^*f - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}f\| =$$

$$= \|g_{m,\alpha}(A^*A)A^*Ax_0 - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}Ax_0\| \le$$

$$\le \rho\|g_{m,\alpha}(A^*A)A^*A - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A\|$$

і перетворимо вираз, що стоїть під знаком останньої норми:

$$g_{m,\alpha}(A^*A)A^*A - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A =$$

$$= g_{m,\alpha}(A^*A)A^*A - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A_{h,n} +$$

$$+ g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A_{h,n} - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A = I_3 + I_4,$$

де

$$I_3 := g_{m,\alpha}(A^*A)A^*A - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A_{h,n},$$

$$I_4 := g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A_{h,n} - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}A.$$

Тепер оцінимо кожен з доданків I_3, I_4. Отже,

$$I_3 = (I - \alpha^m(\alpha I + A^*A)^{-m} - (I - \alpha^m(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-m}) =$$

$$= \alpha^m[(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-m} - (\alpha I + A^*A)^{-m}].$$

До виразу, що знаходиться у квадратних дужках, застосуємо формулу (2.42):

$$I_3 = \alpha^m \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-j} \cdot [(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1} - (\alpha I + A^*A)^{-1}]\times$$

$$\times (\alpha I + A^*A)^{-m+j+1} = \alpha^m \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-j-1}(A^*A - A^*_{h,n}A_{h,n})\times$$

$$\times (\alpha I + A^*A)^{-m+j} = \alpha^m \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-j-1}(A^* - A^*_{h,n})A\times$$

$$\times (\alpha I + A^*A)^{-m+j} + \alpha^m \sum_{j=0}^{m-1} (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-j-1}A^*_{h,n}(A - A_{h,n})\times$$

$$\times (\alpha I + A^*A)^{-m+j}.$$

Звідки з урахуванням леми 2.3 й оцінок (2.38) маємо

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\le \sum_{j=0}^{m-1}[\|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}\|^{j-1}\|(\alpha I + AA^*)^{-m+j}A\| + \\
&+ \|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-j-1}A^*_{h,n}\| \cdot \|(\alpha I + A^*A)^{-1}\|^{m-j}]\alpha^m\|A - A_{h,n}\| = \\
&= \sum_{j=0}^{m-1}[\alpha^{-j-1}\|(\alpha I + A^*A)^{-m+j-1}\| \cdot \|(\alpha I + A^*A)^{-1}A\| + \\
&+ \|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}\|^{j} \cdot \|(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}\|\alpha^{-m+j}]\alpha^m\|A - A_{h,n}\| \le \\
&\le \sum_{j=0}^{m-1}[\alpha^{-j-1} \cdot \alpha^{-m+j+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} + \alpha^{-j}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \alpha^{-m+j}]\alpha^m \cdot \|A - A_{h,n}\| = \\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|A - A_{h,n}\| \le \frac{m}{\sqrt{\alpha}}(h + \varepsilon). \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Знову враховуючи нерівності (2.38), знаходимо

$$\begin{aligned}
\|I_4\| &= \|g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}(A_{h,n} - A)\| \le \\
&\le \sup_{0<\lambda\le m_K}|\sqrt{\lambda}g_{m,\alpha}(\lambda)| \cdot \|A_{h,n} - A\| \le \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}(h + \varepsilon). \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Об'єднавши співвідношення (2.45) й (2.46), остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
\|x_{m,\alpha,n} - x^h_{m,\alpha,n}\| &\le \rho\left(\frac{m}{\sqrt{\alpha}}(h + \varepsilon) + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}(h + \varepsilon)\right) = \\
&= \frac{\rho(m + \sqrt{m})(h + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Тим самим твердження леми доведено. □

Сформулюємо і доведемо результат, який дає оцінку точності підходу, що досліджується, через рівень похибки вхідних даних h, δ та величину параметра регуляризації α.

Теорема 2.2. *Нехай*

$$\|A\| \le M_K, \qquad M_K = m_K^{1/2}, \qquad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, \dots, K \end{cases}$$

і $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$.

Тоді має місце оцінка

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| \le \rho((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\ \text{разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p} + \frac{\rho(m+\sqrt{m})(h+\varepsilon)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}, \tag{2.47}$$

де $x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}$ *– наближений розв'язок, що визначаєтьcя співвідношенням (2.26).*

Доведення. Скористаємося правилом трикутника

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| \le \|x^\dagger - x_{m,\alpha}\| + \|x_{m,\alpha} - x^h_{m,\alpha,n}\| + \|x^h_{m,\alpha,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\|$$

і розглянемо останній доданок:

$$\begin{aligned}\|x^h_{m,\alpha,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| &= \|g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}f - g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}f_\delta\| \le \\ &\le \|g_{m,\alpha}(A^*_{h,n}A_{h,n})A^*_{h,n}\| \times \|f - f_\delta\| \le \delta \sup_{0<\lambda\le m_K}(\sqrt{\lambda}g_{m,\alpha}(\lambda)).\end{aligned}$$

Звідки, згідно нерівності (2.44), знаходимо

$$\|x^h_{m,\alpha,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| \le \frac{\delta\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}. \tag{2.48}$$

І, нарешті, об'єднавши леми 2.4, 2.5 та співвідношення (2.48), отримуємо шукану оцінку. □

2.3. Стандартний метод Тіхонова

У цьому параграфі для дослідження жорстко некоректних задач (2.1) з неточно заданими вхідними даними A_h, f_δ й розв'язками з множини $M^K_{p,\rho}(A)$ (2.2) (при будь-якому фіксованому $K = 1, 2, \ldots$) буде застосований стандартний метод Тіхонова з правилом зупинки згідно принципу рівноваги. При цьому буде встановлено, що запропонована комбінація забезпечує порядок точності $O((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на всій множині розв'язків (2.2).

Нагадаємо, що за стандартним методом Тіхонова регуляризований розв'язок $x^{h,\delta}_\alpha$ визначається як розв'язок варіаційної задачі

$$I^h_\alpha(x) := \|A_h x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min\,. \tag{2.49}$$

Оскільки для чисельної реалізації тіхонівського методу необхідно виконувати всі обчислення зі скінченним обсягом вхідних даних, то варіаційна задача (2.49) замінюється на наступну

$$I^h_{\alpha,n}(x) := \|A_{h,n} x - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

де $A_{h,n}$ – деяке скінченновимірне наближення до A_h, таке що $\operatorname{rank}(A_{h,n}) = n$. Знаходження наближеного розв'язку вимагає в цьому випадку розв'язування лінійного операторного рівняння

$$\alpha x + A^*_{h,n}A_{h,n}x = A^*_{h,n}f_\delta, \tag{2.50}$$

інакше кажучи, наближення шукаються у вигляді

$$x^{h,\delta}_{\alpha,n} = (\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}f_\delta. \tag{2.51}$$

Не обмежуючись якоюсь конкретною схемою дискретизації, будемо вважати скінченновимірне наближення $A_{h,n}$ обране так, щоб виконувалася умова

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1} & , \quad 0 < h \le \delta \\ h & , \qquad h > \delta \end{cases}. \tag{2.52}$$

Як було встановлено в теоремі 2.1, оцінка похибки для стандартного методу Тіхонова має вигляд

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\| \le \rho C_1(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p} + \frac{2(h+\varepsilon)\rho + \delta}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{2.53}$$

де

$$x_{\alpha,n}^{h,\delta} = (\alpha I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* f_\delta,$$

а C_1 визначається співвідношенням (2.30). Тепер нам належить мінімізувати праву частину (2.53), обираючи α згідно з принципом рівноваги. Інакше кажучи, потрібно вибрати значення параметра регуляризації α таким чином, щоб якомога точніше врівноважити дві функції, що задають оцінку похибки. У даному випадку ці функції (див. (2.53)) мають вигляд

$$\Phi_1(\alpha) := \rho C_1(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\alpha})^{-p},$$

$$\Psi_1(\alpha) := \frac{2(h+\varepsilon)\rho + \delta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Враховуючи, що (див. (2.52))

$$\varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1} & , \quad 0 < h \le \delta \\ h & , \quad h > \delta \end{cases},$$

функцію $\Psi_1(\alpha)$ можна подати наступним чином

$$\Psi_1(\alpha) = \frac{c_1 h\rho + c_2\delta}{2\sqrt{\alpha}},$$

де $c_1 = \begin{cases} 2 & , \quad h < \delta \\ 4 & , \quad h \ge \delta \end{cases}, \quad c_2 = \begin{cases} 3 & , \quad h < \delta \\ 1 & , \quad h \ge \delta \end{cases}.$

Тепер (2.53) перепишемо у вигляді

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,n}^{h,\delta}\| \le \Phi_1(\alpha) + \Psi_1(\alpha). \tag{2.54}$$

Далі розглянемо дискретну множину можливих значень параметра регуляризації

$$\Delta_N = \{\alpha_i = (q^2)^i \alpha_0, i = 1, 2, \ldots, N\}, \quad q > 1,$$
$$\alpha_0 = n(h+\delta)^2, \quad N: \alpha_{N+1} > m_k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Використовуючи принцип рівноваги, будуємо множину

$$M^+(\Delta_N) = \{\alpha_i \in \Delta_N : \|x^{h,\delta}_{m,\alpha_i,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_j,n}\| \leq$$
$$\leq 4\Psi_1(\alpha_j), j = 1, 2, \ldots, i\},$$

з якої вибираємо значення параметра регуляризації за правилом

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}. \tag{2.55}$$

Крім того, введемо допоміжну множину

$$M(\Delta_N) := \{\alpha_i \in \Delta_N : \Phi_1(\alpha_i) \leq \Psi_1(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N\}$$

і допоміжну величину

$$\alpha_* := \max\{\alpha \in M(\Delta_N)\}.$$

Тепер ми можемо перейти до основних результатів цього параграфа.

Теорема 2.3. *Нехай параметр регуляризації $\alpha = \alpha_+$ вибирається за правилом (2.55). Тоді для будь-якого $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $K = 1, 2, \ldots,$ має місце наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \leq 6q\rho C_1(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\ \text{разів}} \frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p},$$

де C_1 визначається співвідношенням (2.30).

Доведення. Насамперед покажемо, що $\alpha_* \leq \alpha_+$. Враховуючи (2.54), поведінку функцій $\Phi_1(\alpha), \Psi_1(\alpha)$ й означення множини $M(\triangle_N)$, для будь-якого α_j, $\alpha_j < \alpha_*$, маємо

$$\|x^{h,\delta}_{\alpha_*,n} - x^{h,\delta}_{\alpha_j,n}\| \leq \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_*,n}\| + \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_j,n}\| \leq$$
$$\leq \Phi_1(\alpha_*) + \Psi_1(\alpha_*) + \Phi_1(\alpha_j) + \Psi_1(\alpha_j) \leq$$
$$\leq 2\Phi_1(\alpha_*) + \Psi_1(\alpha_*) + \Psi_1(\alpha_j) \leq 3\Psi_1(\alpha_*) + \Psi_1(\alpha_j) \leq 4\Psi_1(\alpha_j).$$

Таким чином, $\alpha_* \in M^+(\Delta_N)$. А отже, виконується нерівність $\alpha_* \le \alpha_+$. Далі, скориставшись (2.54) при $\alpha = \alpha_*$, а також означенням множин $M^+(\triangle_N)$ й $M(\triangle_N)$, знаходимо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \le \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_*,n}\| + \|x^{h,\delta}_{\alpha_*,n} - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \le 6\Psi_1(\alpha_*). \tag{2.56}$$

Згідно подання функції Ψ_1 легко бачити, що

$$\Psi_1(q^2\alpha_*) = \frac{\rho c_1 h + c_2\delta}{2\sqrt{q^2\alpha_*}} = \frac{1}{q}\cdot\frac{\rho c_1 h + c_2\delta}{2\sqrt{\alpha_*}} = \frac{1}{q}\Psi_1(\alpha_*). \tag{2.57}$$

З іншого боку, очевидно, що $\alpha_* \le \hat{\alpha} \le q^2\alpha_*$. Враховуючи (2.56) й (2.57), остаточно отримуємо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \le 6q\Psi_1(q^2\alpha_*) \le 6q\Psi_1(\hat{\alpha}) = 6q\Phi_1(\hat{\alpha}) = 6q\rho C_1(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p}.$$

Теорему доведено. $\square$

Наступне твердження дозволяє виразити знайдену в теоремі 2.3 оцінку точності тільки через відомі величини: рівні похибки вхідних даних h і δ.

Теорема 2.4. *Нехай $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $K = 1, 2, \ldots$, та виконується умова теореми 2.3. Тоді для достатньо малих $h, \delta > 0$ має місце наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \le C'_p(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

де C'_p залежить лише від q, ρ, p й K.

Доведення. Згідно рівності $\Phi_1(\hat{\alpha}) = \Psi_1(\hat{\alpha})$ маємо

$$\rho C_1(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\hat{\alpha}})^{-p} = \frac{\rho c_1 h + c_2\delta}{2\sqrt{\hat{\alpha}}},$$

або

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\rho c_1 h + c_2\delta}{2\rho C_1}\right)^2 (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\hat{\alpha}})^{2p}.$$

Оскільки для будь-яких

$$x > \begin{cases} 0, & K = 1 \\ 1, & K = 2 \\ \underbrace{\exp(...(\exp}_{(K-2)\text{ рази}}(1))), & K = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

справджується нерівність $\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} x < x$, то

$$\hat{\alpha} \leq \left(\frac{\rho c_1 h + c_2 \delta}{2\rho C_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^{2p},$$

$$\hat{\alpha} \leq \left(\frac{\rho c_1 h + c_2 \delta}{2\rho C_1}\right)^{\frac{2}{2p+1}}.$$

Отже, згідно теореми 2.3 отримуємо

$$\|x^\dagger - x_{\alpha_+,n}^{h,\delta}\| \leq 6q\rho C_1 \left(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right)^{-p}, \tag{2.58}$$

де h й δ такі, що виконується умова

$$\left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \geq m_k^{-1}, \quad m_k = \begin{cases} e^{-1}, & k = 1 \\ e^{-\frac{1}{m_{k-1}}}, & k = 2, \ldots, K \end{cases}. \tag{2.59}$$

Спочатку оцінимо похибку запропонованого методу при $K = 1$:

$$\|x^\dagger - x_{\alpha_+,n}^{h,\delta}\| \leq 6q\rho C_1 \left(\ln \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right)^{-p} =$$
$$= 6q\rho C_1 \left(\frac{2p+1}{2}\right)^p \left(\ln \frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right)^{-p} \leq C_1' \ln^{-p} \frac{1}{h+\delta},$$

де C_1' залежить лише від p, q і ρ. Тепер покажемо, що для довільного $K = 2, 3, \ldots$ має місце нерівність

$$\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \geq C_K' \underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right), \tag{2.60}$$

де

$$C'_K = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < p \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1+\ln(1+\ln(1+\dots+\ln(1+\ln\frac{2p+1}{2})))} & , \quad p \ge \frac{1}{2} \end{cases},$$

а ln в означенні C'_K повторюється $K-1$ раз. Спершу розглянемо випадок $0 < p \le \frac{1}{2}$ та покажемо, що для будь-якого $K = 2, 3, \dots$ виконується

$$\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)^{\frac{2}{2p+1}} \ge \underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right). \tag{2.61}$$

Оскільки при $0 < p \le \frac{1}{2}$ справджується $\left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \ge \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)$, то врахувавши монотонність ln, нерівність (2.61) доведено.

Отже, залишилося розглянути випадок $p \ge \frac{1}{2}$. Нехай спочатку $K = 2$, тобто нам належить встановити істинність нерівності

$$\frac{\ln\ln\left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}}{\ln\ln\left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)} \ge C'_2, \tag{2.62}$$

де $C'_2 = \frac{1}{1+\ln\frac{2p+1}{2}}$. Позначимо

$$t = \ln\left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta}\right).$$

Оскільки h, δ задовольняють умови (2.59), то $t \ge \frac{2p+1}{2}e$.

Тепер розглянемо функцію

$$u_1(t) := \frac{\ln\frac{2}{2p+1}t}{\ln t} = 1 + \frac{\ln\frac{2}{2p+1}}{\ln t}, \qquad t \ge \frac{2p+1}{2}e,$$

і дослідимо її на найменше значення на проміжку $[\frac{2p+1}{2}e; \infty)$.

Оскільки $u'_1(t) = \ln\frac{2}{2p+1}(-\frac{1}{\ln^2 t})\frac{1}{t} > 0$ для будь-якого $t \ge \frac{2p+1}{2}e$, то функція $u_1(t)$ монотонно зростає по t, а отже, найменше значення вона досягає при $t = \frac{2p+1}{2}e$. А це означає, що

$$\min_{\frac{2p+1}{2}e \le t < \infty} u_1(t) = u_1(\frac{2p+1}{2}e) = \frac{1}{\ln(\frac{2p+1}{2}e)} = \frac{1}{1+\ln\frac{2p+1}{2}}.$$

Поклавши $C'_2 = \frac{1}{1+\ln\frac{2p+1}{2}}$, отримуємо шукану нерівність.

Для доведення нерівності (2.60) у разі довільного K скористаємося методом математичної індукції.

Отже, при $K = 2$ має місце нерівність (2.60) (див. доведення (2.62)). Припустимо, що нерівність (2.60) справджується для довільно взятого $K-1 \geq 2$, тобто нехай виконується

$$\underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)^{\frac{2}{2p+1}} \geq C'_{K-1} \underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right) \tag{2.63}$$

при $C'_{K-1} = \frac{1}{1+\ln(1+\ln(1+\cdots+\ln(1+\ln\frac{2p+1}{2})))}$, де ln повторюється $K-2$ рази. І доведемо (2.60).

Запишемо рівність

$$\underbrace{\ln \dots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)^{\frac{2}{2p+1}} = \ln \left[\underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)^{\frac{2}{2p+1}} \right].$$

Згідно монотонності функції ln і нерівності (2.63) знаходимо

$$\ln \left[\underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)^{\frac{2}{2p+1}} \right] \geq \ln \left[C'_{K-1} \underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right) \right].$$

Залишилося показати, що

$$\frac{\ln \left[C'_{K-1} \underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right) \right]}{\underbrace{\ln \dots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)} \geq C'_K.$$

Скористаємося такими самими міркуваннями, що і при доведенні випадку $K = 2$. Покладемо

$$t = \underbrace{\ln \dots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right)$$

та враховуючи, що h, δ задовольняють умови (2.59), маємо $t \geq \frac{e}{C'_{K-1}}$. Тепер розглянемо функцію

$$u_2(t) := \frac{\ln(C'_{K-1} t)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(C'_{K-1})}{\ln t}, \quad t \geq \frac{e}{C'_{K-1}}.$$

Дослідимо її на найменше значення на інтервалі $[\frac{e}{C'_{K-1}}; \infty)$. Врахувавши, що $\ln(C'_{K-1}) < 0$, маємо

$$u'_2(t) = \ln(C'_{K-1})(-\frac{1}{\ln^2 t})\frac{1}{t} > 0$$

для будь-якого $t \geq \frac{e}{C'_{K-1}}$. Інакше кажучи, функція $u_2(t)$ монотонно зростає на всьому проміжку $[\frac{e}{C'_{K-1}}; \infty)$, а отже, найменше значення вона досягає при $t = \frac{e}{C'_{K-1}}$, тобто

$$\min_{\frac{e}{C'_{K-1}} \leq t < \infty} u_2(t) = u_2(\frac{e}{C'_{K-1}}) = \frac{1}{\ln(\frac{e}{C'_{K-1}})} =$$
$$= \frac{1}{1 + \ln(1 + \ln(1 + \cdots + \ln(1 + \ln \frac{2p+1}{2})))}.$$

Поклавши $C'_K = \frac{1}{1+\ln(1+\ln(1+\cdots+\ln(1+\ln \frac{2p+1}{2})))}$, де $\ln$ повторюється $K-1$ раз, отримуємо нерівність (2.60).

І нарешті, підставивши нерівність (2.60) в оцінку норми (2.58), знаходимо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\| \leq 6q\rho C_1 \left(C'_K \underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \left(\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right) \right)^{-p} \leq$$
$$\leq C'_p (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

Теорема повністю доведена. □

Зауваження 2.2. Як було показано в роботі [62], розв'язування жорстко некоректних задач (2.1) – (2.2) при $h = 0$ стандартним методом Тіхонова в комбінації з принципом нев'язки Морозова забезпечує оптимальний (за логарифмічною шкалою) порядок точності $O((\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\delta})^{-p})$ відновлення розв'язків з множини $M^K_{p,\rho}(A), K \in \mathbb{N}$. З іншого боку, з теореми 2.4 випливає, що досліджувана нами стратегія розв'язування жорстко некоректних задач (2.1) – (2.2) при $h \leq O(\delta^\xi)$, $\forall \xi > 0$, забезпечує той самий порядок точності наближення розв'язків з тих самих множин $M^K_{p,\rho}(A)$, а це в свою чергу означає, що запропонований нами підхід при $h \leq O(\delta^\xi)$, $\forall \xi > 0$, є оптимальним за порядком на класі жорстко некоректних задач, що досліджуються.

Зауваження 2.3. Раніше, в [56] і [62], для розв'язування рівнянь (2.1) з $x^\dagger \in M_{p,\rho}^K(A)$ також використовувався стандартний метод Тіхонова, але при цьому за правило зупинки розглядався принцип нев'язки. Порівняння результатів із згаданих робіт з теоремами 2.3, 2.4 показує, що порядки точності всіх порівнюваних методів збігаються, в той же час наш підхід має істотну перевагу. А саме, при реалізації алгоритмів з [56], [62] була задіяна нижня межа p_0 для можливих значень p ($p > p_0 > 0$), де величина p_0 припускалася відомою. У рамках нашого підходу це обмеження зняте і всі отримані вище результати справджуються при будь-яких $p > 0$.

2.4. Ітерований метод Тіхонова

У цьому параграфі для регуляризації жорстко некоректних задач (2.1), розв'язки яких належать $M^K_{p,\rho}(A)$ (2.2) при $K = 1, 2, \dots$ і $0 < p \le p_1$, зі збуреними оператором і правою частиною, буде застосований ітерований метод Тіхонова, де параметр регуляризації обирається за принципом рівноваги. При цьому буде показано, що описаний підхід до розв'язування задач (2.1)-(2.2) дозволяє досягти точність $O((\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на зазначених класах рівнянь.

Нагадаємо, що ітерований метод Тіхонова полягає у виборі натурального m, початкового наближення $x^{h,\delta}_{0,\alpha}$ і в послідовному обчисленні елементів $x^{h,\delta}_{i,\alpha}, i = 1, 2, \dots, m$, за правилом

$$x^{h,\delta}_{i,\alpha} = \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} x^{h,\delta}_{i-1,\alpha} + \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} A^*_h f_\delta, \tag{2.64}$$

де $m \ge p_1$, а за наближений розв'язок береться $x^{h,\delta}_{m,\alpha}$. Покладемо $x^{h,\delta}_{0,\alpha} = 0$. Тоді елемент $x^{h,\delta}_{m,\alpha}$ можна переписати у вигляді

$$x^{h,\delta}_{m,\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*_h A_h + \alpha I)^{-i} A^*_h f_\delta. \tag{2.65}$$

Як і раніше, не обмежуючись якоюсь конкретною схемою дискретизації, будемо припускати, що скінченновимірне наближення $A_{h,n}$ з $\operatorname{rank}(A_{h,n}) = n$ вибрано так, щоб

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \le \delta, \\ h, & h > \delta \end{cases}. \tag{2.66}$$

А наближений розв'язок дискретизованого рівняння ітерованого методу Тіхонова, так само як і в (2.26), позначимо через

$$x^{h,\delta}_{m,\alpha,n} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{i-1}(A^*_{h,n} A_{h,n} + \alpha I)^{-i} A^*_{h,n} f_\delta. \tag{2.67}$$

При встановленні основних результатів цього параграфа буде застосовано принцип рівноваги, що полягає, як зазначалося раніше, у виборі значення параметра регуляризації α таким чином, щоб врівноважити дві функції Φ і Ψ, які задають оцінку похибки. Оскільки оцінка похибки для ітерованого методу Тіхонова має вигляд (див. теорему 2.2)

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| \le \rho((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p} + \frac{\rho(m+\sqrt{m})(h+\varepsilon)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}, \qquad (2.68)$$

де $x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}$ визначається співвідношенням (2.67), то в нашому випадку функції Φ та Ψ, набувають вигляду

$$\Phi_2(\alpha) := \rho(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p},$$

$$\Psi_2(\alpha) := \frac{\rho(m+\sqrt{m})(h+\varepsilon)+\delta\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Врахувавши, що (див. (2.66))

$$\varepsilon = \begin{cases} \delta\rho^{-1}, & 0 < h \le \delta \\ h, & h > \delta \end{cases},$$

запишемо функцію $\Psi_2(\alpha)$ наступним чином

$$\Psi_2(\alpha) = \frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\sqrt{\alpha}},$$

де $c_3 = \begin{cases} m+\sqrt{m}, & 0 < h \le \delta \\ 2(m+\sqrt{m}), & h > \delta \end{cases}, \quad c_4 = \begin{cases} m+2\sqrt{m}, & 0 < h \le \delta \\ \sqrt{m}, & h > \delta \end{cases}.$

Тепер (2.68) можна переписати

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha,n}\| \le \Phi_2(\alpha) + \Psi_2(\alpha). \qquad (2.69)$$

Далі розглянемо множини

$$\Delta_N = \{\alpha_i = (q^2)^i\alpha_0, i = 1,2,\ldots,N\}, \quad q > 1,$$
$$\alpha_0 = n(h+\delta)^2, \quad N:\, \alpha_{N+1} > m_k, \quad k = 1,\ldots,K,$$

та

$$M^+(\Delta_N) = \{\alpha_i \in \Delta_N : \|x^{h,\delta}_{m,\alpha_i,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_j,n}\| \le 4\Psi_2(\alpha_j), \quad j = 1,2,\ldots,i\}.$$

Згідно принципу рівноваги за параметр регуляризації беремо елемент

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}. \qquad (2.70)$$

Крім того, введемо допоміжну множину

$$M(\Delta_N) := \{\alpha_i \in \Delta_N : \Phi_2(\alpha_i) \le \Psi_2(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, N\}$$

та допоміжну величину

$$\alpha_* := \max\{\alpha \in M(\Delta_N)\}.$$

Нижче будуть доведені основні результати цього параграфа.

Теорема 2.5. *Нехай параметр регуляризації вибирається за правилом (2.70). Тоді для будь-яких* $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A), \quad 0 < p \le p_1$ *і* $K = 1, 2, \dots$ *справджується наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\rho(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\widehat{\alpha}})^{-p}.$$

Доведення. Насамперед покажемо, що $\alpha_* \le \alpha_+$. Враховуючи (2.69), поведінку функцій $\Phi_2(\alpha), \Psi_2(\alpha)$ та означення множини $M(\Delta_N)$, для будь-якого α_j, $\alpha_j < \alpha_*$, маємо

$$\begin{aligned}\|x^{h,\delta}_{m,\alpha_*,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_j,n}\| &\le \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_*,n}\| + \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_j,n}\| \le \\ &\le \Phi_2(\alpha_*) + \Psi_2(\alpha_*) + \Phi_2(\alpha_j) + \Psi(\alpha_j)_2 \le \\ &\le 2\Phi_2(\alpha_*) + \Psi_2(\alpha_*) + \Psi_2(\alpha_j) \le 3\Psi_2(\alpha_*) + \Psi_2(\alpha_j) \le 4\Psi_2(\alpha_j).\end{aligned}$$

Таким чином, $\alpha_* \in M^+(\Delta_N)$. А, значить, виконується нерівність $\alpha_* \le \alpha_+$. Далі, скориставшись (2.69) при $\alpha = \alpha_*$, а також означенням множин $M^+(\Delta_N)$ й $M(\Delta_N)$, маємо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le \|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_*,n}\| + \|x^{h,\delta}_{m,\alpha_*,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6\Psi(\alpha_*). \qquad (2.71)$$

З подання функції Ψ_2 випливає, що

$$\Psi_2(q^2\alpha_*) = \frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\sqrt{q^2\alpha_*}} = \frac{1}{q}\frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\sqrt{\alpha_*}} = \frac{1}{q}\Psi_2(\alpha_*). \qquad (2.72)$$

З іншого боку, очевидно $\alpha_* \le \widehat{\alpha} \le q^2\alpha_*$. Враховуючи (2.71) й (2.72), отримуємо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\Psi_2(q^2\alpha_*) \le 6q\Psi_2(\widehat{\alpha}) = 6q\Phi_2(\widehat{\alpha}) = 6q\rho(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\widehat{\alpha}})^{-p}.$$

Теорема 2.5 доведена. □

Наступне твердження дозволяє у випадку $K = 1$ виразити знайдену в теоремі 2.5 оцінку точності через відомі рівні похибки δ й h.

Теорема 2.6. *Нехай $x^\dagger \in M^1_{p,\rho}(A)$, $0 < p \le p_1$, і виконується умова теореми 2.5. Тоді для будь-яких $\delta, h > 0$ має місце наступна оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le C''_p \left(\ln \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{-p},$$

$$C''_p = 6q\rho\left(\frac{2p+1}{2}\right)^p.$$

Доведення. Згідно рівності $\Phi_2(\widehat{\alpha}) = \Psi_2(\widehat{\alpha})$ знаходимо

$$\rho \ln^{-p} \frac{1}{\widehat{\alpha}} = \frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\sqrt{\widehat{\alpha}}}.$$

Тоді

$$\widehat{\alpha} = \left(\frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\rho}\right)^2 \ln^{2p} \frac{1}{\widehat{\alpha}}.$$

Оскільки для будь-яких $x > 0$ вірно $\ln x < x$, то

$$\widehat{\alpha} \le \left(\frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\rho}\right)^2 \left(\frac{1}{\widehat{\alpha}}\right)^{2p},$$

$$\widehat{\alpha} \le \left(\frac{\rho c_3 h + c_4\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{2p+1}}.$$

Отже, з урахуванням теореми 2.5 маємо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\rho\left(\ln\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right)^{-p} =$$

$$= 6q\rho\left(\frac{2p+1}{2}\right)^p \left(\ln \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{-p}.$$

Позначивши $C''_p = 6q\rho\left(\frac{2p+1}{2}\right)^p$, отримаємо твердження теореми 2.6. □

Зауваження 2.4. При $p_1 = 1$ і $h = 0$ результат теореми 2.6 раніше був отриманий в [59]. Таким чином, теорема 2.6 узагальнює результат [59] на випадок довільних $p_1 > 0$ і $h > 0$.

Наступна теорема дозволяє узагальнити результат теореми 2.6 для довільного $K \geq 1$. При цьому доведення теореми 2.7 буде проводитися методом математичної індукції з безпосереднім використанням результату попередньої теореми.

Теорема 2.7. *Нехай* $x^\dagger \in M^K_{p,\rho}(A)$, $0 < p \leq p_1$, $K = 2, 3, \dots,$ *та виконується умова теореми 2.5. Тоді для достатньо малих* $h, \delta > 0$ *має місце оцінка*

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \leq C'''_p \left[\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4 \delta} \right]^{-p},$$

де $C'''_p = 2^p 6 q \rho$.

Доведення. Враховуючи рівність $\Phi_2(\widehat{\alpha}) = \Psi_2(\widehat{\alpha})$, знаходимо

$$\rho \left(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\widehat{\alpha}} \right)^{-p} = \frac{\rho c_3 h + c_4 \delta}{\sqrt{\widehat{\alpha}}},$$

$$\widehat{\alpha} = \left(\frac{\rho c_3 h + c_4 \delta}{\rho} \right)^2 \left(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{\widehat{\alpha}} \right)^{2p}.$$

Оскільки для будь-яких

$$x > \begin{cases} 0, & K = 1 \\ 1, & K = 2 \\ \underbrace{\exp(\dots(\exp}_{(K-2) \text{ рази}}(1))), & K = 3, 4, \dots \end{cases}$$

виконується нерівність $\underbrace{\ln \dots \ln}_{K \text{ разів}} x < x$, то

$$\widehat{\alpha} \leq \left(\frac{\rho c_3 h + c_4 \delta}{\rho} \right)^{\frac{2}{2p+1}},$$

тим самим знайдено оцінку зверху для значення параметра регуляризації, що теоретично мінімізує похибку.

Таким чином, згідно теореми 2.5 отримуємо

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\rho\left(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\widehat{\alpha}}\right)^{-p} \le 6q\rho\left[\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right]^{-p}.$$

Далі оцінимо зверху величину

$$\left[\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right]^{-p}.$$

Нехай спочатку $K = 2$, тобто потрібно знайти оцінку зверху для величини

$$\left[\ln\ln\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right]^{-p}.$$

Очевидно, для будь-якого фіксованого $p,\ \ 0 < p < \infty$, знайдуться такі $h_0, \delta_0 > 0$, що при всіх $0 < h \le h_0$ й $0 < \delta \le \delta_0$ виконується нерівність

$$\left(\frac{2p+1}{2}\right)^2 \le \ln\frac{\rho}{c_3\rho h + c_4\delta}.$$

Звідки з монотонності ln маємо

$$\ln\left(\frac{2p+1}{2}\right)^2 \le \ln\ln\frac{\rho}{c_3\rho h + c_4\delta},$$

$$\ln\left(\frac{2p+1}{2}\right) \le \frac{1}{2}\ln\ln\frac{\rho}{c_3\rho h + c_4\delta},$$

$$\ln\ln\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} = \ln\ln\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta} - \ln\frac{2p+1}{2} \ge \frac{1}{2}\ln\ln\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}.$$

Отже,

$$\left[\ln\ln\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right]^{-p} \le 2^p\left[\ln\ln\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right]^{-p}.$$

Далі, у разі довільного $K > 2$ покажемо, що для достатньо малих $h, \delta > 0$ виконується нерівність

$$\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \ge \frac{1}{2}\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right). \tag{2.73}$$

Для цього скористаємося методом математичної індукції. Отже, при $K = 2$ правильність нерівності (2.73) було доведено вище. Припустимо тепер, що нерівність (2.73) виконується й для $K-1, K \geq 3$, тобто має місце співвідношення

$$\underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \geq \frac{1}{2} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right). \tag{2.74}$$

Нам залишилося довести цей факт для K. Перетворимо

$$\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} = \ln\left(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right).$$

Тоді згідно припущення індукції (2.74) справджується

$$\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}} \geq \ln\left[\frac{1}{2} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right].$$

Далі розглянемо величину

$$\ln\left[\frac{1}{2} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right] - \frac{1}{2}\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta} =$$

$$= \ln\left[\frac{\frac{1}{2} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}}{\left(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{1/2}}\right] = \ln\left[\frac{1}{2}\left(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{1/2}\right] > 0.$$

Отже,

$$\ln\left[\frac{1}{2} \underbrace{\ln \ldots \ln}_{(K-1)\text{ раз}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right] \geq \frac{1}{2}\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}.$$

Таким чином, нерівність (2.73) встановлено, тому

$$\left[\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \left(\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{\frac{2}{2p+1}}\right]^{-p} \leq \left[\frac{1}{2}\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right]^{-p} =$$

$$= 2^p \left[\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K\text{ разів}} \frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right]^{-p}.$$

А значить, згідно теореми 2.5 виконується

$$\|x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\| \le 6q\rho 2^p \left[\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right]^{-p}.$$

Поклавши $C_p''' = 2^p 6q\rho$, отримуємо твердження теореми. □

Зауваження 2.5. У роботі [62] при розв'язуванні задач (2.1) зі збуренням тільки в правій частині і розв'язками з множини $M^K_{p,\rho}(A)$ для довільного $K \in \mathbb{N}$ було показано (див. [62, теорема 4.2]), що

$$\varepsilon(M^K_{p,\rho}(A),\delta) = O((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\delta})^{-p}),$$

де величина

$$\varepsilon(M^K_{p,\rho}(A),\delta) := \inf_{S:Y\to X}\ \sup_{x^\dagger\in M^K_{p,\rho}(A)}\ \sup_{f_\delta\in Y:\|f-f_\delta\|\le\delta}\|x^\dagger - Sf_\delta\|$$

визначає найменшу можливу похибку відновлення розв'язків задачі (2.1) з множини (2.2) серед усіх наближених методів $S : Y \to X$, що побудовані по збуренням f_δ. Це означає (див. [62, теорема 4.1]), що величина похибки $O((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\delta})^{-p})$ дає оптимальний порядок наближеного знаходження розв'язків вигляду (2.2), коли $h = 0$. При цьому в [62] вважалася відомою нижня межа p_0 можливих значень параметра $p : p > p_0 > 0$. З іншого боку, з теорем 2.6 та 2.7 випливає, що для $h \le O(\delta^\xi)$, $\forall\xi > 0$, встановлена нами точність наближеного розв'язування (2.1) має порядок $O((\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{разів}}\frac{1}{\delta})^{-p})$. А це, в свою чергу, означає, що для $h \le O(\delta^\xi)$, $\forall\xi > 0$, запропонований нами підхід забезпечує оптимальну за порядком точність розв'язування жорстко некоректних задач, причому тут в обчисленнях використовується верхня межа можливих значень $p : 0 < p \le p_1$.

Зауваження 2.6. Проведемо порівняльний аналіз стратегій розв'язування, запропонованих у §2.3 й §2.4. Апроксимаційні характеристики, отримані для цих підходів, наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Ітерований метод Тіхонова	**Стандартний метод Тіхонова**
$\lVert x^\dagger - x_{m,\alpha}\rVert \le \rho(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}$	$\lVert x^\dagger - x_{\alpha}\rVert \le C_1\rho(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{1}{\alpha})^{-p}$, $C_1 = \begin{cases} 1, & 0 < p \le 1 \\ e\left(\frac{p}{e}\right)^p, & p \ge 1 \end{cases}$
При $K = 1:$ $\lVert x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\rVert \le$ $\le 6q\rho\left(\frac{2p+1}{2}\right)^p\left(\ln\frac{2\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{-p}$	При $K = 1:$ $\lVert x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\rVert \le$ $\le 6q\rho C_1\left(\frac{2p+1}{2}\right)^p\left(\ln\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)^{-p}$
Для довільного $K \ge 2:$ $\lVert x^\dagger - x^{h,\delta}_{m,\alpha_+,n}\rVert \le$ $\le C_p'''\left(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{2\rho}{\rho c_3 h + c_4\delta}\right)^{-p},$ $C_p''' = 2^p 6q\rho$	Для довільного $K \ge 2:$ $\lVert x^\dagger - x^{h,\delta}_{\alpha_+,n}\rVert \le$ $\le 6q\rho C_1\left(C_K'\right)^{-p}\left(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{ разів}}\frac{2\rho C_1}{\rho c_1 h + c_2\delta}\right)^{-p},$ $C_K' = \begin{cases} 1, & 0 < p \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1+\ln(1+\ln(1+\cdots+\ln\left(\frac{2p+1}{2}\right)}, & p \ge \frac{1}{2} \end{cases},$ $\ln$ повторюється $(K-1)$ раз

Порівнявши наведені в таблиці 2.1 результати, відзначимо, що при $K = 1$ й $0 < p \leq 1$ константи в оцінках похибок для обох підходів збігаються, а при $p \geq 1$ константа в оцінці похибки для ітерованого методу Тіхонова менша, ніж для стандартного, так само, як і при значеннях $K \geq 2$, $p \geq e$. Це свідчить про більшу ефективність ітерованого методу Тіхонова у сенсі точності розв'язування. З іншого боку, стандартний метод Тіхонова має більш просту структуру, на відміну від його ітерованого варіанту, що в свою чергу дозволяє скоротити обсяг обчислювальних витрат при використанні ординарного варіанту цього регуляризатора.

2.5. Чисельні експерименти

У цьому параграфі будуть наведені чисельні експерименти, що демонструють ефективність дослідженого в §2.3 підходу, який полягає в комбінації стандартного методу Тіхонова з принципом рівноваги, і проведене порівняння цих результатів з результатами, отриманими раніше для інших методів.

Наслідуючи [10, 23], розглянемо інтегральне рівняння з логарифмічним ядром

$$Ax(t) := \int_0^1 \ln(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in [2,3]. \tag{2.75}$$

Оскільки $[0,1]\bigcap[2,3] = \emptyset$, а ядро оператора є аналітичною функцією відносно змінних t й τ, то задача (2.75) з розв'язками, що мають скінченну гладкість, а також з кусково-розривними розв'язками, буде жорстко некоректною.

Як і в [10], дискретизуватимемо оператор рівняння наступним чином

$$A_{n,h}x(t) = \int_0^1 a_{n,h}(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{2.76}$$

де

$$a_{n,h}(t,\tau) = \sum_{(i,j)\in\Omega_n} \varphi_j(s)\psi_i(t)\hat{a_h}(i,j),$$

$$\hat{a}_h(i,j) = \int_0^1 \int_2^3 a_h(t,\tau)\varphi_j(\tau)\psi_i(t)dtd\tau,$$

$a_h(t,\tau)$ - сума ряду Тейлора така, що $\|a_h(t,\tau) - \ln(t-\tau)\|_{L_2(2,3)\times(0,1)} \le h$. Тут $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}, \quad i = 1,2,\ldots,$ – ортонормовані системи поліномів Лежандра, що розглядаються на відрізках $[0,1]$, $[2,3]$ відповідно, а $\Omega_n = \{(i,j) : i \cdot j \le n+1, i \le n, j \le n\}$ – область координатної площини, відповідно до якої проводиться чисельна дискретизація задачі (2.75).

Так само, як і в [10, 23], протестуємо наш алгоритм у трьох випадках, коли розв'язки задачі (2.75) відомі точно. А саме, нехай праві частини $y(t) =$

$y_k(t), \quad k=1,2,3$, задаються у вигляді

$$y_1(t) = \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{(t-1)^2}{2}\ln(t-1) - (t^2 - 1 + \frac{1}{4})\ln(t-\frac{1}{2}) - \frac{3}{8},$$
$$y_2(t) = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2-1}{2}\ln(t-1) - \frac{t}{2} - \frac{1}{4},$$
$$y_3(t) = t\ln t - (t-\frac{1}{2})\ln(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що функції

$$x_1(\tau) = \begin{cases} \tau, & \tau \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1-\tau, & \tau \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}, \quad x_2(\tau) = \tau, \quad x_3(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0,\frac{1}{2}] \\ 0, & \tau \in (\frac{1}{2},1] \end{cases},$$

є розв'язками задачі (2.75) при $y = y_k$, $k = 1,2,3$, відповідно. Збурені дані $y_\delta(t) = y_{\delta,k}(t)$, $k = 1,2,3$, будуються у вигляді кусково-лінійних функцій, які інтерполюють значення $y_{\delta,k}(t_j) = y_k(t_j) + \delta z_j$ в точках $t_j = 2 + \frac{j}{M}, i = 0,1,2,\ldots,M$, де $M = 5000$, а значення z_j обираються генератором випадкових чисел так, щоб виконувалося $|z_j| \leq 1$. Тут δ характеризує рівень похибки вхідних даних.

Обчислення були проведені для трьох різних рівнів похибки, а саме $\delta = h = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$. Чисельні результати розв'язування задачі (2.76) описаним вище методом (а також результати робіт [10, 23]), представлені в таблицях 2.2, 2.3, й 2.4 для $k = 1,2,3$, відповідно.

У таблицях введені наступні позначення:

"error" визначає похибку наближення у метриці $L_2(0,1)$;

δ – рівень похибки вхідних даних;

n – рівень дискретизації;

q – знаменник геометричної прогресії.

Табл. 2.2

	Метод з §2.3			Метод з [10]			Метод з [23]
q	1.5			0.75			1.5
δ	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-7}
$error$	0.1048	0.0560	0.0546	0.0549	0.0405	0.0381	0.7561 – 0.0052
n	6	7	8	6	7	8	20

Табл. 2.3

	Метод з §2.3			Метод з [10]			Метод з [23]
q	1.5			0.75			1.5
δ	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-8}
$error$	0.0473	0.0043	0.0082	0.0493	0.0039	0.0003	0.39058 – 0.0005
n	6	7	8	6	7	8	21

Табл. 2.4

	Метод з §2.3			Метод з [10]			Метод з [23]
q	1.5			0.75			1.5
δ	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-8}
$error$	0.2538	0.2434	0.2430	0.2423	0.2377	0.1877	0.40128 – 0.17112
n	6	7	8	6	7	8	24

Проведемо порівняльний аналіз отриманих результатів для всіх трьох підходів. Очевидно, що запропонований нами алгоритм дає такий самий порядок точності наближення, що і в [10], при однаковому обсязі використаної дискретної інформації. У той же час, як згадувалося вище, наш підхід не вимагає додаткової інформації про гладкість розв'язку. Крім того, порівняння нашого підходу з методом із [23] призводить до наступних висновків: обидві стратегії забезпечують однаковий порядок точності, але запропонована в §2.3 стратегія дозволяє істотно зменшити обсяг дискретної інформації. Останній факт підтверджує економічність нашого підходу в порівнянні з алгоритмом із [23].

Висновки до розділу 2

У цьому розділі для ефективного розв'язування жорстко некоректних задач, що подані у вигляді операторних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними, були запропоновані два підходи, що полягають у комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно. При цьому встановлені наступні основні результати:

- Доведено, що побудовані в рамках зазначених підходів стійкі наближення забезпечують порядок точності $O((\underbrace{\ln \cdots \ln}_{K \text{ разів}} \frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на класах жорстко некоректних задач, що розглядаються.
- Встановлено, що при $h \leq O(\delta^{\xi})$ для довільних $\xi > 0$ ці методи забезпечують оптимальний порядок точності.
- Проведено чисельні експерименти, що демонструють ефективність запропонованого підходу на конкретних прикладах рівнянь з класів задач, що досліджуються.

Матеріали цього розділу опубліковано в роботах [45], [57].

РОЗДІЛ 3
СКЛАДНІСТЬ ЖОРСТКО НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

3.1. Поняття мінімального радіуса для гальоркінської інформації та для обсягу обчислювальних витрат. Постановка задачі

Дослідження даного розділу присвячені знаходженню інформаційної та алгоритмічної складності деяких класів жорстко некоректних задач.

Відзначимо, що інтенсивне вивчення складності різного роду задач бере свій початок з робіт Дж. Трауба і Х. Вожьняковського, які у своїх монографіях [67, 17] виклали основи IBC–теорії (Information Based Complexity Theory). У рамках цієї теорії під інформаційною складністю розуміється найменший обсяг дискретної інформації, що необхідна для знаходження наближеного розв'язку із заданою точністю, а під алгоритмічною складністю – мінімальне число арифметичних дій, які потрібно виконати для побудови такого розв'язку.

Варто підкреслити, що проблема складності некоректних задач у сенсі IBC–теорії до недавнього часу залишалася відкритою. Більш того, в [70, 71] обговорювалася принципова можливість коректної постановки подібних задач. Тому результати робіт [49, 12], що містять перші точні порядкові оцінки інформаційної та алгоритмічної складності деяких класів помірно некоректних задач, можна вважати відправною точкою у вивченні зазначеної проблематики. Щодо жорстко некоректних задач, то дослідження в цьому напрямку раніше взагалі не проводилися.

Далі, наслідуючи [49], наведемо строгу постановку задач, що вивчаються в розділі 3. Отже, розглянемо рівняння Фредгольма I роду

$$Ax(t) = f(t), \qquad t \in [0;1], \tag{3.1}$$

з інтегральним оператором

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{3.2}$$

що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$. При цьому припускатимемо, що множина $\mathrm{Range}(A)$ не замкнена в L_2 і $f \in \mathrm{Range}(A)$. Також будемо вважати, що права частина рівняння (3.1) задана з деякою похибкою $\delta > 0$, тобто замість f відомо її збурення $f_\delta \in L_2 : \|f - f_\delta\| \le \delta$.

Як вже зазначалося в §2.2, жорстко некоректні задачі мають таку особливість, що точний розв'язок рівняння (3.1) задовольняє деякій умові джерела логарифмічного типу. Метою наших подальших досліджень є наближене знаходження розв'язку $x^\dagger$ (3.1) з мінімальною нормою в L_2, що належить множині

$$M^1_{p,\rho}(A) = M_p(A) := \{u : u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \quad \|v\| \le \rho\}. \tag{3.3}$$

Тут, як і раніше, A^* означає оператор, спряжений до A, тобто

$$A^*u(t) = \int_0^1 a(\tau,t)u(\tau)d\tau,$$

а величини $p, \rho > 0$ припускаються відомими.

Нехай далі $\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$ – деякий ортонормований базис у L_2. Через P_m позначимо ортопроектор на $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$:

$$P_m\varphi(t) = \sum_{i=1}^m (\varphi, e_i)e_i(t).$$

Введемо у розгляд наступний клас досліджуваних операторів (3.2):

$$\mathcal{H}^{r,s}_\gamma := \{A : \|A\| \le \gamma_0, \quad \sum_{n+m=1}^\infty \hat{a}^2_{n,m} \ \underline{n}^{2r} \cdot \underline{m}^{2s} \le \gamma_1^2\}, \quad \gamma = (\gamma_0;\gamma_1),\ \gamma_0 \le e^{-\frac{1}{2}},$$

де $r, s > 0$,

$$\hat{a}_{n,m} = \int_0^1 \int_0^1 e_n(t)e_m(\tau)a(t,\tau)d\tau dt,$$

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ і $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Зауважимо, що за базис можуть бути використані, зокрема, ортонормована система функцій Хаара ($0 < r, s \leq 1$), підпростір тригонометричних многочленів (в періодичному випадку), а також ортонормована система поліномів Лежандра, що розглядається на відрізку [0;1].

Відомо, якщо ядро $a(t, \tau)$ оператора A вигляду (3.2) має мішані частинні похідні і для усіх $i = 0, 1, \ldots, r, \quad j = 0, 1, \ldots, s$ виконується

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^{i+j} a(t; \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \right]^2 dt d\tau < \infty,$$

то $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ при деякому наборі $\gamma = (\gamma_0; \gamma_1)$ та будь-якому з вище перерахованих базисів.

Надалі клас рівнянь (3.1) із операторами (3.2) з $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ й розв'язками з (3.3) позначатимемо $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

У межах цього розділу зосередимося на дослідженні проекційних методів розв'язування рівнянь із $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ при $r \geq s$.

Відомо (див., наприклад, [16, с. 87]), що довільний лінійний неперервний оператор $A : L_2 \to L_2$ може бути представлений за допомогою нескінченної матриці $\{(Ae_j, e_i)\}_{i,j=1}^{\infty}$ у вигляді

$$Ag = \sum_{i,j=1}^{\infty} (Ae_j, e_i)(g, e_j) e_i.$$

Кожному скалярному добутку (Ae_j, e_i) зіставимо точку $(i; j)$ координатної площини, яка буде відповідати індексу скалярного добутку (Ae_j, e_i). А під індексом скалярного добутку (g, e_j) будемо розуміти натуральне число j.

Далі візьмемо довільну обмежену область $\Omega \subset [1; \infty) \times [1; \infty)$ координатної площини. Через ω_1, ω_2 позначимо проекції цієї області на вісі Oi та Oj, тобто $\omega_1 := \{i : (i; j) \in \Omega\}$, $\omega_2 := \{j : (i; j) \in \Omega\}$. За допомогою Ω здійснемо перехід від (3.1) до дискретизованого рівняння

$$A_\Omega x = P_{\omega_1} f_\delta,$$

де

$$
\begin{aligned}
A_\Omega x &= \sum_{(i,j)\in\Omega}(Ae_j,e_i)(x,e_j)e_i,\\
P_{\omega_1}f_\delta &= \sum_{k\in\omega_1}(f_\delta,e_k)e_k.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Набір скалярних добутків вигляду

$$
(Ae_j,e_i),\quad (f_\delta,e_k),\quad (i;j)\in\Omega,\quad k\in\omega_1, \tag{3.5}
$$

що використовуються при побудові (3.4), називають гальоркінською інформацією про (3.1), а під $\mathrm{card}(\Omega)$ розуміється загальна кількість скалярних добутків вигляду (Ae_j,e_i) з (3.5).

Зокрема, якщо $\Omega=[1;n]\times[1;m]$, $\omega_1=[1,n]$, то ми одержуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації з $\mathrm{card}(\Omega)=n\cdot m$. Дослідження різних класів некоректних задач за допомогою саме такої схеми були проведені у низці робіт, серед яких виділимо [52, 40].

Під проекційним методом розв'язування (3.1) надалі будемо розуміти будь-яке відображення $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\Omega):L_2\to L_2$, яке за допомогою гальоркінської інформації (3.5) про рівняння (3.1) зіставляє правій частині розв'язуваного рівняння елемент $\mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta$, що є многочленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ з номерами гармонік із ω_2. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (3.1). Зазначимо, що від методу $\mathcal{P}$ не вимагається ані лінійності, ані неперервності. Таке загальне розуміння методу корисне, зокрема, при порівнянні апроксимаційних властивостей усіх можливих способів розв'язування (3.1).

Під похибкою методу $\mathcal{P}(\Omega)$ на класі рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},M_p(A))$, зазвичай, будемо розуміти його найбільше відхилення

$$
\varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},M_p(A),\mathcal{P}(\Omega)\right)=\sup_{A\in\mathcal{H}_\gamma^{r,s}}\ \sup_{x^\dagger\in M_p(A)}\ \sup_{f_\delta:\|f-f_\delta\|\le\delta}\ \|x^\dagger-\mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta\|.
$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$
R_{N,\delta}\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},M_p(A)\right)=\inf_{\Omega:\,\mathrm{card}(\Omega)\le N}\ \inf_{\mathcal{P}(\Omega)}\ \varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},M_p(A),\mathcal{P}(\Omega)\right).
$$

Ця величина характеризує інформаційну складність класу задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Позначимо через Π_M множину усіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій (е.а.о.). Мінімальний радіус обсягу обчислювальних витрат задамо величиною

$$\overline{R}_{M,\delta}\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)\right) = \inf_{\Omega:\ \operatorname{card}(\Omega)\le M} \ \inf_{\mathcal{P}(\Omega)\in\Pi_M} \varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right).$$

Ця величина характеризує алгоритмічну складність класу задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Нагадаємо, що раніше у роботі [63] було встановлено, що похибка довільного наближеного методу на класі жорстко некоректних задач з розв'язками з (3.3) та $\delta-$збуреними правими частинами не може бути меншою, ніж $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$. Тому методи, що гарантують для величини $\varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)\right)$ вказаний порядок точності, будемо називати оптимальними за порядком. Очевидно, серед усіх проекційних методів доцільно розглядати насамперед такі, що є оптимальними.

Щодо історії дослідження складності некоректних задач, відзначимо, що вперше економічні за обсягом задіяної гальоркінської інформації (3.5) проекційні методи розв'язування помірно некоректних задач з точними розв'язками вигляду

$$x^\dagger = (A^*A)^{\nu/2}v, \quad \|v\| \le \rho, \quad 0 < \nu < \infty, \tag{3.6}$$

були побудовані в [52], де за схему дискретизації використовувався виключно стандартний метод Гальоркіна. Згодом в роботі [49] були отримані перші порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації для рівнянь (3.1) з розв'язками (3.6) при фіксованому $\nu = 2$ й операторами з $\mathcal{H}_\gamma^{r,r}$. Надалі дослідження, ініційовані в [49], були продовжені в низці робіт, серед яких назвемо [13, 61]. При цьому, як виявилося, оптимальні порядки величин, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність рівнянь (3.1), реалізуються не в рамках стандартної схеми Гальоркіна, а деякої її модифікації, що ґрунтується на ідеї гіперболічного хреста (докладніше про це див. §3.2). Як вже зазначалося вище, складність некоректних задач до останнього часу вивчалася лише у випадку рівнянь (3.1) з розв'язками вигляду (3.6). Щодо інших типів некоректних задач (зокрема, жорстко некоректних), то тут можна згадати лише статтю [40], в якій розглядалося питання економічної дискретизації в межах стандартної схеми Гальоркіна для задач (3.1) з розв'язками, що задовольняють загальній умові джерела

$$x^{\dagger} = \varphi(A^*A)v,$$

де індексна функція φ припускалася неперервно зростаючою й такою, що $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\gamma_0^2) = 1$. Очевидно, що умови (3.3) і (3.6) є частинним випадком останньої. Проте оцінки складності в роботі [40] знайдені не були.

У цьому розділі будуть вперше знайдені оцінки величин $R_{N,\delta}, \overline{R}_{M,\delta}$, що характеризують інформаційну та алгоритмічну складність класів жорстко некоректних задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

На закінчення параграфа сформулюємо в наших позначеннях один допоміжний результат з [40] (див. [40, пропозиція 2]), який знадобиться нам надалі. Отже,

Лема 3.1. *При будь-яких $p > 0$ і $m = 1, 2, \ldots$ має місце наступна нерівність*

$$\|(I - P_m)\ln^{-p}(A^*A)^{-1}\| \leq \ln^{-p}(\|A(I - P_m)\|^{-2}).$$

3.2. Економічна проекційна схема дискретизації. Апроксимаційні властивості

Оскільки на практиці при побудові чисельного розв'язку припустиме використання лише скінченного обсягу дискретної інформації про задачу, то замість вихідного рівняння нам доводиться розглядати його скінченновимірний аналог. Такий етап побудови наближеного розв'язку в чисельному аналізі прийнято називати дискретизацією. У зв'язку з цим виникає актуальна проблема мінімізації обсягу задіяної дискретної інформації та зменшення кількості виконуваних у процесі розв'язування арифметичних дій *без втрати точності.*

Для економічної дискретизації рівнянь з $\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)\right), \quad r \geq s$, замість стандартної схеми Гальоркіна P_nAP_m скористаємося її модифікацією, у межах якої за область Ω для індексів (i,j) береться гіперболічний хрест вигляду

$$\Gamma_{b,n} = \{1\} \times [1; 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn-rk/s}] \subset [1; 2^n] \times [1; 2^{bn}], \tag{3.7}$$

де $\frac{r}{s} < b \leq \frac{2r}{s}, \quad n \in \mathbb{N}$. Для спрощення, тут і надалі, будемо вважати r/s цілим числом.

Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f_\delta, \tag{3.8}$$

де

$$A_n = A_n^b := P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} \left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) A P_{2^{bn - \frac{r}{s}k}}, \tag{3.9}$$

а твірна функція g_α задовольняє умови

$$\begin{gathered} \sup_{0<\lambda\leq\gamma_0^2} \sqrt{\lambda} \quad |g_\alpha(\lambda)| \leq \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}}, \\ \sup_{0<\lambda\leq\gamma_0^2} \quad |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \ln^{-\mu} \lambda^{-1} \leq \varkappa_\mu \ln^{-\mu} \frac{1}{\alpha} \end{gathered} \tag{3.10}$$

при деяких сталих $\varkappa_*$, $\varkappa_\mu > 0$ й довільному $\mu \geq 0$.

Відзначимо (див., наприклад, [34]), що більшість відомих регуляризаторів (зокрема, стандартний метод Тіхонова, а також його ітерований варіант) задовольняють (3.10).

Проекційний метод (3.8) - (3.10) з апріорним правилом вибору параметра регуляризації α

$$\ln^{-p}\alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha} \tag{3.11}$$

позначимо через $\mathcal{P}_g^{'}(\Gamma_{b,n}) = \mathcal{P}^{'}(\Gamma_{b,n})$.

Нижче ми доведемо твердження, що характеризують апроксимаційні властивості запропонованої схеми (3.9).

Лема 3.2. *Нехай* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $\quad r \geq s$. *Тоді має місце наступна оцінка*

$$\|A^*A - A_n^*A_n\| \leq \bar{\gamma}\gamma_1 C_0 2^{-sbn},$$

де A_n *визначається співвідношенням (3.9),* $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$,

$$C_0 = 3 + \frac{2^{2r+1}}{2^r - 1}. \tag{3.12}$$

Доведення. Передусім, розпишемо подання

$$A_n^*A_n = P_{2^{bn}}A^*P_1AP_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}A^*\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right)AP_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}.$$

Далі, неважко бачити, що

$$A^*A - A_n^*A_n = \left(I - P_{2^{bn}}\right)A^*A + P_{2^{bn}}A^*A\left(I - P_{2^{bn}}\right) + P_{2^{bn}}A^*AP_{2^{bn}} - A_n^*A_n,$$

де

$$P_{2^{bn}}A^*AP_{2^{bn}} - A_n^*A_n = P_{2^{bn}}A^*\left(I - P_{2^n}\right)AP_{2^{bn}} + \left(P_{2^{bn}}A^*P_{2^n}AP_{2^{bn}} - A_n^*A_n\right).$$

Останню різницю подамо у вигляді:

$$P_{2^{bn}}A^*P_{2^n}AP_{2^{bn}} - A_n^*A_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn}}A^*\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right)AP_{2^{bn}} - \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}A^*\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right)AP_{2^{bn-\frac{r}{s}k}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(P_{2^{bn}} - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}})A^*\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right)AP_{2^{bn}}+$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}A^*\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right)A(P_{2^{bn}} - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}).$$

Таким чином,

$$\|A^*A - A_n^*A_n\| \leq$$
$$\leq \gamma_0\gamma_1 2^{-sbn} + \gamma_0\gamma_1 2^{-sbn} + \gamma_1^2 2^{-2rn} + 2\sum_{k=1}^{n}\|(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}})A^*(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})A\| \leq$$
$$\leq 2\gamma_0\gamma_1 2^{-sbn} + \gamma_1^2 2^{-2rn} + 2\gamma_1^2 2^{-sbn}2^{2r}\sum_{k=1}^{n}2^{-kr} \leq$$
$$\leq 2\gamma_0\gamma_1 2^{-sbn} + \gamma_1^2 2^{-2rn} + 2\gamma_1^2 2^{-sbn}\frac{2^{2r}}{2^r - 1}.$$

Врахувавши, що $b \leq \frac{2r}{s}$, остаточно отримуємо

$$\|A^*A - A_n^*A_n\| \leq \bar{\gamma}\gamma_1 C_0 2^{-sbn},$$

де $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_0, \gamma_1\}$, а C_0 визначається співвідношенням (3.12).

Таким чином, лема доведена. □

Для встановлення ще однієї апроксимаційної властивості схеми (3.9) нам знадобиться

Лема 3.3. *Нехай* $I := \int_0^n (sbn - rx)^{-p}dx$, $sb > r$. *Тоді справджується*

$$I = \frac{1}{r}\ln\frac{sb}{sb - r}, \quad p = 1,$$

$$I \leq \frac{\beta_p}{r}(sbn)^{1-p}, \quad p \neq 1,$$

де

$$\beta_p = \frac{1}{(p-1)}\left[\frac{(sb - r)^{1-p}}{(sb)^{1-p}} - 1\right]. \tag{3.13}$$

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) Нехай спершу $p \neq 1$, тоді

$$I = -\frac{1}{r}(sbn - rx)^{1-p}\frac{1}{1-p}\bigg|_0^n = \frac{1}{r(p-1)}(sbn)^{1-p}\left[\frac{(sb-r)^{1-p}}{(sb)^{1-p}} - 1\right] = \frac{1}{r}\beta_p(sbn)^{1-p},$$

де β_p визначається співвідношенням (3.13).

2) Залишилося розглянути випадок $p = 1$:

$$I = \int_0^n \frac{1}{sbn - rx}dx = -\frac{1}{r}\ln(sbn - rx)\bigg|_0^n = \frac{1}{r}\ln\frac{sb}{sb-r}.$$

Таким чином, лема доведена. $\square$

Розглянемо β_p як функцію від p та дослідимо її поведінку на інтервалі $(0;\infty)$. Покладемо у (3.13)

$$t = \frac{sb-r}{r}, \qquad 0 < t \leq 1,$$

й перепишемо (3.13) наступним чином

$$\beta_p = \frac{1}{p-1}\left(t^{1-p} - 1\right), \quad p > 0, \quad p \neq 1.$$

Далі дослідимо β_p на найбільше значення на $(0,\infty)$. Отже,

$$\beta_p' = -\frac{1}{(p-1)^2}\left(t^{1-p} - 1\right) + \left(-\frac{1}{p-1}t^{1-p}\ln t\right) =$$
$$= \frac{t^{1-p}}{(p-1)^2}\left[(p-1)\ln\frac{1}{t} - (1 - t^{p-1})\right] = \frac{t^{1-p}}{(p-1)^2}\left[\beta_1(p) - \beta_2(p)\right],$$

де

$$\beta_1(p) := (p-1)\ln\frac{1}{t},$$
$$\beta_2(p) := 1 - t^{p-1}.$$

Очевидно, що $\frac{t^{1-p}}{(p-1)^2} > 0$, для всіх $p \in (0,\infty)$, $p \neq 1$. Визначимо знак виразу, що стоїть у квадратних дужках. Для цього дослідимо поведінку функцій $\beta_1(p), \beta_2(p)$ на $(0,\infty)$.

Оскільки

$$\beta_2'(p) := -t^{p-1}\ln t > 0,$$
$$\beta_2''(p) := -t^{p-1}\ln^2 t < 0$$

для усіх $p \in (0,\infty)$, то $\beta_2(p)$ є монотонно зростаючою й опуклою вгору на $(0,\infty)$. Очевидно, що $\beta_1(1) = \beta_2(1) = 0$. Легко показати, що функція $\beta_1(p) := (p-1)\ln\frac{1}{t}$ є дотичною до графіка функції $\beta_2(p)$ у точці $p = 1$.

Таким чином, врахувавши поведінку функцій $\beta_1(p), \beta_2(p)$, отримуємо наступну нерівність $\beta_1(p) - \beta_2(p) > 0$ для всіх $p \in (0,\infty)$, $p \neq 1$. Отже, $\beta_p' > 0$, для всіх $p \in (0,\infty)$, $p \neq 1$.

Далі дослідимо поведінку функції β_p на нескінченності, в околі 1, а також у нулі справа. Для цього обчислимо границі:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p-1}\left(t^{1-p}-1\right) = \infty,$$
$$\lim_{p\to 1-0}\frac{1}{p-1}\left(t^{1-p}-1\right) = -\ln t,$$
$$\lim_{p\to 1+0}\frac{1}{p-1}\left(t^{1-p}-1\right) = -\ln t,$$
$$\lim_{p\to 0+}\frac{1}{p-1}\left(t^{1-p}-1\right) = 1-t.$$

Таким чином, якщо довизначити β_p в точці $p = 1:$

$$\beta_p = \begin{cases} -\ln\frac{sb-r}{r}, & p = 1 \\ \frac{1}{p-1}\left(\left(\frac{sb-r}{r}\right)^{1-p}-1\right), & p \neq 1 \end{cases}, \tag{3.14}$$

можна дістатися наступного висновку.

Наслідок 3.1. *Функція β_p (3.14) є неперервною монотонно зростаючою на* $(0,\infty)$.

Лема 3.4. *Нехай $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $\quad r \geq s$. Тоді при будь-якому $p > 0$ має місце наступна оцінка*

$$\|\,(P_{2^n}A - A_n)\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| \leq \gamma_1\rho C_1 2^{-sbn}(sbn)^{1-p},$$

де A_n визначаеться співвідношенням (3.9) й

$$C_1 = \left(\bar{o}(1) + \frac{2^r}{r}\beta_p\right) \ln^{-p} 2. \tag{3.15}$$

Доведення. Спершу розпишемо різницю

$$P_{2^n}A - A_n = P_1 A(I - P_{2^{bn}}) + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\, A(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}).$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned}
&\|(P_{2^n}A - A_n) \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| \leq \\
&\leq \|A(I - P_{2^{bn}})\| \|(I - P_{2^{bn}}) \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \|\, (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})\, A(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}})\| \|(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}) \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\|.
\end{aligned}$$

Далі нам належить оцінити величини

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \|(I - P_{2^{bn}}) \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\|, \\
S_2 &:= \|(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}}) \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\|.
\end{aligned}$$

Застосувавши лему 3.1, отримуємо

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \rho \ln^{-p}\left(\|A(I - P_{2^{bn}})\|^{-2}\right) \leq \rho \ln^{-p}\left((\gamma_1 2^{-sbn})^{-2}\right) = \\
&= \rho \left(2sbn \ln 2 - 2\ln\gamma_1\right)^{-p}.
\end{aligned}$$

Без втрати загальності будемо вважати, що

$$2\ln\gamma_1 \leq sbn \ln 2.$$

Отже,

$$S_1 \leq \rho(sbn)^{-p} \ln^{-p} 2.$$

Аналогічно знаходимо оцінку для S_2:

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \rho \ln^{-p}\left(\|A(I - P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}})\|^{-2}\right) \leq \rho \ln^{-p}\left(\gamma_1 2^{-s(bn-\frac{r}{s}k)}\right)^{-2} = \\
&= \rho \left(2(sbn - rk)\ln 2 - 2\ln\gamma_1\right)^{-p} \leq \rho(sbn - rk)^{-p} \ln^{-p} 2.
\end{aligned}$$

Врахувавши знайдені вище оцінки для S_1 і S_2, отримуємо

$$\|(P_{2^n}A - A_n)\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| \le \gamma_1\rho 2^{-sbn}(sbn)^{-p}\ln^{-p}2+$$
$$+\rho\ln^{-p}2\sum_{k=1}^{n}\|\left(P_{2^k}-P_{2^{k-1}}\right)A(I-P_{2^{bn-\frac{r}{s}k}})\|\left(sbn-rk\right)^{-p}.$$

Звідки в силу означення класу $\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}$ знаходимо

$$\|(P_{2^n}A - A_n)\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| \le$$
$$\le \gamma_1\rho 2^{-sbn}(sbn)^{-p}\ln^{-p}2 + \gamma_1\rho(\ln^{-p}2)2^r 2^{-sbn}\sum_{k=1}^{n}(sbn-rk)^{-p} =$$
$$= \gamma_1\rho 2^{-sbn}(sbn)^{-p}\ln^{-p}2 + \gamma_1\rho(\ln^{-p}2)2^r 2^{-sbn}((sbn-rn)^{-p}-(sbn)^{-p}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}(sbn-rk)^{-p}).$$

Останню суму $\sum_{k=0}^{n-1}(sbn-rk)^{-p}$ оцінимо зверху через інтеграл

$$I := \int_0^n (sbn-rx)^{-p}dx.$$

Отже, згідно леми 3.3 маємо, що при $p=1$

$$I = \frac{1}{r}\beta_p,$$

а при $p \ne 1$

$$I \le \frac{\beta_p}{r}(sbn)^{1-p},$$

де β_p визначається співвідношенням (3.14). Отже,

$$\|(P_{2^n}A - A_n)\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\| \le$$
$$\le \gamma_1\rho 2^{-sbn}(\ln 2)^{-p}(sbn)^{-p} + \gamma_1\rho(\ln 2)^{-p}2^r 2^{-sbn}\left(I+(sbn-rn)^{-p}-(sbn)^{-p}\right) \le$$
$$\le \gamma_1\rho C_1 2^{-sbn}(sbn)^{1-p},$$

де

$$C_1 = \left(\bar{o}(1)+\frac{2^r}{r}\beta_p\right)\ln^{-p}2. \tag{3.16}$$

Таким чином, лема повністю доведена. □

3.3. Допоміжні результати

У цьому параграфі буде доведено низку допоміжних тверджень, що необхідні для встановлення основних результатів третього розділу.

Лема 3.5. *Мають місце двосторонні оцінки*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}2^{bn}n \le \operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) \le \eta_1 2^{bn}n, \quad r = s, \\ \eta_2 2^{bn} \le \operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) \le \eta_3 2^{bn}, \quad r > s, \end{aligned} \tag{3.17}$$

де

$$\eta_1 = \frac{3}{2}, \quad \eta_2 = 1 + 2^{-r/s}, \quad \eta_3 = \frac{1}{1 - 2^{1-r/s}}. \tag{3.18}$$

Доведення. Згідно (3.7) маємо

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(Q_k),$$

де $Q_k = \begin{cases} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn-rk/s}], & k = 1, 2, \dots n \\ \{1\} \times [1; 2^{bn}], & k = 0 \end{cases}.$

Звідки

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) = 2^{bn} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k 2^{bn-rk/s}.$$

Далі розглянемо два випадки.

1) Нехай спершу $r = s$, тоді справджується рівність

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) = 2^{bn} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{bn} = 2^{bn}\left(1 + \frac{n}{2}\right) = 2^{bn}n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

Очевидно,

$$\frac{1}{2}2^{bn}n \le \operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) \le \frac{3}{2}2^{bn}n.$$

2) У випадку $r > s$ послідовність величин $\{\operatorname{card}(Q_k)\}_{k=1}^{n}$ є геометричною прогресію зі знаменником $2^{1-\frac{r}{s}}$, для яких мають місце співвідношення

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) = 2^{bn}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^{k(1-\frac{r}{s})}\right).$$

Звідки

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) = \frac{1}{2}2^{bn}\left(1+\sum_{k=0}^{n}2^{k(1-\frac{r}{s})}\right) = \frac{1}{2}2^{bn}\left(1+\frac{2^{(1-r/s)(n+1)}-1}{2^{(1-r/s)}-1}\right).$$

Далі, останній вираз у дужках оцінимо зверху і знизу:

$$1+\frac{2^{(1-r/s)(n+1)}-1}{2^{(1-r/s)}-1} = \frac{2-2^{(1-r/s)}\left(1+2^{(1-r/s)n}\right)}{1-2^{1-r/s}} \le \frac{2}{1-2^{1-r/s}},$$

$$1+\frac{2^{(1-r/s)(n+1)}-1}{2^{(1-r/s)}-1} = 1+\frac{1-2^{(1-r/s)(n+1)}}{1-2^{1-r/s}} \ge 1+\frac{1-2^{2(1-r/s)}}{1-2^{1-r/s}} = 2+2^{1-r/s}.$$

Таким чином, остаточно знаходимо

$$(1+2^{-r/s})2^{bn} \le \operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) \le \frac{1}{1-2^{1-r/s}}2^{bn}.$$

Твердження леми повністю доведено. $\square$

Лема 3.6. *Існують такі* $\theta, \quad 0<\theta<1$, *що*

$$\ln\frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \ge \ln 2^{\theta sbn}, \tag{3.19}$$

де $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_0,\gamma_1\}, \quad \gamma_0 \le e^{-1/2}, \quad C_0 = 3+\frac{2^{2r+1}}{2^r-1}$.

Доведення. Очевидно, що завжди можна вибрати $0<\theta<1$ так, щоб виконувалося

$$2^{sbn} \ge (\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Логарифмуючи останню нерівність, знаходимо

$$\ln 2^{sbn} \ge \frac{1}{1-\theta}\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0).$$

Тоді

$$(1-\theta)\ln 2^{sbn} \ge \ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0),$$

$$\ln\frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} - \ln 2^{\theta sbn} \ge 0.$$

Що й треба було довести. $\square$

Лема 3.7. *Нехай виконані умови*

$$2^{sbn}(sbn)^{p-1} = \delta^{-1} \tag{3.20}$$

й (3.19). Тоді має місце оцінка

$$\ln 2^{sbn} \geq \eta_4 \ln \delta^{-2}, \tag{3.21}$$

де

$$\eta_4 = \begin{cases} 1/2, & 0 < p \leq 1 \\ \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{2(\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)+(1-\theta)(p-1)[\ln\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)-\ln(1-\theta)-\ln\ln 2])}, & p \geq 1 \end{cases}. \tag{3.22}$$

Доведення. Логарифмуючи (3.20), отримаємо

$$\ln \delta^{-1} = sbn \ln 2 + (p-1)\ln(sbn).$$

Далі перепишемо (3.21) у вигляді

$$\frac{sbn \ln 2}{2(sbn \ln 2 + (p-1)\ln(sbn))} \geq \eta_4$$

і розглянемо допоміжну функцію

$$\vartheta(t) = \frac{t \ln 2}{2(t \ln 2 + (p-1)\ln t)}, \quad t \geq \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}.$$

Для дослідження цієї функції на найменше значення, розглянемо два випадки.

1) Нехай спершу $p = 1$, тоді

$$\vartheta(t) \equiv \frac{1}{2} \quad \text{при всіх} \quad t \geq \frac{1}{1-\theta}\frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}.$$

2) Нехай тепер $p \neq 1$. У цьому разі

$$\vartheta'(t) = \frac{(p-1)\ln 2}{2(t\ln 2 + (p-1)\ln t)^2}(\ln t - 1).$$

Очевидно, що $\vartheta'(t) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $t = e$. Без втрати загальності припускатимемо, що $e \notin \left[\frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}, \infty\right)$. Й знову розглянемо два випадки.

a) Нехай спершу $0 < p < 1$, тоді $\vartheta'(t) < 0$. Отже, $\vartheta(t)$ монотонно спадає на всьому інтервалі $\left[\frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}, \infty\right)$ і своє найменше значення досягає при $t \to \infty$, тобто

$$\min_t \quad \vartheta(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t\ln 2}{2(t\ln 2 + (p-1)\ln t)} = \frac{1}{2}.$$

b) Залишилося розглянути випадок $p > 1$. У цьому разі $\vartheta(t)$ монотонно зростає на всьому інтервалі $\left[\frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}, \infty\right)$. Тоді найменше значення $\vartheta(t)$ досягає при $t = \frac{1}{1-\theta}\frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{\ln 2}$, тобто

$$\min_t \quad \vartheta(t) = \frac{\frac{1}{1-\theta}\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{2(\frac{1}{1-\theta}\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0) + (p-1)\ln\frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{(1-\theta)\ln 2})} =$$

$$= \frac{\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{2(\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0) + (1-\theta)(p-1)[\ln\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0) - \ln(1-\theta) - \ln\ln 2])}.$$

Таким чином,

$$\ln 2^{sbn} \geq \eta_4 \ln \delta^{-2},$$

де η_4 визначається співвідношенням (3.22). Твердження леми повністю доведено. $\square$

Лема 3.8. *Нехай α вибирається за правилом (3.11):*

$$\ln^{-p}\frac{1}{\alpha} = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тоді при $\alpha \in (0; e^{-1}]$ має місце наступна оцінка

$$\ln\frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \geq \theta\eta_4 \ln\frac{1}{\alpha},$$

де $0 < \theta < 1$, а η_4 визначається співвідношенням (3.22).

Доведення. З лем 3.6, 3.7 випливає

$$\ln\frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \geq \ln 2^{\theta sbn} \geq \theta\eta_4 \ln\delta^{-2}.$$

Далі, з (3.11) знаходимо

$$\ln\delta^{-2} = \ln\alpha^{-1} + 2p\ln\ln\alpha^{-1}.$$

Очевидно, що для всіх $\alpha \in (0; e^{-1}]$ виконується

$$\ln \delta^{-2} \geq \ln \alpha^{-1}.$$

Отже,

$$\ln \frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \geq \theta\eta_4 \ln \frac{1}{\alpha}.$$

□

Лема 3.9. *Нехай α вибирається за правилом (3.11):*

$$\ln^{-p} \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тоді має місце наступна оцінка

$$\ln \delta^{-2} \leq \eta_5 \ln \frac{1}{\alpha}, \tag{3.23}$$

де $\eta_5 = 1 + \frac{2p}{e}$.

Доведення. Співвідношення (3.23) перепишемо у вигляді

$$\frac{\ln \delta^{-2}}{\ln \frac{1}{\alpha}} \leq \eta_5$$

і знайдемо максимум виразу, що знаходиться в лівій частині останньої нерівності.

З (3.11) випливає

$$\ln \delta^{-2} = \ln \frac{1}{\alpha} + 2p \ln \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$\phi(t) = \frac{t + 2p \ln t}{t} = 1 + 2p \frac{\ln t}{t}, \quad t > 0,$$

і дослідимо її на найбільше значення на інтервалі $(0; \infty)$. Отже,

$$\phi'(t) = \frac{2p(1 - \ln t)}{t^2}.$$

Очевидно, що $\phi'(t) = 0$ тільки у точці $t = e$, яка є точкою максимуму для $\phi(t)$, і

$$\phi(e) = 1 + \frac{2p}{e} > 1.$$

Оскільки на кінцях інтервалу $(0;\infty)$ функція $\phi(t)$ не визначена, то знайдемо її граничні значення при $t\to 0$ й $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to 0}\quad \phi(t)=\lim_{t\to 0}\quad (1+2p\frac{\ln t}{t})=-\infty,$$
$$\lim_{t\to\infty}\quad \phi(t)=\lim_{t\to\infty}\quad (1+2p\frac{\ln t}{t})=1.$$

Порівнявши знайдені значення, у результаті отримуємо

$$\max_{t>0}\ \phi(t)=\phi(e)=1+\frac{2p}{e}.$$

Таким чином,

$$\ln\delta^{-2}\le\eta_5\ln\frac{1}{\alpha},$$

де $\eta_5=1+\frac{2p}{e}$.

Лема доведена. □

Лема 3.10. *Нехай n вибирається згідно (3.20). Тоді мають місце такі оцінки*

$$\begin{array}{rcll}\ln\delta^{-1}&\ge&\zeta_1\ln N^s, & r=s\\ \ln\delta^{-1}&\ge&\zeta_2\ln N^s, & r>s\end{array},$$

де $N=:\mathrm{card}(\Gamma_{b,n})$ *і*

$$\zeta_1=\begin{cases}\frac{p}{s+1}, & 0<p\le 1+s\\ 1, & p\ge 1+s\end{cases},\qquad \zeta_2=\begin{cases}p, & 0<p\le\frac{1}{2}\\ 2p-1, & \frac{1}{2}<p<1\\ 1, & p\ge 1\end{cases}. \tag{3.24}$$

Доведення. Нехай спершу $r=s$. З (3.20) і (3.17) випливає

$$\delta^{-1}\ge N^s(\frac{1}{\eta_1}sb)^s(sbn)^{p-1-s},$$

де константа η_1 визначається співвідношенням (3.18). Звідки згідно монотонності логарифма знаходимо

$$\ln\delta^{-1}\ge\ln N^s+s\ln(\frac{1}{\eta_1}sb)+(p-1-s)\ln(sbn). \tag{3.25}$$

Тут, у свою чергу, розглянемо два випадки.

a) Спершу припустимо, що $p \geq 1 + s$. Тоді очевидно

$$\ln \delta^{-1} \geq \ln N^s, \quad sb \geq \eta_1.$$

b) Нехай тепер $0 < p \leq 1 + s$. Без втрати загальності вважатимемо, що

$$(\eta_1)^s (sbn) \leq 2^{s(bn-1)}.$$

Тоді

$$(sbn)^{s+1} \leq 2^{s(bn-1)} (\frac{1}{\eta_1} sbn)^s.$$

З (3.17) і останньої нерівності отримуємо

$$(sbn)^{s+1} \leq N^s (\frac{1}{\eta_1} sb)^s.$$

Логарифмуємо

$$(s+1) \ln(sbn) \leq \ln N^s + \ln(\frac{1}{\eta_1} sb)^s,$$

звідки випливає

$$(s+1-p) \ln(sbn) \leq \frac{(s+1-p)}{s+1} (\ln N^s + \ln(\frac{1}{\eta_1} sb)^s).$$

Згідно співвідношення (3.25) знаходимо

$$\begin{aligned} \ln \delta^{-1} &\geq \ln N^s + s \ln(\frac{1}{\eta_1} sb) - (s+1-p) \ln(sbn) \geq \\ &\geq \ln N^s + s \ln(\frac{1}{\eta_1} sb) - \frac{(s+1-p)}{s+1} (\ln N^s + \ln(\frac{1}{\eta_1} sb)^s) = \\ &= \frac{p}{s+1} \ln N^s + s \frac{p}{s+1} \ln(\frac{1}{\eta_1} sb) \geq \frac{p}{s+1} \ln N^s, \quad sb \geq \eta_1. \end{aligned}$$

Об'єднавши знайдені оцінки для $\ln \delta^{-1}$, в результаті отримуємо

$$\ln \delta^{-1} \geq \zeta_1 \ln N^s,$$

де ζ_1 визначена в (3.24).

Тепер нехай $r > s$. Тоді згідно (3.20) і (3.17) маємо

$$\delta^{-1} = 2^{sbn} (sbn)^{p-1} \geq \left(\frac{1}{\eta_3} \right)^s N^s (sbn)^{p-1},$$

де η_3 визначається співвідношенням (3.18). Логарифмуємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s + \ln\left(\left(\frac{1}{\eta_3}\right)^s (sbn)^{(p-1)}\right). \tag{3.26}$$

Розглянемо три випадки.

c) Нехай спершу $p \geq 1$, тоді очевидно, що $\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s$ для $n \geq \frac{\eta_3^{s/(p-1)}}{sb}$.

d) Тепер нехай $\frac{1}{2} < p < 1$. Враховуючи (3.26), маємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s - (1-p)\ln sbn - s\ln\eta_3 = \ln N^s - (1-p)\ln sbn\left(1 + \frac{s\ln\eta_3}{(1-p)\ln sbn}\right).$$

Оскільки $\frac{s\ln\eta_3}{(1-p)\ln sbn} \leq 1$ при $n \geq \frac{1}{sb}\eta_3^{\frac{s}{1-p}}$, то

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s - 2(1-p)\ln sbn.$$

Далі, врахувавши очевидну нерівність $sbn \leq (\eta_2 2^{bn})^s$ та співвідношення (3.17), остаточно знаходимо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s - 2(1-p)\ln N^s = (2p-1)\ln N^s.$$

e) Залишилося розглянути випадок $0 < p \leq \frac{1}{2}$. Згідно (3.26) маємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s - (1-p)\ln\left(\eta_3^{\frac{s}{1-p}}(sbn)\right).$$

Без втрати загальності можна вважати, що

$$\eta_3^{\frac{s}{1-p}}(sbn) \leq (\eta_2 2^{bn})^s.$$

Отже, враховуючи (3.17), маємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s - (1-p)\ln N^s,$$

$$\ln\delta^{-1} \geq p\ln N^s.$$

Об'єднуючи знайдені оцінки для $\ln\delta^{-1}$, в результаті отримуємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \zeta_2 \ln N^s,$$

де ζ_2 визначена в (3.24).

Таким чином, лема повністю доведена. $\square$

На закінчення параграфа наведемо ще один результат (див. [42, теорема 4]), який нам знадобиться надалі:

Для будь-яких $0 < p < \infty$ *має місце оцінка*

$$|\ln^{-p}\frac{1}{s} - \ln^{-p}\frac{1}{t}| \le C_2 \ln^{-p}|s-t|^{-1}, \tag{3.27}$$

де $s, t \in (0; e^{-1}]$ *такі, що* $|s-t| < e^{-1}$, *і*

$$C_2 = \begin{cases} 1, & 0 < p \le 1 \\ 1 + 4(5p)^p, & p > 1 \end{cases}. \tag{3.28}$$

3.4. Мінімальний радіус для гальоркінської інформації

Даний параграф присвячений знаходженню порядкової оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації $R_{N,\delta}$ на класах задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \geq s$. При цьому буде встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини досягається у рамках запропонованого нами підходу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (3.8) - (3.10).

Насамперед введемо допоміжні величини:

$$C_3 = 1 + \frac{2p}{e},$$

$$C_4 = \begin{cases} \theta/2, & 0 < p \leq 1 \\ \frac{\theta \ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0)}{2(\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0) + (p-1)(1-\theta)[\ln\ln(\bar{\gamma}\gamma_1 C_0) - \ln(1-\theta) - \ln\ln 2])}, & p \geq 1 \end{cases}, \tag{3.29}$$

де $0 < \theta < 1$ – деяка стала,

$$C_5 = C_3^p \left[\rho\overline{\varkappa}(1 + C_2 C_4^{-p}) + \varkappa_*(1 + \gamma_1 \rho C_1)\right], \tag{3.30}$$

$$C_6 = \begin{cases} \frac{p}{s+1}, & 0 < p \leq 1+s \\ 1, & p \geq 1+s \end{cases}, \qquad C_7 = \begin{cases} p, & 0 < p \leq \frac{1}{2} \\ 2p-1, & \frac{1}{2} < p < 1 \\ 1, & p \geq 1 \end{cases}.$$

Тут $\overline{\varkappa} = \max\{\varkappa_0, \varkappa_p\}$, а константи C_0, C_1, C_2 визначаються співвідношеннями (3.12), (3.15) і (3.28), відповідно.

Сформулюємо і доведемо результат, що дає оцінку зверху для $R_{N,\delta}$ через величину N, яка являє собою обсяг задіяної в обчисленнях гальоркінської інформації.

Теорема 3.1. *При N таких, що*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \asymp \begin{cases} \frac{\delta}{\ln^{s+1}\delta^{-1}}, & r = s \\ \frac{\delta}{\ln \delta^{-1}}, & r > s \end{cases}, \tag{3.31}$$

виконується

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \le \varepsilon_\delta\left(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})\right) \le \tilde{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де

$$\tilde{C}_p = C_5 C_8^{-p}, \tag{3.32}$$

$$C_8 = \begin{cases} C_6, & r = s \\ C_7, & r > s \end{cases}. \tag{3.33}$$

Доведення. Подамо похибку методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ наступним чином

$$\begin{aligned} x^\dagger - x_{\alpha,\delta}^n &:= x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f_\delta = \\ &= (x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f) + g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n}(f - f_\delta). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Враховуючи (3.10), другий доданок оцінюється одразу

$$\|g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n}(f - f_\delta)\| \le \frac{\varkappa_* \delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Далі, перепишемо перший доданок з (3.34):

$$\begin{aligned} &x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} A x^\dagger = \\ &\quad = x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n x^\dagger + g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* (A_n - P_{2^n} A) x^\dagger = \\ &\quad = \left(\ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v\right) + \\ &\quad + (I - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n)(\ln^{-p}(A^* A)^{-1} v - \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v) + \\ &\quad + g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* (A_n - P_{2^n} A) x^\dagger. \end{aligned}$$

Знову скориставшись (3.10), знаходимо

$$\begin{aligned} &\|x^\dagger - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f\| \le \\ &\quad \le \varkappa_p \rho \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \|(A_n - P_{2^n} A) x^\dagger\| + \\ &\quad + \|I - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n\| \|\ln^{-p}(A^* A)^{-1} v - \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v\| \le \\ &\quad \le \varkappa_p \rho \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \|(A_n - P_{2^n} A) x^\dagger\| + \varkappa_0 \|\ln^{-p}(A^* A)^{-1} v - \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v\|. \end{aligned}$$

Об'єднавши отримані вище оцінки, у результаті дістаємось нерівності

$$\begin{aligned} &\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\| \le \\ &\qquad \le \varkappa_p \rho \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \left(\delta + \|(P_{2^n} A - A_n) \ln^{-p}(A^* A)^{-1} v\|\right) + \\ &\qquad + \varkappa_0 \| \ln^{-p}(A^* A)^{-1} v - \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v\|. \end{aligned}$$

Тепер можна оцінити останній доданок у (3.34). Отже, враховуючи (3.27) та лему 3.2, маємо

$$\begin{aligned} \| \ln^{-p}(A^* A)^{-1} v - \ln^{-p}(A_n^* A_n)^{-1} v\| &\le C_2 \rho \ln^{-p} \|A^* A - A_n^* A_n\|^{-1} \le \\ &\le C_2 \rho \ln^{-p} \frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0}, \end{aligned}$$

де C_2 визначається співвідношенням (3.28).

Покладемо $\overline{\varkappa} = \max\{\varkappa_0, \varkappa_p\}$. Скориставшись лемою 3.4 та врахувавши останні нерівності, знаходимо

$$\begin{aligned} &\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\| \le \\ &\le \ \varkappa_p \rho \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \left(\delta + \gamma_1 \rho C_1 2^{-sbn} (sbn)^{1-p}\right) + \varkappa_0 C_2 \rho \ln^{-p} \frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \le \\ &\le \ \rho \overline{\varkappa} \left(\ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + C_2 \ln^{-p} \frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0} \right) + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \left(\delta + \gamma_1 \rho C_1 2^{-sbn} (sbn)^{1-p}\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Далі, для мінімізації оцінки (3.35) потрібно належним чином вибрати параметри дискретизації b, n та регуляризації α. Отже, покладемо

$$2^{sbn} (sbn)^{p-1} = \delta^{-1}, \tag{3.36}$$

а величину α будемо вибирати відповідно до (3.11), тобто

$$\delta^{-1} \ln^{-p} \alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \tag{3.37}$$

Очевидно (див. лему 3.9), що

$$\ln \alpha^{-1} \ge C_3^{-1} \ln \delta^{-2}, \tag{3.38}$$

де $C_3 = 1 + \frac{2p}{e}$.

Крім того, справджується оцінка (див. лему 3.8)

$$\ln^{-p}\frac{2^{sbn}}{\bar{\gamma}\gamma_1 C_0}\le C_4^{-p}\ln^{-p}\frac{1}{\alpha},$$

де C_4 визначається співвідношенням (3.29).

Тепер оцінку (3.35) можна переписати у вигляді

$$\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\|\le\rho\overline{\varkappa}\left(\ln^{-p}\frac{1}{\alpha}+C_2C_4^{-p}\ln^{-p}\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}}\left(1+\gamma_1\rho C_1\right)\delta.$$

Скориставшись (3.37) та (3.38), отримаємо

$$\begin{aligned}\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\| &\le\left[\rho\overline{\varkappa}(1+C_2C_4^{-p})+\varkappa_*(1+\gamma_1\rho C_1)\right]C_3^p\ln^{-p}\delta^{-2}=\\ &=2^{-p}C_5\ln^{-p}\delta^{-1},\end{aligned}\tag{3.39}$$

де константа C_5 визначена в (3.30).

Далі виразимо праву частину (3.39) через величину N, де

$$N=:\operatorname{card}(\Gamma_{b,n})\asymp\begin{cases}2^{bn}n, & r=s\\ 2^{bn}, & r>s\end{cases}.\tag{3.40}$$

Згідно леми 3.10 маємо

$$\ln\delta^{-1}\ge 2^{-1}C_8\ln N^{2s},$$

де C_8 визначається співвідношенням (3.33).

Таким чином, оцінка (3.39) набуває вигляд

$$\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\|\le\tilde{C}_p\ln^{-p}N^{2s},$$

де $\tilde{C}_p$ визначена в (3.32).

Нижче нам належить виразити обсяг $\operatorname{card}(\Gamma_{b,n})$ через δ. Розглянемо два випадки.

1) Нехай спершу $r=s$, тоді

$$\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}):=N\asymp 2^{bn}n=\frac{1}{sb}(2^{sbn}(sbn)^{p-1})^{\frac{1}{s}}(sbn)^{\frac{1-p}{s}+1}\asymp\delta^{-\frac{1}{s}}(\ln\delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}.$$

2) Тепер нехай $r > s$, тоді

$$\mathrm{card}(\Gamma_{b,n}) := N \asymp 2^{bn} = (2^{sbn}(sbn)^{p-1})^{\frac{1}{s}}(sbn)^{\frac{1-p}{s}} \asymp \delta^{-\frac{1}{s}}(\ln\delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}.$$

Таким чином, об'єднуючи знайдені порядкові оцінки для $\mathrm{card}(\Gamma_{b,n})$, в результаті отримуємо

$$\mathrm{card}(\Gamma_{b,n}) \asymp \begin{cases} \delta^{-\frac{1}{s}}(\ln\delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}, & r = s \\ \delta^{-\frac{1}{s}}(\ln\delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}, & r > s \end{cases}. \tag{3.41}$$

Нам залишилося показати, що виконується співвідношення (3.31).

Отже, з (3.40) й (3.41) знаходимо

$$N^{-s} \asymp \begin{cases} \delta(\ln\delta^{-1})^{p-1-s}, & r = s \\ \delta(\ln\delta^{-1})^{p-1}, & r > s \end{cases}, \qquad N^{2s} \asymp \begin{cases} 2^{2sbn}(sbn)^{2s}, & r = s \\ 2^{2sbn}, & r > s \end{cases}.$$

Звідси маємо,

$$\ln(N^{2s}) \asymp sbn \asymp \ln\delta^{-1}, \quad r \geq s,$$

й

$$N^{-s}\ln^{-p}(N^{2s}) \asymp \begin{cases} \frac{\delta}{\ln^{s+1}\delta^{-1}}, & r = s \\ \frac{\delta}{\ln\delta^{-1}}, & r > s \end{cases},$$

що в результаті і дає нам (3.31).

Таким чином, твердження теореми повністю доведено. $\square$

Як уже згадувалося раніше, в роботі [40] на основі стандартної гальоркінської схеми дискретизації $P_n A P_m$ були побудовані проекційні методи розв'язування широких класів некоректних задач. Для класів $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ результат теореми 2 [40] можна переформулювати у наших позначеннях наступним чином.

Теорема 3.2. *[40] Нехай наближений розв'язок задачі (3.1) шукається у вигляді*

$$x_{\alpha,\delta}^{n,m} = g_\alpha(A_{n,m}^* A_{n,m})A_{n,m}^* P_n f_\delta,$$

де $A_{n,m} = P_n A P_m$, *а твірна функція* g_α *задовольняє умови (3.10). Тоді на класі рівнянь* $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ *має місце оцінка*

$$\begin{aligned} \|x^\dagger - x_{\alpha,\delta}^{n,m}\| \le \varkappa_p \rho \left[\ln^{-p} \frac{1}{\alpha} + (1 + d_1) \ln^{-p} \frac{m^{2s}}{\gamma_1^2} + d \ln^{-p} \frac{n^{2r}}{\gamma_1^2} \right] + \\ + \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}} \left[\delta + \gamma_1 \rho m^{-s} \ln^{-p} \frac{m^{2s}}{\gamma_1^2} \right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

де $d, d_1 > 0$ *– деякі сталі, що не залежать від* δ, n, m, α

Аналіз оцінки (3.42) показує, що для збереження оптимального порядку точності $O(\ln^{-p} \delta^{-1})$ на всьому класі $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$ параметри регуляризації та дискретизації слід обирати за правилами

$$\sqrt{\alpha} \ln^{-p} \frac{1}{\alpha} = O(\delta),$$

$$m^{-s} \ln^{-p} \frac{m^{2s}}{\gamma_1^2} = O(\delta), \quad n = O(\delta^{-\frac{\varepsilon}{r}}), \tag{3.43}$$

де $\varepsilon > 0$. Тоді оцінка (3.42) набуває вигляд

$$\|x^\dagger - x_{\alpha,\delta}^{n,m}\| \le C \ \ \frac{\ln^{-p} \delta^{-1}}{\varepsilon^p}. \tag{3.44}$$

Очевидно, що величина ε не може бути як завгодно близькою до нуля, щоб не допустити істотного зростання похибки.

Залишилося підрахувати обсяг задіяної гальоркінської інформації (3.5):

$$\operatorname{card}([1; n] \times [1; m]) \asymp \delta^{-1/s} \delta^{-\varepsilon/r} \frac{\ln^{-p/s} \delta^{-1}}{2^{p/s}}. \tag{3.45}$$

Зауваження 3.1. Порівняння отриманих оцінок (3.44), (3.45) для методів з [40] з результатами теореми 3.1 показує, що обидва підходи гарантують оптимальний порядок точності на всьому класі жорстко некоректних задач, що досліджуються, разом з тим задіяна нами модифікація гальоркінського методу дозволяє істотно (тобто за порядком) скоротити обсяг дискретної інформації.

Більш того, нижче буде встановлено, що використана нами схема дискретизації (3.8) не просто є економічною, але й дозволяє реалізувати найменші порядки величин $R_{N,\delta}$, $\overline{R}_{M,\delta}$.

Насамперед нам належить знайти оцінку знизу для мінімального радіусу гальоркінської інформації (3.5).

Отже, зафіксуємо довільно обрану область Ω координатної площини, $\mathrm{card}(\Omega) = N$, і побудуємо оператор $A_1 \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ так, щоб $A_{1,\Omega} = 0$. Для спрощення будемо будувати інтегральний оператор A_1 з виродженим ядром. Виберемо натуральне M так, щоб $N \le M \le 2N$ й $M \notin \omega_2$, де $\omega_2 = \{j : (i;j) \in \Omega\}$. Очевидно, щонайменше одне таке натуральне число завжди знайдеться. Далі, за ядро оператора A_1 візьмемо функцію

$$a_1(t;\tau) = \frac{e_1(t)e_M(\tau)}{M^s}.$$

Нескладно переконатися, що для будь-яких $\gamma_1 \ge 1$ та M таких, що $M^s \ge \frac{1}{\gamma_0}$, має місце включення $A_1 \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$.

Зауважимо тут же, що заміна оператора A_1 (скінченного рангу) оператором $\frac{1}{2}A_1 + B$, де B – довільний оператор із $\mathcal{H}_{\gamma'}^{r,s}$, $\gamma' = (\frac{1}{2}\gamma_0, \frac{1}{2}\gamma_1)$, такий що $\mathrm{rank}(B) = \infty$, $BP_{\omega_2} = 0$, $Be_i(t) = 0$, $i = \overline{1, M}$, нічого не змінить в подальших міркуваннях.

Легко бачити, що оператор $A_1^* A_1$ має єдину власну функцію $e_M(t)$, якій відповідає власне значення M^{-2s}. Отже, для будь-яких $p > 0$ і $v \in L_2$ має місце розклад

$$\ln^{-p}(A_1^* A_1)^{-1} v(t) = \ln^{-p} M^{2s}(e_M, v)e_M(t). \tag{3.46}$$

За розв'язок рівняння

$$A_1 x = f_1$$

візьмемо елемент x_1 із множини (3.3) з $v = e_M$. (Тут і надалі, для спрощення, вважатимемо $\rho = 1$.)

Враховуючи (3.46), маємо

$$x_1(t) := \ln^{-p}(A_1^*A_1)^{-1}e_M(t) = \frac{e_M(t)}{\ln^p M^{2s}}.$$

Звідси знаходимо

$$f_1(t) := A_1x_1(t) = \int_0^1 \frac{e_1(t)e_M(\tau)}{M^s} \cdot \frac{e_M(\tau)}{\ln^p M^{2s}} d\tau =$$
$$= \frac{e_1(t)}{M^s \ln^p M^{2s}} \int_0^1 e_M^2(\tau)d\tau = \frac{e_1(t)}{M^s \ln^p M^{2s}}.$$

Візьмемо ще одне (тривіальне) рівняння з класу $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$:

$$A_2x_2 = f_2,$$

де $A_2 = 0$, $x_2(t) = f_2(t) \equiv 0$.

Нехай $N^{-s}\ln^{-p} N^{2s} \le \delta$, звідки безпосередньо випливає $M^{-s}\ln^{-p} M^{2s} \le \delta$. Тоді можна взяти наступні δ-збурення для f_1 і f_2:

$$f_{1,\delta}(t) = f_{2,\delta}(t) \equiv 0.$$

Враховуючи очевидну рівність $A_{1,\Omega} = A_{2,\Omega} = 0$, для довільного $\mathcal{P}(\Omega)$ маємо

$$\|x_1\| = \|x_1 - x_2\| \le \|x_1 - \mathcal{P}(A_{1,\Omega})f_{1,\delta}\| + \|x_2 - \mathcal{P}(A_{2,\Omega})f_{2,\delta}\| \le$$
$$\le \sup_{f_\delta:\|f_1-f_\delta\|\le\delta} \|x_1 - \mathcal{P}(A_{1,\Omega})f_\delta\| + \sup_{f_\delta:\|f_2-f_\delta\|\le\delta} \|x_2 - \mathcal{P}(A_{2,\Omega})f_\delta\| \le$$
$$\le \sup_{x^\dagger\in M_p(A_1)} \sup_{f_\delta:\|f_1-f_\delta\|\le\delta} \|x^\dagger - \mathcal{P}(A_{1,\Omega})f_\delta\| +$$
$$+ \sup_{x^\dagger\in M_p(A_2)} \sup_{f_\delta:\|f_2-f_\delta\|\le\delta} \|x^\dagger - \mathcal{P}(A_{2,\Omega})f_\delta\| \le$$
$$\le 2 \sup_{A\in\mathcal{H}_\gamma^{r,s}} \sup_{x^\dagger\in M_p(A)} \sup_{f_\delta:\|f-f_\delta\|\le\delta} \|x^\dagger - \mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta\| =:$$
$$=: 2\varepsilon_\delta(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)).$$

Отже,

$$\varepsilon_\delta(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)) \ge \frac{1}{2\ln^p M^{2s}} \ge \frac{1}{2\ln^p(2N)^{2s}} \ge \frac{\hat{C}_p}{\ln^p N^{2s}},$$

де $\hat{C}_p = 2^{-p-1}$.

З довільності проекційного методу $\mathcal{P}$ й області Ω остаточно знаходимо

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \geq \frac{\hat{C}_p}{\ln^p N^{2s}}.$$

Тим самим встановлено наступний результат.

Теорема 3.3. *При N таких, що*

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} \leq \delta, \tag{3.47}$$

має місце оцінка

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \geq \hat{C}_p \ln^{-p} N^{2s},$$

де $\hat{C}_p = 2^{-p-1}$.

Комбінуючи теореми 3.1 і 3.3, отримаємо наступне твердження.

Теорема 3.4. *При N, що задовольняють (3.31), справджується*

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} N^{2s} \asymp \ln^{-p} \delta^{-1}.$$

Зазначений оптимальний порядок на класах $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \geq s$, *реалізується в рамках проекційного методу* $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ *(3.8) – (3.10).*

Зауваження 3.2. Звернемо увагу на той факт, що згідно теоремі 3.3 досягнення нижньої межі для величини $R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},\ M_p(A))$ може бути здійснено при будь-яких N, що задовольняють (3.47). З іншого боку (див. теореми 3.1 й 3.4), оптимальний порядок величини $R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},\ M_p(A))$ досягається за допомогою методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$, де N вибирається відповідно до (3.31) і має додатковий логарифмічний множник у порівнянні з мінімально можливим значенням (пор. (3.47)). Нагадаємо, що під інформаційною складністю задачі у межах IBC-теорії (див. [67], [17]) прийнято розуміти найменший обсяг дискретної інформації, що необхідна для розв'язання задачі з наперед заданою точністю. Таким чином, з теорем 3.1, 3.3 та 3.4 випливає, що нами знайдений основний порядок інформаційної складності проекційних методів на класах жорстко некоректних задач $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s},\ M_p(A))$, $r \geq s$.

Зауваження 3.3. Без сумніву, є інтерес розглянути подібну задачу на інших важливих класах жорстко некоректних задач, коли ядра операторів (3.2) є нескінченно диференційованими функціями. Проведені нами дослідження показали, що дискретизація рівнянь (3.1) з такими ядрами за допомогою стандартної гальоркінської схеми, а також її модифікації (3.9), не призводить до того, щоб отримані оцінки зверху для величини $R_{N,\delta}$ співпали з відповідними нижніми оцінками. Відзначимо також, що рекомендації з теорії функцій щодо оптимального наближення нескінченно диференційовних функцій двох змінних також не призводять до бажаного результату. Таким чином, для класів задач (3.1), що обговорюються у цьому зауваженні, питання про порядок мінімального радіуса гальоркінської інформації залишається відкритим.

3.5. Мінімальний радіус для обсягу обчислювальних витрат

У цьому параграфі будуть знайдені порядкові оцінки величини $\overline{R}_{N,\delta}$, що характеризує алгоритмічну складність класів рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $r \geq 2s$. При цьому буде встановлено, що оптимальний порядок величини $\overline{R}_{N,\delta}$ реалізується в рамках запропонованого проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (3.8) – (3.10), де за регуляризатор застосовується ординарний метод Тіхонова.

Спочатку знайдемо порядкову оцінку обсягу обчислювальних витрат (тобто кількість виконуваних арифметичних дій) для проекційного методу з [40], що полягає в комбінації ординарного тіхоновського методу регуляризації зі стандартною гальоркінською схемою дискретизації. Нагадаємо, що в рамках цього методу наближений розв'язок задачі (3.1) знаходиться з рівняння другого роду

$$\alpha x_{disc} + A_{n,m}^* A_{n,m} x_{disc} = A_{n,m}^* f_\delta, \tag{3.48}$$

де

$$A_{n,m} = P_n A P_m, \tag{3.49}$$

а α, як і раніше, вибирається за правилом

$$\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta/\sqrt{\alpha}. \tag{3.50}$$

Теорема 3.5. *Для побудови наближеного розв'язку в межах проекційного методу (3.48) - (3.50) необхідно виконати*

$$O(\delta^{-\frac{1}{s}} \delta^{-\frac{2\varepsilon}{r}} \frac{\ln^{-p/s} \delta^{-1}}{2^{p/s}})$$

е.а.о. над значеннями функціоналів

$$(e_i, Ae_j), \quad (e_k, f_\delta), \qquad (i;j) \in [1,n] \times [1,m], \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.51}$$

Доведення. Наслідуючи роботу [48], подамо розв'язок x_{disc} у наступному вигляді

$$x_{disc} = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i, \tag{3.52}$$

де $\psi_i = P_m A^* e_i, \quad i = 1, 2, \ldots n$. Легко бачити, що

$$A^*_{n,m} A_{n,m} \psi_j = P_m A^* P_n A P_m \psi_j = P_m A^* \sum_{i=1}^{n} e_i (e_i, A P_m \psi_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P_m A^* e_i (e_i, A P_m \psi_j) = \sum_{i=1}^{n} P_m A^* e_i (P_m A^* e_i, \psi_j) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (\psi_i, \psi_j).$$

Тоді з (3.52) маємо

$$\begin{aligned} A^*_{n,m} A_{n,m} x_{disc} = A^*_{n,m} A_{n,m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(\psi_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \psi_j \right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}, \end{aligned} \tag{3.53}$$

де $a_{ij} = (\psi_i, \psi_j), \quad i, j = \overline{1, n}$. Крім того,

$$A^*_{n,m} f_\delta = P_m A^* P_n f_\delta = P_m A^* \sum_{i=1}^{n} e_i (e_i, f_\delta) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i (e_i, f_\delta) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i, \tag{3.54}$$

де $f_i = (e_i, f_\delta), \quad i = \overline{1, n}$. Згідно (3.48) невідомі коефіцієнти x_i в поданні (3.52) визначатимемо з системи лінійних рівнянь:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i,$$

$$\alpha x_i + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.55}$$

Щоб розв'язати систему (3.55), наприклад, методом Гауса, необхідно виконати $N_1 = O(n^3)$ е.а.о.

Оцінимо тепер кількість арифметичних операцій, що необхідні для обчислення коефіцієнтів $(\psi_i, \psi_j), \quad i, j = \overline{1, n}$. Отже,

$$(\psi_i, \psi_j) = (P_m A^* e_i, P_m A^* e_j) = (e_i, A P_m A^* e_j) =$$
$$= \left(e_i, A \sum_{l=1}^{m} e_l (e_l, A^* e_j) \right) = \sum_{l=1}^{m} (e_i, A e_l)(e_l, A^* e_j) = \sum_{l=1}^{m} (e_i, A e_l)(e_j, A e_l).$$

Згідно отриманого подання, для визначення кожного скалярного добутку (ψ_i, ψ_j) потрібно виконати m операцій множення й $(m-1)$ операцію додавання коефіцієнтів (e_i, Ae_j). Таким чином, для знаходження всіх коефіцієнтів (ψ_i, ψ_j) потрібно виконати $N_2 = (2m-1) \times n^2$ е.а.о.

Тепер залишається дослідити етап переходу від подання розв'язку у вигляді (3.52) до стандартного розкладу многочлена за базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. А саме, шляхом тотожних перетворень отримуємо

$$x_{disc} = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi_i = \sum_{i=1}^{n} x_i P_m A^* e_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{l=1}^{m} e_l (e_l, A^* e_i) = \sum_{l=1}^{m} e_l \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, A e_l) = \sum_{l=1}^{m} \varphi_l e_l,$$

де

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, A e_l), \quad l = \overline{1, m}. \tag{3.56}$$

Отже, для обчислення всіх коефіцієнтів $\varphi_l, \quad l = \overline{1, m}$, потрібно здійснити $N_2 = (2n-1) \times m$ е.а.о.

Таким чином, загальне число е.а.о., що задіяні на всіх етапах, у результаті становить

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = O(n^3) + O(m \times n^2) + O(n \times m).$$

Виразимо величину N через рівень похибки δ. Оскільки (див. (3.43))

$$m \asymp \delta^{-\frac{1}{s}} \frac{\ln^{-p/s} \delta^{-1}}{2^{p/s}}, \qquad n \asymp \delta^{-\frac{\varepsilon}{r}},$$

то

$$N = O(m \times n^2) = O(\delta^{-\frac{1}{s}} \delta^{-\frac{2\varepsilon}{r}} \frac{\ln^{-p/s} \delta^{-1}}{2^{p/s}}).$$

Що й дає нам твердження теореми. □

З іншого боку, з теореми 7 [12] випливає, що для побудови наближеного розв'язку $x^n_{\alpha,\delta}$ в межах проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (3.8) – (3.10), де за регуляризатор використано ординарний метод Тіхонова, достатньо виконати

$$N = O(2^{3n}) + \begin{cases} O(2^{bn}), & r > 2s \\ O(2^{bn} n), & r = 2s \end{cases} \tag{3.57}$$

елементарних алгебраїчних операцій.

Теорема 3.6. *Покладемо в (3.7) $b = 1 + \frac{r}{s}$. Тоді мають місце співвідношення*

$$\overline{R}_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} \delta^{-1} \asymp \ln^{-p} N^{2s}, \tag{3.58}$$

де N - обсяг обчислювальних витрат. При цьому

$$N = \begin{cases} O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p+s}{s}}\right), & r = 2s \\ O\left(\delta^{-\frac{1}{s}} (\ln \delta^{-1})^{\frac{1-p}{s}}\right), & r > 2s \end{cases}. \tag{3.59}$$

Вказаний оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (3.8) – (3.10), *де за регуляризатор застосовується ординарний метод Тіхонова.*

Доведення. З означення величин $R_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$ та $\overline{R}_{M,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$ є очевидним співвідношення

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)) \leq \overline{R}_{N,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A)), \tag{3.60}$$

звідки випливає, що нижня оцінка для $\overline{R}_{N,\delta}$ може бути взята з теореми 3.3. Далі знайдемо оцінку зверху для величини $\overline{R}_{M,\delta}(\mathcal{H}^{r,s}_\gamma, M_p(A))$. Згідно (3.39) маємо

$$\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\| \leq 2^{-p} C_5 \ln^{-p} \delta^{-1}, \tag{3.61}$$

де стала C_5 визначена в (3.30).

Тепер оцінку (3.61) виразимо через величину обчислювальних витрат N (3.57). Для цього розглянемо два випадки.

1) Нехай спершу $r = 2s$. З (3.57) випливає, що завжди знайдуться такі $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 1$, що має місце двостороння оцінка

$$\beta_1 2^{3n} n \leq N \leq \beta_2 2^{3n} n, \tag{3.62}$$

де, згідно (3.36), δ вибирається за правилом

$$2^{3sn}(3sn)^{p-1} = \delta^{-1}. \tag{3.63}$$

З (3.62) й (3.63) отримуємо

$$\delta^{-1} \geq N^s \left(\frac{3}{\beta_2} s\right)^s (3sn)^{p-1-s}.$$

Логарифмуємо

$$\ln \delta^{-1} \geq \ln N^s + \ln \left[\left(\frac{3s}{\beta_2}\right)^s (3sn)^{p-1-s}\right]. \tag{3.64}$$

Тут, у свою чергу, також розглянемо два випадки.

a) Нехай $p > 1 + s$. Тоді очевидно, що

$$\ln \delta^{-1} \geq \ln N^s, \quad n \geq \frac{1}{3s}\left(\frac{\beta_2}{3s}\right)^{\frac{s}{p-1-s}}.$$

b) Нехай тепер $p \leq 1 + s$. Без втрати загальності можна вважати, що

$$(\beta_2)^s (3sn) \leq \beta_1^s 2^{3sn}.$$

Тоді $\beta_2^s (3sn)^{s+1} \leq \beta_1^s 2^{3sn} (3sn)^s$. Отже,

$$(3sn)^{s+1} \leq (\beta_1 2^{3n} n)^s (\frac{3s}{\beta_2})^s \leq N^s (\frac{3s}{\beta_2})^s,$$

$$(s+1) \ln 3sn \leq \ln N^s + \ln \left(\frac{3s}{\beta_2}\right)^s.$$

Звідки безпосередньо знаходимо

$$(s+1-p) \ln 3sn \leq \frac{s+1-p}{s+1}\left(\ln N^s + \ln (\frac{3s}{\beta_2})^s\right).$$

З співвідношення (3.64) знаходимо

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s + s\ln\left(\frac{3s}{\beta_2}\right) - (s+1-p)\ln(3sn) \geq$$
$$\geq \ln N^s + s\ln\left(\frac{3s}{\beta_2}\right) - \frac{s+1-p}{s+1}\left(\ln N^s + \ln(\frac{3s}{\beta_2})^s\right) =$$
$$= \frac{p}{s+1}\ln N^s + \frac{sp}{s+1}\ln\frac{3s}{\beta_2}.$$

Неважко переконатися, що для всіх $N \geq \left(\frac{\beta_2}{3s}\right)^2$ виконується $\ln\frac{3s}{\beta_2} \geq -\frac{1}{2}\ln N$. Таким чином, маємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \frac{p}{2(s+1)}\ln N^s.$$

Об'єднавши знайдені оцінки для $\ln\delta^{-1}$, в результаті отримуємо

$$\ln\delta^{-1} \geq \overline{C}_1\ln N^s,$$

де

$$\overline{C}_1 = \begin{cases} \frac{p}{2(s+1)}, & 0 < p \leq 1+s \\ 1, & p > 1+s \end{cases}.$$

2) Залишилося розглянути випадок $r > 2s$. Згідно (3.57) завжди знайдуться такі сталі $\beta_4 \geq \beta_3 \geq 1$, що справджується

$$\beta_3 2^{bn} \leq N \leq \beta_4 2^{bn}, \quad b > 3, \tag{3.65}$$

де, як і раніше, δ вибираємо за правилом (3.36). Далі,

$$\delta^{-1} = \left(\beta_4 2^{bn}\right)^s\left(\frac{1}{\beta_4}\right)^s(sbn)^{p-1} \geq N^s\left(\frac{1}{\beta_4}\right)^s(sbn)^{p-1},$$

$$\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s + \ln\left[\left(\frac{1}{\beta_4}\right)^s(sbn)^{p-1}\right]. \tag{3.66}$$

Тут, у свою чергу, розглянемо три випадки.

а) Нехай $p \geq 1$, тоді очевидно, що $\ln\delta^{-1} \geq \ln N^s$ для всіх $n \geq \frac{\beta_4^{s/(p-1)}}{sb}$.

b) Тепер нехай $\frac{1}{2} < p \le 1$. Врахувавши (3.66), маємо

$$\ln \delta^{-1} \ge \ln N^s - (1-p)\ln(sbn) - s\ln \beta_4 =$$
$$= \ln N^s - (1-p)\ln(sbn)\left(1 + \frac{s\ln \beta_4}{(1-p)\ln(sbn)}\right).$$

Оскільки $\frac{s\ln \beta_4}{(1-p)\ln(sbn)} \le 1$ для всіх $n \ge \frac{1}{sb}\beta_4^{\frac{s}{1-p}}$, тоді безпосередньо знаходимо

$$\ln \delta^{-1} \ge \ln N^s - 2(1-p)\ln(sbn).$$

Звідки за допомогою очевидної нерівності $sbn \le \beta_3^s 2^{sbn}$ та співвідношення (3.65) отримаємо

$$\ln \delta^{-1} \ge \ln N^s - 2(1-p)\ln N^s = (2p-1)\ln N^s.$$

c) Залишилося розглянути випадок $0 < p \le \frac{1}{2}$. Згідно (3.66) маємо

$$\ln \delta^{-1} \ge \ln N^s - (1-p)\ln\left(\beta_4^{\frac{s}{1-p}}(sbn)\right).$$

Без втрати загальності вважатимемо, що $\beta_4^{\frac{s}{1-p}}(sbn) \le \beta_3^s 2^{sbn}$. Отже, врахувавши (3.65), знаходимо

$$\ln \delta^{-1} \ge \ln N^s - (1-p)\ln N^s = p\ln N^s.$$

Таким чином, об'єднавши знайдені оцінки для $\ln \delta^{-1}$, остаточно отримаємо

$$\ln \delta^{-1} \ge \overline{C}_2 \ln N^s,$$

де

$$\overline{C}_2 = \begin{cases} p, & 0 < p \le \frac{1}{2} \\ 2p-1, & \frac{1}{2} < p \le 1 \\ 1, & p \ge 1 \end{cases}.$$

Тепер оцінку (3.61) можна переписати у вигляді

$$\|x^\dagger - x^n_{\alpha,\delta}\| \le \overline{C}_p \ln^{-p} N^{2s}, \tag{3.67}$$

де

$$\overline{C}_p = \begin{cases} C_5 \overline{C}_1^{-p}, & r = 2s \\ C_5 \overline{C}_2^{-p}, & r > 2s \end{cases}.$$

Комбінація (3.60), (3.67) і теореми 3.3 дає нам співвідношення (3.58).

Залишилося перевірити виконання (3.59).

Поклавши $b = 1 + \frac{r}{s}$ й $\delta^{-1} = 2^{sbn}(sbn)^{p-1}$ в (3.57), одержуємо співвідношення (3.59). Тим самим теорема повністю доведена. $\square$

Зауваження 3.4. З оцінки (3.59) випливає, що збільшення гладкості оператора A за зовнішньою змінною r (від $r = 2s$ до $r > 2s$) призводить до зменшення на логарифмічний множник в оцінці обсягу обчислювальних витрат, що необхідні для досягнення оптимального порядку точності.

Зауваження 3.5. Порівнявши результати теорем 3.5 та 3.6, можна дістатися висновку, що запропонований нами метод (3.8)–(3.10) дозволяє не тільки скоротити обсяг обчислень відносно стандартної гальоркінської схеми дискретизації, а й реалізувати порядкові оцінки величини $\overline{R}_{N,\delta}$ на класах рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, M_p(A)), \quad r \geq 2s$.

Висновки до розділу 3

Розглянуто проблему оптимального розв'язування жорстко некоректних задач, що подаються у вигляді рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості. При цьому отримані такі основні результати:

- Побудована проекційна схема дискретизації, що є економічною у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації.
- За допомогою запропонованої схеми дискретизації отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач, що досліджуються.
- Розроблено проекційний метод, побудований на основі цієї схеми, який є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат.

- Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини реалізується в рамках проекційного методу, що досліджується.

Матеріали цього розділу опубліковано в роботах [11, 60, 14, 58].

ВИСНОВКИ

Досліджено проблему побудови стійких наближень до розв'язків жорстко некоректних задач, що подані у вигляді операторних та інтегральних рівнянь I роду зі збуреними вхідними даними. При цьому отримані такі основні результати:

1. Запропоновано два підходи, що полягають в комбінації принципу рівноваги зі стандартним методом Тіхонова, а також з його ітерованим варіантом, відповідно.
2. Доведено, що побудовані в рамках зазначених підходів стійкі наближення гарантують порядок точності $O((\underbrace{\ln\cdots\ln}_{K \text{ разів}}\frac{1}{h+\delta})^{-p})$ на класах жорстко некоректних задач, що розглядаються.
3. Встановлено, що при $h \le O(\delta^{\xi}), \quad \forall\xi > 0$, ці методи забезпечують оптимальний порядок точності.
4. Побудована економічна (у сенсі обсягу задіяної гальоркінської інформації) проекційна схема дискретизації для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості.
5. За допомогою запропонованої схеми дискретизації отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач, що досліджуються.
6. Для рівнянь Фредгольма I роду з ядрами скінченної гладкості розроблено проекційний метод, який є економічним у сенсі обсягу обчислювальних витрат.
7. Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса обчислювальних витрат. При цьому встановлено, що оптимальний порядок зазначеної величини реалізується в рамках запропонованого проекційного методу.

Результати роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані при розв'язуванні різноманітних прикладних задач.

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Бакушинский А. Б. Итеративные методы для решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами / А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин. – М. : Едиториал УРСС, 2002, – 192 с.
2. Бакушинский А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. / А. Б. Бакушинский , А.В. Гончарский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.
3. Вайникко Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. :Наука, 1986. – 180 с.
4. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Габдулхаев Б.Г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.
5. Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Сиб. Науч. Издат., Новосибирск, 2009, – 458 с.
7. Кокурин М. Ю. О необходимых и достаточных условиях медленной сходимости методов решения линейных некорректных задач / М. Ю. Кокурин, Н. А. Юсупова // Изв. вузов. Матем. – 2002. – no 2. – С. 81–84.
8. Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи / Лаврентьев М. М. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
9. Морозов В. А. Методы решения некорректно поставленнных задач. Алгоритмический аспект / В. А. Морозов, А. И. Гребенников. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 320 с.
10. Мосенцова Г.В. Оптимальні методи розв'язування деяких класів інтегральних рівнянь Фредгольма: дис. кандидата физ.-мат. наук: 01.01.07/ Г.В. Мосенцова. – К., 2010. – 131с.

11. Солодкий С.Г. Гіперболічний хрест і складність жорстко некоректних задач / С.Г. Солодкий, Г.Л. Милейко //Доповіді НАНУ. – 2013. – **8**. – С. 21–27.
12. Солодкий С.Г. Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. II //Укр.мат.журн. – 1998. – Т. 50, no 6. – С. 838–844.
13. Солодкий С.Г. Оптимизация проекционных методов решения линейных некорректных задач //Жур. Вычисл. Мат. и Мат. Физ.– 1999.– Т. 39, No 2. – С. 195–203.
14. Солодкий С.Г. Про інформаційну та алгоритмічну складність деяких класів рівнянь Фредгольма I роду / С.Г. Солодкий, Г.Л. Милейко //Доповіді НАНУ. – 2014. – **9**. – С. 33–39.
15. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
16. Функциональный анализ (серия "Справочная математическая библиотека") / Под ред. С.Г. Крейна . - М. : Наука, 1972. – 544 с.
17. Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов. // Дж. Трауб, Х. Вожьняковский. – М.: Мир. – 1983. – 382 с.
18. Bakushinski A.B. A general method of constructing regularizing algorithms for a linear ill-posed equationin Hilbert space /A.B. Bakushinski // Zh. Mat. Mat. Fiz, – 1967. – V. 7, no. 3. – P. 672–677.
19. Bao G. Modeling and optimal design of diffractive optical structures /G. Bao, D. Dobson //Surv. Math. Ind. –1998. – V. 8, no. 1. – P. 37–62.
20. Bauer F. A Lepskij type stopping rule for regularized Newton's method. / F. Bauer, T. Hohage // Inverse Probl. – 2005. – V. 21, no. 6. – P. 1975–1991.
21. Benson M.B. Errors in numerical quadrature for certain singular integrands and the numerical solution of Abel-type integral equations/ M.B. Benson: Ph. D. Thesis, Dept. of Math. University of Wisconsin, Madison, 1973.

22. Brakhage H. On ill-posed problemsand the method of conjugate gradients, in [26], P. – 165–175.
23. Bruckner G. Self-regularization of projection methods with a posteriori discretization level choice for severally ill-posed problems / G. Bruckner, S. Pereverzev // Inverse Problems. – 2003. – V. 19. – P. 147–156.
24. Eggermont P.P.B. A new analysis of the trapezoidal discretization method for the numerical solution of Abel-type integral equations / P.P.B. Eggermont // J. Integral Eq. – 1981. – V. 3. – P. 317 – 332.
25. Engl H.W. A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems / H.W. Engl., H. Gfrere // Appl. Numer. Math. – 1998. – V. 4. – P. 395 – 417.
26. Engl E.W. Inverse and ill-posed problems/ E.W. Engl, C.W. Grooetsch and etc. // Academic Press, Orlando. – 1987.
27. Engl H. W. Regularization of inverse problems / H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Ac. Publ., 1996. – 321 p.
28. Engl H. W. Stability estimates and regularization for an inverse heat conduction problem in semi-infinite and finite time intervals / H. W. Engl, P. Manselli // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1989. – no. 10. – P. 517–540.
29. Freeden W. Regularization wavelets and multiresolution / W. Freeden, F. Schneider // Inverse Problems –1998. – V. 14, no. 2. – P. 225–243.
30. Gfrerer H. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates / H. Gferer // Math. Comput. – 1987. – V. 49. – P. 507– 522.
31. Groetsch C.W. The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind. //Boston etc.: Pitman Adv. Publ. Program. – 1984. – 104 p.
32. Hadamard J. Le problem Cauchy / Hadamard J. – Paris, 1932. – 351 p.

33. Hettlich F. Schifter's theorem in inverse scattering for periodic structures / F. Hettlich, A. Kirsch // Inverse problems –1997. – V. 13, no.2. – P. 351-361.

34. Hohage T. Regularization of exponentially ill-posed problems / T. Hohage // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2000. – V. 21, no. 3-4. – P. 439–464.

35. Lepskii O. A problem of adaptive estimation in Gaussian white noise / O. Lepski //Theory Probab. Appl. – 1990. – V. 36. – P. 454 – 466.

36. Louis A.K. Inverse und schlecht gestellte Probleme / A.K. Louis // Stuttgart: Teubner. – 1989. – 205 p.

37. Lukas M.A. Comparison of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data / M.A. Lukas // Inverse Problems. – 1998. – V. 14. – P. 161 – 184.

38. Mair B. A. Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators /B. A. Mair // SIAM J. Math. Anal. –1994. – V. 25, no. 1. – P. 135–147.

39. Marti J.T. An algorithm for computing minimum norm solutions of Fredholm integral equations of the first kind / J.T. Marti // SIAM J. Numer. Anal. – 1978. – V. 15. – P. 1071-1076.

40. Mathe P. Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales / P. Mathe, S.V. Pereverzev //Inverse Problems. – 2003.– V. 19, no. 6. – P. 1263–1277.

41. Mathe P. Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales / P. Mathe, S. Pereverzev // Inverse Problems. – 2003. – V. 19. – P. 789 – 803.

42. Mathe P. Moduli of continuity for operator valued functions / P. Mathe, S.V. Pereverzev //Numer. Funct. Anal. Optim. – 2002. – V. 23. – P. 623–631.

43. Mathe P. Regularization of some linearill-posed problems with discretized random noisy data / P. Mathe, S.V. Pereverzev //Mathematics of Computation – 2006. – V. 75, no. 256. – P. 1913–1929.
44. Morozov V.A. On the solution of functional equations by the method of regularization / V.A. Morozov // Soviet Math. Dokl. – 1966. – V. 7. – P. 414–417.
45. Myleiko G.L. Balancing Principle for Iterated Tikhonov Method of Severely Ill-Posed Problems / G.L. Myleiko, S.G. Solodky // J. of Num. and Appl. Math. – 2012. – V. 3, n0. 109. – P. 72 – 88.
46. Nemirovskii A.S. Iterative method for solving linear ill-posed problems under precise information I / A.S. Nemirovskii, B.T. Poyak // Engrg. Cybernetics. – 1984. – V. 22. – P. 1 – 11.
47. Pereverzev S. On the adaptive selection of the parametr in regularization of ill-posed problems /S. Pereverzev, E. Schock //SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – V. 43, no.5. – P. 2060–2076.
48. Pereverzev S.V. Optimization of projection methods for solving ill-posed problems //Computing. – 1995. – V. 55. – P. 113–124.
49. Pereverzev S.V., Solodky S.G. The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problems of first kind /S.V. Pereverzev , S.G.Solodky //J. Complexity. – 1996.– V. 12, no. 4. – P. 401–415.
50. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D.L. Phillips // J. Assoc. Comput Mech. – 1962. – V. 9. – P. 84–97.
51. Plato R. On pseudo-optimal parameter choice and stopping rules for regularization method in Banach spaces / R. Plato, U. H$\ddot{a}$marik // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1996.– V. 17. – P. 181– 195.
52. Plato R. On the regularization of projectionmethods for solving ill-posed problems / R. Plato, G. Vainikko, //Numer. Math. – 1990. – Vol. 57, no. 1. – P. 63–79.

53. Raus U. About the balancing principle for choice of regularization parameter / T. Raus, U. Hämarik // Num. Func. Ana. Optim. – 2009. – V. 30, no. 9-10. – P. 951–970.

54. Raus T. Residue principle for ill-posed problems / T. Raus // Acta et comment. Univers. Tartuensis. – 1984. – V. 672. – P. 16 – 26.

55. Rummel R. Gravity field determination from satellite gradiometry / R. Rumme, O.L. Colombo // Bull. Geod. – 1985. – V. 59, no. 3. – P. 233–246.

56. Schock E. Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces / E. Schock, S. V. Pereverzev // Numer. Funct. Anal. Optim. – 2000. – V. 21, no. 7-8. – P. 901–916.

57. Solodky S.G. About Regularization of Severely Ill-Posed Problems by Standard Tikhonov's Method with the Balancing Principle / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // Mathematic Modeling and Analysis. – 2014. – V. 19, no. 2. – P. 199 – 215.

58. Solodky S.G. On optimization of projection methods for solving some classes of severely ill-posed problems / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // J. Appl. Anal. DOI: 10.1080/00036811.2015.1036748.

59. Solodky S. G. On the a posteriori choice of regularization parametr in the solution of severelly ill-posed problems /S. G. Solodky, A.V. Grushevaya // Journal of Mathematical Science. – 2012. – V. 181, no. 1. – P. 98–105.

60. Solodky S.G. The minimal radius of Galerkin information for severely ill-posed problems / S.G. Solodky, G.L. Myleiko // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems./ – 2014. – V. 22, no. 5. – P. 739–757.

61. Solodky S.G. The optimal approximations for solving linear ill-posed problems //J.Complexity. – 2001.– V. 17, no 1. – P. 98–116.

62. Solodky S. G. Unsaturable methods for solving severely ill-posed problems /S. G. Solodky, A. V. Mosentsova // Int. J. Comput. Sci. Math. – 2009.– V. 2, no. 3. – P. 229–242.

63. Tautenhahn U. Optimality for ill-posed problems under general source condition //Numer. Funct. Anal. and Optimiz.– 1998.– V. 19, no. 3-4. – P. 377–398.

64. Tautenhahn U. The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems / U. Tautenhahn, U. X*ä*marik // Inverse Problems. – 1999. – V. 15. – P. 1487 – 1505.

65. Tikhonov A.N. An approximate solution of Fredholm integral equations of the first kind / A.N. Tikhonov, V.B. Glasko // Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. – 1964.– V. 4. – P. 564 – 571.

66. Tikhonov A.N. Use of the regularization method in non-linear problems / A.N. Tikhonov, V.B. Glasko // Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. – 1965.– V. 5. – P. 463 – 473.

67. Traub J. Information-Based Complexity / J. F. Traub, G.Wasilkowski, H. Wozniakowski // Boston : Academic Press. – 1988. – P. 523.

68. Vainikko G.M. Projection method and self-regularization in ill-posed problems / G.M. Vainikko, V.A. Khyamarik // (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1985. – no. 10 – P. 3 – 17.

69. Weiss R. Product integration for the generalized Abel equation / R. Weiss // Math of Computation. – 1972.– V. 26. – P. 177 – 190.

70. Werschulz A.G. What is the complexity of ill-posed problems? /A.G. Werschulz //Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1987. – V. 9, no. 9–10. – P. 945–967.

71. Wozniakowski H. Information based complexity / H. Wozniakowski //Ann. Rev. Comput. Sci. –1986. – V. 1. – P. 319–380.