Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

ФЕДЧУН Юлія Юріївна

УДК 517.9+531.19

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ СИСТЕМ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОПИСУ КІНЕТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук
професор Герасименко В.І.

Київ – 2015

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень

$x_i \equiv (q_i, p_i)$	фазові координати i-ої частинки;
$\mathbf{u}_i = (j_i, u_i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$	номер субпопуляції i-ої складової системи у мікроскопічному стані $u_i \in \mathcal{U}$;
$\|Y\|$	кількість елементів множини індексів $Y \equiv (1, \ldots, s)$;
$\{Y\}$	множина індексів $Y \equiv (1, \ldots, s)$, яка складається з одного елементу, тобто $\|\{Y\}\| = 1$;
$\mathtt{P} : Y = \bigcup_i Y_i$	розбиття множини Y на підмножини $Y_i \subset Y$, які взаємно не перетинаються;
$\|\mathtt{P}\|$	кількість підмножин розбиття $\mathtt{P}$ множини;
$(\cdot, \cdot)$	символ твірного функціоналу;
$\theta(\cdot)$	відображення декластеризації множини;
ε	скейлінговий параметр;
$\{\, .\, ,\, .\, \}$	дужки Пуассона;
$S_n(t)$	група операторів рівняння Ліувілля для спостережуваних;
$S_n(-t)$	група операторів рівняння Ліувілля для станів;
$e^{t\Lambda_n}$	півгрупа операторів n марковських стохастичних процесів;
$e^{t\Lambda^*_n}$	спряжена півгрупа операторів n марковських стохастичних процесів;
$\mathfrak{A}_n(t)$	кумулянт n-го порядку півгруп операторів (твірний оператор розкладів непертурбативних розв'язків ієрархій еволюційних рівнянь);
$\widehat{\mathfrak{A}}_n(t)$	кумулянт розсіяння n-го порядку;
$\mathfrak{V}_n(t)$	твірний оператор n-го порядку розкладу для маргінального функціоналу стану.

ВСТУП

Актуальність теми. В останні два десятиліття спостерігається значний прогрес у розвитку теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок сучасної математичної фізики. Зокрема, це обумовлено створенням нових функціонально-аналітичних методів дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними та методів чисельного моделювання еволюційних процесів зазначених систем.

Одним з напрямків розвитку цієї теорії є підхід заснований в працях академіка М.М. Боголюбова, який ґрунтується на теорії еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів, якими описуються стани систем багатьох частинок. Дослідження еволюційних рівнянь у функціональних похідних систем статистичної механіки дає можливість побудувати у термінах груп операторів непертурбативні розв'язки ієрархій еволюційних рівнянь для послідовностей функцій, якими описуються стани та спостережувані величини таких систем.

В останні роки теорія еволюційних рівнянь систем багатьох частинок знайшла широке застосування до опису кінетичних процесів в складних системах різноманітної природи, зокрема, до проблеми математичного опису колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин, наприклад, систем, які складаються з багатьох клітин та їх розчинів; популяцій мікроорганізмів, тварин і т.п. У сучасних працях з теорії таких систем в основу опису покладено апріорі сформульовані еволюційні рівняння типу рівнянь суцільного середовища або кінетичні рівняння для динамічних систем, які є аналогом системи частинок із зіткненнями в теорії нелінійного рівняння Больцмана. Треба зазначити, що характерні колективні властивості активних м'яких конденсованих речовин відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, яка складається із взаємодіючих частинок, що рухаються за інерцією. Зокрема, до таких властивостей активної м'якої речовини треба віднести: ефекти пам'яті кінетичних процесів в таких системах; наявність кореляцій станів, що властиво системам у конденсованих станах; багаточастинковий тип взаємодії їх складових. Внаслідок необхідності враховувати такі властивості, традиційні методи виведення кінетичних рівнянь з динаміки систем багатьох частинок не дозволяють обґрунтувати кінетичні рівняння у цьому випадку і потребують розвитку нових методів.

Зауважимо, що проблема обґрунтування нелінійних кінетичних рівнянь є фундаментальною проблемою сучасної математичної фізики, в дослідження якої піонерський внесок було зроблено М.М. Боголюбовим. В останній час у зв'язку з практичним використанням кінетичних процесів систем частинок в конденсованих станах теорія кінетичних рівнянь почала інтенсивно розвиватись. Київській науковій школі з математичної фізики належать пріоритетні результати в цьому напрямку досліджень.

Зважаючи на сучасний етап розвитку математичної теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок, а також на проблеми математичного моделювання кінетичних процесів в активних м'яких конденсованих речовинах, дисертація присвячена розробці методів дослідження еволюційних рівнянь систем багатьох частинок та їх застосування до математичного опису колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика досліджень дисертаційної роботи пов'язана з науковою програмою Київського національного університету імені Тараса Шевченка "Якісне дослідження та асимптотичне інтегрування нелінійних систем", яка входить до програми "Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних полів" (номер державної реєстрації 0106U005863), науково-дослідної теми Інституту математики НАН України: "Еволюційні та спектральні задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі" (номер державної реєстрації 0111U001027) та з міжнародним науковим проектом "Mathematicians for Life Sciences" , FP7-People-2011-IRSES (номер проекту 295164).

Мета і задачі дослідження. *Об'єктом* дослідження є еволюційні рівняння систем багатьох частинок, зокрема еволюційні рівняння у функціональних похідних.

Предметом дослідження є побудова розв'язків задач Коші для ієрархій еволюційних рівнянь систем багатьох частинок та математичне обґрунтування кінетичних рівнянь для активних м'яких речовин.

Мета й *основні задачі* дослідження полягали в наступному:

- розробити метод опису еволюції станів та спостережуваних систем багатьох частинок за допомогою еволюційних рівнянь у функціональних похідних;

- дослідити скейлінгову асимптотику розв'язку ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних активних м'яких конденсованих речовин;

- описати колективну поведінку активної м'якої конденсованої речовини у термінах одночастинкової функції розподілу, яка є розв'язком кінетичного рівняння;

- обґрунтувати кінетичне рівняння для активної м'якої конденсованої речовини з урахуванням початкових кореляцій.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі застосовуються методи теорії напівгруп операторів та функціонально-аналітичні методи дослідження еволюційних рівнянь систем багатьох частинок, розроблені київською науковою школою із сучасної математичної фізики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертації, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

• побудовано еволюційні рівняння у функціональних похідних, якими описується еволюція станів та спостережуваних систем багатьох частинок статистичної механіки;

• за допомогою встановлених зв'язків між твірними функціоналами для послідовностей функцій, якими описуються стани і спостережувані систем багатьох частинок, побудовано розв'язки задачі Коші для ієрархій еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних та маргінальних функцій розподілу;

• обґрунтовано немарковське кінетичне рівняння, яким описується еволюція всіх можливих станів активної м'якої речовини у термінах одночастинкової функції розподілу;

• для динамічної системи, якою описується активна м'яка речовина, побудовано границю самоузгодженого поля розв'язку ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних та встановлено її зв'язок з граничними маргінальними функціями розподілу;

• за допомогою побудованої асимптотики маргінальних спостережуваних обґрунтувано кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями для активної м'якої речовини в конденсованих станах.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані з метою математичного моделювання кінетичних процесів в активних м'яких речовинах. Результати дисертації також можуть бути складовою частиною спеціальних курсів із сучасної математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними для аспірантів і студентів математичних і фізичних факультетів університетів та наукових установ.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження і постановка задач належать науковому керівнику. Результати дисертації, які визначають наукову новизну роботи та виносяться на захист, отримано дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювалися на наукових конференціях:

– Український математичний конгрес (Київ, 2009);

– X зимова школа з теоретичної фізики (Дубна, 2012);

– 1st EUMLS Conference "Mathematics for Life Science" (Kyiv, 2012);

– 2nd EUMLS Conference "Mathematics for Life Science" (Olenivka, 2013);

– International conference "Semigroups of Operators: Theory and Applications" (Bedlewo, 2013);

– Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М. (Київ, 2014);

– International conference "The Education and Science and Their Role in Social and Industrial Progress of Society" (Kyiv, 2014);

– V Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2015);

– International Conference of Young Mathematicians (Kyiv, 2015);

та на наукових семінарах:

– "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики" кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: професор В.Г. Самойленко, професор Т.А. Мельник), 2012, 2014, 2015;

– "Міський об'єднаний семінар з математичної фізики" Інституту математики НАН України (керівники: член-кореспондент НАН України професор А.Г. Нікітін, професор Є.Д. Білоколос), 2015;

– "Математика та природничі науки" Інституту математики НАН України (керівники: старший науковий співробітник О.В. Антонюк, старший науковий співробітник С.І. Максименко), 2011.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у шістьох наукових статтях [6], [7], [12], [49], [50], [61], які входять до переліку фахових видань МОН України, трьох препринтах [51], [52], [62] та п'ятьох тезах доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [8], [9], [13], [53] – [56].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та переліку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання дослідження, наведено результати, які визначають наукову новизну роботи, і викладено основний зміст роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено огляду літератури за її темою, де висвітлено сучасний стан, основні досягнення і тенденції розвитку теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок та її новітнє застосування, а саме: до кінетичної теорії активних м'яких конденсованих речовин. Також проаналізовано внесок в цю теорію результатів, які отримано в дисертації.

У другому розділі викладено строгі результати з теорії еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описуються стани та спостережувані величини класичних систем нефіксованої кількості частинок (нерівноважний великий канонічний ансамбль).

За допомогою встановлених зв'язків між введеними твірними функціоналами для спостережуваних величин, а також для станів, у відповідних банахових просторах побудовано непертурбативні розв'язки для задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ та для ієрархії рівнянь ББҐКІ у термінах груп операторів рівняння Ліувілля.

У цьому розділі також розвинуто альтернативний спосіб опису еволюції станів систем багатьох частинок за допомогою ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ для маргінальних кореляційних функцій, який ґрунтується на еволюційному рівнянні у функціональних похідних для твірного функціоналу послідовності кореляціних функцій.

У третьому розділі досліджено проблему математичного опису колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин. За допомогою побудованого в попередньому розділі непертурбативного розв'язку дуальної (двоїстої) ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних спостережуваних багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів обґрунтовано немарковське кінетичне рівняння, яким описуються ефекти пам'яті колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин.

Також у цьому розділі досліджено скейлінгову границю самоузгодженого поля розв'язку задачі Коші для побудованого нелінійного кінетичного рівняння та послідовності маргінальних функціоналів стану, якою описується еволюція всіх можливих кореляцій в системі, зокрема, для відповідних початкових даних встановлено властивість поширення початкового хаосу.

У четвертому розділі розвинуто новий підхід до опису кінетичної еволюції активних м'яких речовинах у термінах спостережуваних величин, а саме побудовано скейлінґову границю самоузгодженого поля розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних взаємодіючих стохастичних марковських стрибкоподібних процесів.

Для початкових станів статистично незалежних компонент системи, в границі самоузгодженого поля доведено еквівалентність опису еволюції системи у термінах граничних маргінальних спостережуваних та за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є розв'язком кінетичного рівняння самоузгодженого поля побудованого у попередньому розділі іншим методом, як рівняння, яким описується асимптотична поведінка розв'язку немарковського кінетичного рівняння активних м'яких конденсованих речовин, а також на основі традиційного методу, який ґрунтується на дослідженні границі самоузгодженого поля, для непертурбативного розв'язку ієрархія рівнянь ББҐКІ для маргінальних функцій розподілу.

Для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою зазначених двох методів доведено властивість поширення початкового хаосу в скейлінговій границі самоузгодженого поля.

П'ятий розділ дисертації присвячено дослідженню однієї з відкритих математичних проблем сучасної кінетичної теорії, яка полягає в строгому обґрунтуванням кінетичних рівнянь для систем частинок в конденсованих станах. Використовуючи розвинутий у попередньому розділі дисертації метод виведення кінетичних рівнянь, а саме: розв'язок дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля для граничних маргінальних спостережуваних, для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських стрибкоподібних процесів побудовано кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями та описано процес поширення початкових кореляцій в активних м'яких конденсованих речовинах.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

В останні два десятиліття спостерігається значний прогрес у розвитку теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок сучасної математичної фізики. Зокрема, це обумовлено виникненням нових функціонально-аналітичних методів дослідження диференціальних рівнянь в частинних похідних [14],[34],[98],[104] та розвитком методів чисельного моделювання еволюційних процесів зазначених систем [38],[97].

Один з підходів цієї теорії полягає в застосуванні еволюційних рівнянь у функціональних похідних [5],[47],[57],[60],[78] для твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описуються стани або спостережувані величини систем багатьох частинок. Основи цього підходу до опису еволюції систем статистичної механіки було закладено у працях В. Вольтерра [5], Т. Гронвелла [78] та М. Боголюбова [2]–[4]. Серед них відзначимо роботу М. Боголюбова [2], яка вийшла в світ у збірнику праць Інституту математики, де, зокрема, вперше було сформульовано ієрархію рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Йован) як еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу s-частинкових (маргінальних) функцій розподілу.

Як відомо [1],[4],[34],[35], ієрархія рівнянь ББҐКІ для маргінальних функцій розподілу описує еволюцію всіх можливих станів систем скінченої та нескінченної кількості частинок. У випадку систем скінченої кількості частинок ієрархія таких рівнянь є системою рівнянь, яка рівносильна рівнянню Ліувілля для щільності функції розподілу (для опису еволюції чистих станів класичних систем достатніми рівняннями є рівняння Гамільтона [34]).

Традиційно, починаючи із праці М. Боголюбова [4], розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ будується за допомогою методів теорії збурень у вигляді формального ряду ітерацій. Математична теорія ієрархії рівнянь ББҐКІ бере свої витоки з роботи Д. Петрини [10]. У сучасних працях [34],[58],[99],[64] розв'язок ієрархії рівнянь ББҐКІ для систем нескінченної кількості частинок, тобто систем зі статистичною поведінкою, побудовано методами теорії збурень у банаховому просторі послідовностей обмежених функцій для сингулярних потенціалів взаємодії, а саме: систем частинок із зіткненням [104]. Огляду строгих результатів із теорії ієрархії рівнянь ББҐКІ квантових систем багатьох частинок присвячено роботу [74].

У статті Р. Льюіса [92], використовуючи еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу, побудовано формальний непертурбативний роз'язок ієрархії рівнянь ББҐКІ у редукованій формі у термінах груп операторів рівняння Ліувілля. За допомогою методів теорії півгруп операторів такий роз'язок незалежно було строго побудовано в працях Д. Петрини. Зауважимо, що вперше структуру розкладу для непертурбативного роз'язку ієрархії рівнянь ББҐКІ було проаналізовано за допомогою аналогії з віріальними розкладами рівноважних маргінальних функцій розподілу в роботі [77] (див. також огляд [37] з історії цієї проблеми). Детальний огляд строгих результатів із теорії ієрархії рівнянь ББҐКІ для класичних систем частинок отриманих у XX ст. наведено у монографії [34].

Як відомо [28],[74], системи багатьох частинок описуються у термінах спостережуваних величин і станів. Функціонал середніх значень спостережуваних визначає дуальність між спостережуваними і станами, і внаслідок цього існує два еквівалентні способи опису еволюції систем частинок. Для систем довільної кількості частинок спостережувані описуються нескінченною послідовністю, яка є розв'язком послідовності рівнянь Ліувілля для спостережуваних, дуальними рівняннями до яких є рівняння Ліувілля для функцій розподілу. Еквівалентний спосіб опису еволюції спостережуваних системи багатьох частинок полягає в її описі за допомогою нескінченної послідовності маргінальних (s-частинкових) спостережуваних, яка є розв'язком дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ.

Строгі результати з існування непертурбативного роз'язку задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ, для ієрархії рівнянь ББҐКІ та для ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ у відповідних банахових просторах було отримано в роботах [29],[66],[67],[73]. Зокрема, було встановлено, що такі розв'язки зображуються у формі розкладів, твірні оператори яких є відповідного порядку кумулянтами (семіінваріантами) груп операторів рівнянь Ліувілля систем скінченої кількості частинок. Для несиметричних систем багатьох частинок [34] такі результати встановлено в [67]. Зауважимо, за певних умов на потенціал взаємодії та початкові дані непертурбативні розв'язки ієрархії рівнянь ББҐКІ співпадають з розв'язками побудованими за теорією збурень, що встановлюється внаслідок справедливості аналогів рівнянь Дюамель для кумулянтів груп операторів рівнянь Ліувілля [74].

Строгі результати з теорії еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описуються стани та спостережувані величини класичних систем багатьох частинок отримано у роботах [6],[49]. За допомогою встановлених зв'язків між введеними твірними функціоналами для спостережуваних величин, а також для станів, у відповідних банахових просторах у термінах груп операторів рівняння Ліувілля побудовано непертурбативні розв'язки для задачі Коші для ієрархії дуальних рівнянь ББҐКІ та для ієрархії рівнянь ББҐКІ. У роботі [49] розвинуто альтернативний спосіб опису еволюції станів систем багатьох частинок, який ґрунтується на еволюційному рівнянні у функціональних похідних для твірного функціоналу послідовності кореляційних функцій, що дозволило побудувати розклади для непертурбативних розв'язків задачі Коші для ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ для маргінальних кореляційних функцій та для ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних функцій розподілу у термінах нелінійних груп операторів ієрархії рівнянь Ліувілля [101] для кореляційних функцій.

Один з напрямків розвитку математичної теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок полягає в строгому виведенні нелінійних кінетичних рівнянь з ієрархій еволюційних рівнянь систем нескінченної кількості частинок, що є актуальною проблемою сучасної математичної фізики [34],[35],[103].

Відомо [1],[63],[19], що за певних умов, еволюція станів системи багатьох частинок описується за допомогою одночастинкової функції розподілу, яка задовольняє нелінійному кінетичному рівнянню, тобто кінетичним рівнянням описується колективна поведінка системи багатьох взаємодіючих частинок або, іншими словами, ефективна еволюція стану типової частинки системи. Основні підходи до виведення кінетичних рівнянь було сформульовано в працях М. Боголюбова [4] і Г. Ґреда [76]. Зауважимо, що вперше послідовний метод виведення кінетичних рівнянь було сформульовано в працях М. Боголюбова за допомогою методів теорії збурень [4].

Скейлінговий метод виведення кінетичних рівнянь Г. Ґреда було розвинуто для системи твердих куль в роботах О. Ленфорда [91] (див. огляд в монографії [58]) і обґрунтовано в працях В. Герасименка, Д. Петрини [100], Г. Шпона [103] та К. Черчиньяні, Р. Ілнера, М. Пульвіренті [35]. Сучасний стан проблеми і новітні досягнення з обґрунтування скейлінгової границі Больцмана – Ґреда для класичних систем багатьох частинок, зокрема, систем частинок з короткосяжним потенціалом взаємодії, відображено у монографіях [58],[99]. В останній час в роботі [71] розроблено нові методи виведення кінетичного рівняння Больцмана в границі Больцмана – Ґреда, зокрема, отримано рівняння, яким описується асимптотична поведінка розв'язку кінетичного рівняння Енскога [59].

У монографії [83] наведено строгі результати з асимптотичної поведінки стохастичних систем взаємодіючих частинок у відповідних скейлінгових границях, в огляді [74] – для квантових систем багатьох частинок (див. також цитовані там роботи відносно строгих результатів з існування можливих типів скейлінгових границь) та роботи [69],[70],[72], в яких розроблено нові підходи до виведення квантових кінетичних рівнянь, а також розглянуто проблему обґрунтування методу Боголюбова. В роботах [7],[50],[12],[61] досліджено проблему математичного виведення кінетичних рівнянь для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу [84],[90], якою описується мікроскопічна еволюція м'яких конденсованих речовин.

Підкреслимо, що математичне обґрунтування нелінійних кінетичних рівнянь для м'якої конденсованої речовини, є однією з фундаментальних проблем сучасної математичної фізики [16],[81],[85],[96], оскільки кінетичні рівняння в останній час знайшли широке застосування до опису колективної поведінки складних систем різноманітної природи, наприклад, таких як біологічні [20],[21],[23],[25],[26],[46] та соціально-економічні системи [32],[44],[80].

В останній час значний прогрес у зазначеному напрямку досліджень було досягнуто у математичному моделюванні так званих активних м'яких кондесованих речовин [26],[40],[93],[94]. До відомих прикладів таких систем можна віднести популяції тварин та мікроорганізмів, зокрема, популяцій бактерій; розчини клітин [26],[32],[41] – [43],[94],[89].

Характерні властивості колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, яка складається із взаємодіючих частинок, що рухаються за інерцією. Зокрема, до таких властивостей активної м'якої речовини треба віднести: сильно нерівноважні стани системи; наявність ефектів пам'яті кінетичних процесів в таких системах; кореляції початкових станів, що властиво системам у конденсованих станах; багаточастинковий тип взаємодії складових системи. Підкреслимо, що внаслідок таких властивостей, традиційні методи виведення кінетичних рівнянь з динаміки систем багатьох частинок не дають можливості обґрунтовувати кінетичні рівняння у цьому випадку.

У сучасних працях з теорії активних м'яких конденсованих речовин в основу опису колективної поведінки покладено апріорі сформульовані еволюційні рівняння типу рівнянь суцільного середовища [32],[44],[45],[93], або кінетичні рівняння [21],[22],[25], [27],[33],[84],[105],[87]. Моделювання на мікроскопічному рівні динаміки таких систем залишається відкритою проблемою [93],[95] і з цією метою використовуються різного типу еволюційні рівняння багатьох взаємодіючих стохастичних процесів [30],[36],[48],[88].

У роботі М. Лаховича [84] мікроскопічна еволюція активних м'яких конденсованих речовин описується за допомогою системи багатьох взаємодіючих стохастичних стрибкоподібних процесів марковського типу, яка є аналогом динамічної системи частинок із зіткненнями в теорії кінетичного рівняння Больцмана [35], яке, зазначимо, в останній час широко використовуються до опису колективної поведінки складних систем різноманітної природи, наприклад, у таких працях [15],[21],[27],[31],[85],[96]. Для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів у роботі [84] за допомогою методів теорії збурень обґрунтовано кінетичне рівняння в границі середнього поля. Зазначена модель мікроскопічної динаміки дає можливість описати характерні властивості активних м'яких конденсованих речовин.

Еволюцію активних м'яких конденсованих речовин на мікроскопічному рівні природно описувати у термінах еволюції спостережуваних величин. У роботі [50] розвинуто такий підхід. Він ґрунтується на ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних (дуальна ієрархія рівнянь ББҐКІ) системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу [84]. За допомогою непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних встановлено зв'язок між методом опису еволюції у термінах маргінальних спостережуваних та за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу, а саме: обґрунтовано кінетичне рівняння немарковського типу та описано процеси народження кореляцій і поширення початкових кореляцій в активних м'яких речовинах. Зуважимо, що розвинутий підхід до опису кінетичної еволюції дозволяє враховувати поправки до побудованих в скейлінгових границях асимптотик.

У роботі [7] розвинуто підхід до опису в скейлінговій границі самоузгодженого поля кінетичної еволюції активних м'яких конденсованих речовинах у термінах спостережуваних величин, а саме: встановлено асимптотичну поведінку ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних взаємодіючих стохастичних марковських процесів.

Використовуючи розвинутий у роботі [7] метод до виведення кінетичних рівнянь, у роботі [61] для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів, стани яких характеризуються кореляціями, побудовано кінетичне рівняння з початковими кореляціями, а також описано процес поширення початкових кореляцій у границі самоузгодженого поля, що, зокрема, дало можливість пояснити деякі типові колективні властивості активних м'яких конденсованих речовин.

РОЗДІЛ 2

Еволюційні рівняння у функціональних похідних систем багатьох частинок

Одна з проблем сучасної математичної фізики полягає у розвитку методів побудови розв'язків задачі Коші для ієрархій еволюційних рівнянь, якими описуються системи багатьох частинок статистичної механіки. Серед напрямків до вирішення цієї проблеми є підхід, який ґрунтується на теорії еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів, якими описуються стани систем багатьох частинок.

У цьому розділі викладено строгі результати з теорії еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описуються стани та спостережувані величини класичних систем багатьох частинок.

За допомогою встановлених зв'язків між введеними твірними функціоналами для спостережуваних величин, а також для станів, у відповідних банахових просторах у термінах груп операторів рівняння Ліувілля побудовано непертурбативні розв'язки для задачі Коші для ієрархії дуальних рівнянь ББҐКІ та для ієрархії рівнянь ББҐКІ.

У цьому розділі також розвинуто альтернативний спосіб опису еволюції станів систем багатьох частинок, який ґрунтується на еволюційному рівнянні у функціональних похідних для твірного функціоналу послідовності кореляціних функцій.

За допомогою встановлених зв'язків між твірним функціоналом для послідовності кореляційних функцій та твірними функціоналами для послідовності маргінальних кореляційних функцій та маргінальних функцій розподілу побудовано непертурбативні розв'язки задачі Коші для ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ для маргінальних кореляційних функцій та для ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних функцій розподілу у термінах нелінійних груп операторів ієрархії рівнянь Ліувілля для кореляційних функцій.

2.1. Еволюційні рівняння у функціональних похідних для станів

Як відомо, еволюція станів систем скінченої кількості частинок описується двома еквівалентними способами: у термінах функцій розподілу, які задовольняють рівнянню Ліувілля, або у термінах фінітної послідовності маргінальних (s-частинкових) функцій розподілу, яка є розв'язком системи рівнянь ББҐКІ.

У розділі розглядаються системи нефіксованої кількості частинок, середня кількість яких є скінченою величиною (нерівноважний великий канонічний ансамбль). У цьому випадку еволюція станів системи багатьох частинок описується нескінченною послідовністю функцій розподілу, які є розв'язком послідовності рівнянь Ліувілля або ієрархією рівнянь ББҐКІ для нескінченної послідовності маргінальних функцій розподілу. Еволюція станів систем нескінченної кількості частинок описується у термінах нескінченної послідовності маргінальних функцій розподілу з відповідних функціональних просторів, яка задовольняє ієрархію рівнянь ББҐКІ.

У цьому розділі розвинуто підхід до опису еволюції станів систем багатьох частинок у термінах твірного функціоналу для маргінальних функцій розподілу, який є розв'язком еволюційного рівняння у функціональних похідних.

Нехай $f = (f_0, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ – послідовність вимірних функцій, які визначені на фазовому просторі відповідної кількості частинок, тобто $x_i \equiv (q_i, p_i)$ – фазові координати i-тої частинки, f_0 – дійсне число та $u = (1, u(x_1), \ldots, \prod_{i=1}^{n} u(x_i), \ldots)$ – послідовність добутків нескінченно диференційованих інтегрованих функцій $u(x_i)$, $i \geq 1$.

Розглянемо такий функціонал

$$(f, u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int f_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.1}$$

Оскільки функції $u(x_i)$, $i \geq 1$ є інтегрованими, тоді функціонал (2.1) існує. Функціонал (2.1) будемо називати твірним для функцій $f_n(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, оскільки виконується така рівність

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta u(x_1) \ldots \delta u(x_n)} (f, u) \mid_{u=0}, \tag{2.2}$$

де $\delta^n / \delta u(x_1) \ldots \delta u(x_n)$ – функціональна похідна n-го порядку (похідна Гато n-го порядку [57, 60]).

Надалі будемо розглядати систему нефіксованої кількості частинок у просторі $\mathbb{R}^3$, кожна n-частинкова підсистема якої визначена за допомогою гамільтоніану [34]

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} K(p_i) + \sum_{i<j=1}^{n} \Phi(q_i - q_j), \tag{2.3}$$

де $K(p_i) \equiv \frac{p_i^2}{2m}, m \equiv 1$ – кінетична енергія i-ї частинки та функція $\Phi(q_i - q_j)$ – парний потенціал взаємодії. Надалі будемо вважати, що функція Φ задовольняє умови, які гарантують існування глобального розв'язку рівнянь Гамільтона для системи скінченної кількості частинок [34].

Еволюцію стану системи багатьох частинок будемо описувати за допомогою послідовності функцій розподілу $D(t) = (1, D_1(t,x_1), \ldots, D_n(t,x_1,\ldots,x_n), \ldots)$. Елементи послідовності є інтегрованими функціями $D_n(t,x_1,\ldots,x_n)$, які визначені на n-частинковому фазовому просторі та є симетричними відносно перестановок аргументів $x_1,\ldots,x_n$. Відповідно до означення (2.1) для функцій розподілу $D_n(t,x_1,\ldots,x_n)$, $n \geq 1$, введемо твірний функціонал

$$(D(t),u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int D_n(t,x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}u(x_i)dx_1\ldots dx_n. \tag{2.4}$$

Еволюція стану системи багатьох частинок у термінах твірного функціоналу (2.4) описується за допомогою такого еволюційного рівняння у функціональних похідних

$$\frac{d}{dt}(D(t),u) = \int\big\{K(p_1),\frac{\delta}{\delta u(x_1)}(D(t),u)\big\}u(x_1)dx_1 + \frac{1}{2!}\int\int\big\{\Phi(q_1-q_2),\frac{\delta^2}{\delta u(x_1)\delta u(x_2)}(D(t),u)\big\}u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2, \tag{2.5}$$

де символом $\{\,.\,,\,.\,\}$ позначено дужки Пуассона [14]

$$\{H_n, D_n(t)\} = \sum_{i=1}^{n}\big(\langle\frac{\partial H_n}{\partial q_i},\frac{\partial D_n(t)}{\partial p_i}\rangle - \langle\frac{\partial H_n}{\partial p_i},\frac{\partial D_n(t)}{\partial q_i}\rangle\big), \tag{2.6}$$

та $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ – скалярний добуток векторів.

Беручи до уваги рівність (2.2), бачимо, що функції розподілу $D_n(t)$, $n \geq 1$, задовольняють послідовність рівнянь Ліувілля:

$$\frac{\partial}{\partial t}D_n(t) = \{H_n, D_n(t)\}, \quad n \geq 1. \tag{2.7}$$

Зазначимо, що обернене твердження також є справедливим, тобто твірний функціонал для розв'язків послідовності рівнянь Ліувілля (2.7) задовольняє рівняння (2.5). Надалі еволюційне рівняння (2.5) будемо називати рівнянням Ліувілля у функціональних похідних для станів.

Розглянемо еквівалентний підхід до опису еволюції станів системи багатьох частинок, а саме: у термінах твірного функціоналу для маргінальних функцій розподілу [34].

Твірний функціонал для послідовності маргінальних функцій розподілу $F(t) = (1, F_1(t, x_1), \ldots, F_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ визначимо за допомогою твірного функціоналу (2.4) в такий спосіб

$$(F(t), u) = (\widetilde{D}(t), u + 1), \tag{2.8}$$

де $\widetilde{D}(t) = (D(t), I)^{-1}(1, D_1(t, x_1), \ldots, D_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ послідовність нормованих функцій розподілу, $(D(t), I)$ - нормуючий множник функціоналу

$$(D(t), I) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int D_n(t, x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

та введена послідовність $I \equiv (1, \ldots, 1, \ldots)$.

Встановимо зв'язок між маргінальними функціями розподілу та функціями розподілу, використовуючи рівність (2.8) для їх твірних функціоналів. Для цього перетворимо твірний функціонал $(\widetilde{D}(t), u + 1)$ до вигляду (2.1). Справедлива така рівність

$$(\widetilde{D}(t), u + 1) = (e^{\mathfrak{a}} \widetilde{D}(t), u), \tag{2.9}$$

де оператор $\mathfrak{a}$ (аналог оператора знищення квантової теорії поля [34]) визначений на послідовностях інтегрованих функцій $f \in L^1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ згідно з формулою:

$$(\mathfrak{a} f)_n(x_1, \ldots, x_n) \doteq \int f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) dx_{n+1}. \tag{2.10}$$

Дійсно, справедлива рівність

$$(\widetilde{D}(t), u + 1) = (D(t), I)^{-1} \times$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int D_n(t, x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (u(x_i) + 1) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$(D(t),I)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int D_n(t,x_1,\dots,x_n)\times$$
$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{i_1<\dots<i_s=1}^{n}u(x_{i_1})\dots u(x_{i_s})dx_1\dots dx_n=(D(t),I)^{-1}\times$$
$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int D_{s+n}(t,x_1,\dots,x_{s+n})\prod_{i=1}^{s}u(x_i)dx_1\dots dx_{s+n}.$$

Таким чином, згідно з визначенням (2.2) з означення (2.8) та рівності (2.9) отримуємо вираз для маргінальних функцій розподілу у випадку великого канонічного нерівноважного ансамбля [34]. Отже відповідно до означення (2.10) останній вираз співпадає з правою частиною рівності (2.9) і остаточно маємо:

$$F_s(t,x_1,\dots,x_s)=(D(t),I)^{-1}\times \tag{2.11}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int D_{s+n}(t,x_1,\dots,x_{s+n})dx_{s+1}\dots dx_{s+n},\quad s\geq 1.$$

Використовуючи рівняння Ліувілля у функціональних похідних (2.5) та співвідношення (2.8) між твірними функціоналами для маргінальних функцій розподілу та функціями розподілу, отримуємо еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних функцій розподілу

$$\frac{d}{dt}(F(t),u)=\int\Big\{K(p_1),\frac{\delta}{\delta u(x_1)}(F(t),u)\Big\}(u(x_1)+1)dx_1+ \tag{2.12}$$
$$\frac{1}{2!}\int\int\Big\{\Phi(q_1-q_2),\frac{\delta^2}{\delta u(x_1)\delta u(x_2)}(F(t),u)\Big\}\prod_{i=1}^{2}(u(x_i)+1)dx_1dx_2.$$

Отримане рівняння будемо називати рівнянням ББҐКІ у функціональних похідних [23, 24].

Враховуючи рівність (2.2), за допомогою еволюційного рівняння (2.12) можна встановити, що маргінальні функції розподілу (2.11) задовольняють ієрархію рівнянь ББҐКІ:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(t) = \big\{H_s, F_s(t)\big\} + \int \big\{ \sum_{i=1}^{s} \Phi(q_i - q_{s+1}), F_{s+1}(t)\big\} dx_{s+1}, \qquad (2.13)$$
$$s \geq 1,$$

де $\{\,.\,,\,.\,\}$ – дужки Пуассона (2.6). Аналогічно випадку рівняння Ліувілля (2.7), твірний функціонал для розв'язків ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.13) задовольняє рівняння ББҐКІ у функціональних похідних (2.12).

Отримані вище результати узагальнимо на випадок систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії, а саме системи багатьох частинок з гамільтоніаном такої структури

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} K(p_i) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1=i_1<\ldots<i_k}^{n} \Phi^{(k)}(q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}), \quad n \geq 1, \qquad (2.14)$$

де функція $\Phi^{(k)}$ – k-частинковий потенціал взаємодії.

Для таких систем рівняння Ліувілля у функціональних похідних має такий вигляд

$$\frac{d}{dt}(D(t), u) = \int \big\{K(p_1), \frac{\delta}{\delta u(x_1)}(D(t), u)\big\} u(x_1) dx_1 + \qquad (2.15)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int \big\{\Phi^{(n)}(q_1, \ldots, q_n), \frac{\delta^n}{\delta u(x_1) \ldots \delta u(x_n)}(D(t), u)\big\} \times$$
$$\prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \ldots dx_n.$$

Відповідні функції розподілу задовольняють послідовність рівнянь Ліувілля (2.7) з гамільтоніаном (2.14) відповідно.

Еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних функцій розподілу у випадку систем з багаточастинковим потенціалом взаємодії має такий вигляд

$$\frac{d}{dt}(F(t), u) = \int \big\{K(p_1), \frac{\delta}{\delta u(x_1)}(F(t), u)\big\} (u(x_1) + 1) dx_1 + \qquad (2.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int\big\{\Phi^{(n)}(q_1,\dots,q_n),\frac{\delta^n}{\delta u(x_1)\dots\delta u(x_n)}(F(t),u)\big\}\times$$
$$\prod_{i=1}^{n}(u(x_i)+1)dx_1\dots dx_n.$$

У цьому випадку маргінальні функції розподілу задовольняють ієрархію рівнянь ББҐКІ:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(t)=\big\{H_s,F_s(t)\big\}+ \tag{2.17}$$
$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\dots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int\big\{\Phi^{(k+n)}(q_{i_1},\dots,q_{i_k},q_{s+1},\dots,$$
$$q_{s+n}),F_{s+n}(t)\big\}dx_{s+1}\dots dx_{s+n},\quad s\geq 1.$$

Зауважимо, що структура еволюційних рівнянь у функціональних похідних (2.5) та (2.12), на відміну від структури еволюційних рівнянь (2.7) та (2.13) для відповідних функцій розподілу, є подібною.

2.2. Непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ

За допомогою розв'язку рівняння Ліувілля (2.7) та співвідношення між твірними функціоналами (2.8), побудуємо непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.13).

Розглянемо послідовність

$$\widetilde{D}(t)=(S(-t)D(0),I)^{-1}\times$$
$$(1,(S_1(-t)D_1(0))(x_1),\dots,(S_n(-t)D_n(0))(x_1,\dots,x_n),\dots),$$

де однопараметрична сім'я відображень $\{S_n(-t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ – група ізометричних операторів, яка визначена на просторі інтегрованих функцій L^1_n як група зсувів аргументів функцій вздовж розв'язків

$\{X_i(-t, x_1, \ldots, x_n)\}_{i=1}^n$ рівнянь Гамільтона [11]

$$(S_n(-t)f_n)(x_1, \ldots, x_n) \doteq \tag{2.18}$$
$$f_n(X_1(-t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(-t, x_1, \ldots, x_n)).$$

Зауважимо, що функція $S_n(-t)D_n(0)$ є розв'язком задачі Коші для рівняння Ліувілля (2.7) з початковими даними $D_n(0)$ [34].

У кожному члені ряду, яким зображується функціонал $(e^{\mathfrak{a}}S(-t)D(0), u)$, розкладемо групу операторів (2.18) у кластерний розклад за кумулянтами груп операторів (2.18), а саме

$$S_{s+n}(-t, Y, X \setminus Y) = \sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\}, X\setminus Y) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t, X_i), \tag{2.19}$$
$$n \geq 0,$$

де використано такі позначення: $Y \equiv (1, \ldots, s)$, множина $(\{Y\})$ – множина, яка складається з одного елементу $Y = (1, \ldots, s)$; $X \equiv (1, \ldots, s+n)$, $\sum_{\mathrm{P}:(\{Y\}, X\setminus Y) = \bigcup_i X_i}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини $(\{Y\}, X \setminus Y)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \subset (\{Y\}, X \setminus Y)$, які не перетинаються.

Згідно з рівністю

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\}, X\setminus Y) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t, X_i) =$$
$$\sum_{Z \subset X \setminus Y} \mathfrak{A}_{1+|Z|}(-t, \{Y\}, Z) \sum_{\mathrm{P}:\, X\setminus Y \setminus Z = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t, X_i),$$

та внаслідок симетричності підінтегральних функцій кожного члену ряду, яким зображується функціонал $(e^{\mathfrak{a}}S(-t)D(0), u)$, справедлива така операторна рівність

$$\sum_{Z \subset X \setminus Y} \mathfrak{A}_{1+|Z|}(-t, \{Y\}, Z) \sum_{\mathrm{P}:\, X\setminus Y \setminus Z = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t, X_i) =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_k = 1}^{n} \mathfrak{A}_{1+k}(-t, \{Y\}, s+1, \ldots, s+k) \times$$

$$\sum_{\mathrm{P}:\,(s+k+1,\dots,s+n)=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t,X_i).$$

В результаті маємо

$$(e^{\mathfrak{a}}S(-t)D(0),u)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int \mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(-t,\{Y\},\,X\setminus Y)\times$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\mathrm{P}:\,(s+n+1,\dots,s+n+k)=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t,X_i)D_{s+n+k}(0)\times$$
$$\prod_{i=1}^{s}u(x_i)dx_1\dots dx_{s+n+k}.$$

Зауважимо, що розв'язком кластерного розкладу (2.19) є кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (2.18)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},\,X\setminus Y)=\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset \mathrm{P}}S_{|\theta(X_i)|}(-t,\theta(X_i)),\tag{2.20}$$

де $\theta(\{Y\},X\setminus Y)=X$ – відображення декластеризації [65].

Остаточно, враховуючи рівність

$$\int\dots\int\sum_{\mathrm{P}:\,(s+n+1,\dots,s+n+k)=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(-t,X_i)D_{s+n+k}(0,$$
$$x_1,\dots,x_{s+n+k})dx_{s+n+1}\dots dx_{s+n+k}=$$
$$\int\dots\int D_{s+n+k}(0,x_1,\dots,x_{s+n+k})dx_{s+n+1}\dots dx_{s+n+k},$$

та аналогічну рівність для нормуючого множника [34]

$$(S(-t)D(0),I)=(D(0),I),$$

згідно з означенням маргінальних функцій розподілу в початковий момент часу, із співвідношення (2.8) для маргінальних функцій розподілу отримуємо такий розклад у ряд

$$F_s(t,x_1,\dots,x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\dots\int \mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},\,X\setminus Y)F_{s+n}(0,\tag{2.21}$$

$x_1, \dots, x_{s+n})dx_{s+1} \dots dx_{s+n},$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\},\ X\setminus Y)$ цього ряду – кумулянт $(1+n)$-го порядку (2.20) груп операторів (2.18).

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 2.1. *Розклад у ряд (2.21) є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.17) тоді і тільки тоді, якщо твірні оператори* $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$, $n \geq 0$, *задовольняють рекурентні співвідношення (2.19).*

Зауважимо, за певних умов на потенціал взаємодії та початкові дані непертурбативний розв'язок (2.21) для ієрархії рівнянь ББҐКІ співпадає з розв'язком побудованим за теорією збурень [34]. Цей факт є наслідком справедливості аналогів рівнянь Дюамель для кумулянтів (2.20) груп операторів (2.18) [67, 73].

Зазначимо, що вперше непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ було побудовано в роботі [92] (див. також [34]) в формі розкладу, твірні оператори якого визначались редукованими кумулянтами відповідного порядку груп операторів (2.18), а саме:

$$U_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{s+n-k}(-t, Y, s+1, \dots, s+n-k). \tag{2.22}$$

Дійсно, використовуючи редуковані кластерні розклади для груп операторів (2.18) за новими еволюційним операторам (редукованим кумулянтом)

$$S_{s+n}(-t, Y, X \setminus Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} U_{1+k}(-t, \{Y\}, s+1, \dots, s+k),$$

для твірного функціоналу $(\widetilde{D}(t), u+1)$ справедлива така рівність

$$(\widetilde{D}(t), u+1) = (D(0), I)^{-1} (S(-t)D(0), u+1) =$$

$$(D(0),I)^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int U_{1+n}(-t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D_{s+n+k}(0)\times$$
$$\prod_{i=1}^{s}u(x_i)dx_1\ldots dx_{s+n+k}.$$

В результаті маємо

$$F_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int U_{1+n}(-t,\{Y\},X\setminus Y)F_{s+n}(0,$$
$$x_1,\ldots,x_{s+n})dx_{s+1}\ldots dx_{s+n},$$

де твірний оператор $U_{1+n}(-t)$ – редукований кумулянт груп операторів $(1+n)$-го порядку (2.22).

2.3. Еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних спостережуваних

Системи багатьох частинок описуються у термінах спостережуваних величин і станів. Функціонал середніх значень спостережуваних визначає дуальність між спостережуваними і станами, і внаслідок цього існує два еквівалентні способи опису еволюції систем частинок.

Для систем нефіксованої кількості частинок спостережувані описуються нескінченною послідовністю, яка є розв'язком послідовності рівнянь Ліувілля для спостережуваних, дуальними рівняннями до яких є рівняння Ліувілля для функцій розподілу. Еквівалентний спосіб опису еволюції спостережуваних системи багатьох частинок полягає в її описі за допомогою нескінченної послідовності маргінальних (s-частинкових) спостережуваних, яка є розв'язком дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ.

У цьому розділі розвинуто підхід до опису еволюції спостережуваних систем багатьох частинок у термінах твірного функціоналу для маргінальних спостережуваних, який є розв'язком відповідного еволюційного рівняння у функціональних похідних.

Еволюція спостережуваних системи нефіксованого кількості частинок описується за допомогою послідовності $A(t) = (A_0, A_1(t, x_1), \ldots, A_n(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ функцій $A_n(t, x_1, \ldots, x_n)$, визначених на n-частинковому фазовому просторі, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \ldots, x_s$ обмеженими функціями, A_0 – дійсне число.

Відповідно до означення (2.1) визначимо твірний функціонал для спостережуваних $(A(t), u)$ таким чином

$$(A(t), u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int A_n(t, x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \ldots dx_n. \quad (2.23)$$

Функціонал (2.23) існує для інтегрованих функцій $u(x_i)$, $i \geq 1$.

У термінах твірного функціоналу (2.23) еволюція спостережуваних систем багатьох частинок з гамільтоніаном (2.3) визначається таким еволюційним рівнянням

$$\frac{d}{dt}(A(t), u) = \int \{ \frac{\delta}{\delta u(x_1)}(A(t), u), K(p_1) \} u(x_1) dx_1 + \quad (2.24)$$
$$\frac{1}{2!} \int \int \{ \frac{\delta^2}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)}(A(t), u), \Phi(q_1 - q_2) \} u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2,$$

де $\{\, . , . \,\}$ – дужки Пуассона (2.6).

Враховуючи рівність (2.2), встановлюємо, що послідовність функцій $A_n(t)$, $n \geq 1$, задовольняє послідовність рівнянь Ліувілля для спостережуваних:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_n(t) = \{ A_n(t), H_n \}, \quad n \geq 1. \quad (2.25)$$

Справедливим є також і обернене твердження, тобто твірний функціонал для розв'язків послідовності рівнянь Ліувілля (2.25) задовольняє рівняння у функціональних похідних (2.24).

Визначимо твірний функціонал для маргінальних спостережуваних $B(t) = (B_0, B_1(t, x_1), \ldots, B_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ через твірний функціонал спостережуваних (2.23) таким чином

$$(B(t),u) = (A(t),u(u,I)^{-1}), \tag{2.26}$$

де використано позначення

$$u(u,I)^{-1} =$$
$$(1,u(x_1),\ldots,\prod_{i=1}^{n}u(x_i),\ldots)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\ldots\int\prod_{j=1}^{k}u(x_j)dx_1\ldots dx_k.$$

Зауважимо, за допомогою твірного функціоналу для маргінальних спостережуваних $(B(t),u)$ визначається еквівалентний підхід до опису еволюції спостережуваних систем скінченної кількості частинок, який також дозволяє описати еволюцію спостережуваних величин у випадку систем нескінченної кількості частинок.

Використовуючи співвідношення (2.26), встановимо співвідношення між маргінальними спостережуваними та спостережуваними. Перетворимо твірний функціонал $(A(t),u(u,I)^{-1})$ до вигляду (2.1) та визначимо функції, для яких цей функціонал є твірним функціналом. Справедлива така рівність (дуальний аналог рівності (2.9))

$$(A(t),u(u,I)^{-1}) = (e^{-\mathfrak{a}^+}A(t),u), \tag{2.27}$$

де оператор $\mathfrak{a}^+$ визначено на послідовностях обмежених функцій $b \in L^\infty$ (аналог оператора народження квантової теорії поля [34], який є спряженим оператором до оператора (2.10) у сенсі функціоналу середніх значень спостережуваних [34]) за допомогою формули

$$(\mathfrak{a}^+b)_s(x_1,\ldots,x_s) \doteq \sum_{j=1}^{s} b_{s-1}((x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_j)).$$

В результаті маємо

$$(A(t),u(u,I)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\ldots\int A_n(t,x_1,\ldots,x_n)\times$$

$$\prod_{i=1}^{k+n} u(x_i)dx_1 \dots dx_{k+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times$$
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} A_{n-k}(t, x_1, \dots, x_{n-k}) \prod_{i=1}^{n} u(x_i) dx_1 \dots dx_n.$$

Внаслідок симетричності функцій для спостережуваних згідно з означенням (2.2), із співвідношення (2.26) отримуємо вираз для розкладу маргінальних (s-частинкових) спостережуваних у випадку нерівноважного великого канонічного ансамблю [28],[29]

$$B_s(t, x_1, \dots, x_s) = \tag{2.28}$$
$$\sum_{n=0}^{s} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n = 1}^{s} A_{s-n}\big(t, (x_1, \dots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})\big).$$

Використовуючи рівність (2.26), з рівняння Ліувілля у функціональних похідних для спостережуваних (2.24) отримуємо еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних спостежуваних

$$\frac{d}{dt}(B(t), u) = \int \big\{ \frac{\delta}{\delta u(x_1)} (B(t), u), K(p_1) \big\} u(x_1) dx_1 + \tag{2.29}$$
$$\frac{1}{2!} \int \int \big\{ \big(\frac{\delta^2}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} (B(t), u) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\delta}{\delta u(x_j)} (B(t), u) \big),$$
$$\Phi(q_1 - q_2) \big\} \prod_{i=1}^{2} u(x_i) dx_1 dx_2.$$

Еволюційне рівняння (2.29) будемо називати дуальним рівнянням ББҐКІ у функціональних похідних.

Враховуючи рівність (2.2), з еволюційного рівняння (2.29) отримуємо, що маргінальні спостережувані (2.28) задовольняють дуальну ієрархію рівнянь ББҐКІ [29]:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_s(t, x_1, \dots, x_s) = \big\{ B_s(t, x_1, \dots, x_s), H_s \big\} + \tag{2.30}$$

$$\sum_{i\neq j=1}^{s}\big\{B_{s-1}(t,(x_1,\ldots,x_s)\setminus(x_i)),\Phi(q_i-q_j)\big\},\quad s\geq 1.$$

Як і у випадку рівнянь Ліувілля (2.25), твірний функціонал для розв'язку дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.30) задовольняє дуальне рівняння ББҐКІ у функціональних похідних (2.29).

Узагальнимо побудоване еволюційне рівняння (2.29) для систем взаємодіючих частинок для випадку багаточастинкового потенціалу. Тоді рівняння Ліувілля у функціональних похідних має такий вигляд

$$\frac{d}{dt}(A(t),u)=\int\big\{\frac{\delta}{\delta u(x_1)}(A(t),u),K(p_1)\big\}u(x_1)dx_1+ \tag{2.31}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\big\{\frac{\delta^n}{\delta u(x_1)\ldots\delta u(x_n)}(A(t),u),\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n)\big\}\times$$
$$\prod_{i=1}^{n}u(x_i)dx_1\ldots dx_n,$$

а спостережувані задовольняють послідовність рівнянь Ліувілля (2.25) з гамільтоніаном (2.14), відповідно.

Для систем багатьох частинок з гамільтоніаном (2.14) еволюційне рівняння в функціальних похідних для твірного функціоналу для маргінальних спостережуваних має вигляд

$$\frac{d}{dt}(B(t),u)=\int\{\frac{\delta}{\delta u(x_1)}(B(t),u),K(p_1)\}u(x_1)dx_1+ \tag{2.32}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n}\frac{\delta^k}{\delta u(x_{i_1})\ldots\delta u(x_{i_k})}(B(t),u),$$
$$\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n)\}\prod_{i=1}^{n}u(x_i)dx_1\ldots dx_n,$$

а послідовність маргінальних спостережуваних задовольняє відповідну дуальну ієрархію рівнянь ББҐКІ

$$\frac{\partial}{\partial t}B_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\big\{B_s(t,x_1,\ldots,x_s),H_s\big\}+ \tag{2.33}$$

$$\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{s}\frac{1}{(k-n)!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_k=1}^{s}\big\{B_{s-n}(t,(x_1,\ldots,$$
$$x_s)\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_n})),\Phi^{(k)}(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})\big\}.$$

Таким чином, еволюційні рівняння у функціональних похідних для твірних функціоналів (2.4) та (2.23) відповідно є (2.15) та (2.31), а для твірних функціоналів (2.8) та (2.26) є рівняннями у функціональних похідних (2.16) та (2.32) відповідно.

За допомогою розв'язку рівняння Ліувілля (2.25) та співвідношення між твірними функціоналами (2.26) побудуємо непертурбативний розв'язок задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.33).

Розглянемо послідовність

$$A(t)=(A_0,S_1(t)A_1(0,x_1),\ldots,S_n(t)A_n(0,x_1,\ldots,x_n),\ldots),$$

де група операторів $S_n(t)$, яка визначена в просторі обмежених функцій L_n^∞ за допомогою формули (2.18), задає розв'язок задачі Коші для рівняння Ліувілля для спостережуваних системи n частинок з початковими даними $A_n(0)$. Використовуючи рівність (2.27), в кожному члені ряду функціоналу $(e^{-\mathfrak{a}^+}S(t)A(0),u)$ розкладемо оператори $S_n(t)$, $n\geq 1$ в такий кластерний розклад

$$(-1)^nS_{s-n}(t,Y\setminus X)= \qquad (2.34)$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{i_1<\ldots<i_k\in(j_1,\ldots,j_n)}\mathfrak{A}_{1+k}(t,\{Y\setminus(i_1,\ldots,i_k)\},i_1,\ldots,i_k),$$

де використано такі позначення: $X\equiv(j_1,\ldots,j_n)\subset Y$, $(i_1,\ldots,i_k)\subset X$. В результаті справедливими є такі рівності

$$(e^{-\mathfrak{a}^+}S(t)A(0),u)=$$
$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\cdots\int\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}S_{s-n}(t)A_{s-n}(0)((x_1,\ldots,$$

$$x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})) \prod_{i=1}^{s} u(x_i) dx_1 \ldots dx_s =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \ldots \int \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \ldots \neq j_n = 1}^{s} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y \setminus X\}, X) \sum_{k=0}^{s-n} \frac{(-1)^k}{k!} \times$$

$$\sum_{\substack{i_1 \neq \ldots \neq i_k = 1, \\ i_1, \ldots, i_k \neq j_1, \ldots, j_n}}^{s} A_{s-n-k}(0, (x_1, \ldots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots,$$

$$x_{j_n}) \setminus (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})) \prod_{i=1}^{s} u(x_i) dx_1 \ldots dx_s.$$

Відповідно до означення маргінальних спостережуваних (2.28) у початковий момент часу, із співвідношення (2.26) та рівності (2.27) остаточно отримуємо розклад для маргінальних спостережуваних

$$B_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \ldots \neq j_n = 1}^{s} \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y \setminus X\}, X) \, B_{s-n}(0, \quad (2.35)$$
$$(x_1, \ldots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})),$$

де використано позначення $X \equiv (j_1, \ldots, j_n) \subset Y \equiv (1, \ldots, s)$ та твірний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ – кумулянт $(1+n)$-го порядку груп операторів (2.18), який визначено таким розкладом [29],[67]

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y \setminus X\}, X) \doteq \quad (2.36)$$
$$\sum_{\mathrm{P}: (\{Y \setminus X\}, X) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1} (|\mathrm{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} S_{|\theta(X_i)|}(t, \theta(X_i)),$$

де $\sum_{\mathrm{P}: (\{Y \setminus X\}, X) = \bigcup_i X_i}$ – сума по всім можливим розбиттям множини $(\{Y \setminus X\},\, X)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин, які не перетинаються, та використано позначення з формули (2.35).

Наведемо найпростіші приклади кумулянтів (2.36) груп операторів (2.18):

$$\mathfrak{A}_1(t, \{Y\}) = S_s(t, Y),$$

$$\mathfrak{A}_2(t, \{Y \setminus (j)\}, j) = S_s(t, Y) - S_{s-1}(t, Y \setminus (j))S_1(t, j).$$

Доведемо, що кумулянти (2.36) груп операторів (2.18) є розв'язками рекурентних співвідношень (2.34). Для цього розглянемо рекурентні співвідношення (2.34) для функцій $b_{s-n}((x_1, \ldots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}))$. Тоді справедливими є такі рівності:

$$(-1)^n S_{s-n}(t, Y \setminus X) \sum_{\mathrm{P}:\, X = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|}|\mathrm{P}|! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} S_{|X_i|}(t, X_i) b_{s-n}((x_1, \ldots,$$
$$x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{i_1 < \ldots < i_k \in (j_1, \ldots, j_n)} \mathfrak{A}_{1+k}(t,$$
$$\{(1, \ldots, s) \setminus (i_1, \ldots, i_k)\}, i_1, \ldots, i_k) b_{s-n}((x_1, \ldots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})),$$
$$0 \le n < s,$$

де використано позначення з формули (2.36). З цих рекурентних співвідношень отримуємо такі кластерні розклади для груп операторів (2.18):

$$S_s(t, Y \setminus X,\, X) = \sum_{\mathrm{P}:\, (\{Y \setminus X\}, X) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_{|X_i|}(t, X_i), \quad |X| \ge 0, \qquad (2.37)$$

і відповідно, розкладами (2.36) визначається розв'язок рекурентних співвідношень (2.37).

Таким чином, справедливим є таке твердження.

Теорема 2.2. *Розклад (2.35) є розв'язком задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.33) тоді і тільки тоді, якщо його твірні оператори* $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$, $n \ge 0$*, задовольняють рекурентні співвідношення (2.37).*

Зазначимо, що аналогами розкладів (2.21),(2.22) у випадку розв'язку дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.30) є розклад (2.35), твірними операторами якого є такі редуковані кумулянти груп операторів (2.18):

$$U_{1+n}(t, \{1, \ldots, s-n\}, s-n+1, \ldots, s) = \qquad (2.38)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}S_{s-k}(t), \quad n\geq 0.$$

Зауважимо, що для деяких класів спостережуваних розклад (2.35) має більш просту структуру. Розглянемо однокомпонентну послідовність маргінальних спостережуваних $B^{(1)} = (0, a_1(x_1), 0, \ldots)$. Відповідно до співвідношення (2.28) така послідовність маргінальних спостережуваних відповідає спостережуваній адитивного типу $A^{(1)} = (0, a_1(x_1), \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_1(x_i), \ldots)$, (в загальному випадку послідовності $B^{(k)} = (0, \ldots, 0, a_k(x_1, \ldots, x_k), 0, \ldots)$ відповідає спостережувана k-арного типу $A^{(k)} = (0, \ldots, 0, a_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \sum_{i_1<\ldots<i_k=1}^{n} a_k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \ldots))$. Тоді для спостережуваних адитивного типу розв'язок (2.35) зображується таким розкладом

$$B_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \ldots, s)\sum_{i=1}^{s} a_1(x_i),$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_s(t)$ – кумулянт s-го порядку (2.36) груп операторів (2.18).

2.4. Еволюційні рівняння у функціональних похідних для твірних функціоналів для кореляційних функцій

Еволюцію станів систем багатьох частинок можна описати не лише у термінах нескінченної послідовності функцій розподілу або маргінальних функцій розподілу, але й в еквівалентний спосіб за допомогою послідовності кореляційних функцій або маргінальних кореляційних функцій.

У цьому розділі розвинуто підхід до опису еволюції станів систем багатьох частинок у термінах твірних функціоналів для кореляційних функцій та твірних функціоналів для маргінальних кореляційних функцій, які є розв'язками відповідних еволюційних рівнянь у функціональних похідних.

Визначимо твірний функціонал $(g(t),u)$ для кореляційних функцій $g_s(t,x_1,\ldots,x_s)$, $s\geq 1$, через твірний функціонал (2.4) послідовності функцій розподілу таким співвідношенням

$$(D(t),u)=e^{(g(t),u)}, \tag{2.39}$$

де використано позначення з формули (2.4).

Враховуючи рівність

$$\frac{\delta^k}{\delta u(x_1)\ldots\delta u(x_k)}(D(t),u)=$$
$$e^{(g,u)}\sum_{\substack{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_k)=\bigcup_j X_j,\\ X_j\equiv(x_{i_1},\ldots,x_{i_{|X_j|}})}}\ \prod_{X_j\subset\mathrm{P}}\frac{\delta^{|X_j|}}{\delta u(x_{i_1})\ldots\delta u(x_{i_{|X_j|}})}(g(t),u),\quad k\geq 1,$$

де $\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_j X_j}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини аргументів $(x_1,\ldots,x_n)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_j\equiv(x_{i_1},\ldots,x_{i_{|X_j|}})\subset(x_1,\ldots,x_n)$, які не перетинаються, згідно з рівнянням Ліувілля у функціональних похідних (2.5), еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для кореляційних функцій (2.39) має вигляд

$$\frac{d}{dt}(g(t),u)=\int\big\{K(p_1),\frac{\delta}{\delta u(x_1)}(g(t),u)\big\}u(x_1)dx_1+ \tag{2.40}$$
$$\frac{1}{2!}\int\int\big\{\Phi(q_1-q_2),\big(\frac{\delta^2}{\delta u(x_1)\delta u(x_2)}(g(t),u)+$$
$$\prod_{j=1}^{2}\frac{\delta}{\delta u(x_j)}(g(t),u)\big)\big\}u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2.$$

У випадку систем частинок з гамільтоніаном (2.14) еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для кореляційних функцій (2.40) має таку структуру

$$\frac{d}{dt}(g(t),u) = \int \big\{K(p_1), \frac{\delta}{\delta u(x_1)}(g(t),u)\big\}u(x_1)dx_1 + \tag{2.41}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int \big\{\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n),$$
$$\sum_{\substack{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_j X_j,\\ X_j\equiv(x_{i_1},\ldots,x_{i_{|X_j|}})}}\ \prod_{X_j\subset\mathrm{P}}\frac{\delta^{|X_j|}(g(t),u)}{\delta u(x_{i_1})\ldots\delta u(x_{i_{|X_j|}})}\big\}\prod_{i=1}^{n}u(x_i)dx_1\ldots dx_n,$$

де $\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_j X_j}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини аргументів $(x_1,\ldots,x_n)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_j \equiv (x_{i_1},\ldots,x_{i_{|X_j|}})\subset(x_1,\ldots,x_n)$, які не перетинаються.

Враховуючи рівність (2.2), отримуємо, що кореляційні функції $g_s(t)$, $s\geq 1$, задовольняють ієрархію рівнянь Ліувілля для кореляційних функцій [68, 103]

$$\frac{\partial}{\partial t}g_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \big\{H_s, g_s(t)\big\} + \sum_{\substack{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}}\ \sum_{\substack{Z_1\subset X_1,\\ Z_1\neq\emptyset}}\ldots \tag{2.42}$$
$$\sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|}\subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|}\neq\emptyset}}\big\{\Phi^{(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|}|Z_r|)}(Z_1,\ldots,Z_{|\mathrm{P}|}),\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}g_{|X_i|}(t,X_i)\big\},$$

де використано позначення з формули (2.41).

Зауважимо, що кореляційні функції $g_n(t)$, $n\geq 1$, інтерпретуються як функції, які описують кореляцію станів, описаних у термінах функцій розподілу $D_n(t), n\geq 1$, які є розв'язками рівнянь Ліувілля (2.7). Дійсно, згідно з означенням (2.2), із співвідношення (2.39) між твірними функціоналами отримуємо кластерний розклад для функцій розподілу через кореляційні функції:

$$D_s(t,x_1,\ldots,x_s) = \sum_{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset\mathrm{P}}g_{|X_i|}(t,X_i),\quad s\geq 1, \tag{2.43}$$

тобто кореляційні функції є кумулянтами (семіінваріантами) функцій розподілу:

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\\ \sum_{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}D_{|X_i|}(t,X_i),\quad s\geq 1,$$

де використано позначення з формули (2.41).

Кластерний розклад (2.43) є наслідком такої рівності для твірних функціоналів

$$e^{(g(t),u)}=(\mathbb{E}\mathrm{xp}_*g(t),u),\tag{2.44}$$

де функціонал $(\mathbb{E}\mathrm{xp}_*g(t),u)$ – твірний функціонал такої послідовності функцій:

$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_*g(t))_s(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}g_{|X_i|}(t,X_i),\quad s\geq 1.$$

Дійсно, для послідовностей функцій $f,\widetilde{f}\in L^1$ визначимо $*$-добуток

$$(f*\widetilde{f})_{|Y|}(Y)=\sum_{Z\subset Y}f_{|Z|}(Z)\,\widetilde{f}_{|Y\setminus Z|}(Y\setminus Z),\tag{2.45}$$

де $\sum_{Z\subset Y}$ – сума по всім підмножинам Z множини $Y\equiv(x_1,\ldots,x_s)$. Враховуючи означення (2.45) $*$-добутку для послідовності $f=(0,f_1(x_1),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots)$, введемо відображення $\mathbb{E}\mathrm{xp}_*$

$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_*\,f)_{|Y|}(Y)=\big(\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{*n}\big)_{|Y|}(Y)=\tag{2.46}$$
$$1\delta_{|Y|,0}+\sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}f_{|X_i|}(X_i),$$

де використовуються позначення, які введено в формулах (2.45) та (2.41), $\delta_{|Y|,0}$ – сивмол Кронекера та $\mathbb{I}\equiv(1,0,\ldots,0,\ldots)$.

Справедлива така рівність

$$(f*\widetilde{f},u)=(f,u)(\widetilde{f},u).\tag{2.47}$$

Тоді згідно з означенням (2.46), отримуємо рівність (2.44).

Розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42) з початковими даними $g(0)$ визначається таким однопараметричним нелінійним відображенням [68],[101] (див. також [74])

$$g_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\mathcal{S}(t,1,\ldots,s|g(0))\equiv \sum_{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}g_{|X_i|}(0,X_i), \tag{2.48}$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t)$ – кумулянт $|\mathrm{P}|$-го порядку груп операторів (2.18), який визначений таким розкладом

$$\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\doteq \sum_{\mathrm{P}':\,(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k}(-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)!\prod_{Z_k\subset\mathrm{P}'}S_{|\theta(Z_k)|}(-t,\theta(Z_k)), \tag{2.49}$$

де символ $\sum_{\mathrm{P}':\,(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k}$ – сума по всім можливим розбиттям P' множини $(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})$ на $|\mathrm{P}'|$ непорожніх, неперетинних підмножин $Z_k\subset(\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})$.

Дійсно, враховуючи формулу (2.18), для розв'язків послідовності рівнянь Ліувілля та кластерний розклад функцій розподілу по кореляційним функціям у початковий момент часу

$$D(0)=\mathbb{E}\mathrm{xp}_*g(0),$$

з рівності (2.44) отримуємо

$$(g(t),u)=\big(\mathbb{L}\mathrm{n}_*(\mathbb{I}+S(-t)\mathbb{E}\mathrm{xp}_*g(0)),u\big), \tag{2.50}$$

де відображення $\mathbb{L}\mathrm{n}_*$ є оберненим до відображення (2.46) і визначається згідно з такою формулою

$$(\mathbb{L}\mathrm{n}_*(\mathbb{I}+f))_{|Y|}(Y)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}f^{*n}\Big)_{|Y|}(Y)= \sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}f_{|X_i|}(X_i).$$

Прирівнюючи функціональні похідні однакових порядків твірних функціоналів з рівності (2.51), отримуємо розклад (2.48) для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42).

Визначимо твірний функціонал для маргінальних функцій розподілу $(F(t), u)$ та твірний функціонал для маргінальних кореляційних функцій $(G(t), u)$ у термінах твірного функціоналу для кореляційних функцій $(g(t), u)$ та встановимо співвідношення між вказаними твірними функціоналами.

Відповідно до співвідношень (2.8) та (2.39), твірний функціонал для маргінальних функцій розподілу можна визначити через твірний функціонал для кореляційних функцій в такий спосіб

$$(F(t), u) = e^{(g(t),u+1)-(g(t),I)}. \tag{2.51}$$

Використовуючи співвідношення (2.51), отримаємо еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних функцій розподілу за допомогою еволюційного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для кореляційних функцій (2.40).

Згідно з рівністю (2.51) та означення (2.2) отримуємо розклад у ряд для маргінальних функцій розподілу у термінах кореляційних функцій:

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \tag{2.52}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int g_{1+n}(t, \{Y\}, x_{s+1}, \dots, x_{s+n}) dx_{s+1} \dots dx_{s+n}, \quad s \geq 1,$$

де через $\{Y\}$ позначено множину аргументів, що містить один елемент $Y \equiv (x_1, \dots, x_s)$, та послідовність кореляційних функцій $g_{1+n}(t, \{Y\}, x_{s+1}, \dots, x_{s+n})$, $n \geq 0$, є розв'язком відповідної задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42) [65].

Доведемо справедливість співвідношення (2.52). З цією метою перетворимо твірний функціонал у правій частині рівності (2.51) до канонічного вигляду, використовуючи рівності (2.44) та (2.9)

$$e^{(g(t),u+1)-(g(t),I)} = (\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), u+1) =$$
$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(e^{\mathfrak{a}}\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), u).$$

Функціонал $(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(e^{\mathfrak{a}}\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), u)$ є твірним функціоналом для послідовності функцій

$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}e^{\mathfrak{a}}\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t).$$

Запишемо останній вираз покомпонентно. Для цього на множині вимірних функцій визначимо такі відображення:

$$(\mathfrak{d}_Y f)_n \doteq f_{|Y|+n}(Y, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}),$$
$$(\mathfrak{d}_{\{Y\}} f)_n \doteq f_{1+n}(\{Y\}, x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}), \quad n \geq 0.$$

У термінах цих відображень маємо

$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(e^{\mathfrak{a}}\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t))_s(Y) = (\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(\mathfrak{d}_Y \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I).$$

Оскільки справедливі такі рівності [65]:

$$\mathfrak{d}_Y \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t) = \mathfrak{d}_{\{Y\}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t),$$
$$\mathfrak{d}_{\{Y\}} \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t) = \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t) * \mathfrak{d}_{\{Y\}} g(t),$$

тоді, враховуючи рівність (2.47), остаточно встановлюємо співвідношення (2.52)

$$(\mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I)^{-1}(\mathfrak{d}_Y \mathbb{E}\mathrm{xp}_* g(t), I) = (\mathfrak{d}_{\{Y\}} g(t), I).$$

За допомогою розв'язку (2.48) задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (2.40) для кореляційних функцій та співвідношення (2.51) між твірними функціоналами, також можна встановити розклад у ряд (2.21) для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (2.13) для маргінальних функцій розподілу.

Аналогічно співвідношенню (2.8) визначимо твірний функціонал для маргінальних кореляційних функцій через твірний функціонал для кореляційних функцій

$$(G(t), u) = (g(t), u + 1) - (g(t), I). \tag{2.53}$$

Відповідно до означення (2.2), покомпонентно рівність (2.53) має вигляд:

$$G_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \tag{2.54}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int g_{s+n}(t, x_1, \ldots, x_{s+n}) dx_{s+1} \ldots dx_{s+n}, \quad s \geq 1,$$

де послідовність кореляційних функцій $g_{s+n}(t)$, $s \geq 1, n \geq 0$, є розв'язком ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42). Підкреслимо, що на відміну від розкладу для маргінальної функції розподілу (2.52), де кожен член визначається за допомогою $(1 + n)$-частинкової кореляційної функції, кожен член розкладу (2.54) для маргінальних кореляційних функцій визначається $(s + n)$-частинковою кореляційною функцією.

Використовуючи співвідношення (2.53) та (2.51), отримуємо таке співвідношення між твірними функціоналами для маргінальних функцій розподілу та маргінальних кореляційних функцій

$$(F(t), u) = e^{(G(t),u)}. \tag{2.55}$$

Згідно з означенням (2.2), із співвідношення (2.55) отримуємо кластерний розклад маргінальних функцій розподілу через маргінальні кореляційні функції (аналог кластерного розкладу (2.43) або (2.39))

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\mathrm{P}\,:\,(x_1,\ldots,x_s) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} G_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 1, \tag{2.56}$$

де символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини $(x_1, \ldots, x_s)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин X_i, які попарно не перетинаються.

Використовуючи співвідношення (2.53) та еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для кореляційних фукнцій (2.40), побудуємо еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних кореляційних функцій, в результаті маємо

$$\frac{d}{dt}(G(t),u) = \int \big\{K(p_1), \frac{\delta}{\delta u(x_1)}\big\}(G(t),u)(u(x_1)+1)dx_1 + \\ \frac{1}{2!}\int\int \big\{\Phi(q_1-q_2), \big(\frac{\delta^2}{\delta u(x_1)\delta u(x_2)}(G(t),u) + \\ \prod_{j=1}^{2}\frac{\delta}{\delta u(x_j)}(G(t),u)\big)\big\}\prod_{i=1}^{2}(u(x_i)+1)dx_1dx_2, \tag{2.57}$$

У випадку систем частинок з гамільтоніаном (2.14) еволюційне рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу для маргінальних кореляційних функцій має такий вигляд

$$\frac{d}{dt}(G(t),u) = \int \big\{K(p_1), \frac{\delta}{\delta u(x_1)}(G(t),u)\big\}(u(x_1)+1)dx_1 + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int \big\{\Phi^{(n)}(q_1,\ldots,q_n), \\ \sum_{\substack{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_j X_j,\\ X_j\equiv(x_{i_1},\ldots,x_{i_{|X_j|}})}}\ \prod_{X_j\subset\mathrm{P}}\frac{\delta^{|X_j|}(G(t),u)}{\delta u(x_{i_1})\ldots\delta u(x_{i_{|X_j|}})}\big\}\prod_{i=1}^{n}(u(x_i)+1)dx_1\ldots dx_n, \tag{2.58}$$

де використовуються позначення, які введені в формулі (2.41).

Беручи до уваги означення (2.2), згідно з рівнянням (2.58) встановлюємо ієрархію нелінійних рівнянь ББҐКІ для маргінальних кореляційних функцій

$$\frac{\partial}{\partial t}G_s(t) = \big\{H_s, G_s(t)\big\} + \sum_{\substack{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_s)=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}}\ \sum_{\substack{Z_1\subset X_1,\\ Z_1\neq\emptyset}}\ldots \tag{2.59}$$

$$\sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|}\subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|}\neq\emptyset}} \big\{\Phi^{(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|}|Z_r|)}(Z_1,\ldots,Z_{|\mathrm{P}|}),\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}G_{|X_i|}(t,X_i)\big\}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1=j_1<\ldots<j_k}^{s}\int\ldots\int\big\{\Phi^{(n+1)}(q_{j_1},\ldots,q_{j_k},q_{s+1},\ldots,q_{s+n+1-k}),$$
$$\sum_{\substack{\mathrm{P}:\,(x_1,\ldots,x_{s+n+1-k})=\bigcup_j X_j,\,|\mathrm{P}|\leq n+1,\\ X_j\not\subseteq Y\setminus(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})}}\prod_{X_j\subset\mathrm{P}}G_{|X_j|}(t,X_j)\big\}dx_{s+1}\ldots dx_{s+n+1-k},$$

де використано позначення з формули (2.41).

Відмітимо, що структури еволюційних рівнянь у функціональних похідних (2.40) та (2.57) є подібними, на відміну від структури цих ієрархій для відповідних кореляційних функцій.

За допомогою розв'язку (2.48) ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42) та співвідношення (2.53) для твірних функціоналів відповідних функцій, аналогічно випадку співвідношення (2.8), побудуємо розклад для розв'язку задачі Коші для ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ (2.59) для маргінальних кореляційних функцій.

Оскільки справедлива рівність

$$(g(t),u+1)=(\mathcal{S}(t|g(0)),u+1)=(e^{\mathfrak{a}}\mathcal{S}(t|g(0)),u), \tag{2.60}$$

розкладемо твірні оператори (2.48) функціоналу $(e^{\mathfrak{a}}\mathcal{S}(t|g(0)),u)$ у відповідні кластерні розклади. В результаті із співвідношення (2.53) отримуємо розв'язок ієрархії нелінійних рівнянь ББҐКІ [66]:

$$G_s(t,x_1,\ldots,x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int U_{1+n}(t;\{x_1,\ldots,x_s\}, \tag{2.61}$$
$$x_{s+1},\ldots,x_{s+n}\mid G(0))dx_{s+1}\ldots dx_{s+n},\quad s\geq 1,$$

де твірний оператор $U_{1+n}(t\mid\bullet)$ – редукований нелінійний кумулянт $(n+1)$-го порядку груп операторів (2.48), який визначається таким розкладом

$$U_{1+n}(t;\{Y\},x_{s+1},\ldots,x_{s+n}\mid G(0))\doteq\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\times \tag{2.62}$$

$$\sum_{\mathrm{P}:(x_1,\ldots,x_{s+n-k})=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,X_1,\ldots,X_{|\mathrm{P}|})\sum_{k_1=0}^{k}\frac{k!}{k_1!(k-k_1)!}\ldots$$

$$\sum_{k_{|\mathrm{P}|-1}=0}^{k}\frac{k_{|\mathrm{P}|-2}!}{k_{|\mathrm{P}|-1}!(k_{|\mathrm{P}|-2}-k_{|\mathrm{P}|-1})!}G_{|X_1|+k-k_1}(0,X_1,x_{s+n-k+1},\ldots,$$

$$x_{s+n-k_1})\ldots G_{|X_{|\mathrm{P}|}|+k_{|\mathrm{P}|-1}}(0,X_{|\mathrm{P}|},x_{s+n-k_{|\mathrm{P}|-1}+1},\ldots,x_{s+n}),$$

та оператор $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t)$ – кумулянт $|\mathrm{P}|$-го порядку груп операторів рівнянь Ліувілля, який визначено формулою (2.49). Наведемо декілька прикладів редукованих нелінійних кумулянтів (2.62):

$$U_1(t;\{Y\}\mid G(0))=\mathcal{G}(t;Y\mid G(0))=$$
$$\sum_{\mathrm{P}:\,Y=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}G_{|X_i|}(0,X_i),$$

$$U_2(t;\{Y\},x_{s+1}\mid G(0))=$$
$$\sum_{\mathrm{P}:\,(Y,x_{s+1})=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}G_{|X_i|}(0,X_i)-$$
$$\sum_{\mathrm{P}:Y=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(-t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\sum_{j=1}^{|\mathrm{P}|}\prod_{\substack{X_i\subset\mathrm{P},\\ X_i\neq X_j}}G_{|X_i|}(0,X_i)\times$$
$$G_{|X_j|+1}(0,X_j,x_{s+1}).$$

Якщо початкові дані задовольняють умову хаосу [34], тобто в початковий момент частинки є статистично незалежними,

$$G^{(1)}(0)\equiv(0,G_1(0,x_1),0,\ldots),$$

для редукованого нелінійного кумулянту $(1{+}n)$-го порядку (2.62) маємо

$$U_{1+n}(t;\{Y\},X\setminus Y\mid G^{(1)}(0))=\mathfrak{A}_{s+n}(-t,X)\prod_{i=1}^{s+n}G_1(0,x_i),$$

де $\mathfrak{A}_{s+n}(-t)$ – кумулянт $(s+n)$-го порядку груп операторів рівнянь Ліувілля, який визначено формулою (2.20), і отже структура розкладу для розв'язку (2.61) спрощується.

Беручи до уваги останню рівність, бачимо, що у випадку відсутності початкових кореляцій, кореляції, які виникають у процесі еволюції систем багатьох частинок, визначаються кумулянтами (2.20) груп операторів (2.18) рівнянь Ліувілля.

2.5. Висновки до другого розділу

У цьому розділі дисертаційної роботи розвинуто підхід до дослідження нерівноважних систем статистичної механіки за допомогою еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів для послідовностей функцій, якими описуються спостережувані величини та стани систем багатьох частинок.

Вперше сформульовано рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних (2.32) і за його допомогою розвинуто метод побудови непертурбативного розв'язку (2.35) для задачі Коші для ієрархії рівнянь (дуальна ієрархія рівнянь ББҐКІ) для маргінальних спостережуваних (2.33). Встановлено, що такий розв'язок зображується у формі розкладу за групами спадаючої кількості частинок, твірні оператори якого є відповідного порядку кумулянтами груп операторів рівнянь Ліувілля для спостережуваних системи скінченої кількості частинок (2.36). Також сформульовано умови, при яких такий розв'язок еквівалентний розв'язку побудованого за теорією збурень.

Встановлено зв'язок між твірними функціоналами для послідовностей функцій, якими визначаються різні способи опису стану систем багатьох частинок (2.39), (2.51), (2.53), (2.55). Зокрема, розвинуто підхід до опису станів систем багатьох частинок у термінах кореляційних функцій, які є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (2.42). Це дало можливість у відповідних функціональних просторах побудувати непертурбативні розв'язки задач Коші для ієрархій рівнянь для маргінальних функцій розподілу (2.17) і маргінальних кореляційних функцій (2.59) у термінах нелінійних груп операторів ієрархії рівнянь Ліувілля для кореляційних функцій.

Підкреслимо, що для початкових даних з функціональних просторів, якими описуються стани систем нескінченої кількості частинок, структура твірних операторів побудованих розкладів для розв'язків (кумулянти відповідних груп операторів) дає можливість скорочення розбіжних членів в таких розкладах, які є типовими для таких систем. Іншими словами, сформульовано метод регулярізації розбіжних інтегралів в кожному члені розкладу для станів або в кожному члені розкладу для функціоналу середніх значень спостережуваних у випадку дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ.

Зазначені вище результати узагальнено для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [6],[49],[61], препринтах [51],[62] та тезах доповідей в матеріалах праць Українського математичного конгресу [13].

РОЗДІЛ 3

Немарковське кінетичне рівняння для активної м'якої речовини

У цьому розділі дисертації за допомогою отриманих у попередньому розділі результатів досліджується проблема математичного опису колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин. У сучасних працях з теорії таких систем в основу опису покладено апріорі сформульовані еволюційні рівняння типу рівнянь суцільного середовища або кінетичні рівняння. У дисертаційній роботі еволюція активних м'яких конденсованих речовин на мікроскопічному рівні описується за допомогою динамічної системи багатьох взаємодіючих стохастичних стрибкоподібних процесів марковського типу, яка є аналогом динамічної системи частинок із зіткненнями в теорії кінетичного рівняння Больцмана, і яка в останній час широко використовуються до опису колективної поведінки складних систем різноманітної природи.

Зазначена модель мікроскопічної динаміки дає можливість описати характерні властивості активних м'яких конденсованих речовин, які відрізняються від статистичної поведінки звичайної речовини, що складається із взаємодіючих частинок, які рухаються за інерцією. Зокрема, до таких властивостей активної м'якої речовини треба віднести: ефекти пам'яті кінетичних процесів в таких системах; наявність кореляцій початкових станів, що властиво системам у конденсованих станах; багаточастинковий тип взаємодії. Підкреслимо, що внаслідок необхідності враховувати такі властивості, традиційні методи виведення кінетичних рівнянь з динаміки систем багатьох частинок не дозволяють обґрунтовувати кінетичні рівняння у цьому випадку.

Оскільки еволюцію активної м'якої конденсованої речовини на мікроскопічному рівні природно описувати у термінах еволюції спостережуваних величин, у цьому розділі роботи розвинуто підхід, який ґрунтується на ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу.

За допомогою побудованого в попередньому розділі розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних встановлено зв'язок між методом опису еволюції у термінах маргінальних спостережуваних та за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу, а саме: обґрунтовано кінетичне рівняння немарковського типу та описано процеси народження кореляцій і поширення початкових кореляцій в активних м'яких речовинах.

Також у цьому розділі досліджено скейлінгову асимптотичну поведінку, а саме границю самоузгодженого поля, розв'язку задачі Коші для побудованого кінетичного рівняння та послідовності маргінальних функціоналів стану, якою описується еволюція всіх можливих кореляцій в системі.

3.1. Еволюційні рівняння для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу

Розглянемо систему не фіксованої, але скінченої середньої кількості частинок (складових) N різних субпопуляцій, з яких складається активна м'яка речовина. Кожна i-та частинка характеризується змінними $\mathbf{u}_i = (j_i, u_i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{U}$, де $j_i \in \mathcal{J} \equiv (1, \ldots, N)$ – номер субпопуляції частинки і $u_i \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ – величини, якими описуються її мікроскопічний стан [84].

Динаміка складових (частинок), з яких складається активна речовина, описується півгрупою операторів $e^{t\Lambda} = \oplus_{n=0}^{\infty} e^{t\Lambda_n}$ марковських стрибкоподібних процесів визначеною на просторі C_γ послідовностей $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ вимірних обмежених функцій $b_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, які є симетричними відносно перестановки аргументів $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, з такою нормою

$$
\begin{aligned}
&\|b\|_{C_\gamma} = \max_{n\geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} \|b_n\|_{C_n} = \\
&\max_{n\geq 0} \frac{\gamma^n}{n!} \max_{j_1,\ldots,j_n} \max_{u_1,\ldots,u_n} \big|b_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\big|,
\end{aligned}
$$

де $0 < \gamma < 1$ – параметр.

Інфінітезимальний генератор Λ_n півгрупи операторів $e^{t\Lambda_n}$ визначено на підпросторі $C_n \subset C_\gamma$ і він має таку структуру [86]

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda_n b_n)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = \\
&\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k = 1}^{n} (\Lambda^{[k]}(i_1, \ldots, i_k) b_n)(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \doteq \\
&\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{k-1} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k = 1}^{n} a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) \Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v}; \mathbf{u}_{i_1}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) \times \\
&b_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i_1-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{i_1+1}, \ldots \mathbf{u}_n) d\mathbf{v} - b_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\Big),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

де коефіцієнт $\varepsilon > 0$ – скейлінговий параметр та використано такий символ $\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_n \equiv \sum_{j_1 \in \mathcal{J}} \ldots \sum_{j_n \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{U}^n} du_1 \ldots du_n$. Функції $a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k})$, $k \geq 1$, характеризують взаємодію між активними частинками, зокрема, у випадку $k = 1$ – взаємодію частинок з оточенням, і є вимірними позитивними обмеженими функціями визначеними на множині $(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n$ такими, що

$$
0 \leq a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) \leq a_*^{[k]},
$$

де $a_*^{[k]}$ – деяка стала. Вимірні інтегровані позитивні функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, описують імовірність переходу i_1-ої активної частинки з мікроскопічного стану u_{i_1} в стан v в результаті взаємодії з активними частинками, які знаходяться в станах $u_{i_2},\ldots,u_{i_k}$. Функції $A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})$, $k\geq 1$, задовольняють таким умовам:

$$\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{v};\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})d\mathbf{v}=1,\quad k\geq 1.$$

У роботі [84] наведено приклади функцій $a^{[k]}$ і $A^{[k]}$, які мають відповідну інтерпретацію для систем багатьох організмів математичної біології.

У випадку $k=1$ генератор (3.1) має таку структуру: $\sum_{i_1=1}^{n}\Lambda_n^{[1]}(i_1)$, і він описує еволюцію невзаємодіючих складових (стохастичних процесів) системи. Випадок $k\geq 2$ відповідає системі стохастичних процесів з k-арною взаємодією. Зазначений тип взаємодії є характерним для біологічних систем у порівнянні з системами багатьох частинок статистичної механіки, наприклад, газів атомів з парним потенціалом взаємодії частинок.

У просторі C_n однопараметрична сім'я відображень $\{e^{t\Lambda_n}\}_{t\in\mathbb{R}}$ є $*$-слабко неперервною ізометричною півгрупою операторів [39],[85].

Як зазначалось вище, на мікроскопічному рівні еволюцію активних м'яких речовин природно описувати за допомогою спостережуваних величин, а не у термінах еволюції станів.

Еволюція маргінальних спостережуваних $B(t)=(B_0,B_1(t,\mathbf{u}_1),\ldots,B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\ldots)$ у випадку активної м'якої речовини визначається задачею Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ:

$$\frac{\partial}{\partial t}B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\Lambda_s B_s(t)+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{s}\frac{1}{(k-n)!}\times \tag{3.2}$$

$$\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\Lambda^{[k]}(j_1,\ldots,j_k)B_{s-n}(t,(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\setminus(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_n})),$$

$$B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\mid_{t=0}= B_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\quad s\geq 1, \tag{3.3}$$

де оператори Λ_s та $\Lambda^{[k]}$ визначено формулою (3.1) та послідовність функцій $B_s^{0,\varepsilon}$, $s\geq 1$, – послідовність початкових маргінальних спостережуваних.

Як встановлено в попередньому розділі дисертації, непертурбативний розв'язок $B(t)=(B_0,B_1(t),\ldots,B_s(t),\ldots)$ задачі Коші для рекурентних еволюційних рівнянь (3.2),(3.3) зображується такими розкладами (2.35):

$$B_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\sum_{n=0}^{s}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus Z\}, \tag{3.4}$$
$$Z)\,B_{s-n}^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{j_1-1},\mathbf{u}_{j_1+1},\ldots,\mathbf{u}_{j_n-1},\mathbf{u}_{j_n+1},\ldots,\mathbf{u}_s),\quad s\geq 1,$$

де використано позначення $Z\equiv(j_1,\ldots,j_n)\subset Y\equiv(1,\ldots,s)$ та твірний оператор n-го члену цього розкладу є кумулянтом $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda_k}\}_{t\in\mathbb{R}}$, $k\geq 1$, який визначається такою формулою (2.36)

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus Z\},\,Z)\doteq \tag{3.5}$$
$$\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\setminus Z\},\,Z)=\bigcup_i Z_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{Z_i\subset\mathrm{P}}e^{t\Lambda_{|\theta(Z_i)|}}.$$

У виразі (3.5) символ $\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\setminus Z\},\,Z)=\bigcup_i Z_i}$ позначена сума по всім можливим розбиттям множини $(\{Y\setminus Z\},\,Z)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин Z_i, які взаємно не перетинаються. Наведемо типові приклади кумулянтів півгруп операторів

$$\mathfrak{A}_1(t,\{1,\ldots,s\})=e^{t\Lambda_s},$$
$$\mathfrak{A}_{1+1}(t,\{(1,\ldots,s)\setminus j\},j)=e^{t\sum\limits_{k=1}^{N}\varepsilon^{k-1}\sum\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\Lambda^{[k]}(i_1,\ldots,i_k)}-$$
$$e^{t\sum\limits_{k=1}^{N}\varepsilon^{k-1}\sum\limits_{i_1\neq\ldots\neq i_k\neq j=1}^{s}\Lambda^{[k]}(i_1,\ldots,i_k)}e^{t\Lambda^{[1]}(j)}.$$

Оскільки для твірних операторів розкладу (3.4) справедлива така оцінка

$$\big\|\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\setminus Z\},\,Z)b_s\big\|_{C_s}\leq n!e^{n+2}\big\|b_s\big\|_{C_s},$$

тоді за умови, що $\gamma < e^{-1}$, послідовність маргінальних спостережуваних (3.4) належить простору $\mathcal{C}_\gamma$ і виконується нерівність

$$\big\|B(t)\big\|_{\mathcal{C}_\gamma} \leq e^2(1-\gamma e)^{-1}\big\|B(0)\big\|_{\mathcal{C}_\gamma}. \tag{3.6}$$

Для задачі Коші (3.2),(3.3) справедливе таке твердження.

Теорема 3.1. *Якщо* $B(0) = (B_0, B_1^{0,\varepsilon}, \ldots, B_s^{0,\varepsilon}, \ldots) \in \mathcal{C}_\gamma$, *де* $\gamma < e^{-1}$, *послідовність* $B(t)$ *маргінальних спостережуваних, які визначені розкладами (3.4) є класичним розв'язком задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини (3.2),(3.3).*

Доведення цього твердження подібне доведенню теореми існування для класичних систем багатьох частинок.

Зазначимо, що подібно до класичних систем багатьох частинок, для системи марковських стрибкоподібних процесів, якою описується активна м'яка речовина, існує еквівалентний метод опису еволюції таких систем, а саме: у термінах маргінальних функцій розподілу, які задовольняють відповідну ієрархію рівнянь ББҐКІ.

Розглянемо функціонал для середніх значень маргінальних спостережуваних [34]:

$$\begin{aligned}&(B(t), F(0)) = \\ &\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, B_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)\, F_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s),\end{aligned} \tag{3.7}$$

де початковий стан визначається послідовністю маргінальних функцій розподілу $F(0) = (1, F_1^{0,\varepsilon}, \ldots, F_s^{0,\varepsilon}, \ldots)$.

Нехай $L^1_\alpha = \oplus_{n=0}^\infty \alpha^n L^1_n$ простір послідовностей $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ інтегрованих функцій $f_n = f_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, які визначені на множині $(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n$, з такою нормою

$$\|f\|_{L^1_\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \|f_n\|_{L^1_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j_1,\ldots,j_n} \int\limits_{\mathcal{U}^n} du_1 \ldots du_n \big|f_n(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)\big|,$$

де $\alpha > 1$ – параметр.

Якщо $F(0) \in L^1_\alpha$ та $B(0) \in C_\gamma$, враховуючи нерівність (3.6), за умови $\gamma < e^{-1}$, справедлива така оцінка

$$\begin{aligned}
&\big|(B(t), F(0))\big| \leq \\
&e^2(1-e\gamma)^{-1}\|B(0)\|_{C_\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^{-s}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_s\,|F_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)| \leq \\
&e^2(1-e\gamma)^{-1}\|B(0)\|_{C_\gamma}\|F(0)\|_{L^1_\alpha}\sum_{s=0}^{\infty}(\alpha\gamma)^{-s}.
\end{aligned}$$

Таким чином, якщо $\alpha > \gamma^{-1}$, тоді для послідовностей $F(0) \in L^1_\alpha$ та $B(0) \in C_\gamma$ функціонал (3.7) існує при $t \geq 0$.

Еквівалентність двох підходів до опису еволюції активної м'якої речовини є наслідком справедливості такої рівності для функціоналу середніх значень спостережуваних (3.7)

$$(B(t), F(0)) = (B(0), F(t)), \tag{3.8}$$

де послідовність $F(t) = (1, F_1(t), \ldots, F_s(t), \ldots)$ маргінальних функцій розподілу $F_s(t) = F_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)$ є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини [84]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = \Lambda^*_s F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) + \\
&\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{N-k}\frac{\varepsilon^{k+n-1}}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\ldots, \\
&i_k, s+1,\ldots,s+n)F_{s+n}(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\mid_{t=0} = F_s^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s), \quad s \geq 1. \tag{3.10}$$

Генератор ієрархії еволюційних рівнянь (3.9) визначається операторами Λ^*_s та $\Lambda^{*[k+n]}$, які є спряженими операторами до операторів (3.1) в сенсі функціоналу (3.7), і в просторі $L^1_n = L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n)$ оператор Λ^*_n визначається такою формулою

$$(\Lambda^*_n f_n)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = \tag{3.11}$$
$$\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^{k-1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{n}(\Lambda^{*[k]}(i_1,\ldots,i_k)f_n)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) \doteq$$
$$\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^{k-1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{n}\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1};\mathbf{v},\mathbf{u}_{i_2},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})a^{[k]}(\mathbf{v},\mathbf{u}_{i_2},\ldots,$$
$$\mathbf{u}_{i_k})f_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{i_1-1},\mathbf{v},\mathbf{u}_{i_1+1},\ldots,\mathbf{u}_n)d\mathbf{v} -$$
$$a^{[k]}(\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_k})f_n(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\Big),$$

де функції $A^{[k]}$ і $a^{[k]}$ визначено вище в формулі (3.1).

Непертурбативний розв'язок $F(t) = (1, F_1(t),\ldots,F_s(t),\ldots)$ задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь (3.9),(3.10) визначається такими розкладами в ряд (2.21):

$$F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\}, \tag{3.12}$$
$$X\setminus Y)F^{0,\varepsilon}_{s+n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n})d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}, \quad s\geq 1,$$

де використано позначення: $X\equiv(1,\ldots,s+n)$ і $Y\equiv(1,\ldots,s)$. Твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ розкладу (3.12) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку (2.20) півгруп операторів $\{e^{t\Lambda^*_n}\}_{t\geq 0}$, $n\geq 1$, який визначається такою формулою

$$\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},\, X\setminus Y) \doteq \tag{3.13}$$
$$\sum_{\mathrm{P}:\,(\{Y\},\,X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathrm{P}}e^{t\Lambda^*_{|\theta(X_i)|}},$$

де використано такі позначення: множина індексів $\{Y\}$ складається з одного елементу $Y=(1,\ldots,s)$, відображення декластеризації елементів множини визначається такою формулою: $\theta(\{Y\},X\setminus Y) = X$, символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини індексів $(\{Y\},\, X\setminus$

Y) на |P| непорожніх підмножин $X_i \subset (\{Y\}, X \setminus Y)$, які взаємно не перетинаються.

Оскільки для твірних операторів розкладу в ряд (3.12) справедлива така оцінка

$$\big\|\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) f_{s+n}\big\|_{L^1_{s+n}} \leq n! e^{n+2} \big\|f_{s+n}\big\|_{L^1_{s+n}},$$

тоді за умови, що $\alpha > e$, послідовність маргінальних функцій розподілу (3.12) належить простору L^1_α і виконується нерівність [67]

$$\big\|F(t)\big\|_{L^1_\alpha} \leq e^2 (1 - \frac{e}{\alpha})^{-1} \big\|F(0)\big\|_{L^1_\alpha}, \tag{3.14}$$

де параметр α може інтерпретуватись як величина обернено пропорційна середній кількості частинок (складових) системи.

Для задачі Коші (3.9),(3.10) справедливе таке твердження.

Теорема 3.2. *Якщо $F(0) = (1, F_1^{0,\varepsilon}, \ldots, F_s^{0,\varepsilon}, \ldots) \in L^1_\alpha$, де $\alpha > e$, послідовність $F(t)$ маргінальних функцій розподілу, які визначені розкладами в ряд (3.12) є класичним розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини (3.9),(3.10).*

Доведення цього твердження подібне доведенню теореми існування для класичних систем багатьох частинок.

Зауважимо також, що якщо $F(0) \in L^1_\alpha$ та $B(0) \in C_\gamma$, враховуючи нерівність (3.14), за умови $\alpha > e$, справедлива така оцінка

$$\begin{aligned} &\big|(B(0), F(t))\big| \leq \\ &\|B(0)\|_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^{-s} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, |F_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)| \leq \\ &e^2 (1 - \frac{e}{\alpha})^{-1} \|B(0)\|_{C_\gamma} \|F(0)\|_{L^1_\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} (\alpha\gamma)^{-s}. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $\alpha > \gamma^{-1}$, тоді для послідовностей $F(0) \in L^1_\alpha$ та $B(0) \in C_\gamma$ функціонал $(B(0), F(t))$ існує при $t \geq 0$.

3.2. Немарковське кінетичне рівняння для активної м'якої речовини

Нехай простір $L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ – простір інтегрованих функцій $f_1(\mathbf{u}_1)$ визначених на множині $\mathcal{J} \times \mathcal{U}$ з такою нормою

$$\|f_1\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = \sum_{j_1\in\mathcal{J}} \int_{\mathcal{U}} du_1 \big|f_1(\mathbf{u}_1)\big|.$$

Розглянемо початкові стани системи статистично незалежних багатьох марковських стохастичних процесів, тобто стани, які в початковий момент часу описуються послідовністю маргінальних функцій розподілу, які задовольняють умову хаосу [34],[75]

$$F^{(c)} = (1, F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \ldots, \prod_{i=1}^{s} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i), \ldots), \tag{3.15}$$

де $\varepsilon > 0$ – скейлінговий параметр, $F_1^{0,\varepsilon} \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$. У цьому випадку середні значення (математичні очікування) маргінальних спостережуваних (3.4) визначаються за допомогою такого функціоналу

$$(B(t), F^{(c)}) = \tag{3.16}$$
$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, B_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) \prod_{i=1}^{s} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i).$$

Встановимо умову існування функціоналу (3.16).

$$|(B(t), F^{(c)})| \leq \|B(t)\|_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^{-s} \int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \prod_{i=1}^{s} |F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i)| =$$

$$\|B(t)\|_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^{-s} \|F_1^{0,\varepsilon}\|^s_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}.$$

Отже згідно з оцінкою (3.6) функціонал (3.16) існує за такої умови на середню кількість частинок (складових) системи: $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} < \gamma < e^{-1}$.

Сформулюємо основний результат стосовно опису еволюції всіх можливих станів системи багатьох марковських стохастичних процесів у термінах одночастинкової функції розподілу.

Для функціоналу (3.16) справедливе таке зображення

$$\big(B(t),F^{(c)}\big)=\big(B(0),F(t\mid F_1(t))\big), \tag{3.17}$$

де $F(t\mid F_1(t))=(1,F_1(t),F_2(t\mid F_1(t)),\ldots,F_s(t\mid F_1(t)),\ldots)$ – послідовність функціоналів (маргінальні функціонали стану) відносно одночастинкової функції розподілу

$$F_1(t,\mathbf{u}_1)= \tag{3.18}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_2\ldots d\mathbf{u}_{n+1}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i).$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ ряду (3.18) – кумулянт $(1+n)$-го порядку півгруп операторів $\{e^{t\Lambda^*_n}\}_{t\geq 0}$, $n\geq 1$, інфінітезимальні генератори Λ^*_n яких є спряженими операторами до операторів (3.1) в сенсі функціоналу (3.16), та в просторі $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n)$ які визначаються згідно з формулою (3.11).

Інші елементи послідовності $F(t\mid F_1(t))$ зображуються такими розкладами в ряд

$$F_s\big(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s\mid F_1(t)\big)\doteq \tag{3.19}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\,\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,\mathbf{u}_i),$$

де використано позначення: $Y\equiv(1,\ldots,s)$, $X\setminus Y\equiv(s+1,\ldots,s+n)$ і твірні еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n\geq 0$, визначаються такими розкладами [59]:

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\doteq \tag{3.20}$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\ldots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}\frac{n!}{(n-m_1-\ldots-m_k)!}\times$$

$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\ldots-m_k}(t,\{Y\},s+1,\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_k)\prod_{j=1}^{k}\sum_{k_2^j=0}^{m_j}\ldots$$

$$\sum_{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s}=0}^{k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s-1}}\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\ldots-m_j}\frac{1}{(k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j}-k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j})!}$$

$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1-i_j}-k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+2-i_j}}(t,i_j,s+n-m_1-\ldots-m_j+1$$

$$+k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+2-i_j},\ldots,s+n-m_1-\ldots-m_j+k^j_{s+n-m_1-\ldots-m_j+1-i_j}),$$

та вважається, що $k_1^j\equiv m_j$, і $k^j_{n-m_1-\ldots-m_j+s+1}\equiv 0$.

Наведемо приклади твірних операторів (3.20) розкладу в ряд (3.19) маргінальних функціоналів стану:

$$\mathfrak{V}_1(t,\{Y\})=\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\doteq e^{t\Lambda^*_s}\prod_{i=1}^{s}e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)},$$

$$\mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1)=\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1),$$

$$\mathfrak{V}_3(t,\{Y\},s+1,s+2)=$$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,\{Y\},s+1,s+2)-\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1)\sum_{i_1=1}^{s+1}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+2)-$$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\big(\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,i_1,s+1,s+2)-\sum_{i_1=1}^{s}\sum_{i_2=1}^{s+1}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1)\times$$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_2,s+2)+2!\sum_{1=i_1<i_2}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1)\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_2,s+2)\big),$$

де оператори $\widehat{\mathfrak{A}}_n(t)$, $n\geq 1$, з наведених розкладів є кумулянтами півгруп операторів розсіяння $\{e^{t\Lambda^*_k}\prod_{i=1}^{k}e^{-t\Lambda^{*[1]}(i)}\}_{t\geq 0}$, $k\geq 1$ відповідного порядку.

За умови $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}<e^{-(3s+2)}$, для довільного $t\geq 0$ ряд (3.19) є збіжним за нормою простору $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s)$.

Зауважимо, що маргінальними функціоналами стану (3.19) описуються усі можливі кореляції, які виникають в процесі еволюції системи взаємодіючих стохастичних процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої конденсованої речовини.

Для доведення основного результату встановимо справедливість рівності (3.17) у випадку спеціальних класів маргінальних спостережуваних.

Оскільки у випадку початкових маргінальних спостережуваних адитивного типу $B^{(1)}(0) = (0, b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1), 0, \ldots)$ розклад для розв'язку (3.4) набуває вигляду:

$$B_s^{(1)}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) = \mathfrak{A}_s(t, 1, \ldots, s) \sum_{i=1}^{s} b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_i), \quad s \geq 1,$$

тоді для функціоналу середніх значень спостережуваних (3.16) справедливе таке зображення

$$(B^{(1)}(t), F^{(c)}) = (B^{(1)}(0), F(t \mid F_1(t))) =$$
$$\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} d\mathbf{u}_1\, b_1^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) F_1(t, \mathbf{u}_1),$$

де одночастинкова функція розподілу $F_1(t, \mathbf{u}_1)$ визначається розкладом у ряд (3.18).

Для маргінальних спостережуваних k-арного типу, тобто послідовностей функцій $B^{(k)}(0) = (0, \ldots, 0, b_k^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k), 0, \ldots)$, $k \geq 2$, справедлива така рівність

$$(B^{(k)}(t), F^{(c)}) = (B^{(k)}(0), F(t \mid F_1(t))) =$$
$$\frac{1}{k!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_k\, b_k^{\varepsilon}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) F_k\big(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \mid F_1(t)\big),$$

де маргінальний функціонал стану $F_k(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \mid F_1(t))$ визначається розкладом у ряд (3.19).

Доведення цієї рівності ґрунтується на застосуванні кластерних розкладів кумулянтів півгруп операторів, які є двоїстими до кінетичних кластерних розкладів кумулянтів півгруп операторів введених у роботі [69] у випадку квантових систем багатьох частинок.

В просторі $L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ одночастинкова маргінальна функція розподілу (3.18) задовольняє таку задачу Коші для немарковського кінетичного рівняння для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)F_1(t,\mathbf{u}_1)+ \tag{3.21}$$
$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k}d\mathbf{u}_2\ldots d\mathbf{u}_{k+1}\sum_{\substack{j_1\neq\ldots\neq j_{k+1}\in\\ \in(1,\ldots,k+1)}}\Lambda^{*[k+1]}(j_1,\ldots,$$
$$j_{k+1})F_{k+1}\big(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{k+1}\mid F_1(t)\big),$$

$$F_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1), \tag{3.22}$$

де функціонали $F_{k+1}\big(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{k+1}\mid F_1(t)\big)$, $k\geq 1$, визначаються розкладами в ряд (3.19).

Для системи, яка складається з двох субпопуляцій, тобто у випадку $N=2$, в явному вигляді кінетичне рівняння (3.21) має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,\mathbf{u}_1)=\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[1]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v})a^{[1]}(\mathbf{v})F_1(t,\mathbf{v})d\mathbf{v}-a^{[1]}(\mathbf{u}_1)F_1(t,\mathbf{u}_1)+$$
$$\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[2]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v},\mathbf{u}_2)a^{[2]}(\mathbf{v},\mathbf{u}_2)F_2\big(t,\mathbf{v},\mathbf{u}_2\mid F_1(t)\big)d\mathbf{v}-$$
$$a^{[2]}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)F_2\big(t,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\mid F_1(t)\big)\Big),$$

де функції $A^{[k]}$ і $a^{[k]}$ визначено вище в формулі (3.1).

В просторі $L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ для абстрактної задачі Коші (3.21),(3.22) справедливе таке твердження.

Теорема 3.3. *Якщо початкові дані* $F_1^{0,\varepsilon}\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$*, тоді за умови, що* $\|F_1^{0,\varepsilon}\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}<e^{-1}$*, при* $t\geq 0$ *існує єдиний сильний розв'язок зада-*

чі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22), який визначається розкладом в ряд (3.18).

Доведення цього твердження подібне доведенню теореми існування для узагальненого кінетичного рівняння Ескога для системи багатьох твердих куль [59].

Таким чином, якщо стан системи взаємодіючих стохастичних процесів, якими моделюється еволюція активної м'якої речовини, в початковий момент часу визначається одночастинковою маргінальною функцією розподілу, тоді всі можливі стани системи в довільний момент часу можуть бути описані у термінах одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є роз'язком задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22).

3.3. Асимптотична поведінка немарковського кінетичного рівняння

За допомогою немарковського кінетичного рівняння (3.21) в скейлінгових границях можна обґрунтувати кінетичні рівняння марковського типу для активної м'якої конденсованої речовини. Розглянемо асимптотичну поведінку розв'язку (3.18) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22) в границі самоузгодженого поля для системи, яка складається з двох субпопуляцій, тобто випадок $N = 2$.

В просторі $L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ для розв'язку (3.18) абстрактної задачі Коші (3.21),(3.22) справедливе таке твердження.

Теорема 3.4. *Нехай функція розподілу $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$ – границя самоузгодженого поля початкових даних (3.22), тобто існує така границя*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big\| \varepsilon\, F_1^{\varepsilon,0} - f_1^0 \big\|_{L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})} = 0.$$

Тоді на скінченому проміжку часу $t \in (0, t_0)$, в такому ж сенсі існує границя самоузгодженого поля розв'язку (3.18) задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big\| \varepsilon\, F_1(t) - f_1(t) \big\|_{L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})} = 0, \tag{3.23}$$

яка зображується розкладом в такий ряд

$$\begin{aligned} & f_1(t, \boldsymbol{u}_1) = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n \int\limits_{(\mathcal{J} \times \mathcal{U})^n} d\boldsymbol{u}_2 \ldots d\boldsymbol{u}_{n+1}\, e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)} \times \\ & \Lambda^{*[2]}(1,2) \prod_{j_1=1}^{2} e^{(t_1 - t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)} \ldots \prod_{j_{n-1}=1}^{n} e^{(t_{n-1} - t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})} \times \\ & \sum_{i_n=1}^{n} \Lambda^{*[2]}(i_n, 1+n) \prod_{j_n=1}^{1+n} e^{t_n \Lambda^{*[1]}(j_n)} \prod_{i=1}^{1+n} f_1^0(\boldsymbol{u}_i), \end{aligned} \tag{3.24}$$

де інфінітезимальні генератори $\Lambda^{*[1]}$ і $\Lambda^{*[2]}$ півгруп операторів визначаються згідно з формулою (3.11).

Для доведення теореми встановимо деякі допоміжні твердження. Введемо такі скорочені позначення для складових операторів (3.11):

$$\Lambda_s^{*[1]} \equiv \sum_{i=1}^{s} \Lambda^{*[1]}(i),$$

$$\Lambda_s^{*[2]} \equiv \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{s} \Lambda^{*[2]}(i_1, i_2).$$

Твердження 3.1. *Нехай $f_s \in L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^s)$, тоді справедлива така рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big\| \, e^{t\Lambda_s^*} f_s - e^{t\Lambda_s^{*[1]}} f_s \big\|_{L_s^1} = 0. \tag{3.25}$$

Дійсно, оскільки для півгрупи операторів $e^{t\Lambda_s^*}$ справедливе рівняння Дюамеля [17], [18]

$$e^{t\Lambda_s^*} = e^{t\Lambda_s^{*[1]}} + \varepsilon \int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_s^*} \Lambda_s^{*[2]} e^{t_1 \Lambda_s^{*[1]}},$$

тоді згідно означення (3.11) оператора Λ_s^* в просторі $L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^s)$ має місце така оцінка

$$\big\| e^{t\Lambda_s^*} f_s - e^{t\Lambda_s^{*[1]}} f_s \big\|_{L_s^1} \leq$$

$$\varepsilon \int\limits_0^t dt_1 e^{2s(t-t_1)(a_*^{[1]}+(s-1)a_*^{[2]})} 2s(s-1)a_*^{[2]} e^{2st_1 a_*^{[1]}} \big\| f_s \big\|_{L_s^1} \leq$$

$$\varepsilon 2s(s-1)a_*^{[2]} e^{2st(a_*^{[1]}+\varepsilon(s-1)a_*^{[2]})} \int\limits_0^t dt_1 e^{-2st_1\varepsilon(s-1)a_*^{[2]}} \big\| f_s \big\|_{L_s^1} =$$

$$e^{2st(a_*^{[1]}+\varepsilon(s-1)a_*^{[2]})} (1 - e^{2st\varepsilon(s-1)a_*^{[2]}}) \big\| f_s \big\|_{L_s^1}.$$

Таким чином, справедлива рівність (3.25).

Твердження 3.2. *Нехай $f_{n+1} \in L^1((\mathcal{J} \times \mathcal{U})^{n+1})$, тоді для кумулянта $(1+n)$-го порядку півгруп операторів (3.13) справедлива така рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\| \frac{1}{n!} \frac{1}{\varepsilon^n} \mathfrak{A}_{1+n}^*(t, 1, \ldots, n+1) f_{n+1} - \tag{3.26}$$

$$\int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda_{n+1}^{*[1]}} \sum_{i=0}^{s} \Lambda^{*[2]}(i,2) e^{(t_1-t_2)\Lambda_n^{*[1]}} \ldots$$

$$e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda_2^{*[1]}} \sum_{i_n=1}^{n} \Lambda^{*[2]}(i_n, n+1) e^{t_n \Lambda_1^{*[1]}} f_{n+1} \Big\|_{L_{n+1}^1} = 0.$$

Ідея доведення справедливості рівності (3.26) ґрунтується на рівності (3.25) та на використанні таких рекурентних співвідношень для кумулянтів (3.13) півгруп операторів:

$$\mathfrak{A}_n^*(t, 1, \ldots, n) f_n = \tag{3.27}$$

$$\varepsilon \int_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_n^{*[1]}} \sum_{i<j\in(1,\ldots,n)} \Lambda_2^{*[2]}(i,j)\mathfrak{A}_{n-1}^{*}(t_1,\mathcal{I})f_n, \quad n \geq 2,$$

де для множини індексів $(\{i,j\},1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n)$ використано позначення $\mathcal{I}$.

Доведемо основний результат цього розділу теорему 3.4.

Оскільки ряди (3.18) та (3.24) є збіжними, тоді для довільного нескінченно малого $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що справедлива нерівність

$$\big\|\varepsilon\, F_1(t) - f_1(t)\big\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} \leq \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} d\mathbf{u}_1 \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_2 \ldots$$

$$d\mathbf{u}_{n+1}\Big|\,\frac{1}{n!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,\mathfrak{A}_{1+n}^{*}(t,1,\ldots,n+1)\varepsilon^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i) -$$

$$\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda_{n+1}^{*[1]}}\Lambda^{*[2]}(1,2)e^{(t_1-t_2)\Lambda_n^{*[1]}}\ldots$$

$$e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda_2^{*[1]}}\sum_{i_n=1}^{n}\Lambda^{*[2]}(i_n,n+1)e^{t_n\Lambda_1^{*[1]}}\prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(\mathbf{u}_i)\Big| + \varepsilon.$$

Використовуючи рівності (3.25) і (3.26), в скінченній сумі почленно перейдемо до границі, в результаті встановимо справедливість твердження теореми 3.4.

Якщо $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$, тоді гранична одночастинкова функція розподілу (3.24) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля [84]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t,\mathbf{u}_1) = \Lambda^{*[1]}(1)f_1(t,\mathbf{u}_1) + \int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} d\mathbf{u}_2\Lambda^{*[2]}(1,2)f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2), \tag{3.28}$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0} = f_1^0(\mathbf{u}_1), \tag{3.29}$$

або кінетичне рівняння (3.28) в явному вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[1]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v})a^{[1]}(\mathbf{v})f_1(t,\mathbf{v})d\mathbf{v}-a^{[1]}(\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+$$
$$\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[2]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v},\mathbf{u}_2)a^{[2]}(\mathbf{v},\mathbf{u}_2)f_1(t,\mathbf{v})f_1(t,\mathbf{u}_2)d\mathbf{v}-$$
$$a^{[2]}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2)\Big),$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1),$$

де функції $A^{[k]}$ і $a^{[k]}$ визначено вище в формулі (3.1).

У загальному випадку багатокомпонентної взаємодії задача Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28),(3.29) має такий вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k}d\mathbf{u}_2\dots \tag{3.30}$$
$$d\mathbf{u}_{k+1}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_{k+1}\in(1,\ldots,k+1)}\Lambda^{*[k+1]}(j_1,\ldots,j_{k+1})\prod_{i=1}^{k+1}f_1(t,\mathbf{u}_i),$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1), \tag{3.31}$$

де оратори $\Lambda^{*[k]}(j_1,\ldots,j_k)$, $k\geq 1$, визначаються згідно з формулою (3.11).

Рівняння (3.31) є кінетичним рівнянням самоузгодженого поля у випадку системи багатьох марковських стохастичних процесів, яка складається із довільної кількості $N>1$ взаємодіючих субпопуляцій.

Розглянемо асимптотичну поведінку маргінальних функціоналів стану (3.19) в границі самоузгодженого поля. Для початкових станів (3.15) системи багатьох взаємодіючих марковських стохастичних процесів справедливе таке твердження.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.4 тоді для функціоналу (3.19) справедлива така рівність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\boldsymbol{u}_1\ldots d\boldsymbol{u}_s\Big|\varepsilon^s F_s\big(t,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s|F_1(t)\big)-\prod_{j=1}^{s} f_1(t,\boldsymbol{u}_j)\Big|=0,$$

де гранична одночастинкова функція розподілу $f_1(t)$ визначається розкладом в ряд (3.24).

Справедливість твердження теореми є наслідком теореми 3.4 та справедливості таких асимптотичних формул [82] для твірних операторів (3.20) маргінального функціоналу стану (3.19):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\mathfrak{V}_1(t,\{1,\ldots,s\})f_s-f_s\big\|_{L^1_s}=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^{-s}\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,\ldots,s\},s+1,\ldots,s+n)f_{s+n}\big\|_{L^1_{s+n}}=0,\quad n\geq 2.$$

Згідно з означенням кумулянта розсіяння півгруп операторів перша рівність є наслідком справедливості рівності (3.25). Друга з цих рівностей є наслідком рівності (3.25) та комбінаторних властивостей твірних операторів (3.20) маргінальних функціоналів стану (3.19).

Твердження теореми 3.5 інтерпретується як властивість поширення початкового хаосу в наближенні самоузгодженого поля, тобто в цьому наближенні стани складових активної м'якої конденсованої речовини в процесі еволюції залишаються статистично незалежними.

3.4. Висновки до третього розділу

У цьому розділі досліджено проблему математичного обґрунтування кінетичного рівняння немарковського типу для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів марковського типу, якою описується еволюцію активних м'яких конденсованих речовин на мікроскопічному рівні.

Розвинуто підхід до опису кінетичної еволюції систем багатьох частинок у термінах спостережуваних величин, що дало можливість сформулювати новий метод виведення нелінійних кінетичних рівнянь для систем частинок в конденсованих станах.

За допомогою непертурбативного розв'язку дуальної (двоїстої) ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних спостережуваних взаємодіючих стохастичних марковських процесів (3.4) обґрунтовано кінетичне рівняння немарковського типу (3.21), яким описуються ефекти пам'яті колективної поведінки активних м'яких речовин. Побудовано розв'язок цього рівняння (3.18) та досліджено його асимптотичні властивості у границі самоузгодженого поля (4.23).

Встановлено, що для початкових станів статистично незалежних взаємодіючих стохастичних марковських процесів у випадку маргінальних спостережуваних адитивного типу метод опису еволюції системи за допомогою задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.2),(3.3) є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу (3.18), яка є розв'язком задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22), а у випадку маргінальних спостережуваних неадитивного типу – до опису еволюції станів у термінах послідовності маргінальних функціоналів стану (3.19), які описують усі можливі кореляції в активних м'яких речовинах за допомогою розв'язку побудованого кінетичного рівняння (3.21). Доведення цього результату ґрунтується на застосуванні методу кінетичних кластерних розкладів кумулянтів напівгруп операторів скінченої кількості взаємодіючих стохастичних марковських процесів.

У просторі інтегрованих функцій для побудованого немарковського кінетичного рівняння доведено теорему про існування розв'язку (теорема 3.3). У випадку початкових станів, які задовольняють умову хаосу, для побудованого розв'язку та маргінальних функціоналів стану доведено граничні теореми самоузгодженого поля (відповідно, теорема 3.4 та теорема 3.5), зокрема, встановлено властивість поширення початкового хаосу. Зазначимо, що розвинутий у цьому розділі підхід до побудови кінетичних рівнянь дає можливість в скейлінґових границях враховувати поправки до основного члена асимптотики.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [7],[50], препринті [52] та тезах доповідей в матеріалах праць міжнародних [53],[54],[56] і всеукраїнських конференцій [8],[9],[55].

РОЗДІЛ 4

Границя самоузгодженого поля ієрархій еволюційних рівнянь для активної м'якої речовини

У цьому розділі дисертації розвинуто підхід до опису кінетичної еволюції активних м'яких конденсованих речовинах у термінах спостережуваних величин, а саме: побудовано скейлінґову границю самоузгодженого поля розв'язку задачі Коші для ієрархії еволюційних рівнянь для маргінальних спостережуваних (дуальна ієрархія рівнянь ББҐКІ) взаємодіючих стохастичних марковських процесів.

Для початкових станів, які задовольняють умову хаосу, в границі самоузгодженого поля доведено еквівалентність опису еволюції системи у термінах граничних маргінальних спостережуваних та за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є розв'язком кінетичного рівняння самоузгодженого поля побудованого у попередньому розділі іншим методом, як рівняння, яким описується асимптотична поведінка розв'язку немарковського кінетичного рівняння активних м'яких речовин. Для взаємодіючих стохастичних марковських процесів встановлено властивість поширення початкового хаосу в границі самоузгодженого поля.

У цьому розділі проведено порівняльний аналіз розвинутого підходу до виведення кінетичних рівнянь з традиційним методом за допомогою ієрархія рівнянь ББҐКІ взаємодіючих стохастичних марковських процесів, який ґрунтується на дослідженні границі самоузгодженого поля для маргінальних функцій розподілу, а також для розв'язку ієрархія рівнянь ББҐКІ побудованого методами теорії збурень.

4.1. Границя самоузгодженого поля для розв'язку дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини

Побудуємо границю самоузгодженого (середнього) поля [102] непертурбативного розв'язку (3.4) задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.2),(3.3) для активної м'якої речовини [14]. Для спрощення обчислень розглянемо випадок $N = 2$ субпопуляцій.

Справедливе таке твердження.

Теорема 4.1. *Нехай для початкових даних $B_s^{0,\varepsilon} \in C_s$ існує границя $b_s^0 \in C_s$*

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon^{-s}B_s^{0,\varepsilon} - b_s^0\big) = 0,$$

тоді на скінченному проміжку часу існує границя самоузгодженого поля розв'язку (3.4) задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини (2.30) в сенсі $*$-слабкої збіжності в просторі C_s

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon^{-s}B_s(t) - b_s(t)\big) = 0,$$

яка визначається таким розкладом

$$b_s(t, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s) = \sum_{n=0}^{s} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\sum\limits_{k_1=1}^{s}\Lambda^{[1]}(k_1)} \tag{4.1}$$

$$\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s} \Lambda^{[2]}(i_1, j_1) e^{(t_1-t_2)\sum\limits_{\substack{l_1=1,\\ l_1\neq j_1}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_1)}$$

$$\ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\sum\limits_{\substack{k_n=1,\\ k_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[1]}(k_n)}\sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[2]}(i_n,j_n)$$

$$e^{t_n\sum\limits_{\substack{l_n=1,\\ l_n\neq(j_1,\ldots,j_n)}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_n)}\quad b^0_{s-n}((\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s)\setminus(\boldsymbol{u}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{u}_{j_n})),$$

Для доведення встановимо справедливість деяких допоміжних тверджень. Для складових операторів (3.1) ведемо такі скорочені позначення:

$$\Lambda^{[1]}_s\equiv\sum_{i=1}^{s}\Lambda^{[1]}(i),$$

$$\Lambda^{[2]}_s\equiv\sum_{i_1\neq i_2=1}^{s}\Lambda^{[2]}(i_1,i_2).$$

Твердження 4.1. *Нехай $b_s\in C_s$, тоді справедлива така рівність*

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\big(e^{t\Lambda_s}b_s-e^{t\Lambda^{[1]}_s}b_s\big)=0. \tag{4.2}$$

Дійсно, оскільки для півгрупи операторів $e^{t\Lambda_s}$ справедливе рівняння Дюамеля [17]

$$e^{t\Lambda_s}=e^{t\Lambda^{[1]}_s}+\varepsilon\int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_s}\Lambda^{[2]}_s e^{t_1\Lambda^{[1]}_s},$$

тоді відповідно до означення (3.1) оператора Λ_s справедлива така оцінка

$$\big|(e^{t\Lambda_s}b_s-e^{t\Lambda^{[1]}_s}b_s)\big|\leq$$
$$\varepsilon\int\limits_0^t dt_1 e^{2s(t-t_1)(a^{[1]}_*+\varepsilon(s-1)a^{[2]}_*)}2s(s-1)a^{[2]}_* e^{2st_1a^{[1]}_*}\big\|\,b_s\big\|_{C_s}\leq$$
$$e^{2st(a^{[1]}_*+\varepsilon(s-1)a^{[2]}_*)}(1-e^{2st\varepsilon(s-1)a^{[2]}_*})\big\|\,b_s\big\|_{C_s}.$$

Таким чином, справедлива рівність (4.2).

Внаслідок рекурентних співвідношень, яким задовольняють кумулянти півгруп операторів (3.5),

$$\mathfrak{A}_s(t,1,\ldots,s)=\varepsilon\int\limits_0^t dt_1 e^{(t-t_1)\Lambda_s^{[1]}}\sum_{i<j\in(1,\ldots,s)}\Lambda_2^{[2]}(i,j)\mathfrak{A}_{s-1}(t_1,\{i,j\},$$
$$1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,s),\quad s\geq 2,$$

згідно з рівністю (4.2) має місце таке твердження.

Твердження 4.2. *Нехай* $b_{s-n}\in C_{s-n}((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^{s-n})$*, тоді для кумулянта* $(1+n)$*-го порядку півгруп операторів (3.5) справедлива така рівність*

$$\mathrm{w}^*\!-\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\frac{1}{\varepsilon^n}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{(1,\ldots,s)\setminus(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n)b_{s-n}- \tag{4.3}$$
$$n!\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n e^{(t-t_1)\sum\limits_{k_1=1}^{s}\Lambda^{[1]}(k_1)}\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\Lambda^{[2]}(i_1,j_1)\times$$
$$e^{(t_1-t_2)\sum\limits_{\substack{l_1=1,\\ l_1\neq j_1}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_1)}\ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\sum\limits_{\substack{k_n=1,\\ k_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[1]}(k_n)}\times$$
$$\sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[2]}(i_n,j_n)e^{t_n\sum\limits_{\substack{l_n=1,\\ l_n\neq(j_1,\ldots,j_n)}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_n)}b_{s-n}\big)(\boldsymbol{u}_1,\ldots,$$
$$\boldsymbol{u}_s)\setminus(\boldsymbol{u}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{u}_{j_n}))=0.$$

Доведемо теорему 4.1.

Для розкладу непертурбативного розв'язку (3.4) задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.2),(3.3) в скінченій сумі з нерівності

$$\Big|(\varepsilon^{-s}B_s(t)-b_s(t))\Big|\leq\sum_{n=0}^{s}\Big|\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_n=1}^{s}\frac{1}{n!}\frac{1}{\varepsilon^n}\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{(1,\ldots,$$
$$s)\setminus(j_1,\ldots,j_n)\},j_1,\ldots,j_n)\varepsilon^{-(s+n)}B_{s-n}^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{j_1-1},\mathbf{u}_{j_1+1},\ldots,$$
$$\mathbf{u}_{j_n-1},\mathbf{u}_{j_n+1},\ldots,\mathbf{u}_s)-$$
$$\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n e^{(t_1-t_1)\sum\limits_{k_1=1}^{s}\Lambda^{[1]}(k_1)}\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\Lambda^{[2]}(i_1,j_1)\times$$

$$e^{(t_1-t_2)\sum\limits_{\substack{l_1=1,\\ l_1\neq j_1}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_1)}\ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\sum\limits_{\substack{k_n=1,\\ k_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[1]}(k_n)}\times$$

$$\sum_{\substack{i_n\neq j_n=1,\\ i_n,j_n\neq(j_1,\ldots,j_{n-1})}}^{s}\Lambda^{[2]}(i_n,j_n)e^{t_n\sum\limits_{\substack{l_n=1,\\ l_n\neq(j_1,\ldots,j_n)}}^{s}\Lambda^{[1]}(l_n)}b^0_{s-n}((\mathbf{u}_1,\ldots,$$

$$\mathbf{u}_s)\setminus(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_n}))\Big|,$$

почленно перейдемо до границі, використовуючи рівності (4.2) і (4.3). Згідно з умовою на збіжність початкових маргінальних спостережуваних в результаті встановимо справедливість твердження теореми 4.1.

Нехай $b^0\in\mathcal{C}_\gamma$, тоді послідовність $b(t)=(b_0,b_1(t),\ldots,b_s(t),\ldots)$ граничних маргінальних спостережуваних (4.1) є класичним розв'язком задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля для активної м'якої речовини:

$$\frac{\partial}{\partial t}b_s(t)=\sum_{j=1}^{s}\Lambda^{[1]}(j)\,b_s(t)+ \tag{4.4}$$

$$\sum_{j_1\neq j_2=1}^{s}(\Lambda^{[2]}(j_1,j_2)b_{s-1}(t))(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{j_2-1},\mathbf{u}_{j_2+1},\ldots,\mathbf{u}_s),$$

$$b_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\mid_{t=0}=b^0_s(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\quad s\geq 1, \tag{4.5}$$

де в рекурентних еволюційних рівняннях (4.4) оператори $\Lambda^{[1]}(j)$ та $\Lambda^{[2]}(j_1,j_2)$ визначено за допомогою формул (3.1).

В загальному випадку N субпопуляцій дуальна ієрархія рівнянь самоузгодженого поля (4.4) для активної м'якої речовини має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}b_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\sum_{j=1}^{s}\big(\Lambda^{[1]}(j)\,b_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{4.6}$$

$$+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{s}\frac{1}{(k-n)!}\sum_{j_1\neq\ldots\neq j_k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\Lambda^{[k]}(j_1,\ldots,j_k)b_{s-n}(t,(\mathbf{u}_1,\ldots,$$

$\mathbf{u}_s) \setminus (\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_n})), \quad s \geq 1.$

В явному вигляді дуальна ієрархія рівнянь самоузгодженого поля (4.4) для взаємодіючих стохастичних марковських процесів (3.1) має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} b_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) = \sum_{j=1}^{s} a^{[1]}(\mathbf{u}_j)\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[1]}(\mathbf{v}; \mathbf{u}_j) b_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots,$$
$$\mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_s) d\mathbf{v} - b_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)\Big) +$$
$$\sum_{j_1 \neq j_2 = 1}^{s} a^{[2]}(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2})\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}} A^{[2]}(\mathbf{v}; \mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}) b_{s-1}(t, \mathbf{u}_1, \ldots,$$
$$\mathbf{u}_{j_1-1}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{j_1+1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_2-1}, \mathbf{u}_{j_2+1}, \ldots, \mathbf{u}_s) d\mathbf{v} -$$
$$b_{s-1}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j_2-1}, \mathbf{u}_{j_2+1}, \ldots, \mathbf{u}_s)\Big), \quad s \geq 1,$$

де функції $A^{[k]}$, $k = 1, 2$, та $a^{[k]}$, $k = 1, 2$, визначено вище в формулі (3.1).

Таким чином, у термінах спостережуваних кінетична еволюція системи багатьох взаємодіючих марковських стохастичних процесів описується в скейлінговій границі самоузгодженого поля за допомогою рекурентних еволюційних рівнянь (4.6).

4.2. Границя самоузгодженого поля для розв'язку ієрархії рівнянь ББҐКІ для активної м'якої речовини

Встановимо асимптотичну поведінку в границі самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку (3.12) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.9),(3.10).

Справедливе таке твердження.

Теорема 4.2. *Нехай для початкових маргінальних функції розподілу існує границя самоузгодженого поля*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s F_s^{0,\varepsilon} - f_s^0\big\|_{L^1_s} = 0,$$

тоді на скінченому проміжку часу $t\in[0,t_0)$ $(t_0=\alpha(8a^{[2]_*})^{-1})$, *в сенсі збіжності по нормі простору* $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s)$ *існує границя розв'язку (3.12) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.9),(3.10)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big\|\varepsilon^s F_s(t) - f_s(t)\big\|_{L^1_s} = 0, \tag{4.7}$$

яка зображується розкладами в такий ряд:

$$f_s(t,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s) = \tag{4.8}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\boldsymbol{u}_{s+1}\ldots d\boldsymbol{u}_{s+n}\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\times$$
$$\sum_{i=1}^{s}\Lambda^{*[2]}(i,s+1)e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\ldots e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\times$$
$$\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\Lambda^{*[2]}(i_n,s+n)e^{t_n\Lambda^{*[1]}_{s+n}}f^0_{s+n}(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{s+n}),\quad s\ge 1.$$

Доведемо граничну теорему 4.2.

Оскільки ряди (3.12) та (4.8) є збіжними на скінченому проміжку часу $t\in[0,\alpha(8a^{[2]_*})^{-1})$, тоді для довільного нескінченно малого $\varepsilon>0$ існує таке число N, що справедлива нерівність

$$\Big\|\varepsilon^s F_s(t) - f_s(t)\Big\|_{L^1_s}\le$$
$$\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n} d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\Big|\varepsilon^s\frac{1}{n!}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)F^{0,\varepsilon}_{s+n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}) -$$
$$\int\limits_0^t dt_1\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} dt_n e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\sum_{i=0}^{s}\Lambda^{*[2]}(i,s+1)e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\ldots$$

$$e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}_{s+n}}\sum_{i_n=1}^{s+n-1}\Lambda^{*[2]}(i_n,s+n)e^{t_n\Lambda^{*[1]}_{s+n}}f^0_{s+n}\Big|+\varepsilon,$$

де використано позначення введені в рівності (3.26).

Використовуючи рівності (3.25) і (3.26), в скінченній сумі почленно перейдемо до границі, в результаті встановимо справедливість твердження теореми 4.2.

Ряд (4.8) є сильним розв'язком відповідної задачі Коші для такої граничної ієрархії еволюційних рівнянь для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\big(\Lambda^{*[1]}_s f_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{4.9}$$
$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\big(\Lambda^{*[2]}(i,s+1)f_{s+1}(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+1}),$$

$$f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)|_{t=0}=f^{0,\varepsilon}_s(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\quad s\geq 1. \tag{4.10}$$

В загальному випадку системи N субпопуляцій задача Коші для граничної ієрархії еволюційних рівнянь має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\big(\Lambda^{*[1]}_s f_s(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)+ \tag{4.11}$$
$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k=1}^{s}\sum_{n=1}^{N-k}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n}\big(\Lambda^{*[k+n]}(i_1,\ldots,i_k,$$
$$s+1,\ldots,s+n)f_{s+n}(t)\big)(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{s+n}),$$

$$f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)|_{t=0}=f^{0,\varepsilon}_s(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s),\quad s\geq 1. \tag{4.12}$$

Остання ієрархія еволюційних рівнянь має назву ієрархія рівнянь самоузгодженого поля або ієрархія еволюційних рівнянь типу Власова для взаємодіючих стохастичних марковських процесів [84].

Зауважимо, що ієрархія рівнянь самоузгодженого поля (4.11) є дуальною (двоїстою) ієрархією рівнянь до рекурентних еволюційних рівнянь (4.6) для граничних маргінальних спостережуваних.

Як зазначалось вище, традиційно асимптотичні властивості розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ в скейлінгових границях [102] досліджуються використовуючи зображення розв'язку побудованого методами теорії збурень. В роботі [84] для ряду ітерацій ієрархії рівнянь ББҐКІ системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів встановлена границя самоузгодженого поля, яка задовольняє ієрархії рівнянь (4.11), та для початкових даних (3.15) встановлена властивість поширення початкового хаосу для розв'язку граничної ієрархії рівнянь (4.11).

Доведемо властивість поширення початкового хаосу в границі самоузгодженого поля для непертурбативного розв'язку (3.12) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.9),(3.10). Зауважимо, що в інший спосіб для системи багатьох марковських стохастичних процесів така властивість в границі самоузгодженого поля була встановлена вище в теоремі 3.5. З цією метою встановимо асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку (3.12) в границі самоузгодженого поля для початкових станів, які задовольняють умову хаосу (3.15), тобто такої послідовності маргінальних функцій розподілу:

$$F_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}\mathfrak{A}^*_{1+n}(t,\{Y\},\tag{4.13}$$

$$X\setminus Y)\prod_{i=1}^{s+n}F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i)d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n},\quad s\geq 1,$$

де використано позначення: $X\equiv(1,\ldots,s+n)$ і $Y\equiv(1,\ldots,s)$ та твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{1+n}(t)$ розкладу в ряд (4.13) є кумулянтом $(1+n)$-го порядку півгруп операторів (3.13). За умови, що: $\big\|F_1^{0,\varepsilon}\big\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}<e^{-1}$, рядом (4.13) зображується сильний розв'язок задачі Коші (3.9),(3.10).

Справедливе таке твердження (властивість поширення початкового хаосу).

Теорема 4.3. *Нехай для початкової одночастинкової функції розподілу існує границя самоузгодженого поля*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big\| \varepsilon\, F_1^{0,\varepsilon} - f_1^0 \big\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} = 0.$$

Тоді на скінченому проміжку часу $t \in [0, t_0)$, в сенсі збіжності по нормі простору $L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s)$ існує границя розв'язку (4.13)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\boldsymbol{u}_1 \dots d\boldsymbol{u}_s \Big| \varepsilon^s F_s(t, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s) - \prod_{i=1}^{s} f_1(t, \boldsymbol{u}_i) \Big| = 0, \tag{4.14}$$

де одночастинкова функція розподілу $f_1(t)$ зображується розкладом у ряд (3.24), який є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28).

Доведемо теорему. Розкладемо маргінальні функції розподілу в кластерний розклад за маргінальними кореляційними функціями (2.56):

$$F_s(t, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) = \prod_{i=1}^{s} F_1(t, \mathbf{u}_i) + \tag{4.15}$$
$$\sum_{\substack{\mathrm{P}\,:\,\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\} = \bigcup_i X_i, \\ |\mathrm{P}| \neq s}} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} G_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 2,$$

де символом $\sum_{\mathrm{P}}$ позначена сума всіх можливих розбиттів P множини аргументів $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх множин $X_i \subset (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s)$, які не перетинаються, тобто маргінальні кореляційні функції визначаються як розв'язки наведених кластерних розкладів, а саме:

$$G_s(t, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) = \tag{4.16}$$
$$\sum_{\mathrm{P}\,:\,(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1} (|\mathrm{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s \geq 2.$$

У випадку початкових станів, які задовольняють умову хаосу (3.15) маргінальні кореляційні функції (4.16) зображуються такими розкладами в ряд (2.61):

$$G_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)= \tag{4.17}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}\mathfrak{A}^*_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)\prod_{i=1}^{s+n}F_1^{0,\varepsilon}(\mathbf{u}_i)d\mathbf{u}_{s+1}\ldots d\mathbf{u}_{s+n},$$
$$s\geq 2,$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}^*_{s+n}(t)$ розкладу в ряд (4.17) є кумулянтом $(s+n)$-го порядку півгруп операторів (3.13).

Аналогічно рівності (3.26) для кумулянта $(s+n)$-го порядку півгруп операторів справедлива така рівність

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\big\|\frac{1}{\varepsilon^n}\,\mathfrak{A}^*_{s+n}(t,1,\ldots,s+n)f_{s+n}\big\|_{L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^{s+n})}=0. \tag{4.18}$$

Внаслідок цього для маргінальних кореляційних функцій (4.17) маємо:

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\big\|\varepsilon^s\,G_s(t)\big\|_{L^1((\mathcal{J}\times\mathcal{U})^{s})}=0,\quad s\geq 2, \tag{4.19}$$

і отже згідно кластерних розкладів (4.15) встановлюємо твердження теореми 4.3.

4.3. Еквівалентність опису еволюції за допомогою побудованих асимптотик ієрархій еволюційних рівнянь

Для початкових станів, які описуються у термінах одночастинкової функції розподілу,

$$f^{(c)}\equiv(1,f_1^0(\mathbf{u}_1),\ldots,\prod_{i=1}^{s}f_1^0(\mathbf{u}_i),\ldots),$$

встановимо еквівалентність опису еволюції системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою розв'язку дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) для граничних маргінальних спостережуваних (теорема 4.1) та у термінах одночастинкової функції розподілу (теорема 4.3), яка є розв'язком кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28).

Нехай послідовність граничних маргінальних спостережуваних $b(t) \in \mathcal{C}_\gamma$ та в початковий момент одночастинкова функція розподілу $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$, тоді за умови, що: $\|f_1^0\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} < \gamma$, існує функціонал середніх значень граничних спостережуваних, який зображується таким розкладом в ряд

$$\begin{aligned}&\big(b(t), f^{(c)}\big) = \\ &\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, b_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(\mathbf{u}_i).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Дійсно, для функціоналу (4.20) справедлива така оцінка

$$\begin{aligned}&\big|\big(b(t), f^{(c)}\big)\big| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \|b_s(t)\|_{C_s} \|f_1^0\|^s_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} \leq \\ &\|b(t)\|_{C_\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma^{-1} \|f_1^0\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})})^s.\end{aligned}$$

Розглянемо початкові маргінальні спостережувані адитивного типу, тобто послідовності $b^{(1)}(0) = (0, b_1^0(\mathbf{u}_1), 0, \ldots) \in C_\gamma$. Тоді розклади, якими зображуються граничні маргінальні спостережувані (4.1), набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}&b_s^{(1)}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) = \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{s-2}} dt_{s-1} \, e^{(t-t_1)\sum\limits_{k_1=1}^{s} \Lambda^{[1]}(k_1)} \times \\ &\sum_{i_1 \neq j_1 = 1}^{s} \Lambda^{[2]}(i_1, j_1) e^{(t_1-t_2)\sum\limits_{l_1=1,\, l_1\neq j_1}^{s} \Lambda^{[1]}(l_1)} \ldots\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$e^{(t_{s-2}-t_{s-1})\sum\limits_{k_{s-1}=1,\,k_{s-1}\neq(j_1,\ldots,j_{s-2})}^{s}\Lambda^{[1]}(k_{s-1})}\sum_{\substack{i_{s-1}\neq j_{s-1}=1,\\ i_{s-1},j_{s-1}\neq(j_1,\ldots,j_{s-2})}}^{s}\Lambda^{[2]}(i_{s-1},$$

$$j_{s-1})e^{t_{s-1}\sum\limits_{l_{s-1}=1,\,l_{s-1}\neq(j_1,\ldots,j_{s-1})}^{s}\Lambda^{[1]}(l_{s-1})}\,b_1^0((\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\setminus(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,$$

$$\mathbf{u}_{j_{s-1}})),\quad s\geq 1.$$

У випадку послідовності граничних маргінальних спостережуваних (4.21) для функціоналу середніх значень (4.20) справедливе таке зображення

$$\begin{aligned}
&\big(b^{(1)}(t),f^{(c)}\big)= &(4.22)\\
&\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s}d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_s\,b_s^{(1)}(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\prod_{i=1}^{s}f_1^0(\mathbf{u}_i)=\\
&\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})}d\mathbf{u}_1\,b_1^0(\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_1),
\end{aligned}$$

де одночастинкова функція розподілу $f_1(t)$ зображується таким розкладом в ряд (3.24)

$$\begin{aligned}
&f_1(t,\mathbf{u}_1)= &(4.23)\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\int_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_2\ldots d\mathbf{u}_{n+1}\,e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)}\times\\
&\Lambda^{*[2]}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)}\ldots\prod_{j_{n-1}=1}^{n}e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})}\times\\
&\sum_{i_n=1}^{n}\Lambda^{*[2]}(i_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1}e^{t_n\Lambda^{*[1]}(j_n)}\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(\mathbf{u}_i),
\end{aligned}$$

та оператори $\Lambda^{*[m]}$, $m\geq 1$, визначено формулою (3.11). Гранична одночастинкова функція розподілу (4.23) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28):

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[1]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v})a^{[1]}(\mathbf{v})f_1(t,\mathbf{v})d\mathbf{v}-a^{[1]}(\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+$$
$$\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Big(\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}A^{[2]}(\mathbf{u}_1;\mathbf{v},\mathbf{u}_2)a^{[2]}(\mathbf{v},\mathbf{u}_2)f_1(t,\mathbf{v})f_1(t,\mathbf{u}_2)d\mathbf{v}-$$
$$a^{[2]}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2)\Big),$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1),$$

де функції $A^{[k]}$ і $a^{[k]}$ визначено вище в формулі (3.1).

Таким чином, у випадку маргінальних спостережуваних адитивного типу метод опису еволюції системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу (4.23), яка задовольняє кінетичне рівняння самоузгодженого поля (3.28).

Розглянемо початкові маргінальні спостережувані k-арного типу, тобто послідовності $b^{(k)}(0)=(0,\ldots,0,b_k^0(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k),0,\ldots)\in C_\gamma$. Тоді для функціоналу (4.20) середніх значень розкладів, якими зображуються у цьому випадку граничні маргінальні спостережувані (4.1) справедливе таке зображення:

$$\big(b^{(k)}(t),f^{(c)}\big)= \tag{4.24}$$
$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s}d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_s\,b_s^{(k)}(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)\prod_{i=1}^{s}f_1^0(\mathbf{u}_i)=$$
$$\frac{1}{k!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k}d\mathbf{u}_1\ldots d\mathbf{u}_k\,b_k^0(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)\prod_{i=1}^{k}f_1(t,\mathbf{u}_i),\quad k\geq 2,$$

де гранична одночастинкова маргінальна функція розподілу $f_1(t)$ визначається розкладом в ряд (4.23).

Отже метод опису еволюції системи у випадку граничних маргінальних спостережуваних неадитивного типу є еквівалентним методу опису у термінах еволюції стану, для якого виконується властивість поширення початкового хаосу. Дійсно, маргінальні кореляційні функції в скейлінговій границі самоузгодженого поля визначаються за допомогою кластерних розкладів маргінальних функцій розподілу (2.56):

$$\prod_{i=1}^{k} f_1(t,\mathbf{u}_i) = \sum_{\mathrm{P}\,:\,(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i), \quad k\geq 2,$$

де символом $\sum_{\mathrm{P}}$ позначена сума всіх можливих розбиттів P множини аргументів $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \subset (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)$, які не перетинаються. Розв'язки наведених кластерних розкладів описують еволюцію стану системи у термінах маргінальних кореляційних функцій, а саме: $g_k(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)=0, \quad k\geq 2$, тобто в процесі еволюції системи кореляції не народжуються.

Таким чином, для початкових станів, які задовольняють умову хаосу, в границі самоузгодженого поля доведено еквівалентність опису еволюції системи у термінах граничних маргінальних спостережуваних та за допомогою одночастинкової маргінальної функції розподілу, яка є розв'язком кінетичного рівняння самоузгодженого поля для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів.

4.4. Висновки до четвертого розділу

У цьому розділі розвинуто підхід до опису кінетичної еволюції систем багатьох частинок у термінах спостережуваних величин, що дало можливість сформулювати новий метод виведення нелінійних кінетичних рівнянь для систем частинок у конденсованих станах. Зокрема, такий підхід дає можливість будувати кінетичні рівняння за наявності кореляцій початкових станів, якими, зокрема, характеризуються конденсовані стани.

Встановлено, що у випадку граничних маргінальних спостережуваних адитивного типу (4.21) метод опису еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу, яка є розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28) побудованого в попередньому розділі іншим методом.

У випадку граничних маргінальних спостережуваних неадитивного типу метод опису еволюції за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) є еквівалентним властивості поширення початкового хаосу для станів (4.14), тобто встановлено, що в наближенні самоузгодженого поля в процесі еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів кореляції не народжуються.

Вище також зроблено порівняльний аналіз цього результату (теорема 4.1) з асимптотичною поведінкою в границі самоузгодженого (теореми 4.2 та 4.3) поля непертурбативного розв'язку (3.12)(4.13) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.9),(3.10) системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів, який було побудовано в другому розділі дисертації (2.21).

Результати цього розділу опубліковано в статтях [12],[7] препринті [52] та тезах доповідей в матеріалах праць міжнародних конференцій [8], [53], [54].

РОЗДІЛ 5

Кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями для активної м'якої речовини

Одна з відкритих математичних проблем сучасної кінетичної теорії пов'язана зі строгим обґрунтуванням кінетичних рівнянь для систем частинок у конденсованих станах. Це пов'язано з тією обставиною, що в основу традиційних підходів до виведення кінетичних рівнянь покладено припущення відсутності кореляцій початкових станів, якими саме і характеризується речовина в конденсованих станах.

Оскільки для активних м'яких конденсованих речовин характерною властивістю є наявність кореляцій початкових станів, тому в цьому розділі, використовуючи розвинутий у попередньому розділі дисертації метод до виведення кінетичних рівнянь, а саме: розв'язок дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля для граничних маргінальних спостережуваних, для системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів побудовано кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями.

У цьому розділі за допомогою розвинутого підходу до виведення кінетичних рівнянь також описано процес поширення початкових кореляцій у границі самоузгодженого поля, що, зокрема, дає можливість пояснити деякі типові колективні властивості активних м'яких конденсованих речовин.

5.1. Методи побудови кінетичних рівнянь

Як відомо, один з напрямків розвитку математичної теорії еволюційних рівнянь систем багатьох частинок полягає у строгому виведенні кінетичних рівнянь з динаміки таких систем.

За певних умов, еволюція станів системи багатьох частинок може бути описана у термінах одночастинкової (маргінальної) функції розподілу, яка є роз'язком нелінійного кінетичного рівняння, тобто у термінах стану типової частинки системи. Оскільки еволюція всіх можливих станів описується за допомогою розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ для послідовності маргінальних функцій розподілу, тому кінетичні рівняння інтерпритуються як еволюційні рівняння, якими описується еволюція стану в скейлінгових наближеннях. Традиційно асимптотичні властивості розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ в скейлінгових границях досліджуються за допомогою зображення розв'язку побудованого методами теорії збурень та припущення, що в початковому стані частинки є статистично незалежними, іншими словами, початковий стан задовольняє умову хаосу. Вище такий підхід було реалізовано в границі самоузгодженого поля для непертурбативного розв'язку ієрархії рівнянь ББҐКІ для системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів.

Для початкових станів, які задовольняють умову хаосу, в попередніх розділах розвинуто два нових метода виведення кінетичного рівняння самоузгодженого поля для активних м'яких речовин, мікроскопічна динаміка яких описується за допомогою взаємодіючих стохастичних марковських процесів. Ці методи ґрунтуються на описі еволюції систем багатьох частинок у термінах спостережуваних, а саме: за допомогою розв'язку задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для послідовності маргінальних спостережуваних.

Один з методів виведення кінетичних рівнянь у скейлінговій границі для зазначених початкових станів полягає в описі еволюції станів системи частинок у термінах одночастинкової функції розподілу на основі непертурбативного розв'язку дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для послідовності маргінальних спостережуваних та дослідження їх відповідної асимптотичної поведінки. У третьому розділі було встановлено, що у випадку маргінальних спостережуваних адитивного типу метод опису еволюції системи за допомогою задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ (3.2),(3.3) є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу (3.18), яка є розв'язком задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22), а у випадку маргінальних спостережуваних неадитивного типу – до опису еволюції станів у термінах послідовності маргінальних функціоналів стану (3.19), які описують всі можливі кореляції в системі за допомогою розв'язку побудованого кінетичного рівняння (3.21). В границі самоузгодженого поля розв'язок задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння (3.21),(3.22) задовольняє кінетичне рівняння самоузгодженого поля (3.28), а граничні маргінальних функціоналів стану описують процес поширення початкового хаосу (4.14).

Ще один метод до виведення кінетичних рівнянь у скейлінговій границі полягає в побудові асимптотики розв'язку задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББҐКІ для послідовності маргінальних спостережуваних. У попередньому розділі встановлено, що у випадку граничних маргінальних спостережуваних адитивного типу (4.21) метод опису еволюції системи багатьох взаємодіючих стохастичних процесів за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу, яка є розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля (3.28). У випадку граничних маргінальних спостережуваних неадитивного типу метод опису еволюції за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) є еквівалентним властивості поширення початкового хаосу для станів (4.14).

Розвинутий підхід до опису колективної поведінки активних м'яких конденсованих речовин, а саме: у термінах спостережуваних таких систем, що у цьому випадку є більш природним ніж опис у термінах станів, далі буде застосовано до побудови кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями, якими описуються конденсовані стани систем багатьох частинок.

5.2. Кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями

Розглянемо початковий стан, який характеризується одночастинковою маргінальною функцією розподілу та кореляційними функціями

$$f^{(cc)} \equiv (1, f_1^0(\mathbf{u}_1), g_2 \prod_{i=1}^{2} f_1^0(\mathbf{u}_i), \ldots, g_s \prod_{i=1}^{s} f_1^0(\mathbf{u}_i), \ldots), \tag{5.1}$$

де обмежені функції $g_s \equiv g_s(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)$, $s \geq 2$, визначають початкові кореляції. Такі стані є характерними для конденсованої активної м'якої речовини.

Якщо розв'язок задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4),(4.5) для активної м'якої речовини $b(t) \in C_\gamma$ і початкова маргінальна функція розподілу $f_1^0 \in L^1(\mathcal{J} \times \mathcal{U})$, тоді за умови: $\|f_1^0\|_{L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} < \gamma$, існує границя самоузгодженого поля функціоналу середніх значень для маргінальних спостережуваних, яка визначається наступним розкладом у ряд

$$\begin{aligned} &\big(b(t), f^{(cc)}\big) = \\ &\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, b_s(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) g_s(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(\mathbf{u}_i). \end{aligned} \tag{5.2}$$

У випадку граничних маргінальних спостережуваних адитивного типу для граничного функціоналу середніх значень спостережуваних (5.2) справедливе таке зображення

$$\big(b^{(1)}(t), f^{(cc)}\big) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1\dots d\mathbf{u}_s\, b_s^{(1)}(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)g_s(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)\prod_{i=1}^{s}f_1^0(\mathbf{u}_i) = \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})} d\mathbf{u}_1\, b_1^0(\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_1). \tag{5.3}$$

У рівності (5.3) функція $b_s^{(1)}(t)$ визначається частковим випадком розкладу (4.1), а саме:

$$b_s^{(1)}(t,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s) = \int_0^t dt_1\dots\int_0^{t_{s-2}}dt_{s-1}\, e^{(t-t_1)\sum\limits_{k_1=1}^{s}\Lambda^{[1]}(k_1)}\sum_{i_1\neq j_1=1}^{s}\Lambda^{[2]}(i_1,j_1)\times$$
$$e^{(t_1-t_2)\sum\limits_{l_1=1,\, l_1\neq j_1}^{s}\Lambda^{[1]}(l_1)}\dots e^{(t_{s-2}-t_{s-1})\sum\limits_{k_{s-1}=1,\, k_{s-1}\neq(j_1,\dots,j_{s-2})}^{s}\Lambda^{[1]}(k_{s-1})}\times$$
$$\sum_{\substack{i_{s-1}\neq j_{s-1}=1,\\ i_{s-1},j_{s-1}\neq(j_1,\dots,j_{s-2})}}^{s}\Lambda^{[2]}(i_{s-1},j_{s-1})e^{t_{s-1}\sum\limits_{l_{s-1}=1,\, l_{s-1}\neq(j_1,\dots,j_{s-1})}^{s}\Lambda^{[1]}(l_{s-1})}\times$$
$$b_1^0((\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)\setminus(\mathbf{u}_{j_1},\dots,\mathbf{u}_{j_{s-1}})),\quad s\geq 1,$$

та гранична одночастинкова функція розподілу $f_1(t)$ визначається таким розкладом у ряд

$$f_1(t,\mathbf{u}_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t dt_1\dots\int_0^{t_{n-1}}dt_n\int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^n}d\mathbf{u}_2\dots d\mathbf{u}_{n+1}\, e^{(t-t_1)\Lambda^{*[1]}(1)}\times \tag{5.4}$$
$$\Lambda^{*[2]}(1,2)\prod_{j_1=1}^{2}e^{(t_1-t_2)\Lambda^{*[1]}(j_1)}\dots\prod_{j_{n-1}=1}^{n}e^{(t_{n-1}-t_n)\Lambda^{*[1]}(j_{n-1})}\times$$

$$\sum_{i_n=1}^{n}\Lambda^{*[2]}(i_n,n+1)\prod_{j_n=1}^{n+1}e^{t_n\Lambda^{*[1]}(j_n)}g_{1+n}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n+1})\prod_{i=1}^{n+1}f_1^0(\mathbf{u}_i),$$

де оператори $\Lambda^{*[i]}$, $i=1,2$, є спряженими операторами (3.11) до операторів $\Lambda^{[i]}$, $i=1,2$, які визначено формулою (3.1) в сенсі функціоналу математичного сподівання (5.2).

Для початкових даних $f_1^0\in L^1(\mathcal{J}\times\mathcal{U})$ гранична функція розподілу (5.4) є сильним розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,\mathbf{u}_1)=\Lambda^{*[1]}(1)f_1(t,\mathbf{u}_1)+\int\limits_{\mathcal{J}\times\mathcal{U}}d\mathbf{u}_2\Lambda^{*[2]}(1,2)\times \tag{5.5}$$

$$\prod_{i_1=1}^{2}e^{t\Lambda^{*[1]}(i_1)}g_2(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\prod_{i_2=1}^{2}e^{t\Lambda^{*[1]}(i_2)}f_1(t,\mathbf{u}_1)f_1(t,\mathbf{u}_2),$$

$$f_1(t,\mathbf{u}_1)|_{t=0}=f_1^0(\mathbf{u}_1), \tag{5.6}$$

де функція $g_2(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ – початкова двохчастинкова кореляційна функція (5.1) і оператори $\Lambda^{*[i]}$, $i=1,2$, та $\Lambda^{*[2]}(1,2)$ визначено формулою (3.11).

Це твердження доводиться аналогічно випадку доведення існування розв'язку для ієрархії рівнянь ББҐКІ, який зображується рядом ітерацій [34].

Підкреслимо, що інтеграл зіткнень у кінетичному рівнянні (5.5) визначається початковими кореляціями системи (5.1), внаслідок чого кінетичне рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями є кінетичним рівнянням немарковського типу.

Таким чином, встановлено, що для початкових станів (5.1), які визначаються одночастинковою (маргінальною) функцією розподілу та кореляціями, метод опису еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів еквівалентний до підходу за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4) у випадку маргінальних спостережуваних адитивного типу полягає в описі еволюції станів одночастинковою функцією розподілу, яка є розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями (5.5),(5.6).

5.3. Властивість поширення початкових кореляцій

Для функціоналу середніх значень спостережуваних у границі самоузгодженого поля у випадку граничних маргінальних спостережуваних k-арного типу $b^{(k)}(0) = (0, \ldots, 0, b_k^0(0\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k), 0, \ldots)$, справедлива така рівність

$$\big(b^{(k)}(t), f^{(cc)}\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^s} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_s \, b_s^{(k)}(t, \mathbf{u}_1, \ldots, \tag{5.7}$$

$$\mathbf{u}_s) g_s(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) \prod_{i=1}^{s} f_1^0(\mathbf{u}_i) =$$

$$\frac{1}{k!} \int\limits_{(\mathcal{J}\times\mathcal{U})^k} d\mathbf{u}_1 \ldots d\mathbf{u}_k \, b_k^0(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \prod_{i_1=1}^{k} e^{t\Lambda^{*[1]}(i_1)} g_k(\mathbf{u}_1, \ldots,$$

$$\mathbf{u}_k) \prod_{i_2=1}^{k} e^{t\Lambda^{*[1]}(i_2)} \prod_{i=1}^{k} f_1(t, \mathbf{u}_i),$$

де гранична одночастинкова функція розподілу $f_1(t, \mathbf{u}_i)$ визначається розкладом (4.23) і задовольняє задачу Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями (5.5),(5.6) та функція $g_k(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ є початковою k-частинковою кореляційною функцією (5.1).

Внаслідок рівності (5.7) для маргінальних спостережуваних k-арного типу еволюція системи, яка описується за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля (4.4), у термінах маргінальних (k-частинкових) функцій розподілу еквівалентна властивості поширення початкових кореляцій:

$$f_k(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k)= \tag{5.8}$$
$$\prod_{i_1=1}^{k} e^{t\Lambda^{*[1]}(i_1)} g_k(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k) \prod_{i_2=1}^{k} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i_2)} \prod_{j=1}^{k} f_1(t,\mathbf{u}_j), \quad k\geq 2,$$

де функція $f_1(t)$ є розв'язком кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями (5.5).

Дійсно, маргінальні кореляційні функції в скейлінговій границі самоузгодженого поля визначаються за допомогою кластерних розкладів маргінальних функцій розподілу (2.56):

$$f_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)= \sum_{\mathrm{P}\,:\,(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i), \quad s\geq 1,$$

де символ $\sum_{\mathrm{P}}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини аргументів $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)$ на $|\mathrm{P}|$ непорожніх підмножин $X_i\subset(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)$, які не перетинаються, тобто як розв'язки наведених кластерних розкладів:

$$g_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=$$
$$\sum_{\mathrm{P}\,:\,(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(t,X_i), \quad s\geq 1.$$

Тоді властивість поширення початкових кореляцій (5.8) у термінах маргінальних кореляційних функцій зображуються такими розкладами:

$$g_s(t,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)= \tag{5.9}$$
$$\prod_{i_1=1}^{k} e^{t\Lambda^{*[1]}(i_1)} \tilde{g}_s((\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s) \prod_{i_2=1}^{k} e^{-t\Lambda^{*[1]}(i_2)} \prod_{j=1}^{k} f_1(t,\mathbf{u}_j), \quad s\geq 2,$$

де одночастинкова функція розподілу $f_1(t)$ визначається із задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля з початковими кореляціями (5.5),(5.6) та використано таке позначення

$$\tilde{g}_s(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)= \sum_{\mathrm{P}\,:\,(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)=\bigcup_i X_i} \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(X_i),$$

в якому функції $g_{|X_i|}(X_i)$, $|X_i| \leq s$, є початковими кореляційними функціями (5.1)

Таким чином, встановлено, що в границі самоузгодженного поля в процесі еволюції активних м'яких конденсованих речовин нові кореляції не народжуються, а початкові кореляції поширюються згідно з формулою (5.9).

5.4. Висновки до п'ятого розділу

Використовуючи розвинутий в дисертації метод до побудови кінетичних рівнянь, який ґрунтується на розв'язку задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля для граничних маргінальних спостережуваних, для початкових станів системи багатьох взаємодіючих стохастичних марковських процесів, які характерезуються кореляціями, побудовано кінетичне рівняння самоузгодженного поля з початковими кореляціями (5.5) та описано процес поширення початкових кореляцій у границі самоузгодженного поля.

Виведене кінетичне рівняння для активних м'яких конденсованих речовин є немарковським кінетичним рівнянням внаслідок внеску початкових кореляцій в структуру інтегралу зіткнень цього рівняння (5.5). Тобто встановлено, що ефекти пам'яті кінетичних процесів у таких системах і наявність початкових кореляцій, якими характеризуються їх конденсовані стани, є взаємно обумовленими.

Встановлено також, що в границі самоузгодженного поля в процесі еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів, нові кореляції не народжуються, а початкові кореляції поширюються згідно з формулою (5.9).

Результати цього розділу опубліковано в статтях [7],[61], препринті [62] та тезах доповідей в матеріалах праць в матеріалах праць міжнародних конференцій [54],[55].

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розвинуто підхід до дослідження нерівноважних систем статистичної механіки за допомогою еволюційних рівнянь у функціональних похідних для твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описуються спостережувані величини та стани систем багатьох частинок.

Вперше сформульовано рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу послідовності маргінальних спостережуваних і за його допомогою розвинуто метод побудови непертурбативного розв'язку для задачі Коші для ієрархії рівнянь (дуальна ієрархія рівнянь ББҐКІ) для маргінальних спостережуваних. Встановлено, що такий розв'язок зображується у формі розкладу за групами спадаючої кількості частинок, твірні оператори якого є відповідного порядку кумулянтами груп операторів рівнянь Ліувілля для спостережуваних системи скінченої кількості частинок.

Встановлено зв'язок між твірними функціоналами для послідовностей функцій, якими визначаються різні способи опису стану систем багатьох частинок. Зокрема, розвинуто підхід до опису станів систем багатьох частинок у термінах кореляційних функцій, які є розв'язком задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля. Це дало можливість у відповідних функціональних просторах побудувати непертурбативні розв'язки задач Коші для ієрархій рівнянь для маргінальних функцій розподілу і маргінальних кореляційних функцій у термінах нелінійних груп операторів ієрархії рівнянь Ліувілля для кореляційних функцій. Зазначені результати узагальнено для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

Розвинуто підхід до опису кінетичної еволюції активних м'яких речовин у термінах спостережуваних величин, що дало можливість сформулювати новий метод виведення нелінійних кінетичних рівнянь для систем в конденсованих станах.

За допомогою непертурбативного розв'язку дуальної (двоїстої) ієрархії рівнянь ББҐКІ для маргінальних спостережуваних взаємодіючих стохастичних марковських процесів обґрунтовано кінетичне рівняння немарковського типу, яким описуються ефекти пам'яті колективної поведінки активних м'яких речовин.

Побудовано непертурбативний розв'язок задачі Коші для виведеного немарковського кінетичного рівняння та досліджено його асимптотичні властивості у границі самоузгодженого поля.

Встановлено, що у випадку маргінальних спостережуваних адитивного типу метод опису еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою двоїстої ієрархії рівнянь ББҐКІ є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу, яка є розв'язком задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння, а у випадку маргінальних спостережуваних неадитивного типу до опису еволюції станів у термінах послідовності маргінальних функціоналів стану, якими описуються всі можливі кореляції в активних м'яких речовинах за допомогою розв'язку побудованого кінетичного рівняння.

В просторі інтегрованих функцій для побудованого немарковського кінетичного рівняння доведено теорему про існування розв'язку. У випадку початкових станів, які задовольняють умову хаосу, для побудованого розв'язку та маргінальних функціоналів стану доведено граничні теореми самоузгодженого поля, зокрема, встановлено властивість поширення початкового хаосу, тобто статистичної незалежності станів системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів, якою описуються активні м'які речовини.

В границі самоузгодженого поля встановлено асимптотичну поведінку непертурбативного розв'язку для дуальної (двоїстої) ієрархії рівнянь для маргінальних спостережуваних системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів, якою моделюється динаміка активних м'яких речовин. У цьому випадку в дисертації вперше сформульовано ієрархію еволюційних рівнянь, за допомогою якої описуються кінетичні властивості системи у термінах спостережуваних величин. Використовуючи отриманий результат, доведено, що у випадку граничних маргінальних спостережуваних адитивного типу метод опису еволюції системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів за допомогою дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля є еквівалентним до підходу опису еволюції станів системи у термінах одночастинкової функції розподілу, яка є розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння самоузгодженого поля. У випадку граничних маргінальних спостережуваних неадитивного типу метод опису еволюції є еквівалентним властивості поширення початкового хаосу, тобто встановлено, що в наближенні самоузгодженого поля в процесі еволюції системи кореляції не народжуються.

Використовуючи розвинутий в дисертації метод до виведення кінетичних рівнянь, який ґрунтується на використанні розв'язку дуальної ієрархії рівнянь самоузгодженого поля для граничних маргінальних спостережуваних, для системи взаємодіючих стохастичних марковських процесів побудувано кінетичне рівняння самоузгодженного поля з початковими кореляціями та описано процес поширення початкових кореляцій в границі самоузгодженного поля.

Побудоване кінетичне рівняння є рівнянням немарковського типу внаслідок внеску початкових кореляцій в структуру інтегралу зіткнень цього рівняння. Тобто встановлено, що ефекти пам'яті кінетичних процесів в активних м'яких речовинах і наявність початкових кореляцій, якими характеризується конденсований стан, є взаємно обумовленими. Доведено також, що в границі самоузгодженного поля в процесі еволюції системи, нові кореляції не народжуються.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] **Ахиезер А.И.** Методы статистической физики / А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

[2] **Боголюбов М.М.** Метод функціональних похідних в статистичній механіці / М.М. Боголюбов // Зб. праць ІМ АН УРСР. – 1947. – **8**. – С. 177–189.

[3] **Боголюбов Н.Н.** О некоторых статистических методах в математической физике / Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР. – 1945. – 139 с.

[4] **Боголюбов Н.Н.** Проблемы динамической теории в статистической физике / Н.Н. Боголюбов. – М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1946. – 119 с.

[5] **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

[6] **Герасименко В.І.** Еволюційні рівняння в функціональних похідних багаточастинкових систем / Ю.Ю. Федчун, В.І. Герасименко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: математика та механіка – 2011. – **26**. – С. 17–22.

[7] **Герасименко В.І.** Кінетичні рівняння активної м'якої речовини / В.І. Герасименко, Ю.Ю. Федчун // Доповіді НАН України – 2014. – **5**. – С. 11–18.

[8] **Герасименко В.І.** Еволюційні рівняння активної м'якої речовини / Ю.Ю. Федчун, В.І. Герасименко // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки"до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 48.

[9] **Герасименко В.І.** Кінетичні рівняння м'якої активної речовини / В.І. Герасименко, Ю.Ю. Федчун // V Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Матеріали конференції. – Ворохта, 2015. – С. 14–15.

[10] **Петрина Д.Я.** О решениях кинетических уравнений Боголюбова. Квантовая статистика / Д.Я. Петрина // Теорет. и мат. физика. – 1972. – **13**, № 3. – С. 391–405.

[11] **Рид М.** Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1978. – 400 с.

[12] **Федчун Ю.Ю.** Скейлінгові властивості нерівноважних станів активної м'якої речовини / Ю.Ю. Федчун // Зб. праць ІМ НАН України – 2014. – **11**, №1. – С. 364–374.

[13] **Федчун Ю.Ю.** Метод функціональних похідних та дуальна ієрархія рівнянь Боголюбова / Ю.Ю. Федчун, // Український математичний конгрес – 2009. – Київ, 2009. – Режим доступу до тез доповідей: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Fedchun.pdf

[14] **Arnold A.** Entropies and equilibria of many-particle systems: an essay on recent research / A. Arnold, J.A. Carrillo, L. Desvillettes, J. Dolbeault, A. Jungel, C. Lederman, P.A. Markowich, G. Toscani, C. Villani // Monatsh. Math. – 2004. – P. 35–43.

[15] **Arlotti L.** Kinetic equations modelling population dynamics / L. Arlotti, N. Bellomo, M. Lachowicz // Transport Theory Statist. Phys. – 2000. – **29**. – P. 125–139.

[16] **Arlotti L.** Generalized Kinetic Models in Applied Sciences. / L. Arlotti, N. Bellomo, E. De Angelis, M. Lachowicz // New Jersy: World Sci. – 2003. – 220 p.

[17] **Banasiak J.** Perturbations of Positive Semigroups with Applications / J. Banasiak, L. Arlotti. – New York: Springer – 2006. – 438 p.

[18] **Banasiak J., Lachowicz M.** Methods of Small Parameter in Mathematical Biology / J. Banasiak, M. Lachowicz – Boston: Birkhäuser. – 2014. – 320p.

[19] **Bar'yakhtar V.G.** N.N. Bogolyubov and development of physical kinetics / V.G. Bar'yakhtar // Ukr. J. Phys. – 2009. – **54**, № 8/9. – P. 908–918.

[20] **Bellomo N.** Nonlinear models and problems in applied sciences: From differential quadrature to generalized collocation method/ N. Bellomo // Math. Comp. Mod. – 1997. – **4**, №26. – P. 13–34.

[21] **Bellomo N.** Toward a mathematical theory of living systems focusing on developmental biology and evolution: a review and perspectives / N. Bellomo, B. Carbonaro // Phys. Life Rev. – 2011. – **8**, №1. – P. 33–38.

[22] **Bellomo N.** Looking for new paradigms towards a biological-mathematical theory of complex multicellular systems / N. Bellomo, G. Forni // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2006. – **16**. – P. 1001–1029.

[23] **Bellomo N.** Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology / N. Bellomo – In: A kinetic theory and stochastic game approach, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. – 2009. – 401 p.

[24] **Bellomo N.** Mathematical topics on the modelling complex multicellular systems and tumor immune cells competition / N. Bellomo, A. Bellouquid, M. Delitala // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2004. – **14**, №11. – P. 1683–1733.

[25] **Bellouquid A.** Mathematical methods and tools of the kinetic theory towards modelling complex biological systems / A. Bellouquid, M. Delitala // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. – 2005. – **15**. – P. 1639–1666.

[26] **Bellouquid A.** Mathematical Modelling of Complex Biological Systems: A Kinetic Theory Approach / A. Bellouquid, M. Delitala. – Boston: Birkhäuser. – 2006. – 194 p.

[27] **Bianca C.** Thermostated kinetic equations as models for complex systems in physics and life sciences / C. Bianca // Physics of Life Reviews – 2012. – **9**, №4. – P. 400–402.

[28] **Borgioli G.** The dual BBGKY hierachy for the evolution of observables / G. Borgioli, V.I. Gerasimenko // Riv. Mat. Univ. Parma – 2001. – **4**. – P. 251–267.

[29] **Borgioli G.** Initial-value problem of quantum dual BBGKY hierarchy / G. Borgioli, V.I. Gerasimenko // Nuovo Cimento. – 2010. – **33**, №1. – P. 71–78.

[30] **Capasso V.** Asymptotic behavior of a systems of stochastic particles subject to nonlocal interactions / V. Capasso, D. Morale // Stoch. Anal. Appl. – 2009. – **27**. – P. 574–603.

[31] **Carlen E.** Kinetic limits for pair-interaction driven master equations and biological swarm models / E. Carlen, P. Degond, B. Wennberg // Math. Mod. and Meth. in Appl. Sciences. – 2013. – **23**, №7. – P. 1339–1376.

[32] **Carrillo J.A.** Particle, kinetic, and hydrodynamic models of swarming / J. A. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani, F. Vecil // In: Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences; eds: G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani. – Boston: Birkhäuser. – 2010. – P. 297–336.

[33] **Carrillo J.A.** Asymptotic flocking dynamics for the kinetic Cucker-Smale model / J.A. Carrillo, M. Fornasier, J. Rosado, G. Toscani. // SIAM J. Math. Anal. – 2010. – **42**, №1. – P. 218–236.

[34] **Cercignani C.** Many-particle Dynamics and Kinetic Equations / C. Cercignani, V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – 1997. – 252 p.

[35] **Cercignani C.** The Mathematical Theory of Dilute Gases / C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti. – New York: Springer. – 1994. – 344 p.

[36] **Champagnat N.** From individual stochastic processes to macroscopic models in adaptive evolution / N. Champagnat, R. Ferriére, S. Méléard // Stoch. Models. – 2008. – **24**. – P. 2–44.

[37] **Cohen E.G.D.** Bogolyubov and kinetic theory: the Bogolyubov equations / E.G.D. Cohen // УФЖ. – 2009. – **54**. – P. 847–861.

[38] **Dautray R.** Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology / R. Dautray, J.L. Lions. – Berlin: Springer-Verlag. – 1992. – **1**. – 456 p.

[39] **Dautray R.** Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology / R. Dautray, J.L. Lions. – Berlin: Springer-Verlag. – 1992. – **5**. – 742 p.

[40] **Delitala M.** Critical analysis and perspectives on the kinetic (cellular) theory of immune competition / M. Delitala // Math. Comp. Model. – 2002. – **35**. – P. 63–75.

[41] **Delitala M.** Generalized kinetic theory approach to modelling spread and evolution of epidemics / M. Delitala // Math. Comp. Model. – 2004. – **39**. – P. 1–12.

[42] **Degond P.** Phase transitions, hysteresis, and hyperbolicity for self-organized alignment dynamics / P. Degond, A. Frouvelle, J.-G. Liu // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2015. – **216**, №1. – P. 63–115.

[43] **Degond P.** Macroscopic limits and phase transition in a system of self-propelled particles / P. Degond, A. Frouvell, J.-G. Liu // J. Nonlinear Sci. – 2013. – **23**, №3 – P. 427–456.

[44] **Degond P.** Macroscopic models of collective motion and self-organization / P. Degond, A. Frouvelle, J.-G. Liu, S. Motsch, L. Navoret // Seminaire Laurent Schwartz–EDP et applicatios, Exp. – 2012-2013. – № I. – P. 1–27.

[45] **Degond P.** Hydrodynamic models of self-organized dynamics: derivation and existence theory / P. Degond, J.-G. Liu, S. Motsch, V. Panferov // Methods Appl. Anal. – 2013. – **20**, №2. – P. 89–114.

[46] **Deutsch A.** Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation: Characterization, Application and Analysis / A. Deutsch, S. Dormann. – Boston: Birkhäuser. – 2004. – 331 p.

[47] **Dreizler R.M.** Density Functional Theory. An Advanced Course / R.M. Dreizler, E. Engel. – Springer-Verlag. – 2011. – 531 p.

[48] **Eibeck A.** Stochastic interacting particle systems and nonlinear kinetic equations / A. Eibeck, W. Wagner – Ann. Appl. Probab. – 2003. – **13**. – P. 845–889.

[49] **Fedchun Yu.Yu.** Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations in functional derivatives / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // Зб. праць IM НАН України. – 2012. – **9**, №2. – C. 347–375.

[50] **Fedchun Yu.Yu.** On kinetic equations modeling the evolution of many-entity systems in mathematical biology / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. – 2013. – **1**, №2. – P. 273–279.

[51] **Fedchun Yu.Yu.** Nonperturbative solution expansions of hierarchies of evolution equations of many-particle systems / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // Preprint. – 2011. – arXiv:1107.0823. – 21 p.

[52] **Fedchun Yu.Yu.** On kinetic equations modeling evolution of systems in mathematical biology / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // Preprint. – 2013. – arXiv:1308.4504. – 12 p.

[53] **Fedchun Yu.Yu.** Towards derivation of evolution equations of hemokinetics / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // EU-Ukrainian Mathematicians for Life Science. Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 32.

[54] **Fedchun Yu.Yu.** On kinetic evolution of interacting cells modelling systems in mathematical biology / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // EU-Ukrainian Mathematicians for Life Science. Book of abstracts. – Olenivka, 2013. – P. 8–9.

[55] **Fedchun Yu.Yu.** Evolution equations of soft active matter / Yu.Yu. Fedchun // "The education and science and

their role in social and industrial progress of society". – Kyiv, 2014. – Режим доступу до тез доповідей: http://hk2014.humboldt.org.ua//abstracts/pdf/508.pdf

[56] **Fedchun Yu.Yu.** On kinetic evolution of interacting cells modeling systems in mathematical biology / Yu.Yu. Fedchun, V.I. Gerasimenko // International Conference of Young Mathematition. Book of abstracts. – Kyiv, 2015. – P. 117.

[57] **Frigyik B.A.** An introduction to functional derivatives / B.A. Frigyik, S. Srivastava, M.R. Gupta // UWEE Tech. Report No. UWEETR-2008-001. – 2008. – 7 p.

[58] **Gallagher I.** From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-range Potentials/ I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier// EMS: Zurich Lectures in Advanced Mathematics. – 2014. – 135 p.

[59] **Gapyak I.** Hard sphere dynamics and the Enskog equation / I. Gapyak, V. Gerasimenko // Kin. Rel. Models – 2012. – **5**, №3. – P. 459–484.

[60] **Gelfand I.M.** Calculus of Variations / I.M. Gelfand, S.V. Fomin – New York: Dover Publ. – 2000. – 240 p.

[61] **Gerasimenko V.I.** On semigroups of large particle systems and their scaling asymptotic behavior / V.I. Gerasimenko, Yu.Yu. Fedchun // In: Semigroups of Operators - Theory and Applications. Springer. – 2015. – **17**. – P. 165–182.

[62] **Gerasimenko V.I.** On semigroups of large particle systems and their scaling asymptotic behavior / V.I. Gerasimenko, Yu.Yu. Fedchun // Preprint. – 2014. – arXiv:1408.1781. – 17 p.

[63] **Gerasimenko V.I.** The generalized kinetic equation generated by the BBGKY hierarchy / V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina // Ukrainian J. Phys. – 1998. – **43**. – P. 697–702.

[64] **Gerasimenko V.I.** Thermodynamical limit of nonequilibrium states of three-dimensional hard-sphere system / V.I. Gerasimenko, D.Ya. Petrina // Theor. Math. Phys. – 1985. – **64**, № 1. – P. 130–149.

[65] **Gerasimenko V.I.** Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles / V.I. Gerasimenko, D.O. Polishchuk // Math. Meth. Appl. Sci. – 2011. – **33**. – P. 76–93.

[66] **Gerasimenko V.I.** A nonperturbative solution of the nonlinear BBGKY hierarchy for marginal correlation operators / V.I. Gerasimenko, D.O. Polishchuk // Math. Meth. Appl. Sci. – 2013. – **36**. – P. 2311–2328.

[67] **Gerasimenko V.I.** On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions / V.I. Gerasimenko, T.V. Ryabukha, M.O. Stashenko // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**, №42. – P. 9816–9872.

[68] **Gerasimenko V.I.** Evolution of correlations of quantum many-particle systems/ V.I. Gerasimenko, V.O. Shtyk // J. Stat. Mech. Theory Exp. – 2008. – **3**. – P03007.

[69] **Gerasimenko V.I.** On description of evolution of quantum states by means of kinetic equation / V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir // J. Phys. A.: Math. Theor. – 2010. – **43**, №48. – 19 p.

[70] **Gerasimenko V.I.** On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states / V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir // Physica A: Stat. Mech. Appl. – 2012. – **391**, №24. – P. 6362–6366.

[71] **Gerasimenko V.I.** Approaches to derivation of the Boltzmann equation with hard sphere collisions / V.I. Gerasimenko // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine – 2013. – **10**, №2. – P. 71–95

[72] **Gerasimenko V.I.** Heisenberg picture of quantum kinetic equations / V.I. Gerasimenko // Kin. Rel. Models – 2011. – **4**, №1. – P. 385–399.

[73] **Gerasimenko V.I.** Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations / V.I. Gerasimenko, T.V. Ryabukha // Ukrain. Math. J. – 2002.– **54**, №10. – P. 1583–1601.

[74] **Gerasimenko V.I.** Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations / V.I. Gerasimenko // In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications. New York: Nova Science Publ., Inc. – 2012. – P. 233–288.

[75] **Gottlieb A.** Propagation of chaos in classical and quantum kinetics / A. Gottlieb // In: Stochastic Anal. and Math. Phys. II; ed: R. Rebolledo. – Basel: Birkhäuser. – 2003. – 19 p.

[76] **Grad H.** Principles of the kinetic theory of gases / H. Grad // Handbuch der Physik, Berlin: Springer. – 1958. – **12**. – P. 205–294.

[77] **Green H.S.** Basis of the functional assumption in the theory of the Boltzmann equation / H.S. Green, R.A. Piccirelli // Phys. Rev. – 1963. – **132**. – P. 1388—1410.

[78] **Gronwall T.H.** A functional equation in the kinetic theory of gases / T.H Gronwall // Annals of Mathematics – 1915. – **17**, №2. – P. 1–4.

[79] **Hillen T.** The diffusion limit of transport equations derived from velocity jump processes / T. Hillen, H. Othmer // SIAM J. Appl. Math. – 2000. – **61**. – P. 751–775.

[80] **Jager E.** On the distribution of dominance in populations of social organisms / E. Jager, L.A. Segel // SIAM J. Appl. Math. – 1992. – **52**. – P. 1442–1468.

[81] **Jones D.** Differential Equations and Mathematical Biology / D. Jones, B. Sleeman. – Boca Raton: CRC-Press Chapman Hall, 2003. – 340 p.

[82] **Kato T.** Perturbation Theory for Linear Operators / T. Kato. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 750 p.

[83] **Kipnis C.** Scaling Limits of Interacting Particle Systems / C. Kipnis, C. Landim. – Berlin: Springer. – 1998. – 442 p.

[84] **Lachowicz M.** Individually-based Markov processes modeling nonlinear systems in mathematical biology / M. Lachowicz // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2011. – **12**. – P. 2396–2407.

[85] **Lachowicz M.** Microscopic, mesoscopic and macroscopic descriptions of complex systems / M. Lachowicz // Probab. Eng. Mech. – 2011. – **26**, №1. – P. 54–60.

[86] **Lachowicz M.** Links between microscopic and macroscopic descriptions, Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic / M. Lachowicz // Lecture Notes in Math. – 2008. – **1940**. – P. 201–268.

[87] **Lachowicz M.** On bilinear kinetic equations. Between micro and macro descriptions of biological populations / M. Lachowicz // Banach Center Publ. – 2004. – **63**. – P. 217–230.

[88] **Lachowicz M.** General population systems. Macroscopic limit of a class of stochastic semigroups / M. Lachowicz // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **307**. – P. 585–605.

[89] **Lachowicz M.** From Genetics to Mathematics / M. Lachowicz, J. Miekisz. – New Jersey: World Sci. – 2009. – 244 p.

[90] **Lachowicz M.** A stochastic particle system modelling the Euler equation / M. Lachowicz, M. Pulvirenti // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1990. – **109**. – P. 81–93.

[91] **Lanford O.E.** Time evolution of large classical systems / O.E. Lanford // Lect. Notes in Phys. – 1975. – **38**. – P. 1–111.

[92] **Lewis R.L.** Solution of the equations of statistical mechanics / R.L. Lewis // J. Math. Phys. – 1960. – **2**. – P. 222–231.

[93] **Marchetti M.C.** Hydrodynamics of soft active matter / M.C. Marchetti, J.F. Joanny, S. Ramaswamy, T.B. Liverpool, J. Prost, Madan Rao, R. Aditi Simha // Rev. Mod. Phys. – 2013. – **85**. – P. 1143–1193.

[94] **Menon G.I.** Active Matter / G.I. Menon // In: Rheology of Complex Fluids; eds: J. Murali Krishnan, et al. – Springer. – 2010. – P. 193–218.

[95] **Morale D.** An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations / D. Morale, V. Capasso, K. OelschLäger // J. Math. Biol. – 2005. – **50**. – P. 49–66.

[96] **Naldi G.** Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-economic and Life Sciences / G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani. – Springer Verlag, Heidelberg. – 2010. – 133 p.

[97] **Pareschi L.** Interacting Multiagent Systems. Kinetic Equations & Monte Carlo Methods. / L. Pareschi, G. Toscani. – Oxford University Press. – 2013. – 206 p.

[98] **Perthame B.** Mathematical tools for kinetic equations / B. Perthame // Bulletin of the American Math. Sos. – 2004. – **41**, №2. – P. 205–244.

[99] **Petrina D.Ya.** Stochastic Dynamics and Boltzmann Hierarchy / D.Ya. Petrina – Kyiv: Institute of Mathematics, 2008. – 400p.

[100] **Petrina D.Ya.** Mathematical problems of the statistical mechanics of a hard-sphere system / D.Ya. Petrina, V.I. Gerasimenko // Russ. Math. Surv. (Uspekhi Mat. Nauk) – 1990. – **45**, № 3. – P. 135–182.

[101] **Shtyk V.O.** On the solutions of the nonlinear Liouville hierarchy / V.O. Shtyk // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – **40**. – P. 9733–9742.

[102] **Spohn H.** Kinetic equations of Hamiltonians dynamics / H. Spohn // Rev. Mod. Phys. – 1980. – **52**. – P. 569–615.

[103] **Spohn H.** Large Scale Dynamics of Interacting Particles / H. Spohn. – New York: Springer-Verlag. – 1991. – 350 p.

[104] **Villani C.** A review of mathematical topics in collisional kinetic theory / C. Villani. – Handbook of Fluid Mechanics; Eds.: S. Friedlander, D. Serre. – 2002. – **1**. – 211 p.

[105] **Vicsek T.** Collective motion / T. Vicsek, A. Zafeiris // Physics Reports. – 2012. – **517**. – P. 71–140.