НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НОВІКОВА Юлія Вікторівна

УДК 531.39, 517.977

КЕРУВАННЯ КОЛИВАННЯМИ ТА РЕДУКЦІЯ МОДЕЛЕЙ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПРУЖНИМИ ПЛАСТИНАМИ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України та Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Зуєв Олександр Леонідович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділення
прикладних проблем сучасного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кононов Юрій Микитович,
Донецький національний університет (м. Вінниця),
головний науковий співробітник,
професор кафедри прикладної механіки і
комп'ютерних технологій;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Пироженко Олександр Володимирович,
Інститут технічної механіки НАН України та
ДКА України (м. Дніпропетровськ),
провідний науковий співробітник відділу
системного аналізу та проблем керування.

Захист відбудеться 19 січня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою:
01601, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 17 грудня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Прогрес аерокосмічної галузі обумовлює високу актуальність досліджень з питань керованості та стабілізації руху сучасних космічних апаратів. Такі космічні апарати представляють собою складні механічні об'єкти, що моделюються системами з'єднаних між собою абсолютно твердих і деформівних тіл. Абсолютно твердими тілами можна моделювати, зокрема, основний приладовий відсік, двигун-маховик і системи вимірювання. Деформівними тілами виступають панелі сонячних батарей, антени, гравітаційні штанги та штанги з науковими приладами, рефлектори, телескопи з довгофокусними об'єктивами тощо.

До 1970-х років XX століття керування космічними апаратами формувалося переважним чином на основі інформації про стан тільки твердих елементів системи. При цьому, як правило, можливо шукати лише компромісні розв'язки. Так, наприклад, для зменшення впливу пружності панелей сонячних батарей на динаміку тіла-носія необхідно зробити їх більш жорсткими або зменшити в розмірах. А це призводить до збільшення маси панелей батарей або до зменшення кількості енергії, яку вони синтезують. Також збільшується тривалість активного функціонування космічного апарата на орбіті, що в свою чергу викликає збільшення енергетичних витрат. У таких умовах компромісні розв'язки можуть не існувати.

У роботах Л.В. Докучаєва, В.М. Рубановського, P. Linkins та інших встановлено, що пружні елементи конструкції суттєво впливають на динаміку системи, тому задачі керування і стабілізації для абсолютно твердих тіл несуть лише наближену інформацію та не дають повного уявлення про рух системи. Коливання пружних конструкцій заважають приведенню космічного апарата до заданої орієнтації, забезпеченню стабілізації виносних елементів та космічного апарата в цілому на орбіті функціонування. А це означає, що новітні алгоритми повинні забезпечувати стабілізацію руху не тільки твердих, а й пружних елементів. Тому питання, спрямоване на розробку нових, більш ефективних алгоритмів керування, які забезпечать високу точність стабілізації без збільшення жорсткості пружних елементів, стає дуже актуальним.

Саме тому предметом дослідження дисертаційної роботи є проблеми керування та стабілізації коливань механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Найбільш поширеною математичною моделлю коливань пружної пластини є модель Кірхгофа, яка розглядається у подальших теоретичних дослідженнях. Модель пластини Кірхгофа, зокрема, має переваги перед моделлю Коші-Пуассона, оскільки є більш наочною та має високу фізичну ясність. У теорію Кірхгофа включено поняття про внутрішні сили та моменти, що наближає її до теорії балок та дає можливість ефективно формулювати граничні умови для пластин.

Проблеми динаміки систем тіл, які мають пружні та дисипативні елементи, задачі керування їх рухом і стабілізації досліджувались у роботах В.І. Гуляєва, Я.О. Жука, Ю.М. Кононова, В.Д. Кубенка, В.Б. Ларіна, Д.В. Лебедєва, О.С. Лимарченка, І.О. Луковського, А.І. Лур'є, М.К. Набіулліна, В.В. Новицького, О.В. Пироженка, Є.М. Потапенка, В.С. Хорошилова, Ф.Л. Черноуська, M. Bradley, G. Cai, L. Chen, B. Jacob, J.E. Lagnese, S. Lenhart, G. Leugering, J. Pan, J.R. Partington та інших авторів.

У сучасній теорії керування механічними системами з мембранами та пластинами важливе місце займають задачі стабілізації руху з урахуванням нескінченного спектру коливань пружних елементів. Ефективним методом дослідження задач стійкості та синтезу керувань для цих систем із розподіленими параметрами є прямий метод Ляпунова, який набув суттєвого розвитку у роботах В.І. Зубова, В.І. Коробова, А.А. Мартинюка, В.М. Матросова, О.А. Мовчана, В.В. Румянцева, Т.К. Сіразетдінова, О.О. Шестакова, J.-M. Coron, J.P. LaSalle та ін.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з Планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України та відділення прикладних проблем сучасного аналізу Інституту математики НАН України на 2011-2015 роки. Дисертант приймав участь у виконанні НДР «Розробка конструктивних методів теорії керування і стійкості із застосуванням до задач машинобудування» (держ. реєстр. № 0111U000483), «Керування моделями мехатронних систем із застосуванням до задач навігації космічних апаратів і стабілізації робототехнічних комплексів» (держ. реєстр. № 0112U000029), «Оптимальна реалізація відображень вхід-вихід для динамічних процесів у задачах керування та інформаційних технологіях» (держ. реєстр. № 0111U007074).

Мета і задачі дослідження. Основною метою дослідження є визначення умов керованості та стабілізації руху механічної системи, що складається з абсолютно твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити ряд завдань. До цих завдань належить побудова математичної моделі керованого руху механічної системи, що складається з абсолютно твердого тіла та пружної пластини, та зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Наступним завданням є визначення умов керованості моделі коливань пластини у скінченновимірних і нескінченновимірному фазових просторах.

Ще одним завданням є розв'язання задачі оптимального керування для моделі Кірхгофа з довільною фіксованою кількістю мод коливань з урахуванням моменту інерції перерізу пластини, а також дослідження множини досяжності нескінченновимірної динамічної системи з непорівнянними частотами у класі функцій керування спеціального вигляду.

Наступним завданням є синтез керування зі зворотним зв'язком та доведення стійкості тривіального розв'язку відповідної замкненої системи, яка описує коливання пружної пластини і твердого тіла.

Об’єктом дослідження дисертаційної роботи є механічна система, яка складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа.

Предметом дослідження виступають задачі керування та стабілізації руху механічної системи з пластиною.

Методи досліджень. Методи аналітичної механіки використовуються при дослідженні рівнянь динаміки пластини з урахуванням переносного руху твердого тіла. Дослідження керованості системи здійснюється методами математичної теорії керування. Для оцінки множини досяжності застосовано деякі результати функціонального аналізу, зокрема, теорію напівгруп операторів у гільбертових просторах. Для встановлення стійкості тривіального розв'язку застосовано метод функціоналів Ляпунова. Достовірність отриманих законів керування проілюстровано також результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху.

Наукова новизна одержаних результатів визначається наступними положеннями.

1. У дисертаційній роботі побудовано та досліджено математичну модель обертального руху механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини. Особливість моделі полягає у тому, що пластина шарнірно закріплена на границі області, а керування відповідає кутовому прискоренню тіла-носія. Така система відрізняється, зокрема, від моделей супутників, в яких панелі сонячних батарей прикріплені жорстко. Для отриманої моделі запропоновано схему зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Уперше за допомогою критерію Калмана доведено теорему про керованість даної моделі для довільного скінченного набору узагальнених координат, а також теорему про спектральну керованість.
2. Уперше розв'язано задачу оптимального керування для моделі Кірхгофа з довільною фіксованою кількістю мод коливань, в якій враховано момент інерції перерізу пластини. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна доведено теорему про оптимальне керування для досліджуваної механічної системи.
3. Для моделі коливань пружної пластини з нескінченною кількістю ступенів волі отримано функції керування зі зворотним зв'язком, які розв’язують задачу стабілізації тривіального стану рівноваги. Уперше доведено теорему про асимптотичну стійкість нульового розв’язку відповідної нескінченної системи диференціальних рівнянь по відношенню до функціоналу спеціального вигляду.
4. Уперше побудовано оцінку множини досяжності нескінченновимірної динамічної системи, що описує коливання пружної пластини, із використанням сім’ї гладких функцій керування. Цей результат доведено із застосуванням методу модального аналізу у припущенні, яке забезпечує мінімальність норми розв'язків підсистеми з низькочастотними модами.
5. Уперше розглянуто задачу синтезу трьох незалежних керувань зі зворотним зв'язком за станом для гасіння коливань та стабілізації стану рівноваги нескінченновимірної механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Встановлено дисипативність інфінітезимального генератора відповідного абстрактного диференціального рівняння і доведено стійкість за Ляпуновим досліджуваного стану рівноваги.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації результати мають переважно теоретичне значення. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії керування та стійкості руху механічних систем із розподіленими параметрами. Деякі результати можна рекомендувати до застосування в інженерній практиці для проектування систем керування космічними апаратами з пружними елементами.

Особистий внесок здобувача. Усі положення, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно. Статті [1]-[6] опубліковано спільно з науковим керівником, проф. О.Л. Зуєвим, якому належать постановки задач та обговорення отриманих результатів.

У статті [1] здобувачем доведено теорему про спектральну керованість механічної системи і проведено аналіз модельного прикладу.

Особистий внесок здобувача у статтю [2] полягає у доведенні теореми про існування оптимального керування для моделі коливань пластини Кірхгофа з довільною кількістю пружних мод.

У статті [3] здобувачеві належить доведення теореми про оцінку множини досяжності нескінченновимірної системи, яка описує коливання прямокутної пластини.

У статтях [4-6] здобувачем отримано функції керування зі зворотним зв'язком та доведено теорему про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку нескінченновимірної системи по відношенню до функціоналу спеціального вигляду. Крім того, особистий внесок здобувача полягає в отримані математичної моделі руху механічної системи, що складається з твердого тіла і пружної пластини, у вигляді нелінійного диференціального рівняння у нескінченновимірному просторі. Для отриманої системи знайдено керування у вигляді зворотного зв'язку за станом, а також доведено теорему про дисипативність інфінітезимального генератора.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Науковій конференції студентів математичного факультету Донецького національного університету, Донецьк, 2011 р.;
- V Міжнародній науково-практичній конференції молодих науковців, аспірантів, студентів «Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія», Донецьк, 2011 р.;
- Міжнародній конференції «Стійкість, керування і динаміка твердого тіла» (ICSCD'XI), Донецьк, 2011 р.;
- V Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», Запоріжжя, 2015 р.;
- Міжнародній конференції «Моделювання і дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI XVII), Київ, 2015 р.;
- Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 2015 р.;
- Семінарах з загальної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2013 та 2014 рр. (керівник – академік НАН України О.М. Ковальов).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на:

- Семінарі «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» Інституту математики НАН України, Київ, 2015 р. (керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л. Макаров);
- Спільному семінарі відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України та відділення прикладних проблем сучасного аналізу Інституту математики НАН України за участю кафедри мате-

матики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», м. Слов'янськ, 2015 р. (керівники – чл.-кор. НАН України В.Я. Гутлянський, проф. І.І. Скрипник, проф. С.М. Чуйко).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 10 роботах, з яких 6 статей у фахових наукових журналах та збірниках, 4 роботи у матеріалах міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел зі 134 найменувань. Обсяг дисертаційної роботи становить 146 сторінок друкованого тексту. У роботі міститься 7 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі до дисертації обґрунтовується актуальність досліджуваної проблеми, розкривається зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, формулюються мета, задачі та методи дослідження. Крім того, у вступі характеризується наукова новизна результатів, їхнє практичне значення, особистий внесок здобувача, надається інформація про апробацію результатів дисертації та публікації за темою дисертації.

У першому розділі подається огляд літературних джерел, які мають безпосереднє відношення до теми дисертації. У підрозділі 1.1 перелічено основні результати робіт, що стосуються дослідження моделей коливань пружних пластин. У підрозділі 1.2 наведено огляд робіт з питань моделювання руху космічних апаратів з пружними елементами. У підрозділі 1.3 викладено деякі результати досліджень щодо керування та стабілізації руху механічних систем з пружними елементами. Підрозділ 1.4 містить огляд робіт, присвячених стабілізації руху твердого тіла навколо центру мас.

У другому розділі описано загальну методику дисертаційних досліджень. У підрозділі 2.1 наведено необхідні формули для визначення кінематичних характеристик руху матеріальної точки у двох системах відліку (інерціальній та неінерціальній). Також викладено один з найважливіших принципів механіки – принцип Д'Аламбера, який дозволяє статичними методами визначати динамічні реакції. У підрозділі 2.2 введено поняття керованості та сформульовано критерій Калмана для лінійних диференціальних рівнянь, а також поставлено задачу оптимального керування та наведено принцип максимуму Понтрягіна для розв'язання цієї задачі. У підрозділі 2.3 наведено основні положення теорії напівгруп лінійних операторів для застосування до систем із розподіленими параметрам. У підрозділі 2.4 описано поняття стійкості тривіального розв'язку системи за усіма змінними та за частиною змінних, а також викладено необхідні результати методу функцій Ляпунова для нелінійних механічних систем.

У третьому розділі розглянуто механічну систему, яка складається з твердого тіла та приєднаної до нього тонкої пружної пластини. З твердим тілом пов'язано декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Тверде тіло B обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю $\omega(t)$ Рис. 1. Вважаємо, що пластина має товщину $h>0$ і в недеформованому стані займає замкнену область, яка має вигляд

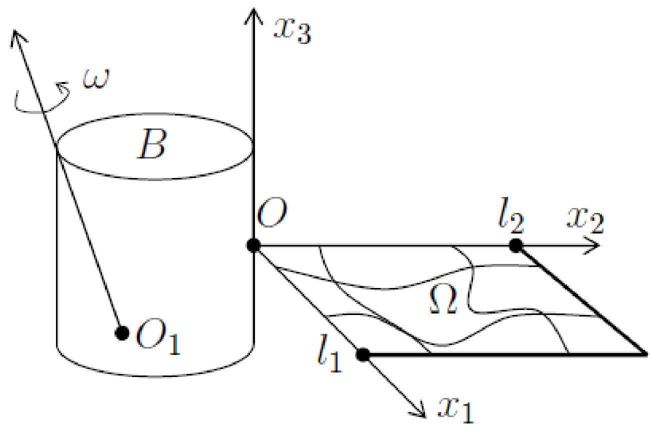

Рис.1. Тверде тіло з тонкою пружною пластиною.

$(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \le \frac{h}{2}$. Припускаємо, що в будь-який момент часу t серединну поверхню пластини можна задати рівнянням $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Поведінку функції $w = w(x_1, x_2, t)$ в області Ω описано за допомогою моделі Кірхгофа коливання тонкої пластини:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\Delta^2 w(x_1, x_2, t) = \tilde{F}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – густина, $D > 0$ – жорсткість пластини при згинанні, $\tilde{F}$ – поперечна компонента сили інерції, яка обумовлена переносним рухом системи координат $Ox_1x_2x_3$. Також припускаємо, що пластина шарнірно закріплена на границі області Ω (на частинах контуру відсутні прогин та згинаючий момент), тобто компоненти вектора переміщення і вектора граничних сил дорівнюють нулю на $\partial\Omega$:

$$w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1 = 0,\, x_1 = l_1} = 0, \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|_{x_2 = 0,\, x_2 = l_2} = 0, \tag{4}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Застосовуючи принцип Д'Аламбера та формулу додавання прискорень, запишемо вираз для сили інерції $\tilde{F} = (F, e_3)$ у рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\tilde{F} = -\rho h[(x_1 - a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2) + (x_2 - a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(a_3 - w(x_1, x_2, t))], \tag{5}$$

де (a_1, a_2, a_3) – координати точки O_1 у системі координат $Ox_1x_2x_3$, ω_1, ω_2, ω_3 – компоненти вектора кутової швидкості твердого тіла.

Отже, основним результатом підрозділу 3.1 є математична модель (1)-(5) обертального руху механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини, яка шарнірно закріплена на границі області Ω.

У підрозділах 3.2 та 3.3 до отриманої крайової задачі (1)-(5) застосовано метод Фур'є та записано лінеаризовану систему диференціальних рівнянь у випадку повільних обертань тіла-носія у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_{kj} \\ \dot{\eta}_{kj} \end{pmatrix} = A_{kj} \begin{pmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \end{pmatrix} + B_{kj} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad (k, j) \in \mathbb{N}^2, \tag{6}$$

де $A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}$, $B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{kj} & g_{kj} \end{pmatrix}$.

У формулі (6): $\xi_{kj}(t)$ – модальна координата, $\eta_{kj}(t)$ – швидкість, що відповідає моді коливань з індексами $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функції керування, які відповідають кутовому прискоренню тіла-носія. Коефіцієнти системи (6) пов'язані з параметрами механічної системи (1)-(5) наступними співвідношеннями:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right), \ \alpha = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k - \text{ парне,} \\ \dfrac{2 l_2 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k - \text{ непарне, } j - \text{ парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj}, & k - \text{ непарне, } j - \text{непарне,} \end{cases}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2 l_1 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k - \text{ парне, } j - \text{ непарне,} \\ 0, & j - \text{ парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 kj}, & k - \text{непарне, } j - \text{непарне.} \end{cases}$$

У подальшому будемо припускати, що $2a_1 \neq l_1$, $2a_2 \neq l_2$.

Для нескінченновимірної підсистеми системи (6) з індексами (k, j) розглянемо взаємно-однозначне відображення $l \to (k_p, j_p)$ між множинами $\mathbb{N}$ та L_0, де $L_0 = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k - \text{ непарне або } j - \text{ непарне}\}$. Підсистема, що відповідає індексам з L_0, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_l \\ \dot{\eta}_l \end{pmatrix} = A_l \begin{pmatrix} \xi_l \\ \eta_l \end{pmatrix} + B_l \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $\xi_l = \xi_{k_l j_l}$, $\eta_l = \eta_{k_l j_l}$, $A_l = A_{k_l j_l}$, $B_l = B_{k_l j_l}$, $l = 1, 2, \ldots$.

Основним результатом підрозділу 3.3 є теорема про керованість скінченновимірної підсистеми системи (7) з індексами $l=\overline{1,m}$.

Теорема 1. *Система (7) при* $l=\overline{1,m}$ *є керованою, тоді і тільки тоді, коли* $\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\neq 0$*, та при деякому* $p:\ 0\leq p\leq m$ *виконується умова*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ \beta_1^2\varphi_1 & \beta_2^2\varphi_2 & \cdots & \beta_m^2\varphi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(p-1)}\varphi_1 & \beta_2^{2(p-1)}\varphi_2 & \cdots & \beta_m^{2(p-1)}\varphi_m \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_m \\ \beta_1^2 g_1 & \beta_2^2 g_2 & \cdots & \beta_m^2 g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(q-1)}g_1 & \beta_2^{2(q-1)}g_2 & \cdots & \beta_m^{2(q-1)}g_m \end{vmatrix}\neq 0,\quad q+p=m. \tag{8}$$

Наслідком теореми 1 є теорема про спектральну керованість системи (7).

Теорема 2. *Система (7) є спектрально керованою тільки тоді, коли для кожного* $m\in\mathbb{N}$ *виконано умови теореми 1.*

Одержані результати демонструються у підрозділі 3.4 на прикладі підсистеми з трьома низькочастотними модами.

Результати третього розділу опубліковано у роботах [1], [7], [8].

У четвертому розділі досліджено математичну модель механічної системи, яка складається з твердого тіла та тонкої пружної пластини. Але на відміну від моделі (1), що розглядалася у розділі 3, використано модель пластини Кірхгофа, в якій враховано обертальний рух поперечного перерізу пластини:

$$\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}-\frac{I_\rho}{\rho h}\Delta\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}+\frac{D}{\rho h}\Delta^2 w(x_1,x_2,t)=(x_1-a_1)\dot{\omega}_2-(x_2-a_2)\dot{\omega}_1, \tag{9}$$

де $I_\rho=\dfrac{\rho h^3}{12}$ – полярний момент інерції поперечного перерізу. Права частина диференціального рівняння (9) відповідає правій частині формули (5) з припущенням підрозділу 3.3 про лінеаризацію відносно кутової швидкості.

Оскільки пластина шарнірно закріплена на границі області Ω, то мають місце граничні умови виду (2)-(4). У результаті застосування методу Фур'є до крайової задачі (9), (2)-(4), отримано нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{C}_{kj}+C_{kj}\lambda_{kj}=\varphi_{kj}u_1(t)+g_{kj}u_2(t),\quad \lambda_{kj}=\frac{\alpha^2(\mu_{1k}+\mu_{2j})^2}{1-\dfrac{h^2}{12}(\mu_{1k}+\mu_{2j})},\quad (k,j)\in\mathbb{N}^2, \tag{10}$$

де $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функції керування.

Після заміни змінних: $\sqrt{\lambda_{kj}}C_{kj}=\xi_{kj}(t)$, $\dot{C}_{kj}(t)=\eta_{kj}(t)$, $\beta_{kj}=\sqrt{\lambda_{kj}}>0$,

Система (10) набуває вигляду:

$$\dot{x}_{kj}=A_{kj}x_{kj}+B_{kj}u(t),$$

де $x_{kj}=\begin{pmatrix}\xi_{kj}\\ \eta_{kj}\end{pmatrix}$, $A_{kj}=\begin{pmatrix}0 & \beta_{kj}\\ -\beta_{kj} & 0\end{pmatrix}$, $B_{kj}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varphi_{kj} & g_{kj}\end{pmatrix}$, $(k,j)\in\mathbb{N}^2$.

У підрозділі 4.2 для довільного натурального числа n задано різні пари індексів $(k_1,j_1),\ (k_2,j_2),\ ...,\ (k_n,j_n)$ та розглянуто систему

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u(t), \qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

де $x_i = x_{k_i j_i}$, $A_i = A_{k_i j_i}$, $B_i = B_{k_i j_i}$.

Для системи (11) розглянуто задачу оптимального керування: *для заданих значень* $\tau>0$, $x_i^0\in\mathbb{R}^2$, $x_i^1\in\mathbb{R}^2$, $i=\overline{1,n}$, *знайти керування* $u\in L^2(0,\tau)$, *яке мінімізує функціонал*

$$J=\int_0^\tau \{u_1^2(t)+u_2^2(t)\}dt \tag{12}$$

на розв'язках $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$ *системи (11). Функції* $x(t)$ *задовольняють крайові умови*

$$x_i(0)=x_i^0, \qquad x_i(\tau)=x_i^1, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

У результаті розв'язання задачі оптимального керування (11)-(13) за допомогою принципу максимуму Понтрягіна доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай* $\hat{u}_1(t),\ \hat{u}_2(t),\ t\in[0,\tau]$ – *оптимальні керування у задачі (11)-(13), для заданих* $\tau>0$, $x_i^0\in\mathbb{R}^2$, $x_i^1\in\mathbb{R}^2$, $(i=\overline{1,n})$. *Тоді*

$$\begin{cases}\hat{u}_1(s)=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i\left(q_i^0\cos(\beta_i s)-p_i^0\sin(\beta_i s)\right),\\ \hat{u}_2(s)=\sum\limits_{i=1}^{n}g_i\left(q_i^0\cos(\beta_i s)-p_i^0\sin(\beta_i s)\right),\end{cases} \tag{14}$$

де коефіцієнти p_i^0, q_i^0 *задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\left(M+F\right)\left(q_1^0,p_1^0,...,q_n^0,p_n^0\right)^T=P, \tag{15}$$

де $M=\begin{pmatrix}\frac{\tau}{2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{\tau}{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{\tau}{2}\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n}\\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn}\end{pmatrix}$, $F_{ll}=\begin{pmatrix}\frac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l} & -\frac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l}\\ -\frac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l} & -\frac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l}\end{pmatrix}$,

$$
F_{li} = \frac{\varphi_l \varphi_i + g_l g_i}{(\varphi_l^2 + g_l^2)(\beta_l^2 - \beta_i^2)} \begin{pmatrix} F_{li}^{11} & F_{li}^{12} \\ F_{li}^{21} & F_{li}^{22} \end{pmatrix},
$$

$$
F_{li}^{11} = \beta_l \sin(\beta_l \tau)\cos(\beta_i \tau) - \beta_i \cos(\beta_l \tau)\sin(\beta_i \tau),
$$

$$
F_{li}^{12} = -(\beta_l \sin(\beta_l \tau)\sin(\beta_i \tau) + \beta_i \cos(\beta_l \tau)\cos(\beta_i \tau) - \beta_i), \quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_1^1 \sin(\beta_1 \tau) + \eta_1^1 \cos(\beta_1 \tau) - \eta_1^0}{\varphi_1^2 + g_1^2} \\ \dfrac{\xi_1^1 \cos(\beta_1 \tau) - \eta_1^1 \sin(\beta_1 \tau) - \xi_1^0}{\varphi_1^2 + g_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\xi_n^1 \sin(\beta_n \tau) + \eta_n^1 \cos(\beta_n \tau) - \eta_n^0}{\varphi_n^2 + g_n^2} \\ \dfrac{\xi_n^1 \cos(\beta_n \tau) - \eta_n^1 \sin(\beta_n \tau) - \xi_n^0}{\varphi_n^2 + g_n^2} \end{pmatrix}.
$$

$$
F_{li}^{21} = \beta_l \cos(\beta_l \tau)\cos(\beta_i \tau) + \beta_i \sin(\beta_l \tau)\sin(\beta_i \tau) - \beta_l,
$$

$$
F_{li}^{22} = -(\beta_l \cos(\beta_l \tau)\sin(\beta_i \tau) - \beta_i \cos(\beta_i \tau)\sin(\beta_l \tau)).
$$

Зауваження 1. *Матриця $M + F$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь (15) є невиродженою при достатньо великих значеннях τ, тому система (15) має єдиний розв'язок.*

У підрозділі 4.3 теорему 3 проілюстровано на прикладі системи диференціальних рівнянь для трьох мод коливань пластини.

Результати розділу 4 опубліковано у роботі [2].

У п'ятому розділі розглянуто рівняння руху (6) у припущенні, що можна використати лише одне керування, тобто $u_2 \equiv 0$, а $u_1 = u(t)$. Введено комплексні змінні:

$$
\begin{cases} z_{kj} = \xi_{kj} + i\eta_{kj}, \\ \overline{z}_{kj} = \xi_{kj} - i\eta_{kj}, \end{cases}
$$

які дозволяють представити систему (6) наступним чином:

$$
\begin{cases} \dot{z}_{kj} = -iz_{kj}\beta_{kj} + i\varphi_{kj}u(t), \\ \dot{\overline{z}}_{kj} = i\overline{z}_{kj}\beta_{kj} - i\varphi_{kj}u(t). \end{cases} \tag{16}
$$

Підкреслено, що оскільки $\varphi_{kj} = 0$ для парних індексів k, то система (16) має некерований підпростір, який відповідає модам (ξ_{kj}, η_{kj}) з $(k, j) \in S$, де

$$
S = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \mid k\text{- парне}\}.
$$

Тому для подальшого дослідження проблеми керованості розглянуто підсистему системи (16) для індексів $\mathbb{N}^2 \setminus S$ та задано взаємно-однозначне відображення $n \mapsto (k_n, j_n)$ між множинами $\mathbb{N}$ та $\mathbb{N}^2 \setminus S$, у результаті кожному індексу $n \in \mathbb{N}$ відповідає пара індексів $(k_n, j_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus S$.

Далі систему (16) з індексами $(k_n, j_n) \in \mathbb{N}^2 \setminus S$ представлено в операторному вигляді:

$$
\dot{q} = Aq + Bu, \quad q \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^1, \tag{17}
$$

де
$$
q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ q_{-2} \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2, \quad A = i \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = i \begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ B_{-2} \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix},
$$

$$q_n = z_{k_n j_n}, \quad q_{-n} = \overline{z}_{k_n j_n}, \quad \omega_n = \beta_{k_n j_n}, \quad B_n = B_{-n},$$

$$B_n = \varphi_{k_n j_n} = \begin{cases} \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n \text{- непарне, } j_n \text{- парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n \text{- непарне, } j_n \text{- непарне,} \end{cases} \qquad \beta_{k_n j_n} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k_n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_n}{l_2}\right)^2\right). \quad (18)$$

Система (17) розглядається у гільбертовому просторі ℓ^2 з нормою

$$\|q\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|q_n|^2 + |q_{-n}|^2\right)\right)^{1/2}.$$

У підрозділі 5.2 доведено лему про оптимальне керування для скінченновимірної підсистеми системи (17) , яка відповідає координатам q_{-n}, q_n, $n = \overline{1, N}$, для фіксованого цілого числа $N \geq 1$.

Лема 1. *Нехай* $\omega_j \neq \omega_k$ *для всіх* $1 \leq j < k \leq N$. *Розглянемо задачу оптимального керування:*

$$\dot{\tilde{q}}_N = A_N \tilde{q}_N + B_N u, \quad t \in [0, \tau], \quad (19)$$

$$J = \int_0^\tau |u(t)|^2 \, dt \to \min, \quad (20)$$

$$\tilde{q}_N^0 = \tilde{q}_N(0) = \begin{pmatrix} q_{-1}^0 \\ q_1^0 \\ \vdots \\ q_{-N}^0 \\ q_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \quad \tilde{q}_N^1 = \tilde{q}_N(\tau) = \begin{pmatrix} q_{-1}^1 \\ q_1^1 \\ \vdots \\ q_{-N}^1 \\ q_N^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \quad (21)$$

$$q_n^0 = \overline{q_{-n}^0}, \qquad q_n^1 = \overline{q_{-n}^1}, \qquad n = \overline{1, N}.$$

Оптимальне керування для даної задачі має вигляд

$$\hat{u}_N(t) = (B_1 e^{i\omega_1 t}, B_{-1} e^{-i\omega_1 t}, \ldots, B_N e^{i\omega_N t}, B_{-N} e^{-i\omega_N t})\nu,$$

де

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_{-1}} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{B_N} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{B_{-N}} \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{-1}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{B_{-N}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{B_N} \end{pmatrix} (e^{-i\omega_N \tau}\tilde{q}_N^1 - \tilde{q}_N^0), \quad (22)$$

$$K=(K_{jk})_{j,k=1}^{N},\quad K_{jj}=\begin{pmatrix}\tau & \dfrac{i(e^{-2i\omega_j\tau}-1)}{2\omega_j}\\ \dfrac{i(1-e^{2i\omega_j\tau})}{2\omega_j} & \tau\end{pmatrix},\quad K_{jk}=i\begin{pmatrix}\dfrac{1-e^{i(\omega_k-\omega_j)\tau}}{\omega_k-\omega_j} & \dfrac{e^{-i(\omega_k+\omega_j)\tau}-1}{\omega_k+\omega_j}\\ \dfrac{1-e^{i(\omega_k+\omega_j)\tau}}{\omega_k+\omega_j} & \dfrac{1-e^{i(\omega_j-\omega_k)\tau}}{\omega_j-\omega_k}\end{pmatrix},\quad j\neq k.$$

У підрозділі 5.3 проведено оцінку множини досяжності системи (17) за допомогою сім'ї функцій, що відповідають скінченновимірним задачам оптимального керування, отриманих у лемі 1.

Так як оператор $A:D(A)\to\ell^2$ у системі (17) є інфінітезимальним генератором C_0 – напівгрупи лінійних операторів $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ у ℓ^2 на основі теореми Хіллє– Іосіди[1)], то для будь-яких $q^0\in\ell^2,\tau>0,u\in L^2(0,\tau),$ існує єдиний узагальнений розв'язок $q(t,q^0,u)$ рівняння (17) з $u=u(t),\,t\in[0,\tau],$ що задовольняє початкову умову $q|_{t=0}=q^0.$ Указаний розв'язок можна задати формулою:

$$q(t;q^0,u)=e^{tA}q^0+\int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,\quad 0\leq t\leq\tau.$$

Тоді множини досяжності для системи (17) мають вигляд:

$$R_\tau(q^0)=\{q^1\in\ell^2:q^1=q(\tau;q^0,u)\ \ \textit{при}\ \ u\in L^2(0,\tau)\},$$

$$R(q^0)=\bigcup_{\tau\geq 0}R_\tau(q^0).$$

Для формулювання основного результату про множини досяжності нескінченновимірної системи (17) нагадаємо, що комплексне або дійсне число χ називається алгебраїчним числом, якщо воно є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами, які одночасно не дорівнюють нулю.

Число n^* називається степенем алгебраїчного числа χ, якщо χ є коренем деякого многочлена степеня n^* з цілими коефіцієнтами, та не існує тотожно рівного нулю многочлена з цілими коефіцієнтами степені менше за n^*, коренем якого було б число χ.

Основним результатом підрозділу 5.3 є теорема про оцінку станів $q^1\in\ell^2$ системи (17), які є наближено досяжними з точки $q^0=0\in\ell^2.$

Теорема 4. *Нехай для системи (17) виконуються умови:*

1) $B_n\neq 0,\ \ n=\pm1,\pm2,\pm3,...;$ *2)* $\chi=\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$ *– алгебраїчне число степеня* $n^*\geq 2;$

3) Координати вектора $q^1=\left(q^1_{-1},q^1_1,q^1_{-2},q^1_2,...\right)^T\in\ell^2$ *задовольняють умови:*

$$q^1_{-n}=\overline{q^1_n},\quad |q^1_n|=O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right),\quad \gamma>\frac{3}{2}n^*+1,\ \textit{при всіх}\ n\in\mathbb{N}.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ *знайдуться такі числа* $\tau=\tau(\varepsilon)>0$ *і* $N(\varepsilon)\geq 1,$ *що*

$$\left\|q(\tau;0,\hat{u}_N)-q^1\right\|_{\ell^2}<\varepsilon,$$

[1)] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / Amnon Pazy. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 279 p.

де $\hat{u}_N(t)$ *– оптимальне керування для задачі (19)-(21), яке має вид*

$$\hat{u}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (B_n e^{i\omega_n t} \nu_{-n} + B_{-n} e^{-i\omega_n t} \nu_n), \quad t \in [0;\tau].$$

У підрозділі 5.4 застосування теореми 4 проілюстровано на прикладі системи диференціальних рівнянь (17) для десяти власних частот:

$$\dot{\tilde{q}}_{10} = A_{10}\tilde{q}_{10} + B_{10}u, \tag{23}$$

де матриці системи мають вигляд

$$\tilde{q}_{10} = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-10} \\ q_{10} \end{pmatrix}, \quad A_{10} = i \begin{pmatrix} \beta_{k_1 j_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{k_1 j_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{k_{10} j_{10}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{k_{10} j_{10}} \end{pmatrix}, \quad B_{10} = i \begin{pmatrix} -\varphi_{k_1 j_1} \\ \varphi_{k_1 j_1} \\ \vdots \\ -\varphi_{k_{10} j_{10}} \\ \varphi_{k_{10} j_{10}} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо задачу оптимального керування для підсистеми системи (23), яка відповідає трьом модам коливань

$$\dot{\tilde{q}}_3 = A_3\tilde{q}_3 + B_3\hat{u}(t) \tag{24}$$

з функціоналом якості

$$J = \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt \to \min \tag{25}$$

та крайовими умовами

$$\tilde{q}_3(0) = \tilde{q}_3^0 = 0 \in \mathbb{C}^6, \quad \tilde{q}_3(1) = \tilde{q}_3^1 = \left(q_{-1}^1, q_1^1, q_{-2}^1, q_2^1, q_{-3}^1, q_3^1\right)^T \in \mathbb{C}^6, \tag{26}$$

де обрано $\gamma = 4,\ \ q_p^1 = q_{-p}^1 = \dfrac{1}{p^\gamma}$ для $p = 1,2,3.$

Для чисельних розрахунків оберемо такі значення механічних параметрів:

$$l_1 = 1\,м, \quad l_2 = \sqrt[4]{2}\,м, \quad a_1 = 1\,м, \quad a_2 = -1\,м, \quad \alpha = 1\,\frac{м^2}{c}.$$

У підрозділі 5.4 отримано значення власних частот $\beta_{k_p j_p}$ по формулі (18) та обрано з них три найменші: $\beta_{k_1 j_1} \approx 16{,}849\ c^{-1}$, $\beta_{k_2 j_2} \approx 37{,}785\ c^{-1}$, $\beta_{k_3 j_3} \approx 7{,}679\ c^{-1}$.

Значення вектора ν_p з леми 1 за формулою (22) має вигляд:

$$\nu_p = \begin{pmatrix} -0{,}911 + 1{,}911i \\ -0{,}911 - 1{,}911i \\ 4{,}313 + 0{,}118i \\ 4{,}313 - 0{,}118i \\ -0{,}365 + 0{,}020i \\ -0{,}365 - 0{,}020i \end{pmatrix}.$$

Для обраних частот функція оптимального керування задачі (24)-(26) має вигляд:

$$\hat{u}_N(t) = 2(1{,}347\cos(16{,}848t) - 0{,}642\sin(16{,}848t)) -$$

$$-2(0{,}016\cos(37{,}785t) + 0{,}567\sin(37{,}785t)) + 2(0{,}005\cos(72{,}680t) - 0{,}086\sin(72{,}680t)).$$

Шляхом чисельного інтегрування отримано розв'язок $q_{10}(t)\in\mathbb{C}^{20}$ системи (23) з початковою умовою $q_{10}(0)=0\in\mathbb{C}^{20}$.

Рис. 2 підтверджує, що керування, які відповідають підсистемі (24) з трьома модами, можуть бути застосовані для наближеного розв'язку двоточкової задачі системи вищого порядку (системи (23)).

Для ілюстрації впливу кількості мод N підсистеми, що породжує функцію керування $\hat{u}_N(t)$ в умовах теореми 4, позначимо через $r_N=\left\|\tilde{q}_{10}(1;q_{10}^0,\hat{u}_N)-\tilde{q}_{10}^1\right\|$ похибку наближеного розв'язку двоточкової задачі з $\tilde{q}_{10}(0)=q_{10}^0$, $\tilde{q}_{10}(1)=q_{10}^1$ для системи (23) з 10 модами при застосуванні оптимальних (у сенсі леми 1) керувань $u=\hat{u}_N(t)$, $t\in[0,1]$, що відповідають підсистемам системи (23) з N модами ($1\le N\le 5$).

Рис. 3 показує, що похибка r_N монотонно спадає при зростанні N, а величина r_3 є ординатою графіка функції з Рис. 2 при $t=1$.

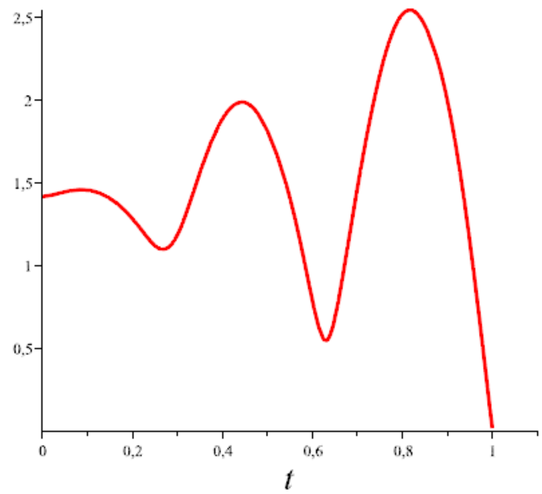

Рис. 2. Графік норми розв'язку $\left\|\tilde{q}_{10}(t)-\tilde{q}_{10}^1\right\|$.

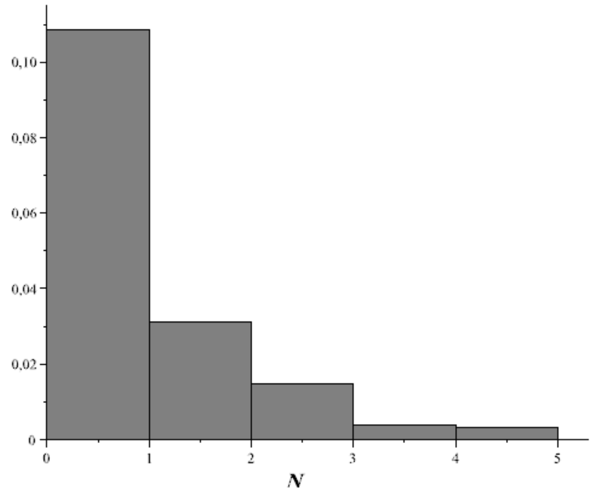

Рис. 3. Залежність похибки r_N *від кількості мод наближеної підсистеми.*

Результати розділу 5 опубліковано у роботах [3], [9].

У шостому розділі розглянуто систему (6) в операторному вигляді:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad x\in\ell^2,\quad u\in\mathbb{R}^2, \tag{27}$$

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\\ \xi_2\\ \eta_2\\ \vdots\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \dots\\ 0 & A_2 & \dots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\end{pmatrix},\ u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix},$$

$$A_n=\begin{pmatrix}0 & \beta_n\\ -\beta_n & 0\end{pmatrix},\ B_n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varphi_n & g_n\end{pmatrix},\ n=1,2,\dots,$$

та введено функціонал $V(x)=\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\xi_n^2+\eta_n^2\right)$, який діє з ℓ^2 в $\mathbb{R}$, де $S=\{n\,|\,\varphi_n^2+g_n^2=0\}$.

Похідна функціонала V в силу системи (27) має вигляд:

$$\dot V = 2\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\xi_n\dot\xi_n+\eta_n\dot\eta_n\right)=2u_1\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\eta_n\varphi_n\right)+2u_2\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\eta_n g_n\right).$$

З останньої рівності та умови $\dot V \le 0$ визначимо функціонали керування зі зворотним зв’язком:

$$u_1 = v_1(x) = -\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n\eta_n, \qquad u_2 = v_2(x) = -\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}g_n\eta_n, \qquad (k_1\ge 0,\, k_2\ge 0). \tag{28}$$

Основним результатом підрозділу 6.2 є наступна теорема про часткову асимптотичну стабілізацію.

Теорема 5. *Нехай* $k_1>0$ *і* $k_2>0$. *Тоді керування зі зворотним зв'язком* $u_1=v_1(x)$ *і* $u_2=v_2\left(x\right)$, *представлені у вигляді (28), забезпечують асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи (27) по відношенню до функціонала* $y(x)=\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\xi_n^2+\eta_n^2\right)\right)^{1/2}$ у ℓ^2.

Результати підрозділів 6.1 та 6.2 опубліковані у роботах [4], [6].

У підрозділі 6.3 розглянуто нелінійну модель обертального руху навколо нерухомої точки для механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини. Модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

рівнянням зміни кінетичного моменту

$$\dot K + \omega\times K = M, \tag{29}$$

рівнянням коливань пластини

$$\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2}+\alpha^2\Delta^2 w(x_1,x_2,t)=(x_1+d_1)\dot\omega_2-(x_2+d_2)\dot\omega_1, \tag{30}$$

з крайовими умовами

$$w(x_1,x_2,t)\,|_{\partial\Omega}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0,\,x_1=l_1}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0,\,x_2=l_2}=0, \tag{31}$$

та кінематичними рівняннями Пуассона

$$\dot g_i = -\omega\times g_i, \qquad i=\overline{1,3}. \tag{32}$$

Для системи (29)-(32) одержано керування зі зворотним зв’язком у вигляді $M=\left(f_1^{\xi}, f_2^{\xi}, f_3^{\xi}\right)^T$, і відповідну замкнену систему представлено абстрактним диференціальним рівнянням в операторному вигляді

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = F\xi(t), \tag{33}$$

де $\xi(t) \in H$ – стан системи, $F : D(F) \to H$ – нелінійний необмежений оператор.

Оператори $F = A + BG,\ \ A : D(A) \to H,\ \ B : \mathbb{R}^3 \to H$ та $G : H \to \mathbb{R}^3$ представлені наступним чином:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} u^{\xi} \\ v^{\xi} \\ \omega^{\xi} \\ \tilde{g}^{\xi} \end{pmatrix} \in H, \quad B : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \mapsto Bf = \begin{pmatrix} u^f \\ v^f \\ \omega^f \\ \tilde{g}^f \end{pmatrix} \in H,$$

$$G : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto f = G\xi = \begin{pmatrix} f_1^{\xi} \\ f_2^{\xi} \\ f_3^{\xi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{34}$$

де $H = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^{12}$ – гільбертів простір. Детальні вирази для компонент формул (34) наведено у підрозділі 6.4.

Область визначення інфінітезимального генератора у рівнянні (33) має вигляд

$$D(F) = D(A) = \left\{ \xi \in H \,|\, u \in \overset{\circ}{H}{}^4(\Omega), v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega), \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Основним результатом підрозділів 6.3 та 6.4 є теорема про дисипативність нелінійного оператора.

Теорема 6. *Оператор* $F : D(F) \to H$ *у (33) є дисипативним,* $\overline{D(F)} = H$.

Введено одиничний оператор I_H у гільбертовому просторі H. Якщо при деякому $\lambda > 0$ образ оператора $I_H - \lambda F$ співпадає з H, а F – замкнений, то оператор F є інфінітезимальним генератором неперервної напівгрупи нелінійних операторів $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ в H. Тоді узагальнений розв'язок задачі Коші для рівняння (33) з початковими умовами $\xi(0) = \xi^0$ визначено формулою

$$\xi(t) = S(t)\xi^0, \quad t \geq 0,$$

для будь-якого $\xi^0 \in H$, і такий розв'язок є класичним при $\xi^0 \in D(F)$.

З теореми 6 випливає, що розв'язок $\xi = 0$ абстрактного диференціального рівняння (33) є стійким за Ляпуновим.

Результати підрозділів 6.3 та 6.4 опубліковано у роботах [5], [10].

ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано задачі керування та стабілізації руху для механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Крім того, розвинуто метод модального аналізу для оцінки множини досяжності системи, що описує динаміку досліджуваної моделі. Перерахуємо найбільш важливі наукові результати, отримані у дисертації.

1. За допомогою принципу Д'Аламбера побудовано математичну модель керованого руху механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини, та зведено отримані рівняння руху в частинних похідних до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь.

2. Уперше встановлено умови керованості моделі коливань пластини з довільною скінченною кількістю модальних координат та доведено теорему про спектральну керованість нескінченновимірної системи, що описує пластину Кірхгофа.

3. Розглянуто математичну модель пластини Кірхгофа з урахуванням обертального руху її поперечного перерізу та за допомогою принципу максимуму Понтрягіна уперше одержано оптимальне керування для досліджуваної системи з довільною фіксованою кількістю мод коливань.

4. Уперше побудовано оцінку множини досяжності нескінченновимірної моделі коливань пластини з використанням гладких функцій керування, що задовольняють умови оптимальності для скінченновимірних підсистем.

5. Розв'язано задачу часткової стабілізації стану рівноваги нескінченновимірної моделі коливань пластини Кірхгофа за допомогою лінійного функціонала керування зі зворотним зв'язком.

6. Уперше запропоновано нелінійну математичну модель обертального руху тіла з пружною пластиною у вигляді операторного диференціального рівняння у гільбертовому просторі з урахуванням кінематичних рівнянь Пуассона відносно трьох незалежних ортів. Побудовано функціонали керування зі зворотним зв'язком, що забезпечують сильну стійкість стану рівноваги за Ляпуновим.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зуев А.Л. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Механика твердого тела. – 2011. – Т. 41. – С. 187-198.
2. Зуев А.Л. Оптимальное управление моделью пластины Кирхгофа / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Механика твердого тела. – 2012. – Т. 42. – С. 163-176.
3. A.L. Zuev Estimation of the reachable set for the problem of vibrating Kirchhoff plate / A.L. Zuev, Yu.V. Novikova // Ukrainian Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 66, No. 11. – P. 1639-1653.
4. Зуев А.Л. Стабилизация колебаний пластины Кирхгофа с помощью обратной связи по состоянию / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 62-75.
5. Зуев А.Л. Стабилизация движения вращающегося тела с упругой пластиной / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – Т. 11. – № 4. – С. 111-123.
6. Новікова Ю.В. Стабілізація коливань механічної системи з пружною пластиною / Ю.В. Новікова, О.Л. Зуєв // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 149-162.

7. Zuyev A.L. On the controllability of a vibrating plate model / A.L. Zuyev., Yu.V. Novikova // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD XI): XI Междунар. конф., 8-12 июня 2011 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2011. – С. 145-146.
8. Новикова Ю.В. Управление колебаниями пластины Кирхгофа / Ю.В. Новикова // Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія: V Міжнар. наук.-практ. конф. молодих учених, аспірантів, студентів, 12-13 трав. 2011 р.: тези допов. – Донецьк: Державний університет інформатики і штучного інтелекту, 2011. – С. 319-324.
9. Зуев А.Л. Оценка множества достижимости бесконечномерной колебательной системы с несоизмеримыми частотами / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Dynamical system modeling and stability investigation (DSMSI-2015): Междунар. конф., 27-29 мая 2015 г.: тезисы докл.– Киев: Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, 2015. – С. 41.
10. Новікова Ю.В. Стабілізація руху твердого тіла з пружною пластиною / Ю.В. Новікова // Міжнародна конференція молодих математиків: 3-6 черв. 2015 р.: тези допов. – Київ: Інститут математики НАН України, 2015. – С. 108.

АНОТАЦІЇ

Новікова Ю.В. Керування коливаннями та редукція моделей механічних систем з пружними пластинами. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Дисертаційну роботу присвячено задачам керування та стабілізації обертального руху механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Для цієї системи у роботі запропоновано схему зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою критерію Калмана доведено керованість моделі у скінченновимірному фазовому просторі та сформульовано умови спектральної керованості. Розв’язано задачу оптимального керування з квадратичним функціоналом якості для моделі Кірхгофа, в якій враховано інерцію обертання перетину пластини.

Побудовано оцінку множини досяжності нескінченновимірної динамічної системи із застосуванням класу оптимальних керувань, що відповідають скінченновимірним апроксимаціям.

Для нескінченної системи диференціальних рівнянь, представленої у комплексних змінних, побудовано функції керування зі зворотним зв’язком, які залежать від узагальнених швидкостей. Доведено теорему про часткову асимптотичну стійкість стану рівноваги системи зі зворотним зв’язком по відношенню до функціоналу спеціального вигляду.

Уперше розглянуто задачу синтезу трьох незалежних керувань зі зворотним зв’язком за станом для гасіння коливань та стабілізації стану рівноваги нелінійної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Представлено опера-

торне зображення системи у вигляді абстрактного диференціального рівняння у гільбертовому просторі та встановлено дисипативність відповідного інфінітезимального генератора. Доведено стійкість за Ляпуновим стану рівноваги системи.

Ключові слова: пластина Кірхгофа, керованість, задача оптимального керування, множина досяжності, керування зі зворотним зв’язком, асимптотична стійкість, інфінітезимальний генератор.

Новикова Ю.В. Управление колебаниями и редукция моделей механических систем с упругими пластинами. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертационная работа посвящена задачам управления и стабилизации движения механической системы, которая состоит из вращающегося твердого тела и тонкой упругой пластины.

В работе построена математическая модель колебаний упругой пластины, которая шарнирно закреплена на границе своей области относительно твердого тела-носителя. В модели учтены силы инерции, связанные с переносным движением твердого тела. Проведено сведение уравнений движения в частных производных к бесконечной системе дифференциальных уравнений с помощью метода Фурье. Впервые с помощью критерия Калмана получены условия управляемости механической системы для произвольного конечного набора модальных координат, а также условия спектральной управляемости.

Для модели Кирхгофа, в которой учтен полярный момент инерции поперечного сечения, решена задача оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина. Для решения этой задачи построены функции управления в явном виде для произвольного фиксированного количества мод колебаний.

Система дифференциальных уравнений, которая описывает динамику упругой механической системы с модальными координатами, сведена к диагональной системе в комплексных переменных. С помощью метода модального анализа проведена оценка множества достижимости бесконечномерной системы. Основным предположением, которое обеспечивает минимальность нормы решений подсистемы с низкочастотными модами, является условие алгебраичности числа $\chi = l_2^2 / l_1^2$, где l_1 и l_2 – стороны прямоугольной пластины. На численном примере показана возможность применения функций оптимального управления системы с малым числом мод для приближенного решения двухточечной задачи многомерной системы.

Для линейной системы построено управление с обратной связью, которое обеспечивает частичную асимптотическую устойчивость тривиального состояния равновесия системы по отношению к функционалу специального вида. Также в работе предложено операторное представление уравнений вращательного движения тела с упругой пластиной, которое описывает нелинейную динамику тела-носителя и малые колебания пластины. Полученное операторное дифференциальное уравнение соответствует модели с тремя независимыми управляющими моментами. Для нелинейной бесконечномерной системы предложено управление с обратной связью, ко-

торое обеспечивает устойчивость по Ляпунову состояния равновесия, при этом установлена диссипативность инфинитезимального генератора для соответствующего абстрактного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, управляемость, задача оптимального управления, множество достижимости, управление с обратной связью, асимптотическая устойчивость, инфинитезимальный генератор.

Novikova Yu.V. Control of vibrations and model reduction for mechanical systems with elastic plates. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree (physical and mathematical sciences) by speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The dissertation is devoted to problems of motion control and stabilization of the mechanical system consisting of a rigid body and a thin elastic plate. A reduction scheme that allows transforming the equations of motion with partial derivatives to an infinite system of ordinary differential equations is proposed. Controllability conditions are obtained for a model in a finite dimensional state space. Conditions of spectral controllability are studied as well. A mathematical model of the Kirchhoff plate with the rotational inertia of its cross section is considered. For such a model, a system of ordinary differential equations with finite numbers of modal coordinates is derived, and the optimal control problem with a quadratic cost is solved.

We consider a dynamical system with distributed parameters in order to describe controlled vibrations of the Kirchhoff plate. A class of optimal controls corresponding to its finite-dimensional approximations is used to study the reachable set. Analytic estimates of the norm of these control functions are obtained depending on the boundary conditions. These estimates are used to study the reachable set for the infinite-dimensional system.
For a model with incommensurable frequencies, an estimate of the reachable set is obtained under the condition of power decay of the amplitudes of generalized coordinates.

Feedback control functionals, depending on the generalized velocities, are constructed for the system considered. A theorem on the partial asymptotic stability of the equilibrium of the closed-loop system is proved. A mechanical system consisting of a rigid body and an elastic Kirchhoff plate is considered under the action of three independent controls. The equations of motion for a nonlinear model are derived in the form of a system of ordinary and partial differential equations. The operator form of this problem is presented as an abstract differential equation in a Hilbert space. A feedback control law is constructed such that the corresponding infinitesimal generator of the closed-loop system is dissipative.

Key words: Kirchhoff plate, controllability, optimal control problem, reachable set, feedback control, asymptotic stability, infinitesimal generator.

Підп. до друку 11.12.2015. Формат $60\times84/16$. Папір друк. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2. Тираж 100 прим. Зам. 14.

Надруковано в ФОП «Лисенко О.В.»
Адреса: м. Красноармійськ, вул. Шота, 189.