Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Новікова Юлія Вікторівна

УДК 531.39, 517.977

Керування коливаннями та редукція моделей механічних систем з пружними пластинами

01.02.01 — теоретична механіка

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Зуєв Олександр Леонідович,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ — 2015

ЗМІСТ

Вступ **5**

Розділ 1. **Огляд літератури** **12**

1.1. Математичні моделі коливання пружних пластин 12

1.2. Моделювання руху космічних апаратів з пружними елементами 18

1.3. Задачі керування рухом та стабілізації механічних систем з пружними елементами 24

1.4. Стабілізація руху твердого тіла, що обертається 29

1.5. Висновки 32

Розділ 2. **Методика досліджень** **34**

2.1. Рівняння відносного руху механічної системи 34

2.1.1. Теорема про додавання прискорень у системі координат, що обертається 34

2.1.2. Принцип Д'Аламбера 37

2.2. Задачі керованості та оптимального керування лінійними системами 38

2.2.1. Керованість лінійних систем 38

2.2.2. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з інтегральним функціоналом якості 40

2.3. Застосування теорії напівгруп лінійних операторів до систем із розподіленими параметрами 42

2.4. Функціонали Ляпунова зі знакосталою похідною у задачах стійкості руху нелінійних механічних систем 46

Розділ 3. **Спектральна керованість пластини Кірхгофа** **52**

3.1. Модель керованого руху механічної системи з пружною пластиною 52

3.2. Зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь 55
3.3. Умови керованості моделі коливань пластини з нескінченною кількістю модальних координат 59
3.4. Модельний приклад 66
3.5. Висновки 68

Розділ 4. **Оптимальне керування коливаннями пластини Кірхгофа** **69**
4.1. Модель Кірхгофа з урахуванням моменту інерції перерізу пластини 69
4.2. Задача оптимального керування 72
4.3. Результати чисельного моделювання 78
4.4. Висновки 82

Розділ 5. **Оцінка множини досяжності у задачі про коливання пластини Кірхгофа** **83**
5.1. Опис нескінченновимірної динамічної системи у комплексних змінних 83
5.2. Задача оптимального керування для динамічної системи у комплексних змінних 85
5.3. Оцінка множини досяжності нескінченновимірної системи . . . 92
5.4. Модельний приклад 101
5.5. Висновки 105

Розділ 6. **Стабілізація руху твердого тіла з пружною пластиною** **106**
6.1. Синтез функцій керування зі зворотним зв'язком 106
6.2. Асимптотична стійкість замкненої системи 108
6.3. Нелінійна модель обертального руху пружної системи навколо нерухомої точки 119
6.4. Стійкість за Ляпуновим стану рівноваги пружної системи . . . 126
6.5. Висновки 130

Заключні висновки **131**

Список використаних джерел **133**

ВСТУП

Актуальність теми. Прогрес аерокосмічної галузі обумовлює високу актуальність досліджень з питань керованості та стабілізації руху сучасних космічних апаратів. Такі космічні апарати представляють собою складні механічні об'єкти, що моделюються системами з'єднаних між собою абсолютно твердих і деформівних тіл. Абсолютно твердими тілами можна моделювати, зокрема, основний приладовий відсік, двигун-маховик і системи вимірювання. Деформівними тілами виступають панелі сонячних батарей, антени, гравітаційні штанги та штанги з науковими приладами, рефлектори, телескопи з довгофокусними об'єктивами тощо. До 1970-х років XX століття керування космічними апаратами формувалося переважним чином на основі інформації про стан тільки твердих елементів системи. При цьому, як правило, можливо шукати лише компромісні розв'язки. Так, наприклад, для зменшення впливу пружності панелей сонячних батарей на динаміку тіла-носія необхідно зробити їх більш жорсткими або зменшити в розмірах. А це призводить до збільшення маси панелей батарей або до зменшення кількості енергії, яку вони синтезують. Також збільшується тривалість активного функціонування космічного апарата на орбіті, що в свою чергу викликає збільшення енергетичних витрат. У таких умовах компромісні розв'язки можуть не існувати.

У роботах Л.В. Докучаєва, В.М. Рубановського, P. Linkins та інших встановлено, що пружні елементи конструкції суттєво впливають на динаміку системи, тому задачі керування і стабілізації для абсолютно твердих тіл несуть лише наближену інформацію та не дають повного уявлення про рух системи. Коливання пружних конструкцій заважають приведенню космічного апарата до заданої орієнтації, забезпеченню стабілізації виносних елементів та космічного апарата в цілому на орбіті функціонування. А це означає, що новітні алгоритми повинні забезпечувати стабілізацію руху не тільки твердих, а й

пружних елементів. Тому питання, спрямоване на розробку нових, більш ефективних алгоритмів керування, які забезпечать високу точність стабілізації без збільшення жорсткості пружних елементів, стає дуже актуальним. Саме тому предметом дослідження дисертаційної роботи є проблеми керування та стабілізації коливань механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Найбільш поширеною математичною моделлю коливань пружної пластини є модель Кірхгофа [1, 2], яка розглядається у подальших теоретичних дослідженнях. Модель пластини Кірхгофа, зокрема, має переваги перед моделлю Коші-Пуассона, оскільки є більш наочною та має високу фізичну ясність. У теорію Кірхгофа включено поняття про внутрішні сили та моменти, що наближає її до теорії балок та дає можливість ефективно формулювати граничні умови для пластин у задачах керування [3].

Проблеми динаміки систем тіл, які мають пружні та дисипативні елементи, задачі керування їх рухом і стабілізації досліджувались у роботах В.І. Гуляєва, Я.О. Жука, Ю.М. Кононова, В.Д. Кубенка, В.Б. Ларіна, Д.В. Лебедєва, О.С. Лимарченка, І.О. Луковського, А.І. Лур'є, М.К. Набіулліна, В.В. Новицького, О.В. Пироженка, Є.М. Потапенка, В.С. Хорошилова, Ф.Л. Черноуська, M. Bradley, G. Cai, L. Chen, B. Jacob, J.E. Lagnese, S. Lenhart, G. Leugering, J. Pan, J.R. Partington та інших авторів.

У сучасній теорії керування механічними системами з мембранами та пластинами важливе місце займають задачі стабілізації руху з урахуванням нескінченного спектру коливань пружних елементів. Ефективним методом дослідження задач стійкості та синтезу керувань для цих систем із розподіленими параметрами є прямий метод Ляпунова, який отримав розвиток у роботах В.І. Зубова, В.І. Коробова, А.А. Мартинюка, В.М. Матросова, О.А. Мовчана, В.В. Румянцева, Т.К. Сіразетдінова, О.О. Шестакова, J.-M. Coron, J.P. LaSalle та ін.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з Планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України

та відділення прикладних проблем сучасного аналізу Інституту математики НАН України на 2011-2015 роки. Дисертант приймав участь у виконанні НДР "Розробка конструктивних методів теорії керування і стійкості із застосуванням до задач машинобудування" (держ. реєстр. № 0111U000483), "Керування моделями мехатронних систем із застосуванням до задач навігації космічних апаратів і стабілізації робототехнічних комплексів" (держ. реєстр. № 0112U000029), "Оптимальна реалізація відображень вхід-вихід для динамічних процесів у задачах керування та інформаційних технологіях" (держ. реєстр. № 0111U007074).

Мета та завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* дисертаційної роботи є механічна система, яка складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа.

Предметом дослідження виступають задачі керування та стабілізації руху механічної системи з пластиною.

Основною метою дослідження є визначення умов керованості та стабілізації руху механічної системи, що складається з абсолютно твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити ряд завдань. До цих завдань належить побудова математичної моделі керованого руху механічної системи, що складається з абсолютно твердого тіла та пружної пластини, та зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Наступним завданням є визначення умов керованості моделі коливань пластини у скінченновимірних і нескінченновимірному фазових просторах.

Ще одним завданням є розв'язання задачі оптимального керування для моделі Кірхгофа з довільною фіксованою кількістю мод коливань з урахуванням моменту інерції перерізу пластини, а також дослідження множини досяжності нескінченновимірної динамічної системи з непорівнянними частотами у класі функцій керування спеціального вигляду.

Наступними завданнями є синтез керування зі зворотним зв'язком та доведення стійкості тривіального розв'язку відповідної замкненої системи, яка

описує коливання пружної пластини і твердого тіла.

Методи дослідження. Методи аналітичної механіки використовуються при дослідженні рівнянь динаміки пластини з урахуванням переносного руху твердого тіла. Дослідження керованості системи здійснюється методами математичної теорії керування. Для оцінки множини досяжності застосовані деякі результати функціонального аналізу, зокрема, теорія напівгруп операторів у гільбертових просторах. Для встановлення стійкості тривіального розв'язку застосовано метод функціоналів Ляпунова. Достовірність отриманих законів керування проілюстровано також результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху.

Наукова новизна отриманих результатів визначається наступними положеннями. У дисертаційній роботі побудовано та досліджено математичну модель обертального руху механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини. Особливість моделі полягає в тому, що пластина шарнірно закріплена на границі області, а керування відповідає кутовому прискоренню тіла-носія. Така система відрізняється, зокрема, від математичних моделей супутників, в яких панелі сонячних батарей прикріплені жорстко. Для отриманої моделі запропоновано схему зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Уперше за допомогою критерію Калмана доведено теорему про керованість даної моделі для довільного скінченного набору узагальнених координат, а також теорему про спектральну керованість.

Уперше розв'язано задачу оптимального керування для моделі Кірхгофа з довільною фіксованою кількістю мод коливань, в якій враховано момент інерції перерізу пластини. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна доведено теорему про оптимальне керування для досліджуваної механічної системи.

Для моделі коливань пружної пластини з нескінченною кількістю ступенів вільності отримано функції керування зі зворотним зв'язком, які розв'язують задачу стабілізації тривіального стану рівноваги. Уперше доведено теорему

про асимптотичну стійкість нульового розв'язку відповідної нескінченної системи диференціальних рівнянь по відношенню до функціоналу спеціального вигляду.

Уперше побудовано оцінку множини досяжності нескінченновимірної динамічної системи, що описує коливання пружної пластини, із використанням сім'ї гладких функцій керування. Цей результат доведено із застосуванням методу модального аналізу у припущенні, яке забезпечує мінімальність норми розв'язків підсистеми з низькочастотними модами.

Уперше розглянуто задачу синтезу трьох незалежних керувань зі зворотним зв'язком за станом для гасіння коливань та стабілізації стану рівноваги нескінченновимірної механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини. Встановлено дисипативність інфінітезимального генератора відповідного абстрактного диференціального рівняння і доведено стійкість за Ляпуновим досліджуваного стану рівноваги.

Практичне значення отриманих результатів. Одержані в дисертації результати мають переважно теоретичне значення. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії керування пружними космічними системами та стійкості руху механічних систем із розподіленими параметрами. Деякі результати можна рекомендувати до застосування в інженерній практиці для проектування систем керування рухом космічних апаратів з пружними елементами.

Особистий вклад здобувача. Статті [4–9] опубліковано спільно з науковим керівником, професором О.Л. Зуєвим, якому належать постановки задач та обговорення отриманих результатів.

Результати розділу 3 висвітлено у статті [4]. Здобувачеві належить доведення теореми про спектральну керованість механічної системи для довільного скінченного набору координат і аналіз модельного прикладу.

Результати розділу 4 опубліковано у статті [5]. Особистий вклад здобувача полягає у доведенні теореми про існування оптимального керування для моделі коливань пластини Кірхгофа з довільною кількістю пружних мод.

Результати розділу 5 представлено у статті [6]. Здобувачеві належить доведення теореми про оцінку множини досяжності нескінченновимірної системи, яка описує коливання прямокутної пластини.

Результати розділу 6 висвітлено у статтях [7–9]. Здобувачем отримано функції керування зі зворотним зв'язком та доведено теорему про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку нескінченновимірної системи по відношенню до функціоналу спеціального вигляду. Також особистий вклад здобувача полягає в отримані математичної моделі руху механічної системи, що складається з твердого тіла і пружної пластини, у вигляді нелінійного диференціального рівняння у нескінченновимірному просторі. Для отриманої системи знайдено керування у вигляді зворотного зв'язку за станом, а також доведено теорему про дисипативність інфінітезимального генератора.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

— Науковій конференції студентів математичного факультету Донецького національного університету, Донецьк, 2011 р.;

— V Міжнародній науково-практичній конференції молодих науковців, аспірантів, студентів "Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія", Донецьк, 2011 р.;

— Міжнародній конференції "Стійкість, керування і динаміка твердого тіла" (ICSCD XI), Донецьк, 2011 р.;

— V Міжнародній науково-технічній конференції "Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій", Запоріжжя, 2015 р.;

— Міжнародній конференції "Моделювання і дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI XVII), Київ, 2015 р.;

— Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 2015 р.;

— Семінарах із загальної механіки ІПММ НАН України, Донецьк, 2013 та 2014 рр.(керівник – академік НАН України О.М. Ковальов).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на:

— Спільному семінарі відділу технічної механіки Інституту прикладної

математики і механіки НАН України та відділення прикладних проблем сучасного аналізу Інституту математики НАН України за участю кафедри математики ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет", Слов'янськ, 2015 р. (керівники – чл.-кор. НАН України В.Я. Гутлянський, проф. І.І. Скрипник, проф. С.М. Чуйко);

— Семінарі "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика" Інституту математики НАН України, Київ, 2015 р. (керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л. Макаров).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 10 роботах [4–13], серед яких 6 статей у фахових наукових журналах та збірниках, 4 роботи у матеріалах міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків та переліку використаних джерел зі 134 найменувань. Обсяг дисертаційної роботи становить 146 сторінок друкованого тексту. У роботі міститься 7 рисунків.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Математичні моделі коливання пружних пластин

Перші наукові дослідження з теорії пружних пластин і мембран належать Леонарду Ейлеру [14]. У працях Петербурзької Академії наук у 1766 році було опубліковано перше наукове дослідження з теорії пружних пластин. У статті Ейлера було досліджено власні коливання мембран прямокутної та круглої форми. Прямокутна мембрана розглядалася Ейлером як система взаємно перпендикулярних пружних ниток. Для такої моделі Ейлером було отримано диференціальне рівняння коливань

$$\frac{ddz}{dt^2} = ee\frac{ddz}{dx^2} + ff\frac{ddz}{dy^2},$$

де часткові похідні позначаються символами $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$; ee та ff – константи, які відповідають натягу мембрани вздовж осей x та y, z – прогин.

У роботі Якова Бернуллі молодшого в 1789 році було викладено теорію коливань прямокутної пружної пластини при малих прогинах [15]. Отримане ним диференціальне рівняння для прогину мало вигляд:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{z}{c^4},$$

де c – константа, яка залежить від жорсткості пластини та частоти коливань. У рівнянні Бернуллі відсутній член $2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$, який відповідає за кручення пластини.

Уявлення про пластину як систему балок у 1811 році представила французький математик Софі Жермен, але отримане нею диференціальне рівняння також було неповним [16]. Слідуючи роботі Л. Ейлера про перегин балок, С. Жермен спробувала отримати диференціальне рівняння перегину

пластини з виразу енергії деформації. Однак побудований нею функціонал не відповідав потенціальній енергії пластини. Одним з рецензентів роботи С. Жермен був Ж. Лагранж, який виправив помилку і отримав правильне диференціальне рівняння вигину пластини. Запис рівняння було знайдено у 1813 році у рукописах Лагранжа [17].

У 1828 р. О. Коші та С. Пуассон у 1829 р. підійшли до розв'язування задачі вигину пластини, використовуючи основні рівняння теорії пружності. Вони розкладали всі напруження та переміщення в ряд за степенями відстаней точок від серединної поверхні пластини. З цих розв'язків при мінімально можливій кількості членів ряду було отримано розв'язок С. Жермен. А при більшій кількості членів можна отримувати точніші результати, навіть для товстих пластин.

Пізніше у працях ряду вчених (і перш за все Л. Нав'є та Г. Кірхгофа) було сформульовано вихідні положення теорії пластин, уточнено крайові умови та розв'язано багато часткових задач.

Л. Нав'є у 1823 р. вивів диференціальне рівняння рівноваги пластини, вважаючи, що складова переміщення, яка є паралельною до серединної площини, пропорційна відстані від неї. Це рівняння використано для розв'язку задачі перегину прямокутної пластини, на якій рівномірно розподілено напруження або сконцентровано силу, прикладену в центрі пластини. Для розв'язання такої задачі сформульовано крайові умови, а розв'язок отримано у вигляді подвійного тригонометричного ряду.

У 1850 році побачила світ перша робота Г.Р. Кірхгофа з теорії пластин, де було отримано рівняння Лагранжа-Жермен з двома крайовими умовами. Розглядаючи розтяг координати товщини, Кірхгоф ввів малий параметр у рівняння рівноваги та кінематичні рівняння. Таким чином, було отримано асимптотичні порядки змінних у головних членах та одержано апроксимації для переміщень по координаті товщини з кінематичних рівнянь. Результатом виконаних перетворень є двовимірний функціонал, з якого було виведено рівняння вигину пластини та дві крайові умови.

У роботі “Механика. Лекции по математической физике” [18] Густав Кірхгоф поставив задачу — побудувати теорію пластин для випадку, коли переміщення є значно більшими у порівнянні з товщиною пластини. Склавши вираз для елементарної роботи сил у серединній поверхні та сил вигину, Кірхгоф співставив порядок різних членів і встановив, що в такому випадку відкидати нелінійні члени у формулах для деформацій серединної поверхні не можна. Далі Кірхгоф використав принцип можливих переміщень. Перетворюючи варіації енергії системи, він мав отримати диференціальні рівняння рівноваги та статичні крайові умови. Однак, він не записав рівняння рівноваги в остаточному вигляді, але всі попередні викладки було зроблено. Його теорія одразу отримала визнання та використовується і сьогодні.

Сучасну теорію пластин можна пов’язати з працями А. Лява (1888), Х. Лемба (1890) та А. Бессета (1892). Згідно теорії Кірхгофа-Лява, прямолінійні волокна пластини, що перпендикулярні до її серединної поверхні до деформації, залишаються такими ж до вигнутої серединної поверхні після деформації, а нормальні напруження на площинах, паралельних до серединної поверхні, є малими у порівнянні з іншими напруженнями. Також зроблено припущення, що матеріал пластини задовольняє закон Гука і є ізотропним. При цих припущеннях, функція, що описує серединну поверхню пластини, не залежить від поздовжніх переміщень та задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку.

Можна зробити висновок, що у другій половині XIX століття були зроблені перші кроки у дослідженні пружних пластин. Але для практичних розрахунків загальні рівняння залишалися занадто складними. Необхідність у розробці технічної теорії пружних пластин виникла на початку XX століття у зв’язку з розвитком кораблебудування та космічної індустрії.

В першій половині XX століття була опублікована робота А.І. Лур’є [19], в якій запропоновано тензорне зображення рівнянь теорії оболонок, що базується на теорії Кірхгофа-Лява. Пізніше в роботах А.І. Лур’є, В.В. Новожилова було досліджено питання похибки гіпотез Кірхгофа-Лява, що стало

наступною сторінкою у дослідженні теорії оболонок.

Подальші етапи досліджень пов'язано з побудовою розв'язків крайових задач теорії пружних пластин та оболонок. Перші спроби були спрямовані на отримання точних розв'язків крайових задач, що виявилося можливим лише для окремих випадків пластин і оболонок достатньо простих геометричних форм, рівняння яких мали наближений характер. У книзі А.І. Лур'є [20] докладно описано застосування асимптотичного методу до побудови розв'язків крайових задач. Також асимптотичні методи інтегрування рівнянь теорії оболонок були запропоновані у роботах В.В. Новожилова, К.Ф. Черних та А.Л. Гольденвейзера.

Зокрема, у книзі В.В. Новожилова [3] розглянуто та узагальнено лінійну та нелінійну теорії оболонок. Проведено аналіз розвитку теорії пластин і оболонок, починаючи з робіт О. Коші та закінчуючи роботами Е. Рейсснера. У книзі особлива увага приділена теорії пружних тонких оболонок, представлено комплексне перетворення диференціальних рівнянь, що описують оболонки у випадку, коли коефіцієнт Пуассона дорівнює нулю. Також досліджено рівняння теорії циліндричних оболонок та оболонок обертання, для яких проведено розрахунок напружень.

У монографії В.Д. Кубенка [21] досліджено питання нелінійних деформацій циліндричних оболонок, що виникають у результаті дії на них динамічних навантажень. Розглянуто хвильові форми руху оболонок та побудовано частотні характеристики вимушених і параметрично збурених коливань. Встановлено області динамічної нестійкості кругової оболонки та наведено асимптотичні методи дослідження квазілінійних систем. Також розглянуто деякі питання взаємодії форм та частот коливань оболонки, що частково заповнена рідиною.

У 7 розділі монографії J.E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt [22] отримано рівняння руху системи тонких пружних пластин та встановлено умови, за яких порушення в одному елементі системи впливає на інші складові. Виведено рівняння руху та граничні умови для загального вигляду не-

лінійної пластини, яка відповідає принципу Гамільтона. Проведено лінеаризацію рівнянь навколо положення рівноваги, у результаті чого виникають моделі типу Рейсснера або Рейсснера-Міндліна. Досліджено динамічні системи, що описують поведінку сукупності пластин, які є результатом мінімізації Лагранжиана за класом деформацій. Також у книзі розглянуто системи у випадку напівжорсткого з'єднання, коли модулі зсуву прямують до нескінченності, що відповідає відсутності поперечного зсуву. Ще одним питанням дослідженим у роботі є точна керованість системи, що складається з послідовно з'єднаних пластин типу Рейсснера.

У роботі [23] досліджено поведінку пружних систем з односторонньою зовнішньою взаємодією, яка задається у вигляді функцій, що визначені нерівностями відносно невідомих змінних. Побудовано нелінійну дискретну модель досліджуваної системи та аналітично-числовий метод її розв'язання. Також розглянуто випадок коливань пружних систем змінної жорсткості з односторонньою взаємодією. Доведено, що одностороння взаємодія створює умови для запобігання резонансного розвитку коливань та може розглядатися як засіб для їх гасіння.

У статті Я.О. Жука та І.О. Гузя [24] досліджено особливості розповсюдження поздовжніх та поперечно поляризованих хвиль уздовж шарів у нанокомпозитних матеріалах за наявності попередніх напружень, які виникають внаслідок технології виготовлення композиту. Композит має періодичну структуру, яка утворена шарами двох матеріалів, що мають різні нелінійно-пружні властивості у досліджуваному інтервалі навантажень. Пружний потенціал типу Мурнагана, який залежить від трьох інваріантів тензора деформації, використано для описання механічної поведінки досліджуваних компонентів. Для моделювання процесу розповсюдження хвиль застосовано теорію пружності скінченних деформацій і розвинуто на її основі постановку задачі в межах тривимірної лінеаризованої теорії пружності при скінченних початкових деформаціях. У роботі досліджено залежність відносних швидкостей розповсюдження поздовжніх та поперечних хвиль у двох компонентах малих

початкових напружень у кожному шарі. Також встановлено, що для деяких нанокомпозитів існує відношення товщин шарів, за яких швидкості розповсюдження хвиль не залежать від початкових напружень, а залишаються рівними швидкостям розповсюдження відповідних хвиль в композиті без початкових напружень.

У роботі [25] на основі гіпотези Кірхгофа-Лява сформульовано динамічну задачу електромеханіки для балки, яка складається з кількох шарів. Для випадку гармонічних навантажень наведено спрощене формулювання задачі, де використано одну наближену частоту та концепцію комплексних модулів. У якості прикладу розглянуто вимушені коливання балки, яка складається з трьох шарів та є шарнірно закріпленою на кінцях. Для даної балки застосовано наближений моногармонічний підхід та досліджено різні аспекти реагування балки на механічні та електричні збурення.

Стаття I.V. Andrianov, V.V. Danishevs'kyy, A.L. Kalamkarov [26] присвячена статичним та динамічним задачам для пружних пластин та оболонок з отворами різних форм. Для розв'язання сформульованих задач застосовано теорію збурень та багатомасштабний асимптотичний метод гомогенізації. Використання асимптотичного методу гомогенізації зводить крайові задачі до комбінації двох типів проблем. Перша проблема – це системи елементарних комірок з умовою періодичного продовження. А друга – гомогенізована крайова задача для всього домена, яка характеризується сталими коефіцієнтами, отриманими з проблеми елементарної комірки. Також у роботі отримано аналітичні вирази для ефективних жорсткостей перфорованої пластини з отворами довільних розмірів.

У роботі Ю.М. Кононова [27] розглянуто циліндричну посудину, у якій міститься ідеальна двошарова рідина з пружними мембранами на вільній та внутрішніх поверхнях стратифікованої рідини. У результаті дії пружних сил у системі виникають поперечні коливання. Досліджено граничні випадки для еластичної мембрани. Перший випадок – мембрана розташована тільки на вільній поверхні однорідної та двошарової рідини, другий – мембрана роз-

діляє двошарову рідину, і останній – мембрана знаходиться як у вільній, так і у внутрішній поверхнях двошарової рідини. Проведено аналіз чисельних розрахунків впливу першої власної частоти на натяг мембрани, густину рідини та глибину наповнення.

У статті F. Alijani та M. Amabili [28] проведено аналіз літератури присвяченої нелінійним вільним та вимушеним коливанням оболонок, замкнутих пластини та вигнутих панелей, виготовлених з ізотропних, композитних та гіперпружних матеріалів. Досить велика увага приділяється нелінійним коливанням оболонок, які виникають у результаті нормальних збурень. Ще одним питанням розглянутим у статті є конкретні динамічні задачі, пов'язані з параметричними, нестаціонарними та хаотичними коливаннями. Також висвітлено питання нелінійних коливань оболонок і панелей у результаті геометричних дефектів, теплових та електричних навантажень.

1.2. Моделювання руху космічних апаратів з пружними елементами

Класичний метод дослідження задач динаміки космічного апарату ґрунтується на застосуванні моделі систем зв'язаних твердих тіл без урахування пружних деформацій конструкції.

Багато нових розв'язків задач про рух твердого тіла та систем тіл було одержано засновником Донецької школи механіки – П.В. Харламовим [29] та його учнями: Г.В. Горром, О.А. Ілюхіним, О.М. Ковальовим, О.Я. Савченком [30] та ін.

Сучасні тенденції збільшення розмірів деформівних конструкцій, зменшення їх мас, жорсткості та інших факторів вимагають нових підходів до моделювання складних механічних систем, а безперервне збільшення енергетичних вимог до сучасних космічних апаратів призводить до необхідності створення легких пружних панелей сонячних батарей, які мають досить велику корисну площу. Як зазначено у роботі R.E. Roberson [31], деформованість

космічних апаратів суттєво впливає на проектування систем керування цими конструкціями, і такі чинники можуть стати ще більш важливими у майбутньому, оскільки космічні апарати все більше приймають вигляд великої розподіленої системи.

Теоретичні дослідження руху космічних систем є досить складним завданням. Навіть виведення диференціальних рівнянь пов'язане з великими труднощами [32]. Особливо складним є відшукання стаціонарних розв'язків, які описують стаціонарні рухи, та нелінійний аналіз їх стійкості. Хоча саме ці питання постають першими перед розробниками систем стабілізації космічних апаратів. Питання динаміки твердого тіла, що містить пружні і дисипативні елементи, розглядалися у книгах Р.Ф. Гонієва, В.О. Кононенка [33], В.Г. Веретенникова, І.І. Карпова, Ю.Г. Маркова [34], І.О. Луковського [35] та роботах А.В. Анісімова [36], О.Л. Зуєва [37], Г. Крона [38], Б.А. Тітова [39], J.S. Arora [40] й інших авторів. У монографії Р.Ф. Гонієва та П.С. Ковальчука [41] досліджені резонансні коливання твердих тіл, твердих деформівних тіл і тіл з рідиною, обумовлені зовнішніми періодичними і майже періодичними збуреннями.

У монографії Л.В. Докучаєва [42] розглянуті питання руху літальних апаратів при значних кутах повороту, коли деформівні елементи типу стержнів, пластин або рідких мас під дією масових сил здійснюють коливальні переміщення. У книзі В.Г. Вільке [43] досліджені стаціонарні рухи механічних систем з пружними елементами і їх стійкість. У монографії М.К. Набіулліна [32] досліджено динаміку складових орбітальних космічних систем, що складаються з жорстких та пружних деформівних тіл. У книзі авторів Н.В. Банічука, І.І. Карпова, Д.М. Климова, А.П. Маркеєва, Б.Н. Соколова, А.Н. Шараню-ка [44] викладено основи методу скінченних елементів для аналізу динаміки складних космічних конструкцій. Розв'язано задачі оптимізації параметрів пружності та демпфірування для скінченновимірних моделей. У цій книзі також наведено процедури для системи комп'ютерної алгебри Maple щодо автоматизованого вивчення рівнянь руху моделей космічних апаратів.

У роботах Л.В. Докучаєва, О.П. Климова [45], В.С. Хорошилова [46], J. Ambrosio [47], O.A. Bauchau, J.-Y. Choi, C. Bottasso [48], R.R. Ryan [49], H.H. Yoo [50], S. Seo [51] увага приділяється моделюванню динаміки космічного апарата з пружними елементами та дослідженню стаціонарного обертального руху систем з пружними елементами або руху цієї системи навколо центра мас. Зокрема, у статті [46] досліджено задачу стабілізації космічного апарата, який рухається по коловій орбіті з керованою сонячною батареєю. Модель даного космічного апарата представлена у вигляді абсолютно твердого тіла з панелями сонячних батарей, які моделюються недеформованими стержнями. Панелі батарей пружно зв'язані з тілом космічного апарата за допомогою сферичних шарнірів. Але такий підхід до моделювання має суттєвий недолік, оскільки реальні панелі сонячних батарей мають достатньо великі розміри та не можуть бути розглянуті як абсолютно тверді тіла.

У роботі О.Є. Закржевського [52] наведено огляд результатів, пов'язаних з узагальненням математичних моделей об'єктів космічної техніки шляхом обґрунтованого врахування пружності їх конструкцій. А у статті [53] розглянуто модель космічного апарата, яка складається з твердого корпусу та симетрично приєднаних до нього пружних панелей сонячних батарей. О.Є. Закржевським записано рівняння руху пружних елементів з урахуванням скінченного числа форм коливань. Для цієї системи рівнянь досліджено задачу оптимального керування.

У монографії Г.Л. Дегтярьова та Т.К. Сіразетдінова [54] досліджено питання математичного моделювання і синтезу керування для пружних космічних апаратів, які розглядаються як об'єкти з розподіленими параметрами. У якості однієї з моделей космічного апарата наведено механічну систему, яка складається з твердого тіла та двох пружних панелей сонячних батарей. Кожна з сонячних батарей жорстко закріплена між двома кронштейнами. Тіло-носій здійснює обертання навколо фіксованої вісі, а керування рухом системи здійснюється за рахунок моменту сил, що прикладено до тіла.

Також у роботі [54] запропоновано алгоритми стабілізації за допомогою

виконавчих органів системи керування рухом, які базуються на інформації про стан твердих тіл та окремих пружних елементів конструкції. Розробка вказаних алгоритмів має в своїй основі математичні моделі, які описують рух космічних апаратів та враховують коливання окремих виносних елементів, що впливають на динаміку. Але для сучасних космічних апаратів вказаний метод є не досить ефективним, так як апарати мають велику кількість пружних елементів конструкцій, які виконують коливальні рухи з різними формами та параметрами коливань. Тому в таких умовах неможливо сформувати керуючі впливи, які б забезпечили ефективну зміну положення космічного апарата у просторі. Так як сили та моменти, що створені системою керування руху по різному впливають на пружні елементи конструкції, в результаті можуть виникати автоколивання, які можуть призвести до втрати стійкості системи з такою схемою керування рухом.

Більш ефективний метод керуванням космічного апарату представлено у роботі В.Д. Атамасова та І.І. Дементьєва [55], а також у книзі М.К. Сапего [56]. Запропонований метод полягає у демпфіруванні коливань пружних елементів з подальшим переведенням космічного апарата у задане положення простору. Авторами запропоновано поряд із системою центрального керування апаратом використовувати локальні системи гасіння коливань пружних конструкцій, які реалізовано удосконаленими електромеханічними приладами для керування орієнтацією в процесі виконання програми польоту. Для здійснення ефективного керування космічним апаратом необхідно забезпечити узгодження функціонування локальних систем гасіння коливань та систем центрального керування. Також у розглянутих роботах наведено розв'язки деяких прикладних задач, пов'язаних із визначенням та формуванням керуючих сил та моментів для вказаних технічних приладів.

У статті В.П. Легостаєва [57] методом математичного моделювання досліджується динаміка кутового руху космічного апарата з подвійним обертанням. Принципи керування кутовими обертаннями продемонстровано на прикладі механічної моделі, яка складається з приладового відсіку, сонячно-

го парусу у вигляді великого мембранного диска та компенсуючого силового гіроскопа. Сонячний парус знаходиться у напружено-деформованому стані під дією центробіжних сил та гіроскопічного моменту, який виникає при повороті осі обертання центральної жорсткості мембранного диску у процесі виконання кутових маневрів космічним апаратом. Також у роботі наведені результати аналітичних та числових досліджень динаміки апарата з сонячним парусом, що обертається, у режимах програмних поворотів та гасіння початкових кутових швидкостей.

У статті В.А. Троценка та Ю.В. Троценка [58] розглянуто механічну систему, що складається з абсолютно твердого тіла та кругової циліндричної оболонки. Тверде тіло прикріплене до одного з торців оболонки. Для рівноважного стану системи побудовано математичну модель та запропоновано наближене розв'язання крайової задачі, що описує вільні невісесиметричні коливання оболонки. Також у статті наведено алгоритм розрахунку динамічних характеристик системи у випадку заміни оболонки балкою Тимошенка та проведено оцінку впливу твердого тіла на коливання системи.

До сучасного напрямку дослідження систем з деформівними елементами відносяться задачі динаміки космічних тросових систем. Опис принципових схем і математичних моделей тросових систем наведено у роботі А.П. Алпатова, В.В. Бєлецького, В.Й. Драновського, О.Є. Закржевського О.В. Пироженка, Г. Трогера та В.С. Хорошилова [59]. Типова схема космічної тросової системи складається з великого ведучого космічного апарата та об'єкта менших розмірів – субсупутника, який з'єднано з ведучим космічним апаратом за допомогою досить довгого троса.

У статті А.І. Маслової та О.В. Пироженка [60] розглянуто питання моделювання аеродинамічних моментів сил, які діють на супутник з гравітаційною системою стабілізації. Має місце припущення, що орбіти супутників є майже коловими з діапазоном висот 550-750 км. Для аеродинамічного моменту запропоновано спрощені аналітичні вирази у випадку, коли супутник рухається у режимі гравітаційної орієнтації. Точність отриманих виразів оці-

нюється у порівнянні з виразами похідних у припущенні, що коефіцієнт лобового опору є сталим. Виконано аналіз коротких періодичних варіацій густини атмосфери, які відбуваються внаслідок орбітального руху супутника. Показано, що ці варіації можуть привести до істотної зміни аеродинамічного моменту.

У роботі О.В. Пироженка та Д.О. Храмова [61] досліджено динаміку складної системи гравітаційної стабілізації. Система передбачає з'єднання троса для збільшення відновлюючого моменту і застосування додаткового конструктивного елементу (адаптера) для збільшення ефективності демпфірування коливань маятникової системи. Спосіб вибору факторів проектування системи забезпечує мінімальну тривалість перехідних процесів.

Окремий клас задач динаміки космічних систем пов'язано з моделюванням розкриття елементів конструкції з початкового стану. Такими об'єктами можуть виступати панелі сонячних батарей, антени або виносні штанги. Розкриття сонячної батареї безпосередньо впливає на роботу космічного апарата на орбіті.

Наприклад, у статті М.В. Борисова та О.О. Авраменка [62] досліджено моделювання руху космічного апарата при розкритті панелей сонячних батарей, яке проведено за допомогою методу Релея-Рітца та принципу Гамільтона-Остроградського. При цьому розв'язання задачі дослідження руху проведено у два етапи. На першому етапі – розкритті – розглянуто рух панелей батарей як системи пластин, з'єднаних шарнірами. У результаті чого отримано систему 15 диференціальних рівнянь, лінійних відносно невідомих прискорень та реакцій зв'язків. А на другому етапі – фіксації – досліджено рух твердого тіла при коливаннях сонячних батарей, що виникають під дією імпульсних навантажень у момент фіксації панелей.

У роботі Дж.Е. Уікса [63] введено клас аналітичних функцій, які визначаються ще до розв'язання рівняння руху за умов додаткових спрощуючих припущень. Ці функції характеризують прогин пружного елемента, яким може виступати панель сонячних батарей або антена. Але такий метод не є уні-

версальним, оскільки рівняння руху елементів сонячних батарей як цілого та рівняння пружних коливань мають бути розв'язані разом.

У статті Д.В. Бакуліна та С.В. Борзих [64] розглянуто систему тіл, що рухається зі змінною кількістю ступенів вільності. Коливання тіл у системі представлено в модальній формі з урахуванням розсіювання енергії. Таким чином, запропоновано підхід до моделювання динаміки сонячних батарей у процесі їх розкриття з урахуванням пружних властивостей елементів.

У роботі Ю.М. Кононова [65] досліджено модель пружної механічної системи у вигляді твердого тіла, що обертається, з n рухомими точковими масами. Показано, що відносний рух точкових мас вздовж осі симетрії гіроскопа не впливає на стійкість руху останнього. Також досліджено спектр коливань системи у залежності від напрямку осей руху точкових мас.

1.3. Задачі керування рухом та стабілізації механічних систем з пружними елементами

Відомо, що задача керованості полягає у переведенні механічної системи з будь-якого початкового положення у кінцеве за скінченний проміжок часу, за допомогою певної керуючої функції. Основи теорії керованості лінійними скінченновимірними системами було запропоновано Р. Калманом [66].

Для нескінченновимірних систем з розподіленими параметрами розв'язання задачі керованості є значно складнішою, бо при цьому необхідно враховувати властивості динамічних процесів у функціональних просторах.

Дослідження задач керування одновимірними пружними коливаннями почалися у 1963 році з робот А.Г. Бутковського [67]. Вже з наступного десятиліття цим питанням почали займатися Ж.-Л. Ліонс [68] та А.В. Балакрішнан [69], які при розв'язуванні задач керування використовували різні функціональні простори, зокрема, простори неперервних функцій.

Перші дослідження стаціонарних рухів і проблем стійкості складних механічних систем з розподіленими параметрами, у тому числі пружних су-

путників було започатковано у роботах В.В. Румянцева [70] та його учнів. Розв'язання задач стійкості та стабілізації стаціонарних рухів пружних супутників може бути ефективно здійснене методом функцій Ляпунова або за допомогою теореми Рауса-Ляпунова, поширених на системи з розподіленими параметрами. При вирішенні цих задач зазвичай виникають математичні труднощі, пов'язані з побудовою функціоналів Ляпунова та перевіркою умов знакосталості.

При проектуванні системи керування виникає питання впливу пружності космічного апарата на роботу системи орієнтації. У статтях В.Ю. Рутковського, В.М. Суханова [71, 72] наведено огляд проблемних питань, що виникають при розв'язуванні задач керування орієнтацією пружних космічних апаратів математичні моделі яких описано методом модального аналізу.

У статті L. Chen, J. Pan, G. Cai [73] за допомогою дискретного оптимального методу керування досліджено керування гнучкою пластиною з багаторазовими затримками часу. У якості виконавчих механізмів виступають п'єзоелементи. Встановлено, що затримки керування зі зворотним зв'язком можуть бути використані для структурного керування.

У статті L. Meirovitch, H.F. Van Landingham [74] запропоновано метод керування пружним космічним апаратом, який базується на модальній декомпозиції гіроскопічної системи. У роботі S.M. Seltzer [75] обговорюються проблеми точного спостереження динамічних режимів великих пружних космічних апаратів на земній орбіті та синтезу систем керування.

У роботі В.М. Рубановського [76] розглянуто задачі стійкості складних механічних систем з пружними елементами. Автором встановлено, що методи дослідження стійкості скінченновимірних систем, які описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, не можуть бути застосовані до систем з розподіленими параметрами. Для встановлення умов стійкості таких систем запропоновано використовувати прямий метод Ляпунова та методи функціонального аналізу.

У статті [77] В.М. Рубановський розглянув задачу про стійкість рівномір-

них обертань твердого тіла з пружними стержнями. Автором було отримано достатні умови стійкості системи з умови мінімальності функціоналу зміненої потенціальної енергії за допомогою аналізу його другої варіації.

У роботі М.К. Набіулліна [32] розглянуто механічну систему, яка складається з твердого тіла-носія та трьох пар деформівних пружних стержнів. Рух точок стержнів досліджуваної системи задано рівняннями з частинними похідними другого порядку за часом та четвертого порядку за просторовою координатою. Для дослідження стійкості часткового розв'язку рівняння руху застосовано функцію Ляпунова у вигляді інтеграла типу Якобі. Отримано достатні умови стійкості на параметри механічної системи. У роботах М.К. Набіулліна для дослідження стійкості рухів супутників з пружними елементами використані теореми прямого методу Ляпунова, які були отримані раніше іншим вченим – О.А. Мовчаном [78] при дослідженні стійкості розв'язків систем з розподіленими параметрами.

У роботі Г.О. Леонова, А.В. Морозова [79] отримано умови глобальної асимптотичної стійкості в цілому стаціонарних обертань несиметричного твердого тіла навколо центру мас у полі сталих зовнішнього та дисипативного моментів.

Питання динаміки та стійкості твердого тіла, що містить пружні та дисипативні елементи, розглядалися у статті В.М. Морозова зі співавторами [80]. У книзі Р.Ф. Ганієва, О.Є. Закржевського [81] подано методи побудови програмних рухів керованих об'єктів сучасної техніки з урахуванням пружності їх конструкцій.

У роботі О.Я. Савченка, І.О. Болграбської, Г.О. Кононихіна [82] досліджено вплив пружних властивостей елементів системи тіл на стійкість рівномірних обертань, регулярних прецессій та інших майже періодичних рухів систем твердих тіл, що зв'язані за допомогою циліндричних шарнірів.

У статті G. Leugering [83] розглянуто тверде тіло, що обертається, до якого приєднані пружні балки. Для такої механічної системи досліджено задачі керованості та стабілізації повільних обертальних рухів моделі. Досліджувана

механічна система описується за допомогою лінійних диференціальних рівнянь з параметром керування у вигляді моменту сил. Доведено керованість цієї системи на лінійному підмноговиді гільбертового простору.

У сучасній теорії керування системами із розподіленими параметрами важливе місце займають задачі стабілізації коливань пружних пластин і мембран. Ці питання досліджувалися багатьма авторами [68, 84, 85].

Відомо, що одним з найбільш ефективних методів дослідження задач стабілізації руху механічних систем з пружними елементами є прямий метод Ляпунова. У роботах Z.-H. Luo, B.-Z.Guo, Ö. Morgül [86, 87] побудовані функціонали Ляпунова у явному вигляді для нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують коливання пружної балки. Також у цих роботах отримано функції керування зі зворотним зв'язком, які забезпечують стабілізацію стану рівноваги балки.

У роботі G.C. Gorain [88] досліджено стабілізацію коливань n-вимірного рівняння Кірхгофа в обмеженій області $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею при змішаних граничних умовах. Для стабілізації системи розглянуто дві різні моделі. У першій стабілізація відбувається за рахунок в'язкого демпфірування, а в другій – за рахунок внутрішнього демпфірування типу Кельвіна-Фойгта.

У статті C.Z. Xu та J. Baillieul [89] для механічної системи у вигляді твердого тіла та пружної балки доведено стабілізованість за кутовою швидкістю при наявності дисипації. Моменти сил, які прикладено до твердого тіла, виступають керуючими функціями. Аналогічна задача розв'язана у роботі J.-M. Coron та B. d'Andréa-Novel [90] для випадку без дисипації. Також показано, що аналіз асимптотичної стійкості за відсутності дисипації значно ускладнюється.

У монографії J. Oostveen [91] розглянуто математичну модель складної механічної системи з пружними елементами, коливання яких описано диференціальними рівняннями з нескінченою кількістю модальних координат. У випадку системи з декількома незалежними керуючими силами та керуючими моментами, що задовольняють умову коллокації, отримано достатні

умови сильної стабілізовності досліджуваної лінійної системи. Інша частина монографії присвячена розвитку методів дослідження задач сильної стійкості та стабілізації тривіального розв'язку керованої системи у гільбертовому просторі. Встановлено, що у нескінченновимірному випадку поняття експоненціальної, сильної та слабкої асимптотичної стійкості лінійних систем не є еквівалентними. У роботі доведено еквівалентність властивостей сильної стійкості та стійкості від входу до виходу для стабілізовних систем. Для синтезу керувань зі зворотним зв'язком застосовано аналогію між задачею сильної стабілізації та задачею оптимального керування з квадратичним функціоналом якості, а також проведено дослідження властивостей розв'язків відповідного рівняння Ріккаті.

У монографії В.В. Новицького [92] представлені результати досліджень задач керування багаточастотними механічними системами. Запропоновано метод модального керування у канонічній формі для нестаціонарних керованих систем. Застосовано другий метод Ляпунова до задач синтезу керування зі зворотним зв'язком. Також у книзі розглянуті структурні та обернені задачі лінійної фільтрації для деяких механічних систем.

Монографія А.А. Мартинюка [93] містить результати дослідження стійкості складних систем, що збурюються параметрично або за допомогою зовнішніх факторів, які описані за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь, що містять малий параметр і випадкові функції. Досліджено питання стійкості при складних збуреннях та проведено оцінку параметрів підсистем. Доведено ряд теорем про стійкість та нестійкість взаємодіючих підсистем у складній системі. Розглянуто питання стійкості розв'язків за Ляпуновим та стійкість на обмеженому інтервалі часу. Апаратом дослідження є другий метод Ляпунова та застосування диференціальних та інтегральних нерівностей.

У роботі Ф.А. Алієва та В.Б. Ларіна [94] проведено огляд алгоритмів розв'язання задачі про статичний регулятор за виходом для стаціонарних лінійних систем з неперервним і дискретним часом. Розглянуто задачу, обер-

нену до задачі про статичний регулятор за виходом. Алгоритми синтезу регулятора за виходом узагальнено на випадок періодичної системи з дискретним часом. Показано, що описані алгоритми можна використовувати для оптимальної стабілізації нестійких систем із запізнюванням. У зв'язку з цим для скалярної керованої нестійкої системи з запізнюванням досліджено задачу оптимізації параметрів регулятора, структура якого є заданою. Розглянуто задачу апроксимації заданої системи з запізнюванням системою без запізнювання. Розв'язано задачу оптимізації коефіцієнтів регулятора для одержаної скороченої системи. Ефективність синтезованого в такий спосіб регулятора оцінюється шляхом математичного моделювання заданої системи (із запізнюванням), ланцюг зворотного зв'язку якої відповідає знайденим коефіцієнтам регулятора. Як ілюстрацію запропонованого підходу розглянуто приклад стабілізації переверненого математичного маятника пропорційно-диференціальним регулятором із запізненням. Досліджено ряд прикладів синтезу робастного регулятора, зокрема, для системи третього порядку, коли невизначеною є величина запізнення.

У книзі V. Komkov [95] третій розділ присвячено питанням оптимального керування коливаннями тонких пластин. Сформульовано принцип максимуму Понтрягіна для тонких пластин з деякими граничними умовами, які зумовлені фізичними постановками задач та розглянуто питання існування оптимального керування пластинами.

1.4. Стабілізація руху твердого тіла, що обертається

Задача про збурений рух твердого тіла відносно центру мас є однією з найбільш відомих проблем механіки. Практичний інтерес до цього питання викликано проблемами динаміки обертального руху космічних апаратів та прикладної теорії гіроскопів.

Питанням обертального руху супутників та твердих тіл присвячені роботи Л.Д. Акуленка, В.В. Бєлєцкого, В.М. Кошлякова, Ю.Г. Мартиненка,

В.В. Румянцева, В.В. Сазонова, Ф.Л. Черноуська, W.T. Thomson та ін.

Монографія В.В. Бєлєцкого [96] присвячена опису методів дослідження руху штучного супутника відносно центру мас під дією гравітаційних і магнітних моментів та сил світлового тиску.

У роботі Вас. В. Сазонова, В.В. Сазонова [97] запропоновано математичну модель обертального руху супутника "Фотон". Ця модель ґрунтується на динамічних рівняннях Ейлера з урахуванням дії на супутник чотирьох зовнішніх механічних моментів: гравітаційного; аеродинамічного; моменту зі сталими компонентами в системі координат, що пов'язана із супутником; та моменту, що виникає при взаємодії магнітного поля Землі з магнітним моментом супутника.

У статтях Л.Д. Акуленка, Д.Д. Лещенка, Ф.Л. Черноуська, А.Л. Рачинської [98–100] досліджується швидкий рух навколо нерухомої точки несиметричного важкого твердого тіла у середовищі зі спротивом. Рух тіла складається з рухів Ейлера-Пуансо навколо вектора кінетичного моменту з повільно спадаючими величинами кінетичного моменту і кінетичної енергії, а також з рухом самого вектора кінетичного моменту. Кутова швидкість обертання вектора кінетичного моменту залежить від дії сили тяжіння та сили спротиву середовища.

Поряд із задачами стабілізації кутової швидкості окремої уваги заслуговує задача орієнтації твердого тіла B у заданому напрямку. Суть задачі полягає у визначенні функцій керування, які дозволяють стабілізувати орти, пов'язані з твердим тілом, у напрямку заданих нерухомих векторів. У книзі В.І. Зубова [101] встановлено умови асимптотичної стійкості за Ляпуновим стану рівноваги системи, що описана динамічними рівняннями Ейлера та кінематичними рівняннями Пуассона. Також отримано функції керування, під дією яких тверде тіло знаходиться в одному зі станів рівноваги, або прямує до стану рівноваги асимптотично. Також у даній книзі представлені розв'язки задачі орієнтації осей, пов'язаних з тілом, та задачі орієнтації твердого тіла, що має маховики.

У монографіях В.І. Воротнікова та В.В. Румянцева [102, 103] велика увага приділяється розв'язанню прикладних нелінійних задач стійкості, стабілізації та керування за частиною змінних. Зокрема, розглянуто задачі стабілізації супутника на орбіті в обмеженій постановці, керування орієнтацією космічного апарата та суміжні задачі.

Питання стабілізації рівномірних обертань твердого тіла розглянуто у монографії [102]. У цій роботі для рівнянь Ейлера-Пуассона побудовано керування, яке забезпечує експоненціальну асимптотичну стійкість тривіального стану рівноваги системи, а також одержано оптимальне керування, яке мінімізує квадратичний функціонал якості. Крім того, розглянуто задачу стабілізації незбуреного руху по відношенню до змінних, які характеризують збурення орієнтації осі обертання тіла. При цьому, взагалі кажучи, не забезпечується стабілізація відносно кутової швидкості.

У книзі В.В. Крементуло [104] розглянуто задачу стабілізації стану рівноваги твердого тіла за допомогою маховиків. Для запису рівнянь руху механічної системи до рівнянь Ейлера-Пуассона, додаються ще три рівняння, які описують обертальний рух маховиків. Під час розв'язання задачі встановлено, що тривіальний стан рівноваги може бути стабілізований в силу певної наближеної системи рівнянь та знайдено відповідне керування. Також доведено, що зі стабілізації тривіального стану рівноваги в силу наближених рівнянь випливає стабілізація в силу повної системи.

У роботі О.М. Ковальова та В.Ф. Щербака [105] отримано необхідні та достатні умови керованості системи, яка описує рух тіла відносно центру мас під дією одного реактивного двигуна та дано оцінки області керованості при обмеженнях на керування.

A. El-Gohary у роботі [106] дослідив задачу оптимальної стабілізації обертань симетричного твердого тіла з внутрішніми роторами. За допомогою теореми Барбашина-Красовського доведено асимптотичну стійкість незбуреного руху даної механічної системи. З умов асимптотичної стійкості системи отримано нелінійне керування зі зворотним зв'язком.

Задача орієнтації твердого тіла за допомогою двовимірного керування досліджена у статті H. Krishnan зі співавторами [107]. У цій роботі доведено, що за допомогою послідовності перетворень можна побудувати стабілізуюче керування, яке має розриви. Такий метод можна застосувати, коли побудова нелінійного керування класичними методами неможлива.

У роботі О.В. Гладуна [108] досліджується задача керування та стабілізації супутника, який несе два гіродини. Побудовано функції керування, які стабілізують кутову швидкість супутника та забезпечують орієнтацію у напрямку заданого орта. Вихідна система рівнянь, що описує динаміку системи, зводиться до системи спеціального вигляду, для якої стабілізація вирішується шляхом вибору власних чисел матриці лінійного наближення. Як уявні, так і дійсні частини власних чисел цієї матриці обираються таким чином, щоб мінімізувати норму керування зі зворотним зв'язком.

У статті А.Ю. Александрова [109] розглянуто тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки під дією моменту дисипативних сил та керуючого моменту. У каналі зворотного зв'язку є запізнення, яке представляє собою неперервну обмежену та невід'ємну функцію часу. Запропоновано два способи побудови керувань, які забезпечують одноосьову стабілізацію тіла, та визначено умови, за яких запізнення не порушує асимптотичну стійкість заданого стану рівноваги.

1.5. Висновки

Виконаний у даному розділі аналіз літератури дозволяє зробити наступні висновки.

1. Проблеми моделювання руху складних космічних апаратів з пружними елементами залишаються актуальними з точки зору створення адекватних математичних моделей, які є зручними для застосування аналітичних методів.
2. Основну увагу дослідників задач динаміки та керування рухом твер-

дих тіл з пружними елементами раніше було зосереджено на системах, у яких коливання приєднаних мас описувалося за допомогою моделі пружної балки. У цьому напрямку було отримано змістовні результати про розв'язність задач керування та стабілізації руху [83, 86, 89, 90, 110] та ін. Зокрема, досліджено проблему "паразитної" генерації некерованих модальних координат за рахунок зосередженого керування першими модальними гармоніками (проблема "control spillover") [111].

Один із сучасних напрямків досліджень динаміки твердих тіл з пружними елементами пов'язано з вивченням механічних систем, у яких коливання приєднаних мас описується за допомогою моделей пружних пластин [2, 22, 68, 84, 85, 95] та ін.

3. Важливе теоретичне і практичне значення мають дослідження задач керованості пружних пластин за рахунок керування обертаннями тіла-носія. До теперішнього часу ця задача не отримала повного розв'язку з урахуванням нескінченного спектру коливань пластини. У цьому напрямку залишається відкритим питання про конструктивне зображення множини досяжності багаточастотних систем при використанні гладких функцій керування.
4. Розвиток строгих математичних методів розв'язання задачі стабілізації суттєво нелінійних систем, що описуються диференціальними рівняннями у нескінченновимірних просторах, є важливим науковим завданням. Також актуальними залишаються задачі стабілізації руху механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини, яка обертається під дією керуючих моментів.
5. Представляють значний теоретичний інтерес задачі синтезу керування для моделей пружних систем із розподіленими параметрами. Отримані при розв'язанні цих задач керування мають компенсувати вплив зовнішніх збурень на коливання пружних елементів та оптимізувати рух відповідної механічної системи у цілому.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

2.1. Рівняння відносного руху механічної системи

2.1.1. Теорема про додавання прискорень у системі координат, що обертається. Розглянемо рух матеріальної точки M відносно двох прямокутних декартових систем координат $Oxyz$ та $O'x'y'z'$ (Рис. 2.1). Нехай система $Oxyz$ є інерціальною (нерухомою), а інша – $O'x'y'z'$ рухається відносно першої довільним чином. Рух матеріальної точки відносно інерціальної системи будемо називати абсолютним, а рух точки M у системі $O'x'y'z'$ – відносним рухом.

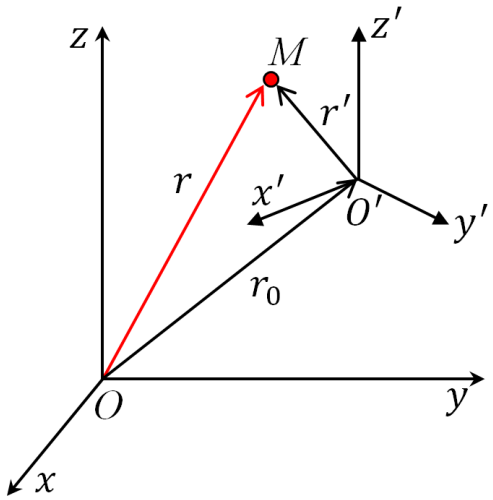

Рис. 2.1. Матеріальна точка у двох системах відліку

Одиничні вектори (орти), що визначають додатній напрямок осей нерухомої та рухомої систем координат позначимо, відповідно, через e_i та e'_i $(i = \overline{1,3})$. Положення точки M відносно нерухомої системи координат визначимо радіус-вектором $r = xe_1 + ye_2 + ze_3$, а відносно рухомої – радіус-вектором $r' = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3$, де x, y, z та x', y', z' – координати точки M в цих системах.

З Рис. 2.1. видно, що

$$r = r_0 + r' = r_0 + x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3, \tag{2.1}$$

де r_0 – радіус-вектор, що з'єднує початок нерухомої системи координат O з початком O' рухомої системи.

Швидкість точки M відносно нерухомої системи координат називається абсолютною швидкістю та дорівнює

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}e_1 + \frac{dy}{dt}e_2 + \frac{dz}{dt}e_3. \tag{2.2}$$

З (2.1) випливає, що

$$v = v_0 + \left(\frac{dx'}{dt}e'_1 + \frac{dy'}{dt}e'_2 + \frac{dz'}{dt}e'_3\right) + \left(x'\frac{de'_1}{dt} + y'\frac{de'_2}{dt} + z'\frac{de'_3}{dt}\right), \tag{2.3}$$

де $v_0 = \dfrac{dr_0}{dt}$ – абсолютна швидкість рухомої системи координат у її поступальному русі. Вектор

$$v_r = \frac{dx'}{dt}e'_1 + \frac{dy'}{dt}e'_2 + \frac{dz'}{dt}e'_3 \tag{2.4}$$

аналогічно до (2.2) визначає швидкість точки M відносно рухомої системи координат. Цей вектор є відносною швидкістю точки M.

Зміна ортів e'_1, e'_2 та e'_3 рухомої системи координат може бути викликана лише тим, що ця система рухається не тільки поступально, але ще й одночасно обертається навколо точки O'. Тоді вектори $\dfrac{de'_1}{dt}, \dfrac{de'_2}{dt}$ та $\dfrac{de'_3}{dt}$ є лінійними швидкостями кінців відповідних одиничних відрізків у цьому обертальному русі. Якщо кутова швидкість рухомої системи дорівнює ω, то

$$\begin{aligned}
\frac{de'_1}{dt} &= \omega_3 e'_2 - \omega_2 e'_3 = \omega \times e'_1, \\
\frac{de'_2}{dt} &= \omega_1 e'_3 - \omega_3 e'_1 = \omega \times e'_2, \\
\frac{de'_3}{dt} &= \omega_2 e'_1 - \omega_1 e'_2 = \omega \times e'_3,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

де $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекції вектора кутової швидкості ω на осі системи $O'x'y'z'$.

Тоді третій доданок з (2.3) з урахуванням (2.5) можна переписати наступним чином

$$x'\frac{de'_1}{dt} + y'\frac{de'_2}{dt} + z'\frac{de'_3}{dt} = \omega \times x'e'_1 + \omega \times y'e'_2 + \omega \times z'e'_3 = \omega \times r'. \tag{2.6}$$

На основі співвідношень (2.4) та (2.6) рівняння (2.3) можна представити формулою

$$v = v_0 + \omega \times r' + v_r. \tag{2.7}$$

Сума перших двох доданків правої частини рівності (2.7) представляє собою абсолютну швидкість точки рухомої системи, через яку в даний момент часу проходить матеріальна точка M. Цю швидкість називають переносною швидкістю точки M та позначають

$$v_e = v_0 + \omega \times r'. \tag{2.8}$$

Таким чином, абсолютна швидкість точки M дорівнює сумі переносної та відносної швидкостей:

$$v = v_e + v_r. \tag{2.9}$$

Визначимо абсолютне прискорення точки M, тобто прискорення по відношенню до нерухомої інерціальної системи відліку:

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2.10}$$

З рівнянь (2.9) та (2.8) випливає, що

$$a = a_0 + \dot{\omega} \times r' + \omega \times \dot{r}' + \omega \times v_r + a_r, \tag{2.11}$$

де $a_0 = \dot{v}_0$ – прискорення рухомої системи у її поступальному русі, $\dot{\omega}$ – кутове прискорення рухомої системи, $a_r = \frac{d^2x'}{dt^2}e'_1 + \frac{d^2y'}{dt^2}e'_2 + \frac{d^2z'}{dt^2}e'_3$ – відносне прискорення (прискорення по відношенню до рухомої системи) точки M.

З формул (2.3) та (2.7) видно, що

$$\dot{r}' = \omega \times r' + v_r.$$

Тому рівняння (2.11) можна записати наступним чином:

$$a = a_0 + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r') + 2(\omega \times v_r) + a_r, \tag{2.12}$$

або

$$a = a_e + a_r + a_{Cor}, \tag{2.13}$$

де $a_e = a_0 + \dot{\omega} \times r' + \omega \times (\omega \times r')$ – переносне прискорення точки M, $a_{Cor} = 2(\omega \times v_r)$ – прискорення Коріоліса, або поворотне прискорення точки M, зумовлене обертанням рухомої системи координат. Коріолісове прискорення має максимальне значення, якщо відносна швидкість точки v_r є перпендикулярною до вектора ω кутової швидкості рухомої системи. Якщо кут між векторами v_r та ω дорівнює 0 або π, то прискорення Коріоліса дорівнює нулю.

Таким чином, можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.1. [112, с.82] *Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі її переносного прискорення a_e, відносного a_r та прискорення Коріоліса a_{Cor}.*

2.1.2. Принцип Д'Аламбера. Одним з найважливіших принципів механіки є принцип Д'Аламбера, який дозволяє перенести засоби і методи розв'язування статичних задач на задачі динаміки. Зокрема, він дозволяє статичними методами визначити динамічні реакції.

Нехай на матеріальну точку M, що має масу m, діє система активних сил, рівнодійну яких позначимо F_a, і реакція зв'язків R (якщо точка не є вільною). Під дією цих сил точка буде рухатися по відношенню до інерціальної системи відліку $Oxyz$ з деяким прискоренням a. Визначимо вектор

$$J = -ma, \tag{2.14}$$

який чисельно дорівнює добутку маси на прискорення точки та направлений протилежно вектору прискорення. Вектор J має розмірність сили і називається Д'Аламберовою силою інерції матеріальної точки. Тоді рух точки має наступну властивість: *якщо в будь-який момент часу до діючих на точку*

активних сил і реакцій зв'язків додати силу інерції, то отримана система сил буде зрівноваженою, тобто $F_a + R + J = 0$.

Останнє положення виражає принцип Д'Аламбера для матеріальної точки. Розглянемо механічну систему, яка складається з n матеріальних точок та сформулюємо для неї принцип Д'Аламбера.

Принцип Д'Аламбера. [113, с.37] *Під час руху системи будь-яке її положення можна розглядати як положення рівноваги, якщо до активних сил, що діють на систему в цьому положенні, додати фіктивні сили інерції.*

Виходячи з даного принципу, для кожної i-ї точки системи при $i = \overline{1,n}$ вірною є рівність:

$$F_i + R_i + J_i = 0, \tag{2.15}$$

де F_i – діюча на точку активна сила, R_i – реакція накладених на точку зв'язків, $J_i = -m_i a_i$ – сила інерції точки.

З формули (2.15) видно, що принцип Д'Аламбера еквівалентний основному рівнянню динаміки, і навпаки, з основного рівняння динаміки випливає даний принцип. Дійсно, якщо у рівності (2.15) перенести вектор $J_i = -m_i a_i$ у іншу частину рівності, то отримаємо другий закон Ньютона: $F_i + R_i = m_i a_i$.

2.2. Задачі керованості та оптимального керування лінійними системами

2.2.1. Керованість лінійних систем. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.16}$$

де $x_i(t)$ – функції, які характеризують стан системи, а $u_k(t)$ – керуючі впливи у момент часу t.

Рівняння (2.16) є лінійними автономними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, які можна інтерпретувати як рівняння у варіаці-

ях відносно встановленого руху або відносно стану рівноваги деякої системи матеріальних точок.

Система (2.16) еквівалентна векторному диференціальному рівнянню

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \tag{2.17}$$

де $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – фазовий вектор, що визначає стан системи, $u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ – прикладені до системи керування, $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ik})$ – матриці зі сталими коефіцієнтами, які мають розмірності $n \times n$ та $n \times m$, відповідно.

Очевидно, що початок координат $x = 0$ є станом рівноваги для вільної або некерованої системи, для якої $u \equiv 0$. Наведемо означення керованості автономної системи.

Означення 2.1. [114, с.91] *Система* (2.17) *називається керованою, якщо для будь-яких двох точок* x_0 *та* x_1 *з* $\mathbb{R}^n$ *існує припустиме обмежене вимірне керування* $u(t)$ *на відрізку* $t \in [0; t_1]$ *таке, що система* (2.17) *має розв'язок* $x(t)$*, який задовольняє крайові умови* $x(0) = x_0$*,* $x(t_1) = x_1$*.*

Розглянемо лему про існування єдиного розв'язку задачі Коші для системи з керуванням.

Лема 2.1. *Нехай* $t_1 > 0$*,* $u(t) \in L^\infty[0; t_1]$ *– припустиме керування,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Тоді задача Коші*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) =& Ax(t) + Bu(t), \qquad t \in [0; t_1], \\ & x(0) = x_0 \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок

$$x(t; x_0, u) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \qquad t \in [0; t_1], \tag{2.18}$$

де $e^{tA} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}A^k$ *– збіжний ряд, який допускає почленне диференціювання та інтегрування [115].*

Сформулюємо критерій керованості автономної лінійної системи (критерій Калмана).

Теорема 2.2 (Критерій Калмана). [114, с.91] *Автономна лінійна система* (2.17) *в* $\mathbb{R}^n$ *керована тоді і тільки тоді, коли*

$$rank(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n. \tag{2.19}$$

2.2.2. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з інтегральним функціоналом якості. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{2.20}$$

де $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазові змінні, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(X \times U)$. Для припустимого керування $u(t)$, яке є вимірною обмеженою функцією на відрізку $t \in [t_0, t_1]$, при будь-яких початкових умовах $x(t_0) = \xi_0$ однозначно визначається розв'язок системи $x(t; \xi_0, u)$.

Припустимо, що задано функціонал

$$J(\xi_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(x(t; \xi_0, u), u(t)\right) dt, \tag{2.21}$$

де f_0 – функція, що задовольняє умови існування інтеграла (2.21) для будь-якого початкового стану $x_0 \in X$ та припустимого керування $u(t)$.

Сформулюємо ***основну задачу оптимального керування*** [116, с.18]: нехай у фазовому просторі X задано дві точки $\xi_0 \in X$ та $\xi_1 \in X$. Тоді серед усіх припустимих керувань $u = u(t)$, які переводять фазову точку з положення ξ_0 у ξ_1 знайти таке, для якого функціонал $J(\xi_0, u)$ приймає найменше можливе значення.

Час t_1 може бути фіксованим або вільним. Керування $u = u(t)$, яке розв'язує задачу оптимального керування, називають оптимальним, а відповідну йому криву $x(t; \xi_0, u)$ – оптимальною траєкторією. Функціонал $J(\xi_0, u)$ називають функціоналом якості [116].

Наведемо теорему, яка дає можливість розв'язати сформульовану основну задачу. Для цього додамо до змінних стану $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ штучну змінну x_0 з диференціального рівняння

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u),$$

де $f_0 = f_0\left(x(t; \xi_0, u), u(t)\right)$. Позначимо $f(x, u) = (f_1(x, u), ..., f_n(x, u))^T$. Тоді для розв'язку задачі Коші

$$\dot{x}_i = f_i(x,u), \qquad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0; t_1],$$
$$x_0(t_0) = 0, \quad x(t_0) = \xi_0,$$

виконується властивість

$$x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(x(t; \xi_0, u), u(t)\right) dt.$$

Введемо спряжені змінні $p_0, ..., p_n, x_1, ...x_n, u$ та розглянемо функцію Гамільтона:

$$H(p_0, ..., p_n, x_1, ...x_n, u) = \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(x, u). \tag{2.22}$$

За допомогою функції H запишемо гамільтонову систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = \overline{0, n}. \tag{2.23}$$

Система (2.23) містить $2n + 2$ звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $x_0(t), ..., x_n(t)$ та $p_0(t), ..., p_n(t)$.

Теорема 2.3 (Принцип максимуму Понтрягіна). [116, с.25] *Нехай $u = \widetilde{u}(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ – таке припустиме керування, що виконується умова $x(t_1; \xi_0, \widetilde{u}(t)) = \xi_1$. Для оптимальності керування $\widetilde{u}(t)$ і траєкторії $\widetilde{x}(t) = x(t; \xi_0, u(t))$ необхідно існування такої ненульової неперервної вектор-функції*

$$p(t) = (p_0(t), ..., p_n(t)),$$

що $x = \widetilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \widetilde{u}(t)$ задовольняють систему (2.23) *та виконуються умови:*

1. $H(p(t),\widetilde{x}(t),\widetilde{u}(t)) = \sup\limits_{u\in U} H(p(t),\widetilde{x}(t),u), \quad t\in[t_0,t_1]$*;*

2. $p_0(t_1)\leqslant 0$, $\sup\limits_{u\in U} H(p(t_1),\widetilde{x}(t_1),u) = 0$.

Якщо величини $x=\widetilde{x}(t)$, $p(t)$, $u=\widetilde{u}(t)$ *задовольняють систему* (2.23) *та умову 1, то* $p_0(t)\equiv const$, $\sup\limits_{u\in U} H(p(t),\widetilde{x}(t),u)\equiv const$, *тобто умову 2 можна перевірити для довільного* $t\in[t_0,t_1]$.

2.3. Застосування теорії напівгруп лінійних операторів до систем із розподіленими параметрами

Рух багатьох механічних систем із розподіленими параметрами можна описати рівняннями в частинних похідних, а представлення таких рівнянь у нескінченновимірних просторах пов'язано з використанням необмежених операторів диференціювання. Тому методика досліджень, яка застосовувалась до обмежених породжуючих операторів, не може бути безпосередньо застосована до моделей механічних систем із пружними елементами.

Ефективним підходом до дослідження руху систем із розподіленими параметрами на нескінченному проміжку часу є теорія неперервних напівгруп операторів у банаховому просторі. Такий підхід дає можливість доводити існування та коректність розв'язків задачі Коші спираючись на властивості дисипативності породжуючого оператора, або за допомогою оцінки норми його резольвенти.

Нехай E – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$. У даному просторі розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \tag{2.24}$$

де $A: D(A)\longrightarrow E$ – лінійний оператор, який має щільну в E область визначення $D(A)$, $x(t)\in E$.

Означення 2.2. [117, с.38] *Розв'язком рівняння* (2.24) *на відрізку* $[0,T]$ *називається функція* $x(t)$*, яка задовольняє умови:*

1) $x(t)\in D(A)$ *при всіх* $t\in[0,T]$*;*

2) в кожній точці $t\in[0,T]$ *існує сильна похідна* $\frac{d}{dt}x(t)$ *функції* $x(t)$*;*

3) рівняння (2.24) *задовольняється при всіх* $t \in [0, T]$.

Розв'язок такого типу будемо називати класичним розв'язком рівняння (2.24). Під задачею Коші на відрізку $[0, T]$ будемо розуміти задачу про знаходження розв'язку рівняння (2.24) на $[0, T]$, який задовольняє початкову умову

$$x(0) = x_0 \in D(A). \tag{2.25}$$

Означення 2.3. [117, с.38] *Задача Коші коректна на відрізку* $[0, T]$, *якщо: 1) при будь-якому* $x_0 \in D(A)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2.24), (2.25) *на* $[0, T]$;
2) з умов $x_n(0) \longrightarrow 0$, $x_n(0) \in D(A)$, *для відповідних розв'язків* $x_n(t)$ *випливає, що* $x_n(t) \longrightarrow 0$ *при будь-якому* $t \in [0, T]$.

Зауваження 2.1. [117, с.39] *З коректності задачі Коші* (2.24), (2.25) *на будь-якому відрізку* $[0, T]$, $T > 0$, *випливає коректність задачі на всій піввісі* $[0; \infty)$.

Якщо задача Коші коректна на піввісі $[0; \infty)$, то для кожного $t \geqslant 0$ визначено оператор $M(t)$, який ставить у відповідність елементу $x_0 \in D(A)$ значення розв'язку $x(t)$ задачі (2.24), (2.25) у момент часу t:

$$x(t) = M(t)x_0, \qquad t \in [0; \infty). \tag{2.26}$$

Оператор $M(t)$ є адитивним та однорідним, так як рівняння (2.24) є лінійним та виконується властивість 1) з означення 2.3. Крім того, з властивості 2) означення 2.3 випливає неперервність оператора $M(t)$. Так як $D(A)$ щільна в E, то оператор $M(t)$ може бути розширено до лінійного обмеженого оператора, визначеного на всьому просторі E. Розширений оператор також будемо позначати через $M(t)$.

Таким чином, для будь-якої коректної задачі Коші на $[0; \infty)$ існує однопараметричне сімейство лінійних обмежених операторів $M(t) : E \longrightarrow E$ при $t \geqslant 0$, за допомогою яких формула (2.26) визначає класичний розв'язок задачі Коші при $x_0 \in D(A)$.

Для довільного $x_0 \in E$ функцію $x(t) = M(t)x_0$ будемо називати ***узагальненим розв'яком*** рівняння (2.24).

Означення 2.4. [118, с.4] *Однопараметричне сімейство* $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ *лінійних обмежених операторів* $M(t) : E \longrightarrow E$ *називається сильно неперервною напівгрупою лінійних обмежених операторів* (C_0*-напівгрупою) в* E*, якщо*

1) $M(0) = I$*,* I *– одиничний оператор у* E*;*

2) $M(t+s) = M(t)M(s)$ *для усіх* $t, s \geqslant 0$*;*

3) $\lim\limits_{t\to+0} M(t)x = x$ *для усіх* $x \in E$*.*

Означення 2.5. [118, с.1] *Лінійний оператор* $A : D(A) \longrightarrow E$ *називається інфінітезимальним генератором півгрупи операторів* $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$*, якщо він визначений співвідношенням*

$$Ax = \lim_{t\to+0} \frac{M(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A), \tag{2.27}$$

де $D(A) = \{x \in E : \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{M(t)x - x}{t}$ *існує*$\}$.

Теорема 2.4. [118, с.4] *Нехай* $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ *–* C_0*-напівгрупа лінійних операторів у* E*. Тоді існують константи* $\omega \geqslant 0$ *і* $S \geqslant 0$ *такі, що*

$$\|M(t)\| \leqslant Se^{\omega t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty. \tag{2.28}$$

Зауваження 2.2. [118, с.8] *Якщо у формулі* (2.28) $\omega = 0$*, то напівгрупа* $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ *називається рівномірно обмеженою. Якщо* $\omega = 0$ *і* $M = 1$*, то* $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ *називається стискаючою* C_0*-напівгрупою.*

Для формулювання наступної теореми нагадаємо, що число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається ***регулярною точкою*** оператора A, якщо рівняння

$$(A - \lambda I)x = y$$

є коректним та щільно розв'язується відносно x. Позначимо $\rho(A)$ – сукупність усіх регулярних точок, яку називають ***резольвентною множиною*** оператора A. Якщо оператор A замкнений, то $\rho(A)$ складається тільки з тих λ, для яких існує обмежений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.

Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, який є визначеним при $\lambda \in \rho(A)$, називається ***резольвентою оператора*** A.

Теорема 2.5 (Теорема Хіллє-Іосіди). [118, с.8] *Лінійний (необмежений) оператор $A : D(A) \longrightarrow E$ є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ у E тоді і тільки тоді, коли:*
1) Оператор A є замкненим та $\overline{D(A)} = E$;
2) Резольвентна множина $\rho(A)$ містить інтервал $(0, +\infty)$, і при всіх $\lambda > 0$ виконується нерівність

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Якщо оператор $A : D(A) \longrightarrow E$ є інфінітезимальним генератором C_0-напівгрупи лінійних операторів в E, то таку напівгрупу позначають аналогічно до розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами символом $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$.

Ще один підхід до дослідження інфінітезимальних операторів стискаючих півгруп пов'язаний з використанням властивості дисипативності оператора A. Для описання даного підходу розглянемо лінійне диференціальне рівняння (2.24) у гільбертовому просторі H та позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярний добуток.

Означення 2.6. [118, с.13] *Лінійний оператор $A : D(A) \longrightarrow H$ з щільною областю визначення $D(A)$ в H називається дисипативним, якщо*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leqslant 0,$$

при $x \in D(A)$.

Позначимо $R(I-A)$ – область значень оператора $I-A$, та сформулюємо теорему про зв'язок між дисипативним оператором та стискаючими напівгрупами.

Теорема 2.6 (Люмера-Філліпса). [118, с.14] *Нехай лінійний оператор $A : D(A) \longrightarrow H$ має щільну область визначення в H.*
1. Якщо оператор A є дисипативним та існує таке значення $\lambda_0 > 0$, що

$$R(\lambda_0 I - A) = H,$$

то A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ у H.

2. Якщо A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ у H, то $R(\lambda I - A) = H$ для будь-якого $\lambda > 0$ і оператор A – дисипативний.

Останню теорему можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.7. [119, с.283] *Нехай $A : D(A) \longrightarrow H$ – щільно-визначений замкнений лінійний оператор. Якщо A та спряжений до нього A^* – дисипативні, то A є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0-напівгрупи $\{M(t)\}_{t\geqslant 0}$ у H.*

2.4. Функціонали Ляпунова зі знакосталою похідною у задачах стійкості руху нелінійних механічних систем

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \tag{2.29}$$

де $f \in C^1(\overline{G})$, G – область в $\mathbb{R}^n$, $0 \in G$, $x(t) = (x_1(t), ...x_n(t))^T$ – фазовий вектор, $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^T$.

Припустимо, що $x \equiv 0$ – розв'язок системи (особлива точка) (2.29), тобто $f(0) = 0$. Розв'язок задачі Коші для системи (2.29) з початковою умовою

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in G,$$

будемо позначати $x(t, x_0)$.

Розглянемо питання стійкості тривіального розв'язку системи (2.29) із застосуванням методу функцій Ляпунова. Наведемо ряд необхідних означень з [120, с.17].

Означення 2.7. *Функція $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ називається додатньо визначеною, якщо:*

1) $V(x) > 0, \quad \forall\, x \in G \setminus \{0\}$;

2) $V(0) = 0$.

Функція $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *називається від'ємно визначеною, якщо:*
1) $V(x) < 0, \quad \forall\, x \in G \setminus \{0\}$*;*
2) $V(0) = 0$*.*

Функція $V(x)$ *називається знаковизначеною, якщо вона є або додатньо визначеною, або від'ємно визначеною.*

Означення 2.8. *Функція* $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *називається знакододатньою, якщо* $V(x) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in G$*. Функція* $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *називається знаковід'ємною, якщо* $V(x) \leqslant 0, \quad \forall\, x \in G$*. Функція* $V(x)$ *називається знакосталою, якщо вона є знакододатньою або знаковід'ємною.*

Нагадаємо, що похідною функції $V(x) \in C^1(G)$ в силу системи (2.29) називається функція

$$\dot{V}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(x) = (\nabla V, f).$$

Сформулюємо теореми, що відповідають на питання про стійкість нульового стану рівноваги за умови існування функції Ляпунова.

Теорема 2.8 (Ляпунова про стійкість). [120, с.20] *Якщо існує додатньо визначена функція* $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$*,* $V(x) \in C^1(G)$*, похідна якої в силу системи* (2.29) $\dot{V}(x)$ *є знаковід'ємною, то розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *є стійким за Ляпуновим.*

Теорема 2.9 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). [120, с.21] *Якщо існує додатньо визначена функція* $V(x) : G \longrightarrow \mathbb{R}^1$*,* $V(x) \in C^1(G)$*, похідна якої в силу системи* (2.29) $\dot{V}(x)$ *від'ємно визначена, то розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Означення 2.9. *Множина* $M \subseteq G$ *називається інваріантною для системи* (2.29)*, якщо для кожного* $x_0 \in M$ *маємо* $x(t, x_0) \in M$ *для всіх* $t \in [0; \infty)$*.*

Теорема 2.10 (Барбашина-Красовського). [121] *Нехай існує додатньо визначена функція* $V(x) \in C^1(G)$*,* $\dot{V}(x) \leqslant 0 \;\forall\; x \in G$*, а множина* $K = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ *не містить додатних напівтраєкторій системи* (2.29)*,*

відмінних від $x = 0$. *Тоді розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Теорема 2.11 (Принцип інваріантності Ла-Салля). [122] *Нехай існує функція* $V(x) \in C^1(G)$ *така, що* $V(x)$ *обмежена знизу в* G, $\dot{V}(x) \leqslant 0$, G *– інваріантна множина,* $x_0 \in G$, $\Omega(x_0) \subseteq G$. *Тоді* $\Omega(x_0)$ *міститься у інваріантній підмножині множини* $K_L = \{x : \ V(x) = L, \ \dot{V}(x) = 0\}$ *при деякому* $L = const$.

У своїй роботі [123] О.М. Ляпунов виклав постановку задачі про стійкість за усіма змінними, але вказав, що можна розглядати більш загальну задачу про стійкість руху $x_s = 0$ по відношенню до частини змінних $x_1, ..., x_n$, наприклад, по відношенню до перших m змінних $x_1, ..., x_m$.

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь у векторному вигляді

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.30}$$

де $x = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)^T$, $f = (f_1, ...f_m, f_{m+1}, ..., f_n)^T$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Дослідимо питання стійкості розв'язку $x = 0$ по відношенню до частини змінних $x_1, ...x_m$. Введемо наступні позначення

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \quad \|z\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} x_j^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Припустимо [124], що праві частини системи (2.30) є неперервними та задовольняють умові єдиності розв'язків в області $t \geqslant 0$, $\| \ y \ \| \leqslant H$ ($H = const > 0$), $\|z\| < +\infty$. Також припускаємо, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (2.30) може бути визначено при всіх $t \geqslant 0$, для яких $\|y(t)\| \leqslant H$.

Позначимо $x = x(t; t_0, x_0)$ – розв'язок системи (2.30), який визначено початковою умовою $x = x(t_0; t_0, x_0) = x_0$. Введемо наступне означення.

Означення 2.10. [124, с.15] *Розв'язок* $x = 0$ *системи* (2.30) *називається стійким за частиною змінних (y-стійким), якщо для будь-яких* $\varepsilon > 0$ *та* $t_0 \geqslant 0$ *знайдеться* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *таке, що з* $\|x_0\| < \delta$ *випливає* $\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для усіх* $t \geqslant t_0$.

Означення 2.11. [124, с.16] *Розв'язок $x = 0$ системи* (2.30) *називається асимптотично y-стійким, якщо він є y-стійким та для будь-якого $t_0 \geqslant 0$ існує $\delta(t_0) > 0$ таке, що кожен розв'язок $x(t; t_0, x_0)$ з $\|x_0\| < \delta$ є визначеним для усіх $t \geqslant t_0$ та задовольняє умову $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \|y(t; t_0, x_0)\| = 0$.*

Означення та теореми про стійкість за частиною змінних формулюються аналогічно до тверджень про стійкість за усіма змінними.

Розглянемо функцію $V(t, x) \in \mathbb{R}$. Похідна в силу системи для цієї функції має вигляд

$$\dot{V}(t, x_0) = \frac{d}{d\tau} V(\tau, x(\tau; t, x_0))\Big|_{\tau=t}.$$

Означення 2.12. [124, с.22] *Функція $W(x_1, ...x_m) \equiv W(y)$ називається додатньо визначеною, якщо в області $\|y\| \leqslant H$ вона є невід'ємною і $W = 0$ тоді і тільки тоді, коли $y = 0$. Функція $W(y)$ називається від'ємно визначеною, якщо $-W(y)$ – додатньо визначена.*

Означення 2.13. [124, с.23] *Функція $V(t, x)$ називається y-додатньо визначеною, якщо існує $W(y)$ – додатньо визначена і виконується нерівність $V(t, x) \geqslant W(y)$. Функція $V(t, x)$ називається y-від'ємно визначеною, якщо існує $W(y)$ – додатньо визначена і виконується нерівність $-V(t, x) \geqslant W(y)$.*

Теорема 2.12 (Про стійкість за частиною змінних). [124, с.28] *Якщо для системи* (2.30) *існує така y-додатньо визначена функція $V(t, x)$, похідна якої в силу системи $\dot{V}(t, x) \leqslant 0$, то розв'язок $x = 0$ системи є y-стійким.*

Теорема 2.13 (Про асимптотичну стійкість за частиною змінних). [124, с.33] *Якщо для системи* (2.30) *існує така y-додатньо визначена функція $V(t, x)$, яка допускає нескінченно малу найвищу границю по $x_1, ..., x_k$ $(m \leqslant k \leqslant n)$, та похідна якої в силу системи від'ємно визначена відносно $x_1, ..., x_k$, то розв'язок $x = 0$ системи є асимптотично y-стійким.*

Наведемо теорему про часткову асимптотичну стійкість тривіального розв'язку абстрактного диференціального рівняння. Нехай E – банахів простір,

X – замкнена підмножина в E. Розглянемо абстрактну задачу Коші:

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in X, \tag{2.31}$$

де $F : D(F) \longrightarrow E$ – оператор, що породжує неперервну напівгрупу нелінійних операторів у X, $D(F) \subset X$, $0 \in D(F)$.

Означення 2.14. [125, с.632] *Розв'язок $x = 0$ рівняння (2.31) називається асимптотично стійким по відношенню до функціоналу y, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ задачі (2.31) з $\|x_0\| < \delta$ виконуються властивості:*

$$y(x(t)) < \varepsilon \text{ при всіх } t \geqslant 0, \tag{2.32}$$

$$\lim_{t \to +\infty} y(x(t)) = 0. \tag{2.33}$$

Теорема 2.14. [125, с.635] *Нехай F – інфінітезимальний генератор неперервної напівгрупи $S(t)$ нелінійних операторів в X, $F(0) = 0$, і нехай $y : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ – неперервний функціонал. Припустимо, що існує диференційований за Фреше функціонал $V : E \longrightarrow \mathbb{R}$, який задовольняє наступні умови:*

1) для деяких функцій $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ виконується нерівність

$$\alpha_1(y(x)) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|) \quad \text{для всіх} \quad x \in X,$$

де клас $\mathcal{K}$ складається з усіх неперервних строго зростаючих функцій $\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, які мають властивість $\alpha(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leqslant 0$ при всіх $x \in D(F)$;

3) існує таке $\delta > 0$, що при будь-якому $\|x_0\| < \delta$ відповідна множина

$$\bigcup_{t \geqslant 0} \{S(t)x_0\}$$

є відносно компактною у X;

4) множина $Ker\ y = \{x \in X \mid y(x) = 0\}$ є інваріантною для (2.31), тобто якщо $y(S(\tau)x_0) = 0$, $\tau \geqslant 0$, то $y(S(t)x_0) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}^+$;

5) множина

$$M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \backslash Ker\ y$$

не містить цілих напівтраєкторій системи (2.31), *визначених для* $t \in \mathbb{R}^+$. *Тоді особлива точка* $x_0 = 0$ *системи* (2.31) *є асимптотично стійкою по відношенню до* y.

РОЗДІЛ 3
СПЕКТРАЛЬНА КЕРОВАНІСТЬ ПЛАСТИНИ КІРХГОФА

3.1. Модель керованого руху механічної системи з пружною пластиною

Розглянемо механічну систему, яка складається з твердого тіла та приєднаної до нього тонкої пружної пластини. З твердим тілом пов'язано декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Тверде тіло B обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю $\omega(t)$ (Рис. 3.1.).

Система, яка розглядається у роботі, являє собою наближену модель супутника з панеллю сонячних батарей [37].

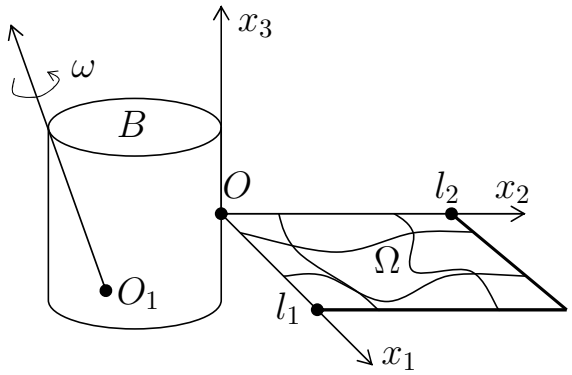

Рис. 3.1. Тверде тіло з тонкою пружною пластиною

Припустимо, що пластина має товщину $h > 0$ і в недеформованому стані займає замкнену область, яка має вигляд $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \leqslant \dfrac{h}{2}$. Будемо вважати, що в будь-який момент часу t серединну поверхню пластини можна задати рівнянням $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Щоб описати поведінку функції $w = w(x_1, x_2, t)$ в області Ω, застосуємо модель Кірхгофа коливання тонкої пластини [2]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\triangle^2 w(x_1, x_2, t) = \widetilde{F}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{3.1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – густина, $D > 0$ – жорсткість пластини при згинанні, $\widetilde{F}$ – поперечна компонента зовнішньої сили, яка діє на пластину. Будемо вважати, що пластина шарнірно закріплена на границі області Ω (на частинах контуру відсутні прогин та згинаючий момент), тобто компоненти вектора переміщення і вектора граничних сил дорівнюють нулю на $\partial\Omega$ [2]:

$$w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}\bigg|_{x_1=0,\, x_1=l_1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2}\bigg|_{x_2=0,\, x_2=l_2} = 0, \tag{3.4}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, який показує у скільки разів відносне зменшення поперечного розміру деформованого тіла більше за відносне збільшення його довжини при розтягуванні.

Щоб записати вираз для сили інерції $\widetilde{F}$ у рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$ застосуємо принцип Д'Аламбера та формулу додавання прискорень [112, 126]. Припустимо, що e_1, e_2, e_3 – орти декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, пов'язаної з твердим тілом B. Нехай радіус-вектор OM для довільної точки M на серединній поверхні пластини має вигляд:

$$r_M = x_1e_1 + x_2e_2 + w(x_1, x_2, t)e_3. \tag{3.5}$$

Користуючись результатами підрозділу 2.1, запишемо суму переносного та Коріолісового прискорень точки M наступним чином:

$$a_M = V_0^* + \omega \times V_0 + \dot{\omega} \times r_M + \omega \times (\omega \times r_M) + 2\omega \times r_M^*, \tag{3.6}$$

де V_0 – абсолютна швидкість точки O, $\omega = \omega_1e_1 + \omega_2e_2 + \omega_3e_3$ – кутова швидкість твердого тіла B, $\dot{\omega}$ – кутове прискорення; зірочкою позначені відносні похідні векторів у рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$. Тоді за принципом Д'Аламбера сила інерції, яка обумовлена переносним рухом тіла B, для точки M має вигляд $F = -\rho h a_M$, а $\tilde{F} = (F, e_3)$ у рівнянні (3.1).

Отже маємо, що

$$F = -\rho h \left[V_0^* + \omega \times V_0 + \dot{\omega} \times r_M + \omega \times (\omega \times r_M) + 2\omega \times r_M^*\right],$$

де $a_e = V_0^* + \omega \times V_0 + \dot{\omega} \times r_M + \omega \times (\omega \times r_M)$ – переносне прискорення, яке складається з прискорення полюса $a_0 = V_0^* + \omega \times V_0$, доцентрового прискорення $a' = \omega \times (\omega \times r_M)$ та обертального прискорення $a'' = \dot{\omega} \times r_M$;
$a_{Cor} = 2\omega \times r_M^*$ – прискорення Коріоліса.

Знайдемо значення сили F.

Нехай точка O_1 має координати (a_1, a_2, a_3) у системі координат $Ox_1x_2x_3$, тоді $O_1O = (-a_1, -a_2, -a_3)$. Знайдемо швидкість точки O:

$$V_0 = \omega \times O_1O = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{vmatrix} = (a_2\omega_3 - a_3\omega_2, a_3\omega_1 - a_1\omega_3, a_1\omega_2 - a_2\omega_1),$$

$V_0^* = (a_2\dot{\omega}_3 - a_3\dot{\omega}_2)\, e_1 + (a_3\dot{\omega}_1 - a_1\dot{\omega}_3)\, e_2 + (a_1\dot{\omega}_2 - a_2\dot{\omega}_1)\, e_3$, крім того,

$$\omega \times V_0 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ a_2\omega_3 - a_3\omega_2 & a_3\omega_1 - a_1\omega_3 & a_1\omega_2 - a_2\omega_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_1\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) - \omega_1(a_2\omega_2 + a_3\omega_3), a_2\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right) - \omega_2(a_1\omega_1 + a_3\omega_3),\right.$$
$$\left. a_3\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - \omega_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2)\right).$$

Оскільки система координат $Ox_1x_2x_3$ пов'язана з твердим тілом (має таку ж кутову швидкість, що й тіло), то $\dot{\omega} = \omega^* + \omega \times \omega = \omega^* = \dot{\omega}_1 e_1 + \dot{\omega}_2 e_2 + \dot{\omega}_3 e_3$,

$$\dot{\omega} \times r_M = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dot{\omega}_1(t) & \dot{\omega}_2(t) & \dot{\omega}_3(t) \\ x_1 & x_2 & w\,(x_1, x_2, t) \end{vmatrix} = (\dot{\omega}_2 w - x_2\dot{\omega}_3, \dot{\omega}_3 x_1 - \dot{\omega}_1 w, \dot{\omega}_1 x_2 - x_1\dot{\omega}_2),$$

$$\omega \times (\omega \times r_M) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ \omega_2 w - x_2\omega_3 & \omega_3 x_1 - \omega_1 w & \omega_1 x_2 - x_1\omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\omega_1\omega_2 x_2 - x_1\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) + \omega_1\omega_3 w, \omega_1\omega_2 x_1 - x_2\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right) + \omega_2\omega_3 w,\right.$$

$$\omega_1\omega_3 x_1 - w\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) + x_2\omega_2\omega_3\Big).$$

Обчислимо відносну швидкість за допомогою формули $r_M^* = \dot{w}\left(x_1, x_2, t\right) e_3$. Тоді прискорення Коріоліса буде мати вигляд

$$2\omega \times r_M^* = 2\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \\ 0 & 0 & \dot{w} \end{vmatrix} = 2\left(\omega_2\dot{w}\left(x_1, x_2, t\right), -\omega_1\dot{w}\left(x_1, x_2, t\right), 0\right).$$

Оскільки $\tilde{F} = (F, e_3)$, то права частина рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{F} = -\rho h\left[(a_1\dot{\omega}_2 - a_2\dot{\omega}_1) + a_3\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) - \omega_3(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) + \dot{\omega}_1 x_2 - x_1\dot{\omega}_2 + \right.\\ \left. + \omega_1\omega_3 x_1 - w\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) + x_2\omega_2\omega_3\right] =\\ = -\rho h[(x_1-a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2) + (x_2-a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1) + (\omega_1^2+\omega_2^2)\times\\ \times (a_3 - w(x_1, x_2, t))]. \quad (3.7)\end{aligned}$$

Перепишемо рівняння (3.1) з урахуванням формули (3.7) наступним чином:

$$\frac{\partial^2 w\left(x_1, x_2, t\right)}{\partial t^2} + \alpha^2\Delta^2 w\left(x_1, x_2, t\right) = f(x_1, x_2, t), \quad (3.8)$$

де $f = -\left[(x_1-a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2) + (x_2-a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1) + (\omega_1^2+\omega_2^2)(a_3 - w)\right]$, $\alpha^2 = \dfrac{D}{\rho h} > 0$.

Отже, в результаті проведених досліджень отримано модель (3.8), (3.2)–(3.4) обертального руху механічної системи, яка складається з твердого тіла та пружної пластини, яка шарнірно закріплена на границі області Ω.

3.2. Зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь

Застосуємо метод Фур'є до розв'язання крайової задачі (3.8), (3.2)–(3.4). Для цього спочатку розділимо змінні x_1, x_2, t, підставляючи $w(x_1, x_2, t) = X_1(x_1)X_2(x_2)q(t) \not\equiv 0$ у задачу (3.8), (3.2)–(3.4) з $f = 0$. Так як $w(x_1, x_2, t) = X_1(x_1)X_2(x_2)q(t) \not\equiv 0$ – розв'язок однорідного рівняння (3.8), яке задовольняє умовам (3.3), (3.4), то

$$\ddot{w}_{tt} = \ddot{q}(t)X_1X_2,$$

$$\Delta^2 w\,(x_1, x_2, t) = X_1^{(4)}(x_1)X_2(x_2)q(t) + 2X_1''(x_1)X_2''(x_2)q(t) + X_1(x_1)X_2^{(4)}(x_2)q(t).$$

Підставимо отримані похідні в однорідне рівняння (3.8):

$$\ddot{q}X_1X_2 + \alpha^2 q\left(X_1^{(4)}X_2 + 2X_1''X_2'' + X_1X_2^{(4)}\right) = 0. \tag{3.9}$$

Розділимо останню рівність на вираз $X_1(x_1)X_2(x_2)q(t)$:

$$\frac{X_1^{(4)}X_2 + 2X_1''X_2'' + X_1X_2^{(4)}}{X_1X_2} \equiv -\frac{\ddot{q}}{q}\frac{1}{\alpha^2} = \lambda.$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{X_1^{(4)}}{X_1} + 2\frac{X_1''}{X_1}\frac{X_2''}{X_2} + \frac{X_2^{(4)}}{X_2} = \lambda. \tag{3.10}$$

Якщо кожний доданок в (3.10) тотожно дорівнює константі, то увесь вираз також дорівнює константі. Отже припустимо, що $\frac{X_1''}{X_1} = \mu_1$, $\frac{X_2''}{X_2} = \mu_2$, де μ_1, μ_2 – *const*, тоді $X_1^{(4)} = \mu_1 X_1'' = \mu_1^2 X_1$, $X_2^{(4)} = \mu_2 X_2'' = \mu_2^2 X_2$. Підставимо отримані рівності у (3.10), у результаті чого отримаємо, що $\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = (\mu_1 + \mu_2)^2 = \lambda$. Тоді рівняння (3.9) буде мати вигляд:

$$\ddot{q}(t) + \alpha^2\lambda q(t) = 0, \qquad \lambda = (\mu_1 + \mu_2)^2.$$

Підставимо вираз $w(x_1, x_2, t) = X_1(x_1)X_2(x_2)q(t) \neq 0$ в умову (3.3), у результаті чого отримаємо, що $X_1X_2q\,(\mu_1 + \nu\mu_2)|_{x_1=0, x_1=l_1} = 0$. З останньої рівності можна зробити висновок, що $X_1(0) = X_1(l_1) = 0$. Аналогічно з умови (3.4) отримаємо $X_2(0) = X_2(l_2) = 0$.

Таким чином, отримано дві задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X_1''(x_1) = \mu_1 X_1(x_1), \\ X_1(0) = X_1(l_1) = 0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} X_2''(x_2) = \mu_2 X_2(x_2), \\ X_2(0) = X_2(l_2) = 0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2. \tag{3.12}$$

Знайдемо розв'язки цих задач. Спочатку розглянемо задачу Штурма-Ліувілля (3.11). Розв'язок будемо шукати для різних значень константи μ_1.

При $\mu_1 = 0$ отримаємо рівняння $X_1''(x_1) = 0$. Розв'язок рівняння за даних крайових умов матиме вигляд: $X_1(x_1) \equiv 0$. Отже, можемо зробити висновок, що μ_1 не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля.

При $\mu_1 > 0$ маємо, що $X_1''(x_1) = \mu_1 X_1$. Позначимо $\alpha^2 = \mu_1$, а це означає, що $\alpha = \pm\sqrt{\mu}_1$, тоді розв'язок диференціального рівняння буде мати вигляд $X_1(x_1) = C_1 e^{\sqrt{\mu_1}x_1} + C_2 e^{-\sqrt{\mu_1}x_1}$. Отримаємо

$$\begin{cases} X_1(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X_1(l_1) = C_1 e^{\sqrt{l_1}x_1} + C_2 e^{-\sqrt{l_1}x_1} = 0. \end{cases}$$

Визначимо, чи має ця система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язок, для цього знайдемо її визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu}_1 l_1} & e^{-\sqrt{\mu}_1 l_1} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\mu}_1 l_1} - e^{\sqrt{\mu}_1 l_1} \neq 0.$$

Так як визначник системи не дорівнює нулю, то система має єдиний тривіальний розв'язок. Це означає, що $\mu_1 > 0$ не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо третій випадок. Нехай $\mu_1 < 0$, тоді $X_1''(x_1) = \mu_1 X_1$. Запишемо розв'язок цього диференціального рівняння:

$$X_1(x_1) = C_1 \cos\sqrt{-\mu_1}x_1 + C_2 \sin\sqrt{-\mu_1}x_1.$$

З крайових умов $X_1(0) = X_1(l_1) = 0$ маємо, що $C_1 = 0$ та $C_2 \sin\sqrt{-\mu_1}l_1 = 0$.

Так як $C_2 \neq 0$, то $\sin\sqrt{-\mu_1}l_1 = 0$, а отже $\mu_{1k} = -\left(\dfrac{\pi k}{l_1}\right)^2$ при $k \in \mathbb{N}$ – власні значення задачі Штурма-Ліувілля; $X_{1k}(x_1) = X_{1k}^0 \sin\left(\dfrac{\pi k x_1}{l_1}\right)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля при $k \in \mathbb{N}$.

Аналогічно отримаємо розв'язок другої задачі Штурма-Ліувілля (3.12):

$$\mu_{2j} = -\left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2, \quad X_{2j}(x_2) = X_{2j}^0 \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Пронормуємо власні функції $\{X_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{X_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ так, щоб вони утворювали ортонормовані базиси в $L_2(0, l_1)$ та $L_2(0, l_2)$ відповідно:

$$X_{1k}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right), \qquad X_{2j}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right). \tag{3.13}$$

Далі розв'язок задачі (3.8), (3.2)–(3.4) будемо шукати у вигляді ряду Фур'є:

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} C_{kj}(t) X_{1k}(x_1) X_{2j}(x_2). \tag{3.14}$$

Припустимо, що (3.14) можна почленно диференціювати, тоді рівняння (3.8) набуде вигляду:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \ddot{C}_{kj} X_{1k} X_{2j} + \alpha^2 \sum_{k,j=1}^{\infty} C_{kj} \left(X_{1k}^{(4)} X_{2j} + 2 X_{1k}'' X_{2j}'' + X_{1k} X_{2j}^{(4)} \right) = \sum_{k,j=1}^{\infty} f_{kj} X_{1k} X_{2j}.$$

У результаті спрощення отримаємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{C}_{kj} + \alpha^2 \lambda_{kj} C_{kj} = f_{kj}, \qquad \lambda_{kj} = (\mu_{1k} + \mu_{2j})^2, \qquad (k, j) \in \mathbb{N}^2, \tag{3.15}$$

де f_{kj} – коефіцієнти Фур'є правої частини рівняння (3.8) відносно ортонормованої системи $\{X_{1k}(x_1) X_{2j}(x_2)\}_{k,j=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$:

$$f_{kj} = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, t) \sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j} \left(l_1 (-1)^k \left((-1)^j - 1 \right) (\dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3) - l_2 (-1)^j \left((-1)^k - 1 \right) (\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3) + \right.$$

$$+ \left((-1)^k - 1 \right) \left((-1)^j - 1 \right) \left(a_1 \omega_1 \omega_3 - a_1 \dot{\omega}_2 + a_2 \omega_2 \omega_3 + a_2 \dot{\omega}_1 - a_3 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \right) \right) +$$

$$\left. + \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{\sqrt{l_1 l_2}} C_{kj}(t) \right).$$

В залежності від парності значень k та j ми отримаємо наступний вираз для f_{kj}:

$$f_{kj} = \begin{cases} 0, & k \text{ - парне, } j \text{ - парне,} \\ \dfrac{2 l_1 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j} (\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega}_2), & k \text{ - парне, } j \text{ - непарне,} \\ \dfrac{2 l_2 \sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j} (\omega_2 \omega_3 + \dot{\omega}_1), & k \text{ - непарне, } j \text{ - парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j} \left(\dot{\omega}_1 (2a_2 - l_2) - \dot{\omega}_2 (2a_1 - l_1) + \right. & \\ + \omega_2 \omega_3 (2a_2 - l_2) + \omega_1 \omega_3 (2a_1 - l_1) - & \\ \left. - 2a_3 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right), & k \text{ - непарне, } j \text{ - непарне.} \end{cases} \tag{3.16}$$

3.3. Умови керованості моделі коливань пластини з нескінченною кількістю модальних координат

Розглянемо модель, що відповідає повільним обертанням тіла-носія, при цьому будемо вважати, що впливом доцентрових прискорень можна знехтувати у порівнянні з прискореннями, які зумовлені дією керуючих моментів. При цих припущеннях лінеаризуємо формули (3.16), відкинувши величини порядку $o(|C_{kj}|, \left|\dot{C}_{kj}\right|, |\omega_k|, |\dot{\omega}_k|)$ при $|C_{kj}| \longrightarrow 0, \left|\dot{C}_{kj}\right| \longrightarrow 0, |\omega_k| \longrightarrow 0, |\dot{\omega}_k| \longrightarrow 0$. У результаті з диференціальних рівнянь (3.15) отримаємо наступну систему:

$$\ddot{C}_{kj} + C_{kj}\alpha^2\lambda_{kj} = \varphi_{kj}u_1(t) + g_{kj}u_2(t), \quad \lambda = (\mu_{1k} + \mu_{2j})^2, \quad (k,j) \in \mathbb{N}^2, \tag{3.17}$$

де

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \;\; j = 2m+1, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k = 2n+1, \;\; j = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}\left(2a_2 - l_2\right), & k = 2n+1, \;\; j = 2m+1, \end{cases}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k = 2n, \;\; j = 2m+1, \\ 0, & k = 2n+1, \;\; j = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}\left(l_1 - 2a_1\right), & k = 2n+1, \;\; j = 2m+1. \end{cases}$$

Надалі будемо вважати $u_1(t) = \dot{\omega}_1(t)$ та $u_2(t) = \dot{\omega}_2(t)$ функціями керування у системі (3.17).

Зробимо у системі (3.17) наступну заміну:

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{\lambda_{kj}}C_{kj} = \xi_{kj}(t), \\ \dot{C}_{kj}(t) = \eta_{kj}(t), \end{cases} \qquad \beta_{kj} = \alpha\sqrt{\lambda_{kj}} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right) > 0.$$

Тоді система (3.17) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj}\eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj}\xi_{kj} + \varphi_{kj}u_1 + g_{kj}u_2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Перепишемо нескінченну систему (3.18) у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_{kj} \\ \dot{\eta}_{kj} \end{pmatrix} = A_{kj} \begin{pmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \end{pmatrix} + B_{kj} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad (k,j) \in \mathbb{N}^2, \tag{3.19}$$

де $A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}$, $B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{kj} & g_{kj} \end{pmatrix}$.

Оскільки коефіцієнти при керуванні $\varphi_{kj} = g_{kj} = 0$ у кожному блоці системи (3.19) з парними індексами (k,j), то будь-яка підсистема системи (3.19), що містить змінні (ξ_{kj}, η_{kj}) з парними індексами (k,j), не є керованою. Таким чином, множину індексів $(k,j) \in \mathbb{N}^2$ можна розбити на дві підмножини: $L_0 = \{(k,j) \in \mathbb{N}^2 | k$ – непарне або j –непарне$\}$, $\overline{L} = \{(k,j) \in \mathbb{N}^2 | k$ – парне та j – парне$\}$, $L_0 \cup \overline{L} = \mathbb{N}^2$.

Як зазначено вище, будь-яка підсистема системи (3.19) з індексами з $\overline{L}$ не є керованою. Дослідимо питання про керованість нескінченновимірної підсистеми системи (3.19) з індексами $(k,j) \in L_0$.

Для цього будемо вважати, що задано взаємно-однозначне відображення $\mathbb{N} \ni p \longmapsto (k_p, j_p) \in L_0$ між множинами $\mathbb{N}$ і L_0. Запишемо підсистему системи (3.19), що відповідає індексам з L_0, наступним чином:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\eta}_p \end{pmatrix} = A_p \begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} + B_p \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

де $\xi_p = \xi_{k_p j_p}$, $\eta_p = \eta_{k_p j_p}$, $A_p = A_{k_p j_p}$, $B_p = B_{k_p j_p}$.

Спочатку розглянемо питання про керованість двовимірних підсистем системи (3.20).

Теорема 3.1. [4, с.193] *Нехай задано натуральне число p. Підсистема системи* (3.20)*, що відповідає блоку з індексом p, є керованою тільки тоді, коли $\varphi_p \neq 0$ або $g_p \neq 0$.*

Доведення. Для того, щоб довести твердження скористаємося критерієм Калмана [127]. Спочатку знайдемо чому дорівнює добуток матриць

$$A_pB_p = \begin{pmatrix} 0 & \beta_p \\ -\beta_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_p & g_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_p\varphi_p & \beta_p g_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді $M = (B_p, A_pB_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_p\varphi_p & \beta_p g_p \\ \varphi_p & g_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Щоб знайти ранг отриманої матриці M необхідно перевірити, чи існує хоча б один ненульовий мінор другого порядку.

Розглянемо: $\det \begin{pmatrix} 0 & \beta_p\varphi_p \\ g_p & 0 \end{pmatrix} = -\beta_p\varphi_p g_p$, де $-\beta_p\varphi_p g_p \neq 0$ лише тоді, коли $\varphi_p \neq 0$ та $g_p \neq 0$ у припущенні, що $\beta_p > 0$.

Якщо $\varphi_p = 0$, а $g_p \neq 0$, то матриця M набуде наступного вигляду $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_p g_p \\ 0 & g_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг такої матриці також дорівнює двом, так як існує мінор $\begin{vmatrix} 0 & \beta_p g_p \\ g_p & 0 \end{vmatrix} = -g_p^2\beta_p \neq 0$.

Якщо $\varphi_p \neq 0$, а $g_p = 0$, то $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_p\varphi_p & 0 \\ \varphi_p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Визначник другого порядку $\begin{vmatrix} 0 & \beta_p\varphi_p \\ \varphi_p & 0 \end{vmatrix} = -\varphi_p^2\beta_p \neq 0$, а це означає, що ранг матриці M дорівнює двом.

Отже, з критерію Калмана випливає, що система (3.20) з одним блоком є керованою, якщо $\varphi_p \neq 0$ або $g_p \neq 0$. □

Зафіксуємо число m та розглянемо для (3.20) скінченновимірну підсистему з m блоками, які відповідають індексам $p = \overline{1,m}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\eta}_p \end{pmatrix} = A_p \begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} + B_p \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad p = \overline{1,m}. \tag{3.21}$$

Теорема 3.2. [4, с.193] *Система* (3.21) *з індексами* $p = \overline{1,m}$ *є керованою тільки тоді, коли* $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m \neq 0$, *та при деякому* p: $0 \leqslant p \leqslant m$,

виконується умова

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ \beta_1^2\varphi_1 & \beta_2^2\varphi_2 & \dots & \beta_m^2\varphi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(p-1)}\varphi_1 & \beta_2^{2(p-1)}\varphi_2 & \dots & \beta_m^{2(p-1)}\varphi_m \\ g_1 & g_2 & \dots & g_m \\ \beta_1^2 g_1 & \beta_2^2 g_2 & \dots & \beta_m^2 g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(q-1)} g_1 & \beta_2^{2(q-1)} g_2 & \dots & \beta_m^{2(q-1)} g_m \end{vmatrix} \neq 0,\ q+p=m.$$

Доведення. Щоб довести сформульоване твердження скористаємося критерієм Калмана, тобто перевіримо, що $\operatorname{rank}(B, AB, ..., A^{2m-1}B) = 2m$. Матриці A та B мають наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix} \in \operatorname{mat}(2m \times 2m), \quad A_p = \begin{pmatrix} 0 & \beta_p \\ -\beta_p & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} \in \operatorname{mat}(2m \times 2), \quad B_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_p & g_p \end{pmatrix}.$$

Позначимо $K = (B, AB, ..., A^{2m-1}B)$. Знайдемо елементи матриці K. Для цього спочатку обчислимо добутки $AB, A^2B, ..., A^{2m-1}B$:

$$AB = \begin{pmatrix} \beta_1\varphi_1 & \beta_1 g_1 \\ 0 & 0 \\ \beta_2\varphi_2 & \beta_2 g_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \beta_m\varphi_m & \beta_m g_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_1^2\varphi_1 & -\beta_1^2 g_1 \\ 0 & 0 \\ -\beta_2^2\varphi_2 & -\beta_2^2 g_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ -\beta_m^2\varphi_m & -\beta_m^2 g_m \end{pmatrix},$$

$$A^{2m-1}B = \begin{pmatrix} (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1}\varphi_1 & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1}g_1 \\ 0 & 0 \\ (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1}\varphi_2 & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1}g_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1}\varphi_m & (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1}g_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставимо отримані значення у матрицю $K = (B, AB, ..., A^{2m-1}B)$:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1}\varphi_1 & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1}g_1 \\ \varphi_1 & g_1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1}\varphi_2 & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1}g_2 \\ \varphi_2 & g_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1}\varphi_m & (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1}g_m \\ \varphi_m & g_m & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Спочатку розглянемо випадок, коли $\varphi_1 = 0$, ..., $\varphi_m = 0$, а $g_1 \neq 0$, ..., $g_m \neq 0$, тоді матриця, утворена ненульовими стовпцями матриці K, буде мати вигляд:

$$K^* = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 g_1 & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1}g_1 \\ g_1 & 0 & -\beta_1^2 g_1 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 g_2 & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1}g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & 0 & -\beta_m^2 g_m & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця K^* має розмірність $(2m \times 2m)$. Знайдемо ранг цієї матриці. Для цього розглянемо її визначник та зведемо його до блочного вигляду за допомогою перестановок рядків та стовпців. У результаті отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta_1 g_1 & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1} g_1 \\ g_1 & 0 & -\beta_1^2 g_1 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 g_2 & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1} g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & 0 & -\beta_m^2 g_m & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\prod_{p=1}^{m}(g_p^2\beta_p)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta_1^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 & -\beta_2^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta_m^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1} \\ 1 & -\beta_1^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_1^{2m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta_2^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_2^{2m-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\beta_m^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_m^{2m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{p=1}^{m}\left(g_p^2\beta_p\right)\prod_{1\leqslant n<l\leqslant m}\left(\beta_l^2-\beta_n^2\right)^2 \neq 0,$$

так як

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2m-1} & \beta_2^{2m-1} & \dots & \beta_m^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant n<l\leqslant m}\left(\beta_l^2-\beta_n^2\right)^2 \neq 0$$

є визначником Вандермонда, а $\beta_p = a\sqrt{\lambda_p} > 0$ при $p = \overline{1,m}$.

Отже, з отриманого результату можна зробити висновок, що $\operatorname{rank}(K^*) = 2m$. А це в свою чергу означає, що система (3.21) є керованою, згідно критерію Калмана.

2) Розглянемо більш загальний випадок, коли жодна з компонент матриці K не дорівнює нулю. Покажемо, що ранг такої матриці також дорівнює $2m$. Оберемо з матриці K визначник порядку $2m$ та покажемо, що він не дорівнює

нулю. Отже, при непарному m будемо мати, що

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_1\varphi_1 & \beta_1 g_1 & \dots & \dots & 0 & \beta_1^m\varphi_1 \\ \varphi_1 & g_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_1^{m-1}\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\varphi_2 & \beta_2 g_2 & \dots & \dots & 0 & \beta_2^m\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_m\varphi_m & \beta_m g_m & \dots & \dots & 0 & \beta_m^m\varphi_m \\ \varphi_m & g_m & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_m^{m-1}\varphi_m & 0 \end{vmatrix},$$

а при парному m:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_1\varphi_1 & \dots & \dots & \beta_1^{m-1}\varphi_1 & \beta_1^{m-1}g_1 \\ \varphi_1 & g_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\varphi_2 & \dots & \dots & \beta_2^{m-1}\varphi_2 & \beta_2^{m-1}g_2 \\ \varphi_2 & g_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_m\varphi_m & \dots & \dots & \beta_m^{m-1}\varphi_m & \beta_m^{m-1}g_m \\ \varphi_m & g_m & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

За допомогою елементарних операцій з визначниками отримаємо, що

$$\Delta_1 = \pm\beta_1\beta_2...\beta_m \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ g_1 & g_2 & \dots & g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{m-1}\varphi_1 & \beta_2^{m-1}\varphi_2 & \dots & \beta_m^{m-1}\varphi_m \end{vmatrix}^2.$$

Аналогічно

$$\Delta_2 = \pm\beta_1\beta_2...\beta_m \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ g_1 & g_2 & \dots & g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{m-2}g_1 & \beta_2^{m-2}g_2 & \dots & \beta_m^{m-2}g_m \end{vmatrix}^2.$$

Обидва визначники не будуть дорівнювати нулю лише при виконанні двох умов. По-перше, $\beta_1\beta_2...\beta_m \neq 0$ – ця умова виконується завжди, так як $\beta_m = \alpha\sqrt{\lambda_m} > 0$; по-друге, при деякому p, такому що $0 \leqslant p \leqslant m$, визначник

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ \beta_1^2\varphi_1 & \beta_2^2\varphi_2 & \dots & \beta_m^2\varphi_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(p-1)}\varphi_1 & \beta_2^{2(p-1)}\varphi_2 & \dots & \beta_m^{2(p-1)}\varphi_m \\ g_1 & g_2 & \dots & g_m \\ \beta_1^2 g_1 & \beta_2^2 g_2 & \dots & \beta_m^2 g_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{2(q-1)} g_1 & \beta_2^{2(q-1)} g_2 & \dots & \beta_m^{2(q-1)} g_m \end{vmatrix} \neq 0, \; q+p=m. \tag{3.22}$$

Таким чином доведено, що система (3.21) є керованою, якщо виконується умова (3.22). □

Нагадаємо, що система (3.20) є спектрально керованою [2], якщо для будь-якої множини $S \subset \mathbb{N}$, $S \neq \varnothing$, підсистема системи (3.20), що відповідає індексам $p \in S$, є керованою.

Таким чином, з теореми 3.2 випливає наступний результат про спектральну керованість системи (3.20).

Теорема 3.3. [4, с.197] *Система* (3.20) *є спектрально керованою тільки тоді, коли для кожного* $m \in \mathbb{N}$ *виконано умови теореми 3.2.*

3.4. Модельний приклад

У цьому підрозділі наведемо модельний приклад, який ілюструє застосування отриманих результатів.

Розглянемо механічну систему з пластиною Кірхгофа для таких значень параметрів:

$$l_1 = 1 \text{ м}, \quad l_2 = \pi \text{ м}, \quad \alpha = 1 \, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad a_1 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = -1 \text{ м}. \tag{3.23}$$

Знайдемо значення перших дев'яти власних частот β: $\beta_{11} = \pi^2 + 1$, $\beta_{21} = 4\pi^2 + 1$, $\beta_{31} = 9\pi^2 + 1$, $\beta_{12} = \pi^2 + 4$, $\beta_{22} = 4\left(\pi^2 + 1\right)$, $\beta_{32} = 9\pi^2 + 4$, $\beta_{13} = \pi^2 + 9$, $\beta_{23} = 4\pi^2 + 9$, $\beta_{33} = 9\left(\pi^2 + 1\right)$.

Розглянемо питання про керованість підсистеми з трьома низькочастотними модами. Для цього зафіксуємо число $m = 3$ та оберемо з отриманих значень три найменші: $0 < \beta_{11} < \beta_{12} < \beta_{13}$.

Для індексів $p = 1, 2, 3$ зробимо перепозначення $p \longmapsto (k_p, j_p)$:
$p = 1 \longmapsto (k_1, j_1) = (1, 1)$ (перша мода), $p = 2 \longmapsto (k_2, j_2) = (1, 2)$ (друга мода), $p = 3 \longmapsto (k_3, j_3) = (1, 3)$ (третя мода).

Виходячи з цих позначень, запишемо відповідну систему (3.21):

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\eta}_p \end{pmatrix} = A_p \begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} + B_p \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad p = 1, 2, 3, \tag{3.24}$$

де

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & \beta_p \\ -\beta_p & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_p & g_p \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \beta_{k_1 j_1} = \pi^2 + 1, \quad \beta_2 = \beta_{k_2 j_2} = \pi^2 + 4, \quad \beta_3 = \beta_{k_3 j_3} = \pi^2 + 9;$$

$$\varphi_1 = \varphi_{k_1 j_1} = -\left(\tfrac{4}{\pi^{3/2}} + \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right), \quad \varphi_2 = \varphi_{k_2 j_2} = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_3 = \varphi_{k_3 j_3} = -\left(\tfrac{4}{3\pi^{3/2}} + \tfrac{2}{3\sqrt{\pi}}\right);$$

$$g_1 = g_{k_1 j_1} = -\frac{2}{\pi^{3/2}}, \quad g_2 = g_{k_2 j_2} = 0, \quad g_3 = g_{k_3 j_3} = -\frac{2}{3\pi^{3/2}}.$$

Обчислимо визначник (3.22) з теореми 3.2 при $p = 1$, $q = m - p = 2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ \beta_1^2 g_1 & \beta_2^2 g_2 & \beta_3^2 g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\left(\frac{4}{\pi^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) & \frac{1}{\sqrt{\pi}} & -\left(\frac{4}{3\pi^{3/2}} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\right) \\ \frac{-2}{\pi^{3/2}} & 0 & \frac{-2}{3\pi^{3/2}} \\ -\left(\pi^2+1\right)^2 \frac{2}{\pi^{3/2}} & 0 & -\left(\pi^2+9\right)^2 \frac{2}{3\pi^{3/2}} \end{vmatrix}.$$

Виконаємо елементарні перетворення, які допоможуть звести визначник до простішого вигляду, в результаті отримаємо:

$$\Delta = \frac{4}{\pi^{7/2}} \begin{vmatrix} \left(\frac{4}{\pi} + 2\right) & 1 & \left(\frac{4}{3\pi} + \frac{2}{3}\right) \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \left(\pi^2+1\right)^2 & 0 & \frac{\left(\pi^2+9\right)^2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3\pi^{7/2}} \left(\left(\pi^2+1\right)^2 - \left(\pi^2+9\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{-4}{3\pi^{7/2}} \left(16\pi^2 + 80\right) \neq 0.$$

Отже, згідно теореми 3.2 система (3.24) є керованою при значеннях параметрів (3.23).

3.5. Висновки

У даному розділі розглянуто механічну систему, яка складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Зауважимо, що тверде тіло обертається не навколо фіксованої вісі, а виконує обертальний рух навколо нерухомої точки з трьома ступенями вільності, що відрізняє дану модель від багатьох досліджених раніше. При цьому пластина Кірхгофа є шарнірно закріпленою на границі області. До основних результатів розділу можна віднести наступні положення.

1. Побудовано математичну модель коливань пружної пластини, що шарнірно закріплена на границі відносно твердого тіла-носія. У цій моделі враховано сили інерції, які пов'язані з переносним рухом тіла-носія.
2. Запропоновано схему зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи диференціальних рівнянь із застосуванням методу Фур'є.
3. Уперше одержано умови керованості механічної системи для довільного скінченного набору координат (теорема 3.2) та умови спектральної керованості системи (3.20) (теорема 3.3).
4. Застосовність отриманих результатів проілюстровано за допомогою модельного прикладу, в якому розв'язано задачу керованості при заданих значеннях механічних параметрів.

РОЗДІЛ 4
ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ КОЛИВАННЯМИ ПЛАСТИНИ КІРХГОФА

4.1. Модель Кірхгофа з урахуванням моменту інерції перерізу пластини

У цьому розділі буде розглянуто математичну модель механічної системи, яка складається з твердого тіла та тонкої пружної пластини. Але на відміну від системи (3.1)–(3.4), що розглядалася у розділі 3, скористаємося моделлю пластини Кірхгофа, в якій враховано обертальний рух поперечного перерізу [1, 2, 22]:

$$\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2} - \frac{I_\rho}{\rho h}\Delta\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w(x_1,x_2,t) = (x_1-a_1)\dot{\omega}_2 - (x_2-a_2)\dot{\omega}_1, \quad (4.1)$$

де $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$.

У формулі (4.1): $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа; $\rho > 0$ – густина, що дорівнює відношенню маси до одиниці об'єму; $I_\rho = \dfrac{\rho h^3}{12}$ – полярний момент інерції поперечного перерізу; $D > 0$ – жорсткість пластини при згинанні; a_i – координати нерухомої точки твердого тіла; ω_i – компоненти вектора кутової швидкості твердого тіла. Будемо вважати, що пластина шарнірно закріплена на границі області Ω, тому мають місце граничні умови:

$$w(x_1,x_2,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}\bigg|_{x_1=0,\, x_1=l_1} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}\bigg|_{x_2=0,\, x_2=l_2} = 0, \quad (4.4)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Права частина диференціального рівняння (4.1) відповідає функції $f(x_1, x_2, t)$ у формулі (3.8) з припущеннями підрозділу 3.4 про можливість лінеаризації відносно компонент кутової швидкості (тобто для повільних обертань).

Для розв'язання крайової задачі (4.1)–(4.4) методом Фур'є розглянемо спочатку випадок $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$. Підставимо вираз

$$w(x_1, x_2, t) = X(x)q(t), \qquad x = (x_1, x_2)$$

у задачу (4.1)–(4.4) та розділимо змінні. У результаті отримаємо, що

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\frac{\alpha^2\Delta^2 X}{X - \frac{h^2}{12}\Delta X} = -\lambda = \text{const}, \quad \text{де} \quad \alpha^2 = \frac{D}{\rho h} > 0.$$

Розглянемо рівняння

$$\alpha^2\Delta^2 X = \lambda(X - \frac{h^2}{12}\Delta X). \tag{4.5}$$

Припустимо, що $X(x_1, x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2)$, та позначимо

$$\frac{X_1''}{X_1} = \mu_1, \qquad \frac{X_2''}{X_2} = \mu_2, \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

тоді $\Delta X = (\mu_1 + \mu_2)X_1X_2 = \mu X$. Підставимо останній вираз у рівність (4.5) та отримаємо, що $\lambda = \dfrac{\alpha^2(\mu_1 + \mu_2)^2}{1 - \frac{h^2}{12}(\mu_1 + \mu_2)}$. У результаті одержимо звичайне диференціальне рівняння відносно змінної $q(t)$:

$$\ddot{q}(t) + \lambda q(t) = 0,$$

де μ_1 та μ_2 – власні значення наступних задач Штурма–Ліувілля:

$$\begin{cases} X_i''(x_i) = \mu_i X_i(x_i), \\ X_i(0) = X_i(l_i) = 0, \end{cases} \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant l_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.6}$$

У підрозділі 3.2 показано, що задачі (4.6) мають дискретний спектр: $\mu_1 = \mu_{1k}$, $\mu_2 = \mu_{2j}$, $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, де

$$\mu_{1k} = -\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2, \qquad \mu_{2j} = -\left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2.$$

Власним значенням задач Штурма–Ліувілля (4.6) відповідають власні функції $\{X_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{X_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$. Пронормуємо ці функції так, щоб вони утворювали ортонормовані базиси в $L_2(0,l_1)$ та $L_2(0,l_2)$ відповідно:

$$X_{1k}(x_1)=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right),\qquad X_{2j}(x_2)=\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right).$$

Розв'язок крайової задачі (4.1)–(4.4) будемо шукати у вигляді ряду Фур'є

$$w(x_1,x_2,t)=\sum_{k,j=1}^{\infty}C_{kj}(t)X_{1k}(x_1)X_{2j}(x_2).$$

Почленно продиференціюємо ряд та підставимо його у рівняння (4.1), враховуючи що $X_{1k}''=\mu_{1k}X_{1k}$, $X_{2j}''=\mu_{2j}X_{2j}$:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\ddot{C}_{kj}X_{1k}X_{2j}-\frac{h^2}{12}\sum_{k,j=1}^{\infty}\ddot{C}_{kj}(\mu_{1k}X_{1k}X_{2j}+\mu_{2j}X_{1k}X_{2j})+$$
$$+\alpha^2\sum_{k,j=1}^{\infty}C_{kj}(\mu_{1k}^2X_{1k}X_{2j}+2\mu_{1k}\mu_{2j}X_{1k}X_{2j}+\mu_{2j}^2X_{1k}X_{2j})=\sum_{k,j=1}^{\infty}f_{kj}X_{1k}X_{2j}.$$

У результаті проведених перетворень отримаємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{C}_{kj}+\lambda_{kj}C_{kj}=f_{kj},\qquad \lambda_{kj}=\frac{\alpha^2(\mu_{1k}+\mu_{2j})^2}{1-\frac{h^2}{12}(\mu_{1k}+\mu_{2j})},\qquad (k,j)\in\mathbb{N}^2,\qquad (4.7)$$

де f_{kj} – коефіцієнти Фур'є правої частини рівняння (4.1) відносно ортонормованої системи $\{X_{1k}(x_1)X_{2j}(x_2)\}_{k,j=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$:

$$f_{kj}=\frac{2}{\left(1+\frac{h^2}{12}\left(\frac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)\sqrt{l_1l_2}}\times$$
$$\times\int_{\Omega}[(x_1-a_1)\dot{\omega}_2-(x_2-a_2)\dot{\omega}_1]\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right)dx_1dx_2.$$

Для дослідження впливу тіла-носія на малі коливання пластини позначимо $u_1(t)=\dot{\omega}_1(t)$, $u_2(t)=\dot{\omega}_2(t)$ та будемо вважати $u_1(t)$, $u_2(t)$ керуючими функціями в системі (4.7):

$$\ddot{C}_{kj}+C_{kj}\lambda_{kj}=\varphi_{kj}u_1(t)+g_{kj}u_2(t),\ \lambda_{kj}=\frac{\alpha^2(\mu_{1k}+\mu_{2j})^2}{1-\frac{h^2}{12}(\mu_{1k}+\mu_{2j})},\ (k,j)\in\mathbb{N}^2,\ (4.8)$$

де

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \quad j = 2m+1, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj\left(1+\dfrac{h^2}{12}\left(\dfrac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}, & k = 2n+1, \quad j = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj\left(1+\dfrac{h^2}{12}\left(\dfrac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}, & k = 2n+1, \quad j = 2m+1, \end{cases}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj\left(1+\dfrac{h^2}{12}\left(\dfrac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}, & k = 2n, \quad j = 2m+1, \\ 0, & k = 2n+1, \quad j = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 kj\left(1+\dfrac{h^2}{12}\left(\dfrac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}, & k = 2n+1, \quad j = 2m+1. \end{cases}$$

Зробимо у системі (4.8) заміну змінних:

$$\sqrt{\lambda_{kj}}C_{kj} = \xi_{kj}(t), \qquad \dot{C}_{kj}(t) = \eta_{kj}(t), \qquad \beta_{kj} = \sqrt{\lambda_{kj}} > 0.$$

При таких змінних система (4.8) буде мати вигляд

$$\dot{x}_{kj} = A_{kj}x_{kj} + B_{kj}u(t), \tag{4.9}$$

де

$$x_{kj} = \begin{pmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \end{pmatrix}, \; A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}, \; B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{kj} & g_{kj} \end{pmatrix}, \; (k,j) \in \mathbb{N}^2. \tag{4.10}$$

4.2. Задача оптимального керування

Зафіксуємо довільне натуральне число n і задамо відображення $i \mapsto (k_i, j_i)$. Оберемо n пар різних індексів $(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_n, j_n)$, що визначають підсистему системи (4.9):

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u(t), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.11}$$

де $x_i = x_{k_i j_i},\ A_i = A_{k_i j_i},\ B_i = B_{k_i j_i}$. Будемо також використовувати позначення з одним індексом i для компонент $\beta_i = \beta_{k_i j_i},\ \varphi_i = \varphi_{k_i j_i},\ g_i = g_{k_i j_i}$ формул (4.10).

Для системи (4.11) розглянемо наступну задачу оптимального керування: для заданих значень $\tau > 0$, $x_i^0 \in \mathbb{R}^2$, $x_i^1 \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1,n}$, знайти керування $u \in\ L^2(0,\tau)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^\tau \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\}dt \tag{4.12}$$

на розв'язках $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ системи (4.11). Функції $x(t)$ мають задовольняти крайові умови

$$x_i(0) = x_i^0, \qquad x_i(\tau) = x_i^1, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.13}$$

Розв'яжемо задачу оптимального керування (4.11)-(4.13) за допомогою принципу максимуму Понтрягіна [116].

Побудуємо функцію Гамільтона:

$$H(\zeta_0, \zeta, x, u) = \zeta_0(u_1^2 + u_2^2) + \sum_{i=1}^{n} (p_i\beta_i\eta_i + q_i(-\beta_i\xi_i + \varphi_i u_1 + g_i u_2)) =$$

$$= \zeta_0(Qu, u) + \zeta(Ax + Bu),$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = diag(A_1, \ldots, A_n)$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\zeta = (p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$, $\zeta_0 = const$.

Оптимальне керування $u = \hat{u}(t)$ знайдемо з умови максимуму гамільтоніана: $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$. Отже, $2\zeta_0 Q\hat{u} + (\zeta B)^T = 0$, тобто

$$\hat{u}(t) = -\frac{1}{2\zeta_0} Q^{-1}(\zeta(t)B)^T. \tag{4.14}$$

Так як $\zeta_0 = const$, то можна позначити $\widetilde{\zeta}(t) = -\dfrac{\zeta(t)}{2\zeta_0} = (\widetilde{p}_1, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n)$, тоді

$$\hat{u}(t) = (\widetilde{\zeta}(t)B)^T = B^T\widetilde{\zeta}^T = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ 0 & g_1 & 0 & g_2 & \ldots & g_n \end{pmatrix} \times$$

$$\times (\widetilde{p}_1, \widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{p}_n, \widetilde{q}_n)^T = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \widetilde{q}_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \widetilde{q}_i \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Вираз (4.14) будемо розглядати на траєкторіях гамільтонової системи

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right|_{u=\hat{u}} = Ax + B\hat{u}(t), \quad \dot{\widetilde{\zeta}} = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{u=\hat{u}} = -\widetilde{\zeta}A. \quad (4.16)$$

Систему (4.16) запишемо покомпонентно:

$$\dot{\widetilde{p}}_i(t) = \beta_i \widetilde{q}_i(t), \quad \dot{\widetilde{q}}_i(t) = -\beta_i \widetilde{p}_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Розв'язок цієї системи має вид:

$$\begin{cases} \widetilde{p}_i(t) = p_i^0 \cos(\beta_i(t)) + q_i^0 \sin(\beta_i(t)), \\ \widetilde{q}_i(t) = -p_i^0 \sin(\beta_i(t)) + q_i^0 \cos(\beta_i(t)). \end{cases} \quad (4.17)$$

Підставимо розв'язок (4.17) у вираз (4.15), в результаті отримаємо наступні функції керування:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s)\right), \\ \hat{u}_2(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s)\right). \end{cases} \quad (4.18)$$

Знайдемо константи p_i^0, q_i^0 за допомогою початкових умов з (4.13). Для цього представимо розв'язок $x(t)$ системи (4.11) з керуванням $\hat{u}(t)$ наступним чином:

$$x_l(t) = e^{tA_l} x_l^0 + \int_0^\tau e^{(t-s)A_l} B_l \hat{u}(s) ds, \quad (4.19)$$

де

$$e^{tA_l}x_l^0 = \begin{pmatrix} \cos(\beta_l t) & \sin(\beta_l t) \\ -\sin(\beta_l t) & \cos(\beta_l t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_l^0 \\ \eta_l^0 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо вираз (4.19) у розгорнутому вигляді:

$$\xi_l(t) = \xi_l^0 \cos(\beta_l t) + \eta_l^0 \sin(\beta_l t) + \int_0^t \left(\varphi_l \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right) + \right.$$
$$\left. + g_l \sum_{i=1}^n g_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right) \right) \sin(\beta_l (t-s)) ds,$$

$$\eta_l(t) = -\xi_l^0 \sin(\beta_l t) + \eta_l^0 \cos(\beta_l t) + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \varphi_l \varphi_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right) + \right.$$
$$\left. + g_l \sum_{i=1}^n g_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right) \right) \cos(\beta_l (t-s)) ds. \quad (4.20)$$

Задамо граничні умови

$$\begin{cases} \xi_l(\tau) = \xi_l^1, \\ \eta_l(\tau) = \eta_l^1. \end{cases} \quad (4.21)$$

Обчислимо інтеграли у виразах (4.20) та перепишемо отримані співвідношення у вигляді:

$$\sum_{i \neq l, i=1}^n q_i^0 (\varphi_l \varphi_i + g_l g_i) \beta_l \frac{\cos(\beta_i \tau) - \cos(\beta_l \tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2} -$$
$$- \sum_{i \neq l, i=1}^n p_i^0 (\varphi_l \varphi_i + g_l g_i) \frac{\beta_l \sin(\beta_i \tau) - \beta_i \sin(\beta_l \tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2} +$$
$$+ q_l^0 (\varphi_l^2 + g_l^2) \frac{\tau \sin(\beta_l \tau)}{2} - p_l^0 (\varphi_l^2 + g_l^2) \frac{\sin(\beta_l \tau) - \beta_l \tau \cos(\beta_l \tau)}{2\beta_l} =$$
$$= \xi_l^1 - \xi_l^0 \cos(\beta_l \tau) - \eta_l^0 \sin(\beta_l \tau),$$

$$\sum_{i \neq l, i=1}^n q_i^0 (\varphi_l \varphi_i + g_l g_i) \frac{\beta_l \sin(\beta_l \tau) - \beta_i \sin(\beta_i \tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2} -$$

$$- \sum_{i\neq l, i=1}^{n} p_i^0(\varphi_l\varphi_i + g_l g_i)\beta_i \frac{\cos(\beta_i\tau) - \cos(\beta_l\tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2} +$$

$$+ q_l^0(\varphi_l^2 + g_l^2)\frac{\sin(\beta_l\tau) + \beta_l\tau\cos(\beta_l\tau)}{2\beta_l} - p_l^0(\varphi_l^2 + g_l^2)\frac{\tau\sin(\beta_l\tau)}{2} =$$

$$= \eta_l^1 + \xi_l^0\sin(\beta_l\tau) - \eta_l^0\cos(\beta_l\tau). \qquad (4.22)$$

Перетворимо систему (4.22) наступним чином: перше рівняння помножимо на $\sin(\beta_l\tau)$, а друге – на $\cos(\beta_l\tau)$ та додамо їх. Аналогічно перше рівняння помножимо на $\cos(\beta_l\tau)$, а друге – на $\sin(\beta_l\tau)$ та віднімемо від першого рівняння друге. Тоді система (4.22) матиме вид:

$$q_l^0\frac{\tau}{2} + q_l^0\frac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l} - p_l^0\frac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l} + \sum_{i\neq l, i=1}^{n} q_i^0\frac{(\varphi_l\varphi_i + g_l g_i)}{\varphi_l^2 + g_l^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_l\sin(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) - \beta_i\cos(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2}\right) - \sum_{i\neq l, i=1}^{n} p_i^0\frac{(\varphi_l\varphi_i + g_l g_i)}{\varphi_l^2 + g_l^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_l\sin(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) + \beta_i\cos(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) - \beta_i}{\beta_l^2 - \beta_i^2}\right) =$$

$$= \frac{\xi_l^1\sin(\beta_l\tau) + \eta_l^1\cos(\beta_l\tau) - \eta_l^0}{\varphi_l^2 + g_l^2},$$

$$p_l^0\frac{\tau}{2} - p_l^0\frac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l} - q_l^0\frac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l} + \sum_{i\neq l, i=1}^{n} q_i^0\frac{(\varphi_l\varphi_i + g_l g_i)}{\varphi_l^2 + g_l^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_l\cos(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) + \beta_i\sin(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) - \beta_l}{\beta_l^2 - \beta_i^2}\right) - \sum_{i\neq l, i=1}^{n} p_i^0\frac{(\varphi_l\varphi_i + g_l g_i)}{\varphi_l^2 + g_l^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_l\cos(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) - \beta_i\cos(\beta_i\tau)\sin(\beta_l\tau)}{\beta_l^2 - \beta_i^2}\right) =$$

$$= \frac{\xi_l^1\cos(\beta_l\tau) - \eta_l^1\sin(\beta_l\tau) - \xi_l^0}{\varphi_l^2 + g_l^2}.$$

Перепишемо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді:

$$\left(M + F \right) \begin{pmatrix} q_1^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ q_n^0 \\ p_n^0 \end{pmatrix} = P, \tag{4.23}$$

де

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{pmatrix},$$

$$F_{ll} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l} & -\dfrac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l} \\ -\dfrac{\sin^2(\beta_l\tau)}{2\beta_l} & -\dfrac{\sin(2\beta_l\tau)}{4\beta_l} \end{pmatrix},$$

$$F_{li} = \frac{\varphi_l\varphi_i + g_l g_i}{(\varphi_l^2 + g_l^2)(\beta_l^2 - \beta_i^2)} \begin{pmatrix} F_{li}^{11} & F_{li}^{12} \\ F_{li}^{21} & F_{li}^{22} \end{pmatrix},$$

$$F_{li}^{11} = \beta_l \sin(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) - \beta_i \cos(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau),$$

$$F_{li}^{12} = -(\beta_l \sin(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) + \beta_i \cos(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) - \beta_i),$$

$$F_{li}^{21} = \beta_l \cos(\beta_l\tau)\cos(\beta_i\tau) + \beta_i \sin(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) - \beta_l,$$

$$F_{li}^{22} = -(\beta_l \cos(\beta_l\tau)\sin(\beta_i\tau) - \beta_i \cos(\beta_i\tau)\sin(\beta_l\tau)),$$

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_1^1 \sin(\beta_1\tau) + \eta_1^1 \cos(\beta_1\tau) - \eta_1^0}{\varphi_1^2 + g_1^2} \\ \dfrac{\xi_1^1 \cos(\beta_1\tau) - \eta_1^1 \sin(\beta_1\tau) - \xi_1^0}{\varphi_1^2 + g_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\xi_n^1 \sin(\beta_n\tau) + \eta_n^1 \cos(\beta_n\tau) - \eta_n^0}{\varphi_n^2 + g_n^2} \\ \dfrac{\xi_n^1 \cos(\beta_n\tau) - \eta_n^1 \sin(\beta_n\tau) - \xi_n^0}{\varphi_n^2 + g_n^2} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, за допомогою принципу максимуму Понтрягіна доведено наступну теорему:

Теорема 4.1. [5, с.173] *Нехай* $\hat{u}_1(t)$, $\hat{u}_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ – *оптимальні керування у задачі* (4.11)–(4.13), *для заданих* $\tau > 0$, $x_i^0 \in \mathbb{R}^2$, $x_i^1 \in \mathbb{R}^2$, $(i = \overline{1,n})$. *Тоді*

$$\begin{cases} \hat{u}_1(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right), \\ \hat{u}_2(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \left(q_i^0 \cos(\beta_i s) - p_i^0 \sin(\beta_i s) \right), \end{cases}$$

де коефіцієнти p_i^0, q_i^0 *задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь* (4.23).

Зауваження 4.1. *Матриця лінійних алгебраїчних рівнянь системи* (4.23) *представлена у вигляді суми діагональної матриці* M *та блочної матриці* F. *Так як елементи матриці* M *пропорційні часу* τ, *а елементи* F_{li} *матриці* F *обмежені по* τ, *то* $det(M+F) \neq 0$ *для достатньо великих значень* $\tau > 0$. *Таким чином, система* (4.23) *має єдиний розв'язок для* $x_i^0 \in \mathbb{R}^2$, $x_i^1 \in \mathbb{R}^2$, *якщо час* τ *обрано достатньо великим.*

Отримана властивість використовується у розділі 5 дисертаційної роботи для оцінки множини досяжності нескінченновимірної системи.

4.3. Результати чисельного моделювання

У якості прикладу розглянемо систему диференціальних рівнянь виду (4.11) для трьох мод коливань пластини:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u(t), \qquad p = \overline{1,3}. \tag{4.24}$$

Вектори $x_p = \begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ і матриці системи (4.24) визначені співвідношеннями (4.10):

$$A_p = A_{k_p j_p} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{k_p j_p} \\ -\beta_{k_p j_p} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_p = B_{k_p j_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{k_p j_p} & g_{k_p j_p} \end{pmatrix},$$

де

$$\beta_{k_pj_p} = \frac{\alpha\left(\left(\frac{\pi k_p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_p}{l_2}\right)^2\right)}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{12}\left(\left(\frac{\pi k_p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_p}{l_2}\right)^2\right)}}, \tag{4.25}$$

$$\varphi_{k_pj_p} = \begin{cases} 0, & k_p \text{ - парне, } j_p \text{ - непарне,} \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2 k_p j_p\left(1 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\pi k_p l_2)^2 + (\pi j_p l_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p \text{ - непарне, } j_p \text{ - парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_p j_p\left(1 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\pi k_p l_2)^2 + (\pi j_p l_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p \text{ - непарне, } j_p \text{ - непарне,} \end{cases}$$

$$g_{k_pj_p} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2 k_p j_p\left(1 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\pi k_p l_2)^2 + (\pi j_p l_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p \text{ - парне, } j_p \text{ - непарне,} \\ 0, & k_p \text{ - непарне, } j_p \text{ - парне,} \\ \dfrac{2\sqrt{l_1l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 k_p j_p\left(1 + \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\pi k_p l_2)^2 + (\pi j_p l_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p \text{ - непарне, } j_p \text{ - непарне.} \end{cases}$$

Для чисельних розрахунків оберемо наступні значення механічних параметрів:

$$l_1 = 1 \text{ м}, \quad l_2 = \pi \text{ м}, \quad \alpha = 1 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad a_1 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = -1 \text{ м}, \quad h = 0,01 \text{ м}.$$

Знайдемо значення власних частот $\beta_{k_pj_p}$:

$$\beta_{k_1j_1} = \frac{\pi^2 + 1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 + 1}{120000}}} \approx 10,869; \qquad \beta_{k_1j_2} = \frac{\pi^2 + 4}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 + 4}{120000}}} \approx 13,869;$$

$$\beta_{k_1j_3} = \frac{\pi^2 + 9}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 + 9}{120000}}} \approx 18,869; \qquad \beta_{k_2j_1} = \frac{4\pi^2 + 1}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 + 1}{120000}}} \approx 40,472;$$

$$\beta_{k_2j_2} = \frac{4(\pi^2 + 1)}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 + 1}{30000}}} \approx 43,471; \qquad \beta_{k_2j_3} = \frac{4\pi^2 + 9}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 + 9}{120000}}} \approx 48,468;$$

$$\beta_{k_3j_1} = \frac{9\pi^2+1}{\sqrt{1+\dfrac{9\pi^2+1}{120000}}} \approx 89,793; \qquad \beta_{k_3j_2} = \frac{9\pi^2+4}{\sqrt{1+\dfrac{9\pi^2+4}{120000}}} \approx 92,791;$$

$$\beta_{k_3j_3} = \frac{9(\pi^2+1)}{\sqrt{1+\dfrac{9(\pi^2+1)}{120000}}} \approx 97,787.$$

Для ілюстрації ефективності оптимального керування, отриманого у теоремі 4.1, оберемо серед усіх частот $\beta_{k_pj_p}$ у формулі (4.25) три найменші для індексів $p = 1, 2, 3$:

$$\beta_{k_1j_1} \approx 10,869\ c^{-1}, \quad \beta_{k_2j_2} \approx 13,869\ c^{-1}, \quad \beta_{k_3j_3} \approx 18,869\ c^{-1},$$

тобто введемо позначення $(k_1, j_1) = (1, 1)$ для $p = 1$; $(k_2, j_2) = (1, 2)$ для $p = 2$; $(k_3, j_3) = (1, 3)$ для $p = 3$.

Розглянемо задачу оптимального керування системи (4.24) з функціоналом якості

$$J = \int_0^1 \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\}dt \longrightarrow \min \tag{4.26}$$

та крайовими умовами при $t = 0$ і $t = \tau = 1$:

$$x_p^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2^0 = x_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Знайдемо коефіцієнти q_p^0 та p_p^0, для цього підставимо значення β_p, φ_p, g_p, ξ_p^0, ξ_p^1, η_p^0 та η_p^1 у лінійну систему (4.23):

$$p_1^0 \approx -1,291, \quad q_1^0 \approx 0,071,$$

$$p_2^0 \approx -0,848, \quad q_2^0 \approx -3,141,$$

$$p_3^0 \approx 1,242, \quad q_3^0 \approx 0,750.$$

За допомогою виразу (4.18) знайдемо оптимальне керування задачі (4.24), (4.26), (4.27). Для обраних параметрів функції керування мають наступний вигляд:

$$\widehat{u}_1(t) = \varphi_{k_1j_1}(q^0_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}t) - p^0_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}t)) + \varphi_{k_2j_2}(q^0_{k_2j_2}\cos(\beta_{k_2j_2}t) -$$
$$- p^0_{k_2j_2}\sin(\beta_{k_2j_2}t)) + \varphi_{k_3j_3}(q^0_{k_3j_3}\cos(\beta_{k_3j_3}t) - p^0_{k_3j_3}\sin(\beta_{k_3j_3}t)) =$$
$$= -0,132\cos(10,869t) - 2,385\sin(10,869t) - 1,772\cos(13,869t) +$$
$$+ 0,479\sin(13,869t) - 0,461\cos(18,869t) + 0,765\sin(18,869t),$$

$$\widehat{u}_2(t) = g_{k_1j_1}(q^0_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}t) - p^0_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}t)) + g_{k_2j_2}(q^0_{k_2j_2}\cos(\beta_{k_2j_2}t) -$$
$$- p^0_{k_2j_2}\sin(\beta_{k_2j_2}t)) + g_{k_3j_3}(q^0_{k_3j_3}\cos(\beta_{k_3j_3}t) - p^0_{k_3j_3}\sin(\beta_{k_3j_3}t)) =$$
$$= -0,026\cos(10,869t) - 0,464\sin(10,869t) - 0,090\cos(18,869t) +$$
$$+ 0,149\sin(18,869t). \quad (4.28)$$

За допомогою чисельного інтегрування знайдемо розв'язок системи (4.24) з початковими умовами

$$x^0_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^0_2 = x^0_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

який відповідає керуванню $u_i = \widehat{u}_i(t)$ по формулі (4.28). Графік норми розв'язку $\|x(t)\|$ системи (4.24) наведено на Рис. 4.1. для $t \in [0,1]$.

На Рис. 4.1. видно, що оптимальне керування, яке відповідає підсистемі з трьома низькочастотними модами, може бути використано для розв'язання двоточкової задачі керування з крайовими умовами (4.27).

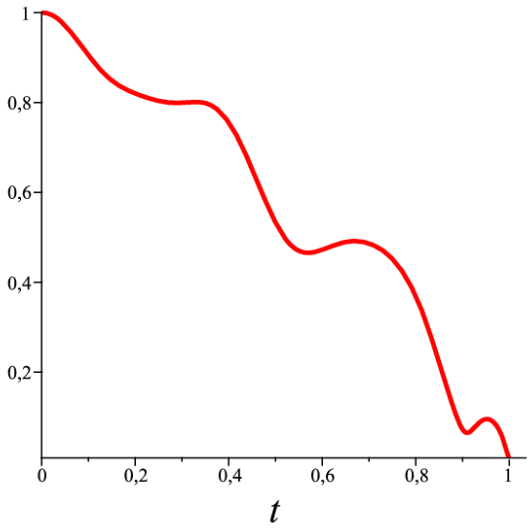

Рис. 4.1. Графік норми розв'язку $\|x(t)\|$

4.4. Висновки

У даному розділі дисертації розглянуто математичну модель пластини Кірхгофа з урахуванням обертального руху її поперечного перерізу. Дана модель є уточненням моделі розділу 3. Перерахуємо основні результати розділу.

1. Для уточненої моделі пластини Кірхгофа отримано систему звичайних диференціальних рівнянь, яка описує коливання пластини з довільною кількістю мод.
2. Уперше розв'язано задачу оптимального керування моделлю пластини з побудовою функцій керування у явному вигляді для довільної фіксованої кількості мод коливань.
3. За допомогою чисельного інтегрування підтверджено ефективність обчислення запропонованих оптимальних керувань для заданих крайових умов.
4. Показано, що матриця $M + F$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.23) є невиродженою при достатньо великих значеннях τ, тому система (4.23) має єдиний розв'язок.

РОЗДІЛ 5
ОЦІНКА МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ У ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНИ КІРХГОФА

5.1. Опис нескінченновимірної динамічної системи у комплексних змінних

У розділі 3 було розглянуто математичну модель малих коливань пружної пластини Кірхгофа, яка є прикріпленою до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Розглянемо відповідні рівняння руху (3.19) у припущенні, що можна використати лише одне керування, тобто $u_2 = 0$, а $u_1 = u(t)$:

$$\dot{x}_{kj}(t) = A_{kj}x_{kj}(t) + B_{kj}u(t), \tag{5.1}$$

де $x_{kj}(t) = \begin{pmatrix} \xi_{kj}(t) \\ \eta_{kj}(t) \end{pmatrix}$, $A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}$, $B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{kj} \end{pmatrix}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

Величини $\xi_{kj}(t)$ та $\eta_{kj}(t)$ представляють, відповідно, модальну координату та швидкість для моди коливань з індексами (k,j). Керування $u(t)$ відповідає кутовому прискоренню тіла-носія.

Коефіцієнти рівняння (5.1) задано через параметри пружної пластини:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right),$$

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k \text{ - парне}, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k \text{ - непарне, } j \text{ - парне}, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj}, & k \text{ - непарне, } j \text{ - непарне}, \end{cases} \qquad (k,j) \in \mathbb{N}^2,$$

де α, l_1, l_2, a_2 – додатні константи, фізичний зміст яких описано у розділі 3. Припустимо надалі, що $2a_2 \neq l_2$.

Введемо комплексні змінні:

$$\begin{cases} z_{kj} = \xi_{kj} + i\eta_{kj}, \\ \bar{z}_{kj} = \xi_{kj} - i\eta_{kj}. \end{cases}$$

Тоді система (5.1) у змінних z_{kj}, $\bar{z}_{kj}$ матиме наступний вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_{kj} = -iz_{kj}\beta_{kj} + i\varphi_{kj}u(t), \\ \dot{\bar{z}}_{kj} = i\bar{z}_{kj}\beta_{kj} - i\varphi_{kj}u(t). \end{cases} \tag{5.2}$$

Зауважимо, що оскільки $\varphi_{kj} = 0$ для парних індексів k, то система (5.1) має некерований підпростір, який відповідає модам (ξ_{kj}, η_{kj}) з $(k, j) \in S$, де

$$S = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 | k \text{ - парне}\}.$$

Тому для подальшого дослідження проблеми керованості розглянемо підсистему системи (5.1) для індексів $\mathbb{N}^2 \backslash S$. Нехай задано взаємно-однозначне відображення $n \longmapsto (k_n, j_n)$ між множинами $\mathbb{N}$ та $\mathbb{N}^2 \backslash S$, тоді кожному індексу $n \in \mathbb{N}$ відповідає пара індексів $(k_n, j_n) \in \mathbb{N}^2 \backslash S$.

Без обмежень загальності будемо вважати, що для будь-якого натурального числа N існує таке натуральне число $M(N)$, що з нерівностей $1 \leqslant n \leqslant N$ випливає $j_n \leqslant M(N)$, $k_n \leqslant M(N)$, при цьому

$$M(N) = O(\sqrt{N}) \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty. \tag{5.3}$$

Позначимо

$$\omega_n = \beta_{k_n j_n} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k_n}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j_n}{l_2} \right)^2 \right), \tag{5.4}$$

$$B_n = \varphi_{k_n j_n} = \begin{cases} \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n\text{- непарне}, \quad j_n\text{- парне}, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_n j_n}, & k_n\text{- непарне}, \quad j_n\text{- непарне}, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$q_n = z_{k_n j_n}, \quad q_{-n} = \bar{z}_{k_n j_n}.$$

Запишемо систему (5.2) в операторному вигляді

$$\dot{q} = Aq + Bu, \quad q \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^1, \tag{5.6}$$

$$\text{де } q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ q_{-2} \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2, \quad A = i \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \; B = i \begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ B_{-2} \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$\omega_n = \beta_{k_n j_n}, \quad B_n = \varphi_{k_n j_n}, \quad B_{-n} = -\varphi_{k_n j_n}.$$

Систему (5.6) будемо розглядати у гільбертовому просторі ℓ^2 з нормою

$$\|q\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|q_n|^2 + |q_{-n}|^2 \right) \right)^{1/2}.$$

5.2. Задача оптимального керування для динамічної системи у комплексних змінних

Розглянемо скінченновимірну підсистему системи (5.6), яка відповідає координатам $q_{-n},\ q_n,\ n = \overline{1, N},$ для фіксованого цілого числа $N \geqslant 1$:

$$\dot{\tilde{q}}_N = A_N \tilde{q}_N + B_N u, \tag{5.7}$$

$$A_N = i \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_N = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \end{pmatrix}, \quad B_N = i \begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{-N} \\ B_N \end{pmatrix}.$$

У розділі 4 було отримано оптимальне керування для скінченновимірної підсистеми з квадратичним функціоналом якості. Отриманий результат можна переформулювати для системи (5.7) з комплексними змінними наступним чином.

Лема 5.1. [6, с.1642] *Нехай $\omega_j \neq \omega_k$ для всіх $1 \leqslant j < k \leqslant N$. Розглянемо задачу оптимального керування:*

$$\dot{\tilde{q}}_N = A_N \tilde{q}_N + B_N u, \quad t \in [0, \tau], \tag{5.8}$$

$$J = \int_0^\tau |u(t)|^2 dt \longrightarrow min, \tag{5.9}$$

$$\tilde{q}_N^0 = \tilde{q}_N(0) = \begin{pmatrix} q_{-1}^0 \\ q_1^0 \\ \vdots \\ q_{-N}^0 \\ q_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \quad \tilde{q}_N^1 = \tilde{q}_N(\tau) = \begin{pmatrix} q_{-1}^1 \\ q_1^1 \\ \vdots \\ q_{-N}^1 \\ q_N^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}, \tag{5.10}$$

$$q_n^0 = \overline{q_{-n}^0}, \qquad q_n^1 = \overline{q_{-n}^1}, \qquad n = \overline{1, N}.$$

Оптимальне керування для даної задачі має вигляд

$$\hat{u}_N(t) = (B_1 e^{i\omega_1 t}, B_{-1} e^{-i\omega_1 t}, ..., B_N e^{i\omega_N t}, B_{-N} e^{-i\omega_N t})\nu,$$

де

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_{-1}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_N} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B_{-N}} \end{pmatrix} K^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_{-N}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B_N} \end{pmatrix} (e^{-i\omega_N \tau} \tilde{q}_N^1 - \tilde{q}_N^0), \tag{5.11}$$

$$K = (K_{jk})_{j,k=1}^N, \qquad K_{jj} = \begin{pmatrix} \tau & \frac{i(e^{-2i\omega_j\tau} - 1)}{2\omega_j} \\ \frac{i(1 - e^{2i\omega_j\tau})}{2\omega_j} & \tau \end{pmatrix},$$

$$K_{jk} = i \begin{pmatrix} \dfrac{1 - e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}}{\omega_k - \omega_j} & \dfrac{e^{-i(\omega_k + \omega_j)\tau} - 1}{\omega_k + \omega_j} \\ \dfrac{1 - e^{i(\omega_k + \omega_j)\tau}}{\omega_k + \omega_j} & \dfrac{1 - e^{i(\omega_j - \omega_k)\tau}}{\omega_j - \omega_k} \end{pmatrix}, \qquad j \neq k.$$

Доведення. Скористаємося результатами розділу 4, де було отримано оптимальне керування $\hat{u}_1(t)$, $\hat{u}_2(t)$ для задачі

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_n \\ \dot{\eta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n u_1 + g_n u_2 \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N}, \tag{5.12}$$

$$J = \int_0^\tau \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\} dt \longrightarrow \min, \tag{5.13}$$

$$x_n(0) = x_n^0, \qquad x_n(\tau) = x_n^1. \tag{5.14}$$

Якщо $g_n = 0$ для всіх $n = \overline{1, N}$ у формулі (5.12), то відповідно до теореми 4.1. оптимальне керування буде мати вигляд $\hat{u}_1(t) = \hat{u}(t)$, $\hat{u}_2(t) \equiv 0$, де

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n \left(d_n^0 \cos(\omega_n t) - p_n^0 \sin(\omega_n t) \right). \tag{5.15}$$

Параметри $d_n^0, \quad p_n^0$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\Big(\ M + F \ \Big) \begin{pmatrix} d_1^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ d_N^0 \\ p_N^0 \end{pmatrix} = P, \tag{5.16}$$

де $\quad M = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \dots & F_{NN} \end{pmatrix},$

$$F_{jj} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(2\omega_{n_j}\tau)}{4\omega_{n_j}} & -\dfrac{\sin^2(\omega_{n_j}\tau)}{2\omega_{n_j}} \\ -\dfrac{\sin^2(\omega_{n_j}\tau)}{2\omega_{n_j}} & -\dfrac{\sin(2\omega_{n_j}\tau)}{4\omega_{n_j}} \end{pmatrix},$$

$$F_{jk} = \frac{\varphi_{n_j}\varphi_{n_k}}{\varphi_{n_j}^2(\omega_{n_j}^2 - \omega_{n_k}^2)} \begin{pmatrix} F_{jk}^{11} & F_{jk}^{12} \\ F_{jk}^{21} & F_{jk}^{22} \end{pmatrix},$$

$$F_{jk}^{11} = \omega_{n_j}\sin(\omega_{n_j}\tau)\cos(\omega_{n_k}\tau) - \omega_{n_k}\cos(\omega_{n_j}\tau)\sin(\omega_{n_k}\tau),$$

$$F_{jk}^{12} = -(\omega_{n_j}\sin(\omega_{n_j}\tau)\sin(\omega_{n_k}\tau) + \omega_{n_k}\cos(\omega_{n_j}\tau)\cos(\omega_{n_k}\tau) - \omega_{n_k}),$$

$$F_{jk}^{21} = \omega_{n_j}\cos(\omega_{n_j}\tau)\cos(\omega_{n_k}\tau) + \omega_{n_k}\sin(\omega_{n_j}\tau)\sin(\omega_{n_k}\tau) - \omega_{n_j},$$

$$F_{jk}^{22} = -(\omega_{n_j}\cos(\omega_{n_j}\tau)\sin(\omega_{n_k}\tau) - \omega_{n_k}\cos(\omega_{n_k}\tau)\sin(\omega_{n_j}\tau)),$$

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_1^1\sin(\omega_1\tau) + \eta_1^1\cos(\omega_1\tau) - \eta_1^0}{\varphi_1^2} \\ \dfrac{\xi_1^1\cos(\omega_1\tau) - \eta_1^1\sin(\omega_1\tau) - \xi_1^0}{\varphi_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\xi_N^1\sin(\omega_N\tau) + \eta_N^1\cos(\omega_N\tau) - \eta_N^0}{\varphi_N^2} \\ \dfrac{\xi_N^1\cos(\omega_N\tau) - \eta_N^1\sin(\omega_N\tau) - \xi_N^0}{\varphi_N^2} \end{pmatrix}.$$

У формулі (5.15) перейдемо до комплексних змінних, для цього застосуємо представлення тригонометричних функцій у комплексній формі

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}, \qquad \sin(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}, \tag{5.17}$$

тоді

$$\hat{u}(t) = \sum_{n=1}^{N}\varphi_n\left(d_n^0\frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} - p_n^0\frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}\right) = \\ = \sum_{n=1}^{N} i\varphi_n\left(e^{i\omega_n t}\frac{p_n^0 - id_n^0}{2} - e^{-i\omega_n t}\frac{p_n^0 + id_n^0}{2}\right). \tag{5.18}$$

У (5.18) позначимо $i\varphi_n = B_n$ та перепишемо дану формулу у наступному вигляді:

$$\hat{u}(t) = \sum_{\substack{n=-N,\\ n\neq 0}}^{N} B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} = \sum_{n=-N}^{-1} B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} + \sum_{n=1}^{N} B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} = \\ = \sum_{n=1}^{N} B_{-n}\left(e^{-i\omega_n t}\nu_n - e^{i\omega_n t}\nu_{-n}\right), \tag{5.19}$$

де

$$\nu_{-n} = \frac{p_n^0 - id_n^0}{2}, \quad \nu_n = \frac{p_n^0 + id_n^0}{2}, \quad n = \overline{1, N}. \tag{5.20}$$

Отже, (5.19) – оптимальне керування для задачі у комплексних змінних.

З формули (5.20) маємо:

$$d_n^0 = i(\nu_{-n} - \nu_n), \quad p_n^0 = \nu_n + \nu_{-n}.$$

Вектор-стовпець невідомих параметрів з (5.16) у комплексних змінних матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} d_1^0 \\ p_1^0 \\ \vdots \\ d_N^0 \\ p_N^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\nu_{-1} - \nu_1) \\ \nu_1 + \nu_{-1} \\ \vdots \\ i(\nu_{-N} - \nu_N) \\ \nu_N + \nu_{-N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i & -i \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Так як $q_n = z_n = \xi_n + i\eta_n$, а $q_{-n} = \overline{z}_n = \xi_n - i\eta_n$, то:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{Im(e^{i\omega_1\tau}q_1^1 - q_1^0)}{|B_1|^2} \\ \dfrac{Re(e^{i\omega_1\tau}q_1^1 - q_1^0)}{|B_1|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{Im(e^{i\omega_N\tau}q_N^1 - q_N^0)}{|B_N|^2} \\ \dfrac{Re(e^{i\omega_N\tau}q_N^1 - q_N^0)}{|B_N|^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_N \end{pmatrix}.$$

Запишемо (5.16) у нових позначеннях:

$$(M+F)\begin{pmatrix} i & -i & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i & -i \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Im(e^{i\omega_1\tau}q_1^1 - q_1^0)}{|B_1|^2} \\ \dfrac{Re(e^{i\omega_1\tau}q_1^1 - q_1^0)}{|B_1|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{Im(e^{i\omega_N\tau}q_N^1 - q_N^0)}{|B_N|^2} \\ \dfrac{Re(e^{i\omega_N\tau}q_N^1 - q_N^0)}{|B_N|^2} \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Нехай $M' = (M+F)\begin{pmatrix} i & -i & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i & -i \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_N \end{pmatrix}$.

У M' перейдемо до комплексних змінних за допомогою рівностей (5.17) та застосуємо до обох частин рівності (5.22) елементарні перетворення виду $\begin{pmatrix} \beta_n - i\alpha_n \\ \beta_n + i\alpha_n \end{pmatrix}$, тоді блоки матриці $M' = (M'_{jk})_{j,k=1}^{N}$ запишемо наступним чином:

$$M'_{jj} = \begin{pmatrix} \tau & -\dfrac{i(e^{-2i\omega_j\tau}-1)}{2\omega_j} \\ -\dfrac{i(1-e^{2i\omega_j\tau})}{2\omega_j} & \tau \end{pmatrix},$$

$$M'_{jk} = i\frac{\varphi_k}{\varphi_j}\begin{pmatrix} \dfrac{1-e^{i(\omega_k-\omega_j)\tau}}{\omega_k-\omega_j} & -\dfrac{e^{-i(\omega_k+\omega_j)\tau}-1}{\omega_k+\omega_j} \\ -\dfrac{1-e^{i(\omega_k+\omega_j)\tau}}{\omega_k+\omega_j} & \dfrac{1-e^{i(\omega_j-\omega_k)\tau}}{\omega_j-\omega_k} \end{pmatrix},$$

при цьому $P = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-i\omega_1\tau}q^1_{-1}-q^0_{-1}}{|B_1|^2} \\ \dfrac{e^{i\omega_1\tau}q^1_1-q^0_1}{|B_1|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{-i\omega_N\tau}q^1_{-N}-q^0_{-N}}{|B_N|^2} \\ \dfrac{e^{i\omega_N\tau}q^1_N-q^0_N}{|B_N|^2} \end{pmatrix}$.

Виконаємо перетворення та запишемо (5.22) у вигляді:

$$M' \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-i\omega_1\tau}q^1_{-1} - q^0_{-1}}{|B_1|^2} \\ \dfrac{e^{i\omega_1\tau}q^1_1 - q^0_1}{|B_1|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{-i\omega_N\tau}q^1_{-N} - q^0_{-N}}{|B_N|^2} \\ \dfrac{e^{i\omega_N\tau}q^1_N - q^0_N}{|B_N|^2} \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Помножимо вираз (5.23) зліва на матрицю $diag(B_1, B_{-1}, ..., B_N, B_{-N})$:

$$M'' \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_N & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_{-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{-1} \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{-N} \\ \nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-i\omega_1\tau}q^1_{-1} - q^0_{-1}}{B_{-1}} \\ \dfrac{e^{i\omega_1\tau}q^1_1 - q^0_1}{B_1} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{-i\omega_N\tau}q^1_{-N} - q^0_{-N}}{B_{-N}} \\ \dfrac{e^{i\omega_N\tau}q^1_N - q^0_N}{B_N} \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

де $M''_{jj} = \begin{pmatrix} \tau & \dfrac{i(e^{-2i\omega_j\tau} - 1)}{2\omega_j} \\ \dfrac{i(1 - e^{2i\omega_j\tau})}{2\omega_j} & \tau \end{pmatrix}$,

$$M''_{jk} = i \begin{pmatrix} \dfrac{1 - e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}}{\omega_k - \omega_j} & \dfrac{e^{-i(\omega_k + \omega_j)\tau} - 1}{\omega_k + \omega_j} \\ \dfrac{1 - e^{i(\omega_k + \omega_j)\tau}}{\omega_k + \omega_j} & \dfrac{1 - e^{i(\omega_j - \omega_k)\tau}}{\omega_j - \omega_k} \end{pmatrix}.$$

Повернемося до формули (5.11) та запишемо її у вигляді:

$$K \begin{pmatrix} B_1\nu_{-1} \\ B_{-1}\nu_1 \\ \vdots \\ B_N\nu_{-N} \\ B_{-N}\nu_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_{-N}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1\tau}q^1_{-1} - q^0_{-1} \\ e^{i\omega_1\tau}q^1_1 - q^0_1 \\ \vdots \\ e^{-i\omega_N\tau}q^1_{-N} - q^0_{-N} \\ e^{i\omega_N\tau}q^1_N - q^0_N \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Очевидно, що формули (5.24) та (5.25) є еквівалентними, отже твердження леми 5.1 доведено. □

5.3. Оцінка множини досяжності нескінченновимірної системи

У цьому підрозділі для оцінки множини досяжності системи (5.6) буде використано сім'ю функцій, що відповідають скінченновимірним задачам оптимального керування з підрозділу 5.2.

Так як оператор $A : D(A) \longrightarrow \ell^2$ у системі (5.6) є інфінітезимальним генератором C_0 – напівгрупи лінійних операторів $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ у ℓ^2 на основі теореми Хіллє–Іосіди [118], то для будь-яких $q^0 \in \ell^2$, $\tau > 0$, $u \in L^2(0,\tau)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $q(t, q^0, u)$ рівняння (5.6) з $u = u(t)$, $t \in [0,\tau]$, що задовольняє початкову умову $q|_{t=0} = q^0$. Указаний розв'язок можна задати формулою [118]:

$$q(t; q^0, u) = e^{tA}q^0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Розглянемо множини досяжності для системи (5.6) [85]:

$$R_\tau(q^0) = \{q^1 \in \ell^2 : q^1 = q(\tau; q^0, u) \text{ при } u \in L^2(0,\tau)\},$$

$$R(q^0) = \bigcup_{\tau\geqslant 0} R_\tau(q^0).$$

Нагадаємо [128], що система (5.6) є наближено керованою, якщо $\overline{R(q^0)} = \ell^2$ для всіх $q^0 \in \ell^2$. Стандартним способом дослідження наближеної керованості лінійних систем виду (5.6) є критерій N. Levan, L. Rigby [128], який зводиться до аналізу інваріантних підпросторів спряженої напівгрупи $\{e^{tA^*}\}_{t\geqslant 0}$ у ядрі оператора B^*. Але безпосереднє застосування такого підходу не дає можливості провести оцінку множини досяжності $R_\tau(q^0)$ та побудувати функції керування, які б запезпечили розв'язок двоточкової задачі для заданих крайових умов.

Для формулювання основного результату про множини досяжності нескінченновимірної системи (5.6) нагадаємо [129], що комплексне або дійсне

число χ називається алгебраїчним числом, якщо воно є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами, які одночасно не дорівнюють нулю.

Число n^* називається степенем алгебраїчного числа χ, якщо χ є коренем деякого многочлена степеня n^* з цілими коефіцієнтами, та не існує тотожно рівного нулю многочлена з цілими коефіцієнтами степені менше за n^*, коренем якого було б число χ.

Сформулюємо теорему про оцінку станів $q^1 \in \ell^2$ системи (5.6), які є наближено досяжними з точки $q^0 = 0 \in \ell^2$.

Теорема 5.1. [6, с.1643] *Нехай для системи* (5.6) *виконуються умови:*

1) $B_n \neq 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$;

2) $\chi = \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$ *– алгебраїчне число степеня* $n^* \geqslant 2$;

3) Координати вектора $q^1 = \begin{pmatrix} q^1_{-1} \\ q^1_1 \\ q^1_{-2} \\ q^1_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2$ *задовольняють умови:*

$$q^1_{-n} = \overline{q^1_n}, \quad |q^1_n| = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right), \quad \gamma > \frac{3}{2}n^* + 1$$

при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ *знайдуться такі числа* $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ *і* $N(\varepsilon) \geqslant 1$, *що*

$$\|q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1\|_{\ell^2} < \varepsilon, \tag{5.26}$$

де $\hat{u}_N(t)$ *– оптимальне керування для задачі* (5.8)–(5.10), *яке має вид*

$$\hat{u}_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (B_n e^{i\omega_n t}\nu_{-n} + B_{-n}e^{-i\omega_n t}\nu_n), \quad t \in [0; \tau].$$

Доведення. Так як в умові теореми χ – ірраціональне число, то з виразу (5.4) випливає властивість $\omega_j \neq \omega_k$ для всіх $j \neq k$. Відповідно до підходу роботи [130], проведемо оцінку величини (5.26) із використанням керування виду $u = \hat{u}_N(t)$ з леми 5.1.

Введемо оператори проектування $Q_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ та $P_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ наступним чином:

$$P_N : q = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \\ q_{-N-1} \\ q_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-N} \\ q_N \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad Q_N = I - P_N.$$

Тоді

$$\|q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1\|_{\ell^2} = \|Q_N q(\tau; 0, \hat{u}_N) - Q_N q^1\| \leqslant$$
$$\leqslant \|Q_N q^1\| + \left\| \int_0^\tau Q_N e^{(\tau - s)A} B \hat{u}_N(s) ds \right\|.$$

Оскільки оператори e^{tA} і Q_N комутують, то за допомогою нерівності Коші-Буняковського отримаємо:

$$\|q(\tau; 0, \hat{u}_N) - q^1\|_{\ell^2} \leqslant \|Q_N q^1\| + \sup_{t \in [0,\tau]} \|e^{tA}\| \cdot \|Q_N B\| \cdot \int_0^\tau |\hat{u}_N(s)| ds \leqslant$$
$$\leqslant \|Q_N q^1\| + \sqrt{\tau} \|Q_N B\| \cdot \sup_{t \in [0,\tau]} \|e^{tA}\| \cdot \|\hat{u}_N\|_{L^2(0,\tau)}.$$

Очевидно, що норма оператора $e^{tA} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ дорівнює 1.

Таким чином, для доведення теореми достатньо показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ та вектора q^1 знайдуться такі числа $\tau > 0$ і N, що

$$\|Q_N q^1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.27}$$

$$r_N = \tau \|Q_N B\|^2 \|\hat{u}_N\|^2_{L^2(0;\tau)} < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{5.28}$$

Нерівність (5.27) випливає з того, що

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\|Q_N q^1\|^2=\lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|q^1_{-n}|^2+|q^1_n|^2\right)=0$$

для будь-якого елемента $q^1\in\ell^2$.

Для доведення нерівності (5.28) знайдемо значення норми оптимального керування з леми 5.1:

$$\|\hat u_N(t)\|^2_{L^2(0,\tau)}=\int\limits_0^\tau|\hat u_N(t)|^2dt=\int\limits_0^\tau\hat u_N(t)\overline{\hat u_N(t)}dt=$$

$$=\int\limits_0^\tau\left(\sum_{n=1}^{N}B_ne^{i\omega_nt}\nu_{-n}+B_{-n}e^{-i\omega_nt}\nu_n\right)\left(\sum_{n'=1}^{N}\bar B_{n'}e^{-i\omega_{n'}t}\bar\nu_{-n'}+\bar B_{-n'}e^{i\omega_{n'}t}\bar\nu_{n'}\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\tau\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_ne^{i\omega_nt}\nu_{-n}\bar B_{n'}e^{-i\omega_{n'}t}\bar\nu_{-n'}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_ne^{i\omega_nt}\nu_{-n}\bar B_{-n'}e^{i\omega_{n'}t}\bar\nu_{n'}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_{-n}e^{-i\omega_nt}\nu_n\bar B_{n'}e^{-i\omega_{n'}t}\bar\nu_{-n'}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_{-n}e^{-i\omega_nt}\nu_n\bar B_{-n'}e^{i\omega_{n'}t}\bar\nu_{n'}\right)dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}B_n\bar B_{-n}\nu_{-n}\bar\nu_n\frac{i(1-e^{2i\omega_n\tau})}{2\omega_n}+\sum_{n=1}^{N}B_{-n}\bar B_n\nu_n\bar\nu_{-n}\frac{i(e^{-2i\omega_n\tau}-1)}{2\omega_n}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}B_{-n}\bar B_{-n}\nu_n\bar\nu_n\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_n\bar B_{n'}\nu_{-n}\bar\nu_{-n'}\frac{i(1-e^{i(\omega_n-\omega_{n'})\tau})}{\omega_n-\omega_{n'}}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}B_n\bar B_n\nu_{-n}\bar\nu_{-n}\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_n\bar B_{-n'}\nu_{-n}\bar\nu_{n'}\frac{i(1-e^{i(\omega_n+\omega_{n'})\tau})}{\omega_n+\omega_{n'}}+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_{-n}\bar B_{n'}\nu_n\bar\nu_{-n'}\frac{i(e^{-i(\omega_n+\omega_{n'})\tau}-1)}{\omega_n+\omega_{n'}}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}B_{-n}\bar B_{-n'}\nu_n\bar\nu_{n'}\frac{i(e^{i(\omega_{n'}-\omega_n)\tau}-1)}{\omega_n-\omega_{n'}}.$$

Оцінимо $\|\hat u_N(t)\|^2_{L^2(0,\tau)}$ за допомогою нерівності трикутника та нерівності Гельдера:

$$\|\hat u_N(t)\|^2_{L^2(0,\tau)}\leqslant\sum_{n=1}^{N}|B_n|^2|\nu_n|^2\left(2|\tau|+\frac{2}{|\omega_n|}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}\left(\frac{4|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|}{|\omega_n-\omega_{n'}|}+\frac{4|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|}{|\omega_n+\omega_{n'}|}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{N}|B_n|^2|\nu_n|^2\left(2|\tau|+\max_{n,n'\leqslant N}\frac{2}{|\omega_n|}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|\left(\max_{n,n'\leqslant N}\frac{4}{|\omega_n-\omega_{n'}|}+\max_{n,n'\leqslant N}\frac{4}{|\omega_n+\omega_{n'}|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{n,n'\leqslant N}\left\{\left(2|\tau|+\frac{2}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n|}\right),\left(\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n-\omega_{n'}|}+\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n+\omega_{n'}|}\right)\right\}\times$$

$$\times\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{n,n'\leqslant N}\left\{\left(2\tau+\frac{2}{\omega_1}\right),\left(\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n-\omega_{n'}|}+\frac{4}{\omega_1+\omega_2}\right)\right\}\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n-\omega_{n'}|}\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}|B_nB_{n'}\nu_n\nu_{n'}|. \tag{5.29}$$

Введемо перепозначення:

$$\tilde{\nu}_n=\nu_nB_{-n},\quad \tilde{\nu}_{-n}=\nu_{-n}B_n,\quad \frac{2}{\min\limits_{n,n'\leqslant N}|\omega_n-\omega_{n'}|}=H(N),$$

тоді оцінка (5.29) матиме вид:

$$\|\hat{u}_N(t)\|^2_{L^2(0,\tau)}\leqslant 2H(N)\sum_{\substack{n,n'=1,\\ n\neq n'}}^{N}|\tilde{\nu}_n\tilde{\nu}_{n'}|=2H(N)\sum_{n'=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N}|\tilde{\nu}_n||\tilde{\nu}_{n'}|\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2H(N)\sum_{n'=1}^{N}\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}|\tilde{\nu}_n|^2}\right)=H(N)\sqrt{2N}\|\tilde{\nu}\|_2\sum_{n'=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|\leqslant$$

$$\leqslant H(N)\sqrt{2N}\|\tilde{\nu}\|_2\sqrt{\sum_{n'=1}^{N}|\tilde{\nu}_{n'}|^2}\sqrt{\sum_{n'=1}^{N}1^2}=H(N)N\|\tilde{\nu}\|_2^2. \tag{5.30}$$

Тут $\|\tilde{\nu}\|_2=\sum\limits_{n=1}^{N}\left(|\tilde{\nu}_n|^2+|\tilde{\nu}_{-n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – евклідова норма вектора $\tilde{\nu}$. Згідно леми 5.1,

$$\tilde{\nu}=K^{-1}y, \tag{5.31}$$

де $\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{-1} \\ \tilde{\nu}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\nu}_{-N} \\ \tilde{\nu}_N \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_{-1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{B_{-N}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{B_N} \end{pmatrix} (e^{-i\omega_N \tau}\tilde{q}_N^1 - \tilde{q}_N^0)$.

Оцінимо норму вектора $\tilde{\nu}$. Для цього запишемо матрицю K у вигляді $K = \tau I + C$ і розглянемо C як лінійний оператор з простору $\mathbb{C}^{2N}$ з нормою $\|\cdot\|_1$ в $\mathbb{C}^{2N}$ з нормою $\|\cdot\|_\infty$:

$$C : \left(\mathbb{C}^{2N}, \|\cdot\|_1\right) \longrightarrow \left(\mathbb{C}^{2N}, \|\cdot\|_\infty\right),$$

де $\|y\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(|y_n| + |y_{-n}|\right), \quad \|y\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant |n| \leqslant N} |y_n|$.

Перепишемо формулу (5.31) у вигляді

$$K\tilde{\nu} = (\tau I + C)\tilde{\nu} = y, \quad \tilde{\nu} = \frac{y}{\tau} - \frac{C\tilde{\nu}}{\tau},$$

звідки випливає, що

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\tau}\left(\|y\|_\infty + \|C\tilde{\nu}\|_\infty\right) \leqslant \frac{1}{\tau}\left(\|y\|_\infty + \|C\|\|\tilde{\nu}\|_1\right),$$

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty \left(1 - \frac{\|C\|}{\tau}\right) \leqslant \frac{1}{\tau}\|y\|_\infty,$$

$$\|\tilde{\nu}\|_\infty \leqslant \frac{\|y\|_\infty}{\tau - \|C\|} \quad \text{за умови} \quad \|C\| < \tau. \tag{5.32}$$

Тепер оцінимо норму лінійного оператора C:

$$\|C\| \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \left\{ \max_{1 \leqslant m \leqslant N} |C_{nm}| \right\} =$$

$$= \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \left\{ \left| \frac{i(e^{-2i\omega_n \tau} - 1)}{2\omega_n} \right|, \left| \frac{i(1 - e^{2i\omega_n \tau})}{2\omega_n} \right|, \max_{1 \leqslant m \leqslant N} \left\{ \frac{2}{|\omega_m - \omega_n|}, \frac{2}{|\omega_m + \omega_n|} \right\} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \left\{ \frac{1}{|\omega_n|}, \max_{1 \leqslant m \leqslant N} \left\{ \frac{2}{|\omega_m - \omega_n|}, \frac{2}{|\omega_m + \omega_n|} \right\} \right\}. \tag{5.33}$$

З формули (5.4) маємо

$$\omega_n = \beta_{j_n k_n} = \alpha \left(\left(\frac{\pi j_n}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi k_n}{l_2} \right)^2 \right), \omega_m = \beta_{j_m k_m} = \alpha \left(\left(\frac{\pi j_m}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi k_m}{l_2} \right)^2 \right).$$

З обмежень $1 \leqslant n \leqslant N$ і $1 \leqslant m \leqslant N$ отримуємо нерівності виду $1 \leqslant j_m, k_m, j_n, k_n \leqslant M(N)$ для цілого числа $M(N)$ з формули (5.3).

Тоді оцінимо вираз (5.33) наступним чином

$$\|C\| \leqslant \max_{j_n,k_n \leqslant M} \left\{ \frac{1}{\beta_{j_n k_n}}, \max_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n) \\ j_n,k_n \leqslant M}} \left\{ \frac{2}{|\beta_{j_n k_n} + \beta_{j_m k_m}|}, \frac{2}{|\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}|} \right\} \right\} \leqslant \tag{5.34}$$

$$\leqslant \max_{j_n,k_n \leqslant M} \left\{ \frac{1}{\min\limits_{j_n,k_n \leqslant M} \beta_{j_n k_n}}, \frac{2}{\min\limits_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n) \\ j_n,k_n,j_m,k_m \leqslant M}} |\beta_{j_n k_n} + \beta_{j_m k_m}|}, \frac{2}{\min\limits_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n) \\ j_n,k_n,j_m,k_m \leqslant M}} |\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}|} \right\}.$$

Позначимо $j_n = p, \quad k_n = c, \quad j_m = m, \quad k_m = s, \quad \chi = \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$, тоді

$$\min_{\substack{(j_m,k_m)\neq(j_n,k_n) \\ j_n,k_n,j_m,k_m \leqslant M}} |\beta_{j_n k_n} - \beta_{j_m k_m}| = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2} \min_{\substack{(p,c)\neq(m,s) \\ p,c,m,s \leqslant M}} |\chi p^2 + c^2 - \chi m^2 - s^2|. \tag{5.35}$$

Так як χ – алгебраїчне число степеня $n^* \geqslant 2$, то з теореми Ліувілля випливає, що

$$\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2} \min_{\substack{(p,c)\neq(m,s) \\ p,c,m,s \leqslant M}} |\chi p^2 + c^2 - \chi m^2 - s^2| \geqslant \min_{\substack{p \neq m \\ p,m \leqslant M}} \frac{\alpha\pi^2 R}{l_2^2 |p^2 - m^2|^{n^*-1}} \geqslant \frac{\alpha\pi^2 R}{l_2^2 (M^2(N)-1)^{n^*-1}}, \tag{5.36}$$

де R – додатна константа, яка залежить тільки від χ та виражається у явному вигляді через спряжені з χ величини [130].

Тоді з нерівностей (5.34), (5.35), (5.36) одержуємо оцінку:

$$\|C\| \leqslant \frac{l_2^2 (M^2(N)-1)^{n^*-1}}{\alpha\pi^2 R}.$$

Таким чином, з формул (5.30), (5.32) і (5.3) маємо, що

$$\|\hat{u}_N(t)\|^2_{L^2(0,\tau)} \leqslant NH(N)\|y\|_2^2, \quad \tau > \frac{l_2^2 (M^2(N)-1)^{n^*-1}}{\alpha\pi^2 R} = O(N^{n^*-1}). \tag{5.37}$$

Оцінимо евклідову норму вектора y:

$$\|y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(|y_{-n}|^2 + |y_n|^2 \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|e^{-i\omega_n \tau} q_n^1 - q_n^0|^2 + |e^{i\omega_n \tau} q_{-n}^1 - q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{|e^{-i\omega_n \tau} q_n^1|^2 + |e^{i\omega_n \tau} q_{-n}^1|^2 + |q_n^0|^2 + |q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2}.$$

Підставимо отриманий вираз у ліву частину формули (5.28):

$$r_N \leqslant \frac{4N\tau}{\min\limits_{\substack{1\leqslant n<\\ <n'\leqslant N}}|\omega_n-\omega_{n'}|}\sum_{n=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|B_n|^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|B_{-n}|^2+|B_n|^2\right). \tag{5.38}$$

Задамо відображення $n\longmapsto(p,c)$, $n'\longmapsto(k,s)$, яке ставить у відповідність індексам $n\in\mathbb{N}$ і $n'\in\mathbb{N}$ пари індексів (p,c), (k,s) відповідно. Згідно введеним позначенням:

$$B_n=i\varphi_{pc},\quad \omega_n=\beta_{pc},\quad \omega_{n'}=\beta_{ks},$$

де $\beta_{pc}=\alpha\left(\left(\frac{\pi p}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi c}{l_2}\right)^2\right)$, $\beta_{ks}=\alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi s}{l_2}\right)^2\right)$.

Тоді формула (5.28) набуде вигляду

$$r_N \leqslant \frac{8N\tau}{\min\limits_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\ p,c,k,s\leqslant N}}|\beta_{pc}-\beta_{ks}|}\sum_{p,c=1}^{N}\frac{|q_n^1|^2+|q_{-n}^1|^2+|q_n^0|^2+|q_{-n}^0|^2}{|i\varphi_{pc}|^2}\sum_{p,c=N+1}^{\infty}|i\varphi_{pc}|^2. \tag{5.39}$$

Нехай

$$q_n^0=0,\quad q_{-n}^0=0,\quad |q_n^1|=|q_{-n}^1|=O\left(\frac{1}{p^\gamma}+\frac{1}{c^\gamma}\right).$$

З урахуванням позначень (5.5) для φ_{pc} з формули (5.39) випливає формула

$$r_N=O\left(\frac{N\tau}{\min\limits_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\ p,c,k,s\leqslant N}}\left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right|}\sum_{p,c=1}^{N}\frac{(c^\gamma+p^\gamma)^2}{(pc)^{2\gamma-2}}\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right) \tag{5.40}$$

при $N\longrightarrow\infty$.

Оцінимо вираз у знаменнику формули (5.40).

Нехай $\chi=\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2>0$,

$$1-N^2\leqslant c^2-s^2=(c-s)(c+s)=mq\leqslant N^2-1,$$

$$1-N^2\leqslant p^2-k^2=(p-k)(p+k)=m'q'\leqslant N^2-1,$$

тоді

$$\min_{\substack{(p,c)\neq(k,s)\\ p,c,k,s\leqslant N}}\left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right|=\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\min_{\substack{|mq|\leqslant N^2-1,\\ |m'q'|\leqslant N^2-1}}|mq+\chi m'q'|. \tag{5.41}$$

Якщо χ – алгебраїчне число степеня $n^*\geqslant 2$, то за теоремою Ліувілля:

$$|mq+\chi m'q'|=|m'q'||\chi+\frac{mq}{m'q'}|>\frac{\widetilde{C}|m'q'|}{|m'q'|^{n^*}}=\frac{\widetilde{C}}{|m'q'|^{n^*-1}},$$

де $\widetilde{C}$ – додатна константа, яка залежить тільки від χ та виражається у явному вигляді через спряжені з χ величини.

Якщо $\quad 1\leqslant c\leqslant N,\quad 1\leqslant s\leqslant N,\quad 1\leqslant p\leqslant N,\quad 1\leqslant k\leqslant N$, то

$$\inf_{\substack{(m,m')\neq(0,0),\\ 2\leqslant q\leqslant 2N,\\ 2\leqslant q'\leqslant 2N}}|mq+\chi m'q'|>\inf\frac{\widetilde{C}}{|m'q'|^{n^*-1}}=\frac{\widetilde{C}}{\sup|m'q'|^{n^*-1}}=\frac{\widetilde{C}}{(2N(N-1))^{n^*-1}}. \tag{5.42}$$

Тоді з формул (5.41), (5.42) одержуємо нерівність:

$$\min_{\substack{1\leqslant(p,c)\leqslant\\ \leqslant(k,s)\leqslant N}}\left|\frac{\alpha\pi^2}{(l_1l_2)^2}\left(l_1^2(c^2-s^2)+l_2^2(p^2-k^2)\right)\right|\geqslant\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\frac{\widetilde{C}}{(2N(N-1))^{n^*-1}}. \tag{5.43}$$

Підставимо вираз (5.43) у формулу (5.40):

$$r_N=O\left(\tau N(2N(N-1))^{n^*-1}\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right). \tag{5.44}$$

Формулу (5.44) можна еквівалентно записати наступним чином:

$$r_N=O\left(\tau N^{2n^*-1}\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2\sum_{p,c=N+1}^{\infty}(pc)^{-2}\right)\quad\text{при}\quad N\longrightarrow\infty. \tag{5.45}$$

Застосуємо інтегральну ознаку порівняння для оцінки сум у (5.45):

$$\sum_{p,c=1}^{N}(pc)^{2-2\gamma}(c^\gamma+p^\gamma)^2\leqslant\int_0^N p^{2-2\gamma}dp\int_1^{N+1}c^2dc+2\int_0^N p^{2-\gamma}dp\int_0^N c^{2-\gamma}dc+$$
$$+\int_1^{N+1}p^2dp\int_0^N c^{2-2\gamma}dc=\frac{2N^{6-2\gamma}}{(3-\gamma)^2}+\frac{2N^{3-2\gamma}((N+1)^3-1)}{9-6\gamma}$$

при $\gamma \neq 3$ і $\gamma \neq \frac{3}{2}$,

$$\sum_{p,c=N+1}^{\infty} (pc)^{-2} \leqslant \int_N^{\infty} dp \int_N^{\infty} (pc)^{-2} dc = \int_N^{\infty} p^{-2} dp \int_N^{\infty} c^{-2} dc = \frac{1}{N^2}.$$

Підставимо значення цих інтегралів у формулу (5.45):

$$r_N = O\left(\frac{\tau 2 N^{2n^*-1} N^{6-2\gamma}}{N^2(3-\gamma)^2} + \frac{\tau 2 N^{2n^*-1} N^{3-2\gamma}((N+1)^3-1)}{N^2(9-6\gamma)}\right),$$

тобто

$$r_N = O\left(\tau N^{2n^*-2\gamma+3}\right). \tag{5.46}$$

Отриманий вираз справджується для значень $\tau = O(N^{n^*-1})$, які задовольняють нерівність (5.37). З оцінки (5.46) знайдемо значення γ, для яких $r_N \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty$:

$$\gamma > \frac{3}{2} n^* + 1.$$

З цієї нерівності випливає властивість (5.28) для достатньо великих N.

Таким чином, теорему 5.1 доведено. □

Наслідок. [6, с.1652] *Нехай виконуються умови теореми 5.1. Тоді* $q^1 \in \overline{R(0)}$.

5.4. Модельний приклад

У якості прикладу розглянемо систему диференціальних рівнянь (5.7) для десяти власних частот:

$$\dot{\tilde{q}}_{10} = A_{10}\tilde{q}_{10} + B_{10}u, \tag{5.47}$$

де матриці системи мають вигляд

$$\tilde{q}_{10} = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{-10} \\ q_{10} \end{pmatrix}, A_{10} = i \begin{pmatrix} \beta_{k_1 j_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{k_1 j_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{k_{10} j_{10}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{k_{10} j_{10}} \end{pmatrix}, B_{10} = i \begin{pmatrix} -\varphi_{k_1 j_1} \\ \varphi_{k_1 j_1} \\ \vdots \\ -\varphi_{k_{10} j_{10}} \\ \varphi_{k_{10} j_{10}} \end{pmatrix},$$

а їх відповідні елементи задано співвідношеннями (5.5):

$$\beta_{k_p j_p} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k_p}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j_p}{l_2} \right)^2 \right), \tag{5.48}$$

$$\varphi_{k_p j_p} = \begin{cases} \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k_p j_p}, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_p j_p}, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m+1, \end{cases}$$

$(k, j) \in \mathbb{N}^2, \quad p = \overline{1, 10}.$

Задамо значення механічних параметрів для відповідного диференціального рівняння (3.8):

$$l_1 = 1 \text{ м}, \quad l_2 = \sqrt[4]{2} \text{ м}, \quad a_1 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = -1 \text{ м}, \quad \alpha = 1 \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Розглянемо задачу оптимального керування для підсистеми системи (5.47), яка відповідає трьом модам коливань

$$\dot{\tilde{q}}_3 = A_3 \tilde{q}_3 + B_3 \hat{u}(t) \tag{5.49}$$

з функціоналом якості

$$J = \int_0^1 |u(t)|^2 dt \longrightarrow \min \tag{5.50}$$

та крайовими умовами

$$\tilde{q}_3(0) = \tilde{q}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6, \quad \tilde{q}_3(1) = \tilde{q}_3^1 = \begin{pmatrix} q_{-1}^1 \\ q_1^1 \\ q_{-2}^1 \\ q_2^1 \\ q_{-3}^1 \\ q_3^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6, \tag{5.51}$$

де оберемо $\gamma = 4$, $q_p^1 = q_{-p}^1 = \dfrac{1}{p^\gamma}$ для $p = 1, 2, 3$.

Знайдемо значення власних частот $\beta_{k_pj_p}$ по формулі (5.48):

$$\beta_{k_1j_1} = \pi^2 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 16,849\ c^{-1}; \qquad \beta_{k_1j_2} = \pi^2 + \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 37,785\ c^{-1};$$

$$\beta_{k_1j_3} = \pi^2 + \frac{9\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 72,679\ c^{-1}; \qquad \beta_{k_2j_1} = 4\pi^2 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 46,457\ c^{-1};$$

$$\beta_{k_2j_2} = 4\pi^2 + \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 67,394\ c^{-1}; \qquad \beta_{k_2j_3} = 4\pi^2 + \frac{9\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 102,288\ c^{-1};$$

$$\beta_{k_3j_1} = 9\pi^2 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 95,805\ c^{-1}; \qquad \beta_{k_3j_2} = 9\pi^2 + \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 116,742\ c^{-1};$$

$$\beta_{k_3j_3} = 9\pi^2 + \frac{9\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 151,636\ c^{-1}; \qquad \beta_{k_4j_1} = 16\pi^2 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \approx 164,893\ c^{-1}.$$

Серед наведених вище частот оберемо три найменші $\beta_{k_1j_1} < \beta_{k_2j_2} < \beta_{k_3j_3}$ та введемо перепозначення $(k_1, j_1) = (1, 1)$ для $p = 1$; $(k_2, j_2) = (1, 2)$ для $p = 2$; $(k_3, j_3) = (1, 3)$ для $p = 3$.

Знайдемо значення вектора ν_p з леми 5.1. Для цього підставимо наведені вище значення $\beta_{k_pj_p}, \varphi_{k_pj_p}$ і $q_p^1 = q_{-p}^1$ у вираз (5.11) леми 5.1:

$$\nu_p = \begin{pmatrix} -0,911 + 1,911i \\ -0,911 - 1,911i \\ 4,313 + 0,118i \\ 4,313 - 0,118i \\ -0,365 + 0,020i \\ -0,365 - 0,020i \end{pmatrix}.$$

Для обраних частот функція оптимального керування задачі керування (5.49)–(5.51) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{u}_N(t) = {} & (1,347 + 0,642i)e^{t16,848i} + (1,347 - 0,642i)e^{-t16,848i} + \\ & + (-0,016 + 0,567i)e^{t37,785i} + (-0,016 - 0,567i)e^{-t37,785i} + \\ & + (0,005 + 0,086i)e^{t72,680i} + (0,005 - 0,086i)e^{-t72,680i} = \\ = {} & 2(1,347\cos(16,848t) - 0,642\sin(16,848t)) - 2(0,016\cos(37,785t) + \\ & + 0,567\sin(37,785t)) + 2(0,005\cos(72,680t) - 0,086\sin(72,680t)). \quad (5.52) \end{aligned}$$

Для ілюстрації умов теореми 5.1. будемо розглядати граничні умови (5.51) для системи (5.49) з трьома модами як проекції граничних умов $\tilde{q}^0 = \tilde{q}_{10}(0) = 0 \in \mathbb{C}^{20}$, $\tilde{q}^1 = \tilde{q}_{10}(1) = (q^1_1, q^1_{-1}, ..., q^1_{10}, q^1_{-10}) \in \mathbb{C}^{20}$ багаточастотної системи (5.47) з $q^1_{-p} = q^1_p = \frac{1}{p^\gamma}, \quad p = \overline{1,10}$.

Шляхом чисельного інтегрування знайдемо розв'язок $\widetilde{q}_{10}(t) \in \mathbb{C}^{20}$ системи (5.47) з початковою умовою $\widetilde{q}_{10}(0) = 0 \in \mathbb{C}^{20}$.

Графік норми різниці розв'язку системи (5.47) $\widetilde{q}_p(t)$ і крайової умови $\widetilde{q}^1_{10}$ при $t \in [0,1]$ наведено на Рис. 5.1.:

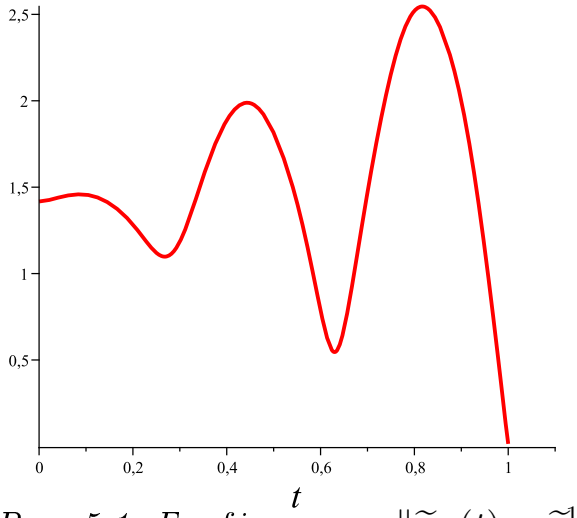

Рис. 5.1. Графік норми $\|\widetilde{q}_{10}(t) - \widetilde{q}^1_{10}\|$

Рис. 5.1. підтверджує, що керування, які відповідають підсистемі (5.49) з трьома модами, можуть бути застосовані для наближеного розв'язку двоточкової задачі системи вищого порядку (системи (5.47)).

Для ілюстрації впливу кількості мод N підсистеми, що породжує функцію керування $\widehat{u}_N(t)$ в умовах теореми 5.1, позначимо через $r_N = \|\widetilde{q}_{10}(1; q^0_{10}, \hat{u}_N) - \widetilde{q}^1_{10}\|$ похибку наближеного розв'язку двоточкової задачі з $\widetilde{q}_{10}(0) = q^0_{10}$, $\widetilde{q}_{10}(1) = q^1_{10}$ для системи (5.47) з 10 модами при застосуванні оптимальних (у сенсі леми 5.1.) керувань $u = \widehat{u}_N(t)$, $t \in [0,1]$, що відповідають підсистемам системи (5.47) з N модами $(1 \leqslant N \leqslant 5)$.

Рис. 5.2. показує, що похибка r_N монотонно спадає при зростанні N. Величина r_3 є ординатою графіка функції з Рис. 5.1. при $t = 1$.

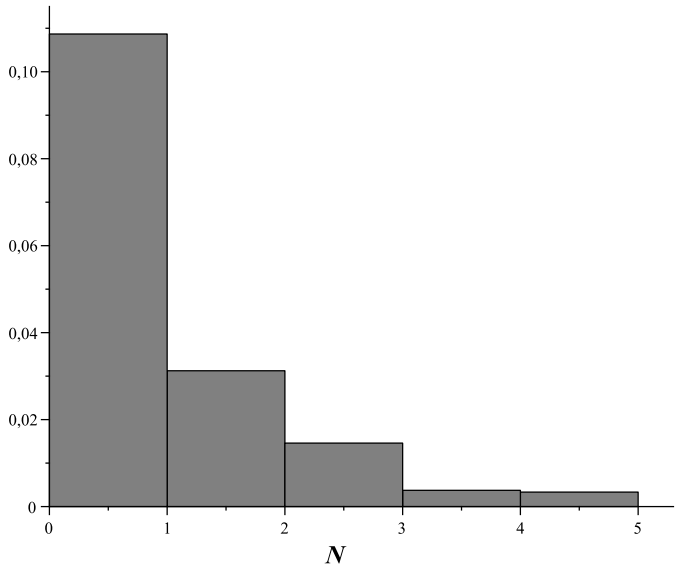

Рис. 5.2. Залежність похибки r_N від кількості мод N наближеної системи

5.5. Висновки

У даному розділі розглянуто нескінченну систему диференціальних рівнянь, яка описує коливання пружної пластини Кірхгофа. До основних результатів розділу слід віднести наступні положення.

1. Систему, що описує динаміку пружної механічної моделі з модальними координатами, зведено до діагональної системи у комплексних змінних.
2. За допомогою методу модального аналізу уперше проведено оцінку множини досяжності нескінченновимірної системи. Базовим припущенням, яке забезпечує мінімальність норми розв'язків підсистеми з високочастотними модами, є умова теореми 5.1 про алгебраїчність числа $\chi = l_2^2/l_1^2$, де l_1 і l_2 – сторони прямокутної пластини.
3. За допомогою модельного прикладу продемонстровано можливість застосування функцій оптимального керування системи з N модами $(N = 1, 2, ..., 5)$ до наближеного розв'язку двоточкової задачі для багатовимірної системи.

РОЗДІЛ 6
СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ

6.1. Синтез функцій керування зі зворотним зв'язком

У розділі 3 було отримано нескінченну систему диференціальних рівнянь (3.19), яка описує коливання пружної пластини Кірхгофа, прикріпленої до твердого тіла, що обертається:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{6.1}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \; u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \; B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \dots ,$$

де $\xi_n = \xi_{kj}(t)$ і $\eta_n = \eta_{kj}(t)$ – модальна координата та швидкість, які відповідають моді коливань з індексами $n = n(k, j)$, $u_1(t)$ і $u_2(t)$ – керування, які відповідають кутовому прискоренню тіла-носія. Коефіцієнти рівняння (6.1) пов'язані з параметрами механічної системи за допомогою співвідношень:

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2 \right), \tag{6.2}$$

$$\varphi_n = \varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{для парного } k, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & \text{для непарного } k, \text{ парного } j, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj}, & \text{для непарного } k, \text{ непарного } j, \end{cases}$$

$$g_n = g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & \text{для парного } k, \text{ непарного } j, \\ 0, & \text{для парного } j, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 kj}, & \text{для непарного } k, \text{ непарного } j. \end{cases}$$

Фізичний зміст фазових змінних та додатних параметрів α, l_1, l_2, a_1, a_2 описано у розділі 3. Припустимо, що $2a_1 \neq l_1$ і $2a_2 \neq l_2$.

У гільбертовому просторі ℓ^2 для векторів $x = \begin{pmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \xi_2, & \eta_2, & \dots \end{pmatrix}^T$ та $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1, & \overline{\eta}_1, & \overline{\xi}_2, & \overline{\eta}_2, & \dots \end{pmatrix}^T$ скалярний добуток задається стандартним чином:

$$\langle x, \overline{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n \overline{\xi}_n + \eta_n \overline{\eta}_n \right).$$

Побудуємо для системи (6.1) керування зі зворотним зв'язком $u = v(x)$, яке забезпечить часткову асимптотичну стійкість її тривіального розв'язку. Для цього розглянемо функціонал $V : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$V(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\xi_n^2 + \eta_n^2 \right), \tag{6.3}$$

де $S = \{n \mid \varphi_n^2 + g_n^2 = 0\}$.

Запишемо похідну функціонала V в силу системи (6.1):

$$\dot{V} = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\xi_n \dot{\xi}_n + \eta_n \dot{\eta}_n \right) = 2u_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n \varphi_n \right) + 2u_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n g_n \right).$$

Визначимо функції керування зі зворотним зв'язком наступним чином:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n, \qquad v_2(x) = -\frac{k_2}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n, \qquad (k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0). \tag{6.4}$$

Тоді похідна V в силу системи (6.1) з $u_1 = v_1(x), u_2 = v_2(x)$ матиме вид

$$\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leqslant 0.$$

6.2. Асимптотична стійкість замкненої системи

Запишемо замкнену систему (6.1) зі зворотним зв'язком $u = v(x)$ у вигляді

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \tag{6.5}$$

де $F = A + BK$, $K = -\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k_1\varphi_1 & 0 & k_1\varphi_2 & \dots \\ 0 & k_2 g_1 & 0 & k_2 g_2 & \dots \end{pmatrix}$.

Оператор F є інфінітезимальним генератором C_0-напівгрупи лінійних обмежених операторів $\{e^{tF}\}_{t \geqslant 0}$ в ℓ^2 на основі теореми Люмера–Філліпса [131].

Розглянемо неперервний функціонал

$$y(x) = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\xi_n^2 + \eta_n^2 \right) \right)^{1/2} \tag{6.6}$$

у просторі ℓ^2.

Сформулюємо основний результат про асимптотичну стійкість розв'язку $x = 0$ системи (6.5) у сенсі означення 2.14.

Теорема 6.1. [7, с.65] *Нехай $k_1 > 0$ і $k_2 > 0$. Тоді керування зі зворотним зв'язком $u_1 = v_1(x)$ і $u_2 = v_2(x)$, представлені у вигляді* (6.4), *забезпечують асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи* (6.1) *по відношенню до функціонала у виду* (6.6).

Доведення. Для доведення скористаємося теоремою 2.14.

Умова 1) теореми 2.14 виконується, оскільки

$$y(x) \leqslant V(x) = \|x\|^2, \qquad \forall x \in \ell^2.$$

Умова 2) є наслідком того, що $\dot{V} = -k_1 \left(\sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leqslant 0$ при $k_1 > 0$ і $k_2 > 0$, для всіх $x \in D(A)$, де

$$D(A) = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \beta_n^2 \left(\xi_n^2 + \eta_n^2\right) \ < \ \infty\}.$$

Для перевірки умови 3) теореми 2.14 доведемо передкомпактність напівтраєкторій лінійного диференціального рівняння (6.5) за допомогою теореми з [132]. Для цього доведемо компактність оператора $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ при деякому $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння $Ix + \lambda Ax + \lambda Bu = \bar{x}$ відносно x, де $\lambda = \text{const}$. Запишемо вираз у покомпонентному вигляді:

$$(I + \lambda A) \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_n \\ \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо рівняння методом оберненої матриці та отримаємо

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\beta_n \\ \lambda\beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi}_n \\ \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Підставимо вираз (6.7) у рівності для $u = v(x)$ виду (6.4):

$$\begin{pmatrix} v_1(\overline{x}) \\ v_2(\overline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k_1}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\varphi_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\right) \\ \dfrac{-k_2}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2} \left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\right) \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Перетворимо (6.8) наступним чином:

$$\begin{cases} v_1 \left(1 - \dfrac{k_1}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\lambda\varphi_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2}\right) - v_2 \left(\dfrac{k_1}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2}\right) = -\dfrac{k_1}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\varphi_n \left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1 + (\lambda\beta_n)^2}, \\ v_1 \left(-\dfrac{k_2}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\lambda\varphi_n g_n}{1 + (\lambda\beta_n)^2}\right) + v_2 \left(1 - \dfrac{k_2}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda\beta_n)^2}\right) = -\dfrac{k_2}{2} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{g_n \left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1 + (\lambda\beta_n)^2}. \end{cases} \tag{6.9}$$

З (6.9) за допомогою метода Крамера знайдемо представлення функцій $v_1(\overline{x})$ і $v_2(\overline{x})$:

$$v_1(\overline{x}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad v_2(\overline{x}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{6.10}$$

де

$$\Delta = 1 - \frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2,$$

$$\Delta_1 = -\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \\ - \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2},$$

$$\Delta_2 = -\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \\ - \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}.$$

Формули (6.10) визначають лінійний функціонал $v(\overline{x})$ у ℓ^2. Покажемо, що $v(\overline{x})$ є обмеженим для довільного $\lambda > 0$, для цього оцінимо $v_1(\overline{x})$ і $v_2(\overline{x})$. Так як $|v_1(\overline{x})| = \left|\frac{\Delta_1}{\Delta}\right| = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}$, а $|v_2(\overline{x})| = \left|\frac{\Delta_2}{\Delta}\right| = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}$, то оцінимо окремо чисельник і знаменник:

$$|\Delta_1| \leqslant \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda|\varphi_n g_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}\times$$

$$\times \sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{|g_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{\lambda|\varphi_n g_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{|g_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}. \quad (6.11)$$

Для довільного $\beta_0 > 0$ запишемо суми в (6.11) окремо при $\beta_n < \beta_0$ і $\beta_n \geqslant \beta_0$. Для цього застосуємо нерівність Гельдера:

$$|\Delta_1| \leqslant \frac{\lambda k_1}{2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geqslant\beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{k_1}{2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{|\varphi_n|^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\lambda^2k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geqslant\beta_0}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\lambda^2k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty} \frac{g_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geqslant\beta_0}}^{\infty} \frac{g_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\lambda k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{g_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.12)$$

З урахуванням нерівностей

$$\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\overline{\xi}\|_{\ell^2}\leqslant\|\overline{x}\|,\qquad \left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\overline{\eta}\|_{\ell^2}\leqslant\|\overline{x}\|,$$

$$\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geqslant\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+(\lambda\beta_n)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|\varphi\|\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

вираз (6.12) набуде вигляду:

$$|\Delta_1|\leqslant\|\overline{x}\|\left(\|\varphi\|\left(\left(\frac{\lambda k_1}{2}+\frac{\lambda^2k_1k_2}{2}\|g\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_1+\lambda k_1k_2\|g\|^2}{2}\right)\right)=$$

$$=M_1(\lambda)\|\overline{x}\|. \quad (6.13)$$

Аналогічно отримаємо, що

$$|\Delta_2|\leqslant\|\overline{x}\|\left(\|g\|\left(\left(\frac{\lambda k_2}{2}+\frac{\lambda^2k_1k_2}{2}\|\varphi\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_2}{2}+\frac{\lambda k_1k_2}{2}\|\varphi\|^2\right)\right)=$$

$$=M_2(\lambda)\|\overline{x}\|. \quad (6.14)$$

Оцінимо визначник Δ знизу, для цього скористаємось представленням:

$$\Delta=1+\lambda r(\lambda), \quad (6.15)$$

де

$$r(\lambda)=-\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}-\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}+$$

$$+\frac{\lambda k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}-\frac{\lambda k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_ng_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2.$$

Нехай $|r(\lambda)|\leqslant M$ при $M>0$ для будь-якого $\lambda\in[0,\lambda_0]$. Оберемо $\lambda=$ $=\min\left\{\lambda_0,\frac{1}{M}\right\}$. Тоді з (6.15) маємо, що $\triangle>0$. До оцінки $|r(\lambda)|$ застосуємо нерівність трикутника та нерівність Гельдера:

$$|r(\lambda)| \leqslant \frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}+$$

$$+\frac{\lambda k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{\lambda k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k_2}{2}\|g\|^2+\frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2+\frac{\lambda k_1k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2.$$

Оберемо $\lambda_0=1$, тоді

$$|r(\lambda_0)|\leqslant\frac{k_2}{2}\|g\|^2+\frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2+\frac{k_1k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2=M,$$

а $\Delta\geqslant 1-\lambda\left(\frac{k_2}{2}\|g\|^2+\frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2+\frac{k_1k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2\right)=M_3(\lambda).$

Таким чином показано, що для будь-якого $\lambda\in(0,1)$ знайдуться такі числа $M_4(\lambda)>0$ і $M_5(\lambda)>0$, що

$$|v_1(\overline{x})|\leqslant\frac{M_1(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\overline{x}\|=M_4(\lambda)\|\overline{x}\|,\qquad |v_2(\overline{x})|\leqslant\frac{M_2(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\overline{x}\|=M_5(\lambda)\|\overline{x}\|$$

у формулах (6.10) при всіх $\overline{x}\in\ell^2$. Формули (6.7) і (6.10) визначають $x=$ $=(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}$ при всіх $\overline{x}\in\ell^2$ для $\lambda>0$. Отже маємо, що

$$\|(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}\|^2\leqslant 2\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\overline{\xi}_n^2+\left(\overline{\eta}_n-\lambda\varphi_n v_1(\overline{x})-\lambda g_n v_2(\overline{x})\right)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2\|\overline{x}\|^2\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(1+\lambda^2M_4^2\|\varphi\|^2+\lambda^2M_5^2\|g\|^2+2\lambda^2M_4M_5\|\varphi\|\|g\|-\right.$$

$$\left.-2\lambda M_4\|\varphi\|-2\lambda M_5\|g\|\right).\quad(6.16)$$

Покажемо, що ряд $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}$ в (6.16) збігається. Для цього перейдемо до суми по двом індексам з урахуванням виразу (6.2):

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\leqslant\sum_{k,j=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_{kj})^2}\leqslant\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2}\sum_{k,j=1}^{\infty}\frac{1}{\left((\pi kl_2)^2+(\pi jl_1)^2\right)^2}.$$

Для оцінки суми ряду застосуємо інтегральну ознаку збіжності:

$$\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{((\pi kl_2)^2+(\pi jl_1)^2)^2}\leqslant\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dj}{((\pi kl_2)^2+(\pi jl_1)^2)^2}=$$

$$=\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi^3l_2k^3l_1^3}\right)\leqslant\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2}\left(\frac{1}{4\pi^3l_2l_1^3}+\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi^3l_2k^3l_1^3}\right)\right)=\frac{3l_1l_2^3}{8\pi^3\lambda^2\alpha^2}. \quad (6.17)$$

З (6.16) і (6.17) випливає, що

$$\|(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}\|^2\leqslant M_6(\lambda)\|\overline{x}\|^2.$$

Таким чином, визначено лінійний обмежений оператор

$$(\lambda F+I)^{-1}:\quad \ell^2\longrightarrow\ell^2$$

при кожному $\lambda>0$. Для доведення його компактності розглянемо оператор проектування $P_N:\ell^2\longrightarrow\ell^2$, який переводить елементи $x\in\ell^2$ у підпростір з $\xi_n=\eta_n=0$ при $n<N$:

$$P_N:\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \eta_{N-1}\\ \xi_N\\ \eta_N\\ \xi_{N+1}\\ \eta_{N+1}\\ \vdots\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \xi_N\\ \eta_N\\ \xi_{N+1}\\ \eta_{N+1}\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Розглянемо лінійний обмежений оператор в ℓ^2:

$$U_N=(I-P_N)(\lambda F+I)^{-1}.$$

Кожен оператор U_N є компактним, оскільки його образ має скінченну вимірність. Покажемо, що оператор $(\lambda F+I)^{-1}$ є границею по нормі компактних операторів:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\|(\lambda F+I)^{-1}-U_N\|=\lim_{N\longrightarrow\infty}\|P_N(\lambda F+I)^{-1}\|=0. \quad (6.18)$$

Маємо, що:

$$\|P_N(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}\| \leqslant \sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{2}{1+(\lambda\beta_n)^2} \sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty} \left(\overline{\xi}_n^2 + (\overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n v_1(\overline{x}) - \lambda g_n v_2(\overline{x}))^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\overline{x}\|^2 \sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2} \left(1+\lambda^2 M_4^2\|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2\|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5\|\varphi\|\|g\| - \right.$$

$$\left. -2\lambda M_4\|\varphi\| - 2\lambda M_5\|g\|\right). \quad (6.19)$$

З формули (6.17) випливає, що

$$\sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty.$$

Таким чином, з оцінки (6.19) маємо властивість (6.18). Як наслідок, оператор $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ – компактний, оскільки він є границею скінченновимірних операторів.

З компактності лінійного оператора $(\lambda F + I)^{-1}$ випливає передкомпактність усіх додатних напівтраєкторій лінійного диференціального рівняння (6.5) в ℓ^2 за теоремою з [132].

Перевіримо умову 4) теореми 2.14. Нехай $x(t),\ t \geqslant 0$ – розв'язок системи (6.1) з керуванням $u = v(x(t))$ виду (6.4), і нехай $y(x(\tau)) = 0$ при деякому $\tau \geqslant 0$.

Позначимо $\tilde{x}^0 = x(\tau) \in \ell^2$ і визначимо $\tilde{x}(t) = (\tilde{\xi}_1(t), \tilde{\eta}_1(t), \tilde{\xi}_2(t), \tilde{\eta}_2(t), ...)^T$ як розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_n(t) = \beta_n\tilde{\eta}_n(t), \\ \dot{\tilde{\eta}}_n(t) = -\beta_n\tilde{\xi}_n(t), \end{cases} \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0. \quad (6.20)$$

Оскільки $y(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{\xi}_n(0) = \tilde{\eta}_n(0) = 0$ при усіх $n \in \mathbb{N}\backslash S$. Тоді

$$\tilde{\xi}_n(t) = \tilde{\eta}_n(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash S, \quad \forall t \geqslant 0. \quad (6.21)$$

Це означає, що

$$y(\tilde{x}(t)) \equiv 0. \quad (6.22)$$

Покажемо, що $\tilde{x}(t)$ є розв'язком системи (6.1) зі зворотним зв'язком (6.4).

Безпосередньою підстановкою співвідношень (6.21) у функціонал зворотного зв'язку (6.4) отримуємо, що $u = v(\tilde{x}(t)) \equiv 0$, тобто підстановка $\tilde{x}(t)$ обертає диференціальні рівняння (6.1) зі зворотним зв'язком (6.4) у тотожність на основі системи (6.20).

Таким чином, $\tilde{x}(t)$ – розв'язок системи (6.1), (6.4), і з використанням властивості єдиності розв'язку задачі Коші отримаємо, що

$$x(t) = \tilde{x}(t+\tau), \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Звідси, з урахуванням тотожності (6.21), маємо, що $y(x(t)) \equiv 0$. Отже, умова 4) теореми 2.14 виконується.

Залишилось перевірити умову 5) теореми 2.14. Для цього покажемо, що будь-яка напівтраєкторія $\{x(t)\}_{t\geqslant 0}$ системи (6.1) з керуванням (6.4) на множині

$$M = \{x \in \ell^2 |\ \dot{V}(x) = 0\}$$

має властивість $y(x(t)) \equiv 0$.

Нехай $x(t) \in M$ при всіх $t \geqslant 0$, тобто

$$\dot{V}(x(t)) = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n(t) \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n\notin S}}^{\infty} g_n \eta_n(t) \right)^2 \equiv 0.$$

З урахуванням нерівностей $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ маємо, що

$$v_1(x(t)) = v_2(x(t)) = 0. \tag{6.23}$$

Підстановка керування $u = v(x(t))$ виду (6.23) у (6.1) приводить до системи:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \beta_n \eta_n(t), \\ \dot{\eta}_n(t) = -\beta_n \xi_n(t), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.24}$$

Запишемо розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.24):

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \xi_n(0)\cos(\beta_n t) + \eta_n(0)\sin(\beta_n t), \\ \eta_n(t) = -\xi_n(0)\sin(\beta_n t) + \eta_n(0)\cos(\beta_n t), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.25}$$

Підставляючи (6.25) в (6.23), отримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} (\varphi_n\eta_n(0)\cos(\beta_n t) - \varphi_n\xi_n(0)\sin(\beta_n t)) \equiv 0, \\ \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} (g_n\eta_n(0)\cos(\beta_n t) - g_n\xi_n(0)\sin(\beta_n t)) \equiv 0, \end{cases} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{6.26}$$

Зазначимо, що якщо система функцій

$$\{\cos(\beta_n t),\ \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N} \setminus S\} \tag{6.27}$$

є лінійно-незалежною на напівосі $t \in [0, \infty)$, то тотожності (6.26) виконуються тільки при

$$\xi_n(0) = \eta_n(0) = 0, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus S. \tag{6.28}$$

Із співвідношень (6.28) в силу формул (6.25) випливає властивість $y(x(t)) \equiv 0$, що забезпечує виконання умови 5) теореми 2.14.

Залишилося довести лінійну незалежність системи (6.27). Для цього покажемо, що система функцій

$$\{\cos(\beta_n t),\ \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{6.29}$$

є лінійно-незалежною на напівосі $t \in [0, \infty)$.

Для доведення лінійної незалежності функцій (6.29) скористаємося теоремою з [110], яка формулюється наступним чином: якщо

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m[a, a+z)}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \tag{6.30}$$

то система (6.29) – мінімальна в $L^2(0;\tau)$. У формулі (6.30) вираз $m[a,b)$ позначає потужність множини $[a,b) \cap K$, де

$$K = \{\beta_n |\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Для доведення (6.30) зазначимо, що

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2}\right) = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\left(j^2 + k^2\chi\right), \quad \text{де} \quad \chi = \frac{l_2^2}{l_1^2} > 0.$$

Позначимо $\widetilde{\beta}_{kj} = j^2 + k^2\chi$ та розглянемо два випадки.

1. Нехай $\chi \geqslant 1$. Позначимо $\Gamma_+ : j^2 + k^2\chi = b$ і $\Gamma_- : j^2 + k^2\chi = a$ – межі області Ω, в яку потрапляють цілі точки виду (j,k), для яких $\beta_{kj} \in [a,b)$. Область Ω визначено наступним чином:

$$\Omega = \{(j,k) \mid a \leqslant j^2 + k^2\chi < b, \quad k \geqslant 1,\ j \geqslant 1\}.$$

Таким чином, оцінка числа $m[a,b)$ зводиться до знаходження потужності множини $\Omega \cap \mathbb{N}^2$. Розглянемо два квадрата, один з яких (B_+) містить область Ω, а інший (B_-) має не більше однієї спільної точки з Ω, як показано на Рис. 6.1.

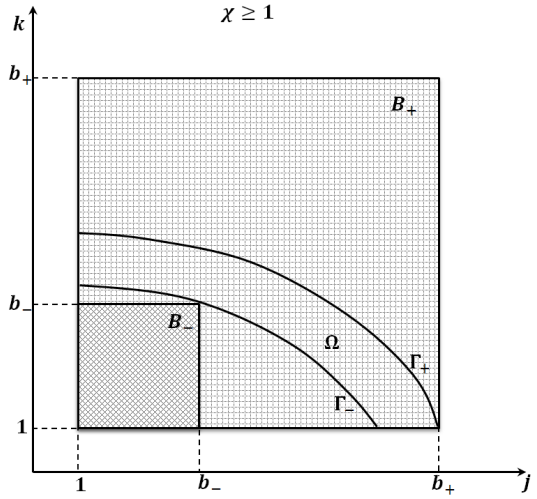

Рис. 6.1. Множини Ω, B_+, B_-

Знайдемо кількість цілих точок у квадратах B_+ і B_-. Визначимо координати вершин, які лежать на границі Ω:

$$b_+ :\ b_+^2 + \chi = b, \qquad b_- :\ b_-^2 + \chi b_-^2 = a. \tag{6.31}$$

З рівності (6.31) маємо, що $b_+ = \sqrt{b-\chi}$, а $b_- = \sqrt{\dfrac{a}{1+\chi}}$.

Таким чином, оцінка кількості цілих точок в Ω буде мати вигляд:

$$m[a;b) \leqslant |B_+ \cap \mathbb{N}^2| - |B_- \cap \mathbb{N}^2| + 1 = b_+^2 - b_-^2 + 1 = b - \chi - \frac{a}{1+\chi} + 1. \tag{6.32}$$

Нехай $b = a + z$, тоді

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m[a,a+z)}{z} \leqslant \overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{a\left(1 - \dfrac{1}{1+\chi}\right) + z - \chi + 1}{z} = 1. \tag{6.33}$$

2. Випадок $\chi < 1$ розглядається аналогічно випадку 1, при цьому

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{m[a,a+z)}{z} \leqslant \overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{a\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{1+\chi}\right)+\frac{z-1}{\chi}+1}{z} = \frac{1}{\chi}. \qquad (6.34)$$

З оцінок (6.33), (6.34) випливає, що система функцій (6.29) – лінійно-незалежна на $[0;\tau)$ при $\tau > 2\pi \max\left\{1, \frac{1}{\chi}\right\}$.

Таким чином, особлива точка $x = 0$ система (6.1) з керуванням $u = v(x)$ є асимптотично стійкою по відношенню до функціонала y за теоремою 2.14. □

6.3. Нелінійна модель обертального руху пружної системи навколо нерухомої точки

У цьому підрозділі розглянемо нелінійну модель обертального руху механічної системи, яка складається з твердого тіла, що має нерухому точку O, та пружної пластини (Рис. 6.2).

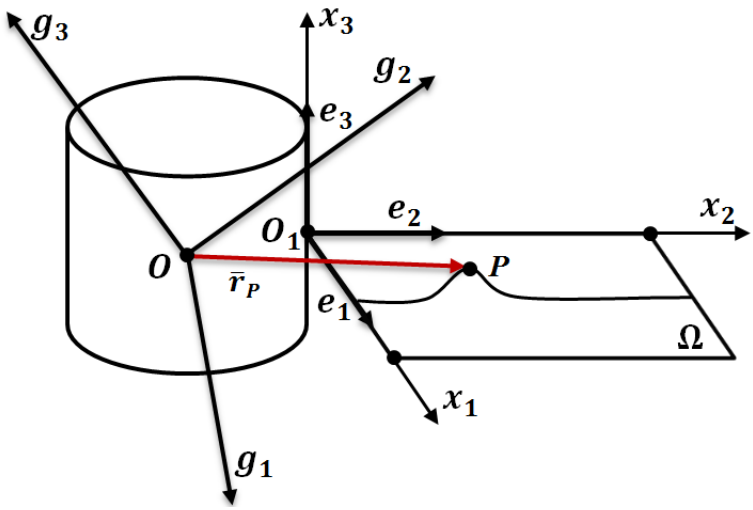

Рис. 6.2. Тверде тіло з пружною пластиною

Припустимо, що з тілом пов'язана декартова система координат $O_1x_1x_2x_3$ з ортами (e_1, e_2, e_3). Нехай нерухома точка O (центр мас твердого тіла) має координати $(-d_1, -d_2, -d_3)$ у системі $O_1x_1x_2x_3$. Також припустимо, що осі, колінеарні векторам e_i, є головними осями інерції твердого тіла. Позначимо через (g_1, g_2, g_3) орти нерухомої системи координат. Будемо вважати, що

до твердого тіла прикладено момент сил керування $M = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$. Розглянемо задачу на визначення керування $(f_1, f_2, f_3)^T \in \mathbb{R}^3$ у вигляді зворотного зв'язку за станом для демпфірування коливань системи та стабілізації кожного орта e_i у напрямку g_i, $i = 1, 2, 3$. Зазначимо, що для моделі абсолютно твердого тіла аналогічну задачу розв'язано у книзі [101].

Координату довільної точки P на серединній поверхні пластини можна записати у вигляді $P = (x_1, x_2, w(x_1, x_2, t))$, де $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$. Тоді рівняння коливань тонкої ізотропної пластини має вигляд, представлений у розділі 3:

$$\ddot{w} + a^2 \Delta^2 w = (x_1 + d_1)\dot{\omega}_2 - (x_2 + d_2)\dot{\omega}_1, \tag{6.35}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $a^2 = \dfrac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)}$ – жорсткість пластини при згинанні, ρ – поверхнева густина матеріалу пластини, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, h – товщина пластини, $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ – вектор кутової швидкості тіла. Права частина диференціального рівняння (6.35) описує силу інерції, обумовлену переносним рухом твердого тіла [112]. У формулі (6.35) враховано тільки лінійні доданки відносно переміщень, кутової швидкості та похідних цих величин, тобто досліджується модель малих коливань пластини та повільних обертів тіла.

Розглянемо крайові умови, які відповідають шарнірному закріпленню пластини на границі області:

$$w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0, x_1=l_1} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0, x_2=l_2} = 0. \tag{6.36}$$

Запишемо рівняння зміни кінетичного моменту у вигляді:

$$\dot{K} + \omega \times K = M. \tag{6.37}$$

У рівнянні (6.37) кінетичний момент системи дорівнює $K = K_1 + K_2$, де $K_1 = I\omega = I_1\omega_1 e_1 + I_2\omega_2 e_2 + I_3\omega_3 e_3$ – кінетичний момент твердого тіла, $K_2 = \rho \int\limits_\Omega r_P \times v_P dx$ – кінетичний момент пластини, I – центральний тензор інерції твердого тіла.

Обчислимо кінетичний момент K_2 пластини. Для цього знайдемо швидкість точки P та радіус-вектор r_P, який з'єднує центр мас твердого тіла (точку O) з точкою P пластини:

$$v_P = v_{\text{пер}} + v_{\text{відн}} = \omega \times r_P + \dot{w}e_3, \tag{6.38}$$

де

$$r_P = (x_1 + d_1)e_1 + (x_2 + d_2)e_2 + (w + d_3)e_3. \tag{6.39}$$

Таким чином, з формули (6.38) з урахуванням (6.39) отримаємо:

$$v_P = (\omega_2(d_3 + w) - \omega_3(d_2 + x_2))e_1 + (\omega_3(d_1 + x_1) - \omega_1(d_3 + w))e_2 + \\ + (\omega_1(d_2 + x_2) - \omega_2(d_1 + x_1) + \dot{w})e_3. \tag{6.40}$$

З формул (6.39) та (6.40) випливає, що

$$K_2 = \int\limits_\Omega \rho(K_{21}e_1 + K_{22}e_2 + K_{23}e_3)dx, \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned} K_{21} &= \omega_1[(x_2 + d_2)^2 + (w + d_3)^2] - \omega_2(x_1 + d_1)(x_2 + d_2) - \\ &\quad - \omega_3(x_1 + d_1)(w + d_3) + \dot{w}(x_2 + d_2), \\ K_{22} &= -\omega_1(x_1 + d_1)(x_2 + d_2) + \omega_2[(x_1 + d_1)^2 + (w + d_3)^2] - \\ &\quad - \omega_3(x_2 + d_2)(w + d_3) - \dot{w}(x_1 + d_1), \\ K_{23} &= -\omega_1(x_1 + d_1)(w + d_3) - \omega_2(x_2 + d_2)(w + d_3) + \\ &\quad + \omega_3[(x_1 + d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2]. \end{aligned}$$

Визначимо тензор інерції пластини у недеформованому стані:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$J_{11} = \rho \int\limits_\Omega \left((x_2 + d_2)^2 + d_3^2\right) dx, \quad J_{12} = J_{21} = -\rho \int\limits_\Omega (x_1 + d_1)(x_2 + d_2)dx,$$

$$J_{22} = \rho \int\limits_{\Omega} \left((x_1 + d_1)^2 + d_3^2\right) dx, \qquad J_{23} = J_{32} = -\rho d_3 \int\limits_{\Omega} (x_2 + d_2) dx,$$
$$J_{33} = \rho \int\limits_{\Omega} \left((x_1 + d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2\right) dx, \; J_{31} = J_{13} = -\rho d_3 \int\limits_{\Omega} (x_1 + d_1) dx.$$

Для випадку малих коливань розглянемо тільки лінійні доданки у формулі для сумарного кінетичного моменту:

$$K = (I + J)\omega + \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2 + d_2)\,dx e_1 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1 + d_1)\,dx e_2. \tag{6.42}$$

Тоді

$$\dot{K} = \dot{K}_1 e_1 + \dot{K}_2 e_2 + \dot{K}_3 e_3,$$
$$\dot{K}_1 = (J_{11} + I_1)\dot{\omega}_1 + J_{12}\dot{\omega}_2 + J_{13}\dot{\omega}_3 + \rho \int\limits_{\Omega} \ddot{w}(x_2 + d_2) dx,$$
$$\dot{K}_2 = J_{21}\dot{\omega}_1 + (J_{22} + I_2)\dot{\omega}_2 + J_{23}\dot{\omega}_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \ddot{w}(x_1 + d_1) dx,$$
$$\dot{K}_3 = J_{31}\dot{\omega}_1 + J_{32}\dot{\omega}_2 + (J_{33} + I_3)\dot{\omega}_3, \tag{6.43}$$

$$\omega \times K = \Big(\omega_2 \left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right) -$$
$$-\omega_3 \left(J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1 + d_1)\,dx\right)\Big) e_1 +$$
$$+\Big(\omega_3 \left(\rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2 + d_2)\,dx + (J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right) -$$
$$-\omega_1 \left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right)\Big) e_2 +$$
$$+ \left(\omega_1 \left(J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_1 + d_1)\,dx\right) -\right.$$
$$\left. -\omega_2 \left((J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 + \rho \int\limits_{\Omega} \dot{w}\,(x_2 + d_2)\,dx\right)\right) e_3. \tag{6.44}$$

Підставимо у вирази (6.43) значення $\ddot{w}$ з рівняння (6.35). Застосовуючи формули (6.43) та (6.44), запишемо зміну кінетичного моменту виду (6.37) у покомпонентному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\left(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2\right)\dot{\omega}_1 + J_{13}\dot{\omega}_3 = f_1 + \omega_3\left[J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right] - \\
&\quad - \omega_2\left[J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3\right] + \int\limits_\Omega \rho\{a^2(x_2+d_2)\Delta^2 w - \omega_3\dot{w}(x_1+d_1)\}dx, \\
&\left(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2\right)\dot{\omega}_2 + J_{23}\dot{\omega}_3 = f_2 + \omega_1\left[J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3\right] - \\
&\quad - \omega_3\left[(J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right] - \int\limits_\Omega \rho\{a^2(x_1+d_1)\Delta^2 w + \omega_3\dot{w}(x_2+d_2)\}dx, \\
&J_{31}\dot{\omega}_1 + J_{32}\dot{\omega}_2 + (J_{33}+I_3)\dot{\omega}_3 = f_3 - \omega_1\left[J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right] + \\
&\quad + \omega_2\left[(J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right] + \int\limits_\Omega \rho\{(x_1+d_1)\omega_1 + (x_2+d_2)\omega_2\}\dot{w}dx. \quad (6.45)
\end{aligned}$$

Розв'яжемо ці диференціальні рівняння відносно похідних кутової швидкості, для чого обчислимо матрицю $\hat{J} = (\hat{J}_{ki})$, обернену до матриці коефіцієнтів при $\dot{\omega}_i$ у системі (6.45):

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_{11} = \frac{(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33}) - J_{23}^2}{D},\ \hat{J}_{12} = \hat{J}_{21} = \frac{J_{13}J_{23}}{D}, \\
&\hat{J}_{13} = \hat{J}_{31} = -\frac{(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)J_{13}}{D},\ \hat{J}_{22} = \frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33}) - J_{13}^2}{D}, \\
&\hat{J}_{23} = \hat{J}_{32} = -\frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)J_{23}}{D},\ \hat{J}_{33} = \frac{(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)}{D}, \quad (6.46) \\
&D = (I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2)(I_3+J_{33}) - J_{13}^2(I_2+\rho d_3^2 l_1 l_2) - J_{23}^2(I_1+\rho d_3^2 l_1 l_2).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що знаменник D у формулах (6.46) є строго додатним для досить малих моментів інерції пластини J_{ik} у порівнянні з моментами інерції тіла-носія I_i. Зокрема, ця умова виконується при достатньо невеликій поверхневій густині ρ (тобто для досить тонких пластин). Припустимо надалі, що $D \neq 0$. Тоді диференціальне рівняння (6.45) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \hat{J} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

де ϕ_i – права частина i-го рівняння у системі (6.45).

Запишемо кінематичні рівняння Пуассона, які відповідають умовам нерухомості базиса (g_1, g_2, g_3) в інерціальному просторі:

$$\dot{g}_i = -\omega \times g_i, \qquad i = \overline{1,3}. \tag{6.48}$$

Нехай $g_i = g_{i1}e_1 + g_{i2}e_2 + g_{i3}e_3$, тоді в координатній формі система рівнянь (6.48) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{g}_{i1} &= \omega_3 g_{i2} - \omega_2 g_{i3}, \\ \dot{g}_{i2} &= \omega_1 g_{i3} - \omega_3 g_{i1}, \\ \dot{g}_{i3} &= \omega_2 g_{i1} - \omega_1 g_{i2}, \qquad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Для декартових реперів (g_1, g_2, g_3) і (e_1, e_2, e_3) однакової орієнтації система диференціальних рівнянь (6.35), (6.36), (6.45), (6.49) має частковий розв'язок при $f_1 = f_2 = f_3 = 0$:

$$w(x,t) = 0, \quad \omega_i(t) = 0, \quad g_{ij}(t) = \delta_{ij}, \qquad i,j = \overline{1,3}, \tag{6.50}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Для дослідження задачі стабілізації стану рівноваги виду (6.50) введемо змінні $\widetilde{g}_{ij}(t) = g_{ij}(t) - \delta_{ij}$ і розглянемо рівняння збуреного руху для (6.49):

$$\begin{aligned} &\dot{\widetilde{g}}_{11} = \omega_3\widetilde{g}_{12} - \omega_2\widetilde{g}_{13}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{12} = \omega_1\widetilde{g}_{13} - \omega_3(\widetilde{g}_{11}+1), \quad \dot{\widetilde{g}}_{13} = \omega_2(\widetilde{g}_{11}+1) - \omega_1\widetilde{g}_{12}, \\ &\dot{\widetilde{g}}_{21} = \omega_3(\widetilde{g}_{22}+1) - \omega_2\widetilde{g}_{23}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{22} = \omega_1\widetilde{g}_{23} - \omega_3\widetilde{g}_{21}, \quad \dot{\widetilde{g}}_{23} = \omega_2\widetilde{g}_{21} - \omega_1(\widetilde{g}_{22}+1), \\ &\dot{\widetilde{g}}_{31} = \omega_3\widetilde{g}_{32} - \omega_2(\widetilde{g}_{33}+1), \ \dot{\widetilde{g}}_{32} = \omega_1(\widetilde{g}_{33}+1) - \omega_3\widetilde{g}_{31}, \ \dot{\widetilde{g}}_{33} = \omega_2\widetilde{g}_{31} - \omega_1\widetilde{g}_{32}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Розглянемо функціонал Ляпунова:

$$V = T + U + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \widetilde{g}_{ij}^2, \tag{6.52}$$

де $T = \dfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 + \displaystyle\int_\Omega \rho v_P^2 dx)$ – кінетична енергія системи,

$U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \rho a^2(\triangle w(x,t))^2 dx$ – потенціальна енергія пружних деформацій пластини в рамках моделі Кірхгофа, α_i – додатні константи. При обчисленні v_P^2 обмежимося квадратичними членами відносно фазових змінних у функціоналі V для випадку малих коливань системи:

$$2V = (I_1 + J_{11})\omega_1^2 + (I_2 + J_{22})\omega_2^2 + (I_3 + J_{33})\omega_3^2 + 2J_{12}\omega_1\omega_2 + 2J_{13}\omega_1\omega_3 +$$
$$+ 2J_{23}\omega_2\omega_3 + \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \tilde{g}_{ij}^2 + \int_\Omega \rho \left\{ \dot{w}^2 + 2\dot{w}[\omega_1(d_2 + x_2) - \omega_2(d_1 + x_1)] + a^2(\Delta w)^2 \right\} dx. \quad (6.53)$$

Обчислимо похідну функціонала (6.52) в силу системи рівнянь збуреного руху (6.35), (6.45), (6.51):

$$\dot{V} = \left(\dot{K}_1 - \alpha_2\tilde{g}_{23} + \alpha_3\tilde{g}_{32}\right)\omega_1 + \left(\dot{K}_2 + \alpha_1\tilde{g}_{13} - \alpha_3\tilde{g}_{31}\right)\omega_2 +$$
$$+ \left(\dot{K}_3 + \alpha_2\tilde{g}_{21} - \alpha_1\tilde{g}_{12}\right)\omega_3 + \int_\Omega \rho a^2 \left\{ \Delta w \Delta\dot{w} - \dot{w}\Delta^2 w \right\} dx, \quad (6.54)$$

де вирази $\dot{K}_i$ представлені формулами (6.43). Якщо всі частинні похідні функції $w(x,t)$ четвертого порядку по x та першого порядку по t є неперервними і виконуються крайові умови (6.36), то інтегрування частинами у формулі (6.54) призводить до наступної тотожності:

$$\int_\Omega \left\{ \Delta w \Delta\dot{w} - \dot{w}\Delta^2 w \right\} dx = 0.$$

Використовуючи останню тотожність та значення $\dot{K}_i$ з рівняння (6.43), перепишемо формулу (6.54) у вигляді

$$\dot{V} = \left(f_1 - (\omega \times K)_1 - \alpha_2\tilde{g}_{23} + \alpha_3\tilde{g}_{32}\right)\omega_1 +$$
$$+ \left(f_2 - (\omega \times K)_2 + \alpha_1\tilde{g}_{13} - \alpha_3\tilde{g}_{31}\right)\omega_2 +$$
$$+ \left(f_3 - (\omega \times K)_3 + \alpha_2\tilde{g}_{21} - \alpha_1\tilde{g}_{12}\right)\omega_3,$$

де $(\omega \times K)_i$ – i-та координата вектора $\omega \times K$ з (6.44) у базисі (e_1, e_2, e_3).

Для стабілізації тривіального розв'язку системи рівнянь збуреного руху (6.35), (6.36), (6.45), (6.51), визначимо керування зі зворотним зв'язком з умови

$$\dot{V} = -k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \leqslant 0, \quad (6.55)$$

де k – додатна константа. Умові (6.55) відповідають керування

$$f_1 = -k\omega_1 + (\omega \times K)_1 + \alpha_2\tilde{g}_{23} - \alpha_3\tilde{g}_{32},$$
$$f_2 = -k\omega_2 + (\omega \times K)_2 - \alpha_1\tilde{g}_{13} + \alpha_3\tilde{g}_{31},$$
$$f_3 = -k\omega_3 + (\omega \times K)_3 + \alpha_1\tilde{g}_{12} - \alpha_2\tilde{g}_{21}. \quad (6.56)$$

6.4. Стійкість за Ляпуновим стану рівноваги пружної системи

Запишемо рівняння збуреного руху досліджуваної механічної системи в операторному вигляді. Введемо дійсний лінійний простір $H = \mathring{H}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times$ $\times \mathbb{R}^{12}$, елементами якого є вектори

$$\xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} : \; u \in \mathring{H}^2(\Omega), \; v \in L^2(\Omega), \; \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \; \tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{12} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9.$$

У цих формулах $\mathring{H}^2(\Omega)$ – простір Соболєва, який складається з функцій $u \in H^2(\Omega)$ з нульовим слідом на $\partial\Omega$ [133].

Скалярний добуток елементів

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ \omega^1 \\ \tilde{g}^1 \end{pmatrix} \in H \;\text{ і }\; \xi^2 = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ \omega^2 \\ \tilde{g}^2 \end{pmatrix} \in H$$

задамо формулою

$$\left\langle \xi^1, \xi^2 \right\rangle_H = \int_\Omega \rho \Big\{ a^2 \Delta u^1(x) \Delta u^2(x) + v^1(x) v^2(x) +$$

$$+ (\omega_1^2 v^1(x) + \omega_1^1 v^2(x))(d_2 + x_2) - (\omega_2^2 v^1(x) + \omega_2^1 v^2(x))(d_1 + x_1) \Big\} dx +$$

$$+ \Big((I + J)\omega^1, \omega^2 \Big) + \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \tilde{g}_{ij}^1 \tilde{g}_{ij}^2. \tag{6.57}$$

За допомогою нерівностей Коші–Буняковського і Фрідріхса [133] можна показати, що норма $\|\xi\|_H = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_H}$ є еквівалентною стандартній нормі в $\mathring{H}^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^{12}$. Таким чином, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ – гільбертів простір.

Визначимо необмежений оператор $A : D(A) \to H$ і лінійний обмежений

оператор $B : \mathbb{R}^3 \to H$ наступним чином:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} u^\xi \\ v^\xi \\ \omega^\xi \\ \tilde{g}^\xi \end{pmatrix} \in H, \tag{6.58}$$

$$B : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \mapsto Bf = \begin{pmatrix} u^f \\ v^f \\ \omega^f \\ \tilde{g}^f \end{pmatrix} \in H, \tag{6.59}$$

де

$$u^\xi(x) = v(x),\ v^\xi(x) = -a^2\Delta^2 u(x) + (x_1 + d_1)\omega_2^\xi - (x_2 + d_2)\omega_1^\xi,$$

$$\omega_i^\xi = (\hat{J}_{i1}\omega_3 - \hat{J}_{i3}\omega_1)\left[J_{21}\omega_1 + (J_{22} + I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right] +$$

$$+ (\hat{J}_{i2}\omega_1 - \hat{J}_{i1}\omega_2)\left[J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} + I_3)\omega_3\right] +$$

$$+ (\hat{J}_{i3}\omega_2 - \hat{J}_{i2}\omega_3)\left[(J_{11} + I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right] +$$

$$+ \int_\Omega \rho \left(\hat{J}_{i3}[(x_1 + d_1)\omega_1 + (x_2 + d_2)\omega_2] - [\hat{J}_{i1}(x_1 + d_1) + \hat{J}_{i2}(x_2 + d_2)]\omega_3\right) v(x)dx +$$

$$+ \int_\Omega \rho a^2 \left(\hat{J}_{i1}(x_2 + d_2) - \hat{J}_{i2}(x_1 + d_1)\right) \Delta^2 u(x)dx, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{g}_{11}^\xi = \omega_3\widetilde{g}_{12} - \omega_2\widetilde{g}_{13},\ \tilde{g}_{12}^\xi = \omega_1\widetilde{g}_{13} - \omega_3(\widetilde{g}_{11} + 1),\ \tilde{g}_{13}^\xi = \omega_2(\widetilde{g}_{11} + 1) - \omega_1\widetilde{g}_{12},$$

$$\tilde{g}_{21}^\xi = \omega_3(\widetilde{g}_{22} + 1) - \omega_2\widetilde{g}_{23},\ \tilde{g}_{22}^\xi = \omega_1\widetilde{g}_{23} - \omega_3\widetilde{g}_{21},\ \tilde{g}_{23}^\xi = \omega_2\widetilde{g}_{21} - \omega_1(\widetilde{g}_{22} + 1),$$

$$\tilde{g}_{31}^\xi = \omega_3\widetilde{g}_{32} - \omega_2(\widetilde{g}_{33} + 1),\ \tilde{g}_{32}^\xi = \omega_1(\widetilde{g}_{33} + 1) - \omega_3\widetilde{g}_{31},\ \tilde{g}_{33}^\xi = \omega_2\widetilde{g}_{31} - \omega_1\widetilde{g}_{32},$$

$$u^f(x) = 0,\ v^f(x) = \sum_{k=1}^{3} \left(\hat{J}_{2k}(x_1 + d_1) - \hat{J}_{1k}(x_2 + d_2)\right) f_k,$$

$$\tilde{g}^f = 0,\ \omega_i^f = \sum_{k=1}^{3} \hat{J}_{ik} f_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

коефіцієнти $\hat{J}_{ik}$ наведено у формулах (6.46). Область визначення нелінійного оператора A має вигляд

$$D(A) = \left\{ \xi \in H \mid u \in \mathring{H}^4(\Omega),\ v \in \mathring{H}^2(\Omega), \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{6.60}$$

Розглянемо нелінійну керовану систему, задану абстрактним диференціальним рівнянням у просторі H:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = A\xi(t) + Bf, \tag{6.61}$$

де $\xi(t) \in H$ – стан систем, $f \in \mathbb{R}^3$ – керування, оператори A і B задані співвідношеннями (6.58) і (6.59). Якщо функції $w(x,t)$, $\omega(t)$, $\tilde{g}(t)$ визначають класичний розв'язок системи (6.35), (6.36), (6.47), (6.51) з керуванням $f = f(t)$ на напівінтервалі $t \in \mathcal{I} = [t_0, T)$, $T \leqslant +\infty$, то безпосередньою підстановкою переконаємося, що відповідна функція

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} w(\cdot,t) \\ \dot{w}(\cdot,t) \\ \omega(t) \\ \tilde{g}(t) \end{pmatrix} \in D(A) \subset H \tag{6.62}$$

задовольняє рівняння (6.61) з $f = f(t)$ на напівінтервалі $t \in \mathcal{I}$. Таким чином, будемо розглядати диференціальне рівняння (6.61) як операторне зображення рівнянь збуреного руху (6.35), (6.36), (6.47), (6.51).

Запишемо керування зі зворотним зв'язком (6.56) за допомогою оператора $G : H \to \mathbb{R}^3$, який діє на вектор стану ξ системи (6.61):

$$G : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \mapsto f = Gx = \begin{pmatrix} f_1^\xi \\ f_2^\xi \\ f_3^\xi \end{pmatrix}, \tag{6.63}$$

$$f_1^\xi = -k\omega_1 + \alpha_2\tilde{g}_{23} - \alpha_3\tilde{g}_{32} + \omega_2\left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3\right) -$$
$$-\omega_3\left(J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3 - \int\limits_\Omega \rho\left(x_1+d_1\right)v(x)dx\right),$$
$$f_2^\xi = -k\omega_2 - \alpha_1\tilde{g}_{13} + \alpha_3\tilde{g}_{31} - \omega_1\left(J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33}+I_3)\omega_3\right) +$$
$$+\omega_3\left(\int\limits_\Omega \rho\left(x_2+d_2\right)v(x)dx + (J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right),$$

$$f_3^{\xi} = -k\omega_3 + \alpha_1\tilde{g}_{12} - \alpha_2\tilde{g}_{21} + \omega_1\left(J_{21}\omega_1 + (J_{22}+I_2)\omega_2 + J_{23}\omega_3\right) -$$
$$-\omega_2\left((J_{11}+I_1)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3\right) -$$
$$-\int\limits_{\Omega}\rho[(x_1+d_1)\,\omega_1 + (x_2+d_2)\,\omega_2]v(x)dx,$$

де k, α_i – довільні додатні константи.

Система (6.61) зі зворотним зв'язком $f = G\xi$ має вигляд

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = F\xi(t), \quad F = A + BG, \tag{6.64}$$

де нелінійний необмежений оператор $F : D(F) \to H$ має щільну в H область визначення $D(F) = D(A)$.

Як відзначено на с. 125 класичним розв'язкам системи (6.35), (6.36), (6.47), (6.51) відповідають функції $\xi(t) \in D(A)$ по правилу (6.62). При цьому умова $\dot{V} \leqslant 0$ для похідної функціонала V в силу системи (6.35), (6.36), (6.47), (6.51) зі зворотним зв'язком (6.56) переходить в умову

$$\langle F\xi, \xi\rangle_H \leqslant 0 \tag{6.65}$$

для відповідного елемента $\xi \in D(F) = D(A)$ за означенням функціонала V в (6.53) і скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ в (6.57). Таким чином, за допомогою нерівності (6.65) встановлено наступний результат.

Теорема 6.2. [8, с.122] *Оператор $F : D(F) \to H$ в (6.64) є дисипативним, $\overline{D(F)} = H$.*

Позначимо через I_H одиничний оператор в H. Якщо при деякому $\lambda > 0$ образ оператора $I_H - \lambda F$ співпадає з H і F замкнений, то з теореми 6.2 випливає, що оператор F є інфінітезимальним генератором неперервної напівгрупи нелінійних операторів $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ в H на основі нелінійного узагальнення теореми Люмера–Філліпса [134]. Тоді узагальнений розв'язок задачі Коші для рівняння (6.64) з початковими умовами $\xi(0) = \xi^0$ визначено формулою $\xi(t) = S(t)\xi^0$ при $t \geqslant 0$, для будь-якого $\xi^0 \in H$, і такий розв'язок є класичним при $\xi^0 \in D(F)$.

Оскільки при зроблених припущеннях виконується дисипативна нерівність $\langle F\xi, \xi\rangle_H \leqslant 0$ ($\dot{V} \leqslant 0$), то розв'язок $\xi = 0$ абстрактного диференціального рівняння (6.64) є стійким за Ляпуновим.

6.5. Висновки

У розділі досліджено задачу стабілізації стану рівноваги пружної механічної системи за допомогою керування зі зворотним зв'язком. Основними результатами розділу є наступні положення.

1. Для лінійної системи побудовано керування зі зворотним зв'язком $u = v(x)$, яке забезпечує асимптотичну стійкість тривіального стану рівноваги по відношенню до функціонала у вигляді (6.6).
2. Запропоновано операторне зображення (6.61) рівнянь обертального руху твердого тіла з пружною пластиною, що описують нелінійну динаміку тіла-носія та малі коливання пластини. Це операторне диференціальне рівняння відповідає моделі з трьома незалежними керуючими моментами.
3. Перетворення, яке зводить рівняння руху до операторного вигляду ґрунтується на припущенні, що $D \neq 0$ у формулі (6.46). Таке припущення виконується при малих моментах інерції пластини у порівнянні з моментами інерції тіла-носія. Зокрема, ця умова виконується для досить тонких пластин.
4. Для нелінійної нескінченновимірної системи (6.61) запропоновано керування зі зворотним зв'язком (6.63), що забезпечує стійкість за Ляпуновим стану рівноваги, при цьому встановлено дисипативність інфінітезимального генератора для відповідного абстрактного диференціального рівняння.

ЗАКЛЮЧНІ ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано задачі керування та стабілізації руху для механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Крім того, розвинуто метод модального аналізу для оцінки множини досяжності системи, що описує динаміку досліджуваної моделі. Перерахуємо найбільш важливі наукові результати, отримані у дисертації.

1. У підрозділах 3.1, 3.2 за допомогою принципу Д'Аламбера побудовано математичну модель керованого руху механічної системи, яка є наближеною моделлю супутника з панеллю сонячних батарей, та зведено отримані рівняння руху в частинних похідних до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь.
2. У підрозділі 3.3 уперше встановлено умови керованості моделі коливань пластини з довільною скінченною кількістю модальних координат та доведено теорему про спектральну керованість нескінченновимірної системи, що описує пластину Кірхгофа.
3. У підрозділах 4.1, 4.2 розглянуто математичну модель пластини Кірхгофа з урахуванням обертального руху її поперечного перерізу та за допомогою принципу максимуму Понтрягіна уперше одержано оптимальне керування для досліджуваної системи з довільною фіксованою кількістю мод коливань.
4. У підрозділі 5.3 уперше побудовано оцінку множини досяжності нескінченновимірної системи з використанням гладких функцій керування, що задовольняють умови оптимальності для скінченновимірних підсистем.
5. У підрозділі 6.2 уперше розв'язано задачу часткової стабілізації стану рівноваги нескінченновимірної моделі коливань пластини Кірхгофа за допомогою лінійного функціонала керування зі зворотним зв'язком.

6. Уперше запропоновано нелінійну модель обертального руху тіла з пружною пластиною у вигляді операторного диференціального рівняння у гільбертовому просторі (підрозділ 6.3). Побудовано функціонали керування зі зворотним зв'язком, що забезпечують сильну стійкість стану рівноваги за Ляпуновим.

Таким чином, досягнуто головну ціль дисертаційної роботи та розв'язано усі сформульовані задачі. Результати дисертації мають здебільшого теоретичне значення та можуть бути використані для подальшого розвитку теорії керування та стійкості руху механічних систем з пружними компонентами. Результати розділів 3 та 6 можуть бути рекомендовані до застосування в інженерній практиці при проектуванні систем керування космічними апаратами з деформівними виносними елементами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Жилин П. А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин / П. А. Жилин // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1992. — Т. 3. — С. 48–64.

[2] Lagnese J. E. Controllability of thin elastic beams and plates / J. E. Lagnese, G. Leugering // The control handbook: (W.S. Levine ed.). Boca Raton: CRC Press - IEEE Press. — 1996. — P. 1139–1156.

[3] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек / Валентин Валентинович Новожилов. — Л. : Судпромгиз, 1962. — 431 с.

[4] Зуев А. Л. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением / А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова // Механика твердого тела. — 2011. — Т. 41. — С. 187–198.

[5] Зуев А. Л. Оптимальное управление моделью пластины Кирхгофа / А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова // Механика твердого тела. — 2012. — Т. 42. — С. 163–176.

[6] Zuev A. L. Estimation of the reachable set for the problem of vibrating Kirchhoff plate / A. L. Zuev, Yu. V. Novikova // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 66, no. 11. — P. 1639–1653.

[7] Зуев А. Л. Стабилизация колебаний пластины Кирхгофа с помощью обратной связи по состоянию / А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2014. — Т. 28. — С. 62–75.

[8] Зуев А. Л. Стабилизация движения вращающегося тела с упругой пластиной / А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 111–123.

[9] Новікова Ю. В. Стабілізація коливань механічної системи з пружною пластиною / Ю. В. Новікова, О. Л. Зуєв // Вісник Запорізького націо-

нального університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2015. — № 2. — С. 149–162.

[10] Zuyev A. L. On the controllability of a vibrating plate model / A. L. Zuyev, Yu. V. Novikova // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD XI): XI Междунар. конф., 8-12 июня 2011 г.: тезисы докл. — Донецк : ИПММ НАН Украины, 2011. — С. 145–146.

[11] Новикова Ю. В. Управление колебаниями пластинки Кирхгофа / Ю. В. Новикова // Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія: V Міжнар. наук.-практ. конф. молодих учених, аспірантів, студентів, 12-13 трав. 2011 р.: тези допов. — Донецьк : Державний університет інформатики і штучного інтелекту, 2011. — С. 319–324.

[12] Зуев А. Л. Оценка множества достижимости бесконечномерной колебательной системы с несоизмеримыми частотами / А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова // Dynamical System Modeling and Stability Investigation (DSMSI-2015): XVII Междунар. конф., 27-29 мая 2015 г.: тезисы докл. — Киев : Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, 2015. — С. 41.

[13] Новікова Ю. В. Стабілізація руху твердого тіла з пружною пластиною / Ю. В. Новікова // Міжнародна конференція молодих математиків: 3-6 черв. 2015 р.: тези допов. — Київ : Інститут математики НАН України, 2015. — С. 108.

[14] Euler L. De motu vibratorio tympanorum / L. Euler // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. — 1766. — Vol. 10. — P. 243–260.

[15] Bernoulli J. Essai theoretique sur les vibrations des plaques elastiques rectangulaires et libres / J. Bernoulli // Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae. — 1789. — Vol. 5. — P. 142–153.

[16] Germain S. Recherches sur la théorie des suifaces élastiques / Sophie Germain. — Paris, 1821. — 96 p.

[17] Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек / Павел Андреевич Жилин. — С.-П. : Изд-во Политехнического университета, 2006. — 167 с.

[18] Кирхгоф Г. Механика / Густав Роберт Кирхгоф. — М. : Изд-во АН СССР, 1962. — 402 с.

[19] Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек / А. И. Лурье // ПММ. — 1940. — Т. 4, № 2. — С. 7–34.

[20] Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / Анатолий Исаакович Лурье. — М. : Гостехиздат, 1947. — 252 с.

[21] Кубенко В. Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек / Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. — К. : Выща школа, 1989. — 208 с.

[22] Lagnese J. E. Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures / Lagnese J. E., Leugering G., Schmidt E. J. P. G. — Boston : Birkhauser Boston, 1994. — 390 p.

[23] Митропольский Ю. А. Математическое моделирование упругих систем с односторонним внешним взаимодействием/ Ю. А. Митропольский, О. С. Лимарченко, Дж. Матарацо, Л. Тоскано // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 5. — С. 48–70.

[24] Zhuk Ya. A. Features of plane wave propagation along the layers of a prestrained nanocomposite / Ya. A. Zhuk, I. A. Guz // International Applied Mechanics. — 2007. — Vol. 43, no. 4. — P. 361–379.

[25] Guz I. A. Vibration analysis of thin-wall structures containing piezoactive layers / I. A. Guz, Y. A. Zhuk, M. Kashtalyan // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2010. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–10.

[26] Andrianov I. V. Asymptotic analysis of perforated plates and membranes. part 2: Static and dynamic problems for large holes /I. V. Andrianov, V. V. Danishevs'kyy, A. L. Kalamkarov // International Journal of Solids and Structures. — 2012. — Vol. 49. — P. 311–317.

[27] Kononov Yu. N. Transverse oscillations of a cylindrical vessel with a two-layer liquid separated by an elastic membrane / Yu. N. Kononov // Journal of Mathematical Sciences. — 2001. — Vol. 103, no. 3. — P. 404–408.

[28] Alijani F. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003

to 2013 / F. Alijani, M. Amabili // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2013. — Vol. 58. — P. 233–257.

[29] Харламов П. В. Новые методы исследования задач динамики твердого тела / Павел Васильевич Харламов. — М. : Наука, 1975. — 378 с.

[30] Нелинейный анализ поведения механических систем / [Горр Г. В., Илюхин А. А., Ковалев А. М., Савченко А. Я.]. — К. : Наукова думка, 1984. — 285 с.

[31] Roberson R. E. Two decades of spacecraft attitude control / R. E. Roberson // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 1979. — Vol. 2, no. 1. — P. 3–8.

[32] Набиуллин М. К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников / Мансур Каримович Набиуллин. — Н. : Наука. Сибирское отделение, 1990. — 217 с.

[33] Ганиев Р. Ф. Колебания твердых тел / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко. — М. : Наука, 1976. — 432 с.

[34] Веретенников В. Г. Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами / Веретенников В. Г., Карпов И. И., Марков Ю. Г. — М. : Изд-во МАИ, 1998. — 144 с.

[35] Нариманов Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарта с жидкостью / Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. — М. : Машиностроение, 1977. — 208 с.

[36] Анисимов А. В. Динамическое нагружение пилотируемых космических станций сложной пространственной компоновки / А. В. Анисимов, В. В. Забудкин, А. И. Лиходед, Д. А. Пономарев // Космонавтика и ракетостроение. — 1998. — Т. 13. — С. 130–140.

[37] Zuyev A. L. Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements / Alexander L. Zuyev. — Cham Heidelberg, New York : Springer, 2015. — 232 p.

[38] Крон Г. Исследование сложных систем по частям диакоптика / Габриэль Крон. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

[39] Титов Б. А. Формирование динамических свойств упругих космических аппаратов / Титов Б. А., Вьюжанин В. А., Дмитриев В. В. — М. : Машиностроение, 1995. — 304 с.

[40] Arora J. S. Eigensolution for large structural systems with substructures / J. S. Arora, D. T. Nguyen // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1980. — Vol. 4, no. 3. — P. 333–341.

[41] Ганиев Р. Ф. Динамика систем твердых и упругих тел / Р. Ф. Ганиев, П. С. Ковальчук. — М. : Машиностроение, 1980. — 208 с.

[42] Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаротов с деформируемыми элементами / Лев Викторович Докучаев. — М. : Машиностроение, 1987. — 232 с.

[43] Вильке В. Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы / Владимир Георгиевич Вильке. — М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 1997. — 215 с.

[44] Механика больших космических конструкций / [Баничук Н. В., Карпов И. И., Климов Д. М. и др.]. — М. : Факториал, 1997. — 304 с.

[45] Докучаев Л. В. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами / Л. В. Докучаев, О. П. Климов // Известия АН СССР. МТТ. — 1982. — № 5. — С. 10–15.

[46] Хорошилов В. С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей / В. С. Хорошилов // Известия АН СССР. МТТ. — 1978. — № 5. — С. 18–24.

[47] Ambrosio J. Efficient kinematic joint descriptions for flexible multibody systems experiencing linear and non-linear deformations / J. Ambrosio // International journal for numerical methods in engineering. — 2003. — Vol. 56, no. 12. — P. 1771–1793.

[48] Bauchau O. A. On the modeling of shells in multibody dynamics / O. A. Bauchau, J.-Y. Choi, C. L. Bottasso // Multibody system dynamics. — 2002. — Vol. 8. — P. 399–408.

[49] Ryan R. R. Simulation of actively controlled spacecraft with flexible

appendages / R. R. Ryan // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 1990. — Vol. 13, no. 4. — P. 691–702.

[50] Yoo H. H. Dynamics of flexible beams undergoing overall motions / H. H. Yoo, R. R. Ryan, R. A. Scott // Journal of Sound and Vibration. — 1995. — Vol. 181, no. 2. — P. 261–278.

[51] Yoo H. H. Dynamic analysis of flexible beams undergoing overall motion employing linear strain measures / H. H. Yoo, H. H. Seo. // AIAA Journal. — 2002. — Vol. 40, no. 2. — P. 319–326.

[52] Закржевский А. Е. Программные движения систем твердых и упругих тел / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 3–21.

[53] Закржевский А. Е. Об оптимальном развороте упругого космического аппарата / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39, № 10. — С. 106–113.

[54] Дегтярев Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г. Л. Дегтярев, Т. К. Сиразетдинов. — М. : Машиностроение, 1986. — 214 с.

[55] Атамасов В. Д. Метод решения задачи управления ориентацией современных космических аппаратов / В. Д. Атамасов, И. И. Деменьтьев // Труды четвертой научно-технической конференции молодых ученых и специалистов ФГУП «КБ “Арсенал”». — 2013. — С. 34–36.

[56] Теория проектирования сложных технических систем космического базирования / [Сапего М. К., Тестоедов Н. А., Атамасов В. Д. и др.]. — СПб : НПО «Профессионал», 2012. — 560 с.

[57] Легостаев В. П. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом / В. П. Легостаев, А. В. Субботин, С. Н. Тимаков, А. В. Зыков // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 106–119.

[58] Троценко В. А. Методы расчета собственных колебаний цилиндрической одолочки с присоединенным твердым телом / В. А. Троценко,

Ю. В. Троценко // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 263–285.

[59] Ротационное движение космических троссовых систем / [Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Закржевский А. Е., Пироженко А. В., Трогер Г., Хорошилов В. С.]. — Днепропетровск : Ин-т технической механики НАН и НКА Украины, 2001. — 404 с.

[60] Maslova A. I. Modeling of the aerodynamic moment acting upon a satellite / A. I. Maslova, A. V. Pirozhenko // Cosmic research. — 2010. — Vol. 48, no. 4. — P. 362–370.

[61] Pirozhenko A. V. A tether system for gravitational stabilization of satellites / A. V. Pirozhenko, D. A. Khramov // Cosmic research. — 2010. — Vol. 48, no. 6. — P. 542–549.

[62] Борисов М. В. Моделирование движения космического аппарата с упругими элементами / М. В. Борисов, А. А. Авраменко // Вестник Удмуртского университета. — 2009. — № 2. — С. 17–28.

[63] Уикс Дж. Е. Динамический расчет развертываемой космической конструкции / Дж. Е. Уикс // Аэрокосмическая техника. — 1986. — Т. 12. — С. 168–175.

[64] Борзых С. В. Математическое моделирование процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей / С. В. Борзых, В. Н. Бакулин, И. Р. Ильясова // Вестник МАИ. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 266–273.

[65] Kononov Yu. N. Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators / Yu. N. Kononov // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2001. — Vol. 103, no. 1. — P. 38–42.

[66] Калман Р. Очерки по математической теории систем / Калман Р., Фалб П., Арбиб М.; пер. с англ. Э. Л. Наппельбаума. — М. : Мир, 1971. — 400 с.

[67] Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / Анатолий Григорьевич Бутковский. — М. : Наука, 1965. — 474 с.

[68] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных / Жак-Луи Лионс; пер. с франц. Н. Х. Розова. — М. : Мир, 1972. — 416 с.

[69] Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ / А. В. Балакришнан; пер. с англ. В. И. Благодатских. — М. : Наука, 1980. — 384 с.

[70] Румянцев В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. — М. : Наука, 1987. — 256 с.

[71] Рутковский В. Ю. Проблемы нелинейного управления ориентацией деформируемых космических аппаратов / В. Ю. Рутковский, В. М. Суханов // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2006. — Т. 9. — С. 6–14.

[72] Рутковский В. Ю. Проблемы нелинейного управления ориентацией деформируемых космических аппаратов / В. Ю. Рутковский, В. М. Суханов // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2006. — Т. 10. — С. 15–24.

[73] Chen L. Active control of a flexible cantilever plate with multiple time delays / L. Chen, J. Pan, G. Cai // Acta Mechanica Solida Sinica. — 2008. — Vol. 21, no. 3. — P. 257–266.

[74] Meirovitch L. Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis / L. Meirovitch, H. F. Van Landingham // Acta Astronaut. — 1977. — Vol. 4, no. 9. — P. 985–1010.

[75] Seltzer S. M. Dynamics and control of large space structures: anoberview / S. M. Seltzer // J. Astronaut. Sci. — 1979. — Vol. 27, no. 2. — P. 95–101.

[76] Рубановский В. Н. Устойчивость установившихся движений сложных механических систем / В. Н. Рубановский // Итоги науки и техники. Общая механика. — 1982. — Т. 5. — С. 62–134.

[77] Рубановский В. Н. Устойчивость стационарных вращений твердого тела с двумя упругими стержнями / В. Н. Рубановский // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40, № 1. — С. 55–64.

[78] Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам / А. А. Мовчан // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 6. — С. 988–1001.

[79] Леонов Г. А. О глобальной устойчивости стационарных вращений твердого тела / Г. А. Леонов, А. В. Морозов // Прикл. математика и механика. — 1992. — Т. 56, № 6. — С. 993–997.

[80] Морозов В. М. О бифукации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем / В. М. Морозов, В. Н. Рубановский, В. В. Румянцев, В. А. Самсонов // Прикл. математика и механика. — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 387–399.

[81] Ганиев Р. Ф. Программные движения деформируемых управляемых конструкций / Р. Ф. Ганиев, А. Е. Закржевский. — М. : Наука, 1995. — 214 с.

[82] Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твердых тел / Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. — К. : Наукова думка, 1991. — 168 с.

[83] Leugering G. On control and stabilization of a rotating beam by applying moments at the base only / G. Leugering // Optimal Control of Partial Differential Equations. — 1991. — Vol. 149. — P. 182–191.

[84] Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / Анатолий Григорьевич Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.

[85] Fattorini H. O. Infinite dimensional optimization and control theory / Hector O. Fattorini. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999. — 816 p.

[86] Luo Z.-H. Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications / Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O. — London : Springer-Verlag, 1999. — 403 p.

[87] Luo Z.-H. Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint / Z.-H. Luo, B.-Z. Guo. — 1997. — Vol. 42. — P. 53–65.

[88] Gorain G. C. Exponential energy decay estimates for the solutions of

n-dimensional kirchhoff type wave equation / G. C. Gorain // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 177. — P. 235–242.

[89] Xu C. Z. Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control / C. Z. Xu, J. Baillieul // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1993. — Vol. 38. — P. 1754–1765.

[90] Coron J.-M. Stabilization of a rotating body beam without damping / J. M. Coron, B. d'Andrea-Novel // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1998. — Vol. 44. — P. 608–618.

[91] Oostveen J. Strongly stabilizable distributed parameter systems / Job Oostveen. — Philadelphia : SIAM, 2000. — 150 p.

[92] Новицький В. В. Декомпозиція та керування в лінійних системах / Віктор Володимирович Новицький. — К. : Ін-т математики, 2008. — 251 с.

[93] Мартынюк А. А. Устойчивость движения сложных систем / Анатолий Андреевич Мартынюк. — К. : Наукова думка, 1975. — 353 с.

[94] Aliev F. A. Stabilization problems for a system with output feedback (review) / F. A. Aliev, V. B. Larin // International Applied Mechanics. — 2011. — Vol. 47, no. 3. — P. 225–267.

[95] Komkov V. Optimal Control Theory for the Damping of Vibrations of Simple Elastic Systems / Vadim Komkov // Lecture Notes in Mathematics. — Vol. 253. — Berlin : Springer-Verlag, 1972. — 244 p.

[96] Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / Владимир Васильевич Белецкий. — М. : Наука, 1965. — 416 с.

[97] Сазонов Вас. В. Использование уточненной модели аэродинамического момента в задаче реконструкции вращательного движения спутников Фотон / Вас. В. Сазонов, В. В. Сазонов // Космич. исслед. — 2011. — Т. 45, № 2. — С. 117–127.

[98] Акуленко Л. Д. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 3. — С. 5–13.

[99] Акуленко Л. Д. Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2008. — № 2. — С. 13–26.

[100] Акуленко Л. Д. Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. — 2006. — № 36. — С. 58–63.

[101] Зубов В. И. Лекции по теории управления / Владимир Иванович Зубов. — М. : Наука, 1975. — 495 с.

[102] Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных / Владимир Ильич Воротников. — М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 284 с.

[103] Воротников В. И. Устойчивость и управление по части фазовых координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. — М. : Научный мир, 2001. — 320 с.

[104] Крементуло В. В. Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс / Валентин Вячеславович Крементуло. — М. : Наука, 1977. — 264 с.

[105] Ковалев А. М. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем / А. М. Ковалев, В. Ф. Щербак. — К. : Наукова думка, 1993. — 235 с.

[106] El-Gohary A. Optimal stabilization of the rotational motion of a rigid body with the help of rotors / A. El-Gohary // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2000. — Vol. 35, no. 3. — P. 393–403.

[107] Krishnan H. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques: a nonlinear control approach based on the spacecraft attitude dynamics / H. Krishnan, M. Reyhanoglu, H. McClamroch // Automatica. — 1994. — Vol. 30, no. 6. — P. 1023–1027.

[108] Гладун А. В. Управление и стабилизация вращательного движения спутника с помощью двух гиродинов / А. В. Гладун // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. — 2013. — № 43. — С. 151–162.

[109] Александров А. Ю. Одноосная стабилизация твердого тела при наличии запаздывания в обратной связи / А. Ю. Александров, Е. Б. Александрова // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2014. — № 12. — С. 18–22.

[110] Krabs W. On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes / Werner Krabs // Lecture Notes in Control and Information Sciences. — Vol. 173. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — 174 p.

[111] Balas M. J. Modal control of certain flexible dynamical systems / M. J. Balas // SIAM J. Control Optim. — 1978. — Vol. 16, no. 3. — P. 450–462.

[112] Лурье А. И. Аналитическая механика / Анатолий Исаакович Лурье. — М. : Физматгиз, 1961. — 824 с.

[113] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике / Феликс Рувимович Гантмахер. — М. : Наука, 1966. — 300 с.

[114] Ли Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус; пер. с англ. Л. Л. Леонтьевой. — М. : Наука, 1972. — 576 с.

[115] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Феликс Рувимович Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

[116] Математическая теория оптимальных процессов / [Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.]. — М. : Наука, 1983. — 393 с.

[117] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Селим Григорьевич Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

[118] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / Amnon Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 279 p.

[119] Функциональный анализ / [ред. С.Г. Крейн]. – 2-е изд. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

[120] Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Евгений Алексеевич Барбашин. — М. : Наука, 1967. — 224 с.

[121] Барбашин Е. А. Об устойчивости движения в целом/ Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 86, № 3. — С. 453–456.

[122] Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методо Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. — М. : Мир, 1964. — 186 с.

[123] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения/ А. М. Ляпунов// Собр.соч. Т. 2. — М. : Изд-во АН СССР, 1956. — 272–331 с.

[124] Румянцев В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. — М. : Наука, 1987. — 256 с.

[125] Зуев А. Л. Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений / А. Л. Зуев // Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 5. — С. 629–637.

[126] Бердичевский В. Л. Вариационные принципи механики сплошной среды / Виктор Львович Бердичевский. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 448 с.

[127] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Тр. I конгресса ИФАК. — 1961. — Т. 2.

[128] Levan N. Strong stabilizability of linear contractive control systems on Hilbert space / N. Levan, L. Rigby // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — P. 23–25.

[129] Бухштаб А. А. Теория чисел / Александр Адольфович Бухштаб. — М. : Просвещение, 1966. — 383 с.

[130] Zuyev A. Approximate controllability and spillover analysis of a class of distributed parameter systems / A. Zuyev // Proc. 48th IEEE Conf.

Decision and Contr. and 28th Chinese Contr. Conf. Shanghai. — 2009. — P. 3270–3275.

[131] Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations / R. S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 90. — P. 193–254.

[132] Dafermos C. M. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups / C. M. Dafermos, M. Slemrod // Journal of Functional Analysis. — 1973. — Vol. 13. — P. 97–106.

[133] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / Карел Ректорис. — М. : Мир, 1985. — 590 с.

[134] Barbu V. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems / Viorel Barbu. — San Diego, CA : Academic Press, 1992. — 476 p.