НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Дрінь Ярослав Михайлович

УДК 517.956.4

ЗАДАЧА КОШІ ТА НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
ГОРОДЕЦЬКИЙ Василь Васильович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри алгебри та інформатики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
ГОРБАЧУК Мирослав Львович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними;

доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАНЧОВ МИКОЛА ІВАНОВИЧ,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
СЛЮСАРЧУК Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування (м. Рівне),
професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 16 лютого 2016 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради D 26.206.02 у Інституті математики НАН України за адресою: 58012, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розіслано 12 січня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В середині минулого століття синтез багатовимірних сингулярних інтегральних рівнянь та рівнянь з частинними похідними призвів до поняття інтегро-диференціального оператора (Кальдерон, Зигмунд), що є лінійною комбінацією частинних похідних з коефіцієнтами – сингулярними інтегральними операторами. Систематичне дослідження таких операторів призвело до зміни теорії, в результаті чого перетворення Фур'є витіснило сингулярні інтеграли, а самі оператори почали називатися псевдодиференціальними. Псевдодиференціальні оператори характеризуються своїм символом аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою.

Впродовж останніх кількох десятиліть інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) та рівнянь з такими операторами. ПДО формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a – функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. До вказаного класу належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки тощо. Поширення результатів класичної теорії диференціальних рівнянь на випадок рівнянь з ПДО та одержання нових результатів дає змогу використовувати такі рівняння при розв'язуванні складних і важливих задач аналізу та математичної фізики, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів.

На теперішній час значних результатів досягнуто в теорії задачі Коші та крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. Це теорія еліптичних рівнянь у згортках у просторах Соболєва-Слободецького та її застосування до дослідження загальних мішаних задач у циліндричних областях для параболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (М.С. Агранович, М.Й. Вишик, Г.І. Ескін); коректна розв'язність задачі Коші у просторах Соболєва та їх аналогах для ПДР з аналітичними символами в області $G\subset\mathbb{R}^n$ (Ю.А. Дубинський); теореми про розв'язність диференціально-операторних рівнянь у шкалі банахових просторів цілих експоненціального типу векторів оператора рівняння, які дозволяють довести розв'язність задачі Коші для ПДР з аналітичними символами (Я.В. Радино, С.Р. Умаров); теорія граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь (М.Л. Горбачук, В.І, Горбачук та їхні послідовники); класи аналітичних на $\mathbb{R}^n$ символів псевдодиференціювання з характерними для степеневих функцій властивостями та теореми про коректну розв'язність задачі Коші для відповідних ПДР та систем рівнянь з початковими умовами в просторах Лебега (японські математики M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi); класи єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках, які є псевдодиференціальними системами з цілими аналітичними символами (Б.Г. Гуревич) та ін.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК). За допомогою цих результатів одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, теореми типу Ліувілля). Відзначимо при цьому, що асимптотика ФРЗК для таких рівнянь вже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів, зокрема, при побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами, які відносять до псевдодиференціальних операторів; у сучасній теорії фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається. Якщо символ ПДО не залежить від просторових координат, то задача Коші для ППДР коректно розв'язна в просторі узагальнених функцій типу розподілів, при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРЗК з початковою узагальненою функцією. Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана і Я.М. Дріня (які першими визначили ППДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для відповідних ППДР), М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Літовченка та ін.

Принципово важливим є запропоноване А.Н. Кочубеєм тлумачення ПДО через гіперсингулярні інтеграли (ГСІ). При цьому за відомим символом ПДО будується символ ГСІ і навпаки. Ми поширюємо це поняття на матричні ГСІ.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = g$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = g$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні крайові задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерні реакції, процеси вологоперенесення, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження тощо). Такі задачі виникають також при описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач.

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалися багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (М.Л. Горбачук, Б.Й. Пташник, З.М. Нитребич, П.І. Каленюк, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, О.А. Самарський, В.І. Чесалін та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, дослідження питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

На сьогодні нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних **псевдодиференціальних** рівнянь не досліджені. Отже, актуальними є: 1) побудова теорії нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного ПДР вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi(A)u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

де $\varphi(A)$ – ціла функція від ПДО A, побудованого за точково-негладким або аналітичним символом, зокрема, $\varphi(A) = A$ ($\varphi(A)$ розглядається у різних зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій); при цьому умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = g \tag{0.2}$$

трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо g – узагальнена функція (така ситуація є природною, оскільки гранична функція може мати особливості в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій); 2) розвинення методики дослідження ФРБЗ – фундаментального розв'язку задачі (0.1), (0.2); 3) класична розв'язність задачі (0.1), (0.2), коли $\varphi(A) \equiv A$ з негладким однорідним символом; 4) застосування методу кроків для розв'язування задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь, коли у правій частині є $f(x,t,u(x,t-h))$ з відхиленням аргументу; а також застосування методу кроків для розв'язування задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних еволюційних рівнянь з відхиленням аргументу.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню порушених питань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках науково-дослідної роботи "Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами" (державний реєстраційний номер 0111U006757) кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Мета і завдання досліджень. Метою роботи є побудова теорії коректної розв'язності нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь вигляду (0.1) у просторах гладких функцій, елементи яких мають характерні для ФРБЗ властивості, а також класична розв'язність вказаної задачі, задачі Коші і нелокальних задач для квазілінійних B-параболічних диференціальних і псевдодиференціальних еволюційних рівнянь з відхиленням аргумента.

При досягненні мети вирішувалися такі завдання:

- розвинення методики дослідження ФРБЗ для еволюційних ПДР вигляду (0.1), встановлення структури та властивостей ФРБЗ вказаних рівнянь;
- відшукання умов коректної визначеності оператора $\varphi(A)$ у різних просторах нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$ та у просторах періодичних функцій;
- доведення коректної розв'язності нелокальної багатоточкової задачі для рівнянь вигляду (0.1) у випадку, коли граничні дані є елементами широких класів гладких функцій та топологічно спряжених до них просторів; знаходження формул, що дають аналітичне зображення розв'язків багатоточкової задачі;
- дослідження властивості локалізації розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначених рівнянь.
- побудова та оцінки ФРЗК для систем ППДР вигляду (0.1), коли $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{p} A_k$, де A_k – ПДО порядків $\gamma_k > 0$, $0 \leq k \leq p$, з символами $a_k(t, x; \sigma)$, негладкими при $\sigma = 0$, класична розв'язність задачі Коші для таких систем;
- дослідження класичної розв'язності нелокальної багатоточкової задачі для рівномірно параболічних ПДР вигляду (0.1), (0.2) з неоднорідністю f у правій частині (0.1);
- побудова та дослідження розв'язку задачі Коші та нелокальних задач неоднорідного рівняння (0.1), в якому квазілінійна права частина містить шукану функцію з відхиленням аргумента;
- побудова і дослідження розв'язків оберненої задачі для ППДР з негладким символом.

Об'єкт дослідження: нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь.

Предмет дослідження: ФРБЗ, коректна розв'язність задачі (0.1), (0.2), властивості розв'язків.

Методами дослідження є вдосконалені й розвинені (залежно від специфіки досліджуваних задач) методи теорії просторів основних і узагальнених функцій, класичні методи теорії задачі Коші для лінійних параболічних систем, методи досліджень фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь, що ґрунтуються на використанні перетворення Фур'є та формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, методи досліджень М.Л. Горбачука та В.І. Горбачук з теорії формальних рядів Фур'є, метод кроків.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано такі нові результати.

1. Побудовано розв'язок задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, а також розв'язок задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних квазілінійних рівнянь з відхиленням аргументу, які розв'язуються методом кроків.

2. Встановлені властивості ФРБЗ для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (0.1) з негладкими однорідними символами $a(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ порядку $\gamma > 1$, зокрема, диференційовність ФРБЗ як абстрактних функцій часового параметра із значеннями в просторі основних функцій, досліджено граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} G(t, \cdot)$$

у просторі узагальнених функцій типу розподілів, де $G(t, \cdot)$ – ФРБЗ, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані параметри. При дослідженні двоточкової та m-точкової задач ($m \geq 2$) використовуються різні методи дослідження фундаментальних розв'язків зазначених задач.

3. Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівнянь (0.1) з негладкими у точці 0 однорідними символами у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу розподілів. Встановлено умови, при виконанні яких у відповідному просторі основних функцій визначений і є неперервним

оператор $\varphi(A)$. Знайдено класи X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t,x)$ відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком задачі (який є елементом простору X основних функцій), при цьому розв'язок володіє тими ж властивостями, що і фундаментальний розв'язок, $u(t,\cdot) \in X$ при кожному $t \in (0,T]$, а відповідну граничну умову $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'.

4. Знайдено необхідні й достатні умови, які характеризують клас аналітичних періодичних функцій, що містить відомі класи $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$. Доведено коректну розв'зність задачі (0.1), (0.2) у випадку, коли $\varphi(A)$ – псевдодиференціальний оператор у просторі періодичних функцій, а гранична функція – елемент простору періодичних узагальнених функцій $G'_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$. Знайдено зображення гладких розв'язків задачі (0.1), (0.2).

5. Доведено, що в певних просторах типу S існує оператор диференціювання нескінченного порядку

$$\varphi(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k, \quad D = d/dx, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

при цьому $\varphi(D)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним символом. Знайдено клас X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t,x)$ нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(D)u = 0$ подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком $G(t,\cdot)$ цієї задачі; при цьому $\{u(t,\cdot), G(t,\cdot)\} \subset X$ при кожному $t > 0$, а відповідну граничну умову (0.2) $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'.

6. Встановлено, що розв'язки багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена гранична функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to 0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = g(x), \quad \{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T],$$

справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$.

7. Побудовано та знайдено степеневі оцінки ФРЗК для систем ППДР вигляду (0.1), коли $A = \sum_{k=0}^{p} A_k$, де A_k – ПДО порядків $\gamma_k > 0$, $0 \le k \le p$, з символами $a_k(t, x; \sigma)$, негладкими при $\sigma = 0$, доведена класична розв'язність задачі Коші для таких систем.

8. Досліджена класична розв'язність багатоточкової задачі для рівномірно параболічних ПДР вигляду (0.1), (0.2) з неоднорідністю f у правій частині (0.1).

9. Побудовано розв'язок задачі Коші та нелокальних задач неоднорідного рівняння (0.1), в якому квазілінійна права частина містить шукану функцію з відхиленням аргументу.

10. Досліджено пряму і обернену задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є класичного по просторових змінних і узагальненого по півпросторовій змінній.

Наукове та практичне значення одержаних результатів.Дисертація має теоретичний характер. Результати та методика роботи можуть знайти застосування у подальшому розвитку загальної теорії еволюційних псевдодиференціальних рівнянь, у математичній фізиці при розв'язуванні задач теплофізики, при вивченні масообмінних і дифузійних процесів у фрактальних середовищах.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації одержані автором самостійно. У спільних з науковим консультантом працях В.В. Городецькому належить аналіз отриманих здобувачем результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, доповідалися на: науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та нелінійних коливань Інституту математики НАН України (науковий керівник – академік А.М. Самойленко, 2013 р.); науковому семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (2015 р.); наукових семінарах кафедр диференціальних рівнянь, математичного моделювання, математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича; Міжнародних математичних конференціях у м. Києві, Львові, Донецьку, Івано-Франківську, Чернівцях, Ужгороді, Кримських осінніх математичних школах (1980-2013 рр.).

Публікації. Всього за темою дисертації опубліковано 39 праць, які не увійшли до кандидатської дисертації автора. Серед них 22 – це статті у фахових математичних журналах, з них 5 входять до наукометричної бази даних, а 17 – тези та матеріали міжнародних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дана робота складається зі вступу, п'яти розділів, додатку, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 339 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й задачі дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У **розділі 1** зроблено огляд праць, які мають відношення до результатів, наведених у дисертації, є близькими за змістом та методами досліджень, а саме, аналізуються праці, присвячені теорії задачі Коші для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з гладкими та точково-негладкими символами, рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку. Дається огляд відомих результатів, пов'язаних із нелокальними задачами для диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, рівнянь з відхиленням аргументу.

В **другому розділі** наведено огляд результатів дисертації та описано методи, якими вони отримуються.

У **третьому розділі** побудовано та досліджено фундаментальну матрицю розв'язків (ФМР) і доведено розв'язність задачі Коші для систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з негладкими однорідними символами (підрозділ 3.1) та нелокальних задач у скалярному випадку (підрозділ 3.2).

Принципово важливим є запропоноване А.Н. Кочубеєм тлумачення псевдодиференціальних операторів ПДО через гіперсингулярні інтеграли (ГСІ). При цьому за відомим символом ПДО будується символ ГСІ і навпаки. Теорія ГСІ розроблена в працях С.Г. Самко і вони істотно розширюють клас ПДО (останні є, фактично, частинним випадком ГСІ). У підрозділі 3.1 ми поширюємо це поняття на матричні ГСІ.

Нехай функції f: $\mathbb{R}^n \to C_{p1}$ і Ω: $\mathbb{R}^n \times S^{n-1} \to C_{pp}$ є неперервними і обмеженими. Вираз вигляду

$$(D^{\alpha}_{\Omega} f_{\xi})(x) = d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)(\Delta^l_h f)(x)|h|^{-(n+\alpha)}dh,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < l$, $l \in \mathbb{N}$, α – деяка стала, яка не залежить від вибору n, l і

α, називається матричним ГСІ порядку α з характеристикою Ω. Матриця

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)(1 - e^{-i(\xi h)})^l |h|^{-(n+\alpha)} dh$$

називається символом матричного ГСІ D^{α}_{Ω}.

Якщо $\Omega(x,\sigma) \equiv E$, де E – одинична матриця, то сталу α можна вибрати так, щоб $\tilde{\Omega}_{x,\xi} = E|\xi|^{\alpha}$.

У підрозділі 3.1 наведені результати побудови та дослідження ФМР задачі Коші для рівномірно параболічних за Петровським систем ПДР вигляду

$$u_t(t,x) + \sum_{k=0}^{p} (A_k u)(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \sum_{r=1}^{m} \nu_r u(t,x)|_{t=t_r} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tag{2}$$

де A_k – матричний ПДО з символом a_k: $\overline{\Pi}_T \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to C_{qq}$, $0 \le k \le m$. Тут і далі через C_{pq} позначається сукупність усіх матриць розміру $p \times q$, елементами яких є комплексні числа, а через S^{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, μ, ν_r $(r \in \{1,\dots,m)$, t_r $(r \in 1,\dots,m)$, – відомі дійсні числа.

Нехай виконуються умови 1) –3) п. 1.4. Тоді існує ФМР задачі Коші (1), (2)

$$\Gamma(t,x;\xi,\tau) = Z(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

для якої виконуються оцінки

$$\|D^{æ}_x Z(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)\| \le C(t-\tau)((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0-|æ|}, \quad |æ| \le N-2n-[\gamma_0];$$

$$\|D^1_t Z(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)\| \le C((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0},$$

$$\|W(t,x;\tau,\xi)\| \le C\Big((t-\tau)^{\frac{\gamma_0+\lambda}{\gamma_0}}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0} +$$

$$+(t-\tau)\sum_{k=1}^{m+1}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_k}\Big), \quad \gamma_{m+1} \equiv \gamma_0 - \lambda.$$

За умов 1) – 5) п. 1.4 розв'язок задачі (1), (2) існує і записується у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_T.$$

У підрозділі 3.2 спочатку досліджується задача Діріхле.

Нехай $T>0$, $\mu>1$, $\beta>0$, $\gamma>0$ – числові параметри, $\Pi_T\equiv\{(t,x)\,\Big|\,0<t<T, x\in\mathbb{R}^n\}$. Припустимо, що символ A: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ задовольняє умови

а) $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $|\sigma|=1$ $\exists a_0>0$: $\operatorname{Re}A(\sigma)\ge a_0>0$;

б) $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\sigma\ne0$, $\forall æ=(æ_1,\dots,æ_n)$, $|æ|\le N$, $N\ge 2(n+[\gamma])$ $\exists D_\sigma^{æ}A(\sigma)$ $\exists C_N>0$:

$$|D_\sigma^{æ}A(\sigma)|\le C_N|\sigma|^{\gamma-|æ|};$$

в) $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\exists C>0$ $\exists\beta$, $0<\beta\le\gamma-\varepsilon$, $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)$:

$$|\varphi(x)|\le C(1+|x|)^\beta;$$

г) $\forall\varepsilon>0$, $\forall(t,x)\in\Pi_T$ $\exists C>0$, $\exists\beta\le\gamma-\varepsilon$, $f\in C(\Pi_T)$:

$$|f(t,x)|\le C(1+|x|)^\beta,\quad |f(t,x)-f(t,y)|\le C|x-y|^\lambda,\quad 0<\lambda<1.$$

Для крайової задачі

$$u_t(t,x)+A_\gamma u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_T,\gamma>0,$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=u(t,x)|_{t=T}+\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де A_γ – ПДО з символом $A(\sigma)$, розв'язок записується у вигляді

$$u(t,x)=I_1+\mu I_2+I_3,$$

де

$$I_1=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_T,\mu>1,$$

$$I_2=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_T,\mu>1,$$

$$I_3=\int\limits_t^T d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_T,\mu>1,$$

$$G(t,T,x,\mu)\equiv(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)-A(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}d\sigma.$$

У підрозділі 3.3 досліджується багатоточкова задача (1), (2), а в підрозділі 3.4 наводяться ілюстративні приклади.

У **розділі 4** встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з ПДО A, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом, оператором $f(A)$, де f – ціла функція, A – ПДО в просторах періодичних функцій. Вони побудовані за аналітичними функціями і діють у просторах типу S та трактуються як оператори диференціювання нескінченного порядку. Крайова умова задається в класах узагальнених функцій. Знайдено зображення розв'язків у вигляді згортки відповідного фундаментального розв'язку з граничною функцією; доведено, що розв'язки таких задач володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності).

Перейдемо до викладу матеріалу розділу.

У **підрозділі 4.1** наведено означення та твердження, що стосуються топологічної структури простору основних функцій. Дається характеристика топологічної структури простору, що є Фур'є-образом простору основних функцій. Наведені властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

Нехай γ – фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\dots\}$, $\gamma_0 := n+[\gamma]$, $n\in\mathbb{N}$, $M(x) := 1+|x|$, $x\in\mathbb{R}^n$, $[\gamma]$ – ціла частина γ, $\Phi := \Big\{\varphi\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\,\Big|\,\forall p\in \mathbb{Z}_+\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\Big\{\sum\limits_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}\sum\limits_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\varphi(x)|<\infty\Big\}\Big\}$ (тут $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс). У Φ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\omega_0+k}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\varphi(x)|\right\},\quad \varphi\in\Phi, p\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\omega_0=\gamma_0-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ – фіксований параметр.

Символом Φ_p позначимо поповнення Φ за p-ою нормою; Φ_p – банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0\supset\Phi_1\supset\cdots\supset\Phi_p\supset\dots$. Простір $\Phi=\bigcap\limits_{p=0}^{\infty}\Phi_p$ є повним досконалим зліченно-нормованим простором, при цьому кожне вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, – щільне, неперервне і компактне. У просторі Φ визначені і неперервні операції зсуву аргументу та диференціювання.

Функції з простору Φ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}^n$, тому на них визначена операція перетворення Фур'є. Символом Ψ позначатимемо Фур'є-образ простору Φ: $\Psi=F[\Phi]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi\in\Phi$, обмежена і неперервна на $\mathbb{R}^n$. Наведемо інші властивості перетворення Фур'є функцій з простору Φ: якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функція, у функції $\partial^k F[\varphi]/\partial \xi_i^k$, $\xi_i \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi_i \to +0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\lim\limits_{\xi_i \to -0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\varphi \in \Phi$, функції з простору Ψ задовольняють умову:

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n,\ k_i \geq m_i, i \in \{1, \dots, n\}\ \exists c_k > 0\ \exists c_m > 0\ :$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi^k D_\xi^m F[\varphi]| \leq c_k \cdot c_m, \quad \varphi \in \Phi,$$

(сталі c_k, c_m залежать лише від функції $F[\varphi]$).

У просторі Ψ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм

$$\|\psi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{|k|=0}^{p} |\xi^k D_\xi^k \psi(\xi)| \right\}, \quad \psi \in \Psi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом Ψ_p позначимо поповнення Ψ за нормою $\|\cdot\|_p$. При цьому $\Psi_0 \supset \Psi_1 \supset \dots \supset \Psi_p \supset \dots$, $\Psi = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Psi_p$, Ψ – повний зліченно-нормований простір.

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю, $\Phi' = (\lim\limits_{p \to \infty} \mathrm{pr}\, \Phi_p)' = \lim\limits_{p \to \infty} \mathrm{ind}\, \Phi_p'$.

Якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то існує згортка $f * \varphi$, яка визначається формулою $f * \varphi = \langle f, T_{-x} \check{\varphi}(\cdot) \rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$, $\varphi \in \Phi$ (тут T_{-x} – оператор зсуву аргументу у просторі Φ). Зазначимо, що $f * \varphi$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n$ функція, при цьому

$$\exists c > 0\ \exists m \in \mathbb{Z}_+\ \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n :\ |D_x^\beta (f * \varphi)| \leq c(1 + |x|)^{\gamma_0 + m + |\beta|}.$$

Якщо для довільної функції $\varphi_\nu \in \Phi$ із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору Φ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається згортувачем у просторі Φ.

Оскільки $F[\varphi] \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Psi$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначене за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle$ є узагальненою функцією, заданою на $F[\Phi]$.

Якщо функціонал $f \in \Phi'$ – згортувач у просторі Φ, то для довільної функції $\varphi \in \Phi$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.

У **підрозділі 4.2** досліджується коректна розв'язність нелокальної двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором, символом якого є точково-негладка функція з граничною умовою у просторі узагальнених функцій Φ'.

Нехай $a\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ – неперервна на $\mathbb{R}^n$ однорідна функція порядку $\gamma > 1$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, яка задовольняє умови:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_\alpha > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $|D_x^\alpha a(x)| \le c_\alpha |x|^{\gamma - |\alpha|}$;

2) $\exists \tilde{\delta} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $a(x) \ge \tilde{\delta}|x|^\gamma$.

При виконанні вказаних умов у просторі Φ визначений неперервний псевдодиференціальний оператор $A_\gamma = F^{-1}[aF]$.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi_T \tag{3}$$

задамо нелокальну за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \tag{4}$$

де $\mu > 1$ – фіксований параметр. Під розв'язком задачі (3), (4) розуміємо функцію $u(t,\cdot) \in C^1((0,T],\Phi)$, яка є розв'язком рівняння (3) і задовольняє умову (4).

Символом $G(t,T,x,\mu)$ позначимо функцію вигляду:

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma) - ta(\sigma)} (\mu - e^{T\cdot A(\sigma)})^{-1} d\sigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t + kT, x), \quad \mu > 1, (t,x) \in \Pi_T,$$

де

$$G_0(t+kT,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - (t+kT)a(\sigma)\} d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi_T,$$

$G_0(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (3). Із результатів, наведених у розділі 3 щодо оцінок похідних функції G_0 випливає, що при кожному $t \in (0,T)$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору Φ. Крім того, правильним є наступне твердження.

Лема 4.1. *Функція $G(t,T,\cdot,\mu)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, диференційовна по t.*

Наслідком цієї леми є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G) = f * \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \forall f \in \Phi'.$$

Лема 4.3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \quad G(t,x) \equiv G(t,T,x,\mu), \varphi \in \Phi', (t,x) \in \Pi_T.$$

Тоді у просторі Φ' *виконується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \lim_{t\to T-0} \omega(t,\cdot) = \varphi.$$

Символом Φ'_* позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ.

Лема 4.3 дозволяє ставити двоточкову задачу для рівняння (3) так. Для (3) задамо умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \mu > 1, \varphi \in \Phi'_*. \tag{5}$$

Під розв'язком двоточкової задачі (3), (5) розумітимемо розв'язок рівняння (3), який задовольняє умову (5) в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються у просторі Φ'.

Основний результат підрозділу 4.2 складає

Теорема 4.1. *Задача* (3), (5) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою:*

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_T,$$

$G(t,x) \equiv G(t,T,x,\mu)$, як абстрактна функція параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі Φ, є неперервною функцією, а $\varphi \in \Phi'_*$ – згортувач у просторі Φ. Із означення згортувача випливає, що граничне співвідношення

$$u(t,\cdot) = \varphi * G(t,\cdot) \underset{t\to T-0}{\longrightarrow} \varphi * G(T,\cdot) = u(T,\cdot)$$

справджується у просторі Φ, оскільки $G(t,\cdot) \to G(T,\cdot)$ при $t \to T-0$ за топологією простору Φ. Зокрема, звідси дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(T,\cdot)$ при $t \to T-0$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. Точка $t=0$ для функції $G(t,\cdot)$ є особливою, при цьому

$$u(t,\cdot) = \varphi * G(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \varphi * \frac{\delta}{\mu-1} = \frac{\varphi}{\mu-1},$$

вказане граничне співвідношення виконується у просторі Φ'. Однак, при певних обмеженнях на узагальнену функцію $\varphi \in \Phi'_*$ можна отримати локальне покращення збіжності згортки $\varphi * G$ при $t \to +0$.

Символом M_Φ позначимо клас мультиплікаторів у просторі Φ.

Теорема 4.3 (властивість локалізації). *Нехай $\varphi \in \Phi'_*$, $u(t,x)$ – розв'язок двоточкової задачі* (3), (5) *з граничною функцією φ. Якщо узагальнена функція φ збігається в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з функцією $g \in M_\Phi$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \lim_{t\to T-0} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

У **підрозділі 4.3** досліджується нелокальна m-точкова за часом задача, де $m \geq 2$. Методика дослідження цієї задачі відрізняється від методики дослідження двоточкової задачі (випадок $m = 1$), яка базується на зображенні фундаментального розв'язку двоточкової задачі у вигляді ряду, членами якого є фундаментальні розв'язки задачі Коші для еволюційних рівнянь вигляду (3).

Нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння (3) задається за допомогою умови

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{6}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані параметри, причому вважається, що $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $\varphi \in \Phi$. Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T),\Phi)$ задачі (3), (6) шукається за допомогою перетворення Фур'є і зображається у вигляді згортки $G(t,x) * \varphi(x)$, де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q. Використовуючи формулу Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, доводиться наступне твердження.

Лема 4.4.*При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна по $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \beta_s \varphi_s(t) e^{-ta(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\omega_i}, \quad s = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7}$$

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$, *де* β_s *– стала, не залежна від* t, $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{|s|} t^p$,

$$\omega_i = \begin{cases} s_i(\gamma - 1), & \text{якщо } |\sigma_i| \geq 1, i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \gamma - s_i, & \text{якщо } |\sigma_i| < 1, \sigma_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Із оцінок (7) випливає, що $Q(t, \sigma)$, як функція аргументу σ, є елементом простору Ψ при кожному $t > 0$. Отже, $G(t, \cdot) \in \Phi$ при кожному $t > 0$. Властивості функції $G(t, \cdot)$ аналогічні властивостям фундаментального розв'язку двоточкової за часом задачі для рівняння (3). Зокрема, відзначимо, таку властивість функції G.

Лема 4.8. *У просторі* Φ' *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} G(t, \cdot) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m} G(t, \cdot) = \delta \tag{8}$$

(тут δ *– дельта-функція Дірака).*

Із властивостей функції $G(t, \cdot)$ випливає, що згортка $\varphi * G(t, \cdot)$ визначена коректно і у випадку, коли φ є елементом простору Φ'. Якщо φ є згортувачем у просторі Φ, тобто $\varphi \in \Phi'_*$, то в просторі Φ' справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} (\varphi * G(t, \cdot)) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} (\varphi * G(t, \cdot)) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m} (\varphi * G(t, \cdot)) = \varphi. \tag{9}$$

Функцію $G(t, \cdot)$ називатимемо далі фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі для рівняння (3).

За допомогою (9) доводиться теорема про коректну розв'язність m-точкової за часом задачі для рівняння (3), якщо граничну умову розв'язок $u(t, \cdot)$ рівняння (3) задовольняє в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - -\mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, \cdot)) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m} u(t, \cdot)) = \varphi, \quad \varphi \in \Phi'_*,$$

де границі розглядаються у просторі Φ'. Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 4.4. *Нелокальна* m*-точкова за часом задача для рівняння* (3) *з граничною функцією* $\varphi \in \Phi'_*$ *коректно розв'язна. Розв'язок дається у вигляді згортки*

$$u(t, x) = \varphi * G(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

де $G(t, \cdot)$ *– фундаментальний розв'язок* m*-точкової задачі для рівняння* (3).

Розв'язок нелокальної m-точкової ($m \geq 2$) за часом задачі для рівняння (3), як і у випадку двоточоквої задачі (3), (5), володіє властивістю локалізації. При доведенні відповідного твердження використовується властивість функції $G(t,\cdot)$, яку сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Лема 4.9. $G(t,\cdot) \to (\mu-\mu_0)^{-1}\delta$ *при* $t \to +0$ *у просторі* Φ', *де* $\mu_0 = \sum_{k=1}^{m} \mu_k$.

У **підрозділі 4.4** встановлено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Bu = 0$, де $B = f(A)$, $f(z)$ – ціла функція, а A є ПДО з негладким у точці $\sigma = 0$ символом $a(\sigma)$. Еволюційні рівняння з такими операторами є природними узагальненнями відомих параболічних псевдодиференціальних рівнянь. Знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком вказаної задачі (при цьому досліджена структура та властивості фундаментального розв'язку).

Перейдемо до викладу матеріалу підрозділу 4.4. Нехай $\alpha \in (0,1)$ – фіксоване число, f – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\exists c > 0\ \exists a > 0\ \exists h \geq 0\ \forall z = x+iy \in \mathbb{C}: \ \ |f(z)| \leq c(1+|x|)^h e^{a|y|^\alpha}. \qquad (10)$$

Лема 4.10. *Для похідних функції* f *на дійсній осі, яка задовольняє умову* (10), *правильними є оцінки:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}_0 \tilde{B}^n n^{n(1-1/\alpha)}(1+|x|)^h, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Говоритимемо, що в просторі Φ задано псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$, $A \equiv A_\gamma$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n\varphi)(x) \quad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ x \in \mathbb{R} \right)$$

зображає деяку основну функцію з простору Φ.

Теорема 4.7. *Якщо функція* f *задовольняє умову* (10), *то в просторі* Φ *визначений і є неперервним псевдодиференіальний оператор нескінченного порядку* $f(A) \equiv A_f$.

Зазначимо, що для оператора A_f правильним є зображення

$$A_f\varphi = F^{-1}[f(a)F[\varphi]], \ \forall \varphi \in \Phi,$$

тобто A_f – псевдодиференціальний оператор, побудований за символом $f(a)$, негладким у точці 0.

Нехай P – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову:

$$\exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}: \ \ \operatorname{Re} P(x) \le -c|x|^{2b}.$$

Із теорем типу Фрагмента-Ліндельофа випливає, що функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|\exp\{P(z)\}| \le c_0 \exp\{-c_1|x|^{2b} + c_2|y|^{2b}\}$$

з деякими сталими $c_0, c_1, c_2 > 0$. Отже, функція $f(z) = \exp\{P(z)\}$ задовольняє умову (10) з параметрами $\alpha = 2b$, $h = 0$, і в просторі Φ визначений та є неперервним оператор $f(A) = \exp\{tP(a)\}$, де $t > 0$ – фіксований параметр. У цьому випадку розв'язок еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \tag{11}$$

формально можна записати у вигляді $u(t, x) = c \exp\{tP(A)\}\varphi(x)$, де $\varphi \in \Phi$, $c = \mathrm{const}$, і досліджувати задачу Коші та багатоточкові за часом задачі для рівняння (11) за допомогою операторного методу. До рівнянь (11) належить також еволюційне рівняння $\partial u/\partial t + A^2 u = 0$, $A^2 = F^{-1}[a^2 F]$ (тут $P(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$).

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} + A_f u = 0, \ \ (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{12}$$

де $A_f = f(A)$ – ПДО нескінченного порядку, який діє в просторі Φ. Для (12) задамо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = g, \tag{13}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $g \in \Phi$.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], \Phi)$ задачі (12), (13) дається формулою $u(t, x) = G(t, x) * g(x)$, $(t,\, x) \in \Omega$, де

$$G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)], \quad Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma)=\exp\{-tf(a(\sigma))\}, Q_2(\sigma)=\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_kf(a(\sigma))\}\Big)^{-1}.$$

Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G=F^{-1}[Q]$. Отже, передусім наведемо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргументу σ.

Лема 4.1. *Для похідних функції $Q_1(t,\sigma)$ при $\sigma\neq 0$ правильними є оцінки*

$$|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)|\leq \beta_s t^{s\alpha}|\sigma|^{\omega_s-s}e^{-d_0t|\sigma|^\gamma},\quad s\in\mathbb{N},$$

сталі β_s, $d_0>0$ не залежать від t, де $\alpha=1$, $\omega_s=\gamma$, якщо $|\sigma|<1$, $\sigma\neq 0$; $\alpha=1-h/\gamma$, $\omega_s=s\gamma$, якщо $|\sigma|\geq 1$.

Із наведеного твердження випливає, що $Q_1(t,\sigma)$, як функція σ, при кожному $t>0$ є елементом простору Ψ.

Лема 4.12. *Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі Ψ.*

Із наведених тверджень дістаємо, що при кожному $t\in(0,T]$ функція $Q(t,\sigma)=Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}$, є елементом простору Ψ. Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[\Psi]=\Phi$ знайдемо, що $G(t,\cdot)=F^{-1}[Q(t,\cdot)]\in\Phi$ при кожному $t\in(0,T]$.

Лема 4.13. *Для функції $G(t,x)$, $t,\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}$, та її похідних за змінною x правильними є оцінки:*

$$|D^k_xG(t,x)|\leq c_kt^{-\delta_k}((1+|x|)^{1+[\gamma]+k})^{-1},\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\delta_k=[\gamma]+\{\gamma\}/\gamma+k$, якщо $x\neq 0$; $\delta_k=(1+k)/\gamma$, якщо $x=0$.

Функція $G(t,\cdot)$ володіє такими властивостями: 1) як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, вона диференційовна по t; 2) у просторі Φ' функція $G(t,\cdot)$ задовольняє граничне співвідношення вигляду (8). Якщо для рівняння (12) ставити нелокальну багатоточкову за часом умову з граничною функцією, яка є елементом простору Φ'_*, то в цьому випадку має місце аналог теорем 4.1, 4.4 про коректну розв'язність зазначеної задачі.

У **підрозділі 4.5** знайдено необхідні й достатні умови, які характеризують клас аналітичних періодичних функцій, що містить відомі класи $G_{\{\beta\}}$ цілих функцій. Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t+\varphi(A)u=0$, де $\varphi(A)$ – псевдодиференціальний оператор у просторі періодичних функцій, а гранична функція – елемент простору періодичних узагальнених функцій. Знайдено зображення гладких розв'язків вказаної задачі.

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як відомо, всі ці класи вкладаються у простір формальних тригонометричних рядів і повністю характеризуються поведінкою коефіцієнтів Фур'є своїх елементів. У цьому підрозділі розглядаються довільні тригонометричні ряди, які ототожнюються із узагальненими 2π-періодичними функціями як лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів

$$T_P = \left\{ P \,\middle|\, P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, c_{k,p} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'_P$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'_P. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ збігається в T'_P до деякого елемента $f \in T'_P$ і цей ряд є рядом Фур'є для f. Ці результати належать М.Л. Горбачуку та В.І. Горбачук. Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f \in T'_P$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T'_P можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \leq m_{k+1}$;
2) $\forall \alpha > 0$ $\exists c_\alpha > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \geq c_\alpha \cdot \alpha^k$;
3) $\exists M > 0$ $\exists h > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \leq M h^k m_k$;
4) $\exists A > 0$ $\exists L > 0$ $\forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_k \cdot m_l \leq A L^{k+l} m_{k+l}$;
5) $\exists B > 0$ $\exists s > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \leq B s^k \min\limits_{0 \leq l \leq k} m_{k-l} \cdot m_l$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності вигляду $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук були введені різні класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Означимо деякі з них. Символом $H\langle m_k \rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі c, $B > 0$ (залежні від функцій φ) такі, що $|\varphi^{(k)}(x)| \leq c B^k m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Множина функцій

$\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких вказані оцінки виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми $\|\varphi\|_B = \sup\limits_{x,k}(|\varphi^{(k)}(x)|/B^k m_k)$. При цьому $H\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \operatorname{ind} H_B\langle m_k\rangle$. Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається із послідовністю $k^{k\beta}$, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні функції.

Елементи простору $H'\langle k^{k\beta}\rangle$, топологічно спряженого до $H\langle k^{k\beta}\rangle$, називаються ультрарозподілами порядку $\beta > 1$; елементи з $H'\langle k!\rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

Покладемо $\rho(\lambda) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \lambda^k/m_k$, $\lambda \in [1, +\infty)$.

Візьмемо монотонно спадну послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Розглянемо послідовність вигляду $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, яка задовольняє умови 1) – 6).

Встановлена така теорема.

Теорема 4.9. *Нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle n!\rho_n\rangle$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, і це продовження задовольняє умову: існують сталі c, $b > 0$ (залежні, можливо, лише від φ) такі, що*

$$|\varphi(x+iy)| \le c\tilde{\rho}(by), \quad \forall\{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

де

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \ge 1, \end{cases} \qquad \rho(y) = \sup_n \frac{|y|^n}{n!\rho_n}.$$

З теореми 4.9 випливає, що клас $H\langle k^{k\beta}\rangle = G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, характеризується так: для того, щоб нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належала до класу $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, необхідно й достатньо, щоб вона аналітично продовжувалася в комплексну площину до цілої функції і це продовження задовольняло умову:

$$\exists c > 0\ \exists b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ |\varphi(x+iy)| \le c\exp\{b|y|^{1/1-\beta}\}.$$

У просторі $H'\langle m_k\rangle$ згортка $f_1 * f_2$ визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle$.

Вірною є така лема.

Лема 4.16. *Для довільних $\varphi \in H\langle m_k\rangle$ та $f \in H'\langle m_k\rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k\rangle$.*

Нехай $\tilde{G}$: $\mathbb{R} \to [0, \infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \ge |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T'_P побудуємо оператор $\hat{A}$:

$T'_P \to T'_P$ за правилом

$$T'_P \ni f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \to \hat{A}f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(k)c_k(f)e^{ikx} \in T'_P,$$

Оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'_P.

Якщо A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0, 2\pi]$, то A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T_P \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай f: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)c_k(\varphi)e^{ikx}, \quad \lambda_k = \tilde{G}(k), \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}, \varphi \in H.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \Big\{\varphi \in H \,\Big|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(A_f\varphi)|^2 < \infty\Big\},$$

причому $T_P \subset \mathcal{D}(A_f)$.

Теорема 4.10. *Якщо неперервна на* $[0, \infty)$ *функція* f *задовольняє умову*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall x \in [0, \infty): \ \ 0 \le f(x) \le c_\varepsilon \rho(\varepsilon x), \tag{14}$$

то оператор A_f *неперервний у просторі* $H\langle m_k\rangle$ *і відображає цей простір в себе.*

Умова (14) на функцію f еквівалентна тому, що функція $F_f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(G(k))e^{ikx}$ є елементом простору $H'\langle m_k\rangle$.

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову

$$\exists c_0 > 0 \ \exists d_0 > 0 \ \forall x \in [0, \infty): \ \ f(x) \ge d_0 \ln \rho(c_0 x).$$

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{15}$$

де A_f – псевдодиференціальний оператор, розглянутий вище. Під розв'язком рівняння (15) розуміємо функцію $u(t, x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0,T]$.

Розглянемо таку задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (15) та задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = g, \quad g \in L_2[0,2\pi], \tag{16}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le T$. При цьому $u(0,\cdot)$ розуміємо як $\lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0,2\pi]$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot) \in H$ така, що $\|u(t,\cdot) - u_0(\cdot)\|_H \to 0$ при $t \to +0$, $u_0(x) \equiv u(0,x)$. Надалі задачу (15), (16) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (15).

Правильним є наступне твердження

Теорема 4.11. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (15), (16) *коректно розв'язна, розв'язок записується у вигляді згортки*

$$u(t,x) = G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де

$$G(t,x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_s) Q_2(\lambda_s) e^{isx}, \quad g(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_s(g) e^{isx} \in H,$$

$$Q_1(t,\lambda_s) := \exp\{-tf(\lambda_s)\}, \quad Q_2(\lambda_s) := \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_s)\}\Big)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_s)\Big)^{-1},$$

при цьому $\{G(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset H\langle m_k\rangle$, $m_k = k!\rho_k$, *при кожному* $t \in (0,T]$.

Внаслідок леми 4.16 згортка $G(t,x) * g$ є елементом простору $H\langle m_k\rangle$, якщо $g \in H'\langle m_k\rangle$, при цьому функція $u(t,x) = G(t,x) * g$ є розв'язком рівняння (15), який задовольняє умову (16), де $g \in H'\langle m_k\rangle$, у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} u(t,\cdot) = g, \quad g \in H'\langle m_k\rangle, \tag{17}$$

(границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$).

Теорема 4.12. *Багатоточкова задача* (15), (17) *коректно розв'язна, розв'язок зображається формулою* $u(t,x) = G(t,x) * g$, $(t,x) \in \Omega$, $u(t,\cdot) \in H\langle m_k \rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Розв'язок задачі (15), (17) володіє властивістю локалізації, яка встановлена у випадку, коли гранична функція в (17) є ультрарозподілом Жевре порядку $\beta > 1$ (тобто $g \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$). В основному просторі $G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$ є фінітні функції, тому має зміст означення: узагальнена функція $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, дорівнює нулеві на інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$, якщо $\langle g, \varphi \rangle = 0$ для довільної основної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, носій якої міститься в (a,b).

Символом $M_{\{\beta\}}$ позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$.

Теорема 4.14. *Нехай* $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle n!\rho_n \rangle$, $\beta > 1$, $u(t,x)$ *– розв'язок задачі* (15), (17) *з граничною функцією* g. *Якщо узагальнена функція* g *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з* 2π*-періодичною функцією* $\psi \in M_{\{\beta\}}$, *то на довільному проміжку* $[c,d] \subset (a,b) \subset [0,2\pi]$ *граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m} u(t,x) = \psi(x)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

У **підрозділі 4.6** встановлено, що простори типу S та S', введені І.М. Гельфандом та Г.Е. Шиловим, є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь, які містять оператор диференціювання нескінченного порядку вигляду $\varphi(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D^k$, $D = d/dx$, побудованого за цілою функцією $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$; при цьому з'ясовано, що $\varphi(D)$ можна розуміти як ПДО з аналітичним символом. Досліджені властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором $\varphi(D)$, встановлено розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу ультрарозподілів (типу S'), знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком.

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c_3, a, b > 0, \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha+\beta \geq 1$; для довільних α, β правильною є рівність: $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$.

Нехай $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, – ціла функція. Говоритимемо, що в просторі S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, задано оператор диференціювання нескінченного порядку

$$g(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n, \ D = d/dx,$$

якщо для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ ряд

$$\psi(x) \equiv g(D)\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

зображає основну функцію з простору S_α^β.

Теорема 4.15. *Якщо функція g – мультиплікатор у просторі S_β^α, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, то в просторі S_α^β визначений і неперервний оператор $g(D) \equiv A_g$, при цьому*

$$A_g \varphi(x) = F^{-1}[g(\sigma) F[\varphi](\sigma)](x), \ \varphi \in S_\alpha^\beta.$$

Зазначимо, що знайдена умова на функцію g є не лише достатньою, але й необхідною для того, щоб оператор A_g був неперервним у просторі S_α^β, при цьому A_g можна розуміти як ПДО, побудований за аналітичним (цілим) символом (функцією g).

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_g u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{18}$$

де A_g – ПДО, побудований за функцією g, яка є мультиплікатором у просторі $S_\omega^{1-\omega}$, $\omega \in (0,1)$ і такою, що $e^g \in S_\omega^{1-\omega}$. Для рівняння (18) задамо умову

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t, \cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{19}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $f \in S_{\omega}^{1-\omega}$.

Тоді розв'язок вказаної задачі має вигляд: $u(t,x) = G(t,x) * f(x)$, де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{tg(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k g(\sigma)\}\Big)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\Big)^{-1}.$$

Зазначимо, що $Q_1(t,\cdot) \in S_{\omega}^{1-\omega}$ при кожному $t \in (0,T]$, а функція Q_2 – мультиплікатор у просторі S_{ω}^2. Звідси дістаємо (наслідок 4.9), що при кожному $t \in (0,T]$ функція $Q(t,\sigma)$, як функція σ, є елементом простору S_{ω}^2, при цьому справджуються оцінки

$$|D_{\sigma}^s Q(t,\sigma)| \leq cB^s s^{2s} \exp\{-c_0 t |\sigma|^{1/\omega}\}, \ s \in \mathbb{N},$$

де сталі c, B, $c_0 > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є та співвідношення $F^{-1}[S_{\omega}^2] = S_2^{\omega}$ знайдемо, що $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)] \in S_2^{\omega}$ при кожному $t \in (0,T]$. Інші властивості функції $G(t,\cdot)$ наведемо у наступних твердженнях.

Лема 4.22. *Для функції $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{c} t^{-(s+1)\omega} A^s s^{s\omega} \exp\{-\alpha_0 |x|^{1/2}\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $\tilde{c}$, A, $\alpha_0 > 0$ не залежать від t.

Лема 4.23. *1. Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_2^{ω}, диференційовна по t.*

2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}, \quad f \in (S_2^{\omega})', \ t \in (0,T].$$

3. У просторі $(S_2^{\omega})'$ справджуються граничні співвідношення

а) $\mu \lim\limits_{t \to +0} G(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t \to t_k} G(t,\cdot) = \delta;$

б) $\mu \lim\limits_{t \to +0} \omega(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t \to t_k} \omega(t,\cdot) = f,$

де $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S_{2,*}^{\omega})'$, $(t,x) \in \Omega$, δ – дельта-функція Дірака.

4. Функція $G(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (18).

Урахувавши твердження 3.б) леми 4.23 задамо для рівняння (18) багатоточкову за часом умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (S^{\omega}_{2,*})', \tag{20}$$

де граничні співвідношення розглядаються в просторі $(S_2^\omega)'$ (обмеження на параметри μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (18), (19)).

Теорема 4.16. *m-точкова задача* (18), (20) *є розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x),$$

$u(t,\cdot) \in S_2^\omega$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

У випадку еволюційного рівняння (18) з оператором $\varphi(D) = P(D)$, де $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists c > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}: \;\; \mathrm{Re} P(x) \le -c|x|^{2b},$$

для якого ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача, правильними є результати, аналогічні сформульованим вище. При цьому функція $G(t,x)$, як функція аргументу x (при фіксованому $t>0$) є елементом простору S_2^ω, де $\omega = \dfrac{1}{2b}$.

У розділі 5 для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і з відхиленням аргумента методом кроків доведена розв'язність задачі Коші та нелокальних задач вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = f(x,t,\mathcal{B}_k u(x,t-h,t+T_k-h)),$$

$h>0$ – стала, $x \in \mathbb{R}^n$, $t>h$, $k \in \{0\} \cup \{\mathbb{N}\}$, $0 \le k \le m$,

$$\mathcal{B}_k u(x,t,t+T_k)|_{0<t\le h} = u_k(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < T_1 << T_2 << \cdots << T_m,$$

$0 \le k \le m$, f, $u_k(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t < 0 \le h$, $0 \le k \le m$, – відомі і неперервні функції своїх аргументів, оператор A у п. 5.1 є диференціальним оператором з одновимірним оператором Бесселя, що діє по змінній x_n, а у п. 5.2 оператор A є ПДО з негладким символом.

При цьому

$$\mathcal{B}_0 u(x,t)|_{0<t\le h} \equiv u(x,t)|_{0<t\le h} = u_0(x,t)$$

є умовою Коші;

$$\mathcal{B}_1 u(x,t)|_{0<t\leq h} \equiv (\mu u(x,t) - \nu u_1(x,t+T))|_{0<t\leq h} = u_1(x,t), T >> h, \mu \geq \nu > 0$$

є двоточковою умовою;

$$\mathcal{B}_m u|_{0<t\leq h} \equiv \Big(\mu u(x,t) - \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(x,t+T_k)\Big)|_{0<t\leq h} = u_m(x,t),$$

$$\mu > \sum_{k=1}^{m} \nu_k > 0, 0 < T_1 << T_2 << \cdots << T_m$$

є багатоточковою умовою.

У підрозділі 5.1 встановлена теорема про коректну розв'язність задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргументу.

У підрозділі 5.2 для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і відхиленням аргументу методом кроків доведена розв'язність задачі Коші, а у п. 5.4 даний результат встановлено для відповідної нелокальної задачі.

У підрозділах 5.3, 5.4 наводяться модельні приклади.

У додатку висвітлені результати дослідження прямої та оберненої задач, що містять ПДО, побудований за неоднорідним негладким у нулі та залежним від часової змінної t символом, та такий, що містить змінний коефіцієнт біля шуканої функції із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є – класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинена теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з ПДО A, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом; оператором $f(A)$, де f – ціла функція від ПДО A; ПДО у просторах періодичних функцій; оператором $f(D)$, побудованим за аналітичним символом, який діє в просторах типу S. Розвинено методику дослідження фундаментальних розв'язків багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь; встановлено оцінки похідних ФРБЗ за просторовою змінною, диференційовність ФРБЗ як абстрактної функції часового параметра t, досліджено поведінку ФРБЗ при прямуванні t до точок 0, t_1, $\ldots$, t_m, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ (точок, в яких задаються граничні умови). На підставі цих властивостей доведено коректну розв'язність багатоточкової задачі у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій. Така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій. Знайдено класи X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t, x)$ відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком задачі (який є елементом простору X основних функцій за просторовою змінною при кожному $t > 0$), при цьому розв'язок володіє тими ж властивостями, що і фундаментальний розв'язок, $u(t, x) \in X$ при кожному $t \in (0, T]$, а відповідну граничну умову $u(t, \cdot)$ задовольняє в просторі X'. Доведено, що розв'язки багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена гранична функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t, x) = g(x), \quad \{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T],$$

справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$.

Побудовано розв'язок задачі для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, а також розв'язок задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних квазілінійних рівнянь з відхиленням аргументу, які розв'язуються методом кроків. Досліджено пряму і обернену задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дринь Я.М. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь, С.Д. Эйдельман // Матем. исследования. – 1981. – № 63. – С. 18–33.
2. Дрінь Я.М. До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, С.Д. Ейдельман // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1989. - №4. - С 35-37.

3. Дрінь Я.М. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України. - Київ, 1993. - С 25-32.
4. Дрінь Я.М. Коректна розв'язність задачі Коші для однієї системи нелінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 73-74.
5. Городецький В.В. Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. - С.63 - 78.
6. Дрінь Я.М. Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння з негладким символом / Я.М. Дрінь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 18 – 22.
7. Дрінь Я.М. Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Доп. НАН України. – 2010. – № 7. – С. 7-11.
8. Дрінь Я.М. Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу / Дрінь Я.М // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 24-32.
9. Дрінь Я.М. Дослідження прямої і оберненої задач для неоднорідних псевдодиференціальних рівнянь / Дрінь Я.М. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 528. Математика. – Чернівці: Рута, 2010. – С. 36-41.
10. Дрінь Я.М. Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь // Доп. НАН України. – 2011. – № 5. – С. 12-17.
11. Городецький В.В. Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. – Т. 1. – Вип. 3. Математика. – Чернівці: Рута, 2011. – С. 13-18.
12. Дрінь Я.М. Дослідження задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М., Дрінь М.М. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – **2**, № 1. – С. 32-34.
13. Городецький В.В. Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в зліченно нормованих просторах гладких функцій / Городецький

В.В., Дрінь Я.М. // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 2. – С. 96-111.
14. V.V. Gorodetskii. Method of Hybrid Integral Transforms for Analizing Direct and Inverse Problems for a Class of Equations with a Pseudodifferential Operator / V.V. Gorodetskii and Ya. M. Drin // Differential Equations, 2013, Vol. 49, No 4, P. 1-7. Pleiades Publishing, Ltd, 2013. (Original Russian Text, V.V. Gorodetskii and Ya. M. Drin, 2013, publisher in Differential'nye Uravneniya, 2013, Vol. 49, No 4, P. 487-493).
15. Дрінь Я.М. Задача Коші для рівномірно параболічних систем псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Наукові записки НаУКМА, т. 152. Фізико-математичні науки, 2014. – С.21-26.
16. Дрінь Я.М. Нелокальна задача Діріхле для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 2–3. – С.72–81.
17. Дрінь М.М. Задача з нелокальними псевдодиференціальними умовами для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 4. – С.48–56.
18. Ya.M. Drin', R.I. Petryshyn. Cauchy Problem for Autonomous Quasilinear Parabolic Pseudodifferential Equations with Deviating Argument // Journal of Mathematical Sciences, February 2014, Vol. 197, Issue 1, pp. 29-38. DOI: 10.1007/s 10985-014-1699-0.
19. Городецький В.В. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 1. – С. 54-70.
20. Городецький В.В. Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдо диференціальних рівнянь / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 5. – С. 619-633. ISSN 1027-3130.
21. Дрінь Я.М. Класична розв'язність багатоточкової нелокальної задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Зб. наук. пр. Фізико-математичні науки. – № 804. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – С. 21–28.
22. Дрінь Я.М. Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента /

Я.М. Дрінь, Р.І. Петришин // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 200–212. ISSN 1562-3076.

23. Drin' Ya.M. On representation of the solutions of nonlocal boundary value problems for parabolic pseudodifferential equations / Ya.M. Drin' // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations" (August 22-28, 2001, Kyiv): Book of Abstracts. – Donetsk, 2001. – P.41-42.
24. Дрінь Я.М. Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (1-5.10.2001, Дрогобич): Тези доп. – Київ, 2001. С. 56.
25. Дрінь М.М. Зображення розв'язків нелокальних задач для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладкими символами/ М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol.16 (KROMSH – 2005, September 18-29, 2005). – Simferopol, 2006. – P.33-37.
26. Дрінь Я.М. Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння зі змінним по t символом/ Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнародна наук. конф. "Математичний аналіз і суміжні питання" (17-20.11.2005): Тези доп. - Львів, 2005. – С. 24.
27. Дрінь Я.М. Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння зі змінним по t символом/ Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol.16 (KROMSH – 2005, September 18-29, 2005). – Simferopol, 2006. - P. 11-12.
28. Дрінь Я.М Дослідження задачі Коші та нелокальних багатоточкових крайових задач для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком / Я.М. Дрінь, Р.Я. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (11-14.10.2006): Тези доп. – Чернівці, 2006. – С. 41.
29. Дрінь Я.М. Дослідження задачі Коші та нелокальних багатоточкових крайових параболічних задач для псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" (11-14.10.2006): Тези доп. – Чернівці, 2006. – С. 40.
30. Дрінь Я.М. Нелокальна задача Неймана для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладким неоднорідним символом / Дрінь Я.М., Дрінь М.М. // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та

70-річчя М.І. Нагнибіди (8-13.06.2009, Чернівці): Тези доп. – Чернівці: Книги-XXI, 2009. – С.44-45.

31. Дрінь Я.М. Дослідження прямої і оберненої задачі для одного класу псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // XIII міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука (13-15.05.2010, Київ): Матеріали конф. Т. 1. – Київ: ПІ, 2010. – С. 147.
32. Дрінь Я.М. Розв'язування прямої і оберненої задач для деяких песвдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури" (17-21.10.2010, Чернівці): Тези доп. – Чернівці: Золоті литаври, 2010. – С. 66-67.
33. Дрінь Я.М. Точні оцінки осцилюючих інтегралів / Я.М. Дрінь // Матеріали Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченої 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту. ім. Тараса Шевченка (8-10.06.2011). – Київ, 2011. – С. 78.
34. Дрінь Я.М. Дослідження нелокальних задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Ярослав Дрінь // Міжнар. матем. конф. ім. В.Я. Скоробагатька, Дрогобич, Україна, 19-23 вересня 2011. – С. 68.
35. Дрінь Я.М. Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з символом, залежним від часу, і з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М. // Differential Equations and their applications. Materials of Intern. Scientific conf. dedicated to the 70^{th} years of V.V. Marinets (September 27-29, 2012, Uzhgorod). – Ужгород, 2012. – P. 26.
36. Ya.M. Drin'. Nonlocal problem for one class equations of diffusion in space of generalized functions. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OU, pp. 1-12 (December 17, 2013).
37. V.V. Gorodetsky, Ya.M. Drin'. Investigation of Cauchy and Nonlocal problems of Diffusion Equation. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OT, pp. 1-20 (December 17, 2013).
38. Дрінь Я.М. Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М. // Міжнар. матем. конф «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження член.-кор. України Положого Г.М. (23-24 квітня, 2014, Київ). – Матеріали конф., С. 60.
39. Дрінь Я.М. Параболічна псевдодиференціальна багатоточкова задача / Я.М. Дрінь // Праці IV-ої Міжнародної наук.-практичної конф. "Пробле-

ми інформатики та комп'ютерної техніки" (ПІКТ-2015), Чернівці, 26–29 травня 2015 р. – С. 130–132.

АНОТАЦІЯ

Дрінь Я.М. *Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими однорідними символами.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

У дисертації побудовано теорію коректної розв'язності нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь скінченного та нескінченного порядків з ПДО, визначеними у різних просторах гладких (зокрема, періодичних) функцій. Розвинено методику дослідження ФРБЗ, встановлено їх структуру та властивості, знайдено умови коректної визначеності оператора $\varphi(A)$, де φ – ціла функція від ПДО A.

Доведено теореми про коректну роз'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних ПДО з точково-негладкими однорідними символами та гладкими символами у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу розподілів (ультрарозподілів). Знайдено зображення розв'язків у вигляді згортки ФРБЗ з граничною функцією.

Побудовано розв'язок задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, а також розв'язок задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних квазілінійних рівнянь з відхиленням аргументу, які розв'язуються методом кроків. Досліджено пряму й обернену задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

Ключові слова: еволюційні псевдодиференціальні рівняння, псевдодиференціальний оператор, задача Коші, нелокальна багатоточкова за часом задача, фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі, негладкий однорідний символ, коректна розв'язність, простори основних та узагальнених функцій, гіперсингулярний інтеграл, пряма та обернена задачі, псевдодиференціальні рівняння з відхиленням аргументу.

ABSTRACT

Drin' Ya.M. *Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими однорідними символами.* – Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.02 – differential equations. Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, 2015.

The thesis Theory of correct solvability of nonlocal multi- time problem for evolutionary pseudodifferential equations (PDE) of finite and infinite order with PDO defined in different spaces of smooth (eg, periodic) functions. Been developed methodology survey FSCP, determined their structure and properties, showing the conditions of certainty the correct operator $\varphi(A)$, where φ – PDO entire function of A. Theorems of correct roz'yaznist nonlocal multipoint time problem for evolutionary PDO with dot nonsmooth homogeneous and smooth character symbols when the limit function belongs to a class of distributions such as distributions (ultradistributions). Found images of solutions in the form of rolls FSMP with ultimate function.

The solution of the Cauchy problem for quasilinear B- parabolic differential equations with deviation of the argument , and the solution of the Cauchy problem and the nonlocal problems for quasilinear pseudodifferential equations with deviation argument solved by steps. Investigated the direct and inverse problems for a class of evolution SDA method of incomplete separation of variables and using hybrid integrated Fourier space variables for classical and generalized by half-space variable.

Keywords: evolutionary pseudodifferential equations, pseudodifferential operators, Cauchy problem, multipoint nonlocal in time problem, the fundamental solution of multi-task, plain uniform character correct solvability, the main spaces and generalized functions hypersingular integral, direct and inverse problems, pseudodifferential equation of deflection argument.

АННОТАЦИЯ

Дринь Я.М. *Задача Коши и нелокальные задачи для параболических псевдодифференциальных уравнений с негладкими однородными символами.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

В диссертации построена теория корректной разрешимости нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных псевдодифференциальных уравнений конечного и бесконечного порядков с ПДО, определенными в разных пространствах гладких (в частности, периодичесикх) функций. Развита методика исследования ФРМЗ, установлена их структура и свойства, найдены условия корректной определенности оператора $\varphi(A)$, где φ – целая функция от ПДО A.

Доказаны теоремы о корректной разрешимости нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных ПДО с точечно-негладкими однородными символами и гладкими символами в случае, когда граничная функция принадлежит классу обобщенных функций типа распределений (ультрараспределений). Найдены изображения решений в виде свертки ФРМЗ с граничной функцией.

Построено решение задачи Коши для квазилинейных B-параболических дифференциальных уравнений с отклонением аргумента, а также решение задачи Коши и нелокальних задач для псевдодифференциальных квазилинейных уравнений с отклонением аргумента, которые решаются методом шагов. Исследованы прямая и обратная задачи для одного класса эволюционных ПДУ методом неполного отделения переменных с применением гибридных интегральных преобразований Фурье классического по пространственной переменной и обобщенного по полупространственной переменной.

Ключевые слова: эволюционные псевдодифференциальные уравнения, псевдодифференциальный оператор, задача Коши, нелокальная многоточечная по времени задача, фундаментальное решение многоточечной задачи, негладкий однородный символ, корректная разрешимость, пространства основных и обобщенных функций, гиперсингулярный интеграл, прямая и обратная задачи, псевдодифференциальные уравнения с отклонением аргумента.

Підписано до друку 04.01.2016
Формат 60x84 1/16
Видавничий дім "Родовід"
Наклад 100 прим. Зам. № 16_03
Україна, 58000, м. Чернівці, вул. Заводська, 26а
Свідоцтво продержавну реєстрацію
Серія ДК № 3784 від 14.05.2010 р.