Інститут математики НАН України

на правах рукопису

Дрінь Ярослав Михайлович

УДК 517.956.4

Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами

01.01.02 – диференціальні рівняння

дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант –

доктор фізико-математичних наук

професор Городецький Василь Васильович

Київ–2015

Зміст

Вступ

В середині минулого століття синтез багатовимірних сингулярних інтегральних рівнянь та рівнянь з частинними похідними призвів до поняття інтегродиференціального оператора (Кальдерон, Зигмунд), що є лінійною комбінацією частинних похідних з коефіцієнтами – сингулярними інтегральними операторами. Систематичне дослідження таких операторів призвело до зміни теорії, в результаті чого перетворення Фур'є витіснило сингулярні інтеграли, а самі оператори почали називатися псевдодиференціальними. Псевдодиференціальні оператори характеризуються своїм символом аналогічно тому, як диференціальні оператори характеризуються своєю характеристичною формою.

Впродовж останніх кількох десятиліть інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) та рівнянь з такими операторами (ПДР). ПДО формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a – функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. До вказаного класу належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки тощо. Поширення результатів класичної теорії диференціальних рівнянь на випадок рівнянь з ПДО та одержання нових результатів дає змогу використовувати такі рівняння при розв'язуванні складних і важливих задач аналізу та математичної фізики, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів.

На теперішній час значних результатів досягнуто у теорії задачі Коші та крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. Це теорія еліптичних рівнянь у згортках у просторах Соболєва-Слободецького та її застосування до дослідження загальних мішаних задач у циліндричних областях для параболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними

(М.С. Агранович, М.Й. Вишик, Г.І. Ескін); коректна розв'язність задачі Коші у просторах Соболєва та їх аналогах для ПДР з аналітичними символами в області $G \subset \mathbb{R}^n$ (Ю.А. Дубинський); теореми про розв'язність диференціально-операторних рівнянь у шкалі банахових просторів цілих експоненціального типу векторів оператора рівняння, які дозволяють довести розв'язність задачі Коші для ПДР з аналітичними символами (Я.В. Радино, С.Р. Умаров); теорія граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь (М.Л. Горбачук, В.І, Горбачук та їхні послідовники); класи аналітичних на $\mathbb{R}^n$ символів псевдодиференціювання з характерними для степеневих функцій властивостями та теореми про коректну розв'язність задачі Коші для відповідних ПДР та систем рівнянь з початковими умовами в просторах Лебега (японські математики M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi); класи єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках, які є псевдодиференціальними системами з цілими аналітичними символами (Б.Г. Гуревич) та ін.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК). За допомогою цих результатів одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, теореми типу Ліувілля). Відзначимо при цьому, що асимптотика ФРЗК для таких рівнянь вже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів, зокрема, при побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами, які відносять до псевдодиференціальних операторів; у сучасній теорії фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається. Якщо символ ПДО не залежить від просторових координат, то задача Коші для ППДР коректно розв'язна в просторі узагальнених функцій типу розподілів, при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРЗК з початковою узагальненою функцією. Ці результати є науковим надбанням ряду вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С.Д. Ейдельмана і Я.М. Дріня (які першими визначили ППДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для відповідних ППДР), М.В. Федорюка, А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Літовченка та ін.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Нелокальні крайові задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерні реакції, процеси вологоперенесення, коливання різних систем, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження тощо). Такі задачі виникають також при описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач.

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, Б.Й. Пташник, О.А. Самарський, В.І. Чесалін та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, дослідження питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

На сьогодні нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних **псевдодиференціальних** рівнянь не досліджені. Отже, актуальними є: 1) побудова теорії нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного ПДР вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi(A)u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

де $\varphi(A)$ – ціла функція від ПДО A, побудованого за точково-негладким або аналітичним символом, зокрема, $\varphi(A) = A$ ($\varphi(A)$ розглядається у просторах гладких функцій, а також у різних зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій); при цьому умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f \tag{0.2}$$

трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція типу розподілів (ультрарозподілів) (така ситуація є природною, оскільки гранична функція може мати особливості в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій); 2) розвинення методики дослідження ФРБЗ – фундаментального розв'язку задачі (0.1), (0.2); 3) побудова та оцінки ФРЗК для систем ППДР вигляду (0.1), коли $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{p} A_k$, де A_k – ПДО порядків $\gamma_k > 0$, $0 \leq k \leq p$, з символами $a_k(t,x;\sigma)$, негладкими при $\sigma = 0$, класична розв'язність задачі Коші для таких систем; 4) дослідження класичної розв'язності багатоточкової задачі для рівномірно параболічних ПДР вигляду (0.1), (0.2) з неоднорідністю f у правій частині (0.1); 5) побудова та дослідження розв'язку задачі Коші та нелокальних задач неоднорідного рівняння (0.1), в якому квазілінійна права частина містить шукану функцію з відхиленням аргументу; 6) побудова і дослідження розв'язків оберненої задачі для ППДР з негладким символом.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню порушених питань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках науково-дослідної роботи "Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами" (державний реєстраційний номер 0111U006757) кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова теорії коректної розв'язності нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь вигляду (0.1) у просторах гладких функцій, елементи яких мають характерні для ФРБЗ властивості.

При досягненні мети вирішувалися такі завдання:

- розвинення методики дослідження ФРБЗ для еволюційних ПДР вигляду (0.1), встановлення структури та властивостей ФРБЗ вказаних рівнянь;
- відшукання умов коректної визначеності оператора $\varphi(A)$ у різних просторах нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$ та у просторах періодичних функцій;
- доведення коректної розв'язності нелокальної багатоточкової задачі для рівнянь вигляду (0.1) у випадку, коли граничні дані є елементами широких класів гладких функцій та топологічно спряжених до них просторів; знаходження формул, що дають аналітичне зображення розв'язків багатоточкової задачі;
- дослідження властивості локалізації розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначених рівнянь;
- побудова та оцінки ФРЗК для систем ППДР вигляду (0.1), коли $\varphi(A) =$

$\sum\limits_{k=0}^{p} A_k$, де A_k – ПДО порядків $\gamma_k > 0$, $0 \le k \le p$, з символами $a_k(t, x; \sigma)$, негладкими при $\sigma = 0$, класична розв'язність задачі Коші для таких систем;

- дослідження класичної розв'язності багатоточкової задачі для рівномірно параболічних ПДР вигляду (0.1), (0.2) з неоднорідністю f у правій частині (0.1);

- побудова та дослідження розв'язку задачі Коші та нелокальних задач неоднорідного рівняння (0.1), в якому квазілінійна права частина містить шукану функцію з відхиленням аргумента;

- побудова і дослідження розв'язків оберненої задачі для ППДР з негладким символом.

Об'єкт дослідження: нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь.

Предмет дослідження: ФРБЗ, коректна розв'язність задачі (0.1), (0.2), властивості розв'язків.

Методами дослідження є вдосконалені й розвинені (залежно від специфіки досліджуваних задач) методи теорії просторів основних і узагальнених функцій, класичні методи теорії задачі Коші для лінійних параболічних систем, метод дослідження параметрикса параболічних ПДР з однорідними символами, методи досліджень фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь, що ґрунтуються на використанні перетворення Фур'є та формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, методи досліджень М.Л. Горбачука та В.І. Горбачук з теорії формальних рядів Фур'є, метод кроків.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано такі нові результати.

1. Встановлені властивості ФРБЗ для лінійних параболічних ПДР з точково-негладкими символами $a(\sigma) \in C^{(k)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ з порядком однорідності $\gamma > 0$. Поширено метод А.Н. Кочубея дослідження ФР параболічного ПДР з однорідними символами на випадок ФРБЗ для параболічних ПДР з такими символами (без обмежень на порядок однорідності). Методика дослідження ФРБЗ у випадку $\gamma \in (0, 1)$ відрізняється від методики дослідження ФРБЗ у випадку $\gamma \geq 1$. Знайдено зображення розв'язку класичної задачі у вигляді відповідного інтеграла Пуассона.

2. Побудовано розв'язок задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, а також розв'язок задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних квазілінійних рівнянь з відхиленням аргументу, які розв'язуються методом кроків.

3. Встановлені властивості ФРБЗ для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (0.1) з негладкими однорідними символами $a(\sigma) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ порядку $\gamma > 1$, зокрема, диференційовність ФРБЗ як абстрактних функцій часового параметра із значеннями в просторі основних функцій, досліджено граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} G(t, \cdot)$$

у просторі узагальнених функцій типу розподілів, де $G(t, \cdot)$ – ФРБЗ, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані параметри. При дослідженні двоточкової та m-точкової задач ($m \geq 2$) використовуються різні методи дослідження фундаментальних розв'язків зазначених задач.

4. Доведено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для рівнянь (0.1) з негладкими у точці 0 однорідними символами у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу розподілів. Встановлено умови, при виконанні яких у відповідному просторі основних функцій визначений і є неперервним оператор $\varphi(A)$. Знайдено класи X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t,x)$ відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком задачі (який є елементом простору X основних функцій), при цьому розв'язок володіє тими ж властивостями, що і фундаментальний розв'язок, $u(t,\cdot) \in X$ при кожному $t \in (0,T]$, а відповідну граничну умову $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'.

5. Знайдено необхідні й достатні умови, які характеризують клас аналітичних періодичних функцій, що містить відомі класи Жевре $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, ультрадиференційовних функцій. Доведено коректну розв'зність задачі (0.1), (0.2) у випадку, коли $\varphi(A)$ – псевдодиференціальний оператор у просторі періодичних функцій, а гранична функція – елемент простору періодичних узагальнених функцій типу ультрарозподілів Жевре. Знайдено зображення гладких розв'язків рівняння (0.1), (0.2).

6. Доведено, що в певних просторах типу S існує оператор диференціювання нескінченного порядку
$$\varphi(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k, \quad D = d/dx, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$
при цьому $\varphi(D)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним символом. Знайдено клас X' граничних узагальнених функцій типу ультрарозподілів, для яких розв'язок $u(t,x)$ нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(D)u =$

0 подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком $G(t,\cdot)$ цієї задачі; при цьому $\{u(t,\cdot), G(t,\cdot)\} \subset X$ при кожному $t > 0$, а відповідну граничну умову (0.2) $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'.

7. Встановлено, що розв'язки багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена гранична функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ граничне співвідношення
$$\mu \lim_{t\to 0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = g(x), \quad \{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T],$$
справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$.

8. Побудовано та знайдено степеневі оцінки ФРЗК для систем ППДР вигляду (0.1), коли $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{p} A_k$, де A_k – ПДО порядків $\gamma_k > 0$, $0 \le k \le p$, з символами $a_k(t,x;\sigma)$, негладкими при $\sigma = 0$, доведена класична розв'язність задачі Коші для таких систем.

9. Досліджена класична розв'язність багатоточкової задачі для рівномірно параболічних ПДР вигляду (0.1), (0.2) з неоднорідністю f у правій частині (0.1).

10. Побудовано розв'язок задачі Коші та нелокальних задач неоднорідного рівняння (0.1), в якому квазілінійна права частина містить шукану функцію з відхиленням аргументу.

11. Досліджено пряму і обернену задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є класичного по просторових змінних і узагальненого по півпросторовій змінній.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Результати та методика роботи можуть знайти застосування у подальшому розвитку загальної теорії еволюційних псевдодиференціальних рівнянь, у математичній фізиці при розв'язуванні задач теплофізики, при вивченні масообмінних і дифузійних процесів у фрактальних середовищах.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації одержані автором самостійно. У спільних з науковим консультантом працях В.В. Городецькому належить аналіз отриманих здобувачем результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені до дисертації, доповідалися на: науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та нелінійних коливань Інституту математики НАН України (науковий керівник – академік А.М. Самойленко, 2013 р.); наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь, математичного моделювання, математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича; Міжнародних математичних конференціях у м. Києві, Львові, Донецьку, Івано-Франківську, Чернівцях, Ужгороді, Дрогобичі, Кримських осінніх математичних школах (1980-2015 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в працях [34, 186–188, 190–198, 203–206, 209, 211, 223, 231, 247, 248, 250, 253, 264–273], які не увійшли до кандидатської дисертації автора [201]; [34, 186–188, 190, 203–206, 211, 223, 231, 247, 248, 250, 253, 264–267, 271–273] – статті у фахових журналах, а [34, 223, 253, 272, 273] входять до наукометричної бази данних; [191–197, 199, 207, 254–256, 260, 263, 274–282] – матеріали міжнародних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, додатку, висновків, списку із 282 використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 339 сторінок.

Розділ 1.

Огляд літератури

У цьому розділі робиться огляд праць, які мають відношення до результатів, наведених у дисертації, є близькими за змістом та методами досліджень.

Підрозділ 1.1 містить огляд відомих результатів, що стосуються теорії задачі Коші для еволюційних рівнянь і систем з ПДО. Аналіз результатів проводиться окремо для ПДО з гладкими символами та ПДО з негладкими символами. У підрозділі 1.2 наведено огляд праць, у яких досліджується задача Коші для рівнянь із ПДО з довільними аналітичними символами, які утворюють алгебру у різних просторах основних та узагальнених функцій і визначаються як диференціальні оператори нескінченного порядку. У підрозділах 1.3, 1.4 аналізуються праці, пов'язані з нелокальними багатоточковими задачами для диференціально-операторних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та параболічних псевдодиференціальних рівнянь.

У підрозділі 1.5 дається огляд праць, які стосуються задачі Коші та нелокальних задач для квазілінійних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргументу.

Підрозділ 1.6 містить короткий огляд відомих результатів, що стосуються прямої та оберненої задач для диференціальних рівнянь.

1.1. Задача Коші для псевдодиференціальних рівнянь і систем

1.1.1. Випадок гладких символів псевдодиференціювання

Японськими математиками в [1–5] розвивається теорія задачі Коші для параболічних ПДР (систем) із гладкими символами в класах

$$S^m_{\lambda,\rho,\delta} := \Big\{ p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \,\Big|\, \forall\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{Z}_+ \; \exists c > 0 \; \forall\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)| \le c\lambda(x,\xi)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\Big\}, m\in\mathbb{R}, \rho\in[0,1], \delta<\rho,$$

де λ – деяка основна вагова функція з $C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Досліджується задача Коші вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + p(t;x,D_x)u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

де $p(t;x,D_x)$ – ПДО з класу $\mathcal{E}_t^0(S^m_{\lambda,\rho,\delta})$ (тобто оператор, дія якого на елементах з простору S задається в класичній формі дробового диференціювання з символом $p(t;x,\xi)$, який при кожному фіксованому $t\in(0,T]$ належить до $S^m_{\lambda,\rho,\sigma}$). Для (1.1) припускається виконання таких умов: а) $\exists c>0$ $\exists m'\in[0,m]$ $\forall t\in[0,T]$ $\forall\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Re}\, p(t;x,\xi) \ge c\lambda(x,\xi)^m;$$

б) $\forall\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ $\exists c>0$ $\forall t\in[0,T]$ $\forall\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$:

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(t;x,\xi)/\mathrm{Re}\, p(t;x,\xi)| \ \le c\lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

При цьому основна вагова функція λ така, що

$$c^{-1}(1+\|x\|+\|\xi\|)^\gamma \le \lambda(x,\xi) \le c(1+\|x\|^{\tau_0}+\|\xi\|) \quad (\gamma\ge 0, \tau_0\ge 0, c>0);$$

$$\forall\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{Z}_+^n \ \exists c_{\alpha,\beta}>0: \ |D_\xi^\alpha D_x^\beta \lambda(x,\xi)| \le c_{\alpha,\beta}\lambda(x,\xi)^{1-|\alpha|+\delta|\beta|};$$

$$\lambda(x+y,\xi) \le c(1+\|y\|)^{\tau_1}\lambda(x,\xi) \quad (\tau_1\ge 0, c>0).$$

За таких умов C. Tsutsumi [1,2] побудував фундаментальний розв'язок $E(t,x) = e(t,s;x,D_x)$ задачі (1.1) у вигляді ПДО з класу $\mathcal{E}^0_{t,x}(S^0_{\lambda,\rho,\delta})$ $(0\le s\le t\le T)$, символом якого є

$$e(t,s;x,\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(t,s;x,\xi) + r_N(t,s;x,\xi),$$

де N – довільне натуральне число таке, що $N(\rho-\delta)\geq m$;

$$e_0(t,s;x,\xi)=\exp\Big\{-\int\limits_{-s}^{t}p(\sigma;x,\xi)d\sigma\Big\},$$

а $r_N(t,\sigma;x,\xi)$, $e_j(t,s;x,\xi)$, $j\in\mathbb{N}$, – певні функції, які при кожних фіксованих t і s, $0\leq s\leq t\leq T$, належать відповідно до $\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{-(\rho-\delta)N+m}_{\lambda,\rho,\delta})$ і $\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{-(\rho-\delta)j}_{\lambda,\rho,\delta})$. Зазначені властивості $E(\cdot,\cdot)$ дозволили автору скористатися результатами досліджень з [3,4] й встановити розв'язність задачі Коші (1.1) у просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p>1$, початкових даних: розв'язок u зазначеної задачі зображається у вигляді $u(t,\cdot)=E(t,0)u_0$ для $u_0\in L_2(\mathbb{R}^n)$ та для $u_0\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, при $\rho=1$.

У [5] K. Shinkai поширює схему побудови фундаментального розв'язку з [2] для задачі (1.1) на випадок ПДС. При цьому розгладається простіший випадок основної вагової функції λ ($\lambda(x,\xi)\equiv(1+\xi^2)^{1/2}$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$), а замість умов параболічності а), б) вимагається існування додатної функції $\mu(t;x,\xi)$, $t\in[0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ такої, що

$$\|D^\alpha_\xi D^\beta_x p(t;x,\xi)\|\leq c_{\alpha,\beta}(1+\xi^2)^{(-\rho|\alpha|+\delta|\beta|)/2}\mu(t;x,\xi)$$

(тут $p(t;x,\xi)$ – матричний символ ПДО $p(t;x,D_x)$);

$$\|e_0(t,s;x,\xi)\|\leq c\exp\Big\{-\int\limits_{s}^{t}\mu(\sigma;x,\xi)\Big\},\quad 0\leq s\leq t\leq T,$$

де

$$e_0(t,s;x,\xi):=E+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int\limits_s^{s_1}ds_2\ldots\int\limits_s^{s_{j-1}}p(s;x,\xi)\ldots p(s_j;x,\xi)ds_j,$$

а E – одинична матриця.

Задача Коші для ПДР

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=((E-D^2_x)^{\gamma/2}u)(t,x),\quad (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R},\tag{1.2}$$

з оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $\gamma > 0$ вивчалася в [6] у просторах $(S_\alpha^\beta)'$ початкових даних; досліджувалися властивості її фундаментального розв'язку

$$G(t,\cdot) = F^{-1}[e^{-t}(1+\xi^2)^{\gamma/2}](t,\cdot), \quad t > 0.$$

Встановлено, що $G(t,\cdot) \in S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ (тут $[\cdot]$ – ціла частина числа), а задача Коші для рівняння (1.2) коректно розв'язна у випадку, коли початкова функція $f \in (S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma})'$ є згортувачем у просторі $S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$; її розв'язок $u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * f$ – елемент простору $S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ при кожному фіксованому $t > 0$.

Зазначимо, що оператор Бесселя дрообового диференціювання визначається як обернений оператор до дробового степеня $(E - D_x^2)^{-1/2}$ – бесселевого потенціала. Побудовою в різних просторах і вивченням властивостей таких операторів займалися N. Aronszajn, K.R. Smith, A.P. Celdron, R. Adams, B.A. Ногін, Б.С. Рубін та ін. (див. [7]).

У [8] досліджені питання, пов'язані з описом класів єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках вигляду

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} (f_{jk} * u)(t,x), \quad j \in \{1,\ldots,m\}, (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Вважається, що компоненти u_j розв'язку u при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ є елементами певного основного простору Φ, а f_{jk} – відомі функціонали-згортувачі в Φ (незалежні від t) такі, що їх перетворення Фур'є $\tilde{f}_{jk} = F[f_{jk}]$ – функціонали типу цілих аналітичних функцій над простором $\tilde{\Phi} = F[\Phi]$. Отже, (1.3) – система ПДР з ПДО f_{jk}, символами яких є цілі аналітичні функції $\tilde{f}_{jk}$.

Частковим випадком системи (1.3) є: диференціальні системи (коли f_{jk} – похідні від δ-функції Дірака); різницеві системи ($f_{jk}(\cdot) = \delta(\cdot - h_{jk})$); системи інтегральних рівнянь, ядра яких залежать від різниці аргументів (f_{jk} – регулярні функціонали з компактним носієм).

Встановлено, що у випадку, коли f_{jk} – функціонали з компактним носієм, класом єдиності задачі Коші для системи (1.3) є сукупність функцій, які задовольняють нерівність

$$|\varphi(x)| \leq ce^{(1/b_0-\varepsilon)|x|\ln|x|}, \quad x \neq 0,$$

при довільному фіксованому ε (тут b_0 – мінімальний з діаметрів множин, кожна з яких охоплює всі $\operatorname{supp} f_{jk}$). Якщо ж f_{jk} – функціонали типу цілої аналітичної функції з простору S_α^β, $\alpha+\beta=1$, то класом єдиності розв'язку відповідної задачі Коші є клас функцій таких, що

$$|\varphi(x)| \leq ce^{|x|(\ln|x|)^{1-\alpha}}, \quad x \neq 0.$$

Зупинимося тут також на працях [9–11], в яких досліджена задача Коші для рівнянь типу фрактальної дифузії, які містять регуляризовану дробову похідну за часовою змінною. В [9] доведена теорема існування та єдиності розв'язку абстрактної задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t) = Au(t)$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі, D_t^α – регуляризована дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$. На підставі цього в [10] доведено єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t,x) = Lu(t,x)$ у класі обмежених та експоненціально зростаючих з порядком зростання $2/(2-\alpha)$ функцій (L – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з неперервними та обмеженими дійсними коефіцієнтами). У праці [11] за допомогою методу параметрикса встановлено розв'язність задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t,x) = Lu(t,x)$ у класі функцій, що зростають як $\exp\{c|x|^{2/(2-\alpha)}\}$. Рядом авторів досліджувалася також задача типу задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана-Ліувілля (див. [7]).

1.1.2. Випадок негладких символів псевдодиференціювання

На сьогодні особливої уваги заслуговує теорія ПДР з негладкими символами, зародження якої пов'язують з дослідженням простіших рівнянь, що містять дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа (див. [7]). Ідея реалізації такого степеня на функцію f з S особливо прозора в образах Фур'є: $(-\Delta)^{\alpha/2}f = F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}F[f]]$. Проте ця формула є мало придатною для поширення зазначеної операції на функції з простору $L_1(\mathbb{R}^n)$. Однак, з огляду на добре відому формулу дії перетворення Фур'є на згортку $F[f*\varphi] = F[f]\cdot F[\varphi]$, її можна формалізувати до більш зручної форми

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f = F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}] * f. \tag{1.4}$$

Реалізація цієї схеми стала можливою завдяки появі теорії розподілів Шварца. Якщо розуміти F^{-1} у сенсі узагальнених функцій, то $F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}]$ можна описати так [12, 13]:

$$F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}] = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} = \begin{cases} \|x\|^{-\alpha-n}, & \alpha+n+2k \neq 0, \alpha \neq 2k, \\ \|x\|^{-\alpha-n}\ln\|x\|^{-1}, & \alpha+n+2k = 0, \\ (-\Delta)^{\alpha/2}\delta(x), & \alpha = 2k, \end{cases}$$

де δ – дельта-функція Дірака, $\gamma_n(\alpha)$ – спеціальний нормований множник. При $\operatorname{Re}\alpha > 0$ функція $F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}]$ є локально інтегровною; згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса

$$D^{\gamma}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}[\|x-y\|^{\gamma}]f(y)dy, \quad \gamma = -\alpha, \tag{1.5}$$

а саму функцію $F^{-1}[\|\xi\|^{\alpha}]$ – ріссовим ядром [7]. Вперше потенціал з ядром $\|\xi\|^{-\alpha-n}$, $\operatorname{Re}\alpha < 0$, з'явився в дисертаційній роботі О. Фростмана [14], виконаної під керівництвом Ф. Рісса. Дослідженням потенціалів Рісса в просторах інтегровних функцій займалися G.H. Hardy, J.E. Littlewood [15], О.Л. Соболєев [16], G.O. Thorin [17] та інші.

Зазначимо, що у випадку $\operatorname{Re}\alpha > 0$ інтеграл (1.5) має порядок особливості, більший ніж розмірність простору $\mathbb{R}^n$, а саме тому його називають гіперсингулярним інтегралом. Такий інтеграл завжди розбігається, тому реалізацію згортки (1.4) у вигляді (1.5) можна подати шляхом його регуляризації завдяки відніманню відрізка ряду Тейлора функції f, або взяття її скінченної різниці:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{\|y\|^{n+\alpha}} dy, \quad l > \alpha, \tag{1.6}$$

де $(\Delta_y^l f)(x)$ – скінченна різниця функції f порядку l з кроком y в точці x, а $d_{n,l}(\alpha)$ – спеціальний нормуючий множник, який вибирається так, щоб $(\Delta)^{\alpha/2}$ не залежав від l (при $l > \alpha$). Так визначений оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, називають оператором Рісса дробового диференціювання і позначають символом D^α.

Гіперсингулярний інтеграл (1.6) породжує обернений оператор до потенціалу Рісса $I^\alpha = D^{-\alpha}$, розглядуваного в рамках просторів L_p. Реалізація дробового диференціювання Рісса $(-\Delta)^{\alpha/2}$ у вигляді гіперсингулярного інтеграла у випадку $0 < \alpha < 2$ вперше з'явилася в праці І. Стейна [18]. Загальний випадок $\alpha > 0$ розглядався П.І. Лізоркіним [19] та С.Г. Самком [20]. Дослідження нормуючих констант $d_{n,l}(\alpha)$, як функцій параметра α, проводив С.Г. Самко [20,21]. Збіжність гіперсингулярних інтегралів на диференційовних функціях, а також можливість пониження порядку l скінченних різниць, розглядалися в [20].

Вивченню просторів $I^\alpha(L_p)$ потенціалів Рісса від функцій з L_p та просторів $L^\alpha_{p,r}(\mathbb{R}^n)$, які виникають як природне узагальнення просторів ріссових і бесселевих потенціалів, а також з'ясуванню співвідношень між $L^\alpha_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ і $I^\alpha(L_p)$, присвячені праці В.Г. Мазьї, В.П. Хавіна [22], Б.С. Рубіна і С.Г. Самка [20,23].

Узагальненням гіперсинлуряного інтеграла (1.6) є конструкція вигляду

$$(D^\alpha_\Omega f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{\|y\|^{n+\alpha}} \Omega(x,y) dy, \quad l > \alpha, \tag{1.7}$$

де $\Omega(\cdot,\cdot)$ – деяка функція, незалежна від f (так звана характеристика). Зазначимо, що клас гіперсингулярних інтегралів (1.7), навіть лише при $\Omega(x,y) \equiv \Omega(y)$, де $\Omega(\cdot)$ – однорідна функція, є досить багатим. Він, зокрема, містить оператори вигляду $F^{-1}[a_\alpha(\xi)F[\cdot]]$, де a_α – однорідна функція порядку α певної гладкості. У випадку цілих α до цього класу належать усі однорідні диференціальні оператори частинних похідних порядку α. Вперше гіперсингулярні інтеграли з однорідною характеристикою з'явилися в працях Р. Відена [24, 25]; згодом з характеристикою $\Omega(x, y)$ – у М. Фішера [26]. У формі (1.7) гіперсингулярні інтеграли розглядалися С.Г. Самком [20, 27, 28].

Детальніше щодо огляду праць, присвячених розвитку теорії потенціалів Рісса та гіперсингулярних інтегралів, див. у [7].

Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Наприклад, ПДО Рісса з символом $\|\xi\|^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, є твірним оператором симетричного стійкого процесу [29]. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для параболічних ПДР, які містять ПДО, побудовані за символом $\|\xi\|^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma \leq 2$, можна трактувати як густини розподілів ймовірностей деяких випадкових величин. Як зазначено в [30], при $0 < \gamma < 1$ такі розподіли досліджувалися Д. Пойа, при $\gamma = 1$ – О. Коші, при $\gamma = 3/2$ – Ж. Хаольцмарком, а при $\gamma = 2$ – К. Гауссом.

Теорія ПДО з негладкими символами має своє застосування і в сучасній теорії фракталів. У [9] та цитованих там працях Р.Р. Нігматуліна, М.М. Джрбашяна й А.Б. Нерсесяна йдеться про дослідження дифузійних процесів у фрактальних середовищах завдяки еволюційним рівнянням дробового порядку з негладкими символами.

Дослідження лінійних параболічних (модельних) ПДР зі сталими однорідними негладкими в точці 0 символами було розпочате С.Д. Ейдельманом та Я.М. Дрінем в [31]. Згодом вони розглядали рівняння більш загального вигляду й одержали ряд важливих результатів, пов'язаних з розв'язністю задачі Коші в класах гельдерових функцій, з інтегральним зображенням розв'язку, шаудерівськими оцінками та властивістю стабілізації розв'язку [32–34]. Точну асимптотичну поведінку фундаментального розв'язку в околі нескінченно віддалених точок було встановлено М.В. Федорюком [35]. З'ясовано, що вона не є експоненціальною, як у випадку параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Згодом W.R. Schneider [36] (див. також [37]), використовуючи перетворення Мелліна, встановлює зображення густин "стійких розподілів" у вигляді спеціальної H-функції Фокса і, як наслідок, одержує зазначену асимптотичну поведінку цих густин. Методика дослідження властивостей фундаментального розв'язку, яка використовувалася в зазначених працях (крім [36]), своєю специфікою накладає обмеження на порядок однорідності γ головного символу рівняння: $\gamma > 1$ при $n > 1$ і $\gamma = 1$ при $n = 1$.

А.Н. Кочубей в [29] вперше одержав точні оцінки параметрикса задачі Коші для лінійного ППДР з символами певної гладкості поза початком координат, залежними від часу та просторової змінної у випадку, коли розмірність простору більша за одиницю та $\gamma \geq 1$. Новий підхід до дослідження парметрикса, запропонований в [29], базується на використанні елементів теорії узагальнених функцій, гармонійного аналізу і гіперсингулярних інтегралів. В [29] доведено також теорему про розв'язність задачі Коші в класах функцій з певним степеневим зростанням при $\|x\| \to \infty$. В $[29, 37]$ встановлено аналог принципу максимуму, завдяки якому доведено теорему про єдиність розв'язку задачі Коші в класах невід'ємних спадних функцій ($\gamma > 0$ досліджено в [230]).

В.В. Городецьким в [38] досліджена задача Коші для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A_\gamma u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

де A_γ – ПДО, символом якого є нескінченно диференційовна поза початком координат однорідна функція з показником однорідності $\gamma > 1$. Будується спеціальний простір Φ основних функцій, що породжується властивостями фундаментального розв'язку $G(t,x)$ рівняння (1.8), при цьому $G(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t > 0$. Класичний розв'язок задачі Коші для рівняння (1.8), який подається у вигляді згортки $G(t,x) * f$ у випадку, коли f – звичайна неперервна обмежена початкова функція, продовжено до білінійної форми $\langle f, G(t, x - \cdot)\rangle$, де f – вже узагальнена функція з простору Φ'. З'ясовано, що якщо f – фінітна узагальнена функція, то $u(t,\cdot) = \langle f, G(t, x - \cdot)\rangle$ – звичайний диференційовний по x розв'язок рівняння (1.8), $u(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t > 0$, але $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ в просторі Φ', тобто f – граничне значення $u(t,\cdot)$ в просторі Φ'. Отже, для рівняння (1.8) можна розглядати задачу Коші з початковими даними – узагальненими функціями з простору Φ' . Для цієї задачі Коші в [38] встановлюється її коректна розв'язність у просторі Φ', доводиться принцип локалізації та властивість слабкої стабілізації розв'язку задачі.

Зазначена схема дослідження задачі Коші та одержані результати поширюються в [39] на випадок рівняння поліноміального вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} A_{\gamma_j} u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

де $m \in \mathbb{N}$, A_{γ_j} – оператор типу A_γ з (1.9), $\gamma_j > 1$, $j \in \{1,\ldots,m\}$.

У [40] визначено новий клас вироджених параболічних рівнянь, які можуть містити ПДО з негладкими символами. Він природно узагальнює класичне рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Для модельних рівнянь з цього класу будуються й досліджуються фундаментальні розв'язки; наводяться приклади.

У дисертаційній роботі Р.Я. Дріня [41], присвяченій дослідженню якісних властивостей розв'язків параболічних ПДР з негладкими символами та системам таких рівнянь, одержано асимптотичне зображення фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком у випадку $n \in \{1;3\}$; встановлено оцінки в необмежених за часом областях ($t > 0$) фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для випадку систем з сталими символами псевдодиференціювання і відсутніми молодшими членами. Описані множини значень ППДО з однорідними символами порядку $\gamma \in (0,2)$ на спеціальних класах пробних функцій, доведена єдиність невід'ємних слабких розв'язків задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальними доданками, побудованими за символами $\|\xi\|^{\gamma_k}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_k \in (0,2)$, $k \in \{1,\dots,m\}$; доведено ряд теорем про стабілізацію розв'язків задачі Коші, а також теорему про стійкість тривіального розв'язку та теорему типу Ліувілля. Дослідженню якісних властивостей розв'язків ППДР та систем присвячені також праці [42–45].

У працях [46–48] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для ППДР, що є поліномами певних ПДО, з початковими даними у просторах узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків типу розподілів та ультрарозподілів, досліджено властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь.

В.А. Літовченком в [49–51] побудовано нові класи параболічних ПДР і систем з опуклими вниз символами псевдодиференціювання різного ступеня гладкості в комплексному просторі, залежними лише від параметра t, класи параболічності періодичних ПДО, параболічних ПДР і систем з точково-негладкими символами псевдодиференціювання, які не залежать від просторового параметра і мають за просторовою змінною характерні для степеневих функцій властивості. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для означених ППДР і систем у випадку, коли початкові дані можуть бути узагальненими функціями типу розподілів або ультрарозподілів, досліджені властивості локалізації та стабілізації розв'язків.

1.2. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку

Детальний огляд праць, присвячених задачі Коші для рівнянь із ПДО з аналітичними символами, що утворюють алгебру в різних просторах основних та узагальнених функцій і визначаються як диференціальні оператори нескінченного порядку, проведено в [52]. Особливої уваги заслуговують результати досліджень Ю.А. Дубінського, який розвинув теорію задачі Коші в просторах Соболєва W^∞ нескінченного порядку для ПДР з аналітичними символами, запропонував варіант теорії узагальнених функцій, в рамках якої позитивно вирішується проблема розв'язності задачі Коші для довільного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Під просторами Соболєва W^∞ розуміють різні класи нескінченно диференційовних функцій дійсних змінних $x_1, \ldots, x_n$, для яких

$$\rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{r_\alpha}^{p_\alpha} < +\infty,$$

де $\|D^\alpha u\|_{r_\alpha}$ позначає норму похідної $D^\alpha u$ у просторах Лебега L_{r_α}, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультиіндекс з цілими невід'ємними координатами, $r_\alpha \geq 1$, $p_\alpha \geq 1$ – довільні числові послідовності. Визначальною умовою коректності задачі Коші є умова нетривіальності відповідних просторів Соболєва нескінченного порядку. У працях [53–57] знайдено критерії нетривіальності просторів Соболєва W^∞ у випадку евклідового простору $\mathbb{R}^n$, простору майже періодичних та періодичних функцій, обмеженої та конічної областей. У працях [58, 59] досліджені простори Соболєва-Орліча нескінченного порядку функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$ або на обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^n$. С.Р. Умаровим [60] знайдено необхідні й достатні умови нетривіальності просторів нескінченного порядку, породжених одним або декількома спектральними за Данфордом операторами.

Простори Соболєва нескінченного порядку як границі просторів Соболєва скінченного порядку, властивості сепарабельності, рефлексивності, рівномірної опуклості та вкладення таких просторів досліджували Ю.А. Дубінський [61, 62], Ха Зуй Банг [63] та Г.С. Балашова [64].

У праці [65] позитивно вирішується проблема коректної розв'язності задачі

Коші

$$\partial_t^m u + \sum_{j=0}^{m-1} A_k(t, D_x)\partial_t^k u = h(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, m \geq 1, \tag{1.9}$$

$$\partial_t^k u(0,x) = \varphi(x), \quad k \in \{0,\ldots,m-1\}, \tag{1.10}$$

де $A_k(t, D_x)$, $k \in \{0,\ldots,m-1\}$ – довільні ПДО, символи яких аналітичні в області $G \subset \mathbb{R}^n$ функції при кожному $t \in \mathbb{R}$. У [65] доведено, що якщо $\varphi_k \in H^\infty(G)$, $h \in C^0(\mathbb{R}, H^\infty(G))$, то існує єдиний розв'язок u задачі (1.9), (1.10), який є елементом класу $C^m(\mathbb{R}, H^\infty(G))$ (тут $H^\infty(G)$ – простір основних функцій, елементами яких є лише ті функції з $L_2(\mathbb{R}^n)$, перетворення Фур'є яких – фінітні в області G функції, $H^{-\infty}(G)$ – простір, топологічно спряжений до $H^\infty(G)$, а $C^k(\mathbb{R}, \Phi)$ – клас функцій $u(t,x)$, які при кожному $t \in \mathbb{R}$ є елементами Φ й неперервно залежать від t разом з похідними до порядку k). Якщо $\varphi_k \in H^\infty(G)$, а $h \in C^0(\mathbb{R}, H^{-\infty}(G))$, то зазначена задача Коші має єдиний розв'язок $u \in C^m(\mathbb{R}, H^{-\infty}(G))$.

В [66] Ю.А. Дубінським запропоновано метод дослідження деяких класів рівнянь з частинними похідними (зокрема, класичних рівнянь математичної фізики), який використовує алгебру диференціальних операторів нескінченного порядку, що мають сталий аналітичний символ і діють у відповідних просторах Соболєва нескінченного порядку. Це дозволяє шляхом належного введення параметра розв'язувати диференціальне рівняння з частинними похідними як звичайне диференціальне рівняння, приєднавши до нього початкові або крайові умови. Відшукання розв'язку зводиться або до прямого застосування диференціального оператора нескінченного порядку до вихідних даних задачі, або до розв'язання диференціального рівняння нескінченного порядку меншої розмірності.

Алгебра диференціальних операторів нескінченного порядку використовується в [67,68] Ю.А. Дубінським також при дослідженні ПДР з комплексним аргументом. Областю визначення ПДО є простір експоненціальних функцій при прямуванні типів цих функцій до певної границі. При цьому алгебра ПДО з аналітичними в області Ω символами ізоморфна простору експоненціальних функцій, зростаючих в області аналітичності символа, що дозволяє застосувати метод Хевісайда класичного числення і вивчити ряд задач для диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь з комплексним аргументом.

Задача Коші для абстрактних диференціально-операторних рівнянь досліджувалася М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, А.В. Князюком, О.І. Кашпіровським, П.Й. Дудниковим та багатьма іншими математиками. Особлива уваги при цьому приділялася питанням зображення розв'язків таких рівнянь та дослідженню їх граничних значень у різних функціональних просторах. Огляд цих праць наведено в монографії [69] та праці [70]. Для замкненого оператора в банаховому просторі М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук в працях [71–74] вказано спосіб побудови локально опуклих просторів гладких і узагальнених функцій та встановлено коректну розв'язність різних крайових задач для диференціально-операторного рівняння $\partial u/\partial t = Bu$. Зображення розв'язку при цьому дається через степеневий ряд від експоненти оператора B.

Ф. Трев у праці [75] довів локальну розв'язність задачі Коші для довільного рівняння з частинними похідними типу Коші-Ковалевської у класах аналітичних функціоналів. При цьому зазначено, що розв'язок може бути зображений за допомогою диференціального оператора нескінченного порядку (гіпердиференціального оператора). Зауважимо також, що Тревом при дослідженні задачі Коші використовувалися простори функцій, перетвореннями Фур'є яких є функції, інтегровні з вагою $\exp(b|\xi|)$, $b > 0$. Ці простори є просторами Соболєва нескінченного порядку, параметри яких залежать від структури конкретного досліджуваного рівняння.

У монографії [76] побудовано аналоги просторів Соболєва нескінченного порядку на торі, даються відповіді на питання про нетривіальність та нескінченновимірність таких просторів. Для рівняння з частинними похідними нескінченного порядку

$$\sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \frac{\partial^{|s|} u(x,t)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{1.11}$$

В [76] розглядається задача

$$\left.\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|_{t=T} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{1.12}$$

де Ω – m-вимірний тор, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, $|x| = s_0 + s_1 + \dots + s_m$; μ, s – комплексні числа. Нелокальні крайові умови можна вважати умовами, які узагальнюють умови періодичності, тобто задачу (1.11), (1.12) можна розуміти як задачу Коші. Знайдено умови існування та єдиності розв'язку вказаної задачі.

За допомогою диференціально-символьного методу в монографії П.І, Каленюка та З.М. Нитребича [77] досліджується задача Коші для розв'язного відносно старшої похідної за часом лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними та сталими коефіцієнтами загалом також нескінченного порядку за просторовими змінними. Знайдено класи існування та єдиності розв'язків досліджуваних задач. У цих класах для шуканих розв'язків побудовано формули у вигляді скінченних сум або збіжних рядів. Розв'язки задачі Коші подано у вигляді суперпозиції дій диференціальних виразів нескінченного порядку на цілі функції параметрів, за якими діють вирази. Запропоновано можливі шляхи переходу від наведених формул розв'язків задач, одержаних за допомогою диференціально-символьного методу, до відомих формул, одержаних іншими методами.

У праці [78] розвивається теорія задачі Коші для параболічних рівнянь вигляду

$$\partial u / \partial t + \varphi(D_x) u = 0 \tag{1.13}$$

з операторами диференціювання $\varphi(D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(-iD_x)^k$ нескінченного порядку в спеціальних просторах [8]. Знайдено необхідні й достатні умови, при виконанні яких зазначені оператори в цих просторах зображаються в класичній формі дробового диференціювання; досліджено властивості згорток, згортувачів та мультиплікаторів, які діють у відповідних просторах. Основні результати про коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (1.13) формулюються так. Якщо початкова узагальнена функція f – згортувач у просторі W_M^{Ω}, а символ ПДО – функція φ – мультиплікатор у просторі $W_{M_!}^{\Omega_1}$, причому $e^{\varphi} \in W_{M_1}^{\Omega_1}$, то відповідна задача Коші має єдиний, неперервно залежний від початкової функції розв'язок u, який зображається у вигляді $u = F[e^{t\varphi}] * f$ (F – перетворення Фур'є), причому $u(t, \cdot) \in W_M^{\Omega}$, $t > 0$ (тут Ω_1, M_1 – двоїсті за Юнгом [8] функції відповідно з M, Ω).

Диференціальні рівняння нескінченного порядку вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k(F, f) = \Phi \tag{1.14}$$

вивчалися в монографії [79]. Тут $D^k(F, \cdot)$ – оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, породжений цілою функцією $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ порядку ρ й типу $\sigma \neq 0, \infty$; причому $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lim_{k \to +\infty} (k^{1/\rho} |a_k|^{1/k}) = (\sigma e \rho)^{1/\rho},$$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_r $(0 < R \leq \infty)$ – простору однозначних і аналітичних у крузі $|z| \leq R$ функцій з топологією компактної збіжності (A_R не є нормованим простором, але в той же час A_R – простір Фреше). За означенням, вираз

$$D^n f \equiv D^n(F, f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}$$

називається узагальненою похідною порядку n функції f, породженою узагальненою похідною порядку n функції f, породженою функцією f [79]. Зокрема, якщо $F(z) = e^z$, то $D^n(e^z, f) = \dfrac{d^n}{dz^n}f$, тобто $D^n(F, f)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну n-го порядку від функції $f(z)$, породжену (замість функції e^z) функцією $F(z)$. В [79] знайдено умови, за яких рівняння (1.14) має розв'язок, котрий є цілою функцією певного порядку.

У працях [80, 81] для еволюційного рівняння

$$u'(t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k u(t) = 0, \quad t \in (0, T], \tag{1.15}$$

де A – оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, знайдено підпростори просторів типу W, в яких визначені, є лінійними і неперервними вказані оператори; умови, за яких у відповідних підпросторах коректно визначені та є неперервними оператори Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку, встановлено розв'язність задачі Коші для рівнянь вигляду (1.15) у відповідних підпросторах типу W та у просторах аналітичних функціоналів типу W'.

Питання про зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторах A_R у вигляді диференціальних операторів нескінченного порядку вивчали Ю.Ф. Коробейник у праці [82] та М.І. Нагнибіда у праці [83]. В.В. Подпорін [84] детально розглянув питання про можливість такого зображення для довільних лінійних операторів, котрі неперервно діють у загальних просторах степеневих рядів багатьох змінних. С.С. Лінчук у працях [85–87] дослідив критерії застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання до широкого класу формальних степеневих рядів, наділеного нормальною топологією Кете [88] .

Стосовно техніки диференціальних операторів нескінченного порядку відзначимо також, що її формалізм з успіхом використовувався при розв'язуванні багатьох конкретних задач механіки та фізики. Виділимо в цьому напрямку дослідження, проведені в працях [89–92].

1.3. Нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними

Нелокальними крайовими задачами прийнято називати задачі, в яких замість задання значень розв'язку або його похідних на фіксованій частині межі задається зв'язок цих значень із значеннями тих самих функцій на інших внутрішніх або межових многовидах. Дослідження таких задач зумовлено багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничонаукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів. Прикладами можуть бути задачі, які пов'язані з дослідженням процесів поширення тепла [93–102], вологопереносу у капілярно-пористих середовищах [103,104] , дифузії [105,106] і деяких технологічних процесів [107,108], обернені задачі для параболічних рівнянь [109,110], а також задачі математичної біології [111] та демографії [112]. Нелокальні задачі мають також практичне застосування при розв'язанні задач механіки твердого тіла [113].

Загальне означення нелокальних умов та їх класифікація були запроваджені А.М. Нахушевим [114].

У 1964–1966 роках С.Г. Крейн та Г.І. Лаптєв досліджують крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь другого порядку в банаховому просторі [115–117]. Так, для рівняння

$$u''(t) - Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \tag{1.16}$$

де A – замкнений лінійний оператор зі всюди щільною у комплексному банаховому просторі E областю визначення, $u(t)$ і $f(t)$ – функції зі значеннями в E, розглядається задача з крайовими умовами

$$\sum_{j=1}^{2} [\alpha_{rj} u^{(j-1)}(0) + \beta_{rj} u^{(j-1)}(T)] = f_r, \quad r = 1, 2, \tag{1.17}$$

де α_{rj}, β_{rj} – комплексні числа. Встановлені необхідні й достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1.16), (1.17), коли A – породжуючий оператор аналітичної півгрупи.

О.О. Дезін у монографії [118] досліджує розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами, та можливість опису цих розширень за допомогою крайових умов. Вперше на доцільність і необхідність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач також вказав О.О. Дезін в 1967 р. у праці [119]. Задачі з нелокальними умовами для операторних рівнянь другого порядку досліджено в роботі [120].

Подальший розвиток досліджень О.О. Дезіна продовжено в циклі робіт В.К. Романка [121–128], в яких, зокрема, для диференціально-операторних рівнянь m-го порядку з нелокальними умовами вигляду

$$\sum_{j=0}^{m-1}[\alpha_{kj}u^{(j)}(0)-\beta_{kj}u^{(j)}(T)]=0, \quad k\in\{1,\ldots,m\},$$

за допомогою операційного числення встановлено умови існування єдиного узагальненого розв'язку.

Напрямок досліджень, який розпочав О.О. Дезін, розвивався також у працях О.А. Макарова [129, 130], А.Х. Мамяна [131], М.Ю. Юнусова [132, 133], М.К. Балаєва і С.Я. Якубова [134] та ін.

Зокрема, М.Ю. Юнусов [132] розглянув задачу з малим параметром

$$\varepsilon\frac{du_\varepsilon(t)}{dt}-Au_\varepsilon(t)=f(t), \quad t\in(0,b),$$

$$\mu u_\varepsilon(0)-u_\varepsilon(b)=0.$$

За умов

$$|A(s)|\geq c>0, \quad |\mu-e^{bA(s)|\varepsilon|}|\geq\delta>0$$

доведено теореми існування та єдиності розв'язку, який зображається у вигляді ряду за власними функціями оператора A; вивчена поведінка розв'язку при

$\varepsilon \to 0$. А.Х. Мамян у праці [131] встановив, що існують такі диференціальні рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Загальна постановка нелокальних крайових задач була сформульована А.В. Біцадзе та О.О. Самарським [105,135] для рівнянь еліптичного і параболічного типів другого порядку з крайовими умовами, які пов'язують значення шуканої функції на частині S межі ∂Q розглядуваної області Q із значеннями в образі S при заданому диффеоморфізмі $\psi : S \to \overline{Q}$ (поверхні S на $\psi(S) \in \overline{Q}$), причому на $\partial Q \setminus \overline{S}$ задаються умови Діріхле. У працях [136–149] розглядалися як модельні задачі з конкретними відображеннями ψ, так і різні узагальнення поставленої в [135] задачі, в тому числі і для рівнянь високого порядку.

Розв'язність нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь вивчалася у працях [95–97, 99, 150–156].

Для одновимірного рівняння теплопровідності в області $\{(x,t) : \ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ за допомогою принципу екстремуму в [99] доведено єдиність, а методом інтегральних рівнянь встановлено умови існування розв'язку, що задовольняє умови

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(l,t) = \varphi_l(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = \omega(x)u(x,T), \quad \omega \in C(0,l), 0 < \omega(x) < 1.$$

Аналогічні результати для багатовимірного рівняння теплопровідності в циліндричній області отримано Н.Н. Шополовим в [157].

У праці [158] досліджено розв'язність крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T), \tag{1.18}$$

де Δ – оператор Лапласа за змінною x, коли коефіцієнт $a(t)$ в інтервалі $(0,T)$ набуває як додатних, так і від'ємних значень. Для такого типу рівнянь задача

Коші з початковою умовою при $t = 0$ некоректна. Дослідження, проведені в [158] показують, що для регулярної розв'язності початкової і крайових задач для рівняння (1.18) необхідно задавати нелокальні умови

$$u(x,0) + hu(x,T) = f(x),$$

де $h = \text{const}$.

Л.І. Корбут та М.І. Матійчук [185] за допомогою перетворення Фур'є знайшли розв'язок двоточкової нелокальної задачі

$$\partial u(t,x) = \Delta_x u(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Більш загальні нелокальні умови за часовою змінною для параболічних рівнянь були запропоновані в працях [159–163]. У цих роботах доведено існування розв'язку в класах гладких функцій.

Спектральні властивості нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь досліджувалися в монографії [164], яка містить також детальний огляд літератури з цього питання.

Питання про існування коректної двоточкової задачі для систем рівнянь

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.19}$$

досліджено в праці [130]. Матриця-функція $A(\sigma)$ належить до простору нескінченно диференційовних функцій степеневого зростання. У [130] доведено, що для системи (1.19) завжди знайдуться крайові умови вигляду

$$B\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(0,x) + C\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(T,x) = \varphi(x) \tag{1.20}$$

такі, що задача (1.19), (1.20) коректно розв'язна в просторі Соболєва-Слободецького; при цьому дається конкретний вигляд операторів $B\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$, $C\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$.

Праця І. Маценіса [166] присвячена крайовій задачі

$$u'(t) - Au(t) = 0, \quad t \in (0, a),$$

$$Bu|_{t=0} = Cu|_{t=a}, \tag{1.21}$$

яка розглядається в гільбертовому просторі $L_2([0,1], H)$ для обмежених операторів $A_1 = A + \lambda I$, B, C. У припущенні, що система власних векторів оператора A_1 утворює базу в H, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов (1.21) .

У праці [167] досліджена нелокальна задача для абстрактного рівняння Лява

$$u''(t) - A(u(t) + \lambda u''(t)) = f(t), \quad \lambda \geq 0, t \in [0, T],$$

із нелокальними умовами

$$B_1(\mu)u^{r-1}(0) - B_2(\mu)u^{r-1}(T) = \varphi_r, \quad r = 1, 2,$$

де A – самоспряжений і додатновизначений оператор, $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$ – лінійні неперервні оператори у гільбертовому просторі H; φ_1, $\varphi_2 \in H$, f, u – функції зі значеннями в H. В [168] розглянуто цю задачу в частинному випадку, коли $B_1(\mu) = 1$, $B_2(\mu) = \mu$.

Задача із умовами

$$u^{(j)}(0) - \mu_j u^{(j)}(T) = \varphi_j, \quad j \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\},$$

досліджена В.І. Чесаліним в [169] для диференціально-операторного рівняння

$$\prod_{r=1}^{m}(u''(t) + A_r u(t)) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

де оператори A_r – самоспряжені, додатновизначені і попарно комутують.

Розвитком роботи [167] є результати робіт [170–172], де досліджуються нелокальні задачі для ряду важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У працях П.І. Каленюка, З.М. Нитребича та їх учнів [77, 173, 174] у шарі $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ застосовується операційний метод (названий диференціально-символьним) при дослідженні задач з нелокальними крайовими умовами за часовою змінною для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними першого порядку за часовою змінною і нескінченного порядку за просторовими координатами. За допомогою цього методу виділено класи існування та єдиності розв'язків задач, а також побудовано розв'язки в явному вигляді; їх подано як результат дії диференціальних виразів нескінченного порядку на певні аналітичні функції векторних параметрів.

Дослідженню в банаховому просторі крайової задачі для диференціально-операторного рівняння другого порядку

$$u''(t) = Au'(t) + g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$L_i u = \alpha_{i1} u(0) + \alpha_{i2} u'(0) + \beta_{i1} u(T) + \beta_{i2} u'(T) = f_i, \quad i = 1, 2,$$

присвячена праця [175]. Отримано необхідну умову коректності: $\sigma(A) \cap A = \emptyset$, де $\sigma(A)$ – спектр оператора A, Λ – множина власних значень скалярної задачі $y''(t) = \lambda y(t)$, $L_1 y = L_2 y = 0$.

Для рівняння

$$y^m u_{xx} - u_y y - b - 2y^m u = 0$$

в прямокутнику $\{(x, y) \Big| 0 < x < 1, 0 < y < T\}$, де $m > 0$, $b \ge 0$, $T > 0$, методом спектрального аналізу в [176] доведено теореми єдиності та існування розв'язку задачі з початковими умовами:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in [0, 1]$$

і нелокальними умовами

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0,$$

або

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad u(1, y) = 0$$

при $y \in [0,T]$. Розв'язки задач побудовано у вигляді суми біортогонального ряду.

Для рівняння мішаного типу

$$(1-\operatorname{sgn} t)u_{tt} - (1-\operatorname{sgn} t)u_t = 2u_{xx}$$

в області $\{(x,t)\Big|\,0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, де α, β – задані додатні числа, у праці [177] вивчена задача з умовами

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta,$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Встановлено критерій єдиності розв'язку, який побудований у вигляді суми ряду Фур'є, а також стійкість розв'язку за нелокальною умовою $\varphi(x)$.

Задачі з нелокальними умовами виникають у теорії періодичних хвилеводів. У праці [178] досліджується диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}\Big(p(t)\frac{dz}{dt}\Big) + Q(t)z + f(t,z) = 0, \quad 0 < t < \omega,$$

у гільбертовому просторі H з умовами

$$z(\omega) = \rho z(0), \quad z'(\omega) = \rho z'(0), \quad |\rho| = 1.$$

Припускається, що для кожного $t \in [0,\omega]$ оператор $p(t)$ обмежений і додатно визначений в H, $f(t,z)$ – обмежений оператор (при кожному $t \in (0,\omega)$), а оператор $Q(t)$ має, взагалі кажучи, залежну від t область визначення. Тут доведено розв'язність вказаної задачі, яка є еквівалентною існуванню стаціонарної точки деякого функціоналу.

Критерії коректності нелокальних крайових задач у смузі $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0,T]$ для диференціально-операторного рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(-iD_x)u, \tag{1.22}$$

наведені в працях [179, 180]. Зокрема, у випадку двоточкової за часом задачі для рівняння (1.22) з умовою $Au(x,0) - u(x,T) = u_0(x)$ критерій коректності в класі функцій степеневого зростання формулюється у вигляді виконання умови $A - e^{TP(\lambda)} \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ (тут $A = A(Ix)$, $A(\sigma)$ – поліном зі сталими коефіцієнтами).

У працях [181, 182] І.Я. Кміть дослідив класичні та узагальнені розв'язки нелокальних задач для майже лінійних і квазілінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі (зокрема, двоточкова задача) досліджені в [183]. Побудовано функції Гріна відповідних задач, досліджено їхні властивості (зокрема, встановлені оцінки похідних цих функцій), знайдено зображення розв'язків у вигляді об'ємних потенціалів.

У книзі [184] М.І. Матійчуком встановлено коректну розв'язність двоточкової крайової задачі для B-параболічного рівняння з оператором дробового диференціювання, який відповідає сингулярному параболічному оператору Бельтрамі-Лапласа на поверхні із класу Діні.

1.4. Багатоточкові задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь

Класичні нелокальні задачі виникли з практики, адже різноманітні природні процеси (поширення електромагнітних хвиль, коливання різних систем, вологоперенесення, тощо) моделюються як багатоточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними з нелокальними (в тому числі періодичними) умовами.

За останні десятиліття нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчали А.М. Нахушев, В.М. Борок, А.А. Кеферов, М.М. Шополов, А.А. Макаров, А.К. Ратині, О.А. Самарський, О.Л. Скубачевський, А.І. Прилепко та ін., виділяючи переважно випадок коректно поставлених задач. У книзі Б.Й. Пташника та його учнів [76] досліджено коректність крайових задач з нелокальними параболічними умовами за виділеною змінною для широких класів лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку. Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі у всьому просторі та в циліндричній області досліджені Матійчуком М.І. в [183]. У праці [186] досліджена двоточкова задача для псевдодиференціального рівняння параболічного типу з оператором, побудованим за негладким символом, незалежним від просторових змінних, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного порядку, а у [187, 188] вивчається $(m+1)$-точкова задача $(m \geq 2)$ для вказаного псевдодиференціального рівняння. Зазначимо, що методика дослідження такої задачі відрізняється від дослідження двоточкової задачі, а простори узагальнених функцій описані у працях [38, 52, 189]. У праці [190] встановлена класична розв'язність двоточкової задачі, коли символ псевдодиференціального оператора (ПДО) є сталий і не містить молодших членів.

Нелокальні задачі для випадку сталого і змінного по t символа анонсовані в [191–196]. Зображення розв'язку нелокальної розривної задачі Діріхле для модельного псевдодиференціального рівняння анонсовані в [197]. Результати дослідження задачі Коші та нелокальних багатоточкових крайових задач для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком анонсовані в [198]. Нелокальна задача Неймана для параболічного ПДР з негладким неоднорідним символом досліджена в [199].

Цікавим є приклад двоточкової задачі [200]

$$D_t^2 u - 2D_t D_x^2 u + 2D_x^4 u = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T),$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = \varphi_1(x), \\ D_t u|_{t=0} - \mu D_t u|_{t=T} = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

в якому показано, що при $|\mu| < 1$ існує єдиний розв'язок цієї задачі.

У підрозділі 3.1 дисертації наведені результати побудови та дослідження фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (одноточкової задачі) для рівномірно параболічних за Петровським систем ПДР вигляду

$$u_t(t,x) + \sum_{k=0}^{p} (A_k u)(t,x) = f(t,x), \tag{1.23}$$

$$(t,x) \in \Pi_T \equiv \{(t,x) \,\Big|\, x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le T\},$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.24}$$

де A_k – матричний ПДО з символом a_k: $\overline{\Pi}_T \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to C_{qq}$, $0 \le k \le p$. Тут і далі через C_{pq} позначається сукупність усіх матриць розміру $p \times q$, елементами яких є комплексні числа, а через S^{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

Встановлена класична розв'язність задачі (1.23), (1.24) в [204, 205].

Зазначимо, що символи ПДО можуть бути негладкими при $\sigma = 0$, тому для дослідження задачі Коші (1.23), (1.24) і нелокальних задач не можна застосовувати стандартну техніку параболічних ПДО. Для одного рівняння перші результати про розв'язність задачі Коші були одержані в [31–38]. Однак повністю коректні, а в деяких випадках і остаточні, результати були одержані для одного рівняння в [9, 29, 32], де вперше ПДО трактуються як ГСІ. Зазначимо також, що у п. 3.1.4 для квазілінійного параболічного рівняння з псевдодиференціальним оператором доведено теорему про глобальну розв'язність задачі Коші [206]. Зауважимо, що подібна задача досліджувалася в [218].

У підрозділі 3.2 наведені результати побудови та дослідження розв'язків нелокальної (багатоточкової) задачі для рівномірно параболічних за Петровським рівнянь вигляду (1.23).

1.5. Задача Коші та нелокальні задачі для квазілінійних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргументу

Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється (ДРВА), – це диференціальні рівняння, в які невідома функція і її похідні входять, взагалі кажучи, при різних значеннях аргументу. Такі рівняння часто зустрічаються при описі різних процесів та проблем теорії автоматичного керування, автоматики і телемеханіки, радіолокації, радіонавігації, електрозв'язку, теоретичної кібернетики, ракетної техніки, термоядерного синтезу, біології, економіки і медицини. Окремі рівняння із звичайними похідними з'явилися у працях Кондорсе (1771 р.), а систематичне вивчення таких рівнянь почалося у працях А.Д. Мишкіса, Е.М. Райта, Р. Беллмана у зв'язку з потребами прикладних наук (див. [249] і наведену там бібліографію). У праці [220] наведено короткий огляд методів дослідження просторових нелокальних ефектів, що виникають за рахунок запізнення в дифузійних моделях деякої популяції, поміщеної в обмежену або необмежену область. Широке їх застосування сприяло збільшенню інтересу до теорії цих рівнянь, що виявилося у великій кількості опублікованих робіт, присвячених ДРВА. Класичними в області ДРВА стали праці школи українських математиків Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.М. Перестюка, В.П. Рубаника, Д.І. Мартинюка, В.В, Маринця, Дж. Хейла, А.Д. Мишкіса, А.Е. Ельсгольца, Н.А. Азбелева, С.Б. Норкіна та ін. Дослідження задачі Коші для параболічних диференціальних рівнянь викладені в класичних монографіях [251, 252].

Теорія класичних розв'язків задачі Коші для B-параболічних рівнянь побудована у працях М.І. Матійчука, В.В. Крехівського (див. [183] і наведену там біліографію), С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, В.П. Лавренчука, І.І. Веренич та ін. Задача Коші для таких рівнянь у класах розподілів та ультрарозподілів вивчалася Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, І.В. Житарюком, В.П. Лавренчуком та ін. [32, 38].

Для параболічних псевдодиференціальних рівнянь із негладкими символами, визначених С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем, рівняння з відхиленням аргумента розглядаються вперше і викладені у працях [231, 250, 253–256].

У даному розділі для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і з відхиленням аргумента методом кроків доведена розв'язність задачі Коші та нелокальних задач вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = f(x,t,\mathcal{B}_k u(x,t-h,t+T_k-h)), \tag{1.25}$$

$h > 0$ – стала, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > h$, $k \in \{0\} \cup \{\mathbb{N}\}$, $0 \le k \le m$,

$$\mathcal{B}_k u(x,t,t+T_k)|_{0<t\le h} = u_k(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < T_1 << T_2 << \cdots << T_m, \tag{1.26}$$

$0 \le k \le m$, f, $u_k(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t < 0 \le h$, $0 \le k \le m$, – відомі і неперервні функції своїх аргументів, оператор A у п. 5.1 є диференціальним оператором з одновимірним оператором Бесселя, що діє по змінній x_n, а у п. 5.2 оператор A є ПДО з негладким символом, визначений раніше.

При цьому

$$\mathcal{B}_0 u(x,t)|_{0<t\le h} \equiv u(x,t)|_{0<t\le h} = u_0(x,t)$$

є умовою Коші;

$$\mathcal{B}_1 u(x,t)|_{0<t\le h} \equiv (\mu u(x,t) - \nu u(x,t+T))|_{0<t\le h} = u_1(x,t), T >> h, \mu \ge \nu > 0$$

є двоточковою умовою;

$$\mathcal{B}_m u|_{0<t\le h} \equiv \Big(\mu u(x,t) - \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(x,t+T_k)\Big)|_{0<t\le h} = u_k(x,t),$$

$$\mu > \sum_{k=1}^{m} \nu_k > 0, 0 < T_1 << T_2 << \cdots << T_m$$

є багатоточковою умовою.

У п. 5.1 встановлена теорема про коректну розв'язність задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргументу і цей результат опублікований у [250].

У п. 5.2 для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і відхиленням аргументу методом кроків доведена розв'язність задачі Коші, а у пп. 5.3–5.4 даний результат встановлено для відповідних нелокальних задач. Результати цих підрозділів опубліковані в [231, 250, 253–256, 273].

1.6. Пряма і обернена крайові задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь

Задачі про визначення змінного коефіцієнта та правої частини для рівнянь, що містять часову та просторові змінні, за відомими значеннями їхніх розв'язків у фіксованих точках простору та у всі моменти часу прийнято називати оберненими. Для лінійних диференціальних рівнянь, наприклад, обернена задача може полягати в тому, щоб визначити частину або навіть всі коефіцієнти такого рівняння. Обернені задачі називають n-вимірними, якщо всі шукані функції залежать від n змінних. Кожне рівняння математичної фізики, для якого формулюється обернена задача, є математичною моделлю реального фізичного процесу. Тому для прикладних наук є природною така постановка оберненої задачі: з відомого класу математичних моделей, що містять невідомі параметри, виділити ту модель, яка відповідає заданій інформації про реальне явище. Щоб відновити параметри потрібно мати додаткову інформацію про досліджуване явище (процес). Цю додаткову інформацію називають умовою перевизначення. Обернені задачі мають широке застосування в екології, біології, медицині, космічних дослідженням, при визначенні структури земної кори за сейсмічними даними, металургії, економіці, оскільки дозволяють шляхом математичного моделювання визначати фізичні властивості різних матеріалів без проведення експериментів, а особливо тоді, коли провести такі експерименти важко, або навіть неможливо.

Основні теоретичні дослідження обернених задач, тобто задач, у яких за відомими наслідками відновлюються причини, що їх породили, інтенсивно почали розвиватися у другій половині минулого сторіччя у зв'язку з потребами науки і техніки: визначення джерел забруднення води і повітря в навколишньому середовищі, визначення джерела тепла в процесах теплопровідності та ін. Зокрема, методи обернених задач у фізиці висвітлені в [233].

В [221] наводиться історія вивчення обернених задач для диференціальних рівнянь, починаючи від першої оберненої задачі – кінематичної задачі сейсміки, яка в одновимірному випадку вперше була розв'язана Герглотцем.

Підсумовуючою роботою Львівської школи з теорії обернених задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь є монографія [236] керівника цієї школи М.І, Іванчова, що базується на результатах автора і такої, що суттєво розширяє та завершує результати його учнів.

Коефіцієнтні обернені задачі, як теоретичні, так і практичні, де визначаються невідомі коефіцієнти рівняння за відомою інформацією про розв'язок, є актуальними і тепер. Для рівняння теплопровідності одним з перших дослідників таких задач був B.F. Jones [234, 235]. Глобальне існування та єдиність невідомого коефіцієнта в параболічному рівнянні другого порядку досліджене в [236], керівником Львівської школи з обернених задач М.І. Іванчовим. Для квазілінійних рівнянь є відомими його праці [237–239], з нелокальними умовами [240].

Серед нових праць є [241], де вивчається обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею, а також праця [242], де проведений числовий експеримент для значного відновлення джерела тепла.

В доповненні викладені результати дослідіження прямої та оберненої задач, що містять ПДО, побудований за неоднорідним негладким у нулі та залежним від часової змінної t символом, та такий, що містить змінний коефіцієнт біля шуканої функції. Одним з ефективних методів побудови аналітичних розв'язків прямих задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є метод гібридних інтегральних перетворень, розпочатий в [261]. Використовуючи [223], тут досліджується пряма та обернена задачі для вказаного класу ПДР із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є – класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

Обернена задача для ППДР з негладким символом вперше розглянута в працях Я.М. Дріня [247, 248].

Необхідно відмітити, що питання розв'язності крайових задач, що містять спеціальні ПДО, та поведінка їх розв'язків досліджуються в школі академіка А.А. Чикрія [243–246].

Відмітимо також, що дослідження майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих та диференціальних рівнянь у певних банахових просторах функцій проведені В.Ю. Слюсарчуком у працях [257–259].

Розділ 2.

Огляд результатів дисертації

Основні результати дисертації викладені в розділах 3–5 та додатку.

У розділі 3 побудовано та досліджено ФМР і доведено розв'язність задачі Коші (одноточкової задачі) для систем ППДР з негладкими однорідними символами (підрозділ 3.1) та нелокальних задач у скалярному випадку (підрозділи 3.2–3.5).

Принципово важливим є запроваджене А.Н. Кочубеєм тлумачення ПДО через ГСІ. При цьому за відомим символом ПДО будується символ ГСІ і навпаки. Теорія ГСІ розроблена в працях С.Г. Самко і вони істотно розширюють клас ПДО (останні є, фактично, частковим випадком ГСІ). У підрозділі 3.1 ми поширюємо це поняття на матричний ГСІ.

У підрозділі 3.1 наведені результати побудови та дослідження ФМР задачі Коші (одноточкової задачі (1.23), (1.24)) для рівномірно параболічних за Петровським систем ПДР [205]. Нехай виконуються умови теореми 3.1 (п. 3.1.2). Тоді існує ФМР задачі Коші (1.23), (1.24)

$$\Gamma(t,x;\xi,\tau) = Z(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

для якої виконуються оцінки

$$\|D_x^{æ} Z(t-\tau,x-\xi;\tau,\xi)\| \le C(t-\tau)((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0-|æ|}, \quad |æ| \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$\|D_t^1 Z(t-\tau,x-\xi;\tau,\xi)\| \le C((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0},$$

$$\|W(t,x;\tau,\xi)\| \le C\Big((t-\tau)^{\frac{\gamma_0+\lambda}{\gamma_0}}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0} +$$

$$+(t-\tau)\sum_{k=1}^{m+1}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_k}\Big), \quad \gamma_{m+1} \equiv \gamma_0 - \lambda.$$

За умов 1) – 5) розв'язок задачі (1.23), (1.24) існує і записується у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_T.$$

У підрозділі 3.2 спочатку досліджується задача Діріхле.

Нехай $T > 0$, $\mu > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ – числові параметри, $\Pi \equiv \{(t,x) \Big| 0 < t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$. Припустимо, що однорідна порядку $\gamma > 0$ функція a_γ: $\mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ задовольняє умови 1), 2), а функції φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ та f: $\Pi \to \mathbb{R}$ – умови 3) – 4) відповідно (п. 3.2.1).

Для задачі Діріхле

$$u_t(t,x) + A_\gamma u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi, \gamma > 0, \tag{2.1}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

де A_γ – ПДО з символом $a_\gamma(\sigma)$, розв'язок записується у вигляді

$$u(t,x) = I_1 + \mu I_2 + I_3,$$

де

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1,$$

$$I_2 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,T,x-\xi,\mu) f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1,$$

$$I_3 = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu) f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1,$$

$$G(t,T,x,\mu) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - A(\sigma)t\}(\mu - \exp\{-A(\sigma)T\})^{-1} d\sigma.$$

У підрозділі 3.3 досліджується багатоточкова задача (3.81), (3.82) зі змінним по t символом, дані якої задовольняють умови (1.5) п. 3.3.1, а у підрозділі 3.4 наводяться ілюстративні приклади.

У підрозділі 3.5 вивчається задача з нелокальними псевдодиференціальними умовами, опублікована у праці [209].

У розділі 4 об'єктом досліджень є еволюційні ПДР скінченного та нескінченного порядків з точково-негладкими або аналітичними символами в локально опуклих топологічних просторах, які є індуктивними або проективними границями зліченно-нормованих просторів нескінченно диференційовних функцій. Підбір відповідних просторів вимагає окремих досліджень, їх топологія визначається властивостями функції-символа оператора рівняння. Усі ці простори, як правило, досконалі, тобто є просторами, усі обмежені множини яких компактні. Такі простори володіють певними властивостями, що не мають місця в нескінченно вимірних нормованих просторах. Наприклад, у досконалому просторі сильна збіжність співпадає зі слабкою, такі простори рефлексивні; обмежені множини в просторі X', топологічно спряженому до досконалого простору X, також компактні.

Для зазначених еволюційних рівнянь ставиться умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \quad \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}, t_0 = 0, \tag{2.3}$$

$$\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T], m \in \mathbb{N},$$

з граничною функцією f, яка є елементом різних класів гладких функцій або узагальненою функцією – лінійним неперервним функціоналом на певному локально-опуклому просторі X нескінченно диференційовних функцій. Якщо $f \in X'$, то умова (2.3) , яка задає нелокальну багатоточкову за часом задачу для розглядуваного еволюційного рівняння, розуміється як граничне співвід-

ношення
$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lim_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in X.$$
Розв'язок багатоточкової задачі дається у вигляді згортки $G(t,\cdot) * f$, де $G(t,\cdot)$ – фундаментальний розв'язок задачі, в обох випадках: $f \in X$ чи $f \in X'$; при цьому $G(t,\cdot)$ є елементом основного простору X (при кожному $t > 0$). Елементом цього ж простору є і розв'язок $u(t,\cdot)$ відповідної багатоточкової задачі (при кожному $t > 0$). Простори основних функцій підбираються так, що досліджувані багатоточкові задачі є коректно розв'язними.

У підрозділах 4.2, 4.3 розглядається еволюційне рівняння
$$\partial u/\partial t + Au = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$
де A – ПДО з точково-негладким однорідним символом з порядком однорідності $\gamma > 1$, який визначений в просторі основних функцій Φ. Цей простір – індуктивна границя банахових просторів, елементами яких є нескінченно-диференційовні функції, що спадають на нескінченності степеневим чином. Елементом цього простору є і фундаментальний розв'язок $G(t,\cdot)$ нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (2.4). Зазначимо, що окремо розглядається двототочкова задача для рівняння (2.4) (випадок $m = 1$) та багатоточкова задача (випадок $m \geq 2$). Це зумовлено тим, що методика досліджень багатоточкової задачі ($m \geq 2$) відрізняється від методики дослідження двоточкової задачі, яка базується на зображенні фундаментального розв'язку двоточкової задачі у вигляді ряду, членами якого є фундаментальні розв'язки задачі Коші для рівняння (2.4). У випадку $m \geq 2$ основним засобом дослідження фундаментального розв'язку є формула Фаа де Бруно диференціювання складної функції.

У підрозділі 4.4 за функцією $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ та ПДО A будується псевдодиференціальний оператор "нескінченного порядку" $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$. При виконанні певних обмежень на функцію f оператор $f(A)$ подається у вигляді $f(A) = F^{-1}[f(\sigma)F]$, де F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. У цьому ж підрозділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння

$$\partial u/\partial t + f(A)u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Встановлені властивості ФРБЗ для рівнянь (2.4), (2.5) як абстрактних функцій параметра t із значеннями в просторі Φ, зокрема, доведено, що в просторі Φ' справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} G(t, \cdot) = \delta, \quad \{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty).$$

Φ' – простір узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца.

У підрозділі 4.5 за певною схемою будується псевдодиференціальний оператор у гільбертовому просторі 2π-періодичних функцій $H = L_2[0, 2\pi]$, який є невід'ємним самоспряженим оператором і трактується як оператор згортки. Цей оператор має суто дискретний спектр з єдиною граничною точкою у нескінченності. При цьому позитивні та негативні простори, які відповідають такому оператору, вкладаються в простір формальних рядів Фур'є $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$, теорія яких побудована М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук. Як і у підрозділах 4.2 – 4.4, досліджені властивості функції, яка є аналогом ФРБЗ у неперіодичному випадку, доведена теорема про коректну розв'язність нелокальної багатоточкової задачі для еволюційного рівняння із зазначеним ПДО, знайдено зображення розв'язку у вигляді певного тригонометричного ряду, який збігається із згорткою ФРБЗ з граничною функцією. Знайдено необхідні й достатні умови, які характеризують клас аналітичних періодичних функцій, що містить відомі класи Жевре $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, ультрадиференційовних періодичних функцій.

У підрозділі 4.6 знайдено умови, при виконанні яких у просторах S_α^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, що відносяться до просторів типу S, введених І.М. Гельфандом та Г.Е. Шиловим, коректно визначений оператор диференціювання "нескінченного порядку" вигляду $\varphi(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ ($\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ і є мультиплікатором у просторі S_β^α). З'ясовано, що $\varphi(D)$ можна розуміти як ПДО з певним аналітичним символом. Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t = \varphi(D)u$ з граничною функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів Жевре $(S_\alpha^\beta)'$, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком.

У випадку розглянутих еволюційних рівнянь встановлено, що розв'язок відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі володіє властивістю локального покращення збіжності; ця властивість вивчається у випадку, коли гранична функція f є узагальненою функцією. Така ситуація є природною, оскільки f, як звичайна функція, може мати особливість в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію в тому чи іншому просторі узагальнених функцій. На тій частині межі області, де f співпадає з гладкою функцією, розв'язок $u(t, \cdot)$ може збігатися до f у звичайному, а не в слабкому розумінні (рівномірно на кожному компакті, що міститься у відповідній області). Знайдено простори узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів (простори граничних функцій), для яких розв'язок відповідної нелокальної багатоточкової задачі володіє вказаною властивістю локалізації.

У розділі 5 досліджуються задача Коші та нелокальні задачі для квазілінійних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Зокрема, для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і з відхиленням аргументу методом кроків доведена розв'язність задачі Коші та нелокальних задач вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = f(x,t,\mathcal{B}_k u(x,t-h,t+T_k-h)),$$

$h > 0$ – стала, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > h$, $k \in \{0\} \cup \{\mathbb{N}\}$, $0 \le k \le m$,

$$\mathcal{B}_k u(x,t,t+T_k)|_{0<t\le h} = u_k(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < T_1 << T_2 << \dots << T_m,$$

$0 \le k \le m$, f, $u_k(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t < 0 \le h$, $0 \le k \le m$, – відомі і неперервні функції своїх аргументів, оператор A у п. 5.1 є диференціальним оператором з одновимірним оператором Бесселя, що діє по змінній x_n, а у пп. 5.2–5.4 оператор A є ПДО з негладким символом, визначений раніше.

При цьому

$$\mathcal{B}_0 u(x,t)|_{0<t\le h} \equiv u(x,t)|_{0<t\le h} = u_0(x,t)$$

є умовою Коші;

$$\mathcal{B}_1 u(x,t)|_{0<t\le h} \equiv (\mu u(x,t) - \nu u_1(x,t+T))|_{0<t\le h} = u_1(x,t), T >> h, \mu \ge \nu > 0$$

є двоточковою умовою;

$$\mathcal{B}_m u|_{0<t\le h} \equiv \Big(\mu u(x,t) - \sum_{k=1}^{m} \nu_k u_k(x,t+T_k)\Big)|_{0<t\le h} = u_m(x,t),$$

$$\mu > \sum_{k=1}^{m} \nu_k > 0, 0 < T_1 << T_2 << \dots << T_m$$

є багатоточковою умовою.

У підрозділі 5.1 встановлена теорема про коректну розв'язність задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргументу і цей результат опублікований у [254].

У підрозділі 5.2 для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і відхиленням аргументу методом кроків доведена розв'язність задачі Коші. Результати цих підрозділів опубліковані в [250, 254–256, 260].

У підрозділі 5.3 наводиться модельний приклад, а у підрозділі 5.4 досліджується нелокальна задача, опублікована в [273].

У додатку висвітлені результати дослідження прямої та оберненої задач, що містять ПДО, побудований за неоднорідним негладким у нулі та залежним від часової змінної t символом, та такий, що містить змінний коефіцієнт біля шуканої функції. Одним з ефективних методів побудови аналітичних розв'язків прямих задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є метод гібридних інтегральних перетворень, розпочатий в [261]. Використовуючи [37], тут досліджується пряма та обернена задачі для вказаного класу ПДР із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є – класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною. Результати викладені у додатку і опубліковані в працях [223, 247, 248] і анонсовані в [263].

Наведені в дисертації результати одержані за допомогою методів теорії просторів основних та узагальнених функцій, класичних методів теорії задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь та систем, методу дослідження параметрикса параболічних ПДР з однорідними символами, методів досліджень фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь, що ґрунтуються на використанні перетворення Фур'є та формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, методів досліджень М.Л. Горбачука та В.І. Горбачук з теорії формальних рядів Фур'є, методу кроків.

Розділ 3.

Багатоточкова задача для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими однорідними символами

3.1. Задача Коші для рівномірно параболічних систем псевдодиференціальних рівнянь

3.1.1. Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами

Принципово важливим є запропоноване в працях [29, 37] тлумачення ПДО як ГСІ [7, 202]. Зазначимо, що результати даного пункту опубліковані в [204, 205], де узагальнені ці поняття на випадок систем псевдодиференціальних рівнянь.

Гіперсингулярні інтеграли і псевдодиференціальні оператори. Нехай функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{C}_{p1}$ і $\Omega\colon \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \to \mathbb{C}_{pp}$ є неперервними і обмеженими. Вираз вигляду

$$(D^\alpha_\Omega f)(x) \equiv d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)\Big(\Delta^l_h f\Big)(x)|h|^{-(n+\alpha)}dh, \qquad (3.1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < l \in \mathbb{N}$, d – деяка стала, яка залежить від чисел n, l, α і яку виберемо нижче, називається матричним ГСІ порядку α з характеристикою Ω.

Приклад. Нехай $f_\xi(x) = (e^{i(x,\xi)})_{p1}$ – матриця-стовпчик висоти p. Тоді

$$(D^\alpha_\Omega f_\xi)(x) = d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)(1 - e^{-i(\xi,h)})^l (e^{i(x,\xi)})_{p1}|h|^{-(n+\alpha)}dh \equiv \tilde{\Omega}(x,\xi)f_\xi(x),$$

де матриця

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)(1 - e^{-i(\xi,h)})^l |h|^{-(n+\alpha)}dh$$

називається символом матричного ГСІ D^{α}_{Ω}.

Якщо $\Omega(x,\sigma) \equiv E$, то сталу d можна вибрати так, щоб $\tilde{\Omega}(x,\xi) = E|\xi|^{\alpha}$.

Покладемо в (3.1)

$$d = d_{n,l}(\alpha) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - e^{-i\xi_1})^l |\xi|^{-(n+\alpha)} d\xi, \xi \equiv (\overrightarrow{e}_1, \xi), \overrightarrow{e}_1 \equiv (1, 0, \dots, 0). \quad (3.2)$$

Правильні такі твердження.

1^0. Матричний ГСІ зі сталою характеристикою $\Omega \equiv E$

$$D^{\alpha}_{E} f = d^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(\Delta^l_y f)(x) |y|^{-(n+\alpha)} dy \quad (3.3)$$

не залежить від вибору $l > \alpha$ і є означенням операції

$$F^{-1}_{\xi \to x}[E|\xi|^{\alpha} F_{x \to \xi}[f]],$$

де

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \equiv F^{-1}_{\xi \to x}[\hat{f}(\xi)],$$

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx \equiv F_{x \to \xi}[f(x)],$$

$f \in (S(\mathbb{R}^n))_{p1}$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір основних функцій.

2^0. Функція $d_{n,l}(\alpha)$ є аналітичною функцією аргументу $\alpha > 0$ і обчислюється за формулою

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\alpha} \Gamma\Big(1 + \frac{\alpha}{2}\Big) \Gamma\Big(n + \frac{\alpha}{2}\Big) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C^k_l k^{\alpha}$$

при непарних α і

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\alpha-1} \Gamma\Big(1 + \frac{\alpha}{2}\Big) \Gamma\Big(n + \frac{\alpha}{2}\Big) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C^k_l k^{\alpha}$$

при парних α. Зокрема, $d_{n,l}(\alpha) = 0$ при $\alpha = 1, 2, \dots, l-1$ [7, 202].

3^0. Нехай α – неціле число. Матричний ГСІ (3.1) збігається абсолютно при $l > \alpha$ і за умови, що функція f має обмежені похідні до порядку $[\alpha]+1$ включно. Це твердження випливає із формули

$$(\Delta_h^l f)(x) = \sum_{|r|=\mu} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-kh)^r(-1)^k}{r!} C_l^k (D^r f)(x - \theta_k kh),$$

де $0 < \theta_k < 1$, $l \geq \mu$ [29, 202].

Якщо характеристика $\Omega(x,\sigma)$ парна по σ, то ГСІ (3.1) визначений і при $l > 2\left[\dfrac{\alpha}{2}\right]$, у відповідності з формулою із [29, 202]

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(D_{\Omega,\varepsilon}^\alpha f) = -\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{k=1}^{\frac{l-1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \frac{(\Delta_h^{l+1} f)(x+kh)dh}{|h|^{n+\alpha}} -$$

$$-\frac{1}{2d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \frac{(\Delta_h^{l+1} f)\Big(x + \frac{l+1}{2}h\Big)dh}{|h|^{n+\alpha}}, \tag{3.4}$$

де $l+1 > \alpha$.

Якщо α – ціле парне число, то матричний ГСІ $D_\Omega^\alpha f$, як і в скалярному випадку [29, 202] є матричним диференціальним оператором порядку α. Якщо α – непарне число, то при $l > \alpha$ інтеграл в (3.1) тотожно дорівнює нулю для довільної функції f [29, 202]. У цьому випадку ГСІ визначається лише для парної характеристики Ω формулою (3.4) при $l = \alpha$.

4^0. Між ГСІ та ПДО існує такий зв'язок.

Якщо дано матричний ГСІ, то запишемо його у вигляді матричного ПДО, припустивши, що $f \in (S(\mathbb{R}^n))_{p1}$. Тоді

$$(D_\Omega^\alpha f)(\xi) = \frac{(2\pi)^{-n}}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big)|h|^{-(n+\alpha)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}(1 - e^{-i(h,\xi)})^l \hat{f}(\xi)d\xi \right) dh =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \tilde{\Omega}(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{3.5}$$

Розглянемо ПДО вигляду

$$(Au)(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} a(t,x,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi. \tag{3.6}$$

Зв'язок між ПДО та ГСІ здійснюється за допомогою зображення елементів матричного символу a через сферичні функції [29, 32, 33, 37].

Сферичною гармонікою порядку $\nu \geq 0$ називається звуження на сферу S^{n-1} фіксованого однорідного гармонічного полінома порядку ν. Множина всіх сферичних гармонік порядку ν утворює скінченновимірний підпростір H_ν в $L_2(S^{n-1})$. Нехай $\delta_\nu \equiv \dim H_\nu$. Для кожного ν виберемо в H_ν ортонормований базис $\{X_{\nu\mu} \,\Big|\, \mu = 1, \ldots, \delta_\nu\}$. Функція $X_{\nu\mu}$ є парною при парному ν і непарною при ν непарному. Система функцій $X_{\nu\mu}$ повна в $L_2(S^{n-1})$ і правильні оцінки

$$\delta_\nu \leq c_1 \nu^{n-2}, \quad |X_{\nu\mu}(\sigma)| \leq c_2 \nu^{\frac{n-1}{2}}. \tag{3.7}$$

Якщо $\varphi \in C^{2r}(S^{n-1})$, то для її коефіцієнтів Фур'є

$$\varphi_{\nu,\mu} = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\sigma)\overline{X_{\nu\mu}(\sigma)}d\sigma$$

правильна оцінка

$$|\varphi_{\nu\mu}| \leq c_{n,r} M \nu^{-2r}, \tag{3.8}$$

де $M \equiv \sup\{|D^x\varphi(\sigma)| \,\Big|\, \sigma \in S^{n-1}, |x| \leq 2r\}$.

Позначимо через $\tilde{X}_{\nu\mu}(\sigma)$ символ скалярного ГСІ $D^\alpha_{X_{\nu\mu}}$. Якщо число α неціле або α ціле непарне і ν парне, то

$$\tilde{X}_{\nu\mu}(\sigma) = |\sigma|^\alpha \lambda(\nu,\alpha) X_{\nu\mu}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big),$$

де

$$\lambda(\nu,\alpha) \equiv E_{\nu,\alpha} i^\nu \frac{\Gamma\Big(\frac{n+\alpha}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{\alpha}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{\alpha-\nu}{2}\Big)},$$

$E_{\nu,\alpha} \equiv (-1)^\nu \dfrac{\cos\frac{\alpha+\nu}{2}\pi}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$ при нецілому α, $E_{\nu,\alpha} \equiv (-1)^{\frac{\nu}{2}}$ при цілому непарному α.

Розкладемо матричний символ a_k в ряд за системою сферичних гармонік

$$a_k(t,x,\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\delta_\nu}c_{k\nu\mu}(t,x)X_{\nu\mu}(\sigma),\quad (t,x)\in\Pi_T,\sigma\in S^{n-1}.$$

Розглянемо функції

$$\Omega_k(t,x,\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_\nu}\frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)}X_{\nu\mu}(\sigma),\quad (t,x)\in\Pi_T,\sigma\in S^{n-1}. \tag{3.9}$$

Перевіримо, що ряд з (3.9) рівномірно збігається. Згідно оцінок (3.8) маємо, що $|c_{k\nu\mu}(t,x)|\le c\nu^{-N+1}$. Оскільки $\left|\cos\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)\pi\right|$ дорівнює $\left|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right|$ або $\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|$ залежно від парності ν, то

$$|\lambda^{-1}(\nu,\alpha)|\le C\Big|\Gamma\Big(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{\nu-\alpha}{2}\Big)\Big|.$$

Якщо α – ціле непарне число, то $c_{k\nu\mu}=0$ для непарних ν. Скористаємося формулою

$$\Gamma\Big(1-\frac{\nu-\alpha}{2}\Big)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)\pi\Gamma\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)},$$

де величина $\left|\sin\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)\pi\right|$ дорівнює $\left|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right|$ або $\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|$ і відмінна від нуля, а

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)}\right|\le C\nu^{\frac{n}{2}+\alpha},$$

то

$$|\lambda^{-1}(\nu,\alpha)|\le C\nu^{\frac{n}{2}+\alpha}.$$

Врахувавши оцінки (3.7), дістанемо нерівність

$$\Big\|\sum_{\mu=1}^{\delta_\nu}\frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)}X_{\nu\mu}(\sigma)\Big\|\le C\nu^{-N+2n+\alpha-2},$$

звідки випливає, що ряд з (3.9) рівномірно збігається.

Розглянемо ГСІ – оператор $D^{\alpha}_{\Omega_k}$. Його символ

$$\tilde{\Omega}(t,x,\sigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_\nu}\frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)}\tilde{X}(\nu\mu)(\sigma)=$$

$$= |\sigma|^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_\nu} c_{k\nu\mu}(t,x) X_{\nu\mu}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big) = a_k(t,x,\sigma).$$

Отже, в класі $(S(\mathbb{R}^n))_{p1}$ ПДО A записується у вигляді матричного ГСІ з характеристикою Ω_k, а в класі обмежених функцій цей факт приймається за означення.

3.1.2. Основний результат

Вірною є така теорема [205].

Теорема 3.1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) елементи матриць a_k: $\overline{\Pi}_T \times S^{n-1} \to \mathbb{C}_{pp}$, $0 \le k \le m$, є неперервними, а також однорідними по σ функціями порядків γ_k, де числа γ_k такі, що $0 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \gamma_0$;

2) система (1.23) рівномірно параболічна в $\overline{\Pi}_T$, тобто μ – корені многочлена $\det(A_0(t,x,\sigma) - \mu E)$, де E – одинична матриця, задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\mu(t,x,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{\gamma_0}$ з деякою сталою $\delta > 0$ для всіх $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

3) елементи матриць a_k, $0 \le k \le m$, є нескінченно диференційовними по σ при $\sigma \ne 0$, для яких правильні оцінки

$$\|D_\sigma^\chi a_k(t,x,\sigma)\| \le C_N |\sigma|^{\gamma_k - |\chi|},$$

$$\|D_\sigma^\chi [a_k(t,x,\sigma) - a_k(\tau,y,\sigma)]\| \le C_æ(|x-y|^\lambda + |t-\tau|^{\frac{\lambda}{\gamma_k}})|\sigma|^{\gamma_k - |\chi|},$$

$$\chi \in Z_+^n, \{x,y\} \subset \mathbb{R}^n, \{t,\tau\} \subset [0,T], \lambda \in (0,1];$$

4) функція φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{p1}$ неперервна і обмежена;

5) функція f: $\overline{\Pi}_T \to \mathbb{C}_{p1}$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0,1]$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$.

Тоді вірними є такі твердження.

1. За умов 1) – 3) існує фундаментальна матриця розв'язків задачі (1.23), (1.24)

$$\Gamma(t,x;\xi,\tau) = Z(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

для якої виконуються оцінки

$$\|D_x^{æ} Z(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\| \le C(t-\tau)((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0-|æ|}, \quad |æ| \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$\|D_t^1 Z(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\| \le C((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0},$$

$$\|W(t,x;\tau,\xi)\| \le C\Big((t-\tau)^{\frac{\gamma_0+\lambda}{\gamma_0}}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_0} +$$

$$+(t-\tau)\sum_{k=1}^{m+1}((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|)^{-n-\gamma_k}\Big), \quad \gamma_{m+1} \equiv \gamma_0 - \lambda.$$

2. За умов 1) – 5) розв'язок задачі (1.23), (1.24) *існує і записується у вигляді*

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_T. \tag{3.10}$$

Доведення теореми проводиться розповсюдженням міркувань із праць [9, 29, 37] на випадок матричних псевдодиференціальних операторів. Припущення про структуру системи, які забезпечують рівноправність усіх рівнянь системи і рівноправність усіх невідомих функцій, а також припущення про те, що система містить похідні по t лише першого порядку, істотно полегшує роботу.

Важливу роль відіграє точна оцінка матричного осцилюючого інтеграла вигляду

$$\Phi(p,z,\beta) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} P(\sigma) \exp\{i(z,\sigma)\} \exp\{-a_k(\beta,p,\sigma)\} d\sigma,$$

де P: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}_{pp}$ – матриця, елементами якої є однорідні многочлени степеня $\nu \in \mathbb{N}$, a_k – матричні символи ПДО A_k, що задовольняють умови 1) – 3), $0 \le k \le m$. Скалярний випадок наведений в [29, стор. 915], [37, 230].

Лема 3.1. *Якщо* $N \ge 2n + \nu + [\gamma_k]$, *то існує стала* $c > 0$ *така, що*

$$\|\Phi(p,z,\beta)\| \le c(1+|z|)^{-n-\gamma_k-\nu}, \quad 0 \le k \le m.$$

Доведення леми. Нехай функція $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ така, що $\eta_0(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \leq 1$, $\eta_0(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \geq 2$, і нехай $\eta_1 \equiv 1 - \eta_0$,

$$\Phi_r(p, z, \beta) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_r(\sigma) P(\sigma) \exp\{i(z, \sigma)\} \exp\{-a_k(\beta, p, \sigma)\} d\sigma, r = 0, 1;$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1.$$

Розглянемо скалярну функцію $e^{-t} = 1 - t + t^2 h(t)$, $t \geq 0$, де $h(t) = t^{-2}(e^{-t} - 1 + t)$. Функція h має обмежені похідні довільного порядку при всіх $t \in [0, \infty)$. При $0 \leq t \leq R$ це безпосередньо випливає з рівності

$$h(t) = t^{-2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

а при $t > R$ $h(t) = t^{-2} e^{-t} - t^{-2} + t^{-1}$ і обмеженість функції та всіх її похідних перевіряється безпосереднім обчисленням.

Розглянемо тепер аналогічні формули, коли замість t записана матриця $a_k(\beta, p, \sigma)$, яка задовольняє умови 1) – 3). У цьому випадку $h(a_k) = a_k^{-2} \sum\limits_{q=2}^{\infty} \frac{a_k^q}{q!}$ при $\|a_k\| \leq R$, $h(a_k) = a_k^{-2}(e^{-a_k} - 1 + a_k)$ при $\|a_k\| > R$. З цих зображень і з того, що

$$\|e^{-a_k}\| \leq c e^{-\delta_1 |\sigma|^{\gamma_0}}, \quad 0 < \delta_1 < \delta,$$

де число δ з умови 2), за допомогою міркувань, проведених у скалярному випадку, випливає, що матрична функція $h(a_k)$ має стільки обмежених похідних по σ, скільки похідних по σ має матрична функція $a_k(p, \beta, \sigma)$. Отже,

$$\Phi_0(p, z, \beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\sigma) P(\sigma) e^{i(z,\sigma)} d\sigma - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\sigma) P(\sigma) a_k(\beta, p, \sigma) e^{i(z,\sigma)} d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\sigma) a_k^2(\beta, p, \sigma) h(a_k(\beta, p, \sigma)) e^{i(z,\sigma)} d\sigma \equiv \Phi_{01} - \Phi_{02} + \Phi_{03}.$$

Далі оцінки елементів матриць Φ_{0k}, $k = 1, 2, 3$, проводяться аналогічно оцінкам із праці [29]. Лема доведена.

Приклад. Нехай $a(t,x,\sigma) \equiv E|\sigma|$, $\varphi(x) = EC_1$, $f(t,x) \equiv EC_2$. Тоді із (3.10) випливає, що $u(t,x) = EC_1 + tEC_2$. Рівняння і початкова умова задовольняються. ПДО трактується як ГСІ [41, стор. 24]

$$A_1 u(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int\limits_{\{\varepsilon \le h \le R\}} E(\Delta_h u(t,x))|h|^{-(n+1)} dh, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \ge 0. \tag{3.11}$$

3.1.3. Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів

В даному пункті вивчається поведінка осцилюючих інтегралів, які визначаються при розв'язуванні задачі Коші та багатоточкових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами, однорідними порядку $\gamma > 0$.

Параболічні псевдодиференціальні рівняння (ППДР) введені С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем на початку 70-х років і ними проведені перші дослідження задачі Коші для таких рівнянь [32, 33, 212–214]. Приклад задачі Коші, наведений в [41]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A_1 u(t,x) = 0,$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n,$$

де A_1 – псевдодиференціальна операція (ПДО) із символом $a_1 \equiv |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ показує, що ядро Пуассона

$$G(t,x) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} t(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.12}$$

є степеневою функцією на відміну від експоненціальної у випадку рівняння теплопровідності (де замість a_1 є гладкий символ $a_2 \equiv |\xi|^2$, що відповідає операторові Лапласа). Функція G із (3.12) зображається через осцилюючий інтеграл

$$G_1(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(\sigma, z) - |\sigma|\} d\sigma, z = \frac{\sigma}{t}, \tag{3.13}$$

який безпосередньо підраховується. Класичні степеневі оцінки осцилюючих інтегралів вигляду (3.3), де замість $|\sigma|$ покладено однорідну степеня γ функцію $A_\gamma(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, негладку при $\sigma = 0$, отримано при $\gamma > 1$ у [31] і при $\gamma = 1$, $n = 1$ в [34]. Для такого символа фундаментальний розв'язок задачі Коші обчислюється за допомогою перетворення Фур'є і набуває вигляду (3.12). М.В. Федорюком [35] при $\gamma \geq 1$ встановлена точна асимптотика осцилюючого інтеграла вигляду (3.3), яка є степеневою, а не експоненціальною, як для диференціальних рівнянь.

А.Н. Кочубей при природних умовах однорідності степеня $\gamma \geq 1$ по σ та гладкості, накладених на символ $a(p, \beta; \sigma)$ в [29, стор. 915] доводить точні степеневі оцінки осцилюючих інтегралів

$$\Phi_\nu(z, p, \beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_\nu(\sigma) \exp\{i(z, \sigma) - a(p, \beta; \sigma)\} d\sigma, \tag{3.14}$$

де ν – ціле невід'ємне число, $P_\nu(\sigma)$ – однорідний поліном степеня ν, $p > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ – параметри, або $P_\nu(\sigma)$ – однорідна функція степеня $\nu = \alpha > 0$,

$$\mathrm{Re} a(p, \beta; \sigma) \geq a_0 > 0, \sigma \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], |\sigma| = 1, \tag{3.15}$$

$a(p, \beta; \sigma)$ має $N \geq 2n + \nu + [\gamma]$ неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, причому

$$|D^\chi_\sigma a(p, \beta; \sigma)| \leq C_N |\sigma|^{\gamma - |\chi|}, \gamma \geq 1, \tag{3.16}$$

які узгоджуються з асимптотикою М.В. Федорюка із [35] і набувають вигляду

$$|\Phi_\nu(z, p; \beta)| \leq C(1 + |z|)^{-(n+\gamma_1)}, \tag{3.17}$$

де $\gamma_1 = \gamma + \nu$, якщо $\nu > 0$ – ціле, і $\gamma_1 = \min\{\gamma, \nu\}$, якщо $\nu = \alpha > 0$ – неціле, стала C не залежить від p, β. При цьому $P_\nu(\sigma)$ задовольняє умову (3.16).

Для доведення оцінки (3.17) інтеграла (3.14) в [29] використовується розклад $e^{-t} = 1-t+t^2h(t)$, де $h(t) = t^{-2}(e^{-t}-1+t)$, перетворення Фур'є однорідних функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$, розклад однорідної функції $a_\nu(p,\beta;\sigma) \equiv P_\nu(\sigma)a(p,\beta;\sigma)$ в ряд за сферичними гармоніками і формули для перетворення Фур'є сферичних гармонік із [202].

У працях [165, 204, 215] результати з [29], які вірні, фактично, для $\gamma \geq 1/2$, розповсюджуються на випадок систем ППДР з негладкими символами. У працях [205, 215, 230] результати для систем ППДР розповсюджуються на випадок $\gamma > 0$, а у [215] точка негладкості матричного символа $\sigma = 0$ зміщується у фіксовану точку $\sigma = h \neq 0$. Умова скінченної гладкості символа в [215] замінена умовою його нескінченної гладкості.

Зауважимо, що у працях [165, 204] розглядається випадок $\gamma \geq 1$ і припускається скінченна гладкість по σ при $\sigma \neq 0$ матричного символа. Якщо у [205] розглянути випадок $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ (відгородити від нуля), то результат буде вірний для скінченної гладкості символа. В [205] доводиться оцінка (3.17) для $\gamma > 0$ і при цьому зберігаються усі доданки розкладу e^{-t} в степеневий ряд. Тоді для збіжності відповідного ряду (див. ряд (16) із [29]) треба вимагати нескінченної гладкості матричного символа по σ при $\sigma \neq 0$.

Зв'язок між гладкістю функції і швидкістю збіжності її ряду Фур'є-Лапласа

Нехай $0 \leq m < +\infty$, $1 \leq \mu \leq d_n(m)$, $d_n(m) = \dfrac{(n+m-2)(n+m-3)!}{m!(n-2)!}$, тобто $d_n(m) \sim Cm^{n-2}$ при $m \to \infty$, де C – стала, залежна від n, але незалежна від m; $\sigma \in S_{n-1}$ (S_{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, $Y_{m\mu}(\sigma)$ – повна ортонормована система сферичних функцій). Відомо [202, теорема 4.3, стор. 34], що довільна неперервна функція на S_{n-1} може бути рівномірно апроксимована скінченними лінійними комбінаціями сферичних гармонік. Оскільки неперервні функції щільні в $L_2(S_{n-1})$, то теорема 4.3 із [202] стверджує, що лінійні комбінації функцій $Y_{m\mu}(\sigma)$ щільні в $L_2(S_{n-1})$. Тоді ортонормована система $\{Y_{m\mu}\}$ сферичних гармонік повна в $L_2(S_{n-1})$. Для функції $f \in L_2(S_{n-1})$ побудуємо ряд за повною ортонормованою системою $Y_{m\mu}(\sigma)$:

$$f(\sigma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} f_{m\mu} Y_{m\mu}(\sigma), \sigma \in S_{n-1}, \tag{3.18}$$

де коефіцієнти розкладу визначаються за формулами

$$f_{m\mu} = \int\limits_{S_{n-1}} f(\sigma) Y_{m\mu}(\sigma) d\sigma. \tag{3.19}$$

Ряд (3.18) називається рядом Фур'є-Лапласа функції $f(\sigma)$. Відома теорема Рісса-Фішера забезпечує збіжність цього ряду в середньоквадратичному сенсі. Замість функції $f(\sigma)$ можна розглядати функцію $f(p, \sigma)$, залежну від параметра p певним чином.

Нехай $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Співвідношення $Y_m(\sigma) = |\sigma|^m Y_m(\sigma')$, $\sigma' \in S_{n-1}$ вказує на зв'язок між множиною всіх однорідних гармонічних многочленів степеня m та множиною їх звужень на сферу – сферичних гармонік порядку m.

Відомо, що швидкість спадання коефіцієнтів Фур'є-Лапласа (3.19) забезпечується гладкістю функції f [202, стор. 47-48]. Якщо $f(\sigma) \in C^{2r}(S_{n-1})$, то

$$|f_{m\mu}| \leq \frac{M}{m^{2r}}, \tag{3.20}$$

де M не залежить від m, $M = \sup\limits_{\substack{\sigma \in S_{n-1} \\ |\chi| \leq 2n}} |D^{\chi} f(\sigma)|$. Відомо також, що

$$|Y_{m\mu}| \leq C m^{(n-2)/2}, \tag{3.21}$$

де C – додатна стала.

Якщо $f \in C^{\infty}(S_{n-1})$, то ряд Фур'є-Лапласа цієї функції, а також усі продиференційовані ряди

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} f_{m\mu} D^j Y_{m\mu}(\sigma), |j| = 0, 1, 2, \ldots,$$

збігаються абсолютно й рівномірно до $D^j f$.

Якщо $f \in C^\infty(S_{n-1})$, то ряди

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} m^k |f_{m\mu}|$$

збігаються для довільного $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Відомо також [202, стор. 49], що перетворення Фур'є функції $|\sigma|^{\gamma+\nu} Y_{m\mu}\Big(\dfrac{\sigma}{|\sigma|}\Big)$ дорівнює

$$(-i)^m 2^{n+\gamma+\nu} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\Big(\frac{n+m+\gamma+\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m-\gamma\nu}{2}\Big)} \frac{Y_{m\mu}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)}{|z|^{n+\gamma+\nu}}, \tag{3.22}$$

якщо $m-\gamma-\nu \neq 0, -2, -4, \ldots$ (з приводу тлумачення однорідної функції (3.22) як елемента $S'(\mathbb{R}^n)$ див. [216]). В супротивному випадку, можливому лише для скінченної кількості значень m, вказане перетворення Фур'е – узагальнена функція, зосереджена в нулі.

В [217, стор. 62] наведена асимптотична формула

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta}\Big(1 + \frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1) + O(z^{-2})\Big),$$

$$-\pi < \arg z < \pi,$$

з якої випливає, що

$$\left|\frac{\Gamma\Big(\frac{n+\alpha+m}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{m-\alpha}{2}\Big)}\right| \leq C m^{\frac{n}{2}+\alpha}, \tag{3.23}$$

див. також [7, стор. 30, формула (1.66)].

Основний результат. Для простоти викладу розглядається лише скалярний випадок і старший символ ПДО.

Теорема 3.2. *Якщо $a(p, \beta; \sigma)$, $P_\nu(p, \beta; \sigma)$ – нескінченно диференційовні по σ при $\sigma \neq 0$ функції, однорідні по σ відповідно степеня $\gamma > 0$ та $\nu > 0$ (якщо $\nu > 0$ – ціле, то P_ν – однорідний поліном степеня ν, $p > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ –*

параметри), $a(p,\beta;\sigma)$ задовольняє умови (3.15), (3.16), *а $P_\nu(p,\beta;\sigma)$ –* (3.16), *то для функції* (3.14) *вірною є нерівність* (3.17).

Доведення. Нехай $\eta_0(\sigma)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_0(\sigma)=1$ при $|\sigma|\le 1$, $\eta_0(\sigma)=0$ при $|\sigma|\ge 2$, а $\eta_1(\sigma)=1-\eta_0(\sigma)$. Тоді

$$\Phi_\nu^k(p,\beta;z)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_k P_\nu(p,\beta;\sigma)\exp\{i(z,\sigma)-a(p,\beta;\sigma)\}d\sigma, k=0,1.$$

Очевидно, що $\Phi_\nu=\Phi_\nu^0+\Phi_\nu^1$. Якщо скористатися розкладом

$$\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a^k(p,\beta;\sigma)}{k!}, a(p,\beta;\sigma)\ge a_0>0,$$

$$p>0,\beta\in\mathbb{R}^n,\sigma\in\mathbb{R}^n,$$

то

$$\Phi_\nu^0(p,\beta,z)=\Phi_\nu^{0,0}(p,\beta,z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z), z\in\mathbb{R}^n,$$

де

$$\Phi_\nu^{0,0}(p,\beta,z)=\int\limits_{|\sigma|\le 2}\eta_0(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma, z\in\mathbb{R}^n,$$

$$\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z)=\int\limits_{|\sigma|\le 2}\eta_0(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)a^k(p,\beta;\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma, z\in\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{N}.$$

Розглянемо спочатку доданок Φ_ν^1 і проведемо його оцінку. Позначимо

$$L\equiv -i|z|^{-2}\sum_{k=1}^{n}z_k\frac{\partial}{\partial\sigma_k},$$

тоді

$$L(\exp\{i(z,\sigma)\})=\exp\{i(z,\sigma)\}.$$

З одного боку, $\forall N\in\mathbb{N}$ маємо, що $L^N(\exp\{i(\sigma,z)\})=\exp\{i(\sigma,z)\}$, а з другого боку, користуючись поліноміальною формулою, отримаємо, що

$$L^N(\exp\{i(\sigma,z)\})=(-i)^N|z|^{-2N}\sum_{|\chi|=N}\frac{\chi!}{\chi_1!\dots\chi_n!}z^\chi D_\sigma^\chi(\exp\{i(\sigma,z)\}).$$

Оскільки вираз $z^\chi|z|^{-2N}$ не залежить від σ, то при потребі, його можна внести під знак D^χ_σ. Отже, для довільної основної функції $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z)\equiv 0$ при $|z|\le 1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} L^n(\exp\{i(\sigma,z)\})\varphi(z)dz=(-i)^N\sum_{|\chi|=N}C_\chi D^\chi_\sigma\int\limits_{\mathbb{R}^n}|z|^{-2N}z^\chi\exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz,$$

де

$$\sum_{|\chi|=N}C_\chi=n^N, C_\chi=\frac{\chi!}{\chi_1!\ldots\chi_n!}.$$

Тому

$$(\Phi^1_\nu(p,\beta;z),\varphi)=(-i)^N\sum_{|\chi|=N}C_\chi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}\times$$

$$\times D^\chi_\sigma\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|z|^{-2N}z^\chi\exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz\right)d\sigma,$$

де інтеграл по z збігається за рахунок вибору основної функції $\varphi(z)$: $\varphi(z)\in S(\mathbb{R}^n)$ і $\varphi(z)=0$ при $|z|\le 1$. Враховуючи, що $\eta_1(\sigma)=0$ при $|\sigma|\le 1$, після інтегрування частинами отримаємо, що

$$(\Phi^1_\nu(p,\beta;z),\varphi)=(-i)^N\sum_{|\chi|=N}C_\chi\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^\chi_\sigma\Bigg[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|z|^{-2N}z^\chi\exp\{i(\sigma,z)\}\varphi(z)dz\right)\Bigg]d\sigma.$$

Очевидно, що

$$D^\chi_\sigma[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]=$$

$$=R(p,\beta;\sigma)+\eta_1(\sigma)D^\chi_\sigma[P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}],$$

де $R(p,\beta,\sigma)=0$ при $\sigma\in\{|\sigma|\le 1\}\cup\{|\sigma|\ge 2\}$, бо цей вираз містить похідні від функції $\eta_1(\sigma)$, а $\eta_1 D^\chi_\sigma[P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]=0$ при $|\sigma|<1$. Тому порядок особливості $D^\chi_\sigma[P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]$ при $\sigma=0$ не впливає на збіжність інтеграла по $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Отже, при $\sigma \in \mathbb{R}^n$ маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ і $|\chi| \in \mathbb{N}$

$$D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}] \leq C\exp\{-\varepsilon a(p,\beta;\sigma)\}.$$

За теоремою Фубіні

$$(\Phi_\nu^1(p,\beta,z),\varphi) = (-i)^N \sum_{|\chi|=N} C_\chi \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}] \times$$

$$\times \exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma \Bigg\} |z|^{-2N} z^\chi \varphi(z)dz.$$

Звідси, при $|z| \geq 1$

$$\Phi_\nu^1(p,\beta;z) = (-i)^N|z|^{-2N} \sum_{|\chi|=N} C_\chi z^\chi \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\sigma^\chi[\eta_1(\sigma)P_\nu(p,\beta,\sigma)\exp\{-a(p,\beta;\sigma)\}]\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma.$$

Останній інтеграл є збіжним для довільного $N \in \mathbb{N}$, тому при $|z| \geq 1$

$$|\Phi_\nu^1(p,\beta;z)| \leq \frac{C}{|z|^N}, N = n + \gamma + \nu, N \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

де стала C має порядок n^N , бо $\sum\limits_{|\chi|=N} C_\chi = n^N$.

Зауважимо, що оцінку (3.24) можна отримати, інтегруючи частинами так, як це зроблено в [31].

Розглянемо $\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z)$. Позначимо через $b_{\nu k}(p,\beta,\sigma) \equiv P_\nu(p,\beta;\sigma)a^k(p,\beta;\sigma)$ функцію, яка є однорідною по σ степеня $\nu + k$, нескінченно диференційовною по σ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тоді

$$\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta,z) = \int\limits_{|z|\leq 2} \eta_0(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma, z \in \mathbb{R}^n, k \geq 0.$$

Розглянемо основну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(z) = 0$ при $|z| \le 1$, $\psi(z) \equiv \varphi(-z)$. Розуміючи $\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;\cdot)$ як регулярний функціонал з простору $S'(\mathbb{R}^n)$, знайдемо, що

$$\langle \Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;\cdot),\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\}d\sigma\right)\varphi(z)dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\hat{\psi}(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}^n}b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\hat{\psi}(\sigma)d\sigma -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)\hat{\psi}(\sigma)d\sigma = \langle \hat{b}_{\nu k}(p,\beta;\cdot),\psi(\cdot)\rangle -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_1(\sigma)b_{\nu k}(p,\beta,\sigma)d\sigma\int\limits_{\mathbb{R}^n}(L^n\exp\{i(\sigma,z)\})\varphi(z)dz,$$

де $\hat{b}_{\nu k}$ – перетворення Фур'є $b_{\nu k}$ в сенсі узагальнених функцій із $S'(\mathbb{R}^n)$.

Розкладемо функції $b_{\nu k}(p,\beta;\zeta)$ при $|\zeta| = 1$ і довільному $k \in \mathbb{N}$ в ряд за сферичними гармоніками вигляду (3.18):

$$b_{\nu k}(p,\beta;\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l} g_{l\mu_k}(p,\beta)Y_{l\mu}(\zeta).$$

Тоді для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$b_{\nu k}(p,\beta;\zeta) = |\sigma|^{\gamma k+\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l} g_{l\mu_k}(p,\beta)Y_{l\mu}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big).$$

Згідно з (3.22) перетворення Фур'є функції $|\sigma|^{\gamma k+\nu}Y_{l\mu}\Big(\dfrac{\sigma}{|\sigma|}\Big)$ дорівнює

$$(-i)^k 2^{n+\gamma k+\nu}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\Big(\frac{n+l+\gamma k+\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{l-\gamma k-\nu}{2}\Big)}\frac{Y_{l\mu}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, \tag{3.25}$$

$k \in \mathbb{N}$, $l - \gamma k - \nu \ne 0, -2, -4, \dots$. В протилежному випадку, можливому лише для скінченної кількості значень l, вказане перетворення Фур'є – узагальнена функція, зосереджена в нулі. Враховуючи (3.25), при $|z| \geq 1$ маємо, що

$$\hat{b}_{\nu k}(p,\beta;z) = 2^{n+\gamma k+\nu}\pi^{\frac{n}{2}} \sum_{l=l_0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_l} g_{l\mu k}(p,\beta)(-i)^l \frac{\Gamma\left(\frac{n+l+\gamma k+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l-\gamma k-\nu}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{Y_{l\mu}\left(\frac{z}{|z|}\right)}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, l_0 \geq 0, k \geq 1. \quad (3.26)$$

Ряд (3.26) апріорі збіжний в сенсі узагальнених функцій. Із оцінок (3.20), (3.21) випливає його рівномірна збіжність при $|z| = 1$. Тому, при $|z| \geq 1$, враховуючи (3.20), (3.21), (3.23) ряд по l мажорується таким рядом

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2r+2n+\gamma k+\nu-3},$$

збіжність якого можна забезпечити вибором r так, щоб $2r-2n-\gamma k-\nu+3 > 1$. Позначивши $\rho \equiv 2r - 2n - \gamma k - \nu + 3$, отримаємо ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{\rho}} \equiv \zeta(\rho), \rho > 1,$$

який називається ζ-функцією Рімана [222, формула 9.522, 1], або

$$\zeta(\rho) = \frac{1}{1-2^{1-\rho}}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{1}{l^{\rho}}, \rho > 0,$$

[222, формула 9.522, 2, стор. 1087]. Оскільки для знакозмінного ряду

$$c(\rho) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{1}{l^{\rho}}, \rho > 0,$$

виконуються всі умови теореми Лейбніца, то він збіжний і $0 < c(\rho) < 1$, причому при $\rho > 1$ $c(\rho)$ – абсолютно збіжний ряд, а при $0 < \rho \leq 1$ – неабсолютно збіжний, тому

$$1 < \zeta(\rho) < \frac{2^{\rho}}{2^{\rho}-2}.$$

Оскільки існує така стала $\rho_0 > 0$, що $\rho \geq \rho_0 > 1$, то існує число $c_0 > 1$ таке, що $2^{\rho} \geq 2c_0$. Тоді

$$1 < \zeta(\rho) < \frac{c_0}{c_0-1}.$$

Отже, існує таке число $c > 0$, що при $|z|>1$

$$\Phi_\nu^{0,k}(p,\beta;z) \le \frac{c2^{n+\gamma k+\nu}}{|z|^{n+\gamma k+\nu}}, \tag{3.27}$$

де стала c не залежить від γ, ν і k. Якщо $\nu > 0$ – ціле, то функція $\Phi_\nu^{0,0} \in S(\mathbb{R}^n)$. Якщо ж $\nu > 0$ – неціле, то $\Phi_\nu^{0,0}$ оцінюється так як і $\Phi_\nu^{0,1}$. Остаточно, враховуючи (3.27), при $|z| > 1$

$$|\Phi_\nu^0(p,\beta;z)| \le \frac{c_0}{|z|^{n+\nu}} + c_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|z|^{-(n+\gamma k+\nu)} \le \frac{c_0}{|z|^{n+\nu}} + \frac{c_1}{|z|^{n+\gamma+\nu}},$$

якщо $\nu > 0$ – неціле і

$$|\Phi_\nu^0(p,\beta;z)| \le |z|^{-(n+\gamma+\nu)},$$

якщо $\nu > 0$ – ціле. Звідси, враховуючи (3.24), отримаємо (3.17).

Теорема доведена.

Оцінка (3.17) використовується для дослідження поведінки фундаментальних розв'язків багатоточкових задач [186–188].

3.1.4. Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння з негладким символом

У цьому пункті для квазілінійного параболічного рівняння з псевдодиференціальним оператором доведено теорему про глобальну розв'язність задачі Коші. Результати даного пункту доповідались на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті М.П. Кравчука (1992 р.) [207] і опубліковані в [206].

Постановка задачі. Нехай $(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\gamma \in [1,2]$, $\beta > \dfrac{\gamma}{n}$, f: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ – задана неперервна функція така, що $\forall t \in \mathbb{R}_+$ і $\{u, u_1, u_2\} \subset \mathbb{R}$ існують сталі $\{c_1, c_2, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$, такі, що вірними є нерівності

$$|f(t,u)| \le c_1|u|^{1+\beta}, \tag{3.28}$$

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le c_2|u_1 - u_2|\max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\}; \tag{3.29}$$

$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – задана функція; $a_\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, однорідна степеня γ гладка функція в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ порядку $N \geq 2n+2[\gamma]+1$ і існує стала C_N така, що $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$ вірними є нерівності

$$|D^{æ}_\sigma a_\gamma(\sigma)| \leq C_N |\sigma|^{\gamma-|æ|}, |æ| \leq N - 2n - [\gamma].$$

Проведемо дослідження коректної розв'язності задачі Коші

$$u_t(t,x) - \alpha \Delta u(t,x) + (1-\alpha) A_\gamma u(t,x) = f(t,u), (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{3.30}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.31}$$

де $\alpha = 1$ при $\gamma = 2$, $\alpha = 0$ при $1 \leq \gamma < 2$, $u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$, Δ – оператор Лапласа, A_γ – псевдодиференціальна операція, побудована за символом a_γ (наприклад, $a_\gamma = |\sigma|^\gamma$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$), яка трактується як гіперсингулярна інтегральна операція [29, 37], у просторі функцій $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Якщо $\gamma = 1$, то $a_\gamma = |\sigma|$, якщо $\gamma = 2$, то рівняння (3.30) є квазілінійним рівнянням теплопровідності.

Означення простору $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Нехай число $æ \in \mathbb{R}_+$, $G\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для однорідного рівняння (3.30) з початковою умовою (3.31).

При $\gamma = 1$ ФРЗК

$$G(t,x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+,$$

при $\gamma = 2$ ФРЗК

$$G(t,x) = [2\sqrt{\pi t}]^{-n} \exp\Big\{-\frac{|x|^2}{4t}\Big\}, (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+,$$

при $0 < \gamma < 2$ ФРЗК

$$G(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - |\sigma|^\gamma t\} d\sigma,$$

$$G(t,x) \geq 0, (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Позначимо через $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ простір неперервних у $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функцій v таких, що для них є скінченною норма [208]

$$\langle v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \equiv \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{|v(t,x)|}{G(t+t_0,x)}. \tag{3.32}$$

При вивченні властивостей розв'язків задачі Коші важливу роль відіграють оцінки ФРЗК G. Точні оцінки функції ФРЗК G, що узгоджуються з асимптотикою із [35] у випадку $n=1$ отримані в [34]. У 1988 році А.Н. Кочубей, трактуючи ПДО як гіперсингулярні інтеграли (ГСІ), отримав точні степеневі оцінки функції G і її похідних:

$$|D^{æ}_x G(t,x)| \le C_{æ} t(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma+|æ|)}, \tag{3.33}$$

де $|æ| \le N-2n-[\gamma]$, $N \ge 2n+2[\gamma]+1$, N – порядок гладкості символа a_γ по σ при $\sigma \ne 0$, причому $|D^{æ}_\sigma a(\sigma)| \le C_N|\sigma|^{\gamma-|æ|}$ (див. [29, стор. 919]).

В [29] А.Н. Кочубею вдалося в загальному випадку побудувати і вивчити ФРЗК, довести теореми про розв'язність задачі Коші в класах функцій з деяким степеневим зростанням при $|x|\to\infty$, вказати на цікаві зв'язки одержаних результатів з теорією випадкових процесів.

Зазначимо, що задача Коші для квазілінійних ППДР з негладкими символами майже не вивчена. У праці [210] розглянуто задача Коші для квазілінійного параболічного диференціального рівняння другого порядку з інтегральним коефіцієнтом і однією просторовою змінною.

Основний результат. Вірною є така

Теорема 3.3. *Нехай функція f є неперервною, задовольняє умови* (3.28), (3.29) *і існує таке мале число $\delta>0$, що коли $\varphi\in H(\mathbb{R}^n)$ і $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}}\le\delta$, то задача* (3.30), (3.31) *має єдиний глобальний розв'язок $u\in H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, для якого $\langle u\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\le C$.*

Доведення. Досить розглянути випадок $1<\gamma<2$, де використовується степенева оцінка (3.33) для ФРЗК G, бо випадки $\gamma=1$, $\gamma=2$ є, фактично прикладами, де ФРЗК G виражається точними рівностями, і є степеневою і експоненціальною функцією відповідно. Якщо задача (3.30), (3.31) має розв'язок $u \in C^{1,N}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то його можна однозначно записати у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, x-\zeta) f(\tau, u(\tau,\zeta))d\zeta,$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \tag{3.34}$$

Досліджуватимемо (3.34) як нелінійне інтегральне рівняння відносно шуканої функції u. За допомогою методу послідовних наближень доведемо, що рівняння (3.34) має єдиний розв'язок:

$$u_0(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta, \tag{3.35}$$

$$u_k(t,x) = u_0(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} G(t-\tau, x-\zeta) f(\tau, u_{k-1}(\tau,\zeta))d\zeta, k \geq 1, (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Доведемо, що послідовність $\{u_k, k \geq 1\}$ (3.35) збігається у просторі $H(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Очевидно, з умов (3.28), (3.32) випливає, що

$$|f(t, u(t,x))| \leq C_1 |u(t,x)|^{1+\beta} = C_1 \frac{|u(t,x)|^{1+\beta}}{G^{1+\beta}(t+t_0, x)} G^{1+\beta}(t+t_0,x) \leq$$
$$\leq C_1 \langle u \rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G^{1+\beta}(t+t_0, x), (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \tag{3.36}$$

Тоді

$$|(Mu)(t,x)| \equiv \Big| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, x-\zeta) f(\tau, u(\tau,\zeta)) d\zeta \Big| \leq C_1 \langle u \rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \times$$
$$\times \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^{1+\beta}(\tau+t_0, \zeta) G(t-\tau, x-\zeta) d\zeta \leq$$
$$\leq C_3 \langle u \rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \int\limits_0^\infty (\tau+t_0)^{-\frac{n\beta}{\gamma}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, x-\zeta) G(\tau+\zeta, t_0) d\zeta = C_3 \langle u \rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t+t_0, x) \times$$

$$\times \lim_{\tau\to\infty} \frac{(\tau+t_0)^{1-\frac{n\beta}{\gamma}}}{1-\frac{n\beta}{\gamma}}\Bigg|_0^\tau = C_4\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_+} G(t+t_0,x), \tag{3.37}$$

якщо $1-\dfrac{n\beta}{\gamma}<0$, або $\beta>\dfrac{\gamma}{n}$, де $C_3=C_0C_1$, $C_4=C_3\gamma(n\beta-\gamma)^{-1}t_0^{1-\frac{n\beta}{\gamma}}$. При цьому використана оцінка (3.36) і формула згортки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\zeta)G(\tau+t_0,\zeta)d\zeta = G(t+t_0,x), \quad \tau<t, x\in\mathbb{R}^n.$$

Із нерівності (3.37) випливає, що

$$\langle Mu\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le C_4\langle u\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_+}. \tag{3.38}$$

Розглянемо дві довільні функції $\{u,v\}\subset H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ і, не зменшуючи загальності, вважаємо, що існує стала $K>0$ така, що $\langle u\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\le K$ та $\langle v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\le K$. Проведемо, використовуючи (3.29), (3.32), оцінку різниці

$$|(Mu-Mv)(t,x)| = \Big|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\zeta)[f(\tau,u(\tau,\zeta))-f(\tau,v(\tau,\zeta))]d\zeta\Big| \le$$

$$\le C_2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,x-\zeta)\max\{|u|^\beta,|v|^\beta\}\times$$

$$\times|u-v|G^{1+\beta}(\tau+t_0,\zeta)G^{-(1+\beta)}(\tau+t_0,\zeta)d\zeta\le$$

$$\le C_2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\max\Big\{\Big(\frac{|u(\tau,\zeta)|}{G(\tau+t_0,\zeta)}\Big)^\beta,\Big(\frac{|v(\tau,\zeta)|}{G(\tau+t_0,\zeta)}\Big)^\beta\Big\}\frac{|u(\tau,\zeta)-v(\tau,\zeta)|}{G(\tau+t_0,\zeta)}\times$$

$$\times G(t-y,x-\zeta)G^{1+\beta}(\tau+t_0,\zeta)d\zeta\le$$

$$\le C_2K^\beta\langle u-v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}C_0\int\limits_0^\infty(\tau+t_0)^{-\frac{n\beta}{\gamma}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t-\tau,x-\zeta)G(\tau+t_0,\zeta)d\zeta=$$

$$=C_5K^\beta\langle u-v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}G(t+t_0,x),(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+,$$

$$C_5=C_2\cdot C_0\gamma(n\beta-\gamma)^{-1}.$$

Отже, вірною є нерівність

$$\langle Mu - Mv\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le C_5 K^\beta \langle u - v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+}. \tag{3.39}$$

Оцінимо початкове наближення u_0 за нормою простору $H(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Маємо, що

$$|u_0(t,x)| = \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\zeta) G(t_0,\zeta) \frac{\varphi(\zeta)}{G(t_0,\zeta)} d\zeta \Big| \le$$
$$\le \langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} G(t+t_0, x), (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+;$$

тому

$$\langle u_0\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le \langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n}. \tag{3.40}$$

Припустимо, що φ неперервна на $\mathbb{R}^n$ і існує таке число $\delta > 0$, мале, що $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} < \delta$, тобто φ є малою за нормою простору $H(\mathbb{R}^n)$.

Тоді із (3.35) і (3.38) випливає, що

$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le \delta + C_4 \langle u_{k-1}\rangle^{1+\beta}_{\mathbb{R}^{n+1}_+}, k \ge 1. \tag{3.41}$$

Тому

$$\langle u_1\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le \delta + C_4 \delta^{1+\beta} \equiv M_1(\delta),$$
$$\langle u_2\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le \delta + C_4 M_1^{1+\beta}(\delta) \equiv M_2(\delta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le \delta + C_4 M_{k-1}^{1+\beta}(\delta) \equiv M_k(\delta), k \ge 1. \tag{3.42}$$

Звідси випливає, що для досить малого $\delta > 0$ існує $M(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ таке, що

$$\langle u_k\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le M(\delta), k \ge 1. \tag{3.43}$$

Із нерівностей (3.39) – (3.43) отримуємо, що

$$\langle u_k - u_{k-1}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} = \langle Mu_{k-1} - Mu_{k-2}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \le C_5 M^\beta(\delta) \langle u_{k-1} - u_{k-2}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}_+},$$

$k \geq 2$. Якщо $\delta > 0$ вибрати настільки малим, щоб $C_5 M^\beta(\delta) < 1$, то, оскільки $\{u_k, k \geq 1\}$ є послідовністю частинних сум для функціонального ряду

$$u_0 + (u_1 - u_0) + \dots + (u_k - u_{k-1}) + \dots,$$

який мажорується за нормою простору $H(\mathbb{R}_+^{n+1})$ збіжним числовим рядом, то отримуємо, що послідовність $\{u_k, k \geq 1\}$ збігається до функції $u \in H(\mathbb{R}_+^{n+1})$. При цьому гранична функція u є неперервною в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Якщо в (3.35) перейти до границі при $k \to \infty$, то одержимо, що u є розв'язком рівняння (3.34). Теорема доведена.

Зауваження 3.1. *Із властивостей інтегралів з формули* (3.34) *випливає, що при підвищенні гладкості функцій f та φ відповідно підвищиться гладкість розв'язку задачі* (3.30), (3.31).

Зауваження 3.2. *Якщо припустити, що функції φ та f неперервні і обмежені відповідно в $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а також для довільних $t \in \mathbb{R}_+$ і $\{u_1, u_2\} \subset \mathbb{R}$ існує таке число $L > 0$, що виконується нерівність*

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|,$$

то інтегральне рівняння (3.34) *можна розв'язати методом послідовних наближень, причому*

$$|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)| \leq M L^k \frac{t^k}{k!}, k \geq 1.$$

Звідси випливає, що інтегральне рівняння (3.34) *має єдиний розв'язок для $0 < t \leq T$. Тоді не існує глобальної розв'язності, але не вимагається спадання початкової функції φ при $|x| \to \infty$.*

Зауваження 3.3. *Замість рівняння* (3.30) *можна розглядати ППДР з інтегральним коефіцієнтом вигляду*

$$u_t(t, x) - \alpha \Delta u(t, x) + (1 - \alpha) A_\gamma u(t, x) +$$

$$+\int\limits_{\Omega} u(t,\zeta)d\zeta \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(t,x) = f(t,u), \qquad (3.44)$$

де $\alpha = 1$ *при* $\gamma = 2$ *і* $\alpha = 0$ *при* $1 \le \gamma \le 2$, Δ *– оператор Лапласа,* Ω *– обмежена область в* $\mathbb{R}^n$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. *Припускається, що* u: $\mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ *є розв'язком рівняння* (3.44), *який належить до простору* $C^{1,N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. *Зробимо заміну*

$$u(t,x) = v(t,y),$$

$$y_i = x_i - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} u(\eta,\zeta)d\zeta d\eta, (t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+, \quad 1 \le i \le n.$$

Тоді

$$u_t(t,x) = v_t(t,y) + \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}(t,y)\frac{\partial y_i}{\partial t} = v_t(t,y) - \sum_{i=1}^{n} v_{y_i}(t,y) \int\limits_{\Omega} u(t,\zeta)d\zeta,$$

$$u_{x_i}(t,x) = v_{y_i}(t,x), 1 \le i \le n,$$

$$\Delta u(t,x) = \Delta v(t,x)$$

$$A_\gamma u(t,x) = A_\gamma v(t,y),$$

і задача Коші (3.44), (3.31) *перейде в таку задачу*

$$v_t(t,y) - \alpha \Delta v(t,y) + (1-\alpha)A_\gamma v(t,y) = f(t, v(t,y)), (t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+,$$

$$v(0,y) = \varphi(y), y \in \mathbb{R}^n,$$

яка є задачею (3.30), (3.31) *і для неї вірною є доведена теорема.*

Зауваження 3.4. *Аналогічна задача розглядалася в [218].*

3.2. Задача Діріхле

Нелокальні задачі для еволюційних ПДР вивчалися В.В. Городецьким, Я.М. Дрінем, М.М. Дрінь у працях [195, 203, 209, 168–272, 274]. Розглянемо двоточкову задачу.

3.2.1. Постановка задачі та формула для розв'язку

Нехай $T > 0$, $\mu > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ – числові параметри, $\Pi \equiv \{(t,x) \Big| 0 < t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$. Припустимо, що однорідна порядку $\gamma > 0$ функція a_γ: $\mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ задовольняє умови:

1) $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $|\sigma| = 1$ $\exists a_0 > 0$: $a_\gamma(\sigma) \ge a_0$;

2) $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \ne 0$, $\forall æ \in \mathbb{Z}_+^n$ $\exists C_æ > 0$:

$$|D_\sigma^æ a_\gamma(\sigma)| \le C_æ |\sigma|^{\gamma - |æ|};$$

Функції φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ та f: $\Pi \to \mathbb{R}$ задовольняють умови:

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists C > 0$ $\exists \beta$, $0 < \beta \le \gamma - \varepsilon$ $\exists \varphi \in C(\mathbb{R}^n)$:

$$|\varphi(x)| \le C(1 + |x|)^\beta;$$

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (t,x) \in \Pi$ $\exists C > 0$, $\exists \beta \le \gamma - \varepsilon$ $\exists f$: $\Pi \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Pi)$:

$$|f(t,x)| \le C(1+|x|)^\beta, \quad |f(t,x) - f(t,y)| \le C|x-y|^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Позначимо через u: $\Pi \to \mathbb{R}$ функцію, $u \in C_t^1 \times S(\mathbb{R}^n)$, $F_{x\to\sigma}[u(t,x)](t,\sigma)$, $F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)](t,x)$ – відповідне пряме і обернене перетворення Фур'є функції u,

$$A_\gamma u(t,x) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[a_\gamma(\sigma) F_{x\to\sigma}[u(t,x)]], \quad (t,x) \in \Pi,$$

псевдодиференціальна операція (ПДО) з символом A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Якщо $u \in C^{1,[\gamma]+1}_{t,x}(\Pi)$, $[\gamma]$ – ціла частина $\gamma \ge 1$, то ПДО A_γ визначена в [29, 37] і трактується як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО).

Розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x) + A_\gamma u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi, \gamma > 0, \tag{3.45}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.46}$$

де A_γ – ПДО з символом $a_\gamma(\sigma)$.

Розв'язок задачі (3.45), (3.46) формально шукаємо за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних, тому додатково припустимо, що функції u, f, φ допускають це перетворення, при цьому $F_{x\to\sigma}[f(t,x)] \equiv \tilde{f}(t,\sigma)$, $F_{x\to\sigma}[\varphi(x)] \equiv \tilde{\varphi}(\sigma)$. Шукаючи розв'язок задачі (3.45), (3.46) у вигляді

$$u(t,x) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[v(t,\sigma)](t,x), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{3.47}$$

одержимо для v: $\Pi \to \mathbb{R}^1$ таку задачу

$$v'_t(t,\sigma) + a_\gamma(\sigma)v(t,\sigma) = \tilde{f}(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Pi, \tag{3.48}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} = u(t,\sigma)|_{t=T} + \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.49}$$

Розв'язок задачі (3.48), (3.49) набуває вигляду

$$v(t,\sigma,\mu) = \frac{\mu}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}} \int_0^t \exp\{-a_\gamma(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau +$$

$$+\frac{1}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}} \int_t^T \exp\{-a_\gamma(\sigma)(T+t+\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau +$$

$$+\frac{\exp\{a_\gamma(\sigma)t\}}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}}\tilde{\varphi}(\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Pi, \mu > 1. \tag{3.50}$$

Підставивши (3.50) в (3.47) отримаємо формулу для розв'язку задачі (3.45), (3.46):

$$u(t,x,\mu) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma,\mu)d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}\tilde{\varphi}(\sigma)\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}} +$$

$$+\mu(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}} \Big\{ \int_0^t \exp\{-a_\gamma(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau \Big\} d\sigma +$$

$$+(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\{i(x,\sigma)\}}{\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\}} \Big\{ \int_t^T \exp\{-a_\gamma(\sigma)(T+t-\tau)\}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau \Big\} d\sigma, \tag{3.51}$$

$(t, x \in \Pi)$, $\mu > 1$.

Введемо позначення

$$G(t,T,x,\mu) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\}(\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1} d\sigma, \quad (3.52)$$

$(t, x) \in \Pi$, $\mu > 1$,

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1, \quad (3.53)$$

$$I_2 = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1, \quad (3.54)$$

$$I_3 = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \mu > 1, \quad (3.55)$$

де G визначена формулою (3.52).

Тоді формула (3.51) набуває вигляду

$$u(t,x) = I_1 + \mu I_2 + I_3,$$

де I_j $(j = 1, 2, 3)$ визначені формулами (3.53) – (3.55) відповідно.

3.2.2. Дослідження властивостей функції G

Оскільки виконуються умови 1), 2) п. 3.2.1, то $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\forall t_0 > 0$ і $t \geq t_0$

$$|\exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\}|(\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1} \leq \exp\{-a_\gamma(\sigma)t_0\}(\mu - 1)^{-1},$$

і для довільної смуги $\{(t,x) \big| t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$, $t_0 > 0$ інтеграл (3.52) збігається рівномірно, тому функція G є неперервною в Π.

Аналогічно доводиться диференційовність по t і x функції G. Розглянемо, наприклад, першу похідну по t. Формально продиференціювавши (3.52) під знаком інтеграла дістанемо вираз

$$-a_\gamma(\sigma)\exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\}(\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1},$$

модуль якого оцінюється величиною

$$a_\gamma(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)(t_0-\varepsilon)\}\exp\{-a_\gamma(\sigma)\varepsilon\}(\mu-1)^{-1}, \quad 0<\varepsilon<t_0.$$

Оскільки $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$ $\exists c>0$ таке, що $|a_\gamma(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)(t_0-\varepsilon)\}|<C$, то мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-a_\gamma(\sigma)\varepsilon\}$. Отже, інтеграл похідної від (3.52) збігається рівномірно і тому похідну можна застосувати під знаком інтеграла.

Проведемо оцінку функції G та її похідних. Очевидно, що $\forall\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\forall\mu>1$

$$(\mu-\exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1}=\mu^{-1}(1-\mu^{-1}\exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\exp\{-a_\gamma(\sigma)kT\},$$

$$G(t,T,x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}G_0(t+kT,x), \quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.56}$$

де

$$G_0(t+kT,x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)-a_\gamma(\sigma)(t+kT)\}d\sigma, \quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.57}$$

$G_0(t,x)$ – фундаментальний розв'язок вихідного рівняння, для якого вірними є оцінки (див. [37, 211, 230]) при $\gamma>0$:

$$|D_x^{æ}G_0(t,x)|\le C_{æ}t(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma+|æ|)}, \quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.58}$$

$$|D_tG_0(t,x)|\le C(t^{1/\gamma}+|x|)^{-(n+\gamma)}, \quad (t,x)\in\Pi. \tag{3.59}$$

Тоді

$$|D_x^{æ}G(t,T,x,\mu)|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{æ}\mu^{-k-1}(t+kT)}{[(t+kT)^{1/\gamma}+|x|]^{n+\gamma+|æ|}}, \quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.60}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)|\le C\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}[(t+kT)^{1/\gamma}+|x|]^{-(n+\gamma)}, \quad (t,x)\in\Pi. \tag{3.61}$$

Оскільки

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,T,x,\mu)=-F^{-1}_{\sigma\to x}[a_\gamma(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1}], \tag{3.62}$$

$(t,x)\in\Pi$,

$$A_\gamma G(t,T,x,\mu)=F^{-1}_{\sigma\to x}[a_\gamma(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}(\mu-\exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1}], \qquad (3.63)$$

$(t,x)\in\Pi$, то з (3.62), (3.63) отримуємо, що

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+A_\gamma\Big)G(t,T,x,\mu)=0, \quad (t,x)\in\Pi, \mu>0. \qquad (3.64)$$

Для $a_\gamma(\sigma)\equiv|\sigma|$ ця рівність перевіряється безпосередньо.

Вірною є рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-y,\mu)dy=\frac{1}{\mu-1}, \quad (t,x)\in\Pi, \mu>1. \qquad (3.65)$$

яка випливає з рівності (3.64) ([29, стор. 919], [37]) та (3.56). Враховуючи (3.61) із (3.65) отримаємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G}{\partial t}(t,T,x-y,\mu)dy=0. \qquad (3.66)$$

Оцінка (3.60) забезпечує збіжність інтегралів (3.53) – (3.55) для зростаючих степенево функцій φ (умова 3)) та f (умова 4)).

3.2.3. Дослідження властивостей функції u

Функція u, визначена рівністю (3.51), є сумою трьох доданків. Розглянемо кожен доданок окремо. Інтеграл I_1 (3.53) визначений для $(t,x)\in\Pi$, $\mu>1$, його можна диференціювати по t і застосовувати до нього ПДО A_γ під знаком інтеграла. Законність таких операцій забезпечується оцінками функції G, її похідних і $A_\gamma G$ (3.58) – (3.63). Враховуючи (3.64) отримаємо, що

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+A_\gamma\Big)I_1(t,x,T,\mu)=0. \qquad (3.67)$$

Розглянемо I_2, визначений виразом (3.54) і запишемо його у вигляді

$$I_2(t,x,T,\mu)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \mu^{-k-1} \sum_{k=1}^{\infty} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv I_{20} + I_{21}. \tag{3.68}$$

Існування похідної по t і формула

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{20}(t,x,T,\mu) =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi) - f(\tau,x)] d\xi + f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{3.69}$$

доведені в [33, 34] (див. також формулу (31) із [29]).

Вірною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{21}(t,x,T,\mu) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(kT, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi. \tag{3.70}$$

Розглянемо I_3, визначений виразом (3.55). Аналогічно, як для I_2, похідну від функції I_3 по t можна обчислювати за формулою похідної від інтеграла, залежного від параметра t у випадку, коли межі інтеграла також залежать від цього параметра t. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t} I_3(t,x,T,\mu) = \int_t^T d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k-1} \frac{\partial}{\partial t} G_0(T(1+l) + t - \tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(T(1+k), x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi. \tag{3.71}$$

Об'єднуючи (3.69) – (3.71) дістанемо такий вираз для похідної по t двох останніх доданків із (3.51):

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mu I_2 + I_3] = \int_0^T d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi + f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi. \quad (3.72)$$

Для доведення формули (3.72) досить виділити два таких окремих твердження.

Твердження 1. Нехай

$$G(t,T,x-\xi,\mu) \equiv \frac{1}{\mu} G_0(t,x-\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t+kT, x-\xi),$$

$$0<t<T, x\in\mathbb{R}^n, \xi\in\mathbb{R}^n, |\mu|>1,$$

а функція

$$\mu I_2(t,x,T,\mu) \equiv \mu \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, T, x-\xi, \mu) f(\tau,\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv I_{20}(t,x) + I_{21}(t,x,T,\mu).$$

Тоді для об'ємного потенціала I_{20} вірною є формула

$$\frac{\partial I_{20}(t,x)}{\partial t} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))d\xi + f(t,x).$$

Доведення. При $\theta>0$ розглянемо функцію

$$I_{20} = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

похідна по t від якої обчислюється за відомою формулою

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{20} = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-(t-\theta), x-\xi) f(t-\theta,\xi)d\xi,$$

яка набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{20} = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi) - f(\tau,x))d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\theta, x-\xi) f(t-\theta,\xi)d\xi.$$

Для третього доданка маємо, що

$$\lim_{\theta\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\theta, x-\xi) f(t-\theta,\xi)d\xi = f(t,x).$$

Справді,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\theta, x-\xi) f(t-\theta,\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\theta, x-\xi)(f(t-\theta,\xi) - f(t-\theta,x))d\xi + f(t-\theta,x).$$

Якщо провести заміну змінних $x_i - \xi_i \equiv z_i\theta^{1/\gamma}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, то права частина набуде вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(1+z)(f(t-\theta, x - z\theta^{1/\gamma}) - f(t-\theta,x))dz + f(t-\theta,x).$$

Із неперервності функції f по просторових змінних x_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, випливає, що для довільних фіксованих $(t,x) \in \Pi_T$, $z \in \mathbb{R}^n$, і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_{\varepsilon,t,x,z}$ таке, що $|f(t-\theta, x-z\theta^{1\gamma}) - f(t-\theta,x)| < \varepsilon$, якщо $|z\theta^{1/\gamma}| < \delta$. Отже, границя вірна.

Для першого доданка маємо, що

$$\Big|\int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi) - f(\tau,x))d\xi\Big| \le$$

$$\le C\int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-\xi|^{\lambda}}{((t-\tau)^{1\gamma} + |x-\xi|)^{n+\gamma}} d\xi \le$$

$$\leq C\int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/\gamma}}\right)^{\frac{\lambda}{\gamma}}}{\left(1+\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/\gamma}}\right)^{n+\gamma}} \frac{d(x-\xi)}{(t-\tau)^{1/\gamma}} \leq$$

$$\leq C\int\limits_0^{t-\theta}(t-\tau)^{-1+\frac{\lambda}{\gamma}}d\tau = C_1(t-\tau)^{\frac{\lambda}{\gamma}}\Big|_0^{t-\theta} = C_1(\theta^{\frac{\lambda}{\gamma}} - t^{\frac{\lambda}{\gamma}}).$$

Отже, в цьому інтегралі можна переходити до границі при $\theta \to 0$. Тому

$$\lim_{\theta\to 0}\int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi) - f(\tau, x))d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi) - f(\tau, x))d\xi.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi)d\xi = 1,$$

а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x-\xi)d\xi = 0,$$

то другий доданок дорівнює нулю для довільного $\theta \geq 0$.

Твердження 2. Вірною є така формула

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{21}(t,x) = \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} G_0(kT, x-\xi) f(t,\xi)d\xi, \quad 0 < t < t, x \in \mathbb{R}^n.$$

Можливість почленного диференціювання ряду забезпечується оцінкою похідних $\dfrac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi)$, $k \geq 1$, і рівномірною збіжністю ряду, складеного з похідних.

Об'єднуючи (3.71) і твердження 1, 2 отримаємо, що вірною є рівність (3.72).

Треба встановити формулу для дії ГСІ D^α_Ω на функції I_2, I_3 із формули (3.51). При цьому слід розрізняти випадок $\alpha < \gamma$ і випадок $\alpha = \gamma$. У першому випадку можна застосовувати ГСІ D^α_Ω безпосередньо під знаком інтеграла, а в другому випадку треба створювати спеціальну формулу, яка вимагає розуміння ГСІ D^α_Ω як границі при $\varepsilon \to 0$ $D^\gamma_{\Omega,\varepsilon}$.

Оскільки A^α_Ω діє по аргументу x, від якого залежить функція G, то спочатку треба вивчити дію ГСІ D^α_Ω на функцію G. Для цього треба мати оцінку $\Delta^l_h G$ при $|h| \leq (t-\mu)^{1/\gamma}$ та при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$.

Враховуючи різні зображення для скінченних різниць та оцінку (3.60) отримаємо, що при малих h (зокрема, при $|h| \leq (t-\mu)^{1/\gamma}$) вірною є нерівність

$$|(\Delta^l_h G)(t,T,x,\mu)| \leq$$

$$\leq C|h|^{[\alpha]+1} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{l} \frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma} + |x-\theta_\nu \nu h|]^{n+\gamma+[\alpha]+1}}, \tag{3.73}$$

а при великих h (зокрема, при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$) отримаємо, що

$$|(\Delta^l_h G)(t,T,x,\mu)| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{l} \frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma} + |x-\nu h|]^{n+\gamma}}. \tag{3.74}$$

Зауважимо, що оцінка (3.73) забезпечує збіжність ГСІ $D^\alpha_\Omega G$ при $|h| \leq 1$, а (3.74) – його збіжність при $|h| \geq 1$. Вони існують, якщо символ ПДО $a(\sigma)$ має гладкість $N = 2n + 2[\gamma] + 1$. Тоді гладкість G дорівнює $N - 2n - [\gamma]$, $\gamma \geq 1$; при $0 < \gamma < 1$ символ вважається нескінченно гладким по просторових змінних.

Із цих оцінок та теореми Фубіні при $\alpha < \gamma$ отримуємо, що ГСІ $D^\alpha_\Omega I_2(t,x,\mu)$ є абсолютно збіжний і його можна застосовувати під знаком інтеграла

$$(D^\alpha_\Omega I_2)(t,x,\mu) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(t-\tau,T,x-\xi,\mu) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{3.75}$$

де

$$D^\alpha_\Omega G \equiv G_\Omega = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Omega}(\sigma) \exp\{i(x,\sigma) - a_\gamma(\sigma)t\} \times$$

$$\times(\mu - \exp\{-a_\gamma(\sigma)T\})^{-1}d\sigma, (t,x) \in \Pi, \mu > 1. \qquad (3.76)$$

Користуючись (3.76) можна переконатися, що формула (3.75) є вірною для цілого непарного $\alpha < \gamma$ і парної характеристики Ω. Зауважимо, що коли за символом $a_\alpha(\sigma)$ будувати символ $\tilde{\Omega}(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\alpha(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, де a_α – символ ПДО порядку однорідності $\alpha < \gamma$. Тут ГСІ D_Ω^α з характеристикою Ω є більш ширшим оператором і його символ визначається формулою

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = \frac{1}{d_{nl}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h|^{-n-\alpha}(1 - \exp\{i\xi h\})^l \Omega\Big(x; \frac{h}{|h|}\Big) dh.$$

Розглянемо тепер ГСІ порядку γ з символом $\tilde{\Omega}(\sigma)$. Якщо ПДО побудований за символом $a_\gamma(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\gamma(\sigma)$. Додатково треба припускати, що $\tilde{\Omega}(\sigma)$ має при $\sigma \neq 0$ $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$ неперервних похідних, якщо $\gamma \geq 1$, або є нескінченно диференційовною функцією при $0 < \gamma < 1$, $\tilde{\Omega}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$ і

$$|D_\sigma^{æ}\tilde{\Omega}(\sigma)| \leq C_n |\sigma|^{\gamma - |æ|}.$$

Окремо розглянемо випадок цілого γ. Тоді при непарному γ і парній характеристиці $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ. Припустимо, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(\sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu} Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1,$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu} = 0$, якщо $\gamma = 2+2\nu+2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Якщо $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ, то цей випадок не розглядається, бо він охоплюється теорією параболічних диференціальних рівнянь [251, 252].

Зауважимо також, що функція $G(t, T, x, \mu)$ визначається рівністю (3.56) через $G_0(t + kT, x)$ із (3.57). Тоді I_2 із формули (3.54) записуємо у вигляді

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t + kT - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi$$

і при застосуванні D_Ω^γ до I_2 регуляризації потребує перший доданок

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv I_{20},$$

а до всіх решти доданків ГСІ D_Ω^γ можна застосувати безпосередньо під знаком інтеграла.

Теорема 3.4. *При перерахованих вище умовах на $\tilde{\Omega}(\sigma)$ ГСІ $D_\Omega^\gamma I_2$ існує в сенсі умовної збіжності [29, формула (6), стор. 911] і*

$$D_\Omega^\gamma I_2 = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{0\Omega}(t-\tau, x-\xi)(f(\tau,\xi) - f(\tau,x)) d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{0\Omega}(t-\tau+kT, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{3.77}$$

а ГСІ $D_\Omega^\gamma I_3$ існує в звичайному сенсі і

$$D_\Omega^\gamma I_3 = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(T+t-\tau, T, x-\xi, \mu) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{3.78}$$

$$(t,x) \in \Pi, \mu > 1.$$

Доведення. Нехай $0 < \theta < 1$ і позначимо

$$I_{20}^\theta \equiv \frac{1}{\mu}\int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Із (3.73) і (3.74) випливає абсолютна збіжність ГСІ $D_\Omega^\gamma I_{20}^\theta$ і формула

$$D_\Omega^\gamma I_{20}^\theta = \int\limits_0^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\Omega^\gamma G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Із формули (3.1) з урахування (3.73), (3.74) випливає, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_\Omega^\gamma G_0(t,\xi) d\xi = 0$. Вірною є також оцінка

$$|D_\Omega^\gamma G_0(t-\tau, x-\xi)| \le C[(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi|]^{-n-\gamma}. \tag{3.79}$$

Тоді

$$D_{\Omega}^{\gamma} I_{20}^{\theta} = \int\limits_{0}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_{\Omega}^{\gamma} G_0(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi) - f(\tau,x)]d\xi.$$

Із оцінки (3.79) і умови 4) випливає збіжність останніх інтегралів.

Остання формула показує, що рівномірно по $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_{\Omega}^{\gamma} I_{20} = \lim_{\theta \to 0} I_{20}^{\theta}.$$

До усіх інших доданків функції I_2 і до усіх доданків функції I_3 можна застосувати ГСІ D_{Ω}^{γ} безпосередньо під знаком інтеграла, бо для $D_{\Omega}^{\gamma} G(t-\tau+kT, x-\xi)$ вірною є оцінка (3.79), де у правій частині замість $(t-\tau)^{1/\gamma}$ слід писати $(t-\tau+kT)^{1/\gamma}$, $k \geq 1$. Теорема доведена.

3.3. Багатоточкова задача для ПДР зі змінним символом

3.3.1. Постановка задачі

Нехай $T > 0$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$, $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_m$, $\mu > 1$, $\beta > 0$ – числові параметри; $\{\zeta \,|\, 0 \leq \zeta \leq p\} \subset \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$; $\Pi \equiv \left\{(t,x) \,\middle|\, 0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\right\}$; відносно a_ζ: $\Pi \to \mathbb{R}$ виконуються умови:

1) функції a_ζ: $\Pi \to \mathbb{R}$, $0 \leq \zeta \leq p$, є неперервними, однорідними по σ порядку γ_ζ функціями, де γ_0, γ_1, $\dots$, γ_p – відомі дійсні числа такі, що $\gamma_\zeta > 0$, $0 \leq \zeta \leq p$, причому $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_p < \gamma_0$;

2) існує стала $\delta > 0$ така, що $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, вірною є нерівність

$$a_0(t,\sigma) \geq \delta |\sigma|^{\gamma_0};$$

3) функції $a_\zeta(t,\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t \in [0,T]$, $0 \leq \zeta \leq p$, є нескінченно диференційовними по σ, для яких правильні оцінки

$$|D_\sigma^{æ} a_\zeta(t,\sigma)| \leq C_N |\sigma|^{\gamma_\zeta - |æ|}, \quad æ \in Z_+^n, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 1 \leq \zeta \leq p;$$

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\exists C > 0$, $\exists \beta \leq \gamma_0 - \varepsilon$, $\exists \varphi$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$: $|\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^\beta$;

5) $\forall\varepsilon>0$, $\forall(t,x)\in\Pi$ $\exists C>0$, $\exists\beta\le\gamma_0-\varepsilon$ $\exists f\colon\Pi\to\mathbb{R}$, $f\in C(\Pi)$:

$$|f(t,x)|\le C(1+|x|)^\beta,\quad (f(t,x)-f(t,y))\le C|x-y|^\lambda, 0<\lambda<1.$$

Формулою

$$Au(t,x)\equiv F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\sum_{\zeta=0}^{p}a_\zeta(t,\sigma)F_{x\to\sigma}[u(t,x)]\Big],\quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.80}$$

визначається псевдодиференціальна операція з символом $a\colon\Pi\to\mathbb{R}$, де

$$a(t,\sigma)\equiv\sum_{\zeta=0}^{p}a_\zeta(t,\sigma),\quad (t,\sigma)\in\Pi.$$

Зауважимо, що формулою (3.80) ПДО визначається лише на швидко спадних функціях $u\in C^1_t\times S(\mathbb{R}^n)$. Якщо $u\in C^{1,[\gamma_0]}_{t,z}(\Pi)$, $[\gamma_0]$ – ціла частина $\gamma_0\ge 1$, то ПДО A визначена в [29] і тлумачиться як гіперсингулярна інтегральна операція (ГСІО).

Розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x)+Au(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi, \tag{3.81}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{m}\nu_k u(t,x)|_{t=t_k}+\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.82}$$

$0<t_1<t_2<\dots<t_m=T$, $0<\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_m$, $\mu>|\vec{\nu}|$, $\vec{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_m)$, $|\vec{\nu}|=\sum\limits_{i=1}^{m}\nu_i$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\nu_k}{\mu}\exp\{-a(t_k,\sigma)\}<1$.

Якщо для довільного $\sigma'\in S^{n-1}$ $a_\zeta(t_k,\sigma')\ge 0$, $1\le k\le m$, $1\le\zeta\le p$, то при $\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\nu_k}{\mu}<1$ ця умова виконується, а також $\sum\limits_{k=1}^{m}c\nu_k<\mu$, де стала C визначена пізніше рівністю (3.89).

3.3.2. Формула для розв'язку однорідного рівняння

В образах Фур'є однорідна задача (3.81), (3.82) набуває вигляду

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt}=-\sum_{\zeta=0}^{p}a_\zeta(t,\sigma)v(t,\sigma),(t,\sigma)\in\Pi \tag{3.83}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} + \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.84}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.83)

$$v(t,\sigma) = C \exp\Big\{ - \int_0^t \sum_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \Big\}.$$

Задовольнимо умову (3.84). Тоді

$$\mu C = \sum_{k=1}^{m} \nu_k C \exp\Big\{ - \int_0^{t_k} \sum_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \Big\} + \tilde{\varphi}(\sigma),$$

звідки

$$C = \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k \exp\Big\{ - \int\limits_0^{t_k} \sum\limits_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \Big\}}.$$

Розв'язок задачі (3.83), (3.84) дається формулою

$$v(t,\sigma) = \frac{\exp\Big\{ - \int\limits_0^{t} \sum\limits_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \Big\} \tilde{\varphi}(\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k \exp\Big\{ - \int\limits_0^{t_k} \sum\limits_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \Big\}}. \tag{3.85}$$

Позначимо

$$\int_\tau^t \sum_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma) d\beta \equiv a(t,\tau,\sigma). \tag{3.86}$$

Тоді

$$\frac{1}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k \exp\{-a(t_k,\sigma)\}} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{\mu} \exp\{-a(t_k,\sigma)\}} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mu}\Big)^r \Big(\sum_{k=1}^{m} \nu_k \exp\{-a(t_k,\sigma)\} \Big)^r =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mu}\Big)^r \sum_{|\vec{r}|=r} \frac{r!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_m!} \nu_1^{r_1} \ldots \nu_m^{r_m} \exp\{-(a(t_1,\sigma) r_1 + \cdots + a(t_m,\sigma) r_m)\},$$

і останній вираз позначимо через Q:

$$Q(t,\sigma;\vec{\nu},\mu) \equiv \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^r \sum_{|\vec{r}|=r} \frac{r!}{r_1!\cdot\dots\cdot r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}\times$$

$$\times\exp\{-(a(t,\sigma)+a(t_1,\sigma)r_1+\dots+a(t_m,\sigma)r_m)\}, \tag{3.87}$$

де $a(t_k,\sigma)$ визначені рівністю (3.86).

Проведемо оцінку $Q(t,x;\vec{\nu},\mu)$. Покладемо

$$B \equiv \max_{1\le\zeta\le p} \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ \sigma'\in S^{n-1}}} |a_\zeta(t,\sigma')|,$$

де S – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$. Оскільки $a_\zeta(t,\sigma) = |\sigma|^{\gamma_\zeta}a_\zeta(t,\sigma')$, то $|a_\zeta(t,\sigma)| \le |\sigma|^{\gamma_\zeta}B$. Оскільки

$$a(t,\sigma) \equiv \int_0^t \sum_{\zeta=0}^{p} a_\zeta(\beta,\sigma)d\beta = \int_0^t a_0(\beta,\sigma)d\beta + \sum_{\zeta=1}^{p}\int_0^t a_\zeta(\beta,\sigma)d\beta,$$

то

$$\exp\{-a(t,\sigma)\} = \exp\Big\{-\int_0^t a_0(\beta,\sigma)d\beta\Big\}\exp\Big\{-\sum_{\zeta=1}^{p}\int_0^t a_\zeta(\beta,\sigma)d\beta\Big\}.$$

Використовуючи умови параболічності $a_0(\beta,\sigma) \ge \delta|\sigma|^{\gamma_0}$ отримуємо, що

$$\exp\Big\{-\int_0^t a_0(\beta,\sigma)d\beta\Big\} \le \exp\{-\delta|\sigma|^{\gamma_0}t\}.$$

Далі

$$\exp\Big\{-\sum_{\zeta=1}^{p}\int_0^t a_\zeta(\beta,\sigma)d\beta\Big\} \le \exp\Big\{\sum_{\zeta=1}^{p}\int_0^t |a_\zeta(\beta,\sigma)|d\beta\Big\} \le$$

$$\le \exp\Big\{B\sum_{\zeta=1}^{p}|\sigma|^{\gamma_\zeta}t\Big\}.$$

Якщо тепер скористатися нерівністю

$$ab \le \frac{a^c}{c}+\frac{b^d}{d}, \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1, \quad a\ge 0, b\ge 0,$$

причому рівність досягається при $a = b = 0$ і $a = b = 1$, то для довільного $\varepsilon > 0$ дістанемо, що

$$ab = (a\varepsilon)\frac{b}{\varepsilon} \leq \frac{a^c\varepsilon^c}{c} + \frac{\varepsilon^{-d}b^d}{d}.$$

Звідси при $a = |\sigma|^{\gamma_\zeta}\varepsilon$, $b = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $c = \frac{\gamma_0}{\gamma_\zeta}$, $d = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_\varepsilon}$ дістанемо, що

$$|\sigma|^{\gamma_\zeta} = (|\sigma|^{\gamma_\zeta} \cdot \varepsilon)\frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{\gamma_\zeta}{\gamma_0}(|\sigma|^{\gamma_\zeta}\varepsilon)^{\frac{\gamma_0}{\gamma_\zeta}} + \frac{\gamma_0 - \gamma_\zeta}{\gamma_0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_\zeta}}.$$

Тоді

$$tB\sum_{\zeta=1}^{p}|\sigma|^{\gamma_\zeta} \leq tB|\sigma|^{\gamma_0}\sum_{\zeta=1}^{p}\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_0}\varepsilon^{\frac{\gamma_0}{\gamma_\zeta}} + Bt\sum_{\zeta=1}^{p}\frac{\gamma_0 - \gamma_\zeta}{\gamma_0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_\zeta}},$$

$$\exp\{-a(t,\sigma)\} \leq C\exp\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}t\},$$

де

$$\delta_1 = \delta - B\sum_{\zeta=1}^{p}\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_0}\varepsilon^{\frac{\gamma_0}{\gamma_\zeta}}, \tag{3.88}$$

$$C = \exp\Big\{BT\sum_{\zeta=1}^{p}\frac{\gamma_0 - \gamma_\zeta}{\gamma_0}\varepsilon^{\frac{-2\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_\zeta}}\Big\}. \tag{3.89}$$

Вибором числа $\varepsilon > 0$ розпорядимося так, щоб виконувалася нерівність $\delta_1 > 0$. Стала $C > 1$ залежить від B, порядків γ_k, $0 \leq k \leq p$ ПДО, що входять у вихідне рівняння (3.81), числа ε і T – ширини шару Π_T. Очевидно, що стала C експоненціально зростає при зростанні T. Також очевидно, що стала C не залежить від T, якщо у вихідному рівнянні відсутні молодші члени (див. [41]).

Аналогічно отримуємо, що

$$\exp\{-a(t_k,\sigma)r_k\} \leq c^{r_k}\exp\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}t_kr_k\}$$

і, отже,

$$\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{m}a(t_k,\sigma)\Big\}r_k \leq c^{|\vec{r}|}\exp\Big\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}\sum_{k=1}^{m}t_kr_k\Big\} \leq c^{|\vec{r}|}.$$

Тоді

$$|Q(t,\sigma;\mu,\vec{\nu})| \leq \exp\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}t\}\frac{c}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{c}{\mu}\Big)^r\Big(\sum_{k=1}^{m}\nu_k\Big)^r =$$

$$= \frac{c}{\mu - c\sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k}\exp\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}t\},$$

де δ_1 із (3.88), за умови, що

$$\mu > C\sum_{k=1}^{m}\nu_k, \tag{3.90}$$

де C із (3.89).

Позначимо

$$C_1 = \frac{C}{\mu - C\sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k} \tag{3.91}$$

і отримаємо остаточну оцінку функції Q:

$$|Q(t,\sigma;\mu,\vec{\nu})| \leq C_1\exp\{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}t\}, \tag{3.92}$$

де δ_1, C, C_1 визначені рівностями (3.88), (3.89), (3.91) відповідно. Формула (3.85) набуває вигляду

$$v(t,\sigma) = Q(t,\sigma;\mu,\vec{\nu})\tilde{\varphi}(\sigma),$$

де Q визначена рівністю (3.87) і для неї вірною є оцінка (3.92). Тоді розв'язок задачі (3.81), (3.82) для однорідного рівняння ($f \equiv 0$)

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big\{(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x-\xi,\sigma)\}Q(t,\sigma;\mu,\vec{\nu})d\sigma\Big\}\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.93}$$

Оцінка (3.92) гарантує законність при $t > 0$ диференціювання по t і застосування ПДО (3.80), який тлумачиться як ГСІ, під знаком інтеграла в (3.93).

Позначимо

$$G(t,x) \equiv (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}Q(t,\sigma;\mu,\vec{\nu})d\sigma, \tag{3.94}$$

$0 < t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, де Q – функція з (3.87), для якої правильна оцінка (3.92).

Оцінимо функцію G, де Q визначена в (3.87). Для цього скористаємося результатами праць [29, лема 1; 37; 230, лема 2], звідки випливають оцінки

$$|G(t,x)| \le C\Big\{\sum_{\zeta=0}^{p} t(t^{1/\gamma_\zeta} + |x|)^{-(n+\gamma_\zeta)}\Big\}, \tag{3.95}$$

$$|D_x^{æ} G(t,x)| \le C_{æ} \sum_{\zeta=0}^{p} t(t^{1/\gamma_\zeta} + |x|)^{-(n+\gamma_\zeta+|æ|)}, \tag{3.96}$$

$æ \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$|\partial_t G(t,x)| \le C \sum_{\zeta=0}^{p} (t^{1/\gamma_\zeta} + |x|)^{-(n+\gamma_0)}, \tag{3.97}$$

які правильні для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Оцінки (3.95) – (3.97) гарантують законність при $t > 0$ диференціювання по t і застосування A_ζ, $0 \le \zeta \le p$, під знаком інтеграла в (3.93).

3.3.3. Неоднорідне рівняння

У випадку сталого символа формула для розв'язку $u \colon \Pi \to \mathbb{R}$ набуває вигляду

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi; \mu, \vec{\nu})\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\mu \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \nu_k \int_0^{t_k} d\tau \int_{\mathbb{R}} G(t+t_k-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) f(\tau,\xi)d\xi, \quad t \ge 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.98}$$

де функція G визначена виразом (3.94) і для неї вірними є оцінки (3.95) – (3.97).

Отже, вірною є така теорема.

Теорема 3.5. *Якщо виконуються умови 1) – 3), то задача* (3.81), (3.82) *має фундаментальний розв'язок* G (3.92), *для якого вірними є оцінки* (3.95) – (3.97). *При* $f \equiv 0$ *розв'язок цієї задачі записується у вигляді* (3.93). *Для сталого символа формула для розв'язку набуває вигляду* (3.98).

3.4. Приклади

3.4.1. Двоточкова задача

Нехай $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$; $T > 0$, μ, ν – числа,

$$u_t(t,x) + A_1 u(t,x) = f(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.99}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \nu u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \mu > 0, \nu > 0, \tag{3.100}$$

де

$$A_1 u(t,x) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[|\sigma| F_{x\to\sigma}[u(t,x)]], \quad t > 0, \sigma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \tag{3.101}$$

є ПДО з символом $|\sigma|$, визначений лише на спадних функціях по x, або [41]

$$A_1 u(t,x) \equiv \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathbb{R}\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon \le |h| \le R} \frac{\Delta_h u(t,x)}{|h|^2} dh, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.102}$$

$\Delta_h u(t,x) = u(t,x+h) - u(t,x)$. Якщо $u(t,x) \equiv C$, то $\Delta_h C = 0$ і в (3.102) $A_1 C = 0$ в класичному сенсі, а в (3.101) – в сенсі теорії узагальнених функцій.

Формула для розв'язку задачі (3.99), (3.100)

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,T,x-\xi;\mu,\nu)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\mu \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau,T,x-\xi;\mu,\nu) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\nu \int\limits_t^T d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(T+t-\tau,T,x-\xi;\mu,\nu) f(\tau,\xi) d\xi, \tag{3.103}$$

де

$$G(t,T,x;\mu,\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-|\sigma|t + ix\sigma\}}{\mu - \nu\exp\{-|\sigma|T\}} d\sigma.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\mu - \nu\exp\{-|\sigma|T\}} = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \exp\{-|\sigma|kT\},$$

то [41]

$$G(t,T,x;\mu,\nu) = \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ix\sigma - |\sigma|(t+kT)\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{t+kT}{(t+kT)^2+x^2}, \quad \mu > \nu, t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{3.104}$$

При цьому для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu > \nu$ $G(t,T,x;\mu,\nu) > 0$, а також

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,T,x;\mu,\nu)dx = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t+kT}{(t+kT)^2+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\frac{\nu}{\mu}} = \frac{1}{\mu-\nu}. \tag{3.105}$$

Нехай $\varphi(x) \equiv C_1$, $f(t,x) \equiv C_2$. Тоді підставивши (3.104) в (3.103) і враховуючи (3.105), отримаємо вираз для розв'язку задачі (3.99), (3.100)

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu-\nu} + \mu\frac{C_2 t}{\mu-\nu} + \frac{C_2(T-t)\nu}{\mu-\nu}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

незалежний від x, або

$$u(t,x) = \frac{1}{\mu-\nu}\Big(C_1 + ((\mu-\nu)t + \nu T)C_2\Big), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{3.106}$$

Перевіряємо, що функція u із (3.106) є розв'язком задачі (3.99), (3.100).

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial t} = C_2$, $A_1 u = 0$ (u не залежить від x), $f = C_2$, то рівняння, очевидно, задовольняється в класичному сенсі, якщо ПДО (3.101) тлумачиться як ГСІ (3.102).

Перевіряємо виконання нелокальної умови (3.100). Оскільки

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \frac{\mu}{\mu-\nu}(C_1 + C_2 T\cdot\nu)$$

а

$$\nu u(t,x)|_{t=T} + C_1 = \frac{\nu}{\mu-\nu}[C_1 + ((\mu-\nu)T + \nu T)C_2] + C_1 = \frac{\mu}{\mu-\nu}(C_1 + C_2\nu T),$$

то ліва частина (3.100) збігається з її правою частиною.

Висновки. 1. Якщо рівняння (3.99) однорідне, тобто $f(t,x) \equiv 0$, то при $\varphi(x) \equiv C_1$ розв'язок задачі (3.99), (3.100) записується у вигляді

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu-\nu}, \quad t>0, x\in\mathbb{R}, \mu>\nu>0,$$

і є величиною сталою, залежною від μ і ν, $\mu>\nu>0$. При $\mu=\nu$ ряд (3.104) розбігається як гармонійний ряд, а при $\mu<\nu$ ряд (3.104) є розбіжним степеневим рядом. Тому задача (3.99), (3.100) розв'язку не має. Знак u залежить від знаку C_1.

2. Якщо рівняння (3.99) неоднорідне і $\varphi(x) = C_1$, $f(t,x) = C_2$, то при $\mu>\nu$ задача (3.99), (3.100) має єдиний розв'язок, який записується у вигляді (3.106). При $\mu\le\nu$ задача (3.99), (3.100) розв'язку не має.

3. При $\mu>\nu>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $C_1\ge 0$, $C_2\ge 0$ розв'язки обох задач (однорідної і неоднорідної) є невід'ємними.

При $\mu>\nu>0$, $C_1=C_2=0$ розв'язок $u(t,x)$ є тотожним нулем.

При $\mu>\nu>0$, $C_1<0$, $C_2<0$ маємо, що $u(t,x)<0$.

Якщо $\mu>\nu>0$, C_1 і C_2 різних знаків такі, що $C_1+\nu C_2 T=0$, то $u(t,x) = C_2 t$ і не залежить від C_1.

3.4.2. Задачі керування

Задача 1. Знайти таке значення параметра μ_0, щоб у момент часу t_0 при заданих C_1, C_2, ν_k, t_k, $1\le k\le m$, величина u дорівнювала u_0.

Відповідь.

$$\mu_0 = \frac{1}{u_0 - C_2 t_0}\Big(C_1 + u_0 \sum_{k=1}^{m} \nu_k + C_2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k (t_k - t_0)\Big).$$

Аналогічно можуть бути розв'язані такі задачі.

Задача 2. Знайти таке значення C_i, щоб у момент часу t_0 при заданих μ_0, C_i, ν_j, t_k величина $u \equiv u_0$, $i = 1$, $j = 2$; $i = 2$, $j = 1$, $1 \le k \le m$.

Задача 3. Знайти такий момент часу t_0, щоб при заданих C_1, C_2, μ_0, ν_k, t_k, $1 \le k \le m$, величина $u \equiv u_0$.

3.4.3. m-точкова задача ($m \ge 3$)

Нехай $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ – незалежні змінні, $r \in \mathbb{N}$ – число, $\vec{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le m$, $|\vec{r}| = r_1 + \dots + r_m$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_m)$, $0 < t_1 < \dots < t_m$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $|\vec{\nu}| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_m$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $(\vec{\nu})^{\vec{r}} = \nu_1^{r_1} \dots \nu_m^{r_m}$, $\vec{r}! = r_1! \dots r_m!$,

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(t,x)|_{t=t_k} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.107}$$

Формула для розв'язку задачі (3.99), (3.107), де $A_1 \equiv A_\gamma$ з символом $a(\sigma)$, однорідності степеня γ

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+\mu \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \nu_k \int_t^{t_k} d\tau \int_{\mathbb{R}} G(t+t_k-\tau, x-\xi; \mu, \vec{\nu}) f(\tau,\xi) d\xi, \quad t>0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.108}$$

де

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu}) \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\} d\sigma}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k \exp\{-a(\sigma)t_k\}}, \quad \mu > |\vec{\nu}|.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\mu-\sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k\exp\{-a(\sigma)t_k\}}=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mu}\Big)^r\sum_{|\vec{r}|=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}\times$$
$$\times\exp\{-a_\gamma(\sigma)(t_1r_1+\dots+t_mr_m)\},$$

то

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu})=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mu}\Big)^r\sum_{|\vec{r}|=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{i(x,\sigma)-a(\sigma)(t+(\vec{t},\vec{r}))\}d\sigma,$$

$t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\mu>|\vec{\nu}|$. Оскільки при $a(\sigma)\equiv|\sigma|$ [41, стор. 34]

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{ix\sigma-|\sigma|(t+(\vec{t},\vec{r}))\}=\frac{1}{\pi}\frac{t+(\vec{t},\vec{r})}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2+x^2},$$

$$G(t,x;\mu,\vec{\nu})=\frac{1}{\pi\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\mu}\Big)^r\sum_{|\vec{r}|=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}\frac{t+(\vec{t},\vec{r})}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2+x^2},\quad(3.109)$$

$t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\mu>|\vec{r}|$ і $G\geq 0$.

При цьому для $t>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\mu>|\vec{\nu}|$, використовуючи те, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{(t+(\vec{t},\vec{r}))dx}{(t+(\vec{t},\vec{r}))^2+x^2}=\pi$$

і

$$\sum_{|\vec{r}|=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}=|\vec{\nu}|^r$$

відому поліноміальну формулу, отримуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}}G(t,x;\mu,\vec{\nu})dx=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{|\vec{\nu}|}{\mu}\Big)^r=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{|\vec{\nu}|}{\mu}}=\frac{1}{\mu-|\vec{\nu}|}.\quad(3.110)$$

Нехай $\varphi(x)\equiv C_1$, $f(t,x)\equiv C_2$. Тоді, підставивши (3.109) в (3.108) і враховуючи (3.110), отримаємо, що розв'язок задачі (3.99), (3.107) набуває вигляду

$$u(t,x)=\frac{1}{\mu-|\vec{\nu}|}\Big[C_1+\Big(\mu t+\sum_{k=1}^{m}\nu_k(t_k-t)\Big)C_2\Big],\quad t>0,x\in\mathbb{R},\mu>|\vec{\nu}|.\quad(3.111)$$

Перевіримо, що функція (3.111) задовольняє рівняння (3.99) і крайові умови (3.107). Оскільки функція u із (3.111) є сталою по x, то $A_1 u = 0$. Тому залишилося довести, що $u_t = C_2$. Справді, диференціюючи (3.111) по t, отримуємо тотожність

$$u_t \equiv \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|}\Big\{\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \nu_k\Big) C_2\Big\} \equiv C_2.$$

Отже, функція (3.111) задовольняє рівняння (3.99). Перевіримо виконання нелокальної умови (3.107). Маємо, що ліва частина (3.107) набуває вигляду $\dfrac{\mu}{\mu - |\vec{\nu}|}\Big\{C_1 + \Big(\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k t_k\Big) C_2\Big\}$. Підрахуємо праву частину (3.107):

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k u|_{t=t_k} + C_1 = \frac{\mu}{\mu - |\vec{\nu}|}\Big\{C_1 + C_2 \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k\Big\}.$$

При цьому використано рівність

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k (t_k - t_i) = 0,$$

яка легко перевіряється. Справді,

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k (t_k - t_i) = \sum_{i=1}^{m} \nu_i \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k - t_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k \Big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \nu_i \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k - \sum_{k=1}^{m} \nu_k \sum_{i=1}^{m} \nu_i t_i = 0.$$

Отже, нелокальна умова (3.107) виконується.

Висновки. 1. Якщо рівняння (3.99) однорідне (тобто $f \equiv 0$), то розв'язок задачі (3.99), (3.107) є сталою величиною (при $\varphi \equiv C_1 \quad \mu > |\vec{\nu}|$)

$$u(t, x) = \frac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|},$$

знак якої залежить від знаку C_1. Розв'язок єдиний.

2. Якщо рівняння (3.99) і умова (3.107) неоднорідні і $\varphi \equiv C_1$, $f \equiv C_2$, то при $\mu > |\vec{\nu}|$ функція (3.111) є єдиним розв'язком задачі (3.99), (3.107). При $\mu \le |\vec{\nu}|$

задача (3.99), (3.107) розв'язку не має. Якщо задача однорідна ($\varphi = f = 0$), то вона має єдиний нульовий розв'язок.

3. Якщо $\mu > |\vec{\nu}|$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, то розв'язки обох задач (однорідної і неоднорідної) невід'ємні.

3.4.4. Фізичне тлумачення розв'язків

Нехай $t > 0$ – час, $x \in \mathbb{R}$ – точка однорідної нитки, яка займає положення вісі Ox, $u(t, x)$ – температура нитки в момент часу $t > 0$ у точці $x \in \mathbb{R}$; $\mu > 0$, $\nu_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq m$, – деякі параметри, що визначають інтенсивність теплових джерел в моменти часу $t = 0$ та $t = t_k$, $1 \leq k \leq m$ відповідно; $\varphi(x)$ – відома функція, $f(t, x)$ – відома функція, що визначає інтенсивність зовнішнього джерела тепла. Рівняння (3.99) можна тлумачити як узагальнене рівняння теплопровідності, де замість диференціального оператора $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який є ПДО з символом $|\sigma|^2$ записано його квадратний корінь, тобто функція від оператора $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, символом якої є $|\sigma|$.

Умова (3.107) у вигляді

$$\mu u(t, x)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(t, x)|_{t=t_k} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

може тлумачитися як різниця між вливаннями тепла в точку $x \in \mathbb{R}$ в початковий момент часу $t = 0$ і наступні моменти часу $t = t_k$, $1 \leq k \leq m$, з відповідними інтенсивностями, що є відомою функцією, залежною від x.

Якщо теплові джерела відсутні ($f \equiv 0$) і різниця в (3.107) стала ($\varphi \equiv C_1$), то $u = \dfrac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|}$ – також стала, залежна від інтенсивностей μ і ν_k, $1 \leq k \leq m$, в точках $t = 0$ і $t = t_k$, $1 \leq k \leq m$, відповідно. Число $\dfrac{1}{\mu - |\vec{\nu}|}$ можна назвати коефіцієнтом технологічного нагрівання стержня.

Якщо $\varphi \equiv 0$, тобто $C_1 = 0$, то

$$u = C_2 t + \frac{C_2}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum_{k=1}^{m} \nu_k t_k,$$

де $C_2 t$ – кількість тепла, отриманого стержнем від зовнішнього нагрівання, а $\dfrac{C_2}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k t_k$ – частка тепла, отримана стержнем від зовнішнього нагрівання з урахуванням технологічного процесу (3.107): $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k (C_2 t_k)$, де ν_k – інтенсивність тепла, а $C_2 t_k$ – кількість тепла, отриманого додатково в момент часу t_k, $1 < k \leq m$. Сумарна кількість тепла дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k C_2 t_k$.

Загальна формула така:

$$u(t,x) = \frac{C_1}{\mu - |\vec{\nu}|} + C_2 t + \frac{1}{\mu - |\vec{\nu}|} \sum_{k=1}^{m} \nu_k (C_2 t_k),$$

де кожен доданок має свій фізичний зміст.

3.4.5. Розривна задача Коші

Якщо в задачі (3.99), (3.100) $f \equiv 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, а

$$\varphi = \begin{cases} T_0, & x \in (-\infty, 0), \\ \dfrac{T_0 + T_1}{2}, & x = 0, \\ T_1, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

то її розв'язок набуває вигляду [266]

$$u(t,x,T,\mu) = \frac{T_0 + T_1}{2} + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{k+1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{t + kT}.$$

Зауважимо, що в [264] доведена коректна розв'язність задачі Коші для модельного ППДР з розривною початковою умовою в класі неперервно диференційовних обмежених функцій.

3.5. Багатоточкова задача з нелокальними псевдодиференціальними умовами

Тут ми продовжуємо вивчати нелокальну задачу, де ПДО вперше запроваджено у нелокальні умови і опубліковано в [209].

3.5.1. Постановка задачі та формула для розв'язку

Нехай $T > 0$, $\mu > 1$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_m < \gamma_0$, $\beta_1 < \dots < \beta_m$, $0 < \nu_1 < \dots < \nu_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i < \mu$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$ – числові параметри, $\Pi \equiv \{(t,x) \,|\, 0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Припустимо, що нескінченно диференційовні однорідні порядку $\gamma_k > 0$ функції a_{γ_k}: $\mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ задовольняють умови: 1), 2) п. 3.2.1, $1 \leq k \leq m$.

Через A позначимо ПДО з символом $a(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_{\gamma_k}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, а через B_k – ПДО з символами $b_k(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, однорідними порядків β_k, $1 \leq k \leq m$, які задовольняють умову 2) п. 3.2.1.

Функції f: $\Pi \to \mathbb{R}^n$, φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняють умови 3), 4) п. 3.2.1.

Розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x) + Au(t,x) = f(t,x), (t,x) \in \Pi, \tag{3.112}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k B_k u(t,x)|_{t=t_k} + \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.113}$$

Нехай

$$M(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \nu_k b_k(\sigma) \exp\{-a(\sigma)t_k\}\Big)^{-1}, \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.114}$$

Запишемо розв'язок задачі (3.112), (3.113) у вигляді

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\} v(t,\sigma) d\sigma \equiv I_1 + \mu I_2 + I_3, (t,x) \in \Pi, \tag{3.115}$$

де

$$I_1 = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{t_k} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_k^1(t + t_k - \tau, x - \xi) f(\tau,\xi) d\xi, (t,x) \in \Pi, \tag{3.116}$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^2(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, (t,x) \in \Pi, \tag{3.117}$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^3(t, x-\xi) \varphi(\xi) d\xi, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.118}$$

$$G_k^1(t+t_k-\tau,x-\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\sigma)(2\pi)^{-n}\nu_k b_k(\sigma)\times$$

$$\times\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(t+t_k-\tau)\}d\sigma, \qquad (3.119)$$

$$t+t_k-\tau>0,(t,x)\in\Pi,t>\tau,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$G^2(t-\tau,x-\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\sigma)(2\pi)^{-n}\exp\{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(t-\tau)\}d\sigma, \qquad (3.120)$$

$$(t,x)\in\Pi,t>\tau,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$G^3(t,x-\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} M(\sigma)\exp\{i(x-\xi,\sigma)-$$

$$-a(\sigma)(t)\}d\sigma,(t,x)\in\Pi,\xi\in\mathbb{R}^n, \qquad (3.121)$$

а функція $M(\sigma)$ визначена виразом (3.114).

Якщо рівняння (3.112) однорідне, то розв'язок задачі (3.112), (3.113) $u(t,x)=I_3$, $(t,x)\in\Pi$, є згорткою (3.118) функції G^3, визначеною формулою (3.121), і початкової функції φ.

3.5.2. Оцінка функцій G_k^1, $1\le k\le m$, G^2, G^3 та їх похідних

Розглянемо функцію G^3, $(t,x)\in\Pi$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, визначену формулою (3.121). Використовуючи поліноміальну формулу для функції $M(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, із (3.114), формально отримаємо вираз

$$M(\sigma)=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^r}\Big(\sum_{k=1}^{m}\nu_k b_k(\sigma)\exp\{-a(\sigma)t_k\}\Big)^r=$$

$$=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^r}\sum_{r_1+\cdots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\cdot\dots\cdot r_m!}\nu_1^{r_1}\cdot\dots\cdot\nu_m^{r_m}\times$$

$$\times(b_1(\sigma))^{r_1}\cdot\dots\cdot(b_m(\sigma))^{r_m}\exp\{-a(\sigma)(\vec{t},\vec{r})\},$$

де $(\vec{t},\vec{r})=t_1r_1+\cdots+t_mr_m$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\nu_i<\mu$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$; а кожен доданок має порядок однорідності $\beta_1r_1+\cdots+\beta_mr_m\equiv(\vec{\beta},\vec{r})$. Тоді із формули (3.121) отримаємо, що

$G^3 \equiv G^3(\hat{t}, x-\xi)$ і

$$G^3(\hat{t}, x-\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} (2\pi)^{-n} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (b_1(\sigma))^{r_1} \dots (b_m(\sigma))^{r_m} \times$$

$$\times \exp\{i(x-\xi,\sigma) - a(\sigma)\hat{t}\} d\sigma, \tag{3.122}$$

$$\hat{t} = t + (\vec{t}, \vec{r}), \hat{t} > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи [29, лема 2, стор. 917], [37, 230] отримаємо, що G^3 із (3.122) задовольняє такі оцінки:

$$|G^3(\hat{t}, x-\xi)| \leq C \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \times$$

$$\times \hat{t}(\hat{t}^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{m} \nu_i < \mu, \tag{3.123}$$

$$|D_x^{\chi} G^3(\hat{t}, x-\xi)| \leq C \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \times$$

$$\times \hat{t}(\hat{t}^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.124}$$

$$|D_t G^3(\hat{t}, x-\xi)| \leq C \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\nu_1^{r_1}\dots\nu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \times$$

$$\times (\hat{t}^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-n-\gamma-(\vec{\beta},\vec{r})}, \hat{t} > 0, \tag{3.125}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, вірною є така теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що для символів $a(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, ПДО A і B_k відповідно і $b_k(\sigma)$, $1 \leq k \leq m$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, і параметрів виконуються умови п. 3.5.1.*

Тоді існують функції G_k^1, $1 \leq k \leq m$, G^2 і G^3, визначені рівностями (3.119) – (3.121) *відповідно. Для функції G^3 та її похідних вірними є оцінки* (3.123)

– (3.125). *Аналогічні оцінки вірні для функції* G^2 *із* (3.120) *та її похідних, де в* (3.123) – (3.125) *замість* $\hat{t}$ *треба покласти* $\hat{t}-\tau$, $\hat{t}-\tau>0$. *Якщо у нерівностях* (3.123) – (3.125) *замість* $\hat{t}$ *покласти* $\hat{t}+t_k-\tau$, *а замість* $(\vec{\beta},\vec{r})$ *покласти* $(\vec{\beta},\vec{r})+\beta_k$ *і врахувати множник* ν_k *із* (3.119), *то отримаємо оцінки для функції* $G_k^1(t+t_k-\tau,x-\xi)$, $1\le k\le m$, $t+t_k-\tau>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

3.5.3. Основна теорема

Функцію G^3 із (3.122) можна оцінити збіжним числовим рядом

$$\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\nu_i}{\mu}\Big)^r=\Big(\mu-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\Big)^{-1},$$

тому ряд в (3.122) є рівномірно збіжним рядом. Його можна диференціювати по t і по x_i, $1\le i\le n$, потрібну кількість разів і результати диференціювання також є рівномірно збіжними рядами.

Якщо $b_1(\sigma)\equiv\cdots=b_m(\sigma)\equiv 1$, а $a(\sigma)=|\sigma|$, $n=1$, $\mu>\nu$, то, враховуючи [26],

$$G^3(\hat{t},x-\xi)=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^r\frac{\hat{t}}{\pi(\hat{t}^2+(x-\xi)^2)},$$
$$t>0,x\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R}.$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}}G^3(\hat{t},x-\xi)dx=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{\nu}{\mu}\Big)^r=\frac{1}{\mu-\nu}.$$

Виходячи із (3.122) – (3.125) можна записати, що

$$\frac{\partial}{\partial t}G^3(t,x-\xi)=-F^{-1}_{\sigma\to(x-\xi)}[a_\gamma(\sigma)M(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}],t>0,x\in\mathbb{R}^n,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$A_\gamma G^3(t,x-\xi)=F^{-1}_{\sigma\to(x-\xi)}[a_\gamma(\sigma)M(\sigma)\exp\{-a_\gamma(\sigma)t\}],t>0,x\in\mathbb{R}^n,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Тому

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+A_\gamma\Big)G^3(t,x-\xi)=0, \tag{3.126}$$

$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Аналогічними властивостями володіють функції G_k^1 $(1 \leq k \leq m)$ і G^2. Використовуючи (3.126), [23, 25, 37] доводиться, що функція $u(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, визначена рівністю (3.115), задовольняє рівняння (3.112) і нелокальні умови (3.113). Отже, вірною є така

Теорема 2. *Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, функція, визначена в* (3.115), *є сумою трьох доданків, кожен з яких визначений рівностями* (3.116) – (3.118) *відповідно. Тоді вірними є співвідношення*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + A_\gamma\Big) I_3 = 0, (t,x) \in \Pi,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + A_\gamma\Big)(\mu I_2 + I_3) = f(t,x), (t,x) \in \Pi.$$

Функція u задовольняє умову (3.113).

Зауваження. Порядки ПДО в нелокальних умовах (3.113) можуть бути довільними і не зв'язані з порядком ПДО у рівнянні (3.112).

3.5.4. Приклад двоточкової задачі

Нехай $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$, ν, μ – числа, $0 < \nu < \mu$. Розглянемо задачу

$$u_t(t,x) + A_1 u(t,x) = f(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.127}$$

$$\mu u(0,x) = A_1 u(T,x) + \varphi(x), x \in \mathbb{R}, 0 < \nu < \mu, \tag{3.128}$$

де A_1 – ПДО, визначений у п. 3.4.1, f, φ – відомі функції (п. 3.2.1).

Враховуючи (3.115), розв'язок задачі (3.127), (3.128) запишеться у вигляді

$$u(t,x) = \nu I_1 + \mu I_2 + I_3, t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{3.129}$$

де

$$I_1 = \int\limits_t^T \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x-\xi, t+T-\tau) f(\tau,\xi) d\xi d\tau, \tag{3.130}$$

$$I_2 = \mu \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} G_2(x-\xi, t-\tau) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{3.131}$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathbb{R}} G_2(x-\xi, t)\varphi(\xi) d\xi. \tag{3.132}$$

У формулах (3.129) – (3.132)

$$G_1(x-\xi, t+T-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} M(\sigma)|\sigma| \exp\{i(x-\xi)\sigma - |\sigma|(t+T-\tau)\} d\sigma,$$

$0 < \tau < t < T$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$G_2(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} M(\sigma) \times$$

$$\times \exp\{i(x-\xi)\sigma - |\sigma|(t-\tau)\} d\sigma,$$

$0 < \tau < t < T$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$M(\sigma) = (\mu - \nu|\sigma| \exp\{-|\sigma|T\})^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r |\sigma|^r \exp\{-|\sigma|Tr\}, \tag{3.133}$$

$\sigma \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що

$$\frac{\partial}{\partial t} G_2(x-\xi, t+T-\tau) = -G_1(x-\xi, t+T-\tau),$$

$$0 < \tau < t < t, x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Ця рівність є вірною, бо в (3.127) і (3.128) фігурує ПДО A_1. Якщо врахувати (3.133), то

$$G_1(x-\xi, t+T-\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r G_{1r}(x-\xi, t+T(1+r)-\tau), \tag{3.134}$$

$$0 < \tau < t < T, x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R},$$

$$G_{1r}(x-\xi,t+T(1+r)-\tau)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma|^{r+1}\times$$
$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t+T(1+r)-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $r\geq 0$ – цілі числа,

$$G_2(x-\xi,t-\tau)\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r G_{2r}(x-\xi,t+Tr-\tau),\tag{3.135}$$
$$G_{2r}(x-\xi,t+Tr-\tau)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma|^{r}\times$$
$$\times\exp\{i(x-\xi)\sigma-|\sigma|(t+Tr-\tau)\}d\sigma,$$

$0<\tau<t<T$, $x\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $G_2(x-\xi,t)\equiv G_2(x-\xi,t-t_1)$ при $t_1=0$.

В [41] підраховано, що

$$G_{2,0}(x-\xi,t-\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{t-\tau}{(t-\tau)^2+|x-\xi|^2},$$
$$0<\tau<t-T,x\in\mathbb{R},\xi\in\mathbb{R},$$

тому $G_{2,r}$ можна виразити через похідні від G_{20}:

$$G_{2,1}(x-\xi,t+T-\tau)=-\frac{\partial}{\partial t}G_{2,0}(x-\xi,t+t-\tau)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{(t+T-\tau)^2-(x-\xi)^2}{(t+T-\tau)^2+(x-\xi)^2},$$

і т.д.

Якщо врахувати, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}}G_{2,0}(x-\xi,t-\tau)dx=1$$

і те, що функції G_{2r} виражаються через похідні від $G_{2,0}$, то можна підрахувати кілька доданків кожної із сум (3.134), (3.135).

Зауваження 1. Замість ПДО A_1 у рівнянні (3.127) можна покласти ПДО A_γ із символом $|\sigma|^\gamma$, $\gamma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, а в ПДО нелокальної умови (3.128) – ПДО A_β із символом $|\sigma|^\beta$, $\beta > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Якщо $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t > 0$, то $G_{2,0}(x,t) = \Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}t(t^2+|x|^2)^{-(n+1)/2}$, визначений виразом (3.12).

Зауваження 2. Нелокальна задача Неймана викладена у праці [199].

Висновки до розділу 3

Розвинена теорія побудови та дослідження фундаментальної матриці розв'язків і встановлена розв'язність задачі Коші (одноточкової задачі) для рівномірно параболічних за Петровським систем псевдодиференціальних рівнянь. При цьому доводяться степеневі оцінки осцилюючих інтегралів, які визначаються формулами для розв'язків задачі Коші та багатоточкових задач.

Розвинена методика дослідження властивостей ядер, типа ядер Пуассона, задачі Діріхле та багатоточкових за часом задач для вказаних скалярних рівнянь. Встановлена класична розв'язність нелокальних задач, коли символи ПДО сталі і залежать від часової змінної за умови, що дані задачі задовольняють природні умови гладкості і поведінки на безмежності.

Встановлена класична розв'язність багатоточкової задачі з нелокальними псевдодиференціальними умовами.

Досліджено коректну розв'язність задачі Коші для квазілінійного параболічного рівняння, що містить псевдодиференіальний оператор з негладким однорідним символом. Наведено ілюстративні приклади.

Розділ 4.

Нелокальна m-точкова за часом задача в класах крайових умов типу розподілів та ультрарозподілів

У розділі наведено означення та твердження, що стосуються топологічної структури просторів основних нескінченно диференційовних функцій. Досліджуються властивості фундаментальних розв'язків двоточкової та m-точкової ($m \geq 2$) за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальним оператором A, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом, оператором $f(A)$, де f – ціла функція від ПДО A, псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій, псевдодиференціальними операторами, побудованими за аналітичними символами, що діють у просторах типу S і які трактуються як оператори диференціювання нескінченного порядку. Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь у класах крайових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів та ультрарозподілів. Знайдено зображення розв'язків у вигляді згортки відповідного фундаментального розв'язку з граничною функцією; доведено, що розв'язки таких задач володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності).

4.1. Простори основних та узагальнених функцій

4.1.1. Означення та топологічна структура простору Φ

Нехай γ – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\gamma_0 := n + [\gamma]$, $M(x) := 1 + \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $[\gamma]$ – ціла частина γ,

$$\Phi := \left\{ \varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\} \right\}$$

(тут $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс). Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\omega_0+k} \sum_{|\alpha|=k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right\}, \quad \varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\omega_0 = \gamma_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ – фіксований параметр.

Очевидно, що

$$\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \dots, \quad \varphi \in \Phi, \tag{4.1}$$

тобто ці норми є попарно зрівняними.

Збіжність в просторі Φ визначається так: послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi \in \Phi$ при $\nu \to \infty$, якщо

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ : \ \|\varphi_\nu - \varphi\|_p \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Зазначимо, що $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset \Phi$, причому ці вкладення є неперервними і щільними [38]. Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ою нормою. Φ_p – банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \dots \supset \Phi_p \supset \dots$. Кожне вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервне (внаслідок (4.1)) і щільне (бо щільним є вкладення $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ у кожний простір Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$). В [38] доведено, що Φ – повний досконалий зліченно-нормований простір, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним.

Зазначимо, що збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ у просторі Φ до функції $\varphi \in \Phi$ можна охарактеризувати ще й так [38]: $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору Φ до $\varphi \in \Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall \nu \geq 1 : \ \|\varphi_\nu\|_p \leq c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$.

Отже, топологічна структура простору Φ така: Φ – повний досконалий зліченно-нормований простір з топологією проективної границі банахових просторів Φ_p: $\Phi = \lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi_p$, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$ неперервні, щільні і компактні. Послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови 1), 2).

Простіші операції у просторі Φ

а) У просторі Φ визначена і неперервна операція зсуву аргументу

$$T_\xi : \varphi(x) \to \varphi(x+\xi), \quad \varphi \in \Phi, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

б) У просторі Φ визначена і неперервна операція диференціювання

$$D_x^\beta : \varphi \to D_x^\beta \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Оскільки Φ – досконалий простір, то на підставі загальних результатів теорії досконалих просторів [189] твердимо, що операція зсуву аргументу у просторі Φ не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна, тобто граничні співвідношення вигляду

$$\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_j+\Delta x_j,\ldots,x_n)-\varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\Delta x_j} \to \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \;\; \Delta x_j \to 0,$$

виконуються у розумінні збіжності в просторі Φ.

4.1.2. Перетворення Фур'є функцій з простору Φ

Функції з простору Φ абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}^n$, тому на них визначена операція перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \Phi.$$

Символом Ψ позначатимемо Фур'є-образ простору Φ: $\Psi = F[\Phi]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi$, обмежена і неперервна на $\mathbb{R}^n$. Розглянемо основні властивості перетворення Фур'є функцій з простору Φ (див. [52]).

1. Якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

2. Якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi]$ – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функція.

3. У функції $\dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\xi_i \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi_i \to 0+0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\lim\limits_{\xi \to 0-0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\varphi \in \Phi$.

4. Перетворення Фур'є взаємнооднозначно і взаємнонеперервно відображає Φ на Ψ.

5. Функції з простору Ψ задовольняють умову:

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n,\ k_i \geq m_i, i \in \{1, \dots, n\}\ \exists c_k > 0\ \exists c_m > 0\ :$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi^k D_\xi^m F[\varphi]| \leq c_k \cdot c_m, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $c_k \leq c A_1^{k_1} \dots A_n^{k} \cdot k_1^{k_1} \dots k_n^{k_n}$ (c, $A_1, \dots, A_n > 0$; сталі c, A_1, $\dots$, A_n залежать лише від функції $F[\varphi]$).

У просторі Ψ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{|k|=0}^{p} |\xi^k D_\xi^k \varphi(\xi)| \right\}, \quad \varphi \in \Psi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq \dots \leq \|\varphi\|_p \leq \dots$ Через Ψ_p позначимо поповнення простору Ψ за нормою $\|\cdot\|_p$. При цьому $\Psi_0 \supset \Psi_1 \supset \dots \supset \Psi_p \supset \dots$, вкладення $\Psi_{p+1} \subset \Psi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними, $\Psi = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Psi_p$, Ψ – повний зліченно-нормований простір [52]. Збіжність в просторі Ψ визначається так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Psi$ збігається в просторі Ψ до функції $\varphi \in \Psi$ тоді і тільки тоді, коли вона: 1) обмежена в Ψ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+\ \exists c = c_p > 0\ \forall \nu \geq 1 :\ \ \|\varphi_\nu\|_p \leq c_p;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{D_\xi^m(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, який не містить точку 0.

4.1.3. Простори узагальнених функцій Φ', Ψ'

Простір Φ'. Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі Φ введена топологія проективної границі банахових просторів Φ_p, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то (див. [69])

$$\Phi' = (\lim_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi_p)' = \lim_{p\to\infty} \operatorname{ind} \Phi'_p.$$

Отже, якщо $f \in \Phi'$, то $f \in \Phi'_p$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in \Phi'$ має скінченний порядок. Іншими словами, f допускає продовження на Φ як лінійний неперервний функціонал із спряженого простору Φ'_p; при цьому правильною є нерівність

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $c = \|f\|_p$ – норма функціоналу f у просторі Φ'_p. Зауважимо також, що $\Phi'_0 \subset \Phi'_1 \subset \dots \subset \Phi'_p \subset \dots$, причому кожне вкладення $\Phi'_p \subset \Phi'_{p+1}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Звідси та зі слабкої повноти просторів Φ'_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, дістаємо, що простір Φ' – повний.

Приклади узагальнених функцій з простору Φ'

1. Якщо $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – локально інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\exists c > 0 \;\; \exists s \in (0, \gamma) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n : \;\; |f(x)| \le c(1 + \|x\|)^s, \tag{4.2}$$

то вона визначає регулярний функціонал $F_f \in \Phi'$ за формулою

$$\langle F_f, \psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \Phi,$$

тобто простір Φ неперервно вкладається в Φ'. З леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з Φ' визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною на $\mathbb{R}^n$

функцією, яка задовольняє умову (4.2). Отже, між локально інтегровними на $\mathbb{R}^n$ функціями, що задовольняють умову (4.2) та регулярними узагальненими функціями з Φ' існує взаємно однозначна відповідність.

2. Якщо f – фінітна узагальнена функція з $\mathcal{D}'$, то вона єдиним способом продовжується на Φ' як елемент Φ' за формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta\varphi \rangle, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta = 1$ в околі носія f; при цьому вказане продовження не залежить від функції η.

3. Якщо $f \in \Phi'$, то і кожна похідна $D_x^\alpha f \in \Phi'$; при цьому операція $f \to D_x^\alpha f$ лінійна і неперервна з Φ' у Φ'.

4. Якщо $f \in \Phi'$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, то $f(x+\xi) \in \Phi'$, причому операція $f(x) \to f(x+\xi)$ лінійна і неперервна з Φ' у Φ'.

В [38] наведено три достатні ознаки існування згортки в Φ'. Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається формулою

$$f * \varphi = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi), \varphi \in \Phi.$$

Зазначимо, що $f*\varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією, яка володіє властивостями:

а) $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $D_x^\beta(f * \varphi) = f * D_x^\beta \varphi$;

б) $\exists c > 0$ $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n$: $|D_x^\beta(f * \varphi)| \leq c(1 + \|x\|)^{\gamma_0 + m + |\beta|} \cdot \|\varphi\|_{m+|\beta|}$.

Нехай $f \in \Phi'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi'$ для довільної функції $\varphi \in \Phi$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається **згортувачем** у просторі Φ.

У п. 4.1.1 було відзначено, що Φ – досконалий простір з диференційовною операцією зсуву аргументу. Тоді, як випливає із загальної теорії просторів, топологічно спряжених до досконалих (див. [189]), кожний фінітний функціонал (тобто функціонал, носій якого – обмежена множина) є згортувачем у просторі

Φ. Відзначимо, що фінітні узагальнені функції утворюють широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^n$ є носієм деякої узагальненої функції з Φ' [38]. Якщо $f \in \Phi'$ – згортувач у просторі Φ, то функціонал $D^\alpha f$ – також згортувач у просторі Φ.

Простір узагальнених функцій Ψ'. Елементами простору Ψ' є лінійні неперервні функціонали над простором $\Psi = F[\Phi]$, які також називатимемо узагальненими функціями. Кожна узагальнена функція з простору Ψ' має скінченний порядок, тобто є неперервним функціоналом відносно деякої норми $\|\cdot\|_p$ [52]. Точніше, правильним є наступне твердження: для того, щоб лінійний функціонал f, заданий на Ψ, належав до Ψ' (тобто був неперервним на Ψ), необхідно і досить, щоб

$$\exists c > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{Z}_+ \;\; \forall \varphi \in \Psi: \;\; |\langle f, \varphi\rangle| \leq c\|\varphi\|_p,$$

де

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{|m|=0}^{p} |\xi^m D_\xi^m \varphi(\xi)| \right\}.$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій з просторів Φ' та Ψ'. Оскільки $F[\varphi] \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Psi$ ($F[\varphi](x) = 2\pi F^{-1}[\varphi(-x)] \in \Phi$), то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \quad \forall \varphi \in \Psi. \tag{4.3}$$

Із (4.3) та властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціоналу $F[f]$ над простором $\Psi = F[\Phi]$. Отже, перетворення Фур'є узагальненої функції f, заданої на Φ, є узагальненою функцією, заданою на просторі $F[\Phi]$.

Оскільки Φ – досконалий простір з диференційовною операцією зсуву аргументу, причому $\mathcal{D}$ лежить щільно в Φ, то правильним є наступне твердження [2]: якщо $f \in \Phi'$ – фінітна узагальнена функція, $\varphi \in \Phi$, то $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ є мультиплікатором у просторі Ψ. У праці [52] доведено, що аналогічне твердження є правильним для кожного згортувача у просторі Φ. В [52] доведено також, що якщо узагальнена функція $f \in \Psi'$ – мультиплікатор у просторі Ψ, то її перетворення Фур'є – згортувач у просторі Φ. Ці результати приводять до наступного висновку: для того, щоб узагальнена функція $f \in \Phi'$ була згортувачем у просторі Φ, необхідно і досить, щоб її перетворення Фур'є $F[f]$ було мультиплікатором у просторі $\Psi = F[\Phi]$.

4.1.4. Абстрактні функції

Нехай X – лінійний топологічний простір або об'єднання таких просторів, Ω – деяка множина чисел. Функцію $\Omega \ni \nu \longrightarrow \varphi_\nu \in X$ називають абстрактною функцією параметра ν у просторі X [189].

Границею абстрактної функції при $\nu \to \nu_0$ називається такий елемент $\varphi_0 \in X$, що для довільної послідовності $\{\nu_n, n \geq 1\}$, $\nu_n \to \nu_0$, $n \to \infty$, виконується граничне співвідношення $\varphi_{\nu_n} \to \varphi_{\nu_0}$, $n \to \infty$, у розумінні збіжності в просторі X.

Абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0 \in \Omega$, якщо в просторі X існує границя

$$\left.\frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{\nu_0+h} - \varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Відзначимо деякі властивості числових функцій вигляду $\langle f_\nu, \varphi_\nu \rangle$, де $\varphi_\nu \in X$, $f_\nu \in X'$. За X можна, зокрема, взяти простір Φ. Правильними є наступні твердження [189]: 1) якщо $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi_{\nu_0}$ при $\nu \to \nu_0$ у просторі X, $f_\nu \to f_{\nu_0}$ при $\nu \to \nu_0$ у просторі X' (тобто слабко), то $\langle f_\nu, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow \langle f_{\nu_0}, \varphi_{\nu_0} \rangle$ при $\nu \to \nu_0$; 2) якщо абстрактна функція φ_ν диференційовна в точці $\nu \in \Omega$, функціонал $f_\nu \in X'$ – слабко диференційовна функція параметра ν, то $\langle f_\nu, \varphi_\nu \rangle$ – диференційовна функція, причому

$$\frac{d}{d\nu}\langle f_\nu, \varphi_\nu\rangle = \left\langle \frac{df_\nu}{d\nu}, \varphi_\nu \right\rangle + \left\langle f_\nu, \frac{d\varphi_\nu}{d\nu} \right\rangle.$$

4.2. Двоточкова задача для еволюційних рівнянь з крайовими умовами типу розподілів

4.2.1. Попередні відомості

Нехай $a\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ – неперервна на $\mathbb{R}^n$ однорідна функція порядку $\gamma > 1$ (тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$), нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, яка задовольняє умови:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_\alpha > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $|D_x^\alpha a(x)| \leq c_\alpha \|x\|^{\gamma - |\alpha|}$;

2) $\exists \tilde{\delta} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $a(x) \geq \tilde{\delta}\|x\|^\gamma$.

При виконанні вказаних умов у просторі Φ визначений неперервний псевдодиференціальний оператор $A_\gamma = F^{-1}[aF]$.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi, \tag{4.4}$$

задамо нелокальну за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \tag{4.5}$$

де $\mu > 1$ – фіксований параметр. Під розв'язком задачі (4.4), (4.5) розуміємо функцію $u(t,\cdot) \in C^1((0,T],\Phi)$, яка є розв'язком рівняння (4.4) і задовольняє умову (4.5).

Символом $G(t,T,x,\mu)$ позначатимемо фундаментальний розв'язок двоточкової задачі (ФРДЗ) для рівняння (4.4). Нагадаємо, що функція G має вигляд (див. розділ 3):

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma) - ta(\sigma)} (\mu - e^{T\cdot A(\sigma)})^{-1} d\sigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t+kT, x), \quad \mu > 1, (t,x) \in \Pi, \tag{4.6}$$

де

$$G_0(t+kT, x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - (t+kT)a(\sigma)\} d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi,$$

$G_0(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (4.4). Дослідимо властивості функції G та згорток вигляду $f * G$, де $f \in \Phi'$. Передусім зазначимо, що із результатів, наведених у розділі 3 щодо оцінок похідних функції G_0 та (4.6) випливає, що при кожному $t \in (0,T)$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору Φ.

Лема 4.1. *Функція $G(t,T,\cdot,\mu)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t, T, x, \mu) - G(t,T,x,\mu)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} G(t,T,x,\mu)$$

виконується у розумінні збіжності у просторі Φ, тобто

1) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $D_x^\alpha \Phi_{\Delta t} \rightrightarrows D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,T,x,\mu) \right)$, $\Delta t \to 0$,

у кожній кулі $\overline{K}(0,R)$;

2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c_p > 0$: $\|\Phi_{\Delta t}\|_p \leq c_p$,

де стала c_p не залежить від Δt.

Функція $G(t,T,x,\mu)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \frac{\partial}{\partial t} G(t+\theta\Delta t, T, x, \mu), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D_x^\alpha \Phi_{\Delta t}(x) = -(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\sigma)^\alpha a(\sigma) \exp\{i(x,\sigma) - (t+\theta\Delta t)a(\sigma)\} \times$$

$$\times (\mu - \exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1} d\sigma.$$

Крім того,

$$D_x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)\right) = -(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(i\sigma)^\alpha a(\sigma)\exp\{i(x,\sigma)-ta(\sigma)\}\times$$
$$\times(\mu-\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1}d\sigma.$$

Тоді

$$\left|D_x^\alpha\left(\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)\right)\right| \leq$$
$$\leq (2\pi)^{-n}(\mu-1)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|\sigma\|^{|\alpha|}a(\sigma)\exp\{-ta(\sigma)\}|\exp\{-\theta\Delta ta(\sigma)\}-1|d\sigma \leq$$
$$\leq c|\Delta t|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|\sigma\|^{|\alpha|}a^3(\sigma)\exp\{-ta(\sigma)\}d\sigma \leq c_1|\Delta t|, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,$$

сталі c, c_1 не залежать від Δt (тут ми скористалися тим, що $(\mu-\exp\{-Ta(\sigma)\})^{-1} \leq (\mu-1)^{-1}$, $\mu>1$). Звідси вже випливає, що

$$D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x) \longrightarrow D_x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)\right), \quad \Delta t\to 0,$$

рівномірно відносно $x\in\overline{K}(0,R)$, що й потрібно було довести.

Доведемо тепер, що умова 2) також виконується. Використовуючи оцінки функції G по часовому параметру t та по змінній x (див. розділ 3) знайдемо, що для досить малих значень параметра Δt таких, що $t+\theta\Delta t\geq t/2$ справджуються нерівності

$$|D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x)| \leq c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{-k-1}}{((t+\theta\Delta t+kT)^{1/\gamma}+\|x\|)^{n+\gamma+|\alpha|}} \leq$$
$$\leq c\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{-k-1}}{((t/2)^{1/\gamma}+\|x\|)^{n+\gamma+|\alpha|}} \leq \begin{cases} c_1\|x\|^{-(n+\gamma+|\alpha|)}, & \|x\|\geq 1,\\ c_2, & \|x\|<1,\end{cases}$$

де сталі c_1, c_2 залежать від μ, T, t і не залежать від Δt. Тоді для довільного фіксованого $p\in\mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\omega_0+k}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x)|\right\} \leq c_p,$$

де $c_p = c(p, t, T, \gamma, \mu)$. Отже,

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 : \ \ \|\Phi_{\Delta t}\| \leq c_p,$$

причому c_p не залежить від Δt. Лема доведена.

Наслідок 4.1. *Функція $G(t, T, \cdot, \mu)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, неперервна по t.*

Наслідок 4.2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G) = f * \frac{\partial}{\partial t} G, \quad \forall f \in \Phi'.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{G}(t, T, \xi, \mu) \rangle, \quad \check{G}(t, T, \xi, \mu) = G(t, T, -\xi, \mu).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t, \cdot) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f * G)(t + \Delta t, \cdot) - (f * G)(t, \cdot)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, T, \cdot, \mu) - T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu)] \right\rangle.$$

Внаслідок леми 4.1 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, T, \cdot, \mu) - T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu)$$

виконується у сенсі збіжності за топологією простору Φ. Отже, врахувавши властивість неперервності функціоналу f знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t, \cdot) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t + \Delta t, T, \cdot, \mu) - T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu)] \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu) \right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t, T, \cdot, \mu) \right\rangle = \left(f * \frac{\partial}{\partial t} G \right)(t, \cdot).$$

Лема доведена.

Символом Φ'_* позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ.

Лема 4.2. *$G(t,T,\cdot,\mu) \to \dfrac{\delta}{\mu-1}$ при $t \to +0$ у просторі Φ' (δ – дельта-функція Дірака).*

Доведення. Урахувавши співвідношення (див. розділ 3)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu)dx = \frac{1}{\mu-1}, \quad (t,x) \in \Pi,$$

для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ маємо:

$$\Big|\langle G(t,T,\cdot,\mu),\varphi\rangle - \frac{\langle \delta,\varphi\rangle}{\mu-1}\Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu)\varphi(x)dx - \frac{\varphi(0)}{\mu-1}\Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu)\varphi(x)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu)\varphi(0)dx\Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,x,\mu)| \cdot |\varphi(x)-\varphi(0)|dx \equiv J(t,T,\mu).$$

Оскільки $\varphi \in \Phi$, то застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leq M \cdot \|x\|$, де $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \max\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big|$.

Візьмемо тепер ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t_0^{\alpha}$, де $\alpha := \{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])$. Тоді $|\varphi(x)-\varphi(0)| < M \cdot \varepsilon^{\alpha}$, якщо лише $\|x\| < t_0^{\alpha}$. Отже,

$$J(t,T,\mu) < M \cdot \varepsilon^{\alpha} \cdot \int\limits_{\|x\|<t_0^{\alpha}} |G(t,T,x,\mu)|dx+$$

$$+ \int\limits_{\|x\|\geq t_0^{\alpha}} |G(t,T,x,\mu)| \cdot |\varphi(x)-\varphi(0)|dx \equiv M\varepsilon^{\alpha} J_1(t,T,\mu) + J_2(t,T,\mu).$$

Оцінимо $J_1(t,T,\mu)$. Легко бачити, що

$$J_1(t,T,\mu) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,x,\mu)|dx.$$

Урахувавши зображення функції $G(t,T,x,\mu)$ знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,x,\mu)|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t+kT,x)\Big| dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_0(t+kT,x)|dx, \tag{4.7}$$

де

$$G_0(t+kT,x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)-a(\sigma)(t+kT)} d\sigma, (t,x) \in \Pi.$$

Здійснивши в (4.7) заміну змінної інтегрування $x_i = (t+kT)^{1/\gamma} y_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_0(t+kT,x)|dx = (t+kT)^{n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_0(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma} y)|dy.$$

Внаслідок однорідності функції $a(\sigma)$ маємо, що

$$G_0(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma} y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(t+kT)a(\sigma)+i((t+kT)^{1/\gamma} y,\sigma)} d\sigma =$$

$$\overset{(t+kT)^{1/\gamma}\sigma = z}{=} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a(z)+i(y,z)} dz = (t+kT)^{-n/\gamma} G_0(y),$$

де

$$G_0(y) = F^{-1}[e^{-a(z)}](y), \quad G_0 \in \Phi.$$

Отже,

$$J_1(t,T,\mu) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_0(y)|dy = b = \mathrm{const}, \quad \forall t \in (0,T).$$

Для того, щоб здійснити оцінку J_2 знову врахуємо властивість однорідності функції $a(\xi)$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\xi = t^{1/\gamma}\eta$, подамо $G(t,T,x,\mu)$ у вигляді:

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n} t^{n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-a(\eta)t^2 + i(x,t^{1/\gamma}\eta)\} \times$$

$$\times(\mu-\exp\{-tTa(\eta)\})^{-1}d\eta.$$

Скориставшись методикою проведення оцінок функції G_0 [34] та співвідношенням (4.6) знайдемо, що для $\|x\|\geq a>0$ правильними є нерівності:

$$|G(t,T,x,\mu)|\leq c_0t^{n/\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\frac{t^2+ktT}{(t^2+ktT)^{1/\gamma}+(t^{1/\gamma}\|x\|)^{n+[\gamma]}}\leq$$

$$\leq\frac{ct^{n/\gamma}\cdot t}{\|x\|^{n+[\gamma]}\cdot t^{(n+[\gamma])/\gamma}}=\frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x\|^{n+[\gamma]}},\gamma\neq 2m,\gamma\neq 2m-1,m\in\mathbb{N} \tag{4.8}$$

(стала c залежить від μ, T і не залежить від t). Далі, врахувавши обмеженість функції φ, а також оцінку (4.8) дістанемо, що

$$J_2(t,T,\mu)\leq c_1t^{\{\gamma\}/\gamma}\cdot\int\limits_{\|x\|\geq t_0^{\alpha}}\|x\|^{-(n+[\gamma])}dx=c_2t^{\{\gamma\}/\gamma}\cdot\int\limits_{t_0^{\alpha}}^{+\infty}\rho^{-(1+[\gamma])}d\rho=$$

$$=c_2t^{\{\gamma\}/\gamma}t_0^{-\{\gamma\}/(2\gamma)}<c_2t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma)}=c_2\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)},\quad\forall t<t_0.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon\in(0,T)\ \exists t_0=\varepsilon>0\ \forall t:\ \ 0<t<t_0\Rightarrow J(t,T,\mu)<$$

$$<bM\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}+c_2\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}.$$

Аналогічна оцінка встановлюється для довільного $\varepsilon\geq T$. Це і означає, що

$$\langle G(t,T,\cdot,\mu),\varphi\rangle\longrightarrow\frac{\varphi(0)}{\mu-1}=\frac{\langle\delta,\varphi\rangle}{\mu-1},t\to+0,\varphi\in\Phi,$$

тобто $G(t,T,\cdot,\mu)\to\dfrac{\delta}{\mu-1}$ при $t\to+0$ у просторі Φ'.

Твердження доведено.

Лема 4.3. *Нехай*

$$\omega(t,x)=\varphi*G(t,x),\quad\varphi\in\Phi',(t,x)\in\Pi.$$

Тоді у просторі Φ' *виконується граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot)-\lim_{t\to T-0}\omega(t,\cdot)=\varphi.$$

Доведення. Передусім зазначимо, що $G_0(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра $t \in (0,T]$ із значеннями у просторі Φ, є неперервною функцією. Тоді

$$T_{-x}\check{G}_0(t,\xi) \longrightarrow T_{-x}\check{G}_0(t_0,\xi), \quad t \to t_0, t_0 \in (0,T],$$

за топологією простору Φ. На підставі властивості неперервності функціоналу φ твердимо, що

$$\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle \underset{t\to T-0}{\longrightarrow} \langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(T+kT,\xi)\rangle$$

($k \in \mathbb{Z}_+$ – фіксоване);

$$\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle \underset{t\to +0}{\longrightarrow} \langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(kT,\xi)\rangle$$

($k \in \mathbb{N}$ – фіксоване). Крім того, $G_0(t,\cdot) \to \delta$ при $t \to +0$ у просторі Φ'. Із властивості неперервності операції згортки випливає, що

$$\lim_{t\to+0}(\varphi * G_0)(t,\cdot) \equiv \lim_{t\to+0}\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t,\xi)\rangle = \varphi * \delta = \varphi.$$

Урахувавши вигляд функції $G(t,T,\xi,\mu)$, а також те, що

$$S_{n,t,T}(\xi) := \sum_{k=0}^{n} \mu^{-k-1} G_0(t+kT,\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(t,T,\xi,\mu)$$

за топологією простору Φ, прийдемо до наступних співвідношень:

$$\mu \lim_{t\to+0}\omega(t,x) - \lim_{t\to T-0}\omega(t,x) \equiv \mu \lim_{t\to+0}\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}(t,T,\xi,\mu)\rangle -$$

$$- \lim_{t\to T-0}\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}(t,T,\xi,\mu)\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\left\langle \varphi_\xi, \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\right\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1}\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle -$$

$$- \lim_{t\to T-0}\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1}\langle \varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle =$$

$$= \mu\Big(\mu^{-1}\lim_{t\to+0}(\varphi * G_0)(t,x) + \lim_{t\to+0}(\mu^{-2}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+T,\xi)\rangle +$$

$$+\mu^{-3}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+2T,\xi)\rangle + \dots)\Big) - \lim_{t\to T-0}\Big(\mu^{-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t,\xi)\rangle +$$

$$+\mu^{-2}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+T,\xi)\rangle + \mu^{-3}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+2T,\xi)\rangle + \dots\Big) =$$

$$= \varphi * \delta + \Big(\mu^{-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(T,\xi)\rangle + \mu^{-2}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(2T,\xi)\rangle + \dots\Big) -$$

$$-\Big(\mu^{-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(T,\xi)\rangle + \mu^{-2}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(2T,\xi)\rangle + \dots\Big) = \varphi * \delta = \varphi.$$

Коректність здійсненого граничного переходу по t при $t \to T-0$ під знаком суми відповідного ряду випливає зі співвідношення

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle = \langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}(t,T,\xi,\mu)\rangle \underset{t\to T-0}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}(T,T,\xi)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle,$$

яке є наслідком властивості неперервності функції $G(t,T,\xi,\mu)$ у точці $t=T$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі Φ (див. лему 4.1 та наслідок 4.1) та властивості неперервності функціоналу φ. Крім того, функція

$$\tilde{G}(t,T,\xi,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}G_0(t+kT,\xi), \quad t \in [0,T],$$

при кожному $t \in [0,T]$, як функція аргументу ξ, є елементом простору Φ і як абстрактна функція аргументу t із значеннями в просторі Φ є неперервною функцією; зокрема, неперервною і у точці $t=0$ (доведення цих властивостей здійснюється за схемою доведення леми 4.1). Тоді

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle\varphi_\xi, \lim_{t\to+0}T_{-x}\check{G}_0(t+kT,\xi)\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}\langle\varphi_\xi, T_{-x}\check{G}_0(kT,\xi)\rangle = \langle\varphi_\xi, T_{-x}\tilde{G}(0,T,\xi,\mu)\rangle.$$

Лема доведена.

4.2.2. Про оператор, спряжений до псевдодиференціального оператора

Передусім зазначимо, що

$$\forall \psi \in \Phi \ \exists c_\psi > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \ |(A_\gamma \psi)(x)| \leq c_\psi, \tag{4.9}$$

де c_ψ не залежить від x (ця властивість випливає з того, що $A_\gamma \psi \in \Phi$). Із лінійності і неперервності оператора A_γ випливає лінійність і неперервність спряженого оператора A_γ^*, який діє у просторі Φ' за формулою

$$\langle A_\gamma^* g, \psi \rangle = \langle g, A_\gamma \psi \rangle, \quad g \in \Phi', \psi \in \Phi. \tag{4.10}$$

З'ясуємо, який вигляд має звуження оператора A_γ^* на простір $\Phi \subset \Phi'$, тобто в (4.10) вважаємо, що $\{g, \psi\} \subset \Phi$. На підставі нерівності (4.9) твердимо, що інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)(A_\gamma \psi)(x) dx$ є абсолютно збіжним для довільної основної функції $g \in \Phi$. Тому, внаслідок теореми Фубіні, правильними є перетворення:

$$\langle g, A_\gamma \psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)(A_\gamma \psi)(x) dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(\xi) F[\psi](\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi \right) dx =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(\xi) g(x) e^{i(x,\xi)} F[\psi](\xi) dx d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(\xi) F^{-1}[g](\xi) F[\psi](\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(\xi) F^{-1}[g](\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(\xi) F^{-1}[g](\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[a(\xi) F^{-1}[g]](\xi) \psi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (A_\gamma^* g)(x) \psi(x) dx =$$

$$= \langle A_\gamma^* g, \psi \rangle, \quad \{g, \psi\} \subset \Phi.$$

Отже,

$$\forall g \in \Phi : \ A_\gamma^* g = F[a(\xi) F^{-1}[g]].$$

4.2.3. Коректна розв'язність двоточкової задачі

Лема 4.3 дозволяє ставити двоточкову задачу для рівняння (4.5) так. Для (4.5) задамо умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \quad \mu > 1, \varphi \in \Phi'_*. \tag{4.11}$$

Під розв'язком задачі (4.5), (4.11) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T),\Phi)$, яка задовольняє рівняння (4.5) і крайову умову (4.11) у тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi$$

(границі розглядаються у просторі Φ'). Правильним є наступне твердження.

Теорема 4.1. *Задача* (4.5), (4.11) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* Φ'_*. *Розв'язок дається формулою:*

$$u(t,x) = \varphi * G(t,x), \quad \varphi \in \Phi'_*, (t,x) \in \Pi,$$

де G *– ФРДЗ для рівняння* (4.5).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (4.5). Справді (див. наслідок 4.2,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi * G)(t,x) = \Big(\varphi * \frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,x),$$

$$A_\gamma u(t,x) = F^{-1}[a(\xi)F[(\varphi * G)]](x).$$

Оскільки φ – згортувач у просторі Φ, то

$$F[(\varphi * G)(t,x)](\xi) = F[\varphi](\xi)F[G](\xi) = F[\varphi](\xi)\cdot Q(t,\xi),$$

де

$$Q(t,\xi) = \exp\{-ta(\xi)\}(\mu - \exp\{-Ta(\xi)\})^{-1}.$$

Отже,

$$A_\gamma u(t,x) = F^{-1}[a(\xi)Q(t,\xi)F[\varphi](\xi)](x) =$$

$$= -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\xi)F[\varphi](\xi)\Big](x) = -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial G}{\partial t}\Big](\xi)\cdot F[\varphi](\xi)\Big](x) =$$
$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\Big(\varphi * \frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,x)\Big](\xi)\Big](x) = -\Big(\varphi * \frac{\partial G}{\partial t}\Big)(t,x).$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi$, задовольняє рівняння (4.5). З леми 4.3 випливає, що u задовольняє крайову умову (4.11) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що u неперервно залежить від граничної функції $\varphi\in\Phi'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (4.5), (4.11) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A^*_\gamma v = 0, \quad (t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R}^n \equiv \Pi', 0\le t < t_0 \le T, \tag{4.12}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi\in\Phi'_*, \tag{4.13}$$

де A^*_γ – звуження спряженого оператора до оператора A_γ на простір $\Phi\subset\Phi'$. Умова (4.13) розуміється в слабкому сенсі. Розглянемо функцію

$$G^*(t-t_0,x) = F[e^{(t-t_0)A(\xi)}](x).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено в праці [38] у випадку задачі Коші для еволюційного рівняння з ПДО A_γ доводимо, що G^*, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, диференційовна по t; розв'язок задачі Коші (4.12), (4.13) дається формулою

$$v(t,x) = (\psi * G)(t-t_0,x), \quad (t,x)\in\Pi',$$

при цьому $v(t,\cdot)\in\Phi$ при кожному $t\in[0,t_0)$, $v(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, диференційовна по t.

Нехай $Q^t_{t_0}$: $\Phi'_*\to\Phi$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi\in\Phi'_*$ розв'язок $v(t,\cdot)\in\Phi$ задачі (4.12), (4.13):

$$\forall\psi\in\Phi'_*:\ \ Q^t_{t_0}\psi = (\psi * G^*)(t-t_0,x) \equiv v(t,x), \quad (t,x)\in\Pi'.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in \Phi'_*: \quad \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} - A^*_\gamma Q^t_{t_0}\psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі Φ').

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, задачі (4.5), (4.11), який трактуватимемо як функціонал з простору $\Phi' \supset \Phi$. Доведемо, що задача (4.5), (4.11) може мати лише єдиний розв'язок у просторі Φ'. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (4.5) при нульовій крайовій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \Phi \subset \Phi'$, де ψ – довільний елемент з простору Φ. Диференціюючи по t та використовуючи рівняння (4.5), (4.12) знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= -\langle A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle u, A^*_\gamma Q^t_{t_0}\psi\rangle =$$

$$= -\langle A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0, \quad \forall \psi \in \Phi, 0 < t < t_0 \le T.$$

Таким чином, $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle$ – стала величина. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = \mathrm{const} = c, \quad \forall \psi \in \Phi \subset \Phi'_*,$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Тоді, якщо в (4.11) $\varphi = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \lim_{t \to T-0}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle = c(\mu - 1) = 0,$$

тобто $c = 0$. Отже, $\langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0$ для довільного елемента $g \in \Phi \subset \Phi'_*$, тобто $u(t_0,x)$ – нульовий функціонал на Φ. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорема доведена.

4.2.4. Властивість локалізації розв'язку двоточкової задачі

Як зазначалося раніше, розв'язок $u(t,x) = (\varphi * G)(t,x)$ двоточкової задачі (4.5), (4.11) задовольняє граничну умову (4.11) в слабкому сенсі (відповідні границі розглядаються в просторі Φ'), при цьому $G(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі Φ, є неперервною функцією, а $\varphi \in \Phi'_*$ – згортувач у просторі Φ. Із означення згортувача випливає, що граничне співвідношення

$$u(t,\cdot) = (\varphi * G)(t,\cdot) \underset{t\to T-0}{\longrightarrow} (\varphi * G)(T,\cdot) = u(T,\cdot)$$

справджується у просторі Φ, оскільки $G(t,\cdot) \to G(t,T,\cdot,\mu)$, $G(t,\cdot) \equiv G(t,T,\cdot,\mu)$, при $t \to T-0$ за топологією простору Φ. Зокрема, звідси дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(T,\cdot)$ при $t \to T-0$ рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. Вказану збіжність у співвідношенні (4.11) значно погіршує перший доданок; це пояснюється тим, що для функції $G(t,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. З леми 4.2 випливає, що

$$u(t,\cdot) = (\varphi * G)(t,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \varphi * \frac{\delta}{\mu - 1} = \frac{\varphi}{\mu - 1},$$

причому вказане граничне співвідношення виконується у просторі Φ'. Однак, при певних обмеженнях на узагальнену функцію $\varphi \in \Phi'_*$ можна отримати локальне покращення збіжності згортки $(\varphi * G)(t,\cdot)$ при $t \to +0$. Передусім доведемо наступне допоміжне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай $\varphi \in \Phi'$,*

$$\omega(t,x) = \langle \varphi, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle, \check{G}(t,T,\xi,\mu) = G(t,T,-\xi,\mu), (t,x) \in \Pi.$$

Якщо $\varphi = 0$ в області $Q \subset \mathbb{R}^n$, то $\omega(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$. Побудуємо функцію $\nu \in \Phi$ з носієм в Q так, що $\nu = 1$ на $\mathbb{K}_1$, $\operatorname{supp} \nu \subset Q$ (така функція існує, бо $\mathcal{D} \subset \Phi$). Оскільки

$$\{\nu(\cdot) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu), (1 - \nu(\cdot)) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu)\} \subset \Phi$$

при кожному $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$\omega(t, x) = \langle \varphi, \nu(\cdot) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu)\rangle + \langle \varphi, \eta(\cdot) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu)\rangle,$$

де $\eta = 1 - \nu$. Оскільки узагальнена функція φ дорівнює нулеві в області Q, а $\operatorname{supp} (\nu(\cdot) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu)) \subset Q$, з останнього співвідношення дістаємо, що

$$\omega(t, x) = t^{\alpha_0} \langle \varphi, t^{-\alpha_0} \eta(\cdot) T_{-x} \check{G}(t, T, \cdot, \mu)\rangle,$$

де α_0 – деякий параметр, конкретне значення якого вкажемо пізніше. Кожна узагальнена функція $\varphi \in \Phi'$ має скінченний порядок, тобто $\varphi \in \Phi'_p$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$, тому

$$|\omega(t, x)| \leq t^{\alpha_0} \|\varphi\|_p \cdot \|\Psi_{t,x}\|_p,$$

де

$$\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\alpha_0} \eta(\xi) T_{-x} \check{G}(t, T, \xi, \mu) \equiv t^{-\alpha_0} \eta(\xi) G(t, T, x - \xi, \mu),$$

$\|\varphi\|_p$ – норма функціоналу φ. Отже, для доведення того, що $\omega(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на компакті $\mathbb{K} \subset Q$, досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору Φ_p, тобто $\|\Psi_{t,x}\|_p \leq c_p$, причому стала c_p не залежить від параметрів t і x, які змінюються вказаним способом ($t \in (0, T)$, $x \in \mathbb{K}$). Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_p \leq c_p$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$.

Функція $\nu \in \Phi = \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \Phi_j$, тобто $\nu \in \Phi_p$, тому

$$\|\nu\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\omega_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_\xi^\alpha \nu(\xi)| \Big\} \leq c_0, \quad c_0 = c_0(p) > 0.$$

Тоді

$$\Delta(\xi) := \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\omega_0+k} \sum_{|\alpha|=k} |D_\xi^\alpha(\eta(\xi)G(t,T,x-\xi,\mu))| =$$

$$= M(\xi)^{\omega_0}|(1-\nu(\xi))G(t,T,x-\xi,\mu)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\omega_0+k} \sum_{|\alpha|=k} |D_\xi^\alpha((1-\nu(\xi))G(t,T,x-\xi,\mu))| \le$$

$$\le M(\xi)^{\omega_0}|G(t,T,x-\xi,\mu)| + M(\xi)^{\omega_0}|\nu(\xi)|\cdot|G(t,T,x-\xi,\mu)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\omega_0+k} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|l|=0}^{|\alpha|} C_\alpha^l |D_\xi^l(1-\nu(\xi))|\cdot|D_\xi^{\alpha-l}G(t,T,x-\xi,\mu)| \le$$

$$\le M(\xi)^{\omega_0}|G(t,T,x-\xi,\mu)| + M(\xi)^{\omega_0}|\nu(\xi)|\cdot|G(t,T,x-\xi,\mu)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\omega_0+k} \sum_{|\alpha|=k} [|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| + |\nu(\xi)|\cdot|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)|+$$

$$+\sum_{|l|=1}^{|\alpha|} C_\alpha^l |D_\xi^l\nu(\xi)|\cdot|D_\xi^{\alpha-l}G(t,T,x-\xi,\mu)|].$$

Оскільки $\|x-\xi\| \ge a_0 > 0$, де a_0 – віддаль між межами компактів $\mathbb{K}$ і $\mathbb{K}_1$, то скористаємося оцінками функції G, які отримані при доведенні леми 4.2:

$$|G(t,T,x-\xi,\mu)| \le \frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}} \ (\gamma > 1, \gamma \ne 2m, \gamma \ne 2m+1, m \in \mathbb{N}),$$

стала c залежить від μ, T і не залежить від t. Аналогічно можна довести, що

$$|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| \le \frac{c_\alpha t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{4.14}$$

Тоді

$$\Delta(\xi) \le \frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}M(\xi)^{\gamma_0}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}} + \frac{cc_0t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{|\alpha|=k} \Big[\frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}} + \frac{cc_0t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+[\alpha]}}+$$

$$+\sum_{|l|=1}^{|\alpha|} \frac{cc_0c_\alpha^l t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha-l|}}\Big], \quad \gamma_0 = n+\gamma.$$

Зазначимо, що

$$\exists L > 0\ \forall x \in \mathbb{K}\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 :\ \ M(\xi)/\|x-\xi\| \le L.$$

Отже, враховуючи оцінки (4.14) знаходимо, що

$$\Delta(\xi) \le cL^{\gamma_0} t^{\{\gamma\}/\gamma} + cc_0 a_0^{-(n+[\gamma])} t^{\{\gamma\}/\gamma} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{|\alpha|=k} \Big[cL^{\gamma_0+k} t^{\{\gamma\}/\gamma} + cc_0 L^{\gamma_0+k} t^{\{\gamma\}/\gamma} +$$
$$+ \sum_{|l|=1}^{|\alpha|} cc_0 c_\alpha^l L^{\gamma_0+|\alpha-l|} t^{\{\gamma\}/\gamma} \Big] = c_1 t^{\{\gamma\}/\gamma},$$

де стала c_1 не залежить від t і x. Покладемо тепер $\alpha_0 = \{\gamma\}/\gamma$. Звідси вже випливає нерівність $\|\Psi_{t,x}\|_p \le c_1$. Тоді

$$|\omega(t,x)| \le c_1 \|\varphi\|_p \cdot t^{\{\gamma\}/\gamma} \equiv c_2 t^{\{\gamma\}/\gamma},$$

де стала c_2 не залежить від t і x. Цим доведено, що $\omega(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно по $x \in \mathbb{K}$.

Символом M_Φ позначимо клас мультиплікаторів у просторі Φ.

Теорема 4.3 (властивість локалізації). *Нехай $\varphi \in \Phi'_*$, $u(t,x)$ – розв'язок двоточкової задачі* (4.5), (4.11) *з граничною функцією φ. Якщо узагальнена функція φ збігається в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з функцією $g \in M_\Phi$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \lim_{t \to T-0} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$, ν – основна функція, побудована при доведенні теореми 4.2. Оскільки $\nu(\varphi - g) = 0$ в Q, то $\nu(\varphi - g) = 0$ на $\mathbb{K}$, $(1-\nu)\varphi = 0$ на $\mathbb{K}_1$ і за доведеним у теоремі 4.2

$$\langle \nu(\varphi - g), T_{-x}\check{G}(t, T, \cdot, \mu)\rangle \to 0, \quad t \to +0,$$

$$\langle (1-\nu)\varphi, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle \to 0, \quad t\to +0,$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$. Крім того, із зробленого перед теоремою 4.2 зауваження, леми 4.2, леми 4.3 та теореми 4.1 випливає, що $\lim\limits_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \dfrac{\varphi}{\mu-1}$, причому це співвідношення виконується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$. Отже,

$$\langle \nu(\varphi - g), T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle \to 0, \quad t\to T-0,$$

$$\langle (1-\nu)\varphi, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle \to 0, \quad t\to T-0,$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$. Зауважимо також, що

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x) = \langle \varphi, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu) =$$

$$= \langle \nu(\varphi - g), T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle + \langle (1-\nu)\varphi, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle +$$

$$+\langle \nu g, T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle,$$

причому

$$\langle (\nu g), T_{-x}\check{G}(t,T,\cdot,\mu)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,\mu)\nu(\xi)g(\xi)f\xi \equiv J(t,x).$$

Оскільки νg – згортувач у просторі Φ, то $J(t,x) \to \dfrac{(\nu g)(x)}{\mu-1}$ при $t\to T-0$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$. Отже, для доведення твердження теореми досить встановити, що $J(t,x) \to \dfrac{(\nu g)(x)}{\mu-1}$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$.

Урахувавши співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,u)d\xi = \frac{1}{\mu-1},$$

знаходимо, що

$$\left| J(t,x) - \frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x)\right| = \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,\xi,\mu)[(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)]d\xi \Big| \le$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,\xi,\mu)| \cdot |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| d\xi \equiv \Delta(t,x).$$

Оскільки νg – неперервно диференційовна функція, то із формули про скінченні прирости випливає оцінка

$$|(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| \leq M\|x-\xi-x\| = M \cdot \|\xi\|,$$

де $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \max\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\dfrac{\partial(\nu g)}{\partial \xi_i}\right|$. Візьмемо ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Тоді

$$|(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| \leq M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])},$$

якщо тільки $\|\xi\| < t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Отже,

$$\Delta(t,x) < M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])} \cdot \int\limits_{\|\xi\|<t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)| d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\|\xi\|\geq t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)| \cdot |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| d\xi, \quad \alpha = \{\gamma\}/(2\gamma[\gamma]).$$

Далі, як і при доведенні леми 4.2 встановлюємо, що

$$\int\limits_{\|\xi\|<t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)| d\xi \leq b_0 = \mathrm{const}, \forall t \in (0,T),$$

$$\int\limits_{\|\xi\|\geq t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)| d\xi \leq c\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}, \forall t \in (0,t_0);$$

при цьому враховуємо той факт, що νg – неперервно диференційовна фінітна в $\mathbb{R}^n$ функція, тобто

$$\exists M_1 > 0 : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{K}} |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| \leq M_1.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon \in (0,T) \ \exists t_0 = \varepsilon \ \forall t : \ 0 < t < t_0 \ \forall x \in \mathbb{K} :$$

$$\Delta(t,x) = \left| J(t,x) - \frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x) \right| < b_0 M \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])} + c M_1 \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}.$$

Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Звідси випливає співвідношення

$$J(t,x) \underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} \frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x).$$

Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо функцію

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/\|x\|^{n+\gamma}, & x \in \overline{K}(0,1) \setminus \{0\}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{K}(0,1). \end{cases}$$

Відомо [38], що φ допускає регуляризацію у просторі $\Phi'_* \subset \Phi'$, при цьому відповідний функціонал F_φ визначається формулою

$$\langle F_\varphi, \psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\psi(x) - \sum_{|j|\leq[\gamma]} (D_x^j \psi)(0) \frac{x^j}{j!} \Big) \|x\|^{-(n+\gamma)} dx, \quad \psi \in \Phi.$$

Отже, як узагальнена функція, φ збігається з гладкою функцією $g(x) = \|x\|^{-(n+\gamma)}$ у кожній області $Q \subset \overline{K}(0,1)$, яка не містить точку 0. Тоді, згідно з теоремою 4.3 розв'язок задачі (4.5), (4.11), побудований за функцією φ, володіє властивостями:

$$u(t,x) \underset{t\to+0}{\overset{\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} (\mu-1)^{-1}\|x\|^{-(n+\gamma)}, u(t,x) \underset{t\to T-0}{\overset{\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} (\mu-1)^{-1}\|x\|^{-(n+\gamma)},$$

де $\mathbb{K}$ – довільний компакт, що міститься в області Q.

4.3. m-точкова задача

У підрозділі досліджується m-точкова задача, де $m \geq 2$. Методика дослідження цієї задачі відрізняється від методики дослідження двоточкової задачі, яка базується на зображенні фундаментального розв'язку двоточкової задачі у вигляді ряду, членами якого є фундаментальні розв'язки задачі Коші для еволюційних рівнянь вигляду (4.5).

4.3.1. Властивості фундаментального розв'язку багатоточкової задачі

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi, \tag{4.15}$$

де A_γ – ПДО, який розглядався у підрозділі 4.2, задамо нелокальну багатоточкову задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \dots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{4.16}$$

де $\mu,\ \mu_1,\ \dots,\ \mu_m > 0,\ \mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k,\ 0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T),\Phi)$ задачі (4.5), (4.16) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, тому припускаємо, що функція φ є елементом простору Φ. Введемо позначення $F[\varphi](\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma)$ і шукатимемо розв'язок задачі (4.5), (4.16) у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}[v(t,\sigma)](x), \quad (t,x) \in \Pi.$$

Для функції $v\colon \Pi \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу (з параметром σ):

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Pi, \tag{4.17}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{\varphi}(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.17) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-ta(\sigma)\}, \quad (t,\sigma) \in \Pi, \tag{4.19}$$

де c – довільна стала. Підставивши (4.19) в (4.18), отримаємо вираз для сталої c:

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.20}$$

Підставивши (4.20) в (4.19), отримаємо формулу для розв'язку задачі (4.17), (4.18):

$$v(t,\sigma)=\tilde{\varphi}(\sigma)\exp\{-ta(\sigma)\}\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1},\quad (t,\sigma)\in\Pi.$$

Отже, розв'язок задачі (4.5), (4.16) має вигляд:

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}v(t,\sigma)e^{i(x,\sigma)}d\sigma.$$

Введемо позначення

$$\Gamma(t,t_1,\ldots,t_m;x)\equiv\Gamma(t,x):=F^{-1}[Q(t,\sigma)](x),$$

де

$$Q(t,\sigma)=\exp\{-ta(\sigma)\}\Big(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi=\Gamma(t,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Pi.$$

Справді,

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-i(\sigma,\xi)}d\xi\Big)e^{i(\sigma,x)}d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big((2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(t,\sigma)e^{i(\sigma,x-\xi)}d\sigma\Big)\varphi(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi=\Gamma(t,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Pi.$$

Дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$. Правильним є наступне твердження.

Лема 4.4. *При фіксованому $t>0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна по $\sigma\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$; для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)|\le\gamma_s\varphi_s(t)e^{-ta(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}|\sigma_i|^{\omega_i},\quad s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{Z}_+^n,\tag{4.21}$$

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$, *де* γ_s *– стала, не залежна від* t, $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{|s|} t^p$,

$$\omega_i = \begin{cases} s_i(\gamma - 1), & \text{якщо } |\sigma_i| \geq 1, i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \gamma - s_i, & \text{якщо } |\sigma_i| < 1, \sigma_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Доведення. З метою уникнення громіздкості викладок, доведення твердження здійснимо у випадку однієї незалежної змінної. Для доведення (4.21) скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m F(g)}{dg^m} \sum_{\substack{m_1 + \cdots + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + \cdots + lm_l = s}} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \times$$

$$\times \Big(\frac{1}{1!}\frac{d}{d\sigma} g(\sigma)\Big)^{m_1} \Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2} g(\sigma)\Big)^{m_2} \ldots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma)\Big)^{m_l}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $s = m_1 + 2m_2 + \cdots + lm_l$, $m = m_1 + \cdots + m_l$. У цій формулі покладемо $f = e^g$, $g = -ta(\sigma)$. Тоді

$$D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)} = e^{-ta(\sigma)} \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m F(g)}{dg^m} \sum_{\substack{m_1 + \cdots + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + \cdots + lm_l = s}} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \times$$

$$\times (-t)^{m_1 + 2m_2 + \cdots + lm_l} \cdot \Delta,$$

де символом Δ позначено вираз

$$\Delta = \Big(\frac{d}{d\sigma} a(\sigma)\Big)^{m_1} \Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\sigma^2} a(\sigma)\Big)^{m_2} \ldots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\sigma^l} a(\sigma)\Big)^{m_l}.$$

Урахувавши умови, які задовольняє функція-символ a знаходимо, що

$$|\Delta| = c_1^{m_1} |\sigma|^{(\gamma-1)m_1} c_2^{m_2} |\sigma|^{(\gamma-2)m_2} \ldots c_l^{m_l} |\sigma|^{(\gamma-l)m_l} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_l^{m_1 + \cdots + m_l} |\sigma|^{\gamma(m_1 + \cdots + m_l) - (m_1 + 2m_2 + \cdots + lm_l)} = \tilde{c}_l |\sigma|^{\gamma m - s},$$

де $\tilde{c}_l = \max\{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$. Отже,

$$|D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)}| \leq \beta_s t^s \cdot e^{-ta(\sigma)} |\sigma|^\omega, \tag{4.22}$$

де

$$\omega = \begin{cases} s(\gamma-1), & \text{якщо } |\sigma| \ge 1, \\ \gamma - s, & \text{якщо } |\sigma| < 1, \sigma \ne 0. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\sigma) := \exp\{-ta(\sigma)\}, Q_2(\sigma) := \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-ta(\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Тоді, урахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$D_\sigma^s Q(t,\sigma) \equiv D_\sigma^s (Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)) = \sum_{p=0}^{s} C_s^p Q_1^{(p)}(t,\sigma) \cdot Q_2^{(s-p)}(\sigma).$$

Далі зазначимо, що

$$Q_2'(\sigma) = -Q_2^2(\sigma) a'(\sigma) \sum_{k=1}^{m} \mu_k t_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} = -Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma),$$

де

$$R(\sigma) := \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}.$$

Отже, для $l \ge 1$

$$D_\sigma^l Q_2'(\sigma) = -D_\sigma^l (Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma)) = -\sum_{i=0}^{l} C_l^i D_\sigma^i (Q_2^2(\sigma)) D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma).$$

Для обчислення і оцінки похідної $D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)$ знову скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, в якій покладемо $F = g^{-2}$, $g = R$; тоді

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| = \Big| \sum_{j=1}^{l} \frac{d^j}{dR^j}(R^{-2}) \cdot \sum_{\substack{j_1+\dots+j_\nu = j \\ j_1+2j_2+\dots+j\nu_j = i}} \frac{i!}{j_1! \dots j_\nu!} \times$$

$$\times \Big(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma)\Big)^{j_1} \dots \Big(\frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma)\Big)^{j_\nu} \Big|.$$

Припустимо, що $|\sigma| \geq 1$. Урахувавши нерівності (4.22), а також умови, які задовольняє функція a знайдемо, що

$$\Big|\frac{d}{d\sigma}R(\sigma)\Big| \leq \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big|\frac{d}{d\sigma}e^{-t_k a(\sigma)}\Big| \leq \beta_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Big|\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu}R(\sigma)\Big| \leq \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big|\frac{d^\nu}{d\sigma^\nu}e^{-t_k a(\sigma)}\Big| \leq \beta_\nu.$$

Отже, якщо $|\sigma| \geq 1$, то

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \leq \tilde{\beta}_i \sum_{j=1}^{i}\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \equiv \tilde{\beta}_i \sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\Big|\Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\Big)^{2+j}\Big|}.$$

Оскільки

$$\exp\{-t_k a(\sigma)\} \leq 1, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}, t_k \in (0,T], k \in \{1,\dots,m\},$$

то

$$\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \geq \mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k.$$

Отже,

$$\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big)^{-(2+j)} \equiv \delta_j.$$

Урахувавши останні нерівності знайдемо, що

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \leq \tilde{\delta}_i, |\sigma| \geq 1, 0 \leq i \leq l.$$

Аналогічно дістається, що

$$|D_\sigma^{l+1-i}R(\sigma)| \leq \tilde{\tilde{\delta}}_{l+1-i}, |\sigma| \geq 1, 0 \leq i \leq l.$$

Тоді для $l \geq 1$ правильною є оцінка:

$$|D_\sigma^l Q_2'(\sigma)| \leq \delta_l', \quad |\sigma| \geq 1.$$

Оскільки $Q_1(t,\sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}$, то звідси та з (4.22) випливає, що для $|\sigma| \geq 1$

$$|D_\sigma^s Q(t,s)| \leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p |Q_1^{(p)}(t,\sigma)| \cdot |Q_2^{(s-p)}(\sigma)| \leq$$

$$\leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p \beta_p t^p |\sigma|^{p(\gamma-1)} \delta''_{s-p} e^{-ta(\sigma)} \leq \gamma_s \varphi_s(t) e^{-ta(\sigma)} |\sigma|^{s(\gamma-1)}, \tag{4.23}$$

де $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{s} t^p$.

Якщо $|\sigma| < 1$, $\sigma \neq 0$, то із оцінок (4.22) випливає, що

$$\left| \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{j_1} \dots \left(\frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{d\sigma^\nu} R(\sigma) \right)^{j_\nu} \right| \leq \tilde{c}_\nu |\sigma|^{(\gamma-1)j_1} |\sigma|^{(\gamma-2)j_2} \dots |\sigma|^{(\gamma-\nu)j_\nu} =$$

$$= \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma(j_1+\dots+j_\nu)-(j_1+2j_2+\dots+\nu j_\nu)} = \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma j - i} \leq \tilde{c}_\nu |\sigma|^{\gamma - i}$$

(при оцінці вказаного виразу враховані властивості функції $a(\sigma)$, а також нерівності $\exp\{-t_k a(\sigma)\} \leq 1$, $t_k \in (0,T]$). Далі, міркуючи аналогічно тому, як це зроблено у випадку $|\sigma| \geq 1$ знаходимо, що

$$|D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \leq \tilde{\delta}'_i \cdot |\sigma|^{\gamma-i}, \quad |\sigma| < 1, \sigma \neq 1.$$

Крім того, справджується також нерівність

$$|D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma)| \leq \tilde{\tilde{\delta}}'_{l+1-i} |\sigma|^{\gamma-(l+1-i)}, \quad |\sigma| < 1, \sigma \neq 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^l Q'_2(\sigma)| \leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i |D_\sigma^i Q_2^2(\sigma)| \cdot |D_\sigma^{l+1-i} R(\sigma)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i \tilde{\delta}'_i \tilde{\tilde{\delta}}'_{l+1-i} |\sigma|^{\gamma-i} |\sigma|^{\gamma-(l+1-i)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{l} C_l^i \tilde{\delta}'_i \tilde{\tilde{\delta}}'_{l+1-i} |\sigma|^{\gamma-i} |\sigma|^{-(l-i)} \leq b_l |\sigma|^{\gamma-l}, |\sigma| < 1, \sigma \neq 1. \tag{4.24}$$

Урахувавши (4.22) та (4.24), прийдемо до наступних оцінок ($|\sigma| < 1$, $\sigma \neq 0$):

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p |Q_1^{(p)}(t,\sigma)| \cdot |Q_2^{(s-p)}(\sigma)| \leq$$

$$\leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p \beta_p t^p |\sigma|^{\gamma-p} b_{l-p} |\sigma|^{-(s-p)} e^{-ta(\sigma)} \leq \tilde{\gamma}_s \varphi_s(t) e^{-ta(\sigma)} |\sigma|^{\gamma-s}. \tag{4.25}$$

Об'єднуючи оцінки (4.23) та (4.25) в одну, дістанемо нерівність (4.21) у випадку $n = 1$. Якщо $n > 1$, то доведення твердження здійснюється за наведеною вище схемою, при цьому формула Фаа де Бруно застосовується по кожній змінній окремо.

Твердження доведено.

Нехай $\tilde{Q}(t,\sigma) := \tilde{Q}_1(\sigma)\tilde{Q}_2(t,\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ – фіксований параметр, де

$$\tilde{Q}_1(\sigma) = \exp\{-a(\sigma)\}, \tilde{Q}_2(t,\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t^{-1} \cdot t_k a(\sigma)\}^{-1}.$$

Проаналізувавши доведення леми 4.4, прийдемо до наступного допоміжного твердження.

Лема 4.5. *При фіксованому $t > 0$ функція $\tilde{Q}(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна по $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s \tilde{Q}(t,\sigma)| \leq \beta_s \tilde{\psi}_s(t) e^{-a(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\omega_i}, \quad s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *де* β_s *– стала, не залежна від* t, $\tilde{\psi}_s(t) = \sum_{p=0}^{|s|} t^{-p}$,

$$\omega_i = \begin{cases} s_i(\gamma - 1), & |\sigma_i| \geq 1, i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \gamma - s_i, & |\sigma_i| < 1, \sigma_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Зауваження 4.1. *Оскільки*

$$\tilde{\psi}_s(t) = \frac{1 - (1/t)^{|s|}}{1 - 1/t} = \frac{t(t^{|s|} - 1)}{t^{|s|}(t-1)} = \frac{t(t-1)(1 + t + \cdots + t^{|s|-1})}{t^{|s|}(t-1)}, \quad t \neq 1,$$

то $\tilde{\psi}_s(t)$ *допускає наступну оцінку:*

$$\tilde{\psi}_s(t) \leq s t^{-(|s|-1)}, \quad \forall t \in (0,1)$$

(ця оцінка правильна і для $t = 1$). Отже,

$$|D_\sigma^s \tilde{Q}(t,\sigma)| \leq \tilde{\beta}_s t^{-(|s|-1)-a(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\omega_i}, t \in (0,1], \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, s \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (4.26)$$

Зауваження 4.2. *Із властивості однорідності функції $a(\sigma)$ випливають наступні співвідношення:*

$$Q(t, t^{-1/\gamma}\sigma) = Q_1(t, t^{-1/\gamma}\sigma) Q_2(t^{-1/\gamma}\sigma) =$$

$$= \exp\{-ta(t^{-1/\gamma}\sigma)\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(t^{-1/\gamma}\sigma)\}\Big)^{-1} =$$

$$= \exp\{-a(\sigma)\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t^{-1} t_k a(\sigma)\}\Big)^{-1} =$$

$$= \tilde{Q}_1(\sigma) \tilde{Q}_2(t,\sigma) = \tilde{Q}(t,\sigma). \quad (4.27)$$

На підставі оцінок (4.21) твердимо, що

$$\sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \Big\{ \sum_{|k|=0}^{p} |\sigma^k D_\sigma^k Q(t,\sigma)| \Big\} \leq c_p < +\infty, p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_p = c_p(t) > 0$. Звідси вже дістаємо, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору Ψ. Тоді функція $\Gamma(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, як функція x, є елементом простору $\Phi = F^{-1}[\Psi]$ (при кожному $t > 0$). Крім того, функція

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma) e^{i(x,\sigma)} d\sigma \quad (4.28)$$

є неперервною функцією параметра $t \in (0,T]$. Справді, із властивостей функції $a(\sigma)$ та обмежень на параметри задачі (4.5), (4.16) випливає, що для $t \geq t_0 > 0$

$$|Q(t,\sigma)| \leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \exp\{-t_0 a(\sigma)\} \leq \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \exp\{-t_0 \tilde{\delta} \|\sigma\|^\gamma\}.$$

Звідси вже дістаємо, що інтеграл (4.28) збігається рівномірно у довільній смузі $\{(t,x): \ t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$, $t_0 > 0$, тому функція Γ є неперервною у кожній точці проміжку $(0,T]$.

Аналогічно доводимо диференційовність по t функції Γ. Справді, формально диференціюючи (4.28) по t, під знаком інтеграла дістанемо функцію

$$-a(\sigma)Q(t,\sigma)e^{i(x,\sigma)},$$

модуль якої для $t \geq t_0 > 0$ оцінюється величиною

$$\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1} \exp\{-(t_0-\varepsilon)a(\sigma)\} \exp\{-\varepsilon a(\sigma)\}, \quad 0 < \varepsilon < t_0.$$

Оскільки

$$\exists c > 0 \ \ \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \ \ a(\sigma) \exp\{-(t_0-\varepsilon)a(\sigma)\} \leq c,$$

то мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-\varepsilon a(\sigma)\}$. Отже, інтеграл від похідної підінтегральної функції в (4.28) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0, T]$ і тому похідну під знаком інтеграла в (4.28) можна застосовувати в кожній точці $t \in (0,T]$. Зазначимо також, що $\partial\Gamma(t,x)/\partial t$ – неперервна по t функція (при фіксованому x).

Оскільки

$$Q(t,\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x) e^{i(x,\sigma)} dx, \quad a(0) = 0,$$

то справджується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x) dx = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1}, \quad \forall t \in (0,T].$$

Виділимо в оцінках функції $\Gamma(t,x)$ та її похідних (по x) залежність від параметра t.

Лема 4.6. *Для функції Γ та її похідних правильними є оцінки*

$$|D_x^k \Gamma(t,x)| \leq c_k \frac{t^{-([\gamma](\gamma-1)+\gamma(n-1))/\gamma - |k|}}{(1+\|x\|)^{n+[\gamma]+|k|}}, k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{4.29}$$

$$t \in (0,1], x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Доведення. Детальне доведення твердження проведемо у випадку $n = 1$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\sigma = t^{-1/\gamma}y$ та врахувавши зауваження 4.2, дістанемо наступне зображення для функції Γ:

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-1}t^{-1/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\tilde{Q}(t,y)\exp\{-it^{-1/\gamma}xy\}dy = t^{-1/\gamma}\Gamma_0(t,x),$$

де

$$\Gamma_0(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}\tilde{Q}(t,y)\exp\{-izy\}dy, \quad z = t^{-1/\gamma}x.$$

Якщо $z \neq 0$, то інтегруючи $s = 1 + [\gamma]$ разів частинами, подамо $\Gamma_0(t,z)$ у вигляді

$$\Gamma_0(t,z) = (2\pi)^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|y|\geq\varepsilon}\tilde{Q}(t,y)e^{-izy}dy =$$

$$= (2\pi)^{-1}\frac{\tilde{c}}{z^s}\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\int\limits_{|y|\geq\varepsilon}D_y^s\tilde{Q}(t,y)e^{-izy}dy + \Phi(\varepsilon,z)\Big].$$

Символом $\Phi(\varepsilon,z)$ позначено позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_y^l\tilde{Q}(t,y)\cdot e^{-izy}$, $0 \leq l \leq s-1$, із значеннями в точках $y = \varepsilon$, $y = -\varepsilon$. Із оцінок (4.26) (випадок $n = 1$), які задовольняє функція $\tilde{Q}(t,y)$ та її похідні при $y \neq 0$ випливає, що для $|y| < 1$, $y \neq 0$, справджується нерівність

$$|D_y^l\tilde{Q}(t,y)| \leq c|y|^{\gamma-l}, \quad c = c(t) > 0,$$

причому $\gamma - l \geq \gamma - [\gamma] = \{\gamma\}$, якщо $0 \leq k \leq s-1$, $s = 1 + [\gamma]$. Звідси дістаємо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,z) = 0$ у кожній точці $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання на нескінченності функції $\tilde{Q}(t,y)$ та її похідних (при фіксованому $t > 0$).

Урахувавши оцінки похідних функції $\tilde{Q}(t,y)$ (див. (4.26)) знайдемо, що

$$|\Gamma_0(t,z)| \leq \frac{\tilde{c}_s}{|z|^s}t^{-(s-1)}\int\limits_{|y|\geq\varepsilon}e^{-a(y)}|y|^{\omega}dy \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{c}'_s}{|z|^s} t^{-(s-1)} \int\limits_0^\infty e^{-a(y)} y^\omega dy, \quad s = 1 + [\gamma], t \in (0,1].$$

Підінтегральна функція $\exp\{-a(y)\}y^\omega$ має інтегровну особливість у точці $y = 0$. Справді, оскільки $\omega = \gamma - s$, якщо $|y| < 1$, $y \neq 0$, то при вказаному виборі s маємо, що $\omega = \{\gamma\} - 1$, звідки і випливає збіжність відповідного інтеграла. Отже,

$$|\Gamma(t,x)| = t^{-1/\gamma}|\Gamma_0(t,z)| \leq \text{const}\frac{t^{-1/\gamma} \cdot t^{-(s-1)}}{|z|^s} = \text{const}\frac{t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma}}{|x|^{1+[\gamma]}}, x \neq 0.$$

Якщо ще врахувати, що $|\Gamma_0(t,z)| \leq \text{const}$ для всіх $t \in (0,1]$ і $z \in \mathbb{R}$, а також те, що $t^{-1/\gamma} \leq t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma}$ для $t \in (0,1]$, прийдемо до нерівності

$$|\Gamma(t,x)| \leq \frac{ct^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]}}, \quad t \in (0,1), x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$D_x^k\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-1}(-i)^k t^{-(1+k)/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t,y) e^{-izy} y^k dy, z = t^{-1/\gamma}x.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено у випадку $k = 0$ та зінтегрувавши частинами $s = 1 + [\gamma] + k$ разів знайдемо, що

$$D_x^k\Gamma(t,x) = \frac{c_s}{z^s} t^{-(1+k)/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} D_y^s(\tilde{Q}(t,y)y^k) e^{-izy} dy, z \neq 0.$$

Урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій дістанемо, що оцінка похідних функції Γ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{c_s}{|z|^s}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}} |y|^k\, |D_y^s \tilde{Q}(t,y)| dy + ks \int\limits_{\mathbb{R}} |y|^{k-1} \cdot |D_y^{s-1}\tilde{Q}(t,y)| dy +$$

$$+ k(k-1)\frac{s(s-1)}{2!} \int\limits_{\mathbb{R}} |y|^{k-2} \cdot |D_y^{s-2}\tilde{Q}(t,y)| dy + \cdots +$$

$$+ C_{1+[\gamma]+k}^k k! \int\limits_{\mathbb{R}} |D_y^{1+[\gamma]}\tilde{Q}(t,y)| dy\Big]. \qquad (4.30)$$

Кожний із інтегралів в (4.30) має інтегровну особливість у точці $y = 0$. Справді, розглянемо один із доданків у сумі (4.30), що відповідає індексу $k-p$, $0 \le p \le k$:

$$2k(k-1)\dots(k-p)C^{k-p}_{1+[\gamma]+k} \cdot J,$$

$$J = \int\limits_0^\infty y^{k-p} |D^{s-p}_y \tilde{Q}(t,y) dy, \quad s = 1 + [\gamma] + k.$$

Із нерівностей (4.26) дістаємо, що для $t \in (0,1]$ справджується оцінка

$$J \le \beta t^{-(s-p-1)} \int\limits_0^\infty e^{-a(y)} y^{k-p+\omega} dy.$$

У околі точки $y = 0$ ($|y| < 1$, $y \ne 0$) підінтегральна функція допускає оцінку

$$e^{-a(y)} y^{k-p+\omega} \le y^{k-p+\gamma-(s-p)} = y^{\gamma-[\gamma]-1} = \frac{1}{y^{1-\{\gamma\}}},$$

звідки й випливає збіжність відповідного невласного інтеграла, бо $0 < 1 - \{\gamma\} < 1$. Оцінюючи аналогічно кожний інтеграл у сумі (4.30), виділяючи при цьому залежність від параметра $t \in (0,1]$, прийдемо до нерівності

$$|D^k_x \Gamma(t,x)| \le \frac{c_k t^{-[\gamma](\gamma-1)/\gamma-k}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]+k}}, t \in (0,1], x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Для доведення твердження у випадку $n > 1$ скористаємося тотожністю

$$Le^{-i(z,y)} = e^{-i(z,y)}, L = i\|z\|^{-2} \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

і проінтегруємо $q = n + [\gamma] + |k|$ разів ($k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$) інтеграл, записаний у правій частині рівності

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-n} t^{-n/\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{Q}(t,y) e^{-i(z,y)} dy.$$

У результаті дістанемо співвідношення

$$\Gamma(t,x) = (2\pi)^{-n} t^{-n/\gamma} (-1)^q \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z,y)} L^q \tilde{Q}(t,y) dy.$$

Звідси вже випливає, що

$$|D_x^k\Gamma(t,x)| \le (2\pi)^{-n}t^{-(n+|k|)/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|y_1|^{k_1}\dots|y_n|^{k_n}|L^q\tilde{Q}(t,y)|dy, k\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Урахувавши нерівності (4.26), а також вигляд оператора L, прийдемо до наступної оцінки:

$$|L^q\tilde{Q}(t,y)| \le c_q\|x\|^{-q}t^{-(q-1)}e^{-a(y)}\|y\|^{n\gamma-q}, q = n+[\gamma]+|k|, \tag{4.31}$$

$$t\in(0,1], y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Скориставшись (4.31) переконуємося в тому, що при вказаному виборі q відповідний n-кратний інтеграл є збіжним. Зокрема, у околі точки $y = 0$ після переходу до узагальнених сферичних координат дослідження зводиться до дослідження на збіжність звичайного інтеграла від підінтегральної функції вигляду $r^{n-1+n\gamma-q+|k|}$, $r > 0$, який є збіжним. Виділивши, далі, у явному вигляді залежність від параметра t, отримаємо нерівності (4.29).

Лема доведена.

Наслідок 4.3. *Правильними є нерівності*

$$\left|D_x^k\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)\Big)\right| \le \tilde{c}_k\frac{t^{-(\gamma[\gamma]+\{\gamma\}+\gamma(n-1))/\gamma-|k|}}{(1+\|x\|)^{n+[\gamma]+|k|}}, \tag{4.32}$$

$$k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n, t\in(0,1], x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

стала $\tilde{c}_k > 0$ *не залежить від* t.

Доведення нерівності (4.32) аналогічне доведенню нерівності (4.29); при цьому враховується вигляд $\dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x) = -(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}a(\sigma)Q(t,y)e^{-i(x,y)}dy,$$

та зміни, які вносить у відповідну оцінку підінтегральний множник $a(\sigma)$.

Лема 4.7. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, диференційовна по t.*

Доведення цього твердження аналогічне доведенню леми 4.1.

Як наслідок з леми 4.7 дістаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * \Gamma)(t,\cdot) = f * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\cdot), \quad \forall f \in \Phi', t \in (0,T].$$

Лема 4.8. *У просторі Φ' справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t\to t_1}\Gamma(t,\cdot) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m}\Gamma(t,\cdot) = \delta \tag{4.33}$$

(тут δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є F: $\Phi' \to \Psi'$ та неперервністю $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t, співвідношення (4.33) замінимо еквівалентним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\Gamma(t,\cdot)] - \mu_1 \lim_{t\to t_1} F[\Gamma(t,\cdot)] - \mu_m \lim_{t\to t_m} F[\Gamma(t,\cdot)] = F[\delta].$$

Урахувавши зображення функції Γ, (4.33) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\sigma) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} Q(t,\sigma) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m} Q(t,\sigma) = 1. \tag{4.34}$$

Співвідношення (4.34) розглядаємо в просторі Ψ'. Для доведення (4.34) візьмемо довільну функцію $\psi \in \Psi$ і скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \mu_1 \lim_{t\to t_1}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \mu_m \lim_{t\to t_m}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \mu_1 \lim_{t\to t_1}\int_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \cdots -$$

$$-\mu_m \lim_{t\to t_m}\int_{\mathbb{R}^n} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \mu \int_{\mathbb{R}^n} Q(0,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma -$$

$$-\mu_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(t_1,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \dots - \mu_m \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(t_m,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\mu Q(0,\sigma) - \mu_1 Q(t_1,\sigma) - \dots - \mu_m Q(t_m,\sigma)]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}} - \frac{\mu_1 \exp\{-t_1 a(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_1 a(\sigma)\}} - \dots - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_m \exp\{-t_m a(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}} \right] \psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}} \psi(\sigma)d\sigma = \langle 1, \psi \rangle.$$

Звідси вже дістаємо, що (4.34) має місце, а, отже, правильним є співвідношення (4.33).

Лема доведена.

Наслідок 4.4. *Нехай*

$$\omega(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x), \quad \varphi \in \phi'_*, (t,x) \in \Pi.$$

Тоді в просторі Φ' *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} \omega(t,\cdot) - \dots - \mu_m \lim_{t \to t_m} \omega(t,\cdot) = \varphi. \tag{4.35}$$

Доведення. Із умови $\varphi \in \Phi'_*$ та властивості неперервності $\Gamma(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі Φ випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі Φ. Тоді, урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є $F\colon \Phi' \to \Psi'$ та формулу

$$F[\varphi * \Gamma] = F[\varphi]F[\Gamma] = F[\varphi]Q(t,\sigma),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції $\varphi \in \Phi'_*$, співвідношення (4.35) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \mu_1 \lim_{t\to t_1} F[\omega(t,\cdot)] - \mu_m \lim_{t\to t_m} F[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F[\varphi]\Big(\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} Q(t,\cdot) - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m} Q(t,\cdot)\Big) = F[\varphi].$$

Урахувавши співвідношення (4.34) дістаємо, що (4.35) має місце.

Твердження доведено.

Зазначимо, що функція Γ є розв'язком рівняння (4.5). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

З іншого боку,

$$A_\gamma \Gamma(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)F[\Gamma(t,x)]] = F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial Q(t,\sigma)}{\partial t}\Big].$$

Звідси вже випливає, що функція Γ задовольняє рівняння (4.5).

Надалі функцію Γ називатимемо **фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі** для рівняння (4.5) (позначення: ФРБЗ).

4.3.2. Коректна розв'язність m-точкової задачі в класі крайових умов типу розподілів

З наслідку 4.4 випливає, що для рівняння (4.5) багатоточкову задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (4.5), який задовольняє умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \dots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{4.36}$$

де границі розглядаються у просторі Φ', $\varphi \in \Phi'_*$, μ, μ_1, …, $\mu_m > 0$, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \dots < t_m = T$.

Основний результат цього підрозділу складає наступне твердження.

Теорема 4.4. *Задача* (4.5), (4.36) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* Φ'_*. *Розв'язок подається у вигляді згортки*

$$u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x), \quad \varphi \in \Phi'_*, (t,x) \in \Pi,$$

де Γ – *ФРБЗ рівняння* (4.5).

Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 4.1.

4.3.3. Властивість локалізації розв'язку m-точкової задачі ($m \geq 2$)

У цьому підрозділі додатково вважаємо, що функція-символ a є радіальною, тобто $a(\sigma) = a(\|\sigma\|) \equiv a(\sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2})$. Як і у випадку двоточоквої задачі маємо, що розв'язок $u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x)$ m-точкової задачі (4.5), (4.36) ($m \geq 2$) задовольняє граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,\cdot) \underset{t \to t_i}{\longrightarrow} (\varphi * \Gamma)(t,\cdot) = u(t_i,\cdot),$$

$$t_i \in (0,T], i \in \{1,\ldots,m\},$$

у просторі Φ, оскільки узагальнена функція φ є згортувачем у просторі Φ, а $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, – неперервна абстрактна функція параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі Φ. Зокрема, $u(t,\cdot) \to u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $t_i \in (0,T]$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. З'ясуємо, за яких обмежень на граничну функцію $\varphi \in \Phi'_*$ можна отримати локальне покращення збіжності згортки $(\varphi * \Gamma)(t,\cdot)$ при $t \to +0$. Для цього скористаємося формулою Бохнера:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}) e^{-i(x,\sigma)} d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\|x\|^{(n-2)/2}} \int\limits_0^\infty \varphi(\rho)\rho^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\|x\|\rho) d\rho, \quad (4.37)$$

де

$$\varphi(\rho) = \exp\{-ta(\rho)\} \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a(\rho)\}\Big)^{-1}, t_k \in (0,T], i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Оскільки $J_\nu(\omega) = \dfrac{\omega^\nu j_\nu(\omega)}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$, де j_ν – нормована функція Бесселя, то (4.37) набуває вигляду

$$\Gamma(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|\sigma\|) e^{-i(x,\sigma)} d\sigma = \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu} \int\limits_0^\infty \varphi(\rho) j_\nu(\|x\|\rho) \rho^{2\nu+1} d\rho, x \neq 0,$$

де $\nu = (n-2)/2$, $\beta_\nu = \dfrac{(2\pi)^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$.

Урахувавши, що $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = T$, розглянемо наступні співвідношення:

$$-\mu_1 e^{-t_1 a(\rho)} - \mu_2 e^{-t_2 a(\rho)} - \cdots - \mu_m e^{-t_m a(\rho)} =$$
$$= -\mu_1 e^{-t_1 a(\rho)} \Big(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{-(t_2-t_1)a(\rho)} + \cdots + \frac{\mu_m}{\mu_1} e^{-(t_m-t_1)a(\rho)}\Big);$$
$$1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{-(t_2-t_1)a(\rho)} + \cdots + \frac{\mu_m}{\mu_1} \leq 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} + \cdots + \frac{\mu_m}{\mu_1} + e^{(-(t_m-t_1))a(\rho)} =$$
$$= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m}{\mu_1} \equiv \frac{\mu_0}{\mu_1};$$
$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k A(\sigma)} \geq \mu - \mu_1 \frac{\mu_0}{\mu_1} e^{-t_1 a(\rho)} = \mu - \mu_0 e^{-t_1 a(\rho)};$$
$$Q(\rho) := \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k a(\rho)}\Big)^{-1} \geq (\mu - \mu_0 e^{-t_1 a(\rho)})^{-1}.$$

Отже,

$$0 < \varphi(\rho) = e^{-ta(\rho)} Q(\rho) \leq e^{-ta(\rho)} (\mu - \mu_0 e^{-t_1 a(\rho)})^{-1} := \varphi_0(\rho).$$

Звідси, для $\rho \geq 0$ дістаємо, що при фіксованому x

$$\varphi(\rho) |j_\nu(\|x\|\rho)| \rho^{2\nu+1} \leq \varphi_0(\rho) |j_\nu(\|x\|\rho)| \rho^{2\nu+1}.$$

Зінтегрувавши останню нерівність знайдемо, що

$$|\Gamma(t,x)| = \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu} \Big| \int\limits_0^\infty \varphi(\rho) j_\nu(\|x\|\rho) \rho^{2\nu+1} d\rho \Big| \leq \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu} \int\limits_0^\infty \varphi(\rho) |j_\nu(\|x\|\rho)| \rho^{2\nu+1} d\rho \leq$$

$$\leq \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu} \int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) |j_\nu(\|x\|\rho)| \rho^{2\nu+1} d\rho.$$

Покладемо, далі, за означенням,

$$j_{\nu,+}(\|x\|\rho) := \max(j_\nu(\|x\|\rho), 0), j_{\nu,-}(\|x\|\rho) := -\min(j_\nu(\|x\|\rho), 0),$$

$\|x\| \geq 0$, $\rho \geq 0$ (x – фіксоване). Оскільки

$$|j_\nu(\|x\|\rho)| = j_{\nu,+}(\|x\|\rho) + j_{\nu,-}(\|x\|\rho) = (j_{\nu,+}(\|x\|\rho) - j_{\nu,-}(\|x\|\rho)) +$$

$$+2j_{\nu,-}(\|x\|\rho) = j_{\nu,+}(\|x\|\rho) + 2j_{\nu,-}(\|x\|\rho),$$

то

$$|\Gamma(t,x)| \leq \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu}\Big[\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_\nu(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho + 2\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_{\nu,-}(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho\Big] \leq$$

$$\leq \frac{\beta_\nu}{\|x\|^\nu}\Big(\Big|\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_\nu(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho\Big| + 2\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_{\nu,-}(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho\Big).$$

Урахувавши асимптотику нормованої функції Бесселя $j_\nu(\omega)$ при $\omega \to +0$ та $\omega \to +\infty$, означення функції $j_{\nu,-}$, обмеженість $j_\nu(\|x\|\rho)$ при $\|x\| \geq 0$, $\rho \geq 0$, твердимо, що знайдеться стала $\tilde{c} > 1$ (не залежна від $\|x\|$ та ρ) така, що

$$\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_{\nu,-}(\|x\|\rho)\rho^{2\nu-1}d\rho \leq \tilde{c}\Big|\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_\nu(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho\Big|.$$

Отже, правильною є нерівність

$$|\Gamma(t,x)| \leq \frac{\tilde{\beta}_\nu}{\|x\|^\nu}\Big|\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho) j_\nu(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho\Big|. \tag{4.38}$$

Для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, \quad (t,x) \in (0, t_1] \times \mathbb{R}^n, \tag{4.39}$$

де A_γ – ПДО, побудований за символом $a(\sigma) \equiv a(\|\sigma\|)$, розглянемо двоточкову задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_0 u(t,\cdot)|_{t=t_1} = \varphi, \quad \varphi \in \Phi'_*. \tag{4.40}$$

Фундаментальний розв'язок цієї задачі позначатимемо символом $\Gamma_2(t,x)$.

Використовуючи формулу Бохнера знайдемо, що

$$\Gamma_2(t,x)=\frac{\tilde{\beta}_\nu}{\|x\|^\nu}\int\limits_0^\infty \varphi_0(\rho)j_\nu(\|x\|\rho)\rho^{2\nu+1}d\rho.$$

Звідси та з нерівності (4.38) випливає, що

$$|\Gamma(t,x)|\leq \beta'_\nu|\Gamma_2(t,x)|,\quad t\in(0,t_1], x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \tag{4.41}$$

де стала $\beta'_\nu>0$ не залежить від t та x, що змінюються вказаним чином. Вірним є наступне допоміжне твердження.

Лема 4.9. $\Gamma(t,\cdot)\to\dfrac{\delta}{\mu-\mu_0}$ *при* $t\to+0$ *у просторі* Φ'.

Доведення. Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x-\xi)dx=\frac{1}{\mu-\mu_0},\quad t\in(0,T],\xi\in\mathbb{R}^n, \tag{4.42}$$

то з урахуванням нерівності (4.41) для довільної основної функції $\varphi\in\Phi$ маємо:

$$\Big|\langle\Gamma(t,\cdot),\varphi\rangle-\frac{\langle\delta,\varphi\rangle}{\mu-\nu_0}\Big|=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x)\varphi(x)dx-\frac{\varphi(0)}{\mu-\mu_0}\Big|=$$

$$=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x)\varphi(x)dx-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x)\varphi(0)dx\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Gamma(t,x)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|dx\leq\beta'_\nu\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Gamma_2(t,x)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|dx\equiv J(t).$$

Для доведення твердження досить встановити, що

$$\forall\varepsilon>0\ \exists t_0=t_0(\varepsilon)>0\ \forall t:\ 0<t<t_0\Rightarrow J(t)<\varepsilon.$$

Доведення ж цієї властивості здійснюється за схемою доведення леми 4.2.

Символом $\Phi'_{0,*}$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ'_0, які є згортувачами у просторі Φ_0.

Теорема 4.5. *Нехай $\varphi \in \Phi'_{0,*}$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (4.5), (4.36) *з граничною функцією φ. Якщо $\varphi = 0$ в області $Q \subset \mathbb{R}^n$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m-0} u(t,x) = 0 \qquad (4.43)$$

справджується рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Передусім доведемо, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q \subset \mathbb{R}^n$. Зберігаючи позначення, введенні при доведенні теореми 4.2, знайдемо, що

$$|u(t,x)| \le t^{\{\gamma\}/\gamma} \|\varphi\|_0 \cdot \|\Psi_{t,x}\|_0,$$

де

$$\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\{\gamma\}/\gamma} \eta(\xi) \Gamma(t, x-\xi), \eta = 1-\nu, \nu \in \Phi,$$

$\|\varphi\|_0$ – норма функціоналу φ. Отже, для доведення того, що $u(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на компакті $\mathbb{K} \subset Q$, досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору Φ_0, тобто $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le c_0$, причому стала c_0 не залежить від параметрів t і x, які змінюються наступним чином: $t \in (0,t_1) \subset (0,T]$, $x \in \mathbb{K}$. Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_0 \le c_0$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$.

Оскільки $\nu \in \Phi$, то $|\nu(\xi)| \le \tilde{c}_0/M(\xi)^{\gamma_0}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Отже, $|\eta(\xi)| \le \tilde{c}'_0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Далі скористаємося нерівністю (4.41). Оскільки $\|x-\xi\| \ge a_0 > 0$, де a_0 – віддаль між межами компактів $\mathbb{K}$ і $\mathbb{K}_1$, то для $t \in (0,t_1]$

$$|\Gamma(t,x-\xi)| \le \beta'_\nu |\Gamma_2(t,x-\xi)| \le \frac{\beta t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{\gamma_0}},$$

де стала β залежить від μ, μ_0, t_1 і не залежить від t (тут враховано оцінки фундаментального розв'язку двоточкової задачі (4.39), (4.40), які отримуються аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні леми 4.2). Зазначимо також, що

$$\exists L > 0 \ \forall x \in \mathbb{K} \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 : \ \ M(\xi)/\|x-\xi\| \leq L.$$

Урахувавши ці зауваження знайдемо, що

$$M(\xi)^{\gamma_0}|\eta(\xi)||\Gamma(t,x-\xi)| \leq \beta'_\nu \tilde{c}'_0 M(\xi)^{\gamma_0}|\Gamma_2(t,x-\xi)| \leq$$
$$\leq \frac{\beta' \tilde{c}'_0 t^{\{\gamma\}/\gamma} M(\xi)^{\gamma_0}}{\|x-\xi\|^{\gamma_0}} \leq \tilde{\beta}_0 t^{\{\gamma\}/\gamma}, \quad t \in (0,t_1),$$

стала $\tilde{\beta}_0 > 0$ не залежить від t і x. Звідси вже дістаємо нерівність $\sup\limits_{x\in\mathbb{K}} |u(t,x)| \leq \tilde{\beta}_0 \cdot t^{\{\gamma\}/\gamma}$. Отже, $u(t,x) \to 0$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$.

Із теореми 4.4, лем 4.7, 4.8, наслідку 4.4 та леми 4.9 випливає, що

$$\mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,\cdot) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m - 0} u(t,\cdot) = \frac{\mu_0 \varphi}{\mu - \mu_0},$$

причому це граничне співвідношення справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$. Звідси вже дістаємо, що (4.43) справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$.

Теорема доведена.

Теорема 4.6 (властивість локалізації). *Нехай $\varphi \in \Phi'_{0,*}$, $u(t,x)$ – розв'язок m-точкової задачі* (4.5), (4.6) *з граничною функцією φ. Якщо узагальнена функція φ збігається в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з функцією $g \in M_\Phi$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m - 0} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$, ν – основна функція, побудована при доведенні теореми 4.2. Оскільки $\nu(\varphi - g) = 0$ в Q, то $\nu(\varphi - g) = 0$ на $\mathbb{K}$, $(1-\nu)\varphi = 0$ на $\mathbb{K}_1$ і за доведеним у теоремі 3.5 граничні співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle \nu(\varphi - g), \Gamma(t,x-\xi)\rangle = 0,$$

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle(1-\nu)\varphi, \Gamma(t,x-\xi)\rangle = 0,$$

$$\mu_1 \lim_{t\to t_1}\langle\nu(\varphi-g), \Gamma(t,x-\xi)\rangle - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m-0}\langle\nu(\varphi-g), \Gamma(t,x-\xi)\rangle = 0,$$

$$\mu_1 \lim_{t\to t_1}\langle(1-\nu)\varphi, \Gamma(t,x-\xi)\rangle - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m-0}\langle(1-\nu)\varphi, \Gamma(t,x-\xi)\rangle = 0$$

справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$. Крім того,

$$u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x) = \langle\varphi_\xi, \Gamma(t,x-\xi)\rangle = \langle\nu(\varphi-g), \Gamma(t,x-\xi)\rangle +$$

$$+\langle(1-\nu)\varphi, \Gamma(t,x-\xi)\rangle + \langle\nu g, \Gamma(t,x-\xi)\rangle,$$

причому

$$\langle\nu g, \Gamma(t,x-\xi)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x-\xi)\nu(\xi)g(\xi)d\xi \equiv J(t,x).$$

Для доведення твердження досить довести, що $J(t,x) \to \dfrac{(\nu g)(x)}{\mu-\mu_0}$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in \mathbb{K} \subset Q$, оскільки граничне співвідношення

$$\mu_1 \lim_{t\to t_1} J(t,x) - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m-0} J(t,x) = \frac{\mu_0(\nu g)(x)}{\mu-\mu_0}$$

виконується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$ (νg – фінітна основна функція, яку ототожнюємо з фінітним функціоналом, котрий є згортувачем у просторі Φ_0).

Урахувавши співвідношення (4.42) та нерівність (4.41) знаходимо, що

$$\left|J(t,x) - \frac{(\nu g)(x)}{\mu-\nu_0}\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,\xi)[(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)]d\xi\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(t,\xi)||(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)|d\xi \leq$$

$$\leq \beta'_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_2(t,\xi)| \cdot |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)|d\xi, \quad t \in (0,t_1].$$

Далі доведення здійснюється за схемою доведення теореми 4.3.

Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо m-точкову задачу (4.5), (4.36) з граничною функцією $\varphi = \delta$. Оскільки $\delta \in \Phi'_{0,*}$, то внаслідок теореми 4.6 граничне співвідношення (4.43) справджується рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$, який не містить точку 0.

4.4. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння нескінченного порядку

Встановлено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для рівняння $\partial u/\partial t + Bu = 0$, де $B = f(A)$, f – ціла функція від псевдодиференціального оператора A з негладким у точці $\sigma = 0$ символом $a(\sigma)$. Еволюційні рівняння з такими операторами є природними узагальненнями відомих параболічних псевдодиференціальних рівнянь. Знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком вказаної задачі (при цьому досліджена структура та властивості фундаментального розв'язку).

4.4.1. Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку

Нехай $\alpha \in (0,1)$ – фіксоване число, f – нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову:

$$\exists c > 0 \ \exists a > 0 \ \exists h \geq 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ \ |f(z)| \leq c(1 + |x|)^h e^{a|y|^\alpha}. \qquad (4.44)$$

Лема 4.10. *Для похідних функції f на дійсній осі, яка задовольняє умову* (4.44)*, правильними є оцінки:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}_0 \tilde{B}^n n^{n(1-1/\alpha)} (1 + |x|)^h, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Згідно з формулою Коші

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{(z - x)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R},$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{|f(z)|}{|z-x|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \leq$$

$$\leq c\frac{n!}{R^n}(1+|x \pm R|)^h \exp\{aR^\alpha\} \leq cn!(1+|x|+R)^h g_n(R), \ R > 0,$$

де $g_n(R) = R^{-n}\exp\{aR^\alpha\}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $g_n(R)$, $R \in (0,\infty)$, є диференційовною, причому

$$\lim_{R \to +\infty} g_n(R) = +\infty, \ \lim_{R \to +0} g_n(R) = +\infty, \ n \in \mathbb{N},$$

$g_n(R) > 0$, $R \in (0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що ця функція досягає свого мінімуму на $(0,+\infty)$, тобто існує $R_0 = R_0(n) > 0$ таке, що $g_n(R) \geq g_n(R_0)$. Використовуючи методи диференціального числення безпосередньо знаходимо, що

$$\inf_R g_n(R) = \frac{b^n}{n^{n/\alpha}}, \ b = (a\alpha e)^{1/\alpha}, \ n \in \mathbb{N},$$

причому вказаний інфімум досягається в точці $R_0(n) = (n/(a\alpha))^{1/\alpha}$. Отже,

$$|f^{(n)}(x)| \leq cn!(1+|x|+R_0)^h g_n(R_0) \leq$$

$$\leq cn!\left(1+|x|+\left(\frac{n}{a\alpha}\right)^{1/\alpha}\right)^h \frac{b^n}{n^{n/\alpha}} \leq c\left(2\beta_0\left(\frac{n}{a\alpha}\right)^{1/\alpha}+|x|\right)\frac{b^n n!}{n^{n/\alpha}} \leq$$

$$\leq c\beta^h e^{nh/\alpha}\frac{b^n n!}{n^{n/\alpha}}(1+|x|)^h = c_0\frac{b_1^n n!}{n^{n/\alpha}}(1+|x|)^h, \ x \in \mathbb{R}, \tag{4.45}$$

$$\beta_0 = \max\left\{1, \left(\frac{1}{a\alpha}\right)^{1/\alpha}\right\}, \ \beta = 2\beta_0, \ c_0 = c\beta^h, \ b_1 = be^{h/\alpha}.$$

Скориставшись формулою Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta/(12n)}, \ 0 < \theta < 1,$$

отримаємо, що

$$|f^{(n)}(x)| \leq \tilde{c}_0 \tilde{b}^n n^{n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}(1+|x|)^h, \ \tilde{c}_0 = c\sqrt{2\pi}e, \ \tilde{b} = 2b_1e^{-1}. \tag{4.46}$$

Лема доведена.

Нехай a: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ – неперервна однорідна порядку $\gamma > 1$ ($\gamma \neq 2, 4, 6, \dots$) функція, яка: 1) нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) для похідних функції a справджуються оцінки

$$|a^{(k)}(\xi)| \leq c_k |\xi|^{\gamma - k}, \ k \in \mathbb{N}, \ \xi \in \mathbb{R} \setminus |[0\},$$

причому послідовність $\{c_k, k \geq 1\}$ задовольняє умову:

$$\exists \tilde{c} > 0 \ \exists \tilde{A} > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} : \ \ c_k \leq \tilde{c} \tilde{A}^k k!;$$

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0 > 0$, $\delta \geq \gamma$ такі, що

$$c_0' |\xi|^\gamma \leq a(\xi) \leq \tilde{c}_0 (1 + |\xi|^\delta).$$

Із умов 1) – 3) випливає, що функція a є мультиплікатором у просторі Ψ. Отже, оператор A, який задається правилом $A\varphi = F^{-1}[aF[\varphi]]$, $\varphi \in \Phi$, відображає простір Φ в себе, є лінійним і неперервним.

Говоритимемо, що в просторі Φ задано псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x) \quad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ x \in \mathbb{R} \right)$$

зображає деяку основну функцію з простору Φ.

Теорема 4.7. *Якщо функція f задовольняє умову* (4.44), *то в просторі Φ визначений і є неперервним псевдодиференіальний оператор нескінченного порядку $f(A) \equiv A_f$.*

Доведення. Нехай $\varphi \in \Phi$,

$$\psi(x) := (f(A)\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n \varphi)(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (F^{-1}[a(\xi)F[\varphi](\xi)])^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{-1}[a^n(\xi)F[\varphi](\xi)](x).$$

Доведемо, що $\psi \in \Phi$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) випливає, що для доведення твердження досить показати, що $F[\psi] \in \Psi$. Запишемо (поки-що формально) співвідношення

$$F[\psi](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n(\xi) F[\varphi](\xi) = f(a(\xi)) \cdot F[\varphi](\xi). \tag{4.47}$$

Передусім доведемо, що $f(a)$ – мультиплікатор у просторі Ψ (звідси випливатиме, що a^n є мультиплікатором у просторі Ψ при кожному $n \in \mathbb{N}$). Для цього скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції при $\xi \neq 0$:

$$D^s_\xi f(a(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{da^m} f(a) \sum \frac{s!}{m_1! \dots m_l!} \Big(\frac{1}{1!}\frac{d}{d\xi} a(\xi)\Big)^{m_1} \dots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l} a(\xi)\Big)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $m_1 + 2m_2 + \dots + l m_l = s$, $m_1 + \dots + m_l = m$). Для того, щоб уникнути громіздких викладок, розглянемо випадок, коли в умові (4.44) $h = 1$. Урахувавши властивості функцій f та a знайдемо, що

$$\xi \neq 0: \;\; |D^s_\xi f(a(\xi))| \leq \tilde{c}_0 (1 + |\xi|) \sum_{m=1}^{s} \tilde{b}^m \sum \frac{s!}{m_!! \dots m_l!} \times$$

$$\times \tilde{c}^{m_1 + \dots + m_l} \tilde{A}^{m_1 + 2m_2 + \dots + l m_l} (|\xi|^{\gamma - 1})^{m_1} (|\xi|^{\gamma - 2})^{m_2} \dots (|\xi|^{\gamma - l})^{m_l} =$$

$$= \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s |\xi|^{\gamma(m_1 + \dots + m_l) - (m_1 + 2m_2 + \dots + l m_l)} (1 + |\xi|) =$$

$$= \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s |\xi|^{\gamma m - s} (1 + |\xi|) = \tilde{c}_0 \tilde{c}^m \tilde{A}^s (|\xi|^{\gamma m - s} + |\xi|^{\gamma m + 1 - s}).$$

Отже,

$$\xi \neq 0: \;\; |D^s_\xi f(a(\xi))| \leq \tilde{c}\tilde{c}_0 c_0^s s! \sum_{m=1}^{s} |\xi|^{\gamma m - s} (1 + |\xi|), \;\; c_0 = \max\{1, \tilde{c}\tilde{b}\tilde{A}\}.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то

$$|D^s_\xi f(a(\xi))| \leq 2\tilde{c}\tilde{c}_0 c_0^s s! |\xi|^{-s}, \;\; s \in \mathbb{N}. \tag{4.48}$$

Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то

$$|D_\xi^s f(a(\xi))| \leq \tilde{c}\tilde{c}_0 c_0^s s! |\xi|^{s(\gamma-1)}(1+|\xi|),\ s \in \mathbb{N}. \tag{4.49}$$

Далі розглянемо випадок, коли $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$ і оцінимо функцію

$$\Lambda(\xi) := \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k |D_\xi^k (f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi))|,\ \forall \tilde{\varphi} \in \Psi.$$

Урахувавши (4.48) знайдемо, що

$$\xi \neq 0: \ \ \Lambda(\xi) \leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s |D_\xi^s f(a(\xi))| \cdot |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{\alpha_s}{|\xi|^s} \frac{\tilde{c}_{k-s} c_{k-s}}{|\xi|^{k-s}} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_{k-s} c_{k-s} = c_p, \tag{4.50}$$
$$\alpha_s = \tilde{c}_0 \tilde{c} c_0^s s!.$$

Тут ми скористалися тим, що $\tilde{\varphi} \in \Psi$, тобто, для довільного $\omega \in \mathbb{Z}_+$ такого, що $\omega \geq k - s$ справджується нерівність

$$\xi \neq 0: \ \ |D_\xi^{k-s} \tilde{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\tilde{c}_\omega c_{k-s}}{|\xi|^\omega}. \tag{4.51}$$

Якщо в останній нерівності покласти $\omega = k - s$, то прийдемо до нерівностей (4.50). Якщо ж $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (4.49), (4.51) маємо

$$\Lambda(\xi) \leq \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k (|\xi|^{k(\gamma-1)} + |\xi|^{k(\gamma-1)+1}) \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \frac{\tilde{c}_\omega c_{k-s}}{|\xi|^\omega} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (|\xi|^{k\gamma} + |\xi|^{k\gamma+1}) \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_\omega c_{k-s} |\xi|^{-\omega}.$$

Покладемо $\omega = k([\gamma]+1)+1 > k - s$, $0 \leq s \leq k$. Тоді

$$(|\xi|^{k\gamma} + |\xi|^{k\gamma+1})|\xi|^{-\omega} \leq 2,$$

і

$$\Lambda(\xi) \leq \tilde{c}_p,\ \tilde{c}_p = 2 \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \alpha_s \tilde{c}_{k([\gamma]+1)+1} c_{k-s}. \tag{4.52}$$

Із обмежень на функції f, a та $\tilde{\varphi}$ ($\lim\limits_{\xi\to\pm 0}\tilde{\varphi}^{(k)}(\xi) < +\infty$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$) випливає також, що

$$\lim_{\xi\to\pm 0}\xi^k D_\xi^k(f(a(\xi))\tilde{\varphi}(\xi)) < \infty.$$

Звідси та з оцінок (4.50), (4.51) випливає нерівність

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists L_p > 0: \ \ \|f(a)\tilde{\varphi}\|_p \le L_p < \infty.$$

Це означає, що $f(a)\cdot\tilde{\varphi} \in \Psi$, тобто операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$ визначена в просторі Ψ.

Випадок $h \ne 1$ (h – параметр з умови (4.44)) досліджується за аналогічною схемою; при цьому використовується очевидна нерівність $(1+|x|^h) \le (1+|x|)^{[h]+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Доведемо, що операція $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$ є неперервною у просторі Ψ. Нехай послідовність $\{\tilde{\varphi}_n, n \ge 1\} \subset \Psi$ збігається до нуля в просторі Ψ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p > 0 \ \forall n \ge 1: \ \ \|\tilde{\varphi}_n\|_p \le c_p,$$

і для кожного $\nu \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{D_\xi^\nu\tilde{\varphi}_n, n \ge 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, який не містить точку 0, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ \forall n \ge n_0: \ \ |D_\xi^\nu\tilde{\varphi}_n(\xi)| < \varepsilon, \ \xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}. \tag{4.53}$$

Аналогічно тому, як це зроблено при доведенні твердження: $f(a)\tilde{\varphi} \in \Psi$, якщо $\tilde{\varphi} \in \Psi$, переконуємося в правильності нерівності

$$\|f(a)\tilde{\varphi}_n\|_p \le c_p, \ p \in \mathbb{Z}_+, \ n \in \mathbb{N} \tag{4.54}$$

(стала $c_p > 0$ не залежить від n).

Зазначимо, що для $\xi \in \mathbb{K}$ знайдуться сталі d_1, $d_2 > 0$ такі, що $d_1 \le |\xi| \le d_2$ (точка $0 \notin \mathbb{K}$). Тоді за допомогою оцінок (4.48), (4.49), (4.53) встановлюємо нерівність

$$|D_\xi^\nu(f(a(\xi))\tilde{\varphi}_n(\xi))| \le c_\nu\varepsilon, \ \forall n \ge n_0, \ \xi \in \mathbb{K}.$$

Звідси та з (4.54) випливає твердження про неперервність операцій $\tilde{\varphi} \to f(a)\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} \in \Psi$, у просторі Ψ. Цим доведено, що $f(a)$ – мультиплікатор у цьому просторі. Урахувавши цей факт та (4.47) дістаємо, що $F[\psi] \in \Psi$.

Таким чином, залишається обґрунтувати коректність проведених у співвідношенні (4.47) перетворень. Для цього досить довести правильність співвідношення:

$$r_{n,\varphi}(\xi) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k a^k(\xi) F[\varphi](\xi) \to 0, n \to \infty,$$

у просторі Ψ, тобто, що

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ : \ \ \|r_{n,\varphi}\|_p \to 0, n \to +\infty.$$

За означенням $\|\cdot\|_p$ маємо, що

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big\{ \sum_{m=0}^{p} |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| \Big\}.$$

Запишемо (поки-що формально) співвідношення:

$$L_{m,n}(\xi) := |\xi|^m |D_\xi^m r_{n,\varphi}(\xi)| = |\xi|^m \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k D_\xi^m (a^k(\xi) F[\varphi](\xi)) \Big| \leq$$

$$\leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{m} C_m^l |D_\xi^l a^k(\xi)| \cdot |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)|, \ \xi \neq 0.$$

Функцію $|D_\xi^l a^k(\xi)|$ при $\xi \neq 0$ оцінимо за допомогою формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при оцінці похідної $D_\xi^s f(a(\xi))$, $\xi \neq 0$, знайдемо, що

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \sum_{i=1}^{l} |D_a^i a^k(\xi)| \times$$

$$\times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_\alpha=i \\ i_1+2i_2+\dots+\alpha i_\alpha=l}} \frac{l!}{i_1! \dots i_\alpha!} \Big| \Big(\frac{1}{1!} D_\xi^1 a(\xi)\Big)^{i_1} \dots \Big(\frac{1}{i_\alpha!} D_\xi^\alpha a(\xi)\Big)^{i_\alpha} \Big| \leq$$

$$\leq l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} a^{k-i}(\xi) (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{i\gamma - l} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_0^k l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} \frac{k!}{(k-i)!} \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i |\xi|^{\delta(k-i)+i\gamma-l}.$$

Далі вважаємо, що $|\xi| \geq 1$. Тоді

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \tilde{\tilde{c}}_0^k d_l |\xi|^{\delta k + l\gamma}, \tag{4.55}$$

$$\tilde{\tilde{c}} = 2\tilde{c}_0, \ d_l = l!(2e)^l \sum_{i=1}^{l} i! \tilde{c}_0^{-i} (\tilde{c}\tilde{A}e)^i;$$

тут врахована нерівність

$$\frac{k!}{(k-i)!} = \frac{k!i!}{(k-i)!i!} \leq 2^k i!.$$

Оскільки $F[\varphi] \in \Psi$, то для $|\xi| \geq 1$ правильною є нерівність

$$|D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_{m-l}\tilde{c}_\nu}{|\xi|^\nu}, \ \nu \geq m-l, \ \tilde{c}_\nu = c_0 B^\nu \nu^\nu. \tag{4.56}$$

Покладемо в (4.56) $\nu = \delta k + m(2+[\gamma])$. Тоді

$$L_{m,n}(\xi) \leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k |\xi|^{\delta k} \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l |\xi|^{\gamma l} |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq$$

$$\leq \omega_m \Delta_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k \tilde{c}_{\delta k + m(2+[\gamma])}, \ |\xi| \geq 1,$$

$$\omega_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l, \ \Delta_0 = \max\{c_0, c_1, \dots, c_m\}.$$

Нехай $\tilde{\alpha} := m(2+[\gamma])$. Тоді $\tilde{c}_{\delta k+\tilde{\alpha}}$ оцінюється так:

$$\tilde{c}_{\delta k+\tilde{\alpha}} \leq c_0' \tilde{B}^k k^{k\delta}, \ c_0' = c_0 B^\alpha (\delta+\tilde{\alpha})^{\tilde{\alpha}}, \ \tilde{B} = B^\delta (\delta+\tilde{\alpha})^\delta e^{\tilde{\alpha}}.$$

Врахувавши останні нерівності знайдемо, що

$$L_{m,n}(\xi) \leq \omega_m c_0' \Delta_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k B_1^k k^{k\delta}, \ B_1 = \tilde{\tilde{c}}_0 \tilde{B}, \ |\xi| \geq 1.$$

Внаслідок (4.45) для коефіцієнтів Тейлора $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, функції f справджуються оцінки:

$$|c_k| \leq c_0 \frac{b_1^k}{k^{k/\alpha}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Отже, якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{B_2^k}{k^{k(1/\alpha-\delta)}},$$

де $L_1 = c_0 c_0' \Delta_0 \omega_m$, $B_2 = b_1 B_2$; вважаємо також, що $\alpha < 1/\delta$, тобто $\alpha \in (0, 1/\delta) \subset (0,1)$. При виконанні вказаного обмеження на параметр α ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} B_2^k k^{-k(1/\alpha-\delta)}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ як залишок збіжного ряду. Оскільки для $k \geq k_0$, де $k_0 = [(2B_2)^{1/\omega}] + 1$, $\omega = 1/\alpha - \delta$, справджується нерівність $k^{-k\omega} \leq (2B_2)^{-k}$, то для $n \geq [(2B_2)^{1/\omega}]$ маємо, що

$$L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L_1}{2^n} < +\infty, \ \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то в цьому випадку

$$|D_\xi^l a^k(\xi)| \leq \tilde{\tilde{c}}_0^k d_l \frac{|\xi|^{k-i+i\gamma}}{|\xi|^l} \leq \frac{\tilde{\tilde{c}}_0^k d_l}{|\xi|^l},$$

де $\tilde{\tilde{c}}_0$, d_l – сталі з нерівності (4.55). Отже,

$$L_{m,n}(\xi) \leq |\xi|^m \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l |D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \cdot |\xi|^{-l}, \ \xi \neq 0.$$

Далі скористаємося тим, що при $\xi \neq 0$:

$$|D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi)| \leq \frac{c_{m-l}}{|\xi|^{m-l}}, \ \lim_{\xi \to \pm 0} D_\xi^{m-l} F[\varphi](\xi) < \infty.$$

Отже, при $\xi \neq 0$:

$$L_{m,n}(\xi) \leq \tilde{\omega}_n \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \tilde{\tilde{c}}_0^k, \ \tilde{\omega}_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l d_l c_{m-l}.$$

Залишається ще один раз скористатися оцінками коефіцієнтів Тейлора c_k функції f і в результаті отримаємо, що для $\xi \neq 0$, $|\xi| < 1$

$$L_{m,n}(\xi) \leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{B_3^k}{k^{k(1/\alpha-\delta)}}, \ L_2 = c_0 \omega_m, \ B_3 = b_1 \tilde{\tilde{c}}_0.$$

Безпосередньо переконуємося в тому, що для $k \geq \tilde{k}_0$, де $\tilde{k}_0 = [(2B_3)^{1/\omega}]+1$, $\omega = 1/\alpha - \delta$, справджується нерівність $k^{-k\omega} \leq (2B_3)^{-k}$. Отже, для $n \geq [(2B_3)^{1/\omega}]$

$$L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L_2}{2^n} < +\infty,\ |\xi| < 1,\ \xi \neq 0.$$

Тоді

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} L_{m,n}(\xi) \leq \frac{L}{2^n},\ L = \max\{L_1, L_2\},$$

для $n \geq n_0 = \max\{[(2B_2)^{1/\omega}], [(2B_3)^{1/\omega}]\}$. Звідси випливає нерівність

$$\|r_{n,\varphi}\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \sum_{m=0}^{p} L_{m,n}(\xi) \leq \sum_{m=0}^{p} \frac{L(m)}{2^n} = \frac{L_p}{2^n} < \infty.$$

Таким чином, $r_{n,\varphi} \in \Psi$ для кожного n і $r_{n,\varphi} \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі Ψ. Цим доведено, що в просторі Φ оператор A_f визначений коректно. Він є також неперервним у цьому просторі.

Справді, нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset \Phi$, $\varphi_n \to 0$ при $n \to +\infty$ у просторі Φ. Тоді із співвідношення (4.47) випливає, що

$$F[A_f \varphi_n] = f(a) F[\varphi_n] \to 0,\ n \to \infty,$$

у просторі Ψ, оскільки, за доведеним, функція $f(a)$ є мультиплікатором у просторі Ψ. Тоді, внаслідок властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого і оберненого) отримуємо, що

$$A_f \varphi_n = F^{-1}[f(a) F[\varphi_n]] \to 0, n \to \infty,$$

у просторі Φ. Теорема доведена.

Зауваження 4.3. *Із співвідношення* (4.47) *випливає, що*

$$A_f \varphi = F^{-1}[f(a) F[\varphi]],\ \forall \varphi \in \Phi,$$

тобто A_f – псевдодиференціальний оператор, побудований за символом $f(a)$, негладким у точці 0.

Як приклад, розглянемо функцію $f(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\dfrac{z^2}{n^\rho}\Big)$, $z\in\mathbb{C}$, $\rho>2$, яка, як доведено в [189], є цілою, має експоненціальне зростання порядку $\dfrac{2}{\rho}<1$ в площині $\mathbb{C}$ та експоненціальне спадання порядку $\dfrac{2}{\rho}$ на дійсній осі, тобто f задовольняє умову (4.44). Тому якщо $1<\gamma\leq\delta<\rho/2$ (γ, δ – параметри з умов 1) – 3), які задовольняє функція-символ a), то в Φ визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку

$$f(A)=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{A^2}{n^\rho}\Big),\ \rho>2,\ A=F^{-1}[aF].$$

Зауваження 4.4. *Якщо ціла функція f задовольняє умову (4.44) з параметром $\alpha\geq 1$, а однорідна функція-символ $a(\xi)$, за якою будується псевдодиференціальний оператор A, має порядок однорідності $0<\gamma<1$, задовольняє умови 1) – 3), де в умові 3) параметр $\delta\in\Big[\gamma,\dfrac{1}{\alpha}\Big)$, то твердження доведеної теореми залишається правильним і в цьому випадку.*

Зазначимо, що тоді в просторі Φ коректно визначені оператори $\cos A$, $\sin A$.

Нехай P – поліном степеня $2b$, $b\in\mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову:

$$\exists c>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ \ \mathrm{Re}P(x)\leq -c|x|^{2b}.$$

Тоді

$$|e^{P(x)}|=e^{\mathrm{Re}P(x)}\leq e^{-c|x|^{2b}},\ x\in\mathbb{R},$$

$$\exists c_1>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ \ |e^{P(z)}|\leq e^{|P(z)|}\leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Скориставшись рядом теорем з [189], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа одержимо, що функція $e^{P(z)}$ в комплексній площині задовольняє також нерівність

$$|\exp\{P(z)\}|\leq c_0\exp\{-c_2|x|^{2b}+c_3|y|^{2b}\}$$

з деякими сталими $c_0, c_2, c_3 > 0$. Отже, функція $f(z) = \exp\{P(z)\}$ задовольняє умову (4.44) з параметрами $\alpha = 2b$, $h = 0$, і в просторі Φ визначені та є неперервними оператори $f(A) = \exp\{P(A)\}$, $f(A) = \exp\{tP(A)\}$, де $t > 0$ – фіксований параметр. У цьому випадку розв'язок еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \tag{4.57}$$

формально можна записати у вигляді $u(t,x) = c\exp\{tP(A)\}\varphi(x)$, де $\varphi \in \Phi$, $c = \mathrm{const}$, і досліджувати задачу Коші та багатоточкові за часом задачі для рівняння (4.57) за допомогою операторного методу. До рівнянь (4.57) належить також еволюційне рівняння $\partial u/\partial t + A^2 u = 0$, $A^2 = F^{-1}[a^2 F]$ (тут $P(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$).

4.4.2. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} + A_f u = 0, \ \ (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{4.58}$$

де $A_f = f(A)$ – псевдодиференціальний оператор нескінченного порядку, побудований в п.п. 4.4.1, який діє в просторі Φ. Для (4.58) задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = g, \tag{4.59}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $g \in \Phi$.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T],\Phi)$ задачі (4.58), (4.59) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F[v(t,\cdot)](x)$. Для функцій v: $\Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + f(a(\sigma))v(t,\sigma) = 0, \ \ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4.60}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{g}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{4.61}$$

де $\tilde{g}(\sigma) = F^{-1}[g](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (4.60) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c(\sigma)\exp\{-tf(a(\sigma))\},\ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4.62}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (4.61). Підставивши (4.62) в (4.61) знайдемо, що

$$c(\sigma) = \tilde{g}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (4.58), (4.59) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Нехай $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\{-tf(a(\sigma))\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1}$. Тоді, міркуючи формально знайдемо, що

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)g(\xi)d\xi = G(t,x) * g(x),\ (t,\ x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{i\sigma x}d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)\times$$

$$\times g(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)g(\xi)d\xi = G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{4.63}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а, отже, правильність формул (4.63), випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, передусім дослідимо властивості функції $Q(t,\xi)$ як функції аргументу ξ.

Лема 4.11. *Для похідних функції $Q_1(t,\xi)$ при $\xi \neq 0$ правильними є оцінки*

$$|D_\xi^s Q_1(t,\xi)| \leq \beta_s t^{s\alpha} |\xi|^{\omega_s - s} e^{-d_0' t |\xi|^\gamma}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{4.64}$$

сталі β_s, $d_0' > 0$ не залежать від t, де $\alpha = 1$, $\omega_s = \gamma$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$; $\alpha = 1 - h/\gamma$, $\omega_s = s\gamma$, якщо $|\xi| \geq 1$.

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\xi^s F(\theta(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dg^m} F(\theta) \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_l=m \\ m_1+2m_2+\cdots+lm_l=s}} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \Big(\frac{1}{1!}\frac{d}{d\xi}\theta(\xi)\Big)^{m_1} \ldots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}\theta(\xi)\Big)^{m_l}, \tag{4.65}$$

де покладемо $F = e^\theta$, $\theta = -tf(a(\xi))$. Тоді

$$D_\xi^s e^{-tf(a(\xi))} = e^{-tf(a(\xi))} \sum_{m=1}^{s} \sum \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} (-t)^{m_1+2m_2+\cdots+lm_l} \Lambda, \quad \xi \neq 0,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \Big(\frac{d}{d\xi} f(a(\xi))\Big)^{m_1} \Big(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2} f(a(\xi))\Big)^{m_2} \ldots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l} f(a(\xi))\Big)^{m_l}.$$

Для оцінки Λ скористаємося оцінками похідних функції $f(a(\xi))$ при $\xi \neq 0$, наведеними в п.п. 4.4.1 (при отриманні цих оцінок також була використана формула Фаа де Бруно): якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то

$$|D_\xi^s f(a(\xi))| \leq b_0 c_0^s s! |\xi|^{\gamma - s} (1 + |\xi|)^h, \quad s \in \mathbb{N}; \tag{4.66}$$

якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$|D_\xi^s f(a(\xi))| \leq b_0 c_0^s s! |\xi|^{s(\gamma-1)} (1 + |\xi|)^h, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{4.67}$$

а) Нехай $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$. Тоді з урахуванням (4.66) прийдемо до оцінок

$$|\Lambda| \leq b_0^m c_0^s |\xi|^{\gamma(m)} |\xi|^{-s} (1 + |\xi|)^{hm} \leq$$

$$\leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{\gamma m - s} (1 + |\xi|)^{hs} \leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{\gamma - s} (1 + |\xi|)^{hs},\ b_0 = \max\{1, b_0\}.$$

б) Якщо $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (4.67),

$$|\Lambda| \leq b_0^m c_0^s |\xi|^{m(\gamma-1)}(1+|\xi|)^{hm} \leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{s(\gamma-1)}(1+|\xi|)^{hs}.$$

Об'єднавши ці нерівності в одну знайдемо, що для похідних функції $Q_1(t,\xi)$ за змінною ξ правильними є нерівності

$$|D_\xi^s Q_1(t,\xi)| \leq \beta_0^s t^s |\xi|^{\omega_s - s} e^{-d_0 t|\xi|^\gamma}(1+|\xi|)^{hs}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$\omega_s = \gamma$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$; $\omega_s = s\gamma$, якщо $|\xi| \geq 1$.

Взявши до уваги нерівності $(1+|\xi|)^{hs} \leq 2^{hs}$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, та $(1+|\xi|)^{hs} \leq 2^{hs}|\xi|^{hs}$, $|\xi| \geq 1$ а також нерівність (див. [189, с. 204])

$$e^{-d_0' t|\xi|^\gamma} = e^{-((d_0' t)^{h/\gamma}|\xi|^h)^{\gamma/h}} \leq A^s t^{-sh/\gamma} s^{sh/\gamma} |\xi|^{-hs},\ s \in \mathbb{N}, d_0' = d_0/2,$$

знайдемо, що при $|\xi| \geq 1$ правильною є оцінка $e^{-d_0' t|\xi|^\gamma}(1+|\xi|)^{hs} \leq A_1^s t^{-sh/\gamma} s^{sh/\gamma}$, $s \in \mathbb{N}$. Отже,

$$|D_\xi^s Q_1(t,\xi)| \leq \beta_1^s t^{s\alpha} s^{sh/\gamma} s! e^{-d_0' t|\xi|^\gamma} |\xi|^{\omega_s - s},\ \xi \neq 0, s \in \mathbb{N},$$

$\alpha = 1$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$; $\alpha = 1 - h/\gamma$, якщо $|\xi| \geq 1$.

Якщо ввести позначення $\beta_s = \beta_1^s s! s^{sh/\gamma}$, то прийдемо до нерівностей (4.64). Лема доведена.

Зауваження 4.5. *Із доведеного твердження випливає, що функція $Q_1(t,\xi)$, як функція ξ, при кожному $t > 0$ є елементом простору Ψ.*

Лема 4.12. *Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі Ψ.*

Доведення. Зафіксуємо $s \in \mathbb{N}$. Для оцінки похідних функції $Q_2(\xi)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно (4.65), в якій покладемо $F = g^{-1}$, $g = R$, де $R(\xi) = \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\xi)$. Тоді $Q_2(\xi) = F(R(\xi))$ і $d^m F(R)/dg^m = (-1)^m m! R^{-(m+1)}$. Урахувавши нерівності (4.64) знайдемо, що

$$\Big|\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}R(\xi)\Big| \leq \frac{1}{l!}\sum_{k=1}^m \mu_k \Big|\frac{d^l}{d\xi^l}Q_1(t,\xi)\Big| \leq \frac{1}{l!}\sum_{k=1}^m \mu_k \beta_l t_k^{l_\alpha} |\xi|^{\omega_l - l} e^{-d_0' t_k|\xi|^\gamma} \leq$$

$$\leq \tilde{\beta}_l T^{l\alpha} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot |\xi|^{\omega_k - l} e^{-d_0' t_1 |\xi|^\gamma} \leq \tilde{\tilde{\beta}}_l |\xi|^{\omega_l - l} e^{-\tilde{d}_0 |\xi|^\gamma}, \ \tilde{d}_0 = d_0' t_1, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді для $|\xi| \geq 1$ маємо, що

$$\tilde{\Lambda} := \Big| \Big(\frac{d}{d\xi} R(\xi) \Big)^{m_1} \Big| \dots \Big| \Big(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\xi^l} R(\xi) \Big)^{m_l} \Big| \leq \beta_s' |\xi|^{\omega_s - s} e^{-\tilde{d}_0 |\xi|^\gamma}.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то знайдемо, що $\tilde{\Lambda} \leq \beta_s' |\xi|^{\gamma - s} e^{-\tilde{d}_0 |\xi|^\gamma}$.

Оскільки $Q_1(t_k, \xi) \leq 1$, $k \in \{1, \dots, m\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, то $R(\xi) \geq \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \equiv \mu_0$. Отже, $\mu_0 > 0$ і $R^{-(m+1)}(\xi) \leq \mu_0^{-(m+1)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Звідси випливає також, що

$$Q_2(\xi) = R^{-1}(\xi) \leq \mu_0^{-1}.$$

Пудсумовуючи, одержимо, що

$$|D_\xi^s Q_2(\xi)| \leq \delta_s |\xi|^{\omega_s - s} e^{-\tilde{d}_0 |\xi|^\gamma}, \xi \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{N}.$$

З останніх нерівностей та обмеженості на $\mathbb{R}$ функції Q_2 випливає, що вона є мультиплікатором у просторі Ψ.

Лема доведена.

Наслідок 4.5. *При фіксованому $t \in (0, T]$ функція $Q(t, \xi) = Q_1(t, \xi) Q_2(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, є елементом простору Ψ, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\xi^s Q(t, \xi)| \leq \tilde{\beta}_s |\xi|^{\omega_s - s} e^{-d_0' t |\xi|^\gamma}, \ s \in \mathbb{Z}_+, \xi \neq 0, \tag{4.68}$$

сталі $\tilde{\beta}_s > 0$ залежать від T, $d_0' > 0$ не залежить від t та s, $\omega_s = \gamma$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$; $\omega_s = s\gamma$, якщо $|\xi| \geq 1$.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[\Psi] = \Phi$ знайдемо, що $G(t, \cdot) = F^{-1}[Q(t, \cdot)] \in \Phi$ при кожному $t \in (0, T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t \in (0, T^*]$, де $T^* = T$ за умови $T \leq 1$ і $T^* = 1$, якщо $T > 1$.

Лема 4.13. *Для функції $G(t,x)$, $t\in(0,T^*]$, $x\in\mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) правильними є оцінки:*

$$|D_x^k G(t,x)| \le c_k t^{-\delta_k}((1+|x|)^{1+[\gamma]+k})^{-1}, \ t\in(0,T^*], x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}_+, \qquad (4.69)$$

де $\delta_k=[\gamma]+\{\gamma\}/\gamma+k$, якщо $x\neq 0$; $\delta_k=(1+k)/\gamma$, якщо $x=0$.

Доведення. Нехай $k=0$. Якщо $x\neq 0$, то інтегруючи $s=1+[\gamma]$ разів частинами, подамо $G(t,x)$ у вигляді

$$G(t,x)=(2\pi)^{-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|\xi|\ge\varepsilon} Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-1}\frac{\tilde{c}}{x^s}\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\int\limits_{|\xi|\ge\varepsilon} D_\xi^s Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi+\Phi(\varepsilon,x)\Big]\equiv\lim_{\varepsilon\to+0} I(x,\varepsilon).$$

Символом $\Phi(\varepsilon,x)$ позначається позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_\xi^l Q(t,\xi)e^{-ix\xi}$, $0\le l\le s-1$, із значеннями в точках $\xi\neq\pm\varepsilon$. Із оцінок похідних функції $Q(t,\xi)$ випливає, що для $|\xi|<1$, $\xi\neq 0$ $|D_\xi^l Q(t,\xi)|\le c|\xi|^{\gamma-l}$, при цьому $0<\{\gamma\}\le\gamma-l\le\gamma$, якщо $0\le l\le s-1$, $s-1=[\gamma]$. Звідси дістаємо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,x)=0$ у кожній точці $x\in\mathbb{R}$. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки перетворюються в нуль за рахунок спадання на нескінченності функції $Q(t,\xi)$ та її похідних.

Врахувавши (4.68), знайдемо, що при $s=1+[\gamma]$, $x\neq 0$

$$|I(x,\varepsilon)|\le\frac{\tilde{\beta}_s}{|x|^s}\int\limits_{|\xi|\ge\varepsilon}|\xi|^{\omega_s-s}e^{-d_0' t|\xi|^\gamma}d\xi\le\frac{2\tilde{\beta}_s}{|x|^s}\int\limits_0^\infty\xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi.$$

Інтеграл у останній нерівності має інтегровну особливість у точці $\xi=0$. Справді, оскільки $\omega_s=\gamma$, якщо $|\xi|<1$, $\xi\neq 0$, то при вказаному виборі s маємо, що $s-\omega_s=1+[\gamma]-\gamma$; тобто $0<s-\omega<1$.

Введемо позначення:

$$I(t):=\int\limits_0^\infty\xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi\equiv I_1(t)+I_2(t),\quad s=1+[\gamma],$$

де

$$I_1(t)=\int\limits_0^1 \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi,\quad I_2(t)=\int\limits_1^{+\infty} \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi.$$

Інтеграл $I_1(t)$ є збіжним:

$$I_1(t)\le\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\xi^{s-\omega_s}}=\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\xi^{1-\{\gamma\}}}<+\infty.$$

Оцінимо $I_2(t)$, виділивши залежність від параметра t; при цьому врахуємо, що $|\xi|\ge 1$, $\omega_s=s\gamma$, $s=1+[\gamma]$. Отже,

$$I_2(t)\le\int\limits_0^\infty \xi^{\{\gamma\}+\gamma[\gamma]-1}e^{-d_0' t\xi^\gamma}=\tilde{d}_0 t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}\int\limits_0^{+\infty} y^{\{\gamma\}+\gamma[\gamma]-1}e^{-y}dy\le\tilde{\tilde{d}}_0 t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}.$$

Отже, для $I(x,\xi)$ при $x\neq 0$ правильною є нерівність

$$|I(x,\varepsilon)|\le\frac{\tilde{\beta}_s}{|x|^{1+[\gamma]}}t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)},\quad t\in(0,T^*].\tag{4.70}$$

Здійснивши в (4.70) граничний перехід при $\varepsilon\to+0$ знайдемо, що $|G(t,x)|$ при $x\neq 0$ оцінюється так: $|G(t,x)|\le\beta(|x|^{1+[\gamma]})^{-1}t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)},\quad t\in(0,T^*]$.

Крім того, з умов, які задовольняють функції f та a випливають нерівності

$$|G(t,x)|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}Q(t,\xi)d\xi\Big|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-tf(a(\xi))}d\xi\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-d_0t|\xi|^\gamma}d\xi=c_0t^{-1/\gamma},$$

$$|G(t,x)|\le c_0t^{-1/\gamma},\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Крім того, $G(t,\cdot)\in\Phi$ при кожному $t\in(0,T]$, при цьому

$$|G(t,x)|\le\frac{c}{(1+|x|)^{1+[\gamma]}},\quad t\in(0,T],\quad x\in\mathbb{R},$$

$c=c(t)>0$. З урахуванням отриманих раніше оцінок прийдемо до нерівності

$$|G(t,x)|\le\frac{\beta t^{-\delta_0}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]}},\quad t\in(0,T^*],x\in\mathbb{R},$$

де $\delta_0=[\gamma]+\{\gamma\}/\gamma$, якщо $x\neq 0$; $\delta_0=1/\gamma$, якщо $x=0$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Застосуємо оператор D_x^k під знаком інтеграла

$$(2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi) e^{-ix\xi} d\xi = G(t,x);$$

тоді

$$D_x^k G(t,x) = (2\pi)^{-1}(-i)^k \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi)\xi^k e^{-ix\xi} d\xi.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це зроблено у випадку $k = 0$, зінтегрувавши частинами $s = 1 + [\gamma] + k$ разів знайдемо, що

$$D_x^k G(t,x) = \frac{C_s}{x^s} \int\limits_{\mathbb{R}} D_\xi^s (Q(t,\xi)\xi^k) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x \neq 0.$$

Врахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій одержимо, що оцінка похідних функції G зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{C_s}{|x|^s}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^k |D_\xi^s Q(t,\xi)| d\xi + ks \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{k-1} |D_\xi^{s-1} Q(t,\xi)| d\xi +$$

$$+ k(k-1)\frac{s(s-1)}{2!} \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{k-2} |D_\xi^{s-2} Q(t,\xi)| d\xi + \dots \Big], \tag{4.71}$$

причому кожний із інтегралів в (4.71) має особливість у точці $\xi = 0$. При вказаному виборі s сума (4.71) містить k доданків, де останній доданок має вигляд $C_{1+[\gamma]+k}^k k! \int\limits_{\mathbb{R}} |D_\xi^{1+[\gamma]} Q(t,\xi)| d\xi$, при цьому всі інтеграли збігаються.

Справді, розглянемо один із доданків у сумі (4.71), що відповідає індексу $k - p$, $0 \le p \le k$:

$$2k(k-1)\dots(k-p)C_{1+[\gamma]+k}^{k-p} J, \quad J = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{k-p} |D_\xi^{s-p} Q(t,\xi)| d\xi, \quad s = 1 + [\gamma] + k.$$

З оцінок (4.68) випливає, що для $t \in (0, T^*]$

$$J \le \beta \int\limits_0^\infty \xi^{kp} \xi^{\omega_{s-p}-(s-p)} e^{-d_0' t\xi^\gamma} = \tilde{\beta} t^{-1/\gamma} t^{-\frac{k-p}{\gamma}} t^{-\frac{\omega_{s-p}-(s-p)}{\gamma}} \int\limits_0^\infty y^{k-p} y^{\omega_{s-p}-(s-p)} e^{-y} dy. \tag{4.72}$$

У околі точки $\xi = 0$ ($\xi < 1$, $\xi \neq 0$) підінтегральна функція допускає оцінку:

$$y^{k-p}y^{\omega_{s-p}-(s-p)}e^{-y} \leq y^{k-p+\gamma-(s-p)} = y^{k+\gamma-s} = y^{\{\gamma\}-1}, s = 1 + [\gamma] + k,$$

звідки і випливає збіжність відповідного невласного інтеграла, бо $0 < 1-\{\gamma\} < 1$. Далі, аналогічно як і у випадку $k = 0$, урахувавши (4.72), прийдемо до оцінки (4.69).

Зауваження 4.6. *Оскільки $t \in (0, T^*]$, то з (4.69) випливає, що для функції G та її похідних правильними є також оцінки*

$$|D_x^k G(t,x)| \leq \frac{\tilde{c}_k t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma+k)}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]+k}}, \ k \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, T^*], x \in \mathbb{R},$$

де $\tilde{\delta}_k = [\gamma] + \{\gamma\}/\gamma + k$, а функція

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi) e^{-i\xi x} d\xi \tag{4.73}$$

є неперервно диференційовною функцією аргументу $t \in (0, T]$.

Лема 4.14. *Функція $G(t, x)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{G(t+\Delta t, x) - G(t,x)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} G(t,x), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в розумінні збіжності в просторі Φ, тобто: 1) $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ $D_x^m \Phi_{\Delta t} \rightrightarrows D_x^m \Big(\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)\Big)$, $\Delta t \to 0$, на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$; 2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c(p) > 0 :$ $\|\Phi_{\Delta t}\|_p \leq c_p$, де стала c_p не залежить від Δt.

Функція G диференційовна по t у звичайному розумінні, тому $\Phi_{\Delta t}(x) = G'(t + \theta \Delta t, x)$, $0 < \theta < 1$. Отже,

$$D_x^m \Phi_{\Delta t}(x) = -(2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} (-i\xi)^m f(a(\xi)) Q(t + \theta\Delta t, \xi) e^{-ix\xi} d\xi, \ m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$D_x^m\Big(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\Big)=-(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}(-i\xi)^m f(a(\xi))Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi,\ m\in\mathbb{Z}_+.$$

Вважаємо, що Δt настільки мала за модулем величина, що $t/2 < t+\theta\Delta t < T$ для довільно фіксованого $t\in(0,T)$. Тоді

$$\Big|D_x^m\Big(\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\Big)\Big|\le(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^m|f(a(\xi))|e^{-\tilde{t}f(a(\xi))}|Q_2(\xi)|d\xi\theta|\Delta t|\le$$

$$\le c_{t,m}\cdot|\Delta t|,\quad \tilde{t}>0$$

(збіжність останнього інтеграла випливає з умов, які задовольняють функції f та a). Якщо $t=T$, то розглядаються відповідні односторонні похідні у цій точці. Звідси вже дістаємо, що

$$D_x^m\Phi_{\Delta t}\to D_x^m\Big(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big),\quad \Delta t\to 0, m\in\mathbb{Z}_+,$$

рівномірно відносно $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Доведемо, що умова 2) також виконується. Для цього, передусім, здійснимо оцінки похідних (по x) функції $\Phi_{\Delta t}(x)$. Якщо $x\neq 0$, $\xi\neq 0$, то інтегруючи $s=1+[\gamma]+m$ разів частинами знайдемо, що

$$|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)|\le\frac{c}{|x|^s}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}D_\xi^m(\xi^m f(a(x))Q(t+\theta\Delta t,\xi))e^{-ix\xi}d\xi\Big|$$

(обґрунтування того, що позаінтегральні доданки дорівнюють нулеві здійснюється аналогічно тому, як це було зроблено при доведені леми 4.13). Отже,

$$|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)|\le\frac{c}{|x|^s}\int\limits_{\mathbb{R}}|D_\xi^s(\xi^m f(a(x)))Q(t+\theta\Delta t,\xi)|d\xi\le$$

$$\le\frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s}C_s^k\int\limits_{\mathbb{R}}|D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi)))||D_\xi^{s-k}Q(t+\theta\Delta t,\xi)|d\xi\le$$

$$\le\frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s}C_s^k\tilde{\beta}_{s-k}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^{\omega_{s-k}-(s-k)}e^{-d_0't|\xi|^\gamma}|D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi)))|d\xi$$

(тут ми скористалися оцінками похідних функції $Q(t,\xi)$, наведеними в наслідку 4.5). Крім того,

$$|D_\xi^k(\xi^m f(a(\xi)))| \leq |\xi^m D_\xi^k f(a(\xi))| + mk|\xi^{m-1}D_\xi^{k-1}f(a(\xi))| +$$
$$+\frac{1}{2!}m(m-1)k(k-1)|\xi^{m-2}D_\xi^{k-2}f(a(\xi))| + \cdots +$$
$$+m(m-1)\ldots(m-(k-1))|\xi^{m-k}f(a(\xi))|, \quad k \leq m.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то із оцінок функції $f(a(\xi))$ та її похідних випливає, що

$$|D_\xi^{k-j}f(a(\xi))| \leq c_{k-j}|\xi|^{\gamma-(k-j)}, \quad 0 \leq j \leq k;$$

якщо $|\xi| \geq 1$, то (див. п.п. 4.4.1)

$$|D_\xi^{k-j}f(a(\xi))| \leq \tilde{c}_{k-j}|\xi|^{\omega_{k-j}-(k-j)+1} \equiv \tilde{c}_{k-j}|\xi|^{(k-j)(\gamma-1)+1}.$$

Якщо $s = 1 + [\gamma] + m$, то в околі точки $\xi = 0$ підінтегральна функція у кожному доданку вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-d_0' t|\xi|^\gamma}|\xi|^{\omega_{s-k}-(s-k)}|\xi|^{m-j}|D_\xi^{k-j}f(a(\xi))|d\xi,\ 0 \leq j \leq k, \quad 0 \leq k \leq s,$$

еквівалентна функції $|\xi|^{-(1+[\gamma]-\gamma)} = |\xi|^{-(1-\{\gamma\})}$, де $0 < 1-\{\gamma\} < 1$, тобто всі такі невласні інтеграли з особливою точкою $\xi = 0$ є збіжними. Збіжність цих інтегралів на нескінченності забезпечується тим, що функція $f(a)$ разом з усіма своїми похідними на нескінченності зростає не швидше за степеневу функцію.

Отже, якщо $|x| \geq 1$, то з наведених вище оцінок випливає нерівність $|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)| \leq c_m|x|^{-(1+[\gamma]+m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $c_m > 0$ не залежать від Δt та x. Тоді

$$\sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m}|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)| \leq c_p, \quad c_p = \sum_{m=0}^{p} 2^{\gamma_0+m}c_m,$$

де $p \in \mathbb{Z}_+$ – фіксоване число. Якщо ж $|x| \leq 1$, то $|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)| \leq \tilde{c}_m$, де сталі $\tilde{c}_m > 0$ також не залежать від Δt та x. Отже, для x: $|x| < 1$ правильною є

оцінка
$$\sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m}|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)| \le \tilde{c}_p, \quad \tilde{c}_p = \sum_{m=0}^{p} 2^{\gamma_0+m}\tilde{c}_m.$$
Підсумовуючи, дістаємо, що для довільно фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$ справджується нерівність
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big\{ \sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m}|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)| \Big\} \le c'_p,$$
де $c'_p > 0$ не залежить від Δt, тобто $\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c'_p > 0: \ \|\Phi_{\Delta t}\|_p \le c'_p$.

Лема доведена.

Наслідок 4.6. *Правильною є формула*
$$\frac{\partial}{\partial t}(g * G(t,\cdot)) = g * \frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot), \quad \forall g \in \Phi', \ t \in (0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що
$$g * G(t,\cdot) = \langle g_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$
Тоді
$$\frac{\partial}{\partial t}(g * G(t,x)) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t,x)) - (f * G(t,x))] =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \Big\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \Big\rangle.$$
Внаслідок леми 4.14 граничне співвідношення
$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$
виконується в сенсі збіжності за топологією простору Φ, тому, з урахуванням неперервності функціоналу f маємо, що
$$\frac{\partial}{\partial t}(g * G(t,\cdot)) = \Big\langle g_\xi, \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle g_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)] \Big\rangle = \Big\langle g_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)] \Big\rangle = g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Твердження доведено.

Лема 4.15. *У просторі Φ' справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t,\cdot) = \delta \tag{4.74}$$

(δ – дельта-функція Дірака).

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі Φ, співвідношення (4.74) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{4.75}$$

у просторі Ψ'. Урахувавши зображення (4.73) функції G, подамо (4.75) у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \tag{4.76}$$

Для доведення (4.76) візьмемо довільну функцію $\varphi \in \Psi$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle Q(t,\cdot),\varphi\rangle = \mu \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\sigma)\Big]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{Q_1(t_k,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l,\sigma)}\Big]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\varphi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (4.76) виконується в просторі Ψ', а, отже, правильним є співвідношення (4.74). Лема доведена.

Наслідок 4.7. *Нехай* $\omega(t,x) = g * G(t,x)$, $g \in \Phi'_*$, $(t,x) \in \Omega$. *Тоді в просторі* Φ' *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = g. \tag{4.77}$$

Функція G є розв'язком рівняння (4.58). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\Big].$$

З іншого боку, $A_f G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[f(\sigma) F_{x\to\sigma}[G(t,x)]] = F^{-1}[f(\sigma)Q(t,\sigma)] = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\Big]$, звідки й випливає, що функція G задовольняє рівняння (4.58).

З наслідку 4.7 випливає, що для рівняння (4.58) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T],\Phi)$ рівняння (4.58), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g, \quad g \in \Phi'_*, \tag{4.78}$$

де граничне співвідношення (4.77) розглядається в просторі Φ' (обмеження на параметри μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (4.58), (4.59)).

Надалі функцію $G(t,x)$, яка задовольняє рівняння (4.58) та умову (4.74) називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової задачі (4.58), (4.78).

Теорема 4.8. *Задача* (4.58), (4.78) *коректно розв'язна, тобто розв'язок* $u(t,x)$ *рівняння* (4.58) *існує,* $u(t,\cdot) \in C^1((0,T],\Phi)$, *граничну умову* (4.78) $u(t,\cdot)$ *задовольняє в просторі* Φ', *неперервно залежить від граничної функції* $g \in \Phi'_*$.

Розв'язок дається формулою $u(t,x) = g * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* G *– фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння* (4.58).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (4.58). Справді (див. наслідок 4.6),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(g * G(t,x)) = g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$
$$A_f u(t,x) = F^{-1}[f(\sigma)F[g * G(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки g – згортувач у просторі Φ, то

$$F[g * G(t,x)](\sigma) = F[g](\sigma)F[G(t,x)](\sigma) = F[g](\sigma) \cdot Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$A_f u(t,x) = F^{-1}[f(\sigma)Q(t,\sigma)F[g](\sigma)](x) = -F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[g](\sigma)\Big] =$$
$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G\Big] \cdot F[g]\Big] = -F^{-1}\Big[F\Big[g * \frac{\partial G}{\partial t}\Big]\Big] = -g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (4.58). З наслідку 4.7 випливає, що u задовольняє умову (4.78) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $g \in \Phi'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (4.58), (4.78) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_f^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', 0 \le t < t_0 \le T, \tag{4.79}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \Phi'_*, \tag{4.80}$$

де A_f^* – звуження спряженого оператора до оператора A_f на простір $\Phi \subset \Phi'$. Умову (4.80) розуміємо в слабкому сенсі. В цьому випадку $A_f^* = A_f$, задача Коші (4.79), (4.80) є розв'язною; при цьому $v(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t$: $\Phi'_* \to \Phi$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \Phi'_*$ розв'язок задачі (4.79), (4.80). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$; при цьому

$$\frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} - A_f^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі Φ').

Надалі розв'язок $u(t,x)$ задачі (4.58), (4.80) розумітимемо як регулярний функціонал з простору $\Phi'_* \supset \Phi$. Доведемо, що задача (4.58), (4.80) має єдиний розв'язок в просторі Φ'_*. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (4.58) при нульовій граничній функції може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, де ψ – довільно фіксований елемент простору $\Phi \subset \Phi'_*$, $0 < t < t_0 \le T$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (4.58) знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi\Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial}{\partial t}Q^t_{t_0}\psi\Big\rangle =$$

$$= -\langle A_f u, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle u, A^*_f Q^t_{t_0}\psi\rangle = -\langle A_f u, Q^t_{t_0}\psi\rangle + \langle A_f u, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0.$$

Отже, $\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = \mathrm{const} = c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Якщо в (4.78) $g = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = c\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big) = 0,$$

тобто $c = 0$. Отже, $\langle u(t_0,\cdot),\psi\rangle = 0$ для довільного елемента $\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, тобто $u(t_0,\cdot)$ – нульовий функціонал у просторі Φ'_*. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$. Теорема доведена.

Зазначимо, що наведені результати є правильними і у випадку декількох просторових змінних.

4.5. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій

4.5.1. Простори основних та узагальнених періодичних функцій

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як доведено в [224], всі ці класи вкладаються у просторі формальних тригонометричних рядів і повністю характеризуються поведінкою коефіцієнтів Фур'є своїх елементів. У цьому підрозділі розглядаються довільні тригонометричні ряди, які ототожнюються із узагальненими 2π-періодичними функціями як лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. Детальна теорія узагальнених періодичних функцій наведена в [224–226]. Тут ми обмежуємося тим випадком, коли основні функції визначені на $\mathbb{R}$.

Простори T та T'

Простір T. Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

над полем комплексних чисел (тобто, $c_{k,p} \in \mathbb{C}$). Зрозуміло, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай T_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T = \bigcup\limits_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$ збігається в T до полінома P, якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m), $P \in T_m$

і $c_{k,p_n} \to c_{k,p}$ при $n \to \infty$ для кожного k: $0 \le |k| \le m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індуктивної границі просторів T_m: $T = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{ind}\, T_m$.

У T природним чином вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки

$$(P * Q)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(t)Q(x-t)dt, \quad \{P, Q\} \subset T,$$

які є неперервними в T.

Простір T'. Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи простору T' назвемо 2π-періодичними узагальненими функціями.

Операція диференціювання в просторі T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)}, P\rangle = (-1)^k \langle f, P^{(k)}\rangle, \quad f \in T', P \in T, k \in \mathbb{N}.$$

Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним в T'.

Операція згортки двох узагальнених періодичних функцій $\{f, g\} \subset T'$ визначається так:

$$\langle f * g, P\rangle = \langle f(x), \langle g(y), P(x+y)\rangle\rangle, \quad \forall P \in T.$$

Вона має зміст, бо

$$\langle g(y), P(x+y)\rangle = \left\langle g(y), \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ik(x+y)} \right\rangle = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} \langle g, e^{iky}\rangle e^{ikx} \in T.$$

Згортка $f * g$ є неперервною в T' у тому розумінні, що коли $f_n \xrightarrow{T'} f$, $n \to \infty$, то $f_n * g \xrightarrow{T'} f * g$, $n \to \infty$, $\forall g \in T'$. Цей факт випливає з самого означення згортки. Крім того, правильною є формула [224]:

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Простір T неперервно вкладається в T' у тому сенсі, що якщо $Q \in T$, то елемент $f_Q \in T'$, який відповідає Q, визначається формулою

$$\langle f_Q, P\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(x)\overline{P(x)}dx, \quad \forall P \in T.$$

Аналогічним способом неперервно вкладається в T' також простір $C[0, 2\pi]$ неперервних і 2π-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій з топологією рівномірної збіжності і простір $L_1[0, 2\pi]$ всіх 2π-періодичних і інтегровних за Лебегом на $[0, 2\pi]$ функцій. При цьому, якщо функція f належить до простору $L_1[0, 2\pi]$ і є абсолютно неперервною, то її узагальнена похідна збігається зі звичайною. Аналогічно, для довільних $\{f, g\} \subset L_1[0, 2\pi]$ згортка $f * g$ в T' збігається зі звичайною згорткою.

4.5.2. Формальні ряди Фур'є

Розглянемо множину s всіх послідовностей комплексних чисел $c := \{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Дві такі послідовності вважаються рівними, якщо їхні елементи з однаковими номерами збігаються. s утворює лінійний простір відносно операцій звичайного додавання послідовностей та множення їх на число. Збіжність в s визначається так: послідовність $\{c_n, n \in \mathbb{N}\} = \{c_k^{(1)}, \ldots, c_k^{(n)}, \ldots; k \in \mathbb{Z}\}$ збігається в s до $c = \{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$ при $n \to \infty$, якщо $c_k^{(n)} \to c_k$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$.

Кожному елементу $f \in T'$ зіставимо у відповідність послідовність

$$c_f := \{c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, k \in \mathbb{Z}\} \in s.$$

Відображення

$$F: \ T' \ni f \to \{c_k(f), k \in \mathbb{Z}\} \in s$$

є взаємно однозначним і взаємно неперервним відображенням T' на s [224]. Вказана бієкція переводить T у сукупність всіх фінітних з обох боків послідовностей. Зазначимо також, що операція диференціювання під дією відображення F переходить у операцію множення на ik:

$$c_k(f') = \langle f', e^{-ikx} \rangle = ik\langle f, e^{-ikx} \rangle = ikc_k(f), \quad \forall f \in T',$$

а згортка – в покоординатне множення:

$$c_k(f * g) = \langle f * g, e^{-ikx} \rangle = \langle f, \langle g(t), e^{-ik(x+t)} \rangle \rangle =$$

$$= \langle f, \langle g(t), e^{-ikt} \rangle e^{-ikx} \rangle = c_k(f) \cdot c_k(g), \quad \forall \{f, g\} \subset T'.$$

Звідси випливає комутативність та асоціативність згортки в T'. Отже, T' – кільце (відносно згортки) з одиницею, роль якої виконує δ-функція Дірака.

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T' [224]. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [224] (звідси випливає також, що T лежить щільно в T'). Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f \in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями [224]

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \leq m_{k+1}$;

2) $\forall \alpha > 0 \ \exists c_\alpha > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \geq c_\alpha \cdot \alpha^k$;

3) $\exists M > 0 \ \exists h > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_{k+1} \leq M h^k m_k$;

4) $\exists A > 0 \ \exists L > 0 \ \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_k \cdot m_l \leq A L^{k+l} m_{k+l}$;

5) $\exists B > 0 \ \exists s > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$: $m_k \leq B s^k \min\limits_{0 \leq l \leq k} m_{k-l} \cdot m_l$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду: $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta > 0$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі c, $B > 0$ (залежні від функцій φ) такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq cB^k m_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}. \tag{4.81}$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (4.81) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{B>0} H_B\langle m_k\rangle$. Отже, в $H\langle m_k\rangle$ природно ввести топологію індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$: $H\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \mathrm{ind} H_B\langle m_k\rangle$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Внаслідок властивостей 3) – 5) послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічні алгебри [226]. Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні функції [226].

Зазначимо також, що для довільної функції $\varphi \in H\langle m_k\rangle$ граничне співвідношення

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \to \varphi'(x), \quad \Delta x \to 0, \tag{4.82}$$

справджується в сенсі збіжності за топологією простору $H\langle m_k\rangle$ [226].

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [226], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k\rangle$: $H'\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} \mathrm{pr} H'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи з $H'\langle k!\rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

Покладемо $\rho(\lambda) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{\lambda^k}{m_k}$, $\lambda \in [1,+\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1. +\infty)$ (швидше, ніж λ^k, $\forall k\in\mathbb{N}$), $\rho(\lambda)\geq 1$, $\forall\lambda\in[1,+\infty)$. Нехай

$$H_{\{\alpha\}} = \Big\{ f\in T' \,\Big|\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) < \infty,\ c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle \Big\}, \alpha > 0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big), \quad \{f,g\}\subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$. В $H\{m_k\}$ природно ввести топологію індуктивної границі: $H\{m_k\} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \mathrm{ind} H_{\{\alpha\}}$. У [226] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не лише як множини, але і топологічно.

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ описуються так [226]:

$$(f\in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu>0\,\exists c>0\,\forall k\in\mathbb{Z}:\ \ |c_k(f)|\leq c\rho^{-1}(\mu|k|)); \qquad (A)$$

$$(f\in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\forall\mu>0\,\exists c=c(\mu)>0\,\forall k\in\mathbb{Z}:\ \ |c_k(f)|\leq c\rho(\mu|k|)). \qquad (B)$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}$, $\beta>0$, то $\rho(\lambda)\sim\exp\{\lambda^{1/\beta}\}$, $\lambda>0$, тобто в цьому випадку для $f\in T'$ правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$(f\in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu>0\,\exists c>0\,\forall k\in\mathbb{Z}:\ \ |c_k(f)|\leq c\exp\{-\mu|k|^{1/\beta}\});$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}: \ \ |c_k(f)| \le c \exp\{\mu |k|^{1/\beta}\}).$$

Зауважимо, що послідовності $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, що задовольняють умови 1) – 5), можна будувати, як доведено в [224], за допомогою неперервних функцій G: $[0,\infty) \to (0,\infty))$, котрі володіють наступними властивостями:

$1')$ $G(\lambda) \ge 1$, $\lambda \in [0,\infty)$; $\lim\limits_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = +\infty$;

$2')$ функція G неперервно диференційовна і монотонно зростаюча на $[0,\infty)$;

$3')$ $\exists c > 0$ $\exists \alpha_0 > 0$ $\forall \lambda \in (0,\infty)$; $\lambda^{-1} G(\lambda) \ge c G(\alpha_0 \lambda)$;

$4')$ функція $\lambda G'(\lambda) G^{-1}(\lambda)$ монотонно зростає на $[0,\infty)$; при цьому $m_k = \sup\limits_{\lambda\ge 1}(\lambda^k / G(\lambda))$ (див. [224]). Як доведено в [224], правильними є нерівності

$$\rho(\lambda) = \sup_k \frac{\lambda^k}{m_k} \le G(\lambda) \le \lambda \sup_k \frac{\lambda^k}{m_k} = \lambda\rho(\lambda).$$

Прикладом функції G, яка задовольняє умови $1')$ – $4')$, може служити функція $\exp(\lambda^{1/\beta})$, $\lambda \in [0,\infty)$, де $\beta > 0$ – фіксований параметр. Безпосередньо переконуємося в тому, що відповідна послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка задовольняє умови 1) – 5), має вигляд $m_k = (\beta e)^{k\beta} k^{k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Припустимо, що послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє ще одну умову: 6) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{m_k}}{k} = 0$. Умова 6) еквівалентна умові (див. [9])

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln \rho(\lambda)}{\lambda} = +\infty,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \lambda: \ \ \lambda \ge \max\{1, \delta\} \Rightarrow \rho(\lambda) > e^{\varepsilon\lambda}. \tag{4.83}$$

Покладемо $\rho_k := \inf\limits_{\lambda\ge 1} \dfrac{\rho(\lambda)}{\lambda^k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\frac{\rho(\lambda)}{\lambda^{k+1}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho(\lambda)}{\lambda^k} \le \frac{\rho(\lambda)}{\lambda^k}, \quad \lambda \ge 1.$$

Звідси дістаємо, що $\rho_{k+1} \le \rho_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, тобто послідовність $\{\rho_k\}$ є монотонно спадною. Крім того, із результатів, отриманих в [227] випливає, що послідовність $\{\rho_k\}$ є такою, що $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\rho_k} = 0$,

$$\exists \omega > 1\ \forall k \ge 1: \ \ \rho_{k-1}/\rho_k \le \omega.$$

Наприклад, якщо $m_k = k^{k\beta}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$ і в цьому випадку $\rho_k = (k\beta)^{-k\beta} e^{k\beta}$. Очевидно, що послідовність $\{\rho_k\}$ монотонно спадна, $\sqrt[k]{\rho_k} \to 0$ при $k \to \infty$.

Із властивостей послідовності $\{\rho_k\}$ випливає, що функція $\ln \rho$ – опукла на $[1, +\infty)$ (див. [52]), тобто

$$\forall \{x_1, x_2\} \subseteq [1, +\infty): \ \ln \rho(x_1) + \ln \rho(x_2) \leq \ln \rho(x_1 + x_2) \tag{4.84}$$

((4.84) відповідає означенню опуклої функції f з [189]):

$$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2), \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

4.5.3. Деякі класи аналітичних періодичних функцій

Розглянемо послідовність спеціального вигляду, а саме $m_k = k!\rho_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (ця послідовність задовольняє умови 1) – 6)). Виявляється, що елементами відповідного класу $H\langle k!\rho_k \rangle$ є аналітичні (цілі) періодичні функції, які, як функції комплексної змінної, задовольняють певну умову. Точніше, правильним є наступне твердження.

Теорема 4.9. *Нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k \rangle$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, і це продовження задовольняє умову: існують сталі c, $b > 0$ (залежні, можливо, лише від φ) такі, що*

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\tilde{\rho}(by), \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}, \tag{4.85}$$

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \geq 1, \end{cases} \qquad \rho(y) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|y|^k}{k!\rho_k}.$$

Доведення. Нехай φ допускає аналітичне продовження в комплексну площину до цілої функції і виконується умова (4.85). Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}}dz, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де γ_R – коло радіуса R з центром у точці x. Тоді

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi}\max_{z\in\gamma_R}\frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{k+1}}\oint\limits_{\gamma_R} ds \leq$$

$$\leq ck!b^k \inf_R \frac{\tilde{\rho}(bR)}{(bR)^k} = cb^k k!\rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси випливає, що $\varphi \in H\langle k!\rho_k\rangle$.

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k\rangle$, тобто існують сталі $c' > 0$, $B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c'B^k k!\rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Тоді її можна аналітично продовжити у всю комплексну площину. Справді, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}h^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}h^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $|\xi - x| < |h|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!}|h|^n \leq c'B^n\rho_n|h|^n = c'(B|h|\sqrt[n]{\rho_k})^n. \tag{4.86}$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0 : \ \ \rho_n < \varepsilon^n.$$

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(B|h|)^{-1}$. Тоді

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} \leq \frac{c'}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

звідки й випливає, що ряд Тейлора функції $\varphi(x)$ збігається до $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$\varphi(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}h^k.$$

Із оцінки (4.86) випливає також, що ряд Тейлора функції φ залишається збіжним і для комплексних значень h. Отже, φ продовжєуться до цілої функції $\varphi(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$; при цьому

$$\varphi(x+iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}(iy)^k$$

і

$$|\varphi(x+iy)| \le c' \sum_{k=0}^{\infty} B^k |y|^k \rho_k.$$

Оскільки знайдеться стала $d_0 > 0$ така, що $\tilde{\rho}(y) \le d_0 \tilde{\rho}(2By)$, то

$$B^k|y|^k\rho_k = |y|^k B^k \inf_{y\neq 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} \le d_0|y|^k B^k \inf_{y\neq 0} \frac{\tilde{\rho}(2By)}{|2By|^k} \le$$

$$\le d_0|y|^k B^k \frac{\tilde{\rho}(2By)}{2^k B^k |y|^k} = \frac{d_0}{2^k}\tilde{\rho}(by), \quad b = 2B, y \neq 0.$$

Тоді

$$|\varphi(x+iy)| \le c'\tilde{\rho}(by)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = c\tilde{\rho}(by), \quad y \neq 0,$$

де $c = 2c'$. Зазначимо, що для $y = 0$ ця нерівність є очевидною. Теорема доведена.

Зауваження 4.7. *Якщо $\rho_k \sim k^{-k(1-\beta)}$, то $k!\rho_k \sim k^{k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, з теореми 4.9 випливає, що клас Жевре $H\langle k^{k\beta}\rangle = G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, характеризується так: для того, щоб нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належала до класу $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, необхідно й достатньо, щоб вона аналітично продовжувалася в комплексну площину до цілої функції і це продовження задовольняло умову:*

$$\exists c > 0\ \exists b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ |\varphi(x+iy)| \le c \exp\left\{ b|y|^{1/\beta} \right\}.$$

4.5.4. Згортка періодичних ультрарозподілів

У просторі $H'\langle m_k\rangle$ згортка $f_1 * f_2$ визначена для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k\rangle$. Справді, оскільки $H'\langle m_k\rangle \subseteq T'$, то коефіцієнти Фур'є узагальненої функції $f_1 * f_2 \in T'$ пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених функцій $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle \subseteq T'$ так (див. п.п. 4.5.1):

$$c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доведемо, що коефіцієнти Фур'є $c_k(f_1 * f_2)$ задовольняють умову (B), звідки й випливатиме, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.

Отже, якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle$, то з умови (B) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(f_1)| \leq c_1 \rho(\mu_1 |k|),$$

$$\forall \mu_2 > 0 \ \exists c_2 = c_2(\mu_2) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(f_2)| \leq c_2 \rho(\mu_2 |k|).$$

Тоді, врахувавши властивість опуклості функції $\ln \rho$ (див. (4.84)) знайдемо, що

$$|c_k(f_1 * f_2)| = |c_k(f_1)| \cdot |c_k(f_2)| \leq c_1 c_2 \rho(\mu_1 |k|) \rho(\mu_2 |k|) =$$

$$= c_1 c_2 e^{\ln \rho(\mu_1 |k|) + \ln \rho(\mu_2 |k|)} \leq c_1 c_2 e^{\ln \rho((\mu_1 + \mu_2)|k|)} =$$

$$= c \rho(\mu |k|), \quad c = c_1 c_2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Цим доведено, що $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.

Якщо ж, наприклад, $f_1 \in H\langle m_k \rangle$, то згортка $f_1 * f_2$ – звичайна функція; точніше, правильним є наступне твердження.

Лема 4.16. *Для довільних $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ та $f \in H'\langle m_k \rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, то з умови (A) випливає, що

$$\exists \mu > 0 \ \exists c > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}: \ |c_k(\varphi)| \leq c \rho^{-1}(\mu |k|).$$

Внаслідок умови (B) для $\mu_1 = \mu/2$ знайдеться $c_1 > 0$ таке, що

$$|c_k(f)| \leq c_1 \rho(\mu_1 |k|), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді з нерівності опуклості (4.84) дістаємо нерівність

$$\ln\rho(\mu_1|k|) - \ln\rho(\mu|k|) \le -\ln\rho((\mu-\mu_1)|k|) \equiv -\ln\rho\Big(\frac{\mu}{2}|k|\Big), \quad |k| \ge 1.$$

Отже,

$$\rho(\mu_1|k|)\rho^{-1}(\mu|k|) \le \rho^{-1}\Big(\frac{\mu}{2}|k|\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є згортки $f*\varphi$ справджуються оцінки:

$$|c_k(f*\varphi)| \le \tilde{c}\rho^{-1}(\tilde{\mu}|k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $\tilde{c} = cc_1$, $\tilde{\mu} = \mu/2$. Звідси вже випливає, що $f*\varphi \in H\langle m_k\rangle$.

Лема доведена.

Для згортки $f*\varphi$, $f \in H'\langle m_k\rangle$, $\varphi \in H\langle m_k\rangle$ існує інше (еквівалентне вихідному) зображення, а саме:

$$(f*\varphi)(x) = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle \equiv \langle f(t), \varphi(x-t)\rangle, \tag{4.87}$$

де T_{-x} – оператор зсуву аргументу у просторі $H\langle m_k\rangle$, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$. Справді,

$$\forall\psi \in H\langle m_k\rangle : \ \langle f*\varphi, \psi\rangle = \langle f(\xi), \langle\varphi(y), \psi(\xi+y)\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big\langle f(\xi), \int_0^{2\pi}\varphi(y)\psi(\xi+y)dy\Big\rangle = \frac{1}{2\pi}\Big\langle f(\xi), \int_0^{2\pi}\varphi(t-\xi)\psi(t)dt\Big\rangle =$$

$$= \langle f(\xi), \langle\psi(t), \varphi(t-\xi)\rangle\rangle = \langle f*\psi, \varphi(-\xi)\rangle =$$

$$= \langle\psi*f, \varphi(-\xi)\rangle = \langle\psi(t), \langle f(\xi), \varphi(-\xi+t)\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)\langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle dt = \langle\langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \psi\rangle.$$

Отже,

$$(f*\varphi)(t) = \langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \quad f \in H'\langle m_k\rangle, \varphi \in H\langle m_k\rangle.$$

Зазначимо, що для згортки (4.87) правильною є формула диференціювання

$$(f*\varphi)^{(k)} = f*\varphi^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.88}$$

Для доведення (4.88) розглянемо різницю

$$\frac{1}{\Delta x}[(f*\varphi)(x+\Delta x)-(f*\varphi)(x)]-(f*\varphi')(x)=$$

$$=\Big\langle f,\frac{\varphi(x+\Delta x-u)-\varphi(x-u)}{\Delta x}-\varphi'_x(x-u)\Big\rangle.$$

Із співвідношення (4.82) випливає, що

$$\frac{\varphi(x+\Delta x-u)-\varphi(x-u)}{\Delta x}\to\varphi'_x(x-u),\quad \Delta x\to 0,$$

за топологією простору $H\langle m_k\rangle$. Внаслідок неперервності функціоналу f маємо ланцюжок рівностей:

$$(f*\varphi)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\Big\langle f,\frac{\varphi(x+\Delta x-u)-\varphi(x-u)}{\Delta x}\Big\rangle=$$

$$=\Big\langle f,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x-u)-\varphi(x-u)}{\Delta x}\Big\rangle=\langle f,\varphi'_x(x-u)\rangle=(f*\varphi')(x).$$

Отже, (4.88) справджується при $k=1$. Повторюючи проведені міркування з функцією φ' замість φ, доведемо справедливість (4.88) при $k=2$ і т.д.

4.5.5. Псевдодиференціальні оператори у просторах періодичних функцій

Нехай $\tilde{G}$: $\mathbb{R}\to[0,\infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x)\geq|x|$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}$: $T'\to T'$ за правилом

$$T'\ni f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)e^{ikx}\to\hat{A}f:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{G}(k)c_k(f)e^{ikx}\in T',$$

$$c_k(f)=\langle f,e^{-ikx}\rangle,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'. Оператор $\hat{A}$ – згортувач у алгебрі T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_{\tilde{G}}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{G}(k)e^{ikx}\in T',$$

то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(k) c_k(f) e^{ikx} = f * f_{\tilde{G}},$$

бо

$$c_k(f * f_{\tilde{G}}) = c_k(f) c_k(f_{\tilde{G}}) = c_k(f)\tilde{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_\gamma$ дробового диференціювання в T' [38]. Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_\gamma$ володіє властивостями:

а) $\forall f \in T'$ $\forall \{\alpha, \beta\} \subset (0, \infty)$: $\hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta f) = \hat{A}_{\alpha+\beta}(f)$;

б) $\forall f \in T'$: $\hat{A}_{2k} f = (-1)^k D_x^{2k} f$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0, 2\pi]$, то, як доведено в [38], A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Нехай $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(\varphi) e^{ikx}, \quad \lambda_k = \tilde{G}(k), \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}, \forall \varphi \in H.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \Big\{ \varphi \in H : \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(A_f \varphi)|^2 < \infty \Big\},$$

причому $T \subset \mathcal{D}(A_f)$, $\sigma(A_f) = \{\tilde{G}(k), k \in \mathbb{Z}\}$. З'ясуємо, за якої умови на функцію f оператор A_f буде обмеженим у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображатиме цей простір в себе (вважаємо, що послідовність $\{m_k\}$ задовольняє умови 1) – 6)).

Теорема 4.10. *Якщо неперервна на* $[0,\infty)$ *функція* f *задовольняє умову*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall x \in [0,\infty): \ \ 0 \le f(x) \le c_\varepsilon \rho(\varepsilon x), \tag{4.89}$$

то оператор A_f *неперервний у просторі* $H\langle m_k\rangle$ *і відображає цей простір в себе.*

Доведення. Передусім доведемо, що функція $A_f\varphi \in H\langle m_k\rangle$, якщо $\varphi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi)e^{ikx} \in H\langle m_k\rangle$. Оскільки

$$c_k(A_f\varphi) = (A_f\varphi, e^{-ikx}) = (\varphi, A_f e^{-ikx}) = f(\lambda_k)(\varphi, e^{-ikx}) =$$

$$= f(\lambda_k)c_k(\varphi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

то, внаслідок умови (A), досить довести, що

$$\exists \mu_0 > 0\ \exists c_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}: \ \ f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|).$$

За умовою $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, тобто

$$\exists \mu_1 > 0\ \exists c_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}: \ \ |c_k(\varphi)| \le c_1\rho^{-1}(\mu_1|k|).$$

Отже,

$$f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_\varepsilon c_1 \rho(\varepsilon|k|)\rho^{-1}(\mu_1|k|) = c_\varepsilon c_1 e^{\ln\rho(\varepsilon|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|)}.$$

Візьмемо параметр ε з проміжку $(0,\mu_1)$. Врахувавши нерівність опуклості (4.84) для функції $\ln\rho$ знайдемо, що

$$\ln\rho(\varepsilon|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|) \le -\ln\rho((\mu_1-\varepsilon)|k|) \equiv -\ln\rho(\mu_0|k|),$$

де $\mu_1 - \varepsilon = \mu_0$. Тоді

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_0 e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)} = c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|),$$

звідки й випливає, що $A_f\varphi \in H\langle m_k\rangle$.

Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $H\langle m_k\rangle$, тобто кожну обмежену множину цього простору A_f відображає в обмежену множину цього ж простору.

Нехай L – обмежена множина у просторі $H\langle m_k\rangle$. Оскільки $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то L – обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha\}}$, тобто

$$\exists b>0\ \forall\varphi\in L:\ \ \|\varphi\|_{H_{\{\alpha\}}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(\varphi)|^2\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha_0}\Big)\le b.$$

Отже,

$$\forall\varphi\in L:\ \ |c_k(\varphi)|\le b\rho^{-1}\Big(\frac{|k|}{\alpha_0}\Big),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

У нерівності (4.89) покладемо $\varepsilon=(2\alpha_0)^{-1}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (4.84) знайдемо, що

$$|c_k(A_f\varphi)|=f(\lambda_k)|c_k(\varphi)|\le cb\rho^{-1}\Big(\Big(\frac{1}{\alpha_0}-\varepsilon\Big)|k|\Big)=$$

$$=b_1\rho^{-1}\Big(\frac{|k|}{2\alpha_0}\Big),\quad k\in\mathbb{Z}, b_1=cb.$$

Отже, множина A_fL обмежена у просторі $H_{\{2\alpha_0\}}$, тобто у просторі $H\langle m_k\rangle$. Теорема доведена.

Зауваження 4.8. *Умова* (4.89) *на функцію f еквівалентна тому, що функція $F_f=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}f(\lambda_k)e^{ikx}\equiv\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}f(G(k))e^{ikx}$ є елементом простору $H'\langle m_k\rangle$.*

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову

$$\exists c_0>0\ \exists d_0>0\ \forall x\in[0,\infty):\ \ f(x)\ge d_0\ln\rho(c_0x). \tag{4.90}$$

4.5.6. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_fu=0,\quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}\equiv\Omega, \tag{4.91}$$

де A_f – оператор, побудований у п.п. 4.5.5. Під розв'язком рівняння (4.91) розуміємо функцію $u(t,x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0,T]$.

Розглянемо наступну задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (4.91) та задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = g, \quad g \in L_2[0,2\pi], \tag{4.92}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le T$. При цьому $u(0,\cdot)$ розуміємо як $\lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0,2\pi]$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot) \in H$ така, що $\|u(t,\cdot)-u_0(\cdot)\|_H \to 0$, $t \to +0$, $u_0(x) \equiv u(0,x)$. Надалі задачу (4.91), (4.92) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (4.91).

Нехай u – розв'язок рівняння (4.91). Оскільки $u(t,\cdot) \in H$, $H = L_2[0,2\pi]$, при кожному $t \in (0,T]$, то

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx}, \quad (t,x) \in \Omega,$$

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t,\cdot)) = (u(t,\cdot), e^{-ikx})_H, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\tilde{c}_k(t)|^2, \quad t \in (0,T].$$

Для відшукання $\tilde{c}_k(t)$ домножимо (4.91) скалярно на e^{-ikx}, $k \in \mathbb{Z}$; в результаті прийдемо до співвідношення:

$$(u'_t, e^{-ikx}) + (A_f u, e^{-ikx}) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}$ маємо

$$(A_f u, e^{-ikx}) = (u, A_f e^{-ikx}) = (u, f(\lambda_k) e^{-ikx}) =$$

$$= f(\lambda_k)(u, e^{-ikx}) = f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t), \quad \lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k)$$

(тут враховано, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} є власною функцією оператора A, а $f(\lambda_k)$ – його власне число).

Із диференційовності $u(t, \cdot)$ (за змінною $t \in (0, T]$) випливає диференційовність функції $\tilde{c}_k(t) = (u(t, \cdot), e^{-ikx})$ на $(0, T]$. Отже

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_k(t) = \frac{d}{dt}(u(t, \cdot), e^{-ikx}) = \Big(\frac{d}{dt}u(t, \cdot), e^{-ikx}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо також, що

$$\lim_{t \to +0} \tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0, \cdot)).$$

Справді,

$$\tilde{c}_k(t) = (u(t, \cdot), e^{-ikx}), \quad \tilde{c}_k(0) = (u(0, \cdot), e^{-ikx}),$$

$$|\tilde{c}_k(t) - \tilde{c}_k(0)| = |(u(t, \cdot) - u(0, \cdot), e^{-ikx})| \leq$$

$$\leq \|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\| \to 0, \quad t \to +0.$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\tilde{c}_k'(t) + f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{c}_k(t) = c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\}, \quad c_k = \text{const}, k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\{-tf(\lambda_k)\} e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega. \tag{4.93}$$

Для відшукання c_k, $k \in \mathbb{Z}$, помножимо (4.92) скалярно на e^{-ikx}, $k \in \mathbb{Z}$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$\mu\tilde{c}_k(0) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \tilde{c}_k(t_n) = c_k(g), \quad c_k(g) = (g, e^{-ikx}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Урахувавши вигляд $\tilde{c}_k(t)$ знайдемо, що

$$c_k\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{t_n f(\lambda_k)\}\Big) = c_k(g).$$

Отже,

$$c_k = c_k(g)\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\Big)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\lambda_k) := \exp\{-tf(\lambda_k)\}, \quad Q_2(\lambda_k) :=$$
$$= \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-t_n f(\lambda_k)\}\Big)^{-1} \equiv \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1}.$$

Тоді

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t,\cdot)) = Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)e^{ikx} =$$
$$= G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{ikx}, \quad G(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e^{ikx}.$$

Із обмежень, накладених на функцію f та параметри задачі (4.91), (4.92) випливає, що при кожному $t \in (0,T]$ справджуються нерівності

$$|c_k(G)| = |Q_1(t,\lambda_k)| \cdot |Q_2(\lambda_k)| \le \exp\{-d_0 t \ln\rho(\mu_0\lambda_k)\}\times$$
$$\times\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp\{-d_0 t_n \ln\rho(\mu_0\lambda_k)\}\Big)^{-1} \le$$
$$\le \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\Big)^{-1} \exp\{-d_0 t \ln\rho(\mu_0\lambda_k)\},$$
$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(тут враховано, що $\mu > \sum_{n=1}^{m} \mu_n$). Звідси та з характеристики класу $H\langle m_k\rangle$ (див. (A)) випливає, що $G(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t \in (0,T]$. Справді, нехай $d_0 t < 1$. Якщо φ – опукла на $[0, \infty)$ функція, то крім нерівності (4.84) для такої функції справджуються ще нерівності: а) $\forall \alpha \in (0,1)$ $\forall x \in [0, \infty)$: $\varphi(\alpha x) \leq \alpha \varphi(x)$; б) $\forall \alpha \geq 1$ $\forall x \in [0, \infty$: $\varphi(\alpha x) \geq \alpha \varphi(x)$.

Урахувавши а) запишемо нерівність: $-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k) \leq -\ln \rho(d_0 t \mu_0 \lambda_k) \equiv -\ln \rho(a_1 \lambda_k)$, $a_1 = d_0 t \mu_0$ (тут враховано властивість опуклості функції $\ln \rho$).

Отже, якщо $d_0 t < 1$, то

$$|c_k(G)| \leq \gamma e^{-\ln \rho(a_1 \lambda_k)} \equiv \gamma \rho^{-1}(a_1 \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\gamma = \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\Big)^{-1}.$$

Якщо $d_0 t > 1$, то $d_0 t = [d_0 t] + \{d_0 t\}$. Тоді

$$e^{-d_0 \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} = e^{-[d_0 t] \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \leq$$

$$\leq e^{-\{d_0 t\} \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \leq e^{-\ln \rho(a_2 \lambda_k)} = \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), \quad a_2 = \{d_0 t\} \mu_0.$$

Таким чином, якщо $d_0 t > 1$, то

$$|c_k(G)| \leq \gamma \rho^{-1}(a_2 \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $a = \min\{a_1, a_2\} = \{d_0 t\} \mu_0$. Тоді при фіксованому $t \in (0, T]$ справджується нерівність

$$|c_k(G)| \leq \gamma \rho^{-1}(a \lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

з якої (та умови (A)) випливає, що $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$, $m_k = k! \rho_k$, при кожному $t \in (0, T]$.

Оскільки $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * g$, де $g \in H \subset H'\langle m_k \rangle$, $G(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ (при кожному $t \in (0, T]$), то на підставі відповідної властивості згортки стверджуємо, що $u(t, \cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$.

Розв'язок задачі (4.91), (4.92) єдиний. Для доведення цієї властивості скористаємося тим, що будь-який розв'язок рівняння (4.91) зображається формулою

(4.92), тобто

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G_1)c_k(g)e^{ikx}\equiv G_1(t,x)*g(x),$$

де

$$g=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx},\quad c_k=(g,e^{-ikx}),\quad G_1(t,x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k)e^{ikx},$$

$G_1(t,x)$ – фіксована функція з простору $H\langle m_k\rangle$, g – довільно фіксована функція з H (те, що $G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$ випливає з оцінки $|Q_1(t,\lambda_k)|\leq\gamma\rho^{-1}(a\lambda_k)$, $a,\gamma>0$, $k\in\mathbb{Z}$, яка рівносильна тому, що $|c_k(G_1)|\leq\gamma\rho^{-1}(a\lambda_k)$, $k\in\mathbb{Z}$). Якщо $g=0$, то $c_k=0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, звідки й випливає, що $u(t,x)=0$ для кожного $t\in(0,T]$, що й доводить єдиність розв'язку задачі (4.91), (4.92).

Зауважимо, що правильним є і обернене твердження: якщо функція $u(t,x)$ зображається формулою (4.93), то вона є розв'язком рівняння (4.91). Справді,

$$A_f u=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(A_f u)e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_f u,e^{-ikx})e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(u,A_f e^{-ikx})e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(u,f(\lambda_k)e^{-ikx})e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)e^{ikx},$$

$$\tilde{c}_k(t)=(u,e^{-ikx}),\quad \lambda_k=G(-k)=G(k),\quad k\in\mathbb{Z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{\partial u}{\partial t},e^{-ikx}\Big)e^{ikx}=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{d}{dt}(u,e^{-ikx})e^{ikx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{c}'_k(t)e^{ikx}.$$

Далі зазначимо, що $\tilde{c}_k(t)$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{c}'_k(t)+f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)=0,\quad k\in\mathbb{Z},$$

тобто $\tilde{c}'_k(t)=-f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$. Звідси випливає, що u – розв'язок рівняння (4.91).

Таким чином, функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (4.91) *тоді й лише тоді, коли вона зображається у вигляді* (4.93).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (4.91), (4.92) неперервно залежить від граничної умови. Нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset H$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі H, тобто $\|g_n - g\|_H^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Це рівносильно тому, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нехай u_n – розв'язок задачі (4.91), (4.92), який відповідає граничному елементу g_n. Тоді

$$\|u_n - u\|_H^2 = \|G * (g_n - g)\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(G)|^2 \cdot |c_k(g_n - g)|^2.$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G)| \leq \gamma$, $k \in \mathbb{Z}$, де $\gamma = \Big(\mu - \sum\limits_{p=1}^{m} \mu_p\Big)^{-1}$. Отже,

$$\|u_n - u\|_H^2 \leq \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

що й потрібно було довести.

Підсумуємо одержані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 4.11. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (4.91), (4.92) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де

$$G(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \quad g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H,$$

при цьому $\{G(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset H\langle m_k\rangle$, $m_k = k!\rho_k$, при кожному $t \in (0,T]$.

Зазначимо, що внаслідок відповідної властивості згортки $u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t \in (0,T]$, якщо $g \in H'\langle m_k\rangle$. Доведемо, що тоді функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (4.91), який задовольняє умову (4.92), де $g \in H'\langle m_k\rangle$, у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g, \quad g \in H'\langle m_k\rangle, \tag{4.94}$$

(границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$) .

Лема 4.17. *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $H\langle m_k\rangle$, диференційовна по t.*

Доведення. Оскільки $H\langle m_k\rangle = H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то для доведення твердження досить показати, що

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t, x) - G(t,x)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)$$

у просторі $H\{m_k\}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t+\Delta t \geq t/2$). Це означає, що

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : \ |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ – досить мале фіксоване число) обмежена в просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\exists c > 0 \ \forall \Delta t \ \ (|\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0) : \|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \leq c$$

при деякому $\alpha > 0$ та фіксованому $t \in (0,T]$;

2) $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\left\|\Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\|\right\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

при деякому $\alpha > 0$.

Передусім зазначимо, що функція $G(t,x)$ диференційовна по $t \in (0,T]$ (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\tilde{\varepsilon}, T]$, де $\tilde{\varepsilon} > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \quad t \in [\tilde{\varepsilon}, T], \tag{4.95}$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому x), бо тоді

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e^{ikx}. \tag{4.96}$$

Оскільки

$$|e^{ikx}| = 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad |Q_2(\lambda_k)| \leq \gamma, \gamma = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1},$$

то для $t \geq \tilde{\varepsilon}$ (з урахуванням умов (4.89), (4.90)) маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0: \ \ \alpha(t,x) := |-f(\lambda_k)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e^{ikx}| \leq$$

$$\leq \gamma f(\lambda_k)\exp\{-\tilde{\varepsilon} f(\lambda_k)\} \leq c_\varepsilon \gamma \exp\{-\tilde{\varepsilon} d_0 \ln\rho(c_0\lambda_k)\}\exp\{\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)\}.$$

Вважаючи, що $\tilde{\varepsilon} d_0 < 1$ та врахувавши опуклість функції $\ln\rho$, прийдемо до нерівності:

$$\alpha(t,x) \leq c_\varepsilon \gamma \exp\{-\ln\rho(\tilde{\varepsilon} d_0 - \varepsilon)\lambda_k\}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то покладемо $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} d_0/2$. Тоді

$$\alpha(t,x) \leq \tilde{c}\exp\Big\{-\ln\rho\Big(\frac{\tilde{\varepsilon} d_0}{2}\lambda_k\Big)\Big\} = \tilde{c}\rho^{-1}(\beta\lambda_k), \tag{4.97}$$

$$\beta = \frac{\tilde{\varepsilon} d_0}{2}, \quad t \in [\tilde{\varepsilon}, T], x \in \mathbb{R}.$$

Із (4.97) та властивостей функції ρ випливає, що ряд (4.96) збігається рівномірно при $t \geq \tilde{\varepsilon}$. Цим доведено, що функція $G(t,\cdot)$ диференційовна по t на відрізку $[\tilde{\varepsilon}, T]$. Оскільки $\tilde{\varepsilon} > 0$ – довільне, то функція $G(t,\cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$, при цьому правильним є співвідношення (4.96), яке виконується у кожній точці $t \in (0,T]$. Зазначимо також, що при кожному $t \in (0,T]$ функція $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ є елементом простору $H\langle m_k\rangle$, оскільки

$$c_k\Big(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big) = -f(\lambda_k)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)$$

і, як випливає з (4.97), для коефіцієнтів Фур'є функції $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ справджується оцінка:

$$\Big|c_k\Big(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\Big)\Big| \leq c\rho^{-1}(\beta\lambda_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Це і означає (див. (A)), що $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\Delta t}[e^{-(t+\Delta t)f(\lambda_k)}-e^{-tf(\lambda_k)}]Q_2(\lambda_k)e^{ikx}=$$

$$=-\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(\lambda_k)e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}Q_2(\lambda_k)e^{ikx},\quad 0<\theta<1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t})=-f(\lambda_k)Q_1(t+\theta\Delta t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t<0$, то внаслідок домовленості щодо Δt маємо $t+\theta\Delta t\geq t+\Delta t\geq t/2$). Тоді для довільного фіксованого $\alpha>0$, конкретне значення якого вкажемо пізніше, справджуються співвідношення:

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(\Phi_{\Delta t})|^2\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big)=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f^2(\lambda_k)\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big)e^{-2(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}Q_2^2(\lambda_k)\leq=$$

$$\leq\gamma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}f^2(\lambda_k)\rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big)e^{-2tf(\lambda_k)}\leq$$

$$\leq\gamma^2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}f^2(\lambda_k)e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)},$$

$$a_1=\{d_0t\}c_0,\quad \gamma=\Big(\mu-\sum_{k=1}^m\mu_k\Big)^{-1},$$

d_0, c_0 – сталі з умови (4.90). З урахуванням (4.89) та властивості опуклості функції $\ln\rho$ маємо, що

$$f^2(\lambda_k)e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)}\leq c_\varepsilon^2e^{2\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)-2\ln\rho(a_1\lambda_k)}\leq$$

$$\leq c_\varepsilon^2e^{-2\ln\rho((a_1-\varepsilon)\lambda_k)}=c_\varepsilon^2e^{-2\ln\rho(a_2\lambda_k)},\quad a_2=a_1/2,$$

якщо покласти $\varepsilon=a_1/2$. Із властивостей функцій ρ та $\tilde{G}$ випливають нерівності

$$\rho(a_2\lambda_k)\geq a_2\lambda_k=a_2\tilde{G}(|k|)\geq a_2|k|,\quad k\in\mathbb{Z};$$

тоді, знову скориставшись властивістю опуклості функції $\ln\rho$, прийдемо до нерівностей:

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \leq \gamma^2 c_\varepsilon^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2\ln\rho(a_2|k|)} \leq$$

$$\leq b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_2-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} = b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho(a_3|k|)} =$$

$$= b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho^{-2}(a_3|k|) < \infty, \quad a_3 = a_2 - \frac{1}{\alpha},$$

для фіксованого $\alpha > 0$ такого, що $a_2 - \dfrac{1}{\alpha} > 0$ (тобто для $\alpha > 1/a_2$). Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t}, |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена в просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай

$$\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,x).$$

$$\Psi_{\Delta t}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}[e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}]Q_2(\lambda_k)f(\lambda_k)e^{ikx}.$$

Звідси випливають співвідношення

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 \rho^2\Big(\frac{|k|}{\alpha}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} |e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}|^2 Q_2^2(\lambda_k) f^2(\lambda_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2(t+\theta_1\Delta t)f(\lambda_k)} f^4(\lambda_k)\theta^2(\Delta t)^2 Q_2^2(\lambda_k) \leq$$

$$\leq \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2tf(\lambda_k)} f^4(\lambda_k)(\Delta t)^2, \quad 0 < \theta_1 < 1, \gamma = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big)^{-1}.$$

Внаслідок (4.89) та властивості опуклості функції $\ln\rho$

$$f^4(\lambda_k)e^{-2tf(\lambda_k)} \leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} e^{4\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)} \leq$$

$$\leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} e^{2\ln\rho(2\varepsilon\lambda_k)} \leq c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho((a_1-2\varepsilon)\lambda_k)} =$$

$$= c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_4\lambda_k)}, \quad a_4 = a_1/2,$$

якщо покласти $\varepsilon = a_1/4$. Оскільки

$$\rho(a_4\lambda_k) \geq a_4\lambda_k = a_4\tilde{G}(|k|) \geq a_4|k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\|\Psi_\Delta\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \leq \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2\ln\rho(a_4|k|)}(\Delta t)^2 \leq \tilde{c}(\Delta t)^2,$$

де $\tilde{b} = \gamma^2 c_\varepsilon^4$,

$$\tilde{c} = \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_4-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} < \infty$$

для довільного фіксованого $\alpha > \dfrac{1}{a_4}$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (для $\alpha > \dfrac{1}{a_4}$), тобто $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$, $m_k = k!\rho_k$. Лема доведена.

Лема 4.18. *Функція*

$$u(t,x) = G(t,x) * g = \langle g(y), G(t,x-y)\rangle, \quad g \in H'\langle m_k\rangle,$$

диференційовна по t*, при цьому*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \left\langle g(y), \frac{\partial}{\partial t}G(t,x-y)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}G(t,x) * g.$$

Доведення. Внаслідок леми 4.17

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(y) := \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t,x-y) - G(t,x-y)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial t}G(t,x-y)$$

(при фіксованому $x \in \mathbb{R}$) за топологією простору $H\langle m_k\rangle$. Із властивості неперервності функціоналу g випливають співвідношення:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t,x) - u(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Big\langle g, \frac{1}{\Delta t}[G(t+\Delta t, x-y) - G(t, x-y)] \Big\rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle g, \tilde{\Phi}_{\Delta t, t, x}(\cdot) \rangle = \Big\langle g, \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{\Phi}_{\Delta t, r, x}(\cdot) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G(t, x-y) \Big\rangle = \frac{\partial}{\partial t} G(t, x) * g,$$

що й потрібно довести.

Функція $u(t,x) = G(t,x) * g$, $g \in H'\langle m_k \rangle$, задовольняє рівняння (4.91). Справді, $u(t,\cdot) \in H\langle m_k \rangle$ при кожному $t \in (0, T]$. Крім того,

$$A_f(G(t,x) * g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(G(t,x) * g) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(G) c_k(g) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}.$$

З іншого боку (див. лему 4.18)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) * g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \Big(\frac{\partial}{\partial t} G \Big) c_k(g) e^{ikx} =$$

$$= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e^{ikx}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (4.91).

Лема 4.19. *Нехай*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad g \in H'\langle m_k \rangle, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $H'\langle m_k \rangle$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t, \cdot) = g. \tag{4.98}$$

Доведення. Для доведення (4.98) візьмемо довільний елемент $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) e^{ikx} \in H\langle m_k \rangle$ і зазначимо, що внаслідок неперервності вкладення $H\langle m_k \rangle$ в $H'\langle m_k \rangle$ та ортонормованості базису $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\langle u(t,\cdot), \varphi \rangle = (u(t,\cdot), \varphi)_H = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\varphi).$$

Тоді

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{n=1}^{m} \lim_{t\to t_n}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi) - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi);$$

при цьому ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Цей факт випливає з вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot))$, $k\in\mathbb{Z}$, та нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))|\cdot|c_k(\varphi)| \le \tilde{c}|c_k(g)|\cdot|c_k(\varphi)|, \quad t\in[0,T], k\in\mathbb{Z}.$$

Справді, за умовою, $g\in H'\langle m_k\rangle$, тобто

$$\forall\mu>0\ \exists c=c(\mu)>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:\ \ |c_k(g)|\le c\rho(\mu|k|).$$

Функція $\varphi\in H\langle m_k\rangle$, тому, внаслідок умови (A),

$$\exists\mu_0>0\ \exists c_0>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:\ \ |c_k(\varphi)|\le c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|),$$

$$e^{\ln\rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} \le c_0 c e^{-\ln\rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} = \tilde{c}\rho^{-1}\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right) \le \tilde{c}|k|^{-2}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

З останньої нерівності випливає сформульована властивість.

Таким чином,

$$\lim_{t\to t_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t_n,\cdot))c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t_n,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\varphi). \tag{4.99}$$

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(0,\cdot))c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\varphi). \tag{4.100}$$

Урахувавши (4.99), (4.100) знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)Q_2(\lambda_k)\Big]c_k(g)c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)}{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)}c_k(g)c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g)c_k(\varphi) =$$

$$= \langle g,\varphi\rangle, \quad \varphi\in H\langle m_k\rangle, \quad m_k = k!\rho_k,$$

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g)e^{ikx}\in H'\langle m_k\rangle,$$

що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t,x) = G(t,x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k\rangle$, то функція $G(t,x)$ є розв'язком рівняння (4.91) і з (4.98) випливає, що функція $G(t,x)$ в просторі $H'\langle m_k\rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0}G(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}G(t,\cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової за часом задачі для рівняння (4.91).

Лема 4.19 дозволяє ставити багатоточкову за часом задачу для рівняння (4.91) у розумінні (4.98), де граничний елемент g належить до простору $H'\langle m_k\rangle$ (при цьому відповідні границі в (4.98) розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$). Правильним є наступне твердження.

Теорема 4.12. *Багатоточкова задача* (4.91), (4.98) *коректно розв'язна, її розв'язок зображаєтьcя формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

Доведення. Із наведених вище тверджень випливає, що доведення вимагає властивість єдиності розв'язку задачі (4.91), (4.98) та його неперервної залежності від граничної умови.

Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (4.91), (4.98). Оскільки u – розв'язок рівняння (4.91) (у вказаному раніше розумінні), то u зображається у вигляді (див. (4.93)):

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k Q_1(t,\lambda_k)e^{ikx}.$$

Якщо $c_k = c_k(g)Q_2(\lambda_k)$, $g = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle$, то u задовольняє умову (4.98). Отже, за умови $g = 0$ маємо $c_k(g) = \langle g, e^{-ikx}\rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $u(t,x) = 0$, $(t,x) \in \Omega$.

Доведемо, що розв'язок вказаної задачі неперервно залежить від граничної умови. Нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset H'\langle m_k\rangle$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$. Звідси випливає, що

$$c_k(g_n) = \langle g_n, e^{-ikx}\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle g, e^{-ikx}\rangle = c_k(g)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Крім того, $\{u, u_n, n \geq 1\} \subset H\langle m_k\rangle$, де u_n – розв'язок задачі (4.91), (4.98), який відповідає граничному елементу $g_n \in H'\langle m_k\rangle$. Тоді

$$\forall \varphi \in H\langle m_k\rangle : \ \ \langle u_n, \varphi\rangle = (u_n, \varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G)c_k(g_n)c_k(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G)c_k(g)c_k(\varphi) = (u,\varphi) = \langle u, \varphi\rangle.$$

Отже, $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.

Теорема доведена.

4.5.7. Властивість локалізації

Функція $G(t,\cdot)$ – фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (4.91), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $H\langle k!\rho_k\rangle$. Оскільки гранична узагальнена функція $g \in H'\langle k!\rho_k\rangle$ – згортувач у просторі $H\langle k!\rho_k\rangle$, а розв'язок $u(t,\cdot)$ задачі (4.91), (4.98) подається у вигляді згортки $G(t,\cdot) * g$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} G(t_i,\cdot) * g = u(t_i,\cdot),$$

$$t_i \in (0,T], i \in \{1,\ldots,m\}$$

виконуються в просторі $H\{k!\rho_k$. Із означенням збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t,\cdot) \to u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset [0,2\pi]$. Вказану збіжність в (4.98) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію g брати з вужчого, ніж $H'\langle k!\rho_k\rangle$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $G(t,\cdot) * g$ при $t \to +0$.

Розглянемо простір Жевре $H\langle k^{k\beta}\rangle \equiv G_{\{\beta\}}$ при $\beta > 1$. Оскільки в такому просторі є фінітні функції (див. [224]), то для ультрарозподілу $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, має зміст означення: узагальнена функція $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, дорівнює нулеві на інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$, якщо $\langle g,\varphi\rangle = 0$ для довільної основної функції $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, носій якої міститься в (a,b).

Надалі вважатимемо, що функція f, за якою будується оператор A_f, додатково задовольняє умови: вона є парною, двічі неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією,

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \{0,1,2\}\ \exists c_{\varepsilon,k} > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ |f^{(k)}(\sigma)| \le c_{\varepsilon,k}\rho(\varepsilon\sigma),$$

f – однорідна функція порядку $\gamma > 1$, тобто $f(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma f(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, для кожного $\lambda > 0$. Крім того, вважаємо, що $G_{\{\beta\}}(\sigma) = |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 4.20. *Нехай* $\tilde G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma), \quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Якщо $x\neq 0$, *то функція* $\tilde G$ *задовольняє нерівність*

$$|\tilde G(t,x)| \le ct^{\mu}|x|^{-2}, \quad \mu = 1-1/\gamma > 0, x\neq 0, \tag{4.101}$$

стала $c>0$ *не залежить від* t *(тут* Q_1, Q_2 *– функції, розглянуті раніше).*

Доведення. Оскільки

$$\tilde G(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma, \tag{4.102}$$

то за умови $x\neq 0$ проінтегруємо двічі інтеграл (4.102) частинами. У результаті знайдемо, що

$$\tilde G(t,x) = -(2\pi)^{-1}x^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}}[D^2_\sigma Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma) + 2D^1_\sigma Q_1(,\sigma)D^1_\sigma Q_2(\sigma) +$$
$$+Q_1(t,\sigma)D^2_\sigma Q_2(\sigma)]e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Далі врахуємо співвідношення:

$$D^1_\sigma Q_1(t,\sigma) = -tD^1_\sigma f(\sigma)\cdot e^{-tf(\sigma)},$$

$$D^2_\sigma Q_1(t,\sigma) = -t[D^2_\sigma f(\sigma) - t(D^1_\sigma f(\sigma))^2]e^{-tf(\sigma)},$$

$$D^1_\sigma Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k f(\sigma)}\Big)^{-2}\sum_{k=1}^m \mu_k t_k D^1_\sigma f(\sigma)e^{-t_k f(\sigma)},$$

$$D^2_\sigma Q_2(\sigma) = -2\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k f(\sigma)}\Big)^{-3}\Big(\sum_{k=1}^m \mu_k t_k D^1_\sigma f(\sigma)e^{-t_k f(\sigma)}\Big)^2 +$$
$$+\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k f(\sigma)}\Big)^{-2}\sum_{k=1}^m \mu_k t_k(D^2_\sigma f(\sigma) - t_k(D^1_\sigma f(\sigma))^2)e^{-t_k f(\sigma)}$$

і зазначимо, що вірною є нерівність $|Q_2(\sigma)|\le\tilde\mu$, $\sigma\in\mathbb{R}$, де $\tilde\mu = \Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k\Big)^{-1}$, оскільки, згідно з обмеженнями на параметри μ, μ_1, …, μ_m маємо $\mu > \sum\limits_{k=1}^m \mu_k$.

Урахувавши властивості функції f та властивість опуклості функції $\ln\rho$, прийдемо до нерівностей

$$|D^1_\sigma f(\sigma)|e^{-t_k f(\sigma)} \le \tilde{c}_{\varepsilon,1} e^{\ln\rho(\varepsilon\sigma) - t_1 \ln\rho(c_0\sigma)} \le$$

$$\le \tilde{c}_{\varepsilon,1} e^{\ln\rho(\varepsilon\sigma) - \ln\rho(c_0\{t_1\}\sigma)} \le \tilde{c}_{\varepsilon,1} e^{-\ln\rho((c_0\{t_1\}-\varepsilon)\sigma)} =$$

$$= \tilde{c}_{\varepsilon,1} e^{-\ln\rho(\overline{a}\sigma)} \le \tilde{b}, \quad k \in \{1,\dots,m\},$$

де $\tilde{a} = \dfrac{1}{2}c_0\{t_1\}$, якщо ε покласти рівним $\dfrac{1}{2}c_0\{t_1\}$. Звідси вже випливає оцінка $|D^1_\sigma Q_2(\sigma)| \le b$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Аналогічно доводимо нерівність

$$|D^2_\sigma Q_2(\sigma)| \le d \exp\Big\{-\frac{t_1}{2} f(\sigma)\Big\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Урахувавши вказані нерівності та вигляд функції $\tilde{G}$ знайдемо, що

$$|\tilde{G}(t,x)| \le L|x|^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[D^2_\sigma Q_1(t,\sigma) + |D^1_\sigma Q_1(t,\sigma)| +$$

$$+|Q_1(t,\sigma)| \exp\Big\{-\frac{t_1}{2} f(\sigma)\Big\}\Big] d\sigma \le \tilde{L}|x|^{-2}\Big[t \int\limits_R (|D^2_\sigma f(\sigma)| + |D^1_\sigma f(\sigma)| +$$

$$+(D^1_\sigma f(\sigma))^2) \exp\{-tf(\sigma)\} d\sigma + \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-tf(\sigma)\} \exp\Big\{-\frac{t_1}{2} f(\sigma)\Big\} d\sigma\Big], x \ne 0.$$

Із обмежень на функцію f випливає нерівність

$$|\tilde{G}(t,x)| \le L_1|x|^{-2}\Big[t \int\limits_R \exp\{\ln\rho(2\varepsilon\sigma) - \ln\rho(c_0 t^{1/\gamma}\sigma)\} d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-tf(\sigma)\} \exp\Big\{-\frac{t_1}{2} f(\sigma)\Big\} d\sigma\Big]$$

(тут вважаємо, що $t \in (0,1]$). Якщо взяти $\varepsilon = c_0 t^{1/\gamma}$, то

$$\exp\{\ln\rho(2\varepsilon\sigma) - \ln\rho(c_0 t^{1/\gamma}\sigma)\} \le \exp\{-\ln\rho((c_0 t^{1/\gamma} - 2\varepsilon)\sigma)\} =$$

$$= \exp\{-\ln\rho(\tilde{a}\sigma)\}, \quad \tilde{a} = c_0 t^{1/\gamma}/2.$$

Тоді

$$t\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{\ln\rho(2\varepsilon\sigma)-\ln\rho(c_0t^{1/\gamma}\sigma)\}d\sigma \le t\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\Big\{-\ln\rho\Big(\frac{c_0}{2}t^{1/\gamma}\sigma\Big)\Big\}d\sigma =$$

$$=\tilde{c}t^{1-1/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-\ln\rho(z)\}dz = c't^{1-1/\gamma}, \quad 1-1/\gamma>0.$$

Далі скористаємося формулою

$$e^{-tf(\sigma)} = -\int\limits_{\sigma}^{+\infty}(e^{-tf(z)})'_z dz = t\int\limits_{\sigma}^{+\infty} f'(z)e^{-tf(z)}dz =$$

$$= t\int\limits_{\sigma}^{+\infty} f'(z)e^{-f(t^{1/\gamma}z)}dz.$$

Оскільки

$$|f'(z)|e^{-f(t^{1/\gamma}z)} \le \tilde{c}_{\varepsilon,1}e^{\ln\rho(\varepsilon z)-\ln\rho(c_0t^{1/\gamma}z)} \le$$

$$\le \tilde{c}_{\varepsilon,1}e^{-\ln\rho((c_0t^{1/\gamma}-\varepsilon)z)} = \tilde{c}_{\varepsilon,1}e^{-\ln\rho\left(\frac{c_0}{2}t^{1/\gamma}z\right)}$$

для $\varepsilon = \dfrac{c_0}{2}t^{1/\gamma}$, то вірною є оцінка:

$$e^{-tf(\sigma)} \le t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f'(z)|e^{-f(t^{1/\gamma}z)}dz \le \tilde{c}_{\varepsilon,1}t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\ln\rho\left(\frac{c_0}{2}t^{1/\gamma}z\right)} =$$

$$=\tilde{\tilde{c}}_{\varepsilon,1}t^{1-1/\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\ln\rho(y)}dy = c'_{\varepsilon,1}t^{1-1/\gamma}, \forall\sigma\in\mathbb{R}.$$

Отже,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-tf(\sigma)}e^{-\frac{t_1}{2}f(\sigma)d\sigma \le \tilde{c}'_{\varepsilon,1}}t^{1-1/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t_1}{2}f(\sigma)}d\sigma = L_2t^{1-1/\gamma}.$$

Підсумовуючи, дістанемо нерівність

$$|\tilde{G}(t,x)| \le Mt^{\mu}|x|^{-2}, \mu = 1-1/\gamma>0, x\ne 0,$$

що й потрібно було довести.

Теорема 4.13. *Нехай* $g \in G'_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, *і* $g = 0$ *на інтервалі* $(a, b) \subset [0, 2\pi]$. *Тоді розв'язок задачі* (4.91), (4.98) *з граничною функцією* g *прямує до нуля при* $t \to +0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[c, d] \subset (a, b)$.

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Функції $\varphi(\xi)G(t, x - \xi)$, $(1 - \varphi(\xi))G(t, x - \xi)$, як функції аргументу ξ (при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$), належать до простору $G_{\{\beta\}}$, тому має зміст рівність

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \varphi(\xi)G(t, x - \xi)\rangle + \langle g(\xi), (1 - \varphi(\xi))G(t, x - \xi)\rangle.$$

Враховуючи, що g обертається в нуль на (a, b), а також включення $\operatorname{supp}(\varphi(\xi)G(t, x - \xi)) \subset (a, b)$, приходимо до співвідношення

$$u(t, x) = \langle g(\xi), \tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi)\rangle, \quad \tilde{\gamma}(\xi) = 1 - \varphi(\xi),$$

або

$$u(t, x) = t^{\nu}\langle g(\xi), t^{-\nu}\tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi)\rangle,\ \nu = 1 - 1/\gamma > 0, t > 0.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить перевірити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{\nu}\tilde{\gamma}(\xi)G(t, x - \xi)$ обмежена в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, рівномірно по t (при досить малих значень t) і $x \in [c, d]$, тобто, що

$$|D_{\xi}^{m}\Phi_{t,x}(\xi)| \leq cB^{m}m^{m\beta},\ m \in \mathbb{Z}_{+}, \tag{4.103}$$

де сталі c, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним вище способом. Зауважимо ще, що $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, тому оцінку (4.103) досить отримати для $\xi \in [0, 2\pi] \setminus [a_1, b_1]$.

Передусім отримаємо оцінки вигляду (4.103) для похідних функції

$$G(t, x - \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q(t, |k|)e^{ik(x-\xi)}.$$

На підставі формули Пуассона для підсумовування тригонометричних рядів (див. [227])

$$G(t, x - \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[F^{-1}[Q(t, \sigma)]](k)e^{ik(x-\xi)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} F[\tilde{G}(t,x)](k)e^{ik(x-\xi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(t, x-\xi+2k\pi). \qquad (4.104)$$

Цей ряд при $t > 0$ і $x \in [c,d]$ є аналітичною функцією змінної ξ, оскільки, як було доведено раніше, $G(t,\cdot) \in H\langle k!\rho_k\rangle$ при кожному $t > 0$.

Візьмемо обмежену область $Q \subset \mathbb{C}$, яка містить відрізок $[c,d]$ і не містить множину $[0,2\pi]\setminus[a_1,b_1]$, з гладкою межею ∂Q (∂Q не перетинає відрізок $[c,d]$). Тоді, згідно з інтегральною теоремою Коші,

$$D_\xi^m G(t, x-\xi) = \frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{\partial Q} \frac{G(t,x-z)}{(z-\xi)^{m+1}}dz,$$

$$x \in [c,d], \xi \in [0,2\pi]\setminus[a_1,b_1].$$

Звідси дістаємо, що

$$|D_\xi^m G(t,x-\xi) \ \leq \frac{m!}{2\pi}\frac{l}{A^{m+1}}\max_{z\in\partial Q}|G(t,x-z)|,$$

де l – довжина контура ∂Q, $A = \inf|z-\xi|$, $z \in \partial Q$, $\xi \in [0,2\pi]\setminus[a_1,b_1]$. Для того, щоб здійснити оцінку $\max\limits_{z\in\partial Q}|G(t,x-z)|$, скористаємося формулою (4.104). Оскільки $x \in [c,d]$, $\xi \in [0,2\pi]\setminus[a_1,b_1]$, то $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1-c|,|d-b_1|\}$, то, згідно з оцінкою (4.101) та формулою (4.104)

$$|\tilde{G}(t,x-\xi+2\pi k)| \leq ct^\nu|x-\xi+2\pi k|^{-2}, \quad \nu = 1-1/\gamma > 0.$$

За рахунок вибору відрізка $[a_1,b_1]$ можна підібрати число b_0, $0 < b_0 < 1$, так, що

$$|x-\xi+2\pi k| \geq a_0 + b_0|k|, \quad x \in [c,d], \xi \in [0,2\pi]\setminus[a_1,b_1].$$

Тоді

$$t^{-\nu}|G(t,x-\xi)| \leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x-\xi+2\pi k|^{-2} \leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a_0+b_0|k|)^{-2} \equiv M < \infty,$$

стала M не залежить від t, x, ξ. Взявши до уваги неперервність $G(t,x-z)$ за сукупністю змінних $t > 0$, $x \in [c,d]$, $z \in \overline{Q}$, підберемо область $Q \subset \mathbb{C}$ так, щоб справджувалася нерівність $t^{-\nu}|G(t,x-z)| \leq \tilde{M}$, $\tilde{M} = M+1$.

Отже,

$$t^{-\nu}|D_\xi^m G(t,x-\xi)| \le c_1 B_1^m m! \le c_2 B_2^m m^m, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.105}$$

Оскільки $\varphi \in G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$, то також

$$|D_\xi^m \varphi(\xi)| \le c_3 B_3^m m^{m\beta}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.106}$$

З (4.105), (4.106) випливають наступні оцінки

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \le t^{-\nu} \sum_{l=0}^m C_m^l |D_\xi^l \gamma(\xi)| \cdot |D_\xi^{m-l} G(t,x-\xi)| \le c_4 B_4^m m^{m\beta}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_4 = c_2(1+c_3)$, $B_4 = 2\max\{B_2, B_3\}$, сталі c_4, $B_4 > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним вище способом. Твердження доведено.

Наслідок 4.8. *Нехай $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k!\rho_k \rangle$, $\beta > 1$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (4.91), (4.98) *з граничною функцією g. Якщо $g = 0$ на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c,d] \subset (a,b) \subset [0,2\pi]$.

Символом $M_{\{\beta\}}$ позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$.

Теорема 4.14 (властивість локалізації). *Нехай $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k!\rho_k \rangle$, $\beta > 1$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі* (4.91), (4.98) *з граничною функцією g. Якщо узагальнена функція g збігається на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ з 2π-періодичною функцією $\psi \in M_{\{\beta\}}$, то на довільному проміжку $[c,d] \subset (a,b) \subset [0,2\pi]$ граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \dots - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = \psi(x) \tag{4.107}$$

виконуєтьcя рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Доведення. Нехай φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 4.13. Оскільки $\varphi(g-\psi)=0$ на (a,b), то $\varphi(g-\psi)=0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)g=0$ на $[a_1,b_1]$. З наслідку 4.8 випливає, що граничні співвідношення

$$\begin{gathered}\lim_{t\to+0}\langle\varphi(g-\psi),G(t,x-\xi)\rangle=0,\\ \lim_{t\to+0}\langle(1-\varphi)g,G(t,x-\xi)\rangle=0,\\ \sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\langle\varphi(g-\psi),G(t,x-\xi)\rangle=0,\\ \sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\langle(1-\varphi)g,G(t,x-\xi)\rangle=0\end{gathered}\tag{4.108}$$

виконуються рівномірно відносно $x\in[c,d]$.

Крім того,

$$u(t,x)=\langle g,G(t,x-\xi)\rangle=\langle\varphi(g-\psi),G(t,x-\xi)\rangle+$$

$$+\langle(1-\varphi)g,G(t,x-\xi)\rangle+\langle\varphi\psi,G(t,x-\xi)\rangle.$$

Урахувавши (4.108) робимо висновок, що для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle\varphi\psi,G(t,x-\xi)\rangle-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\lim_{t\to t_n}\langle\varphi\psi,G(t,x-\xi)\rangle=\psi(x)$$

виконується рівномірно відносно $x\in[c,d]$.

Оскільки ψ – мультиплікатор у просторі $G_{\{\beta\}}$, φ – фінітна функція з цього ж простору, то $\varphi\psi\in G_{\{\beta\}}$, $\beta>1$. Тоді

$$\langle\varphi\psi,G(t,x-\xi)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(t,x-\xi)(\varphi\psi)(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_1(t,|k|)Q_2(|k|)e^{ik(x-\xi)}(\varphi\psi)(\xi)d\xi=$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi) Q_1(t,|k|) Q_2(|k|) e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x),$$

$$c_k(\varphi\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\varphi\psi)(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Зазначимо, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x)$ збігається рівномірно по t на $[0,T]$ та рівномірно відносно $x \in [0,2\pi]$ (доведення цієї властивості здійснюється за схемою доведення леми 4.19). Тоді

$$\lim_{t\to t_0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(t_0,x), \quad t_0 \in [0,T].$$

Звідси випливають співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle \varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \langle \varphi\psi, G(t,x-\xi)\rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,|k|)\Big) Q_2(|k|)\right] c_k(\varphi\psi) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,|k|)}{\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,|k|)} c_k(\varphi\psi) e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi\psi) e^{ikx} = (\varphi\psi)(x),$$

які справджуються рівномірно відносно $x \in [0,2\pi]$. Оскільки $\varphi \cdot \psi = \psi$ на $[c,d] \subset [0,2\pi]$, то співвідношення (4.107) виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Теорему доведено.

4.6. Багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку

І.М. Гельфанд та Г.Е. Шилов у відомій монографії [189] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з φ, то маємо простір Л. Шварца $S \equiv S(\mathbb{R})$ швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Простори типу S широко використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часу) коефіцієнтами. У цьому підрозділі встановлено, що простори типу S та S' (простори, топологічно спряжені до S) є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь, які містять оператор диференціювання нескінченного порядку вигляду $\varphi(D) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D^k$, $D = d/dx$, побудованого за нескінченно диференційовною функцією $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$; при цьому з'ясовано, що $\varphi(D)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним символом. Досліджені властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором $\varphi(D)$, встановлено розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу ультрарозподілів (типу S'), знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком.

4.6.1. Простори типу S та S'

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо (див. [189])

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,\Big|\, \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [189]: S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leq c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, c_2, B_1, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій φ, які *допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність*

$$|\varphi(x+iy)| \leq c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, c_3, a, b > 0, \{x, y\} \subset \mathbb{R}. \qquad (4.109)$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha+\beta \geq 1$; для довільних α, β правильною є рівність: $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [224].

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \overline{A} > A \; \forall \overline{B} > B: \;\; |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \; \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \dots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, в S_α^β можна ввести топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [189].

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргументу T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [189]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції

$\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [189] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні); вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \Big\{\psi : \ \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \varphi \in S_\alpha^\beta\Big\}.$$

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $(S_\alpha^\beta)'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay+b)$, $a \neq 0$, добуток αf, де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргументу T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi)$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі S_α^β випливає, що згортка $f*\varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β.

Оскільки $F^{-1}[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$ (F^{-1} – обернене перетворення Фур'є), а також і $F[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом з функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \ \varphi \in S_\beta^\alpha.$$

Звідси випливає, що $F[f] \in (S_\beta^\alpha)'$, якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$.

Символом $(S_{\alpha,*}^\beta)'$ позначимо сукупність усіх згортувачів у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_{\alpha,*}^\beta)'$, то (див. [189]), для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ – мультиплікатор у просторі S_β^α.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій з простору S_α^β , $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha+\beta \geq 1$, в $\mathbb{C}$, позначимо через $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$. Із результатів, наведених в [228], випливає, що $S_\alpha^\beta(\mathbb{C}) = W_M^\Omega$, де W_M^Ω – один із просторів типу W, введених Б.Л. Гуревичем [229] (див. також [8]), побудований за функціями $M(x) = x^{1/\alpha}$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $\{x, y\} \subset (0, \infty)$. У просторах W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі зліченно-нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, a, $b > 0$; зокрема, у випадку просторів W_M^Ω, побудованих за вказаними функціями, система норм у відповідних просторах $W_{M,a}^{\Omega,b}$ визначається формулами

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}}(|\varphi(z)| \exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha} + (b+\rho)|y|^{1/(1-\beta)}\}),$$
$$\varphi \in S_\alpha^\beta(\mathbb{C}) \equiv W_M^\Omega, \ z = x+iy, \ \delta \in \{1/2, 1/3, \dots\}, \ \rho \in \mathbb{N}.$$

Звідси та з (4.109) випливає (див. [189]), що послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta \geq 1$, збігається до нуля в S_α^β тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, збігається до нуля в $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$, тобто [8] рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$, зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν. Мультиплікатором у просторі $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C}: \ \ |f(z)| \leq c_\varepsilon \exp\{\varepsilon|x|^{1/\alpha} + \varepsilon|y|^{1/(1-\beta)}\}.$$

4.6.2. Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу S

Нехай $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, – деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, задано оператор диференціювання нескінченного порядку

$$g(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n, \ D = d/dx,$$

якщо для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ ряд

$$\psi(x) \equiv g(D)\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

зображає основну функцію з простору S_α^β.

Теорема 4.15. *Якщо функція g – мультиплікатор у просторі S_β^α, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, то в просторі S_α^β визначений і неперервний оператор $g(D) \equiv A_g$, при цьому*

$$A_g \varphi(x) = F^{-1}[g(\sigma) F[\varphi](\sigma)](x), \ \varphi \in S_\alpha^\beta. \tag{4.110}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in S_\alpha^\beta$; тоді

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (F^{-1}[\sigma F[\varphi]])^n (x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{-1}[\sigma^n F[\varphi]](x).$$

Доведемо, що $\psi \in S_\alpha^\beta$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) в просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить встановити, що $F[\psi] \in S_\beta^\alpha$. Запишемо (поки-що формально) співвідношення

$$F[\psi](\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^n F[\varphi](\sigma) = g(\sigma) F[\varphi](\sigma). \tag{4.111}$$

Оскільки $F[\varphi] \in S_\beta^\alpha$, а g – мультиплікатор у просторі S_β^α, то $gF[\varphi] \in S_\beta^\alpha$. Отже, залишається довести коректність проведених перетворень та обгрунтувати правильність формул (4.111). Функція $gF[\varphi]$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, при цьому $(gF[\varphi])(z) \in S_\beta^\alpha(\mathbb{C})$, $z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. Отже, для доведення твердження досить встановити, що

$$r_n(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k F[\varphi](z) \to 0,\ n \to \infty$$

у просторі $S_\beta^\alpha(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що: 1) $\{r_n, n \geq 1\} \subset S_\beta^\alpha(\mathbb{C})$; 2) послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому справджуються нерівності

$$|r_n(z)| \leq c \exp\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\},\ z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

з деякими сталими a, b, $c > 0$, не залежними від n.

Коефіцієнти Тейлора c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою Коші

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умови теореми (g – мультиплікатор в S_β^α) випливає, що

$$|c_n| \leq c_\varepsilon \inf_R (R^{-n/2} \exp\{\varepsilon R^{1/\beta}\}) \cdot \inf_R (R^{-n/2} \exp\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\}),\ \varepsilon > 0.$$

Оцінимо окремо коефіцієнти c_{2k} та c_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \inf_R (R^{-k} \exp\{\varepsilon R^{1/\beta}\}) \cdot \inf_R (R^{-k} \exp\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\}).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k}, \quad L = \left(\frac{e}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{e}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.112}$$

Аналогічно,

$$|c_{2k+1}| \leq \tilde{c}_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k}. \tag{4.113}$$

Далі здійснимо оцінку функції

$$\alpha_n(z) := |c_n z^n F[\varphi](z)|, \quad z \in \mathbb{C},$$

при фіксованому $n \in \mathbb{N}$, якщо $n = 2k$ та $n = 2k+1$, врахувавши при цьому нерівності (4.112) та (4.113) відповідно.

Нехай $n = 2k$. Оскільки $F[\varphi] \in S_{\beta}^{\alpha}$, то

$$\exists c, a, b > 0 \ \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \ |F[\varphi](z)| \leq c \exp\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}.$$

Крім того,

$$|z|^{2k} = (\sigma^2 + \tau^2)^k \leq (2\max\{\sigma^2, \tau^2\})^k \leq 2^k(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}).$$

Отже,

$$\alpha_{2k}(z) \leq cc_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k}(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}) e^{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} =$$

$$= cc_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k}(k^{-(1-\alpha+\beta)k}|\sigma|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} +$$

$$+ k^{-(1-\alpha+\beta)k}|\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}}) \equiv$$

$$\equiv cc_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k}(\Delta_k'(z) + \Delta_k''(z)).$$

Далі врахуємо нерівність

$$|\sigma|^{2k} e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}} \leq L^k k^{2k\beta}, \quad L = \Big(\frac{4\beta}{a}\Big)^{2\beta},$$

застосувавши яку, знайдемо, що

$$\Delta_k'(z) = k^{-(1-\alpha+\beta)k}|\sigma|^{2k} \exp\{-a|\sigma|^{1/\beta}\} \exp\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_1 L_1^k k^{2k\beta} k^{-(1-\alpha+\beta)k} \exp\Big\{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}\Big\} \exp\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}.$$

Оскільки $\alpha + \beta = 1$, то $2\beta - (1 - \alpha + \beta) = 0$, тому

$$\Delta_k'(z) \leq \tilde{c}_1 L_1^k \exp\Big\{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}\Big\} \exp\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}.$$

Оцінимо $\Delta''_k(z)$. Маємо, що

$$|\tau|^{2k}\exp\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\} = |\tau|^{2k}\exp\{-|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}\exp\{(b+1)|\tau|\}^{1/(1-\alpha)} \leq$$

$$\leq L_2^k k^{2(1-\alpha)k}\exp\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}, \quad L_2 = (2(a-\alpha))^{2(1+\alpha)}.$$

Тоді

$$\Delta''_k(z) \leq \tilde{c}_2 L_2^k k^{2(1-\alpha)} k^{-(1-\alpha+\beta)k}\exp\{-a|\sigma|^{1/\beta}\}\exp\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\} =$$

$$= \tilde{c}_2 L_2^k \exp\{-a|\sigma|^{1/\beta}\}\exp\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\}$$

(тут знову врахована умова $\alpha+\beta=1$). Урахувавши ці нерівності знайдемо, що

$$\alpha_{2k}(z) \leq \tilde{c}L_2^{2k}(\sqrt{\varepsilon})^{2\tilde{\gamma}k}\exp\{-a|\sigma|^{1/\beta}+b_1|\tau|^{1/(1-\alpha)}\},$$

$$\tilde{\gamma} = 1-\alpha+\beta = 2(1-\alpha) = 2\beta, \quad a_1 = a/2,\ b_1 = b+1.$$

Аналогічно оцінюємо функції $\alpha_{2k+1}(z)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$. В результаті прийдемо до нерівності

$$\alpha_n(z) \leq \tilde{\beta}\tilde{A}^n(\sqrt{\varepsilon})^{\tilde{\gamma}n}\exp\{-a_2|\sigma|^{1/\beta}+b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ z \in \mathbb{C},$$

причому всі сталі не залежать від n.

Візьмемо $\varepsilon = (2\tilde{A})^{-2/\tilde{\gamma}}$. Тоді $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\tilde{A}^k(\sqrt{\varepsilon})^{\tilde{\gamma}k} = 2^{-n}$, тобто

$$|r_n(z)| \leq \frac{\tilde{\beta}}{2^n}\exp\{-a_2|\sigma|^{1/\beta}+b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\},\ z \in \mathbb{C}. \tag{4.114}$$

Із (4.114) випливає, що $r_n \in S_\beta^\alpha(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ (тобто умова 1) виконується). Із (4.114) випливає також, що послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому

$$|r_n(z)| \leq \tilde{\beta}\exp\{-a_2|\sigma|^{1/\beta}+b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\},\ n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C},$$

сталі $\tilde{\beta}$, a_2, $b_2 > 0$ не залежать від n. Цим доведено, що оператор $g(D) \equiv A_g$ визначений в просторі S_α^β, кожну обмежену множину цього простору він переводить в обмежену множину цього ж простору. Таким чином, вказаний оператор неперервний в просторі S_α^β, при цьому із співвідношення (4.111) випливає рівність (4.110).

Теорема доведена.

Зауваження 4.9. *Знайдена умова на функцію g є не лише достатньою, але й необхідною для того, щоб оператор A_g був неперервним у просторі S_α^β; при цьому A_g можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним (цілим) символом (функцією g).*

4.6.3. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_g u, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{4.115}$$

де A_g – псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією g, яка є мультиплікатором у просторі $S_\omega^{1-\omega}$, $\omega \in (0,1)$ і такою, що $e^g \in S_\omega^{1-\omega}$. Символом $P_\omega^{1-\omega}$ позначатимемо клас функцій g, які задовольняють вказані умови. Наприклад, нехай $g(z) = P(z)$, $z = x + iy$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists c > 0 \; \forall x \in R: \;\; \mathrm{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що P – мультиплікатор у просторі $S_\omega^{1-\omega}$, де $\omega = 1/(2b)$. Крім того,

$$|e^{P(x)}| = e^{\mathrm{Re} P(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}}, \; x \in \mathbb{R};$$

$$\exists c_1 > 0 \, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \;\; |e^{P(z)}| \leq e^{|P(z)|} \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді, скориставшись рядом теорем з [189], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа, дістанемо, що ціла функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|e^{P(z)}| \leq c_0 \exp\{-c_1|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}\},\ c_0, c_2, c_3 > 0. \tag{4.116}$$

З нерівності (4.116) та характеристики просторів S_α^β випливає, що $e^P \in S_\omega^{1-\omega}$, $\omega = 1/(2b)$.

Для рівняння (4.115) задамо багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{4.117}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $f \in S_\omega^{1-\omega}$.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0,T], S_\omega^{1-\omega})$ задачі (4.115), (4.117) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F[v(t,\cdot)](x)$. Для функції v: $\Omega \to \mathbb{R}$ дістанемо таку задачу з параметром σ:

$$\frac{\partial v(t,\sigma)}{\partial t} = g(\sigma) v(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4.118}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{f}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{4.119}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F^{-1}[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (4.118) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c \exp\{t g(\sigma)\},\ (t,\sigma) \in \Omega, \tag{4.120}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (4.119). Підставивши (4.120) в (4.119) знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k g(\sigma)\}\Big)^{-1},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (4.115), (4.117) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{tg(\sigma)\},\ Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k g(\sigma)\}\Big)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально знайдемо, що

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x),\ (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\Big)e^{i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma\Big)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{4.121}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а, отже, правильність формули (4.121), випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, передусім дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргументу σ.

Оскільки $g \in P_{\omega}^{1-\omega}$, то існують числа c_0, a, $b > 0$ такі, що

$$|e^{g(z)}| \le c_0 e^{-a|\sigma|^{1/\omega} + b|\tau|^{1/\omega}},\ z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$|e^{tg(z)}| = |e^{g(z)}|^t \le [c_0 e^{-a|\sigma|^{1/\omega} + b|\tau|^{1/\omega}}]^t \le c e^{-at|\sigma|^{1/\omega} + bt|\tau|^{1/\omega}}, c = \max\{1, c_0^T\}. \tag{4.122}$$

Із нерівності (4.122) випливає, що $Q_1(t,\cdot) \in S_{\omega}^{1-\omega}$ при кожному $t \in (0,T]$.

Проаналізувавши доведення теореми 3 з [189, с. 259–260] безпосередньо переконуємося в тому, що для функції $Q_1(t,\sigma)$ та її похідних (за змінною $\sigma \in \mathbb{R}$) справджуються оцінки

$$|D_\sigma^k Q_1(t,\sigma)| \leq cA^k t^{k\omega} k^{k(1-\omega)} \exp\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|^{1/\omega}\}, \tag{4.123}$$

де сталі c, A, $\tilde{c}_0 > 0$ не залежать від t.

Лема 4.21. *Функція Q_2 є мультиплікатором у просторі S_ω^2.*

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2. З цією метою скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_x^s F(g(x)) = \sum_{p=1}^{s} \frac{d^p}{dg^p} F(g) \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \Big(\frac{d}{dx} g(x)\Big)^{p_1} \dots \Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l} g(x)\Big)^{p_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l = s$, $p_1 + \dots + p_l = p$), у якій покладемо $F = g^{-1}$, $g = R$,

$$R(x) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Тоді $Q_2(x) = F(R(x))$ і

$$\frac{d^p}{dg^p} F(R) = \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} = (-1)^p p! R^{-(p+1)}.$$

Урахувавши нерівності (4.123), знайдемо, що

$$\Big|\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l} R(x)\Big| \leq \frac{1}{l!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \Big|\frac{d^l}{dx^l} Q_1(t_k, x)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{c}{l!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k A^l t^{l\omega} l^{l(1-\omega)} \exp\{-\tilde{c}_0 t_k |x|^{1/\omega}\} \leq \tilde{c}\tilde{A}^l t^{l\omega} \exp\{-\tilde{c}_0 t_k |x|^{1/\omega}\},$$

де $\tilde{A} = Ae$, $\tilde{c} = c\sum_{k=1}^{m} \mu_k$ (тут враховано, що $1/l! \leq e^l/l^l$). Тоді

$$\Big|\Big(\frac{d}{dx} R(x)\Big)^{p_1}\Big| \dots \Big|\Big(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l} R(x)\Big)^{p_l}\Big| \leq$$

$$\leq \tilde{c}^{p_1}\tilde{A}^{p_1}\tilde{T}^{p_1\omega}\exp\{-\tilde{c}_0 t_1 p_1|x|^{1/\omega}\}\dots$$

$$\tilde{c}^{p_l}\tilde{A}^{p_l}\tilde{T}^{p_l\omega}\exp\{-\tilde{c}_0 t_1 p_l|x|^{1/\omega}\} \leq \tilde{c}^{p_1+\dots+p_l}\tilde{A}^{p_1+2p_2+\dots+lp_l}\times$$

$$\times\tilde{T}^{(p_1+\dots+p_l)\omega}\exp\{-(p_1+\dots+p_l)t_1|x|^{1/\omega}\} \leq$$

$$\leq \tilde{c}^{p}\tilde{A}^{s}\tilde{T}^{p\omega}\exp\{-t_1 p|x|^{1/\omega}\} \leq c'^{s}\exp\{-t_1|x|^{1/\omega}\},$$

$$\tilde{c}' = \max\{1, \tilde{c}\tilde{A}\tilde{T}^{\omega}\},\ \tilde{T} = \max\{1, T\}, t \in (0, T].$$

З урахуванням (4.123) маємо нерівності

$$Q_1(t_k, x) \leq c_0\exp\{-\tilde{c}_0 t_k|x|^{1/\omega}\} \leq c_0,\ k \in \{1, \dots, m\}, x \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$R(x) = \mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k, x) \geq \mu - c_0\sum_{k=1}^{m}\mu_k = \mu_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Надалі вважатимемо, що $\mu > c_0\sum_{k=1}^{m}\mu_k$. Отже, $\mu_0 > 0$ і

$$|R^{-(p+1)}(x)| \leq \mu_0^{-(p+1)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Підсумовуючи, знаходимо, що

$$|D_x^s Q_2(x)| = |D_x^s F(R(x))| \leq b_0 B_0^s (s!)^2\exp\{-t_1|x|^{1/\omega}\} \leq$$

$$\leq bB^s s^{2s}\exp\{-t_1|x|^{1/\omega}\}, \quad s \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Із останньої нерівності, обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ та характеристики просторів типу S випливає, що Q_2 є мультиплікатором в просторі S_ω^2.

Лема доведена.

Наслідок 4.9. *При фіксованому $t \in (0, T]$ функція $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) \cdot Q_2(\sigma)$, як функція $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом простору S_ω^2, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq cB^s s^{2s}\exp\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|^{1/\omega}\},\ s \in \mathbb{N}, \tag{4.124}$$

де сталі c, B, $\tilde{c}_0 > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[S_{\omega}^{2}] = S_{2}^{\omega}$ знайдемо, що $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)] \in S_{2}^{\omega}$ при кожному $t \in (0,T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t.

Передусім зазначимо, що з (4.124) випливають нерівності

$$|\sigma^k D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \le cB^s s^{2s}|\sigma|^k \exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\} \le$$

$$\le cB^s s^{2s}\sup_{|\sigma|}\Big(|\sigma|^k \exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}\Big)\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\} \le$$

$$\le \tilde{c}A^k B^s k^{k\omega} s^{2s} t^{-k\omega}\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\},\ \{k,s\}\subset \mathbb{Z}_+, \tag{4.125}$$

$\tilde{c}$, $\tilde{c}_0$, A, $B > 0$.

Далі скористаємося співвідношеннями

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s}F[(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s}\int_{\mathbb{R}}(\sigma^s\varphi(\sigma))^{(k)}e^{ix\sigma}d\sigma, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+, \varphi\in S_{\omega}^{2}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1}(-1)^s i^{k+s}\int_{\mathbb{R}}(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}e^{ix\sigma}d\sigma.$$

Зазначимо, що для послідовності $m_{ks} = k^{k\omega}s^{2s}$, як випливає із результатів, одержаних в [189, с. 237–243], справджується нерівність

$$ks\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \le \tilde{\gamma}(k+s), \quad \tilde{\gamma} > 0, \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Тоді, застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (4.125) та останню нерівність знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| = \Big|\sum_{p=0}^{k} C_k^p(\sigma^s)^{(p)}Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\Big| \le$$

$$\le |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2}s(s-1)\times$$
$$\times|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \dots \le cA^sB^kt^{-s\omega}k^{2k}s^{s\omega}\times$$
$$\times\Big(1+\frac{ks}{(A/t^\omega)B}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}+\frac{1}{2!}\frac{ks}{(A/t^\omega)^2B^2}\frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}}\times$$
$$\times(k-1)(s-1)\frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}}+\dots\Big)\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}\le$$
$$\le cA^sB^kt^{-s\omega}k^{2k}s^{s\omega}\Big(1+\frac{\tilde{\gamma}}{(A/t^\omega)B}(k+s)+$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\tilde{\gamma}^2}{(A/t^\omega)^2B^2}(k+s)^2+\dots\Big)\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}=$$
$$=cA^sB^kt^{-s\omega}k^{2k}s^{s\omega}\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}t^\omega}{AB}(k+s)\Big\}\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}\le$$
$$\le cA_1^sB_1^kt^{-s\omega}k^{2k}s^{s\omega}\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\},$$
$$A_1=A\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}T^\omega}{AB}\Big\}, B_1=B\exp\Big\{\frac{\tilde{\gamma}T^\omega}{AB}\Big\}.$$

Отже,

$$|x^kD_x^sG(t,x)|\le(2\pi)^{-1}cA_1^sB_1^kt^{-s\omega}k^{2k}s^{s\omega}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\Big\{-\frac{\tilde{c}_0}{2}t|\sigma|^{1/\omega}\Big\}d\sigma=$$
$$=\tilde{c}A_1^sB_1^kt^{-(s+1)\omega}k^{2k}s^{s\omega},\ \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^sG(t,x)|\le\tilde{\tilde{c}}A_1^st^{-(s+1)\omega}s^{s\omega}\inf_k\frac{B_1^kk^{2k}}{|x|^k}\le$$
$$\le\tilde{\tilde{c}}A_1^st^{-(s+1)\omega}s^{s\omega}\exp\{-\alpha_0|x|^{1/2}\},\ x\in\mathbb{R},t\in(0,T],$$

сталі $\tilde{\tilde{c}}$, A_1, $\alpha_0>0$ не залежать від t. Тут ми скористалися відомою нерівністю з [189]:

$$\inf_k\frac{L^kk^{k\alpha}}{|x|^k}\le d_0\exp\{-d|x|^{1/\alpha}\}, d, d_0, \alpha>0.$$

Таким чином, правильним є наступне твердження.

Лема 4.22. *Для функції $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega = (0,T] \times \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \tilde{\tilde{c}} t^{-(s+1)\omega} A_1^s s^{s\omega} \exp\{-\alpha_0 |x|^{1/2}\}, s \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $\tilde{\tilde{c}}$, A_1, $\alpha_0 > 0$ не залежать від t.

Інші властивості функції G наведемо в наступному твердженні.

Лема 4.23. *1. Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_2^ω, диференційовна по t.*

2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}, \quad f \in (S_2^\omega)',\ t \in (0,T].$$

3. У просторі $(S_2^\omega)'$ справджуються граничні співвідношення

$$\text{а)} \quad \mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta; \tag{4.126}$$

$$\text{б)} \quad \mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \omega(t,\cdot) = f, \tag{4.127}$$

де $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S_{2,*}^\omega)'$, $(t,x) \in \Omega$, δ – дельта-функція Дірака.

4. Функція $G(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (4.115).

Доведення. 1. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t, із значеннями в просторі $F[S_2^\omega] = S_\omega^2$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma),\ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що

1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(g(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$,
рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\overline{B}^s s^{2s} \exp\{-\overline{a}|\sigma|^{1/\omega}\}$,
де сталі $\overline{c}$, $\overline{a}$, $\overline{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = g(\sigma)Q(t + \theta\Delta t, \sigma),\ 0 < \theta < 1, t + \theta\Delta t \leq T.$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l g(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t + \theta\Delta t, \sigma)$$

і

$$D_\sigma^s\Big(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l g(\sigma)[D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l}Q(t, +\theta\Delta t, \sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1}Q(t, +\theta_1\Delta t, \sigma)\theta\Delta t,\ 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (4.123) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1}Q(t, +\theta_1\Delta t, \sigma)\theta\Delta t \to 0,\ \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big)$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Функція g – мультиплікатор у просторі $S_\omega^{1-\omega}$, тому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}:\ |g(z)| \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\sigma|^{1/\omega} + \varepsilon|\tau|^{1/\omega}}. \tag{4.128}$$

Внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$g^{(n)}(\sigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{(z-\sigma)^{n+1}}dz,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Тоді, внаслідок (4.128) прийдемо до нерівностей

$$|g^{(n)}(\sigma)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \Gamma_R} |g(z)| \leq c_\varepsilon n! R^{-n} e^{\varepsilon R^{1/\omega}} e^{\varepsilon |\sigma_1|^{1/\omega}},$$

де σ_1 – точка максимуму функції $\exp\{\varepsilon|\xi|^{1/\omega}\}$, $\xi \in [\sigma - R, \sigma + R]$ (зазначимо, що $\sigma_1 \in \{0, \sigma - R, \sigma + R\}$). Оскільки $R > 0$ – довільне, то виберемо R так, щоб відношення $e^{\varepsilon R^{1/\omega}}/R^n$ досягало свого мінімуму. Безпосередньо переконуємося в тому, що

$$\min R^{-n} e^{\varepsilon R^{1/\omega}} = B^n n^{-n\omega}, \ B = e^\omega/\omega^\omega,$$

причому вказаний мінімум досягається при $R = (n\omega/\varepsilon)^\omega$. Далі, замінимо σ_1 на $\sigma + \theta R$, де $|\theta| \leq 1$; тоді

$$e^{\varepsilon|\sigma_1|^{1/\omega}} = e^{\varepsilon|\sigma + \theta R|^{1/\omega}} \leq e^{\varepsilon_1 |\sigma|^{1/\omega}} e^{\varepsilon_2 R^{1/\omega}}, \ \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

ε_1 як завгодно мало відрізняється від ε. Крім того, $R^{1/\omega} = n\omega/\varepsilon = c_1 n$. Урахувавши тепер формулу Стірлінга прийдемо до нерівності

$$|g^{(n)}(\sigma)| \leq \tilde{c} B_1^n n^{n(1-\omega)} e^{\varepsilon_1 |\sigma|^{1/\omega}}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.129}$$

Із (4.129) та оцінок, які задовольняють похідні функції $Q(t, \sigma)$ випливає, що

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l g(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t + \theta\Delta t, \sigma) \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{c}} \sum_{l=0}^{s} C_s^l B_1^l l^{l(1-\omega)} B^{s-l} (s-l)^{2(s-l)} e^{-(\tilde{c}_0(t+\theta\Delta t) - \varepsilon_1)|\sigma|^{1/\omega}} \leq \bar{c} \overline{B}^s s^{2s} E^{-(\tilde{c}_0 t/2 - \varepsilon_1)|\sigma|^{1/\omega}};$$

тут вважаємо Δt настільки малим, що виконується нерівність $t + \theta\Delta t \geq t/2$ ($t > 0$ – фіксоване). Далі покладемо $\varepsilon_1 = \tilde{c}_0 t/4$; тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c} \overline{B}^s s^{2s} e^{-\bar{a}|\sigma|^{1/\omega}}, \ s \in \mathbb{Z}_+, \bar{a} = \tilde{c}_0 t/4,$$

причому сталі $\bar{c}$, $\bar{a}$, $\overline{B} > 0$ не залежать від Δt (для досить малих значень Δt). Таким чином, умова 2) також виконується.

Твердження доведено.

2. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$f * G(t,\cdot) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle,\ \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[f * G(t+\Delta t,x) - (f * G(t,x))] =$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\Big\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\Big\rangle.$$

Внаслідок твердження 1 леми 4.23 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору S_2^ω, тому, з урахуванням неперервності функціоналу f маємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \Big\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\Big\rangle = \Big\langle f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\Big\rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно довести.

3. а). Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі S_2^ω, співвідношення (4.126) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu\lim_{t\to+0}F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{4.130}$$

у просторі $(S_2^\omega)'$. Урахувавши зображення функції G, (4.130) подамо у вигляді

$$\mu\lim_{t\to+0}Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}Q(t,\cdot) = 1. \tag{4.131}$$

Для доведення (4.131) візьмемо довільну функцію $\varphi \in S_\omega^2$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l,\sigma)\Big]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\right]\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\varphi(\sigma)d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\varphi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (4.131) виконується в просторі $(S^2_\omega)'$, а, отже, правильним є співвідношення (4.126).

3. б). Оскільки

$$\omega(t,x) := f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad f \in (S^\omega_{2,*})',$$

то з властивості неперервності $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі S^ω_2, випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в цьому ж просторі. Тоді, врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу

$$F[f * G] = F[f]\cdot F[G] = F[f]\cdot Q,$$

яка правильна для довільної узагальненої функції f з класу $(S^\omega_{2,*})'$, від (4.127) перейдемо до співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} F[\omega(t,\cdot)] = F[f]$$

у просторі $(S^2_\omega)'$, або

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1,$$

яке, за доведеним раніше (див. (4.131)), справджується в цьому просторі. Цим доведено, що в просторі $(S_2^\omega)'$ співвідношення (4.127) виконується.

Твердження доведено.

4. Функція G є розв'язком рівняння (4.115). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

З іншого боку,

$$A_g G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[g(\sigma)F_{x\to\sigma}[G(t,x)]] = F^{-1}[g(\sigma)Q(t,\sigma)] = F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\Big].$$

Звідси випливає, що функція G задовольняє рівняння (4.115). Лема доведена.

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m-точкової) нелокальної за часом задачі для рівняння (4.115).

Співвідношення (4.127) дозволяє ставити для рівняння (4.115) m-точкову за часом задачу так: знайти розв'язок u рівняння (4.115), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^\omega)', \tag{4.132}$$

де граничні співвідношення розглядаються в просторі $(S_2^\omega)'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, $\dots$, μ_m, t_1, $\dots$, t_m такі ж, як і у випадку задачі (4.115), (4.117)). Із наведених вище результатів випливає наступне твердження.

Теорема 4.16. *m-точкова задача* (4.115), (4.132) *є розв'язною. Розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle,$$

де $G(t,\cdot)$ – фундаментальний розв'язок m-точкової за часом задачі для рівняння (4.115), *$u(t,\cdot) \in S_2^\omega$ при кожному $t \in (0,T]$.*

Зауваження 4.10. *У випадку еволюційного рівняння* (4.115) *з оператором $\varphi(D) = P(D)$, де $D = i\,d/dx$, $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$,* *над полем комплексних чисел, який задовольняє умову*

$$\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ \ \mathrm{Re}P(x) \le -c|x|^{2b},$$

для якого ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача, правильними є результати, аналогічні сформульованим вище. При цьому функція $G(t,x)$*, як функція аргументу* x *(при фіксованому* $t > 0$*), є елементом простору* S_2^{ω}*, де* $\omega = \dfrac{1}{2b}$*.*

4.6.4. Задача Коші. Властивість локалізації

Частковим випадком задачі (4.115), (4.132) є задача Коші: якщо покласти $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то умова (4.132) набуває вигляду

$$\lim_{t\to+0} u(t,\cdot) = f, \tag{4.133}$$

де f – узагальнена функція з простору типу S'. Повторюючи міркування, наведені раніше, у випадку задачі Коші (4.115), (4.133) дістаємо, що $Q_2(\sigma) \equiv 1$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)$, $G(t,x) = F^{-1}[Q_1(t,\sigma)](x)$. У даному випадку $G(t,\cdot)$, як функція аргументу x (при кожному $t \in (0,T]$), є елементом простору $S_{1-\omega}^{\omega}$, для неї та її похідних (за змінною x) справджуються оцінки

$$|D_x^s G(t,x)| \le cB^s t^{-(s+1)\omega} s^{s\omega} \exp\Big\{ -d_0\Big(\frac{|x|}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)}\Big\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.134}$$

$(t,x) \in \Omega$, сталі c, B, $d_0 > 0$ не залежать від t. Аналогом теореми 4.16 у випадку задачі Коші є наступне твердження.

Теорема 4.17. *Задача Коші* (4.115), (4.133)*, де* $f \in (S_{1-\omega,*}^{\omega})'$*, є розв'язною. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in S_{1-\omega}^{\omega}$ *при кожному* $t \in (0,T]$*,* $u(t,\cdot) \to f$ *при* $t \to +0$ *у просторі* $(S_{1-\omega}^{\omega})'$*.*

У просторі S_{α}^{β} за умови $\beta > 1$ є й фінітні функції [189], тобто має сенс таке означення: узагальнена функція $f \in (S_{\alpha}^{\beta})'$ ($\alpha > 0$, $\beta > 1$) дорівнює нулеві на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для довільної функції $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$, носій якої міститься в (a, b). Розв'язок $u(t, x)$ задачі Коші (4.115), (4.133) задовольняє початкову умову в просторі $(S_{1-\omega}^{\omega})'$ (тобто, в сенсі узагальнених функцій). Однак, при певних обмеженнях на початкову узагальнену функцію f можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f * G(t, x)$ при $t \to +0$. Правильним є наступне твердження.

Теорема 4.18. *Нехай $f \in (S_{1-\omega,*}^{\beta})'$, де $\beta > 1$, $u(t, x)$ – розв'язок задачі Коші* (4.115), (4.133) *з початковою функцією f. Якщо узагальнена функція f дорівнює нулеві на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, то $u(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$.*

Доведення. Нехай $[c, d] \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Побудуємо функцію $\varphi \in S_{1-\omega}^{\beta}$ з носієм в (a, b) таку, що $\varphi = 1$ на $[a_1, b_1]$. Оскільки функції $\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$, $(1 - \varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot)$ при кожному $t > 0$ і $x \in \mathbb{R}$ належать до простору $S_{1-\omega}^{\beta}$, то правильним є співвідношення

$$u(t, x) = \langle f, \varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle + \langle f, (1 - \varphi(\cdot))T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle, \quad (t, x) \in \Omega'.$$

Узагальнена функція f дорівнює нулеві на (a, b), $\operatorname{supp}(\varphi(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)) \subset (a, b)$, тому з останнього співвідношення випливає, що

$$u(t, x) = t\langle f, t^{-1}\gamma(\cdot)T_{-x}\check{G}(t, \cdot)\rangle, \ \gamma = 1 - \varphi, \ (t, x) \in \Omega.$$

Для доведення теореми досить встановити, що сім'я функцій

$$\Phi_{t,x}(\xi) = t^{-1}\gamma(\xi)T_{-x}\check{G}(t, \xi)$$

обмежена в просторі $S_{1-\omega}^{\beta}$ рівномірно по t (для досить малих значень t) та $x \in [c, d]$, тобто

$$|\xi^k D_{\xi}^m \Phi_{t,x}(\xi)| \leq cA^k B^m k^{k(1-\omega)} m^{m\beta}, \ \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, \ \xi \in \mathbb{R}, \qquad (4.135)$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, то оцінку (4.135) досить довести для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$.

Функція φ є елементом простору $S^{\beta}_{1-\omega}$. Отже,

$$|\xi^k D^m_\xi \varphi(\xi)| \leq c_1 A_1^k B_1^m k^{k(1-\omega)} m^{m\beta},\ \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Крім того, згідно з (4.134),

$$|D^m_\xi G(t, x-\xi)| \leq$$

$$\leq c_2 B_2^m t^{-(m+1)\omega} m^{m\omega} \exp\Big\{-d\Big(\frac{|x-\xi|}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)}\Big\},\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.136}$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій знайдемо, що

$$|\xi^k D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)| = t^{-1}\Big|\xi^k \sum_{l=0}^{m} C^l_m D^l_\xi \gamma(\xi) D^{m-l}_\xi G(t, x-\xi)\Big| \leq \Phi^1_{t,x}(\xi) + \Phi^2_{t,x}(\xi),$$

де

$$\Phi^1_{t,x}(\xi) = t^{-1} \sum_{l=0}^{m} C^l_m |\xi^k D^l_\xi \varphi(\xi)| \cdot |D^{m-l}_\xi G(t, x-\xi)|,$$

$$\Phi^2_{t,x}(\xi) = t^{-1} |\xi^k D^m_\xi G(t, x-\xi)|.$$

Оцінимо $\Phi^1_{t,x}(\xi)$. Для цього скористаємося нерівностями (4.136), а також тим, що $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{|a_1 - c|, |d - b_1|\}$. Отже,

$$\Phi^1_{t,x}(\xi) \leq c_1 c_2 \sum_{l=0}^{m} C^l_m A_1^k B_1^l l^{l\beta} k^{k(1-\omega)} B_2^{m-l} (m-l)^{(m-l)\omega} L_{m-l},$$

де

$$L_{m-l} = \sup_{t \in (0,T]} \Big(t^{-1-((m-l)+1)\omega} \exp\Big\{-d\Big(\frac{a_0}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)}\Big\}\Big).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$L_{m-l} \leq A_0 B_0^{m-l} (m-l)^{(m-l)(1-\omega)\omega},$$

де A_0, B_0 – додатні сталі, залежні від a_0, d, ω. Тоді

$$\Phi^1_{t,x}(\xi) \le \tilde{c} \sum_{l=0}^{m} C^l_m A^k_1 B^l_1 l^{l\beta} k^{k(1-\omega)} (B_0 B_2)^{m-l} (m-l)^{(m-l)(2-\omega)\omega} \le$$

$$\le \tilde{c} A^k_1 B^m_3 k^{k(1-\omega)} m^{m\beta},$$

де $B_3 = 2\max\{B_1, B_0 B_2\}$.

Для оцінки $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ скористаємося тим, що виконується умова:

$$\exists L_0 > 0 \ \forall x \in [c,d] \ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1] : \ \ |\xi|/|x-\xi| \le L_0.$$

Урахувавши (4.136), для довільно фіксованого $0 < \varepsilon < d$ маємо

$$\Phi^2_{t,x}(\xi) \le c_1 c_2 L^k_0 B^m_2 m^{m\omega} L_m M_k,$$

де

$$L_m = \sup_{t \in (0,T]} \Big(t^{-1-(m+1)\omega} \exp\Big\{ -(d-\varepsilon)\Big(\frac{a_0}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)} \Big\}\Big),$$

$$M_k = \sup_{|x-\xi|} \Big(|x-\xi|^k \exp\Big\{ -\varepsilon\Big(\frac{|x-\xi|}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)} \Big\}\Big).$$

За допомогою методів диференціального числення знаходимо, що

$$L_m \le \overline{A}_0 B^m_4 m^{m(1-\omega)\omega}, \ \ M_k \le N^k k^{k(1-\omega)}$$

(стала $N > 0$ залежить від T). Отже,

$$\Phi^2_{t,x}(\xi) \le \tilde{c} L^k_0 N^k (B_2 B_4)^m k^{k(1-\omega)} m^{m\omega} m^{m(1-\omega)\omega} =$$

$$= \tilde{c} \tilde{A}^k B^m_5 k^{k(1-\omega)} m^{m(2-\omega)\omega} \le \tilde{c} \tilde{A}^k B^m_5 k^{k(1-\omega)} m^{m\beta},$$

причому сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A}$, $B_5 > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Із оцінок, встановлених для $\Phi^1_{t,x}(\xi)$ та $\Phi^2_{t,x}(\xi)$, випливає нерівність (4.135).

Теорема доведена.

Теорема 4.19. Властивість локалізації. *Нехай* $f \in (S^{\beta}_{1-\omega,*})'$, $\beta > 1$, $u(t,x)$ – *розв'язок задачі Коші* (4.115), (4.133) *з початковою узагальненою функцією* f. *Якщо узагальнена функція* f *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з функцією* F, *яка є мультиплікатором у просторі* $S^{\beta}_{1-\omega}$, *то* $u(t,x) \to F(x)$ *при* $t \to +0$ *рівномірно відносно* x *на довільному відрізку* $[c,d] \subset (a,b)$.

Доведення. Нехай $[c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (a,b)$, φ – основна функція, побудована при доведенні теореми 4.18. Оскільки $\varphi(f-F) = 0$ на (a,b), то $\varphi(f-F) = 0$ на $[c,d]$, $(1-\varphi)f = 0$ на $[a_1,b_1]$ і граничні співвідношення

$$\lim_{t\to+0}\langle\varphi(f-F), T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0, \quad \lim_{t\to+0}\langle(1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = 0$$

справджуються рівномірно відносно $x \in [c,d]$. Крім того,

$$u(t,x) = \langle f, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle = \langle\varphi(f-F), T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle +$$

$$+\langle(1-\varphi)f, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle + \langle\varphi F, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle,$$

причому

$$\langle\varphi F, T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)\varphi(\xi)F(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(t,\xi)\varphi(x-\xi)F(x-\xi)d\xi \equiv J(t,x)$$

(φF можна розуміти як фінітну узагальнену функцію з простору $(S^{\beta}_{1-\omega})'$). Отже, для доведення теореми досить встановити, що $J(t,x) \to (\varphi F)(x)$ при $t \to +0$ рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Оскільки

$$\int_{\mathbb{R}} G(t,\xi)d\xi = Q(t,0) = 1$$

(тут враховано, що $g(0) = 0$)), то

$$|J(t,x) - (\varphi F)(x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} G(t,\xi)((\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x))d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} |G(t,\xi)| \cdot |(\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x)| d\xi \equiv \Lambda(t,x).$$

Функція φF – неперервно диференційовна, тому із формули про скінченні прирости випливає, що

$$|(\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x)| \leq M|(x-\xi) - x| = M|\xi|,$$

де $M = \max\limits_{\tilde{\xi}\in\mathbb{R}} |D^1_\xi(\varphi F)(\tilde{\xi})|$. Візьмемо ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t_0^\nu$ (конкретне значення параметра ν вкажемо пізніше). Тоді

$$|(\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x)| \leq M\varepsilon^\nu,$$

якщо лише $|\xi| < t_0^\nu$. Отже,

$$\Lambda(t,x) \leq M\varepsilon^\nu \int\limits_{|\xi|<t_0^\nu} |G(t,\xi)| d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi|\geq t_0^\nu} |G(t,\xi)| \cdot |(\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x)| d\xi \equiv M\varepsilon^\nu J_1(t) + J_2(t,x).$$

Оцінимо $J_1(t)$. Із нерівності (4.134) при $s = 0$ випливає, що

$$J_1(t) = \int\limits_{|\xi|<t_0^\nu} |G(t,\xi)| d\xi \leq ct^{-\omega} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\Big\{ -d_0 \Big(\frac{|\xi|}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)} \Big\} d\xi =$$

$$= c\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-d_0|y|^{1/(1-\omega)}\} dy \equiv b < +\infty, \;\; c = c(\omega, T) > 0.$$

Здійснимо оцінку $J_2(t,x)$. Передусім зазначимо, що

$$|(\varphi F)(x-\xi) - (\varphi F)(x)| \leq 2M_2,$$

де $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |(\varphi F)(x)|$. Тоді

$$J_2(t,x) \leq 2M_2 \int\limits_{|\xi|\geq t_0^\nu} |G(t,\xi)| d\xi \leq \tilde{c}t^{-\omega} \int\limits_{|\xi|\geq t_0^\nu} \exp\Big\{ -d_0 \Big(\frac{|\xi|}{t^{1/\omega}}\Big)^{1/(1-\omega)} \Big\} d\xi =$$

$$= 2\tilde{c}t^{(1-\omega^2)/\omega} \int\limits_{y \geq t_0^{\nu - 1/\omega}} \exp\{-d_0 y^{1/(1-\omega)}\} dy.$$

Покладемо $\nu = 1/\omega$. Тоді

$$J_2(t,x) \leq 2\tilde{c}\tilde{\tilde{c}}t^{(1-\omega^2)/\omega},\ \tilde{\tilde{c}} = \int\limits_1^\infty \exp\{-d_o y^{1/(1-\omega)}\} dy.$$

Для $t < t_0$ маємо, що

$$J_2(t,x) \leq Bt_0^{(1-\omega^2)/\omega} = B\varepsilon^{(1-\omega^2)/\omega},\ 1-\omega^2 > 0.$$

Урахувавши отримані для $J_1(t)$, $J_2(t,x)$ оцінки стверджуємо, що

$$\forall \varepsilon \in (0,T]\ \exists t_0 = \varepsilon\ \forall t:\ 0 < t < t_0\ \forall x \in [c,d]:\ \ \Lambda(t,x) \leq \mathrm{const}(\varepsilon^{1/\omega} + \varepsilon^{(1-\omega^2)/\omega}),$$

що й потрібно було довести. Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільно фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Теорема доведена.

Висновки до розділу 4

У розділі розвинена теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з ПДО A, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом; оператором $f(A)$, де f – ціла функція від ПДО A; ПДО у просторах періодичних функцій; оператором $f(D)$, побудованим за аналітичним символом, який діє в просторах типу S. Розвинено методику дослідження фундаментальних розв'язків багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь; встановлено оцінки похідних ФРБЗ за просторовою змінною, диференційовність ФРБЗ як абстрактної функції часового параметра t, досліджено поведінку ФРБЗ при прямуванні t до точок 0, $t_1, \ldots, t_m$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ (точок, в яких задаються граничні умови). На підставі цих властивостей доведено коректну розв'язність багатоточкової задачі у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу розподілів або ультрарозподілів. Така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій. Знайдено класи X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t,x)$ відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком задачі (який є елементом простору X основних функцій за просторовою змінною при кожному $t>0$), при цьому розв'язок володіє тими ж властивостями, що і фундаментальний розв'язок, $u(t,x)\in X$ при кожному $t\in(0,T]$, а відповідну граничну умову $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'. Доведено, що розв'язки багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь володіють властивістю локаліазації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена гранична функція f збігається на відкритій множині $Q\subset\mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K}\subset Q$ граничне співвідношення

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,x)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,x)=g(x),\quad \{t_1,\dots,t_m\}\subset(0,T],$$

справджується рівномірно відносно $x\in\mathbb{K}$.

Розділ 5.

Задача Коші та нелокальні задачі для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента

5.1. Дослідження задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента

Використовуючи результати та ідеї, відомі в теорії задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$ параболічних рівнянь [38,52,183], в яких поряд із частинними похідними по просторових змінних, є степені оператора Бесселя по нормальній змінній (що відповідає рівнянням, які вироджуються на гіперплощині), а також права частина в неоднорідності містить шукану функцію із запізненням за часовим аргументом, шукаємо класичний розв'язок задачі Коші методом кроків [219].

5.1.1. Постановка задачі Коші

Розглядається задача Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь з одновимірним оператором Бесселя вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{\tilde{k}+\frac{2j}{2b_n}\le 1} A_{kj} D_x^k B_{x_n}^j u(t,x) + f(t,x,u(t-h,x)) \tag{5.1}$$

($\tilde{k} = \dfrac{k_1}{2b_1} + \dots + \dfrac{k_{n-1}}{2b_{n-1}}$, $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \ge 1$ – цілі додатні числа) в області $\Pi^+ = \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_{n-1} \times \mathbb{R}_1^+$ точок $(t,x) = (t, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $t > 0$, $x_n \ge 0$, $b \ge 1$, B_{x_n} – оператор Бесселя

$$B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x), 0 \le t \le h, x \in \mathbb{R}_{n-1} \times \mathbb{R}_1^+ \equiv \mathbb{R}_n^+, \tag{5.2}$$

f, φ – відомі функції своїх аргументів, A_{kj} – відомі дійсні числа, або відомі функції, залежні від $t \geq 0$, або від $(t, x) \in \Pi^+$.

Означення [183, стор. 11]. Система рівнянь (5.1) називається B-параболічною в точці (t, x), якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\det \left\| \sum_{\tilde{k}+\frac{2j}{2b_n}=1} A_k(t,x)(i\sigma')^k(i\sigma_n)^{2j} - \lambda E \right\| = 0$$

задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda(t,x,\sigma) \leq -\delta(t,x)(\sigma_1^{2b_1} + \cdots + \sigma_n^{2b_n}) \equiv -\delta(t,x)\|\sigma\|^{2b}$$

при $(t,x) \in \Pi^+$, $\sigma \in \mathbb{R}_n^+$, $\delta(t,x) > 0$.

Якщо $\inf\limits_{\Pi^+} \delta(t,x) = \delta_0 > 0$ і $\mathrm{Re}\lambda \leq -\delta_0\|\sigma\|^{2b}$, то система (5.1) називається рівномірно $\overrightarrow{2B}$-параболічною.

У випадку, коли $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b \geq 1$, ця система називається B-параболічною, при цьому

$$\mathrm{Re}\lambda \leq -\delta_0|\sigma|^{2b}$$

і в (5.1) сумування проводиться так: $|k| + 2j \leq 2b$.

Розв'язування задачі (5.1), (5.2) проводимо у випадку сталих коефіцієнтів. Для простоти викладок розглянемо одне рівняння. Нехай $h \leq t \leq 2h$. Тоді рівняння (5.1) набуває вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\leq 2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x) + f(t,x,\varphi(t-h,x)). \tag{5.3}$$

Розв'язок рівняння (5.3) будемо шукати у вигляді перетворення Фур'є-Бесселя від шуканої функції v: $\Pi^+ \to \mathbb{R}$

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{i(x',\sigma')} v(t,\sigma) j_\nu(x_n,\sigma_n)\sigma_n^{2\nu-1} d\sigma,$$

$$\nu > -\frac{1}{2}, c_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu+1). \tag{5.4}$$

Тоді для визначення функції v отримаємо таку задачу Коші

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = A(\sigma)v(t,\sigma) + \tilde{f}(t, t-h, \sigma), \tag{5.5}$$

$$v(h,\sigma) = \tilde{\varphi}(h,\sigma), \tag{5.6}$$

де $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$ – перетворення Фур'є-Бесселя (5.4) функцій f і φ відповідно, $A(\sigma) \equiv \sum\limits_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j$. Функція

$$v(t,\sigma) = e^{A(\sigma)(t-h)}\tilde{\varphi}(h,\sigma) + \int\limits_h^t e^{A(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}(\tau, \tau-h, \sigma)d\tau, \tag{5.7}$$

$\sigma \in \mathbb{R}_n$, $h \le t \le 2h$ є розв'язком задачі (5.5), (5.6) в околі точки $(h, \varphi(h,\sigma))$, якщо f і φ неперервні в області визначення і функція f задовольняє одну з умов, що забезпечує єдиність розв'язку задачі (5.5), (5.6).

Якщо підставити (5.7) в (5.4), то отримаємо, що

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} G(t-h, x'-\xi', x_n)\varphi(h,\xi)\xi_n^{2\nu-1}d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\Big(\int\limits_h^t G(t-\tau, x'-\xi', x_n)f(\tau,\xi,\varphi(\tau-h,\xi)d\tau)\Big)\xi^{2\nu-1}d\xi,$$

де $h \le t \le 2h$, $x \in \mathbb{R}^n$, $Q(t-y,\sigma) = \exp\{A(\sigma)(t-y)\}$,

$$G(t-y, x'-\xi', x_n) = c'_\nu \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{i(x'-\xi',\sigma')}Q(t-y,\sigma)J_\nu(\xi_n\sigma_n)J_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu-1}d\sigma.$$

Нехай $kh \le t \le (k+1)h$, $k > 1$, $x \in \mathbb{R}_n$. Тоді виразом

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} G(t-kh, x'-\xi', x_n)\varphi(kh,\xi)\xi_n^{2\nu-1}d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\Big[\int\limits_{kh}^t G(t-\tau, x'-\xi', x_n)f(\tau,\xi,\varphi(\tau-h,\xi))d\tau\Big]d\xi \tag{5.8}$$

визначається формула для єдиного розв'язку задачі Коші (5.1), (5.2).

Теорема. *Якщо рівняння* (5.1) *B-параболічне, його коефіцієнти задовольняють умови теореми 2.1 [183, стор. 21], функції f, φ неперервні в області визначення і f задовольняє одну з умов, що забезпечує єдиність розв'язку задачі* (5.5), (5.6), *то формулою* (5.8) *визначається єдиний розв'язок задачі Коші* (5.1), (5.2).

5.1.2. Обґрунтування формули (5.8)

У монографії [183, п. 1.3] спочатку вивчено перетворення Фур'є-Бесселя цілих функцій, а в §2 обґрунтовано класичну розв'язність задачі Коші для систем, коефіцієнти яких залежать від t. Спочатку проведена оцінка (2.7) нормальної фундаментальної матриці Q, описано її властивості. Визначені властивості матриці Q дозволяють за допомогою леми про перетворення Фур'є-Бесселя цілої функції встановити теорему 2.1 [183, стор. 21] про функцію Гріна $G(t,\tau,x,\xi)$. Наведені там оцінки (2.12), (2.15) є точні, бо для рівняння Бельтрамі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

ці нерівності перетворюються в рівності

$$G(t,x) = 2^{-\nu-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)t^{-\nu-1}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4t}\Big\}.$$

Даний результат вірний для системи B-параболічних рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часової змінної [183].

Зауваження 1 ([219, стор. 19]). Навіть у випадку існування неперервних похідних від початкової функції φ і неоднорідності f по t як завгодно високого порядку розв'язок основної початкової задачі буде, взагалі кажучи, мати розрив першого роду (похідна порядку k в точці $t_0+(k-1)h$, але похідні нижчих порядків у цій точці уже неперервні, тут t_0 – початкова точка).

Зауваження 2 ([219, стор. 20]). Метод послідовного інтегрування розповсюджується і на диференціальні рівняння з запізнюючим аргументом з неперервним змінним запізненням $h = \tau(t)$. Випадок, коли процес послідовного визначення розв'язку не може бути продовженим далі деякої точки $\bar{t} > t_0$ називається особливим. Він може, очевидно, наступити лише у випадку перетворення функції $\tau(t)$ в нуль у точці $\bar{t}$. Щоб охопити цей випадок, застосовується принцип стиснутих відображень до рівняння із запізненням.

5.2. Задача Коші для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента

У даному підрозділі методом кроків доведена розв'язність задачі Коші для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами і з відхиленням аргумента, опубліковані у працях [231, 250, 254–256, 260].

5.2.1. Постановка задачі

Розглянемо квазілінійну задачу Коші

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,u(x,t-h)), x \in \mathbb{R}^n, t > h, \tag{5.9}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le h, \tag{5.10}$$

$h > 0$ – число, A – псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, однорідним порядку $\gamma > 0$ і нескінченно диференційовним по σ при $\sigma \neq 0$ (точка $\sigma = 0$ є точкою негладкості символа $a(\sigma)$), f, u_0 відомі, обмежені і неперервні функції аргументів x, t, u. Смуга $\Pi_{[0,h]} \equiv \{(x,t); x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le h\}$, в якій задана початкова функція u_0, називається початковою смугою, а гіперплощина $\{(x,h); h > 0$ – число, $x \in \mathbb{R}^n\}$ називається початковою гіперплощиною. Якщо в рівнянні (5.9) і в початковій умові (5.10) u, f, u_0 вважати вектор-функціями, а символ $a(\sigma)$ – матрицею відповідних розмірів, то отримуємо постановку основної початкової задачі для системи рівнянь із запізненням.

У випадку змінного запізнення $h(t) > 0$ спочатку треба задати початкову гіперплощину $\{(x, h_0); x \in \mathbb{R}^n, h_0 > 0$ – стала $\}$ і початкову множину, яка складається з початкової гіперплощини і точок смуги $\Pi_{[t-h(t),h_0]} \equiv \{(x,t); x \in \mathbb{R}^n, t - h(t) < h_0$ при $t > h_0\}$. Для рівняння (5.9) треба знайти розв'язок $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > h_0$, який на початковій множині збігається із заданою початковою функцією $u_0(x,t)$.

Для рівняння (5.9), де ПДО визначається за негладким символом, така задача з умовою (5.10) розв'язується вперше в [231].

Сформулюємо умови на символ a і визначимо відповідний ПДО, трактуючи його як гіперсингулярний інтеграл (ГСІ) [29, 37]. Припустимо, що символ a: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняє умову негладкості в нулі, однорідності $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $a(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma a(\sigma)$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, еліптичності

$$|a(\sigma)| \geq a_0 > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad |\sigma| = 1; \tag{5.11}$$

$$|D_\sigma^\chi a(\sigma)| \leq C|\sigma|^{\gamma-|\chi|}, \quad \sigma \neq 0, \quad \gamma > 0. \tag{5.12}$$

В класі швидко спадних функцій ПДО визначається формулою

$$(Au)(x,t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} a(\sigma) \hat{u}(\sigma,t) d\sigma, x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

$$\hat{u}(\sigma,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)} u(y,t) dy, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

де символ a задовольняє умови (5.11), (5.12) [230].

У працях [29, 37] А.Н. Кочубей трактує ПДО через ГСІ – інтеграл з особливістю, порядок якої вищий від розмірності простору і регуляризований з допомогою скінченних різниць.

Для заданих комплекснозначних обмежених функцій $f \in (\mathbb{R}^n)$, $\Omega \in C(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ вираз вигляду

$$(D^\alpha_\Omega f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{\tilde{h}}{|\tilde{h}|}\Big) \frac{(\Delta^l_{\tilde{h}} f)(x)}{|\tilde{h}|^{n+\alpha}} d\tilde{h}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.13}$$

де $\alpha > 0$, l – натуральне число, $d_{n,l}(\alpha)$ – нормуюча стала, S^{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$,

$$(\Delta^l_{\tilde{h}} f)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C^k_l f(x - k\tilde{h}),$$

називається ГСІ порядку α з характеристикою Ω. Зв'язок між ПДО і ГСІ детально описаний в [29, стор. 911-914], див. розділ 3.

5.2.2. Метод кроків

Методом кроків зводимо задачу Коші для диференціального рівняння з аргументом, що відхиляється, до задачі Коші для рівняння без відхилення аргумента (цей результат анонсовано в [260]).

Нехай $h < t \le 2h$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x,t,u_0(x,t-h)) \equiv f_0(x,t,h)$. Тоді $u(x,t-h) = u_0(x,t-h)$ і задача (5.9), (5.10) набуває вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f_0(x,t,h), \quad x \in \mathbb{R}^n, h < t \le 2h, \tag{5.14}$$

$$u(x,t)|_{t=h} = u_0(x,h), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.15}$$

В образах Фур'є отримаємо таку задачу

$$\frac{dv(\sigma,t)}{dt} + a(\sigma)v(\sigma,t) = \hat{f}_0(\sigma,t,t-h), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, h < t \le 2h, \tag{5.16}$$

$$v(\sigma,t)|_{t=h} = \hat{u}_0(\sigma,h), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{5.17}$$

Розв'язок задачі (5.16), (5.17)

$$v(\sigma,t) = \exp\{-a(\sigma)(t-h)\}\hat{u}_0(\sigma,h) + \int\limits_h^t \exp\{-a(\sigma)(t-\tau)\}\hat{f}(\sigma,\tau,\tau-h)d\tau, \tag{5.18}$$

$\sigma \in \mathbb{R}^n$, $h < t \leq 2h$. Очевидно, що умова (5.17) виконується, а також

$$v(\sigma, 2h) = \exp\{-a(\sigma)h\}\hat{u}_0(\sigma, h) + \int_h^{2h} \exp\{-a(\sigma)(2h-\tau)\}\hat{f}(\sigma, \tau, \tau - h)d\tau, \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{5.19}$$

Умова (5.19) випливає з (5.18) і є початковим значенням задачі Коші для наступного інтервала $2h < t \leq 3h$.

Якщо врахувати, що

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma)d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, h < t \leq 2h,$$

$$\hat{f}_0(\sigma, \tau, \tau - h) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(\xi, \tau, h) \exp\{-i(\xi, \sigma)\}d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, h < \tau \leq t,$$

$$\hat{u}_0(\sigma, h) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi, h) \exp\{-i(\xi, \sigma)\}d\xi, \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

то формула для розв'язку задачі Коші (5.14), (5.15) набуває вигляду (на інтервалі $kh < t \leq (k+1)h$ позначимо його $u_k(x, t, kh)$)

$$u_1(x, t, h) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - h)u_0(\xi, h)d\xi +$$

$$+ \int_h^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau)f_0(\xi, \tau, h)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, h < t \leq 2h, \tag{5.20}$$

а

$$G(x,t) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\}d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{5.21}$$

Позначимо через Π_k смугу $\{x \in \mathbb{R}^n, kh < t \leq (k+1)h, k \in \mathbb{N}\}$. Тоді для $(x,t) \in \Pi_k$ розв'язок задачі Коші (5.14), (5.15) визначається формулою

$$u_k(x, t, kh) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - kh)u_{k-1}(\xi, kh)d\xi +$$

$$+ \int_{kh}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x - \xi, t - \tau)f_{k-1}(\xi, \tau, h)d\xi. \tag{5.22}$$

5.2.3. Обґрунтування формули для розв'язку задачу Коші

Оскільки символ a: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною функцією по σ при $\sigma \neq 0$, то при $\gamma > 0$ вірними є оцінки

$$|D_x^\chi G(x,t)| \leq Ct(t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma-|\chi|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{5.23}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t} G(x,t)| \leq C(t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \tag{5.24}$$

(які для $\gamma > 1$ доведені в [33], для $\gamma \geq 1$ – в [29], а для $\gamma > 0$ доведені в [211]), а також рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-y)dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{5.25}$$

Рівність (5.25) випливає із (5.21) і формули для перетворення Фур'є. Враховуючи (5.24) із (5.25) отримуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G(x-\xi, t-y)dy = 0.$$

Збіжність інтегралів (5.20) – (5.22) гарантується умовами на символ a, функцію f і оцінками G.

Вивчимо властивості об'ємного потенціала

$$u_k(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > kh, k \in \mathbb{N}, \tag{5.26}$$

де $f_k(y,\tau) \equiv f(y,\tau,u_k(y,\tau-h))$. Припустимо, що виконуються такі умови:

f_1) $|f_{k-1}(\xi,\tau)| \leq C(\tau-kh)^{-\rho}$, $kh < \tau \leq t$, $0 \leq \rho < 1$,

f_2) $|f_{k-1}(x,\tau) - f_{k-1}(\xi,\tau)| \leq C|x-\xi|^\lambda(\tau-kh)^\rho$, $kh < \tau \leq t$, $0 \leq \rho < 1$, $0 < \lambda \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Із нерівностей (5.23) випливає, що інтеграл (5.26) абсолютно збігається, а також видно, що функція u_k має неперервні похідні по x довільного порядку, меншого за γ, які можна вираховувати диференціюванням безпосередньо під знаком інтеграла.

Існування похідної по t і формули

$$\frac{\partial u_k(x,t,kh)}{\partial t} =$$

$$= \int\limits_{kh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}[f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]d\xi + f_{k-1}(x,t), \qquad (5.27)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > kh$, встановлюються, як в [29, 33, 211], з врахуванням оцінки (5.24).

Розглянемо дію на об'ємний потенціал (5.26) ГСІ – оператора D^α_Ω вигляду (5.13) у двох випадках: $\alpha < \gamma$ і $\alpha = \gamma$. Нехай α – неціле, $l \geq [\alpha]+1$. Із (5.23) випливає, що при $|\tilde{h}| \leq (t-\tau)^{1/\gamma}$

$$|(\Delta^l_{\tilde{h}} G)(x-\xi,t-\tau)| \leq C|\tilde{h}|^{[\alpha]+1}(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\theta_\nu \nu \tilde{h}-\xi|]^{-(n+\gamma+[\alpha]+1)}, \qquad (5.28)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > \tau$, $0 < \theta_\nu < 1$. Із (5.17) при $|\tilde{h}| > (t-\tau)^{1/\gamma}$ отримуємо оцінку

$$|(\Delta^l_{\tilde{h}} G)(x-\xi,t-\tau)| \leq C(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\theta_\nu \nu h-\xi|]^{-n-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > \tau. \qquad (5.29)$$

Використовуючи (5.28), (5.29) і теорему Фубіні отримуємо, що ГСІ $D^\alpha_\Omega u$ абсолютно збігається і його можна застосовувати під знаком інтеграла по ξ

$$(D^\alpha_\Omega u_k)(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x,x-\xi,t-\tau)f_{k-1}(\xi,\tau)d\xi, x \in \mathbb{R}^n, t > kh, \quad (5.30)$$

де $G_\Omega \equiv D^\alpha_\Omega G$, тобто

$$G_\Omega(x,z,t-y) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Omega}(x,\sigma)\exp\{i(z,\sigma)-a(\sigma)(t-y)\}d\sigma,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n, t > y.$$

$\tilde{\Omega}$ є символом розглядуваного ГСІ. Збіжність інтеграла (5.30) гарантується властивостями функції G_Ω і оцінками, аналогічними (5.23), (5.24), які вірні для G_Ω.

Нехай α – ціле число. Тоді (див. [29, стор. 911]), якщо α – парне, то D^α_Ω можна визначити рівністю (5.13) і ГСІ – оператор D^α_Ω є диференціальним оператором порядку α. Якщо ж α непарне, то при $l > \alpha$ інтеграл в (5.13) тотожно дорівнює нулю для довільної функції f. В такому випадку ГСІ визначений лише для парної характеристики Ω формулою (5.15) із [29, стор. 911] з $l = \alpha$. Розглянемо тепер ГСІ порядку $\gamma > 0$. Припустимо, що $\tilde{\Omega}(x, \sigma)$ є нескінченно диференційовний символ по σ при $\sigma \neq 0$ та

$$|D^\chi_\sigma \tilde{\Omega}(x, \sigma)| \leq C|\sigma|^{\gamma - |\chi|}, \quad \gamma > 0$$

$$|D^\chi_\sigma [\tilde{\Omega}(x, \sigma) - \tilde{\Omega}(y, \sigma)]| \leq C|x - y|^\lambda |\sigma|^{\gamma - |\chi|}, \quad \gamma > 0, 0 < \lambda \leq 1,$$

крім цього вважаємо, що $\tilde{\Omega}(x, \sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$. Якщо число γ ціле і символ $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ (а це можливе лише для непарного γ і парної характеристики), то припустимо додатково, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(x, \sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu}(x) Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu}(x) = 0$, якщо $\gamma = n + 2\nu + 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Випадок, коли $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ включається в теорію параболічних диференціальних рівнянь [251, 252] і тому розглядатися не буде.

Теорема 5.1. *При перерахованих вище умовах ГСІ і $D^\gamma_\Omega u_k$ існує в сенсі умовної збіжності*

$$(D^\gamma_\Omega u_k)(x, \cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} (D^\gamma_{\Omega,\varepsilon} u_k)(x, \cdot),$$

де зрізаний ГСІ $(D^\gamma_{\Omega,\varepsilon} u_k)(x, \cdot)$ отримується з формули (5.13) *заміною області інтегрування на $\{\tilde{h} \in \mathbb{R}^n; |\tilde{h}| > \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, причому*

$$(D^\gamma_\Omega u_k)(x, t, kh) =$$

$$= \int\limits_{kh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau)[f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]d\xi, x \in \mathbb{R}^n, t > kh. \quad (5.31)$$

Доведення проводиться за такою схемою (див. [29, стор. 922-923]). Замість функції u_k із (5.26) розглядається вираз

$$u_k^\theta(x,t,kh) \equiv \int\limits_{kh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < \theta < t-kh.$$

Нерівності (5.28), (5.29) забезпечують абсолютну збіжність ГСІ $D_\Omega^\gamma u_\theta$ і можливість застосування D_Ω^γ до G_Ω під знаком інтеграла формулою

$$(D_\Omega^\gamma u_k^\theta)(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau)d\xi, x \in \mathbb{R}^n, 0 < \theta < t-kh. \quad (5.32)$$

Із формули (5.25), враховуючи (5.28), (5.29) і теорему Фубіні, отримуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau)d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t-\tau > 0, \quad (5.33)$$

де

$$|G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau)| \le C|(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi||^{-n-\gamma}, \gamma > 0, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, t > \tau. \quad (5.34)$$

Остання нерівність забезпечує збіжність інтеграла (5.33) і доведена в [29] при $\gamma \ge 1$ і в [211] при $\gamma > 0$. Враховуючи (5.33) формулу (5.32) можна записати у вигляді

$$(D_\Omega^\gamma u_k^\theta)(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau)[f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]d\xi, \quad (5.35)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \theta < t - kh$. Позначимо через $\Phi(x,t,kh)$ функцію із правої частини (5.31). Зауважимо, що інтеграли в (5.31) збіжні за рахунок оцінки (5.34) і умов, накладених на функцію f. Тоді із формули (5.35) отримуємо, що рівномірно по $x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^{\gamma}_{\Omega} u_k)(x,t,kh) = \lim_{\theta\to 0}(D^{\gamma}_{\Omega} u^{\theta}_k)(x,t,kh) = \Phi(x,t,kh),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $kh < t \le (k+1)h$. Теорему доведено.

Теорема 5.2. *Нехай $kh < t \le (k+1)h$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді формулою* (5.22) *визначається розв'язок задачі Коші* (5.14), (5.15).

Доведення проведемо методом математичної індукції по $k \in \mathbb{N}$. Нехай $k = 1$. Враховуючи оцінки (5.23), (5.24) і умови на $u_0(x,t)$, $f_0(x,t,h)$ інтеграли в (5.20) рівномірно збігаються для $t \ge h+\varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^n$, де $\varepsilon > 0$, як завгодно мале число. Отже, функція $u_1(x,t,h)$ є неперервною і обмеженою функцією. Враховуючи (5.27) і (5.31) безпосередньо перевіряємо, що (5.20) задовольняє рівняння (5.14). Перевіримо виконання початкової умови (5.15). Розглянемо спочатку другий доданок із (5.20):

$$u^2_1(x,t,h) = \int_h^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi,\tau,h) d\xi, \quad h < t \le 2h, x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, що

$$\lim_{t\to h+0} u^2_1(x,t,h) = 0.$$

Розглянемо перший доданок із (5.20), який за допомогою (5.25) запишемо у вигляді різниці

$$u^1(x,t,h) - u_0(x,h) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-h)(u_0(\xi,h) - u_0(x,h)) d\xi,$$

де $h < t < 2h$, $x \in \mathbb{R}^n$ і проведемо заміну просторових змінних $z_i = (\xi_i - x_i)\tilde{t}^{-1/\gamma}$, $1 \le i \le n$, $\tilde{t} = t - h$. Тоді, враховуючи (5.21) отримаємо, що

$$u^1_1(x,t,h) - u_0(x,h) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(z,\sigma) - a(\sigma)\} \right\} d\sigma \times$$

$$\times (u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h)) dz, \tag{5.36}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $h < t \le 2h$, де оцінка (5.23) забезпечує рівномірну збіжність інтеграла по z. Із (5.36) отримуємо, що

$$|u_1^1(x,t,h) - u_0(x,h)| \le \Big| \int\limits_{|z|\le N} G(z)(u_0(x+z\tilde{t}^{1/\gamma},h) - u_0(x,h))dz \Big| +$$

$$+\Big| \int\limits_{|z|\ge N} G(z)(u_0(x+z\tilde{t}^{1/\gamma},h) - u_0(x,h))dz \Big| \equiv I_1 + I_2.$$

Із обмеженості початкової функції u_0 випливає, що існує таке число $M > 0$, що $|u_0(x+z\tilde{t}^{1/\gamma},h) - u_0(x,h)| \le M$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tilde{t} \le h$. Нехай $\varepsilon > 0$ як завгодно мале число. Можна знайти настільки велике $N > 0$, що із збіжності інтеграла (5.36) по z випливає, що

$$|I_2| \le M \int\limits_{|z|\ge N} |G(z)|dz \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із неперервності функції $u_0(x,h)$ випливає, що при всіх $\tilde{t} = t-h > 0$, близьких до нуля і при усіх $|z| \le N$

$$|u_0(x+z\tilde{t}^{1/\gamma},h) - u_0(x,h)| \le \frac{\varepsilon}{2c},$$

де $c = \int\limits_{|z|\le N} |G(z)|dz$. Тоді

$$I_1 \le c|u_0(x+zt^{1/\gamma},h) - u_0(x,h)| \le c\frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для усіх $t > h$, достатньо близьких до h, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_1^1(x,t,h) - u_0(x,h)| \le I_1 + I_2 \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то звідси випливає, що

$$\lim_{t\to h+0} u_1(x,t,h) = \lim_{t\to h+0} u_1^1(x,t,h) = u_0(x,h),$$

бо $\lim\limits_{t\to h+0} u_2(x,t,h) = 0$.

Методом математичної індукції доводиться, що $\lim\limits_{t\to h+0} u_k(x,t,h) = u_{k-1}(x,h)$. Теорему доведено.

Зауваження 5.1. *Даний результат залишається вірним, якщо в* (5.9) $(Au)(x,t) \equiv (A_0u)(x,t) + \sum_{k=1}^{m}(A_ku)(x,t)$, *де* A_k *є ПДО з символами* $a_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le m$, *однорідними порядків* $\gamma_k > 0$, $0 \le k \le m$, *таких, що* $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_m$, *нескінченно диференційовними по* $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *і головний символ* a_0 *задовольняє умову* (5.11), *решта символів – умову* (5.12), *або з символами, залежними від часової змінної* $t > 0$ *і просторових змінних* $x \in \mathbb{R}^n$ *[29, 37].*

Зауваження 5.2. *Результат залишається вірним для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь вигляду* (5.9) *з умовою вигляду* (5.10).

5.3. Приклад

Розглянемо задачу (5.9), (5.10) при $n = 1$, де покладемо $u_0 \equiv C_1$, $f \equiv C_2$, де C_1, C_2 – сталі. Тоді для $h < t \le 2h$ формула (5.20) набуває вигляду

$$u_1(x,t,h) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-\xi,t-h)C_1 + \int_{h}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x-\xi,t-h)C_2 d\xi =$$
$$= C_1 + C_2(t-h), \quad -\infty < x < +\infty, h < t \le 2h.$$

Для $2h < t \le 3h$ формула (5.22) набуває вигляду

$$u_2(x,t,2h) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t-h)u_1 + \int_{2h}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x-\xi,t-h)C_2 d\xi =$$
$$= C_1 + C_2(t-h) + C_2(t-2h) = C_1 + C_2(2t-3h), \quad -\infty < x < +\infty, 2h < t \le 3h,$$

а для $kh < t \le (k+1)h$

$$u_k(x,t,kh) = C_1 + C_2(kt - (1+2+\cdots+k)h), \quad -\infty < x < +\infty, 1 \le k \le m.$$

Тут ми скористалися тим, що

$$G_1(t,x) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t,x)dx = 1.$$

Функція $u(x,t) \equiv u_k(x,t,h)$ при $t = kh$ є неперервною, але не диференційовною ламаною поверхнею, бо в точках $t = kh$ існують лівосторонні на правосторонні похідні, не рівні між собою.

Отже, під розв'язком рівняння (5.9) слід розуміти функцію, диференційовну по t на відкритих інтервалах $kh < t < (k+1)h$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогічно можна розглядати довільне n, бо вірною є рівність (5.25).

5.4. Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента

У даному підрозділі результати п. 5.2. перенесені на випадок задачі (1.25), (1.26) при $1 \leq k \leq m$. Тоді замість задачі Коші (5.14), (5.15) отримуємо багатоточкову нелокальну задачу, досліджену в розділі 3.

В праці [231] для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента вперше доводиться розв'язність задачі Коші, а в [256, 273] для таких рівнянь також вперше формулюється нелокальна задача і аналогічно будується її розв'язок методом кроків.

5.4.1. Постановка задачі

Знайти розв'язок квазілінійної нелокальної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,\mu u(x,t-h) - \nu u(x,T+t-h)), \tag{5.37}$$

$x \in \mathbb{R}^n, t > h > 0, T >> h,$

$$\mu u(x,t) = \nu u(x,T+t) + u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq h, \tag{5.38}$$

де u – шукана, а f, u_0 – відомі неперервні і обмежені функції, $\mu > \nu > 0$, h, T – фіксовані параметри, A – псевдодиференціальна операція (ПДО) з символом $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, однорідним порядку $\gamma > 0$ і нескінченно диференційовним по σ при $\sigma \neq 0$ (точка $\sigma = 0$ є точкою негладкості символа $a(\sigma)$).

Припустимо, що символ $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняє умову негладкості в нулі, однорідності $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $a(\lambda\sigma) = \lambda^{\gamma} a(\sigma)$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, еліптичності (5.11), (5.12)

При цьому ПДО A трактується як гіперсингулярний інтеграл (ГСІ) [29, 37] – інтеграл з особливістю, порядок якої вищий від розмірності простору і регуляризований за допомогою скінченних різниць. Припустимо також, що $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ $\exists C > 0$ $\exists \beta$; $0 < \beta \leq \gamma - \varepsilon$ такі, що

$$|u_0(x,t)| \leq C(1 + |x|)^{\beta}.$$

Якщо $\Pi \equiv \{(x,t,u) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, u \in C_{x,t}^{[\gamma]+1,1}\}$, $[\gamma]$ – Ціла частина $\gamma > 0$, то $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (x,t,u) \in \Pi$ $\exists C > 0$, $\exists \beta \leq \gamma - \varepsilon$ $\exists f\colon \Pi \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Pi)$ і

$$|f(x,t,u)| \leq C(1 + |x|)^{\beta}, |f(x,t,u) - f(y,t,u)| \leq C|x-y|^{\lambda}, 0 < \lambda < 1.$$

На шукану функцію u накладаються умови по аргументах $x \in \mathbb{R}^n$ та $t > 0$, а залежність її від T означає, що мова йде про нелокальну задачу, зв'язану із заданням вихідної множини для цієї нелокальної задачі (5.37), (5.38). Якщо функція $u \in S(\mathbb{R}^n) \times C_t^1$, а $F_{x\to\sigma}[u(x,t)](\sigma,t) \equiv v(\sigma,t)$, $F_{\sigma\to x}^{-1}[v(\sigma,t)](x,t) \equiv u(x,t)$ – відповідно пряме і обернене перетворення Фур'є функції u, то

$$Au(x,t) \equiv F_{\sigma\to x}^{-1}[a(\sigma) F_{x\to\sigma}[u(x,t)]], \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

є псевдодиференціальна операція з символом $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Якщо функція $u \in C_{x,t}^{[\gamma]+1,1}$, $\gamma \geq 1$, то ПДО A визначена в $[29, 37]$ і трактується як ГСІ.

5.4.2. Метод розв'язування задачі

Методом кроків зводимо нелокальну задачу для псевдодиференціального рівняння з аргументом, що відхиляється, до нелокальної задачі для рівняння без відхилення аргумента. Нехай $mh \leq t \leq (m+1)h$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді задача (5.37), (5.38) набирає вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,u_0(x,t-mh)), x \in \mathbb{R}^n, mh \leq t \leq (m+1)h, \quad (5.39)$$

$$\mu u(x, mh) = \nu u(x, T + mh) + u_0(x, mh), x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.40}$$

Позначимо $f(x, t, u_0(x, t - mh)) \equiv f_0(x, t, t - mh)$.

Розв'язок задачі (5.39), (5.40) формально шукаємо за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних і отримаємо таку задачу

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} + A(\sigma)v(\sigma, t) = \tilde{f}_0(\sigma, t, t - mh), \sigma \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h, \tag{5.41}$$

$$\mu v(\sigma, mh) = \nu v(\sigma, T + mh) + \tilde{u}_0(\sigma, mh), \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{5.42}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.41) набуває вигляду

$$v(\sigma, t) = Ce^{-a(\sigma)t} + \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)} \tilde{f}_0(\sigma, \tau, \tau - mh) d\tau, \tag{5.43}$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h.$$

Підставивши (5.43) у (5.42), отримаємо вираз для C:

$$C = \frac{\nu}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T-\tau)} \tilde{f}_0(\sigma, \tau, \tau - mh) d\tau + \frac{e^{a(\sigma)mh}}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \tilde{u}_0(\sigma, mh).$$

Тоді розв'язок задачі (5.41), (5.42) набуває вигляду

$$v(\sigma, t) = \frac{\nu}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)} \tilde{f}_0(\sigma, \tau, \tau - mh) d\tau +$$

$$+ \frac{e^{-a(\sigma)(t-mh)}}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \tilde{u}_0(\sigma, mh) +$$

$$+ \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)} \tilde{f}_0(\sigma, \tau, \tau - mh) d\tau, \sigma \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h. \tag{5.44}$$

Останній доданок із (5.44) запишемо як суму

$$\frac{\mu}{\mu - \nu e^{-a(\sigma)T}} \int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)} \tilde{f}_0(\sigma, \tau, \tau - mh) d\tau -$$

$$-\frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau$$

і підставивши у (5.44) отримаємо, що

$$v(\sigma,t)=\frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\int\limits_{t}^{T+mh} e^{-a(\sigma)(T+t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau+$$

$$+\frac{\mu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\int\limits_{mh}^{t} e^{-a(\sigma)(t-\tau)}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}e^{-a(\sigma)(t-mh)}\tilde{u}_0(\sigma,mh),\sigma\in\mathbb{R}^n,mh\le t\le(m+1)h. \qquad (5.45)$$

Розв'язок задачі (5.39), (5.40) набирає вигляду

$$u(x,t)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}v(\sigma,t)d\sigma=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\nu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\exp\{i(x,\sigma)\}d\sigma\times$$

$$\times\int\limits_{t}^{T+mh}\exp\{-a(\sigma)(T+t-\tau)\}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau+$$

$$+(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\mu}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\exp\{i(x,\sigma)\}d\sigma\int\limits_{mh}^{t}\exp\{-a(\sigma)(t-\tau)\}\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)d\tau+$$

$$+(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\mu-\nu e^{-a(\sigma)T}}\exp\{i(x,\sigma)\}\exp\{-a(\sigma)(t-mh)\}\tilde{u}_0(\sigma,mh)d\sigma\equiv$$

$$\equiv J_1+J_2+J_3, \qquad (5.46)$$

де

$$\tilde{f}_0(\sigma,\tau,\tau-mh)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-i(\xi,\sigma)\}f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi,$$

$$\tilde{u}_0(\sigma,mh)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{-i(\xi,\sigma)\}u_0(\xi,mh)d\xi,x\in\mathbb{R}^n,mh\le t\le(m+1)h.$$

Розглянемо кожен інтеграл формули (5.46) окремо. Функція

$$J_1 = \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^1(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{5.47}$$

де

$$G^1(x-\xi, t-\tau, T) = \frac{\nu}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^1(x-\xi, t-\tau, T), \tag{5.48}$$

а

$$G_k^1(x-\xi, t-\tau, T) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma) - a(\sigma)((k+1)T + t - \tau)} d\sigma, \tag{5.49}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

Отже, враховуючи (5.48), (5.49) функція J_1 із (5.47) набирає вигляду

$$J_1(x, t, T, mh) \equiv \frac{\nu}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_k^1(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{5.50}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

Функція

$$J_2 = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^2(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{5.51}$$

де

$$G^2(x-\xi, t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x-\xi, t-\tau, T), \tag{5.52}$$

$$G_k^2(x-\xi, t-\tau, T) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma) - a(\sigma)(kT + t - \tau)} d\sigma, \tag{5.53}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h.$$

Підставляючи (5.52), (5.53) у (5.51), отримаємо, що

$$J_2(x, t, T, mh) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_k^2(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{5.54}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

Функція

$$J_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G^3(x-\xi, t-mh) u_0(\xi, mh) d\xi, \tag{5.55}$$

де

$$G^3(x-\xi, t-mh) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^3(x-\xi, t-mh, T), \tag{5.56}$$

а

$$G_k^3(x-\xi, t-mh, T) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-\xi,\sigma)-a(\sigma)(kT+t-mh)} d\sigma, \tag{5.57}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

Підставляючи (5.56) і (5.57) в (5.55) отримаємо, що

$$J_3(x, t, T, mh) \equiv \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_k^3(x-\xi, t-mh, T) u_0(\xi, mh) d\xi, \tag{5.58}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

5.4.3. Дослідження властивостей функцій G^i, $i = 1, 2, 3$, та дії на них диференціальних та псевдодиференціальних операцій

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (5.39), (5.40) *набирає вигляду суми* (5.46), *де доданки визначені формулами* (5.50), (5.54) *та* (5.58).

Доведення. Для доведення потрібно провести оцінювання функцій G_k^i, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, та за допомогою них оцінити функції G_i, $i = 1, 2, 3$ із (5.48), (5.52), (5.56).

Оскільки G^i, $i = 1, 2, 3$ виражаються через G_k^i, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, а останні відрізняються лише множниками біля $a(\sigma)$, то досить розглянути одну з них, наприклад, G_k^3, $k = 0, 1, \ldots$, де

$$G_k^3(x, t, T) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)-a(\sigma)(kT+t)} d\sigma, k = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\forall t_0 > 0$ і $t \geq t_0$

$$|\exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)(kT + t)\}| \leq \exp\{-a(\sigma)(kT + t_0)\}, k = 0, 1, \ldots,$$

то для довільної смуги $\tilde{\Pi}_{t_0} \equiv \{(x,t)\,|0 < t_0 \leq t \leq \tilde{T}, x \in \mathbb{R}^n\}$ інтеграл (5.56) збігається рівномірно і тому функції G^3_k, $k = 0, 1, \ldots$ є неперервними в $\tilde{\Pi}_0 \equiv \{(x,t)\,|0 < t \leq \tilde{T}, x \in \mathbb{R}^n\}$. Аналогічно доводиться диференційовність по t функцій G^3_k, $k = 0, 1, \ldots$. Для $G^i_k(\bar{t}, \overline{x})$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, 3$ позначимо $\overline{x} \equiv x - \xi$, а $\bar{t}_k \equiv (k+1)T + t - \tau$ для G^1_k із (5.49), $\bar{t}_k \equiv kT + t - \tau$ для G^2_k із (5.53) і $\bar{t}_k \equiv kT + t - mh$ для G^3_k із (5.56). Для функцій G^i_k, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ правильними є оцінки [29, 37, 230]

$$|D^\chi_x G^i_k(\overline{x}, \bar{t})| \leq C_\chi \bar{t}_k (\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\overline{x}|)^{-(n+\gamma+|\chi|)}, \tag{5.59}$$

$$|D_t G^i_k(\overline{x}, \bar{t})| \leq C(\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\overline{x}|)^{-(n+\gamma)}. \tag{5.60}$$

Використавши (5.59),(5.60) для G^i при $i = 2$ отримаємо, що

$$|D^\chi_x G^i(\overline{x}, \bar{t})| \leq C_\chi \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{\bar{t}_k}{(\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\overline{x}|)^{n+\gamma+|\chi|}}, \tag{5.61}$$

$$|D_t G^i(\overline{x}, \bar{t})| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k (\bar{t}_k^{1/\gamma} + |\overline{x}|)^{-(n+\gamma)}, \tag{5.62}$$

для G^i при $i = 1$ перед сумою є множник $\dfrac{\nu}{\mu}$, а для G^i при $i = 3$ – множник $\dfrac{1}{\mu}$.

Врахувавши (5.61), (5.62) для $i = 1, 2, 3$ отримаємо рівності

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) G^i(\overline{x}, \bar{t}) = 0, \tag{5.63}$$

які при $a(\sigma) \equiv |\sigma|$ безпосередньо перевіряються.

Справджуються рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G^i(\overline{x} - y, \bar{t})dy = \frac{C_i}{\mu - \nu}, i = 1, 2, 3, \tag{5.64}$$

де $C_1 = \nu$, $C_2 = \mu$, $C_3 = 1$, які випливають із (5.63). Враховуючи (5.60) із (5.64) отримуємо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G^i(\overline{x} - y, \overline{t}) dy = 0, i = 1, 2, 3. \tag{5.65}$$

Оцінки (5.59) забезпечують збіжність інтегралів (5.47), (5.51), (5.55) для степенево зростаючих функцій u_0 та f (див. п. 5.4.1).

5.4.4. Дослідження властивостей функції u та дії на неї диференціальних та псевдодиференціальних операцій

Функція u, визначена рівністю (5.46), є сумою трьох доданків, визначених для $x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$. Розглянемо кожен доданок окремо. Інтеграл J_3 із (5.55) можна диференціювати по t та застосовувати до нього ПДО A під знаком інтеграла [37]. Законність таких операцій забезпечується оцінками функції G^3, її похідних (5.59) – (5.62). Враховуючи (5.63) отримаємо, що

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) J_3 = 0. \tag{5.66}$$

Розглянемо J_2, визначений виразом (5.51), і запишемо його у вигляді суми

$$J_2 = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0^2(x - \xi, t - \tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{mh}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x - \xi, t - \tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi \equiv J_{20} + J_{21}, \tag{5.67}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $mh \le t \le (m+1)h$.

Існування похідної по t і формула

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{20} = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G_0^2(x - \xi, t - \tau)[f_0(\xi, \tau, \tau - mh) - f_0(x, \tau, \tau - mh)] d\xi +$$

$$+ f_0(x, t, t - mh), x \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h, \tag{5.68}$$

доведені в [33, 34, 37]. Має місце формула

$$\frac{\partial}{\partial t}J_{21} = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \frac{\partial}{\partial t} G_k^2(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k G_k^2(x-\xi, 0, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, x \in \mathbb{R}^n, mh \le t \le (m+1)h. \tag{5.69}$$

Розглянемо J_1, визначений виразом (5.47). Як і для J_2 похідну від функції J_1 по t можна обчислювати за формулою похідної від інтеграла, залежного від параметра t у випадку, коли межі інтеграла також залежать від цього параметра t. Об'єднуючи формули (5.68), (5.69), отримаємо вираз для похідної по t суми $J_1 + J_2$.

Треба встановити формулу для дії ГСІ D_Ω^α на функції J_1, J_2, визначені формулами (5.47) і (5.54) відповідно [37]. При цьому слід розрізняти випадок $\alpha < \gamma$ і випадок $\alpha = \gamma$. У першому випадку можна застосовувати ГСІ D_Ω^α безпосередньо під знаком інтеграла, а в другому випадку треба створювати спеціальну формулу, яка вимагає розуміння ГСІ D_Ω^α як границі при $\varepsilon \to 0$ $D_{\Omega,\varepsilon}^\gamma$ [29, 37].

Оскільки A_Ω^α діє по аргументу x, від якого залежать функції G^i, $i = 1, 2, 3$, то спочатку треба вивчити дію ГСІ D_Ω^α на функції G^i, $i = 1, 2, 3$. Для цього треба мати оцінку $\Delta_h^l G^i$, $i = 1, 2, 3$ при $|h| \le (t-\mu)^{1/\gamma}$ та при $|h| \ge (t-\mu)^{1/\gamma}$.

Враховуючи різні зображення для скінченних різниць та оцінки (5.59) отримаємо, що при малих h (зокрема, при $|h| \le (t-\mu)^{1/\gamma}$) вірними є нерівності

$$|(\Delta_h^l G^i)(t, T, x, \mu)| \le$$

$$\le C|h|^{[\alpha]+1} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{l} \frac{t + kT}{[(t+kT)^{1/\gamma} + |x - \theta_\nu \nu h|]^{n+\gamma+[\alpha]+1}}, \tag{5.70}$$

$i = 1, 2, 3$, а при великих h (зокрема, при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$) отримаємо, що

$$|(\Delta_h^l G^i)(t, T, x, \mu)| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{l} \frac{t+kT}{[(t+kT)^{1/\gamma} + |x-\nu h|]^{n+\gamma}}, \tag{5.71}$$

$i = 1, 2, 3$.

Зауважимо, що оцінка (5.70) забезпечує збіжність ГСІ $D_\Omega^\alpha G^i$, $i = 1, 2, 3$, при $|h| \leq 1$, а (5.71) – його збіжність при $|h| \geq 1$. Вони існують, якщо символ ПДО $a(\sigma)$ має гладкість порядку $N = 2n + 2[\gamma] + 1$. Тоді гладкість G^i, $i = 1, 2, 3$, має порядок $N - 2n - [\gamma]$, $\gamma \geq 1$; при $0 < \gamma < 1$ символ вважається нескінченно гладким по просторових змінних.

Із цих оцінок та теореми Фубіні при $\alpha < \gamma$ отримуємо, що ГСІ $D_\Omega^\alpha J_2$ є абсолютно збіжний і його можна застосовувати під знаком інтеграла

$$(D_\Omega^\alpha J_2) = \int_{mh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_\Omega^2(t-\tau, T, x-\xi, \mu) f(\tau, \xi) d\xi, \tag{5.72}$$

де

$$D_\Omega^\alpha G_\Omega^2 = (2\pi)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Omega}(\sigma) \exp\{i(x-\xi, \sigma) - a(\sigma)(kT + t - \tau)\} d\sigma, \tag{5.73}$$

$$(t, x) \in \Pi, \mu > 1.$$

Користуючись (5.73) можна переконатися, що формула (5.72) є вірною для цілого непарного $\alpha < \gamma$ і парної характеристики Ω. Зауважимо, що коли за символом $a(\sigma) \equiv a_\alpha(\sigma)$ будувати символ $\tilde{\Omega}(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\alpha(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, де a_α – символ ПДО порядку однорідності $\alpha < \gamma$. Тут ГСІ D_Ω^α з характеристикою Ω є більш ширшим оператором і його символ визначається формулою [29, 37]

$$\tilde{\Omega}(x, \xi) = \frac{1}{d_{nl}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-n-\alpha} (1 - \exp\{i\xi h\})^l \Omega\Big(x; \frac{h}{|h|}\Big) dh.$$

Розглянемо тепер ГСІ порядку γ з символом $\tilde{\Omega}(\sigma)$. Якщо ПДО побудовано за символом $a_\gamma(\sigma)$, то $\tilde{\Omega}(\sigma) = a_\gamma(\sigma)$. Додатково потрібно припускати, що $\tilde{\Omega}(\sigma)$

має при $\sigma \neq 0$ $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$ неперервних похідних, якщо $\gamma \geq 1$, або є нескінченно диференційовною функцією при $0 < \gamma < 1$, $\tilde{\Omega}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$ і

$$|D_\sigma^{æ} \tilde{\Omega}(\sigma)| \leq C_n |\sigma|^{\gamma - |æ|}.$$

Окремо розглянемо випадок цілого γ. Тоді при непарному γ і парній характеристиці $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ. Припустимо, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(\sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu} Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1,$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu} = 0$, якщо $\gamma = 2+2\nu+2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Якщо $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ, то цей випадок не розглядається, бо він охоплюється теорією параболічних диференціальних рівнянь [251, 252].

Зауважимо також, що функція G визначається через G_k^1 із (5.49), а до всіх решти доданків ГСІ D_Ω^γ можна застосувати безпосередньо під знаком інтеграла.

Теорема 2. *При перерахованих вище умовах на $\tilde{\Omega}(\sigma)$ ГСІ $D_\Omega^\gamma J_2$ існує в сенсі умовної збіжності [37] і*

$$(D_\Omega^\gamma J_2) = \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{0\Omega}^2(x-\xi, t-\tau, T)(f_0(\xi, \tau, \tau - mh) - f_0(x, \tau, \tau - mh))d\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{k\Omega}^2(x-\xi, t-\tau+kT, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \tag{5.74}$$

а ГСІ $D_\Omega^\gamma J_1$ існує в звичайному сенсі і

$$(D_\Omega^\gamma J_1) = \int\limits_{t}^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\Omega^1(x-\xi, t-\tau, T) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi, \ \ (t, x) \in \Pi. \tag{5.75}$$

Доведення. Нехай $0 < \theta < 1$ і позначимо

$$J_{20}^\theta \equiv \int\limits_{mh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{0\Omega}^2(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, \tau - mh) d\xi.$$

Із (5.70) і (5.71) випливає абсолютна збіжність ГСІ $D_{\Omega}^{\gamma}J_{20}^{\theta}$ і формула

$$D_{\Omega}^{\gamma}I_{20}^{\theta}=\int\limits_{mh}^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_{\Omega}^{\gamma}G_0^2(x-\xi,t-\tau)f_0(\xi,\tau,\tau-mh)d\xi.$$

Враховуючи (5.70), (5.71) отримаємо, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_{\Omega}^{\gamma}G_0^2(\xi,t)d\xi=0$. Справджується також оцінка

$$|D_{\Omega}^{\gamma}G_0^2(x-\xi,t-\tau)|\le C[(t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|]^{-n-\gamma}. \tag{5.76}$$

Тоді

$$D_{\Omega}^{\gamma}J_{20}^{\theta}=\int\limits_{mh}^{t-\theta}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_{\Omega}^{\gamma}G_0^2(x-\xi,t-\tau)[f_0(\xi,\tau,\tau-mh)-f_0(x,\tau,\tau-mh)]d\xi.$$

Із оцінки (5.76) і умови на данні задачі випливає збіжність останніх інтегралів.

Остання формула показує, що рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$

$$D_{\Omega}^{\gamma}J_{20}=\lim_{\theta\to 0}J_{20}^{\theta}.$$

До всіх інших доданків функції J_2 і до всіх доданків функції J_1 можна застосувати ГСІ D_{Ω}^{γ} безпосередньо під знаком інтеграла, бо для $D_{\Omega}^{\gamma}G_k^i$, $k=1,2,\dots$, $i=1,2$, справджується оцінка (5.76), де у правій частині замість $(t-\tau)^{1/\gamma}$ слід писати $(t-\tau+kT)^{1/\gamma}$, $k\ge 1$. Теорема доведена.

5.4.5. Приклади

Приклад 1. Нехай $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$; $T>0$, μ, ν – числа,

$$u_t(x,t)+A_1u(x,t)=f(x,t,\mu u(x,t-h)-\nu u(x,T+t-h)), \tag{5.77}$$

$t>h, x\in\mathbb{R}, T>>h,$

$$\mu u(x,t)=\nu u(x,t)+u_0(x,t),\quad x\in\mathbb{R}, 0\le t\le h, \mu>0, \nu>0, \tag{5.78}$$

де

$$A_1 u(x,t) \equiv F^{-1}_{\sigma\to x}[|\sigma| F_{x\to\sigma}[u(x,t)]], \quad t>0, \sigma\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R} \tag{5.79}$$

є ПДО з символом $|\sigma|$, визначений лише на спадних функціях по x, або [41]

$$A_1 u(t,x) \equiv \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathbb{R}\to\infty}} \int\limits_{\varepsilon\le|\overline{h}|\le R} \frac{\Delta_{\overline{h}} u(t,x)}{|\overline{h}|^2} d\overline{h}, \quad t>0, x\in\mathbb{R}, \tag{5.80}$$

$\Delta_{\overline{h}} u(x,t) = u(x+\overline{h},t) - u(x,t)$. Якщо $u(x,t)\equiv C$, то $\Delta_{\overline{h}} C = 0$ і в (5.80) $A_1 C = 0$ в класичному сенсі, а в (5.79) – в сенсі теорії узагальнених функцій.

Формула для розв'язку задачі (5.77), (5.78) при $x\in\mathbb{R}$, $mh\le t\le (m+1)h$ набирає вигляду (5.46), де в формулах (5.47) – (5.58) $a(\sigma)\equiv|\sigma|$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Тоді функції G^i_k, $k=0,1,\ldots$, $i=1,2,3$, безпосередньо підраховуються [41] і, отже,

$$J_1 = \frac{\nu}{\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_t^{T+mh} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{((k+1)T+t-\tau) f_0(\xi,\tau,\tau-mh) d\xi}{((k+1)T+t-\tau)^2 + |x-\xi|^2},$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{mh}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(kT+t-\tau) f_0(\xi,\tau,\tau-mh) d\xi}{(kT+t-\tau)^2 + |x-\xi|^2},$$

$$J_3 = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(kT+t-mh) u_0(\xi,mh) d\xi}{(kT+t-mh)^2 + |x-\xi|^2},$$

$x\in\mathbb{R}$, $mh\le t\le (m+1)h$.

Якщо $f_0\equiv C_1$, $u_0\equiv C_2$, то при $mh\le t\le (m+1)h$, $x\in\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu-\nu}[\nu T + (\mu-\nu)(t-mh)C_1 + C_2].$$

Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial t} = C_2$, то рівняння (5.77) задовольняються в класичному сенсі, бо функція u не залежить від x і $A_1 u = 0$, бо $\Delta_{\overline{h}} u(x,t) = 0$. Умові (5.78) відповідає умова $\mu u(x,mh) - \nu\mu(x,T+mh) = C_2$, яка виконується, бо

$$\mu u(x,mh) = \frac{\mu}{\mu-\nu}(\nu T + C_2), \nu u(x,T+mh) = \frac{\nu}{\mu-\nu}[(\nu T + (\mu-\nu)T)C_1 + C_2].$$

Приклад 2. Розглянемо нелокальну задачу

$$u_t(x,t) + A_1 u(x,t) = \mu u(x,t-h) - \nu u(x, T+t-h), t > h, x \in \mathbb{R}, \qquad (5.81)$$

$$\mu u(x,t) - \nu u(x, t+T) = e^t, 0 \le t \le h, x \in \mathbb{R}. \qquad (5.82)$$

Методом кроків для $x \in \mathbb{R}$, $mh \le t \le (m+1)h$ із (5.81), (5.82) отримуємо, що

$$u_t(x,t) + A_1 u(x,t) = e^{t-mh}, x \in \mathbb{R}, t \ge mh, \qquad (5.83)$$

$$\mu u(x, mh) - \nu u(x, T+mh) = e^{mh}, x \in \mathbb{R}. \qquad (5.84)$$

Функції

$$J_1 = \frac{\nu}{\mu - \nu}[e^T - e^{t-mh}], \quad J_2 = \frac{\mu}{\mu - \nu}[e^{t-mh} - 1], \quad J_3 = \frac{1}{\mu - \nu} e^{mh}, x \in \mathbb{R}, \ \ t \ge mh,$$

і розв'язок задачі (5.83), (5.84)

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu - \nu}\Big[\nu e^T + (\mu - \nu) e^{t-mh} - \mu + e^{mh}\Big], x \in \mathbb{R}, mh \le t \le (m+1)h.$$

Рівняння (5.83) задовольняється очевидно, бо $A_1 u = 0$ і

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu - \nu}(\mu - \nu) e^{t-mh} = e^{t-mh}, \quad x \in \mathbb{R}, m \le t \le (m+1)h.$$

Нелокальна умова (5.84) безпосередньо перевіряється.

Зауваження 1. Даний результат залишається справедливим для задачі (5.37), (5.38), якщо в рівнянні (5.37)

$$(Au)(x,t) = \sum_{k=0}^{m} (A_k u)(x,t),$$

де A_k є ПДО з символами a_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le m$, однорідними порядків γ_k, $0 \le k \le m$, таких, що $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_m$, гладкими по σ при $\sigma \ne 0$, або з символами, залежними від часової змінної $t > 0$ і просторових змінних $x \in \mathbb{R}^n$.

Зауваження 2. Даний результат залишається правильним для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (5.37) з умовою вигляду (5.38).

Висновки до розділу 5

У розділі розвинена теорія задачі Коші та нелокальних задач для автономних квазілінійних ПДР з відхиленням аргумента. Досліджено розв'язність задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргумента методом кроків.

Здійснена постановка задачі Коші та нелокальних задач для автономних квазілінійних ППДР з відхиленням аргумента і методом кроків досліджена їх розв'язність.

Додаток

Класична розв'язність прямої та оберненої крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь зі змінними однорідними символами

Д1. Постановка прямої задачі. Основний результат

Введемо позначення:

1) $z \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_a \equiv \{z;\ z > a\}$, $\mathbb{R}_0 \equiv \mathbb{R}_+$; скрізь $y \in \mathbb{R}_0$, $t \in \mathbb{R}_0$;

2) $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \equiv (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$; $\Pi_+ \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $\Pi \equiv \Pi_+ \times \mathbb{R}_+$, $\Pi_0 \equiv \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$; скрізь $(x, y, t) \in \Pi$, $(x, y) \in \Pi_+$, $(y, t) \in \Pi_0$, $(x, t) \in \Pi_+$;

3) числа $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_0$, $\mu > 0$, $c_k > 0$, $k \equiv (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $a_r :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $a_r(\mu\sigma, t) = \mu^{\gamma_r} a_r(\sigma, t)$, $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $|D^k a_r(\sigma, t)| \leq c_k |\sigma|^{\gamma_r - |k|}$, $|k| \leq 2n + 2[\gamma] + 1 \equiv N$, N – порядок гладкості $a_r(\sigma, t)$ при $\sigma \neq 0$, $\gamma_0 \geq 1$ $[\gamma_0]$ – ціла частина числа γ_0 та $a_r(\sigma, t)$, $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$, нескінченно диференційовні по σ при $\sigma \neq 0$ та $\gamma_0 > 0$, $a(\sigma, t) = \sum\limits_{r=0}^{m} a_r(\sigma, t)$, символ ПДО A, що діє по просторовій змінній $x \in \mathbb{R}^n$;

4) існує стала $\delta > 0$ така, що для довільних $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність $a_{\gamma_0}(\sigma, t) \geq \delta |\sigma|^{\gamma_0}$;

5) функція $V :\ \Pi \to \mathbb{R}$ неперервно диференційовна по по t, двічі неперервно диференційовна по y та має $[\gamma_0] + 1$ інтегровних похідних по x, V, V_y, V_{yy} – інтегровні в Π функції, ПДО

$$AV(x, y, t) = F^{-1}_{\sigma \to x}[a(\sigma, t) F_{x \to \sigma}[V(x, y, t)]], \quad (x, y, t) \in \Pi,$$

де $F_{x \to \sigma}$ та $F^{-1}_{\sigma \to x}$ – відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є, розуміється як гіперсингулярний інтеграл (ГСІ) [37]. Позначимо також

$$A_1V(x,y,t) \equiv V_t(x,y,t) + AV(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Pi,$$

$$BV(x,y,t) \equiv V_{yy}(x,y,t) - q(y)V(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Pi,$$

де $q: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ визначена в п. Д1.3.

Д1.1. Постановка прямої задачі. Необхідно визначити розв'язок $V : \Pi \to \mathbb{R}$ рівняння

$$A_1V(x,y,t) = BV(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Pi, \tag{6.1}$$

що задовольняє початкові та граничні умови

$$V(x,y,t)|_{t=0} = V_0(x)V_1(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad V_y(x,y,t)|_{y=0} = 0, \tag{6.2}$$

де $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $V_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – неперервні та інтегровні функції.

Д1.2. Формула для розв'язку прямої задачі. Задача (6.1), (6.2) розв'язується за допомогою прямого перетворення Фур'є по $x \in \mathbb{R}^n$ та узагальненого перетворення Фур'є по $y \in \mathbb{R}_+$. Основним результатом прямої задачі (6.1), (6.2) є доведення формули для її розв'язку

$$V(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} G(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_1(\lambda)\varphi(y,\lambda)d\sigma(\lambda), \tag{6.3}$$

$$\Phi_1(\lambda) = \int\limits_0^\infty V_1(y)\varphi(y,\lambda)dy, \quad \lambda > 0,$$

де функція φ визначена в п. Д1.3, а вираз для G залежить від γ та $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Зокрема,

1) при $\gamma_0 = 1$, $m = 0$, $a = |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, в [41] доведено, що

$$G(x,t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)t}{\pi^{(n+1)/2}(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad (x,t) \in \Pi_+;$$

2) при $\gamma_0 = 2$, $m = 0$, $a = |\sigma|^2$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, отримуємо фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\{-\frac{|x|^2}{4t}\}, \quad (x,t) \in \Pi_+;$$

3) при $\gamma > 0$, символ a з п. Д1.1:

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - \tilde{a}(\sigma,t)\} d\sigma, \quad \tilde{a}(\sigma,t) = \int\limits_0^t a(\sigma,\tau) d\tau, (x,t) \in \Pi_+.$$

При $0 < \gamma_0 \leq 2$, $m = 0$ функція $G(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ (див. розділ 3).

Оцінки функції G та її похідних

$$|D_x^k G(x,t)| \leq C_k t \sum_{r=0}^{m} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma_r-|k|}, \quad |k| = k_1 + \ldots + k_n \geq 0,$$

$$|D_t G(x,t)| \leq C \sum_{r=0}^{m} (t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma_r}, \quad |k| \leq N,$$

дозволяють довести, що функція (6.3) є розв'язком задачі (6.1), (6.2).

Д1.3. Узагальнене перетворення Фур'є. Нехай B – самоспряжений в $L_2(0,\infty)$ оператор, породжений диференціальним виразом $l(y) = -y'' + q(x)y$ та граничною умовою $y'(0) = 0$, де коефіцієнт $q(x)$ – функція з простору $L_1(0,\infty)$. Область визначення цього оператора $\mathcal{D}(B)$ складається з усіх функцій f, що мають похідну f', абсолютно неперервну на кожному інтервалі $[0,a]$, $a > 0$, та таких, що $\{f, l(f)\} \subset L_2(0,\infty)$ та $f'(0) = 0$ [262]. Якщо $f \in \mathcal{D}(B)$, то $Bf = l(f)$. Таким чином визначений оператор B дорівнює замиканню оператора B', заданого формулою $B'f = l(f)$ на множині всіх фінітних нескінченно диференційовних функцій, носії яких містяться на проміжку $(0,\infty)$. Відомо [262], що оператору B відповідає неспадна функція обмеженої зміни $\sigma(\lambda) = (E_\lambda g, g)_{L_2(0,\infty)}$ (спектральна функція), що породжує формули обернення (пряме та обернене узагальнені перетворення Фур'е)

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \psi(y)\varphi(y,\lambda)\,dy, \quad \psi \in L_2(0,\infty), \quad \psi(y) = \int_0^\infty \Phi(\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad y > 0,$$

де функція $\varphi(y,\lambda)$ є розв'язком задачі [1]

$$l(\varphi(y,\lambda)) = \lambda\varphi(y,\lambda), \quad \varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'_y(0,\lambda) = 0, \tag{6.4}$$

E_λ – розклад одиниці оператора B, g – породжуюча функція (тобто така функція з $L_2(0,\infty)$, що лінійна оболонка множини $E(\Delta)g$, де Δ пробігає сукупність всіх обмежених інтервалів на півосі $(0,\infty)$, щільна в $L_2(0,\infty)$). Вказані перетворення встановлюють взаємно обернені ізометричні відображення $L_2(0,\infty)$ на $L_{2,\sigma}(0,\infty) \equiv L_{2,\sigma}$ та $L_{2,\sigma}$ на $L_2(0,\infty)$ (тут $L_{2,\sigma}$ – сукупність всіх σ-вимірних функций $f(\lambda)$, таких, що $\int\limits_0^\infty |f(\lambda)|^2 d\mu_\sigma \equiv \int\limits_0^\infty |f(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) < +\infty$; міра μ_σ, що відповідає функції $\sigma(\lambda)$, – звичайна міра Лебега–Стілтьєса, побудована за функцією σ [262]). З умови $q \in L_1(0,\infty)$ випливає (див. [262]), що спектр оператора B вичерпується неперервним спектром, що заповнює піввісь $(0,\infty)$ (дискретна частина спектра оператора B у цьому випадку відсутня). Відзначимо також, що при фіксованому $\lambda > 0$ функція $\varphi(y,\lambda)$ як функція аргументу y обмежена на $(0,\infty)$ (при кожному $\lambda > 0$) [232].

Справді, в [232, с. 334] встановлено, що для будь-якого відрізка $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset (0,\infty)$ виконується рівність

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x,\lambda)\,dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}x\,dx + \frac{O(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

З теореми про середнє значення випливає співвідношення

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x,\lambda)\,dx = 2\varepsilon\varphi(\tilde{x},\lambda), \quad a-\varepsilon \le \tilde{x} \le a+\varepsilon,$$

---

[1] Вказана задача є сингулярною задачею Штурма–Ліувілля, для якої повної зліченної системи власних функцій може не існувати. Тоді виникає зображення функції у вигляді інтегралу. Це призводить до таких інтегральних співвідношень, як перетворення Фур'є та Лапласа, які називаються узагальненими перетворення та виявляються ефективними при розв'язанні багатьох прикладних задач.

тобто $\tilde{x} = a + \delta$, де $-\varepsilon \le \delta \le \varepsilon$. Отже,

$$\varphi(\tilde{x}, \lambda) \equiv \varphi(a + \delta, \lambda) = \frac{1}{2\varepsilon}[\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \cos\sqrt{\lambda}x\,dx + \frac{O(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda}}], \quad \lambda > 0.$$

Тому для $\lambda > 0$ та $a \ge a_0 > 0$

$$|\varphi(a + \delta, \lambda)| \le 1 + \frac{O(\varepsilon)}{2\varepsilon\sqrt{\lambda}} \le 1 + \frac{C\varepsilon}{2\varepsilon\sqrt{\lambda}} = 1 + \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Прямуючи δ до нуля та враховуючи при цьому неперервність функції $\varphi(y, \lambda)$ за змінною $y \ge 0$, отримуємо нерівність

$$|\varphi(a, \lambda)| \le 1 + \frac{\tilde{c}}{\sqrt{\lambda}}, \quad a \in [a_0, \infty).$$

На відрізку $[0, a_0]$ функція φ, як функція y, внаслідок теореми Вейєрштраса також обмежена. Отже, $|\varphi(y, \lambda)| \le \alpha$, $y \in [0, \infty)$, де $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$.

Д2. Метод гібридного інтегрального перетворення

Застосуємо до рівняння (6.1) узагальнене перетворення Фур'е за змінною $y \in \mathbb{R}^1_+$ та експоненціальне перетворення Фур'е за змінними $x \in \mathbb{R}^n$, позначивши

$$W(\sigma, \lambda, t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} e^{i(x,\sigma)}\varphi(y, \lambda)V(x, y, t)dxdy,$$

де $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, $t > 0$. Тоді отримаємо рівняння

$$W_t(\sigma, \lambda, t) + a_\gamma(\sigma)W(\sigma, \lambda, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} e^{i(x,\sigma)}\varphi(y, \lambda)[V_{yy}(x, y, t) - q(y)V(x, y, t)]\,dx\,dy. \tag{6.5}$$

Виділимо в правій частині (6.5) інтеграл

$$I(x, \lambda, t) \equiv \int\limits_0^\infty \varphi(y, \lambda)V_{yy}(x, y, t)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0, \quad t > 0,$$

та двічі проінтегруємо частинами. Потім, враховуючи граничні умови $V_y(x, y, t)|_{y=0} = 0$, $\varphi'_y(0, \lambda) = 0$, співвідношення

$$\lim_{y\to+\infty} V(x, y, t) = \lim_{y\to+\infty} V_y(x, y, t) = 0,$$

які випливають з умови 5) п. Д1, а також обмеженість на $[0,\infty)$ функції $\varphi(y,\lambda)$ за змінною y, отримаємо, що

$$I(x,\lambda,t)=\int\limits_0^\infty V(x,y,t)\varphi''_{yy}(y,\lambda)\,dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda>0,\quad t>0. \tag{6.6}$$

Підставимо інтеграл (6.6) в рівняння (6.5) та врахуємо, що

$$-\varphi''_{yy}(y,\lambda)+q(y)\varphi(y,\lambda)=\lambda\varphi(y,\lambda),\quad y\in\mathbb{R}^1_+,\quad \lambda>0,$$

рівняння (6.5) приведемо до вигляду

$$W_t(\sigma,\lambda,t)+(a(\sigma,t)+\lambda)W(\sigma,\lambda,t)=0,$$

$\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, $t>0$. Розв'язок задачі (6.1), (6.2) в образах Фур'е має вигляд

$$W(\sigma,\lambda,t)=F[V_0](\sigma)\Phi_1(\lambda)e^{-(\tilde{a}(\sigma,t)+\lambda t)}. \tag{6.7}$$

Якщо до функції (6.7) застосувати обернене перетворення Фур'є, то отримаємо зображення

$$V(x,y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(x-\xi,t)V_0(\xi)d\xi\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_1(\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

$x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}_+$, $t>0$, де функції $G,\ \Phi_1$ визначені п. Д1.2. Відмітимо, що тут ми скористалися співвідношеннями

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\tilde{a}(\sigma,t)-i(x,\sigma)}F[V_0](\sigma)\,d\sigma=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\tilde{a}(\sigma,t)-i(x,\sigma)}(\int\limits_{\mathbb{R}^n}V_0(\xi)e^{i(\xi,\sigma)}d\xi)\,d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\tilde{a}(\sigma,t)-i(x-\xi,\sigma)}d\sigma)V_0(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(x-\xi,t)V_0(\xi)\,d\xi.$$

Рівність (6.3) доведена.

Вірною є така теорема.

Теорема 1. *Розв'язок прямої задачі* (6.1), (6.2) *визначається рівністю* (6.3)*:*

$$V(x,y,t)\equiv X(x,t)Y(y,t),$$

де функція

$$X(x,t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi,t)V_0(\xi)\,d\xi, \quad (x,t) \in \Pi_+, \tag{6.8}$$

є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} X_t(x,t) + A_1 X(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Pi_+, \\ X(x,t)|_{t=0} = V_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} X(x,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{gathered} \tag{6.9}$$

а функція

$$Y(y,t) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad (y,t) \in \Pi_0, \tag{6.10}$$

– розв'язком задачі

$$\begin{gathered} Y_t(y,t) = Y_{yy}(y,t) - q(y)Y(y,t), \quad (y,t) \in \Pi_0, \\ Y(y,t)|_{t=0} = V_1(y), \quad y \in \mathbb{R}^+, \\ Y_y(y,t)|_{y=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{6.11}$$

Функція φ, яка є розв'язком задачі (6.4), та функція $q: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ зв'язані взаємно однозначною відповідністю із спектральною функцією розподілу $\sigma(\lambda)$ [232].

Якщо функція $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *невід'ємна,* $1 \le \gamma \le 2$, $X(x,t) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$, $t > 0$, *то* $X(x,t) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t \le T$, *а задача* (6.9) *може мати не більше ніж один розв'язок вигляду* (6.8) *[37].*

Розв'язок рівняння (6.11) *з нульовою умовою є тотожнім нулем. Розв'язок задачі* (6.11) *однозначно визначається додатною функцією* $q(y)$ *[232].*

Доведення. Перевірка того, що функція (6.8) є розв'язком задачі (6.9), здійснена в [29, 37].

Перевіримо, що функція Y з (6.10) задовольняє рівняння (6.11). Справді,

$$Y'_t(y,t) = -\int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad t>0, \quad y>0, \tag{6.12}$$

$$Y''_{yy}(y,t) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi''_{yy}(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad t>0, \quad y>0. \tag{6.13}$$

Застосування операцій диференціювання під знаками інтегралів обґрунтовується властивостями підінтегральних функцій інтегралів (6.10), (6.12), (6.13). Підставивши їх у рівняння (6.9), отримаємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\{-\varphi''_{yy} + q(y)\varphi(y) - \lambda\varphi\}\,d\sigma(\lambda) \equiv 0, \quad (y,t)\in\Pi_0,$$

оскільки $-\varphi''_{yy} + q(y)\varphi(y) = \lambda\varphi$. Потрібна тотожність доведена.

Перевіримо виконання умов (6.11). Оскільки $\varphi'_y(y,\lambda)|_{y=0} = 0$, $\lambda > 0$, то

$$Y'_y(y,t)|_{y=0} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi'_y(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda)|_{y=0} = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Оскільки Φ_1 – пряме узагальнене перетворення Фур'є функції V_1, то з формули (6.10) отримаємо рівності

$$Y(y,t)|_{t=0} = \int\limits_0^\infty \Phi_1(\lambda)\varphi(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda) = V_1(y).$$

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що задачі (6.9), (6.11), отримані шляхом розщеплення задачі (6.1), (6.2) методом неповного відокремлення змінних [247].

Д3. Обернена задача

Нехай $V(x,y,t)$ – розв'язок задачі (6.1), (6.2), де $0<\gamma_0\le 2$, $m=0$. Зафіксуємо точку $x=x_0$, $y=0$ в Π_+ та припустимо, що відоме значення V при всіх

$t > 0$ та $x = x_0$, $y = 0$:

$$V(x, y, t)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = 0}} \equiv \psi(x_0, t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де ψ – відома функція.

Необхідно визначити функцію $q: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, неперервну та обмежену. Нехай $0 < \gamma_0 \leq 2$, $m = 0$.

Розв'язок оберненої задачі випливає з [232]. Справді, підставляючи $x = x_0$ та $y = 0$ в рівність (6.3) та враховуючи, що $\varphi(0, \lambda) = 1$, отримаємо рівняння

$$\psi(x_0, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x_0 - \xi, t) V_0(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де $\psi(x_0, t)$ – відома, а $\sigma(\lambda)$, $\lambda > 0$, – невідома функції. З роботы [232] відомо, що функція $\sigma(\lambda)$, $\lambda > 0$, зв'язана взаємно однозначною відповідністю з неперервною та обмеженою функцією q, тобто по відомій функції $\sigma(\lambda)$, $\lambda > 0$, однозначно знаходиться функція q. У свою чергу функція $\sigma(\lambda)$, $\lambda > 0$, однозначно визначається функцією $\psi(x_0, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Отже, вірною є

Теорема 2. *У класі обмежених та неперервних функцій невідома функція $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ рівняння (6.1), $0 < \gamma_0 \leq 2$, $m = 0$, однозначно визначається відомою функцією $\psi(x_0, t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.*

Д4. Випадок неоднорідного рівняння

Замість $A_1 V(x, y, t)$ розглянемо

$$A_2 V(x, y, t) \equiv V_t(x, y, t) + AV(x, y, t) - f(x, t), \quad (x, y, t) \in \Pi,$$

де функція f: $\Pi_+ \to \mathbb{R}$ неперервна та обмежена за сукупністю змінних, причому

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq C|x - y|^\lambda,$$

де C не залежить від x, y, t. Не зменшуючи загальності можна вважати, що [29, 37] $\max\limits_{1 \le r \le m} \gamma_r < \gamma_0 - \lambda$. Тоді розв'язок прямої задачі (6.1), (6.2), де замість $A_1 V(x, y, t)$ розглядається $A_2 V(x, y, t)$ визначається формулою

$$V(xy, t) \equiv X(x, t)Y(y, t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi,$$

де $X(x, t)$ визначається рівністю (6.8) і є розв'язком задачі (6.9), де замість $A_1 V(x, y, t)$ розглянуто $A_2 V(x, y, t)$, а функція $Y(y, t)$ є розв'язком задачі (6.11), який визначається рівністю (6.10) [248].

Результати, викладені в додатку, опубліковані у працях [223, 247, 248, 263].

Висновки до додатку

У додатку досліджена пряма та обернена задачі, що містять ПДО, побудований за сумою однорідних негладких у нулі та залежних від часової змінної t символами, що містить змінний коефіцієнт q біля шуканої функції, який виступає невідомою величиною в оберненій задачі.

Доведена класична розв'язність крайових задач для вказаних ППДР методом гібридного інтегрального перетворення, класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинена теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з ПДО A, побудованим за негладким у точці 0 однорідним символом; оператором $f(A)$, де f – ціла функція від ПДО A; ПДО у просторах періодичних функцій; оператором $f(D)$, побудованим за аналітичним символом, який діє в просторах типу S. Розвинено методику дослідження фундаментальних розв'язків багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь; встановлено оцінки похідних ФРБЗ за просторовою змінною, диференційовність ФРБЗ як абстрактної функції часового параметра t, досліджено поведінку ФРБЗ при прямуванні t до точок 0, t_1, $\dots$, t_m, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ (точок, в яких задаються граничні умови). На підставі цих властивостей доведено коректну розв'язність багатоточкової задачі у випадку, коли гранична функція належить до певного класу узагальнених функцій типу розподілів або ультрарозподілів. Така постановка задачі є природною, оскільки гранична функція може мати особливість в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій. Знайдено класи X' граничних узагальнених функцій, для яких розв'язок $u(t, x)$ відповідної нелокальної багатоточкової за часом задачі подається у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком задачі (який є елементом простору X основних функцій за просторовою змінною при кожному $t > 0$), при цьому розв'язок володіє тими ж властивостями, що і фундаментальний розв'язок, $u(t, x) \in X$ при кожному $t \in (0, T]$, а відповідну граничну умову $u(t, \cdot)$ задовольняє в просторі X'. Доведено, що розв'язки багатоточкової за часом задачі для вказаних еволюційних рівнянь володіють властивістю локалізації (властивістю локального покращення збіжності): якщо узагальнена гранична функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,x) = g(x), \quad \{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T],$$

справджується рівномірно відносно $x \in \mathbb{K}$.

Побудовано розв'язок задачі Коші для квазілінійних B-параболічних диференціальних рівнянь з відхиленням аргумента, а також розв'язок задачі Коші і нелокальних задач для псевдодиференціальних квазілінійних рівнянь з відхиленням аргументу, які розв'язуються методом кроків. Досліджено пряму і обернену задачі для одного класу еволюційних ПДР методом неповного відокремлення змінних та із застосуванням гібридних інтегральних перетворень Фур'є класичного за просторовими змінними та узагальненого за півпросторовою змінною.

Список використаної літератури

1. *Tsutsumi C.* The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudodifferential operator / C. Tsutsumi // Proc. Japan Acad. – 1974. – V. 50, N 1. – P. 11–15.

2. *Tsutsumi C.* The fundamental solution for a parabolic pseudodifferential operator and parametrices for degenerate operators / C. Tsutsumi // Proc. Japan Acad. – 1975. – V. 51, N 2. – P. 103–107.

3. *Kumano-go H.* Algebras of pseudo-differential operators / H. Kumano-go // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1970. – V. 17. – P. 31-50.

4. *Kumano-go H.* L_p-theory of pseudo-differential operators / H. Kumano-go, M. Nagase // Proc. Japan Acad. – 1970. – V. 46. – P. 138–143.

5. *Shinkai K.* On symbols of fundamental solutions of parabolic systems / K. Shinkai // Proc. Japan Acad. – 1974. – V. 50, N 5–6. – P. 337–341.

6. *Городецький В.В.* Про дробове диференціювання у просторах типу S' / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 20–24.

7. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

8. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

9. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н. Кочубей / Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1359–1368.

10. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / А.Н. Кочубей / Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 4. – С. 485–492.

11. *Кочубей А.Н.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии / А.Н. Кочубей, С.Д. Эйдельман / Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.
12. *Schwartz L.* Theorie des distributions. In 2 volms / L. Schwartz. – Paris: Hermann, 1951. – V. 2. - 169 p.
13. *Лизоркин П.И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций / П.И. Лизоркин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 117. – С. 212–243.
14. *Frostman O.* Potential d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des functions / O. Frostman // Medd. Lunds Univ. Mat. Semin. – 1935. – V. 3. – P. 1–118.
15. *Hardy G.H.* Some properties of fractional integrals. I / G.H. Hardy, J.E. Littlewood // Math. Z. – 1928. – Bd. 27, N 4. – S. 565–606.
16. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа / С.Л. Соболев // Мат. сб. – 1938. – Т. 4, № 3. – С. 471–497..
17. *Thorin G.O.* Convexity theorems / G.O. Thorin // Comm. Semin. Math. L'Univ. Lund Uppsala. – 1948. – V. 9. – P. 1–57.
18. *Stein E.M.* The characterization of functions arising as potentials. I / E.M. Stein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 67, N 1. – P. 102–104.
19. *Лизоркин П.И.* Описание пространства $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов / П.И. Лизоркин // Мат. сб. – 1970. – Т. 81, № 1. – С. 79–91.
20. *Самко С.Г.* О пространствах риссовых потенциалов / С.Г. Самко // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Т. 40, № 5. – С. 1143–1172.
21. *Самко С.Г.* Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение / С.Г. Самко // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 157–222.

22. *Мазья В.Г.* Нелинейная теория потенциала / В.Г. Мазья, В.П. Хавин // Успехи мат. наук. – 1972. – Т. 27, № 6. – С. 67–138.

23. *Рубин Б.С.* Обращение потенциалов в $\mathbb{R}^n$ с помощью интегралов Гаусса-Вейерштрасса / Б.С. Рубин // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, № 1. – С. 34–42.

24. *Wheeden R.L.* On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions / R.L. Wheeden // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 134, N 3. – P. 421–435.

25. *Wheeden R.L.* On hypersingular integrals and certain spaces of locally differentiable functions / R.L. Wheeden // Ibid. – 1969. – V. 146, N 2. – P. 211–230.

26. *Fisher M.J.* Some generalizations of the hyper singular integral operators / M.J. Fisher // Stud. Math. – 1973. – V. 47, N 2. – P. 95–121.

27. *Самко С.Г.* Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ и гиперсингулярные интегралы / С.Г. Самко // Stud. Math (PRL). – 1977. – V. 61, N 3. – P. 193–230.

28. *Самко С.Г.* Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение / С.Г. Самко // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 232, № 3. – С. 528–531.

29. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодиифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей / Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909–934.

30. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

31. *Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60–69.

32. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я.М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19–21.
33. *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений / Я.М. Дринь // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. – № 3. – С. 198–202.
34. *Эйдельман С.Д.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Мат. исследования. – 1981. – Т. 63. – С. 18–33.
35. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциальных параболических уравнений / М.В. Федорюк // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1296–1301.
36. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization / W.R. Schneider // Lecture Notes Phus. – 1986. – V. 262. – P. 497–511.
37. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei – Basel-Boston-Berlin: Bizkhaser Verlag, 2004. – 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 152).
38. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
39. *Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу розподілів: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / В.А. Літовченко. – Чернівці, 1995. – 118 с.

40. *Ейдельман С.Д.* Про фундаметальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь / С.Д. Ейдельман, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1997. – № 6. – С. 18–23.

41. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Р.Я. Дрінь. – Львів, 1997. – 115 с.

42. *Eidelman S.D.* About properties of the solutions of diffusion equations with pseudodifferential summand / S.D. Eidelman, R.Ya. Drin // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 9–12.

43. *Eidelman S.D.* About the investigation of the action of the pseudodifferential operators over the special classes of test functions / S.D. Eidelman, R.Ya. Drin // Доп. НАН України. – 1997. – № 3. – С. 32–37.

44. *Дрінь Р.Я.* Оцінка ядра Пуассона однієї параболічної псевдодиференціальної крайової задачі / Р.Я. Дрінь // Нелинейные краевые задачи математической физики: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 72–73.

45. *Дрінь Р.Я.* Стабілізація розв'язків задачі Коші для систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Р.Я. Дрінь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – № 14. – С. 88–102.

46. *Городецький В.В.* Дослідження множин початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу: дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / В.В. Городецький. – Львів, 1995. – 326 с.

47. *Городецький В.В.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В Городецький, В.А. Літовченко // Доп. АН України. – 1992. – № 10. – С. 6–9.

48. *Городецький В.В.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / В.В Городецький, В.А. Літовченко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип. 8. – С. 191–195.

49. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами диференціювання / В.А. Літовченко // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1211–1233.

50. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами / В.А. Літовченко // Укр. мат. вісник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 19–51.

51. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій / В.А. Літовченко // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 394–420.

52. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.

53. *Дубинский Ю.А.* Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение задач при неограниченном возрастании порядка уравнения / Ю.А. Дубинский // Матем. сб. – 1975. – Т. 98, № 2. – С. 163–184.

54. *Дубинский Ю.А.* Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидова пространства и тора / Ю.А. Дубинский // Матем. сб. – 1976. – Т. 100, № 3. – С. 436–446.

55. *Грошев П.Н.* Разрешимость нелинейных эллиптических уравнений бесконечного порядка в пространствах почти периодических функций / П.Н. Грошев // Сборник научн. трудов МЭИ. – 1989. – Т. 191. – С. 16–22.

56. *Дубинский Ю.А.* Следы функций из пространств Соболева бесконечного порядка и неоднородные краевые задачи / Ю.А. Дубинский // Матем. сб. – 1978. – Т. 106, № 1. – С. 66–84.

57. *Кобилов А.Я.* Критерий нетривиальности пространств Соболева бесконечного порядка в угловых областях / А.Я. Кобилов // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 5. – С. 1040–1044.

58. *Чан Дык Ван.* Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в ограниченной области евклидова пространства / Чан Дык Ван // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 250, № 6. – С. 1331–1334.

59. *Tran Duc Van.* Sobolev-Orlicz spaces of infinite order for a full Euclidean space / Tran Duc Van, Ha Huy Band, Gorenflo R. – Berlin. – 1990. – (Preprint FB Mathematic A-90-14, Freibe Univers).

60. *Умаров С.Р.* Некоторые пространства бесконечного порядка и приложения к операторным уравнениям / С.Р. Умаров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 2. – С. 313–317.

61. *Дубинский Ю.А.* Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Приложения к пространствам Соболева бесконечного порядка / Ю.А. Дубинский // Матем. сб. – 1979. – Т. 110, № 3. – С. 428–439.

62. *Дубинский Ю.А.* Пределы монотонных последовательностей банаховых пространств. Примеры / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 537–540.

63. *Ха Зуй Банг.* О некоторых теоремах вложения пространств периодических функций бесконечного порядка / Ха Зуй Банг // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 4. – С. 66–81.

64. *Балашова Г.С.* Теоремы вложения банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций / Г.С. Балашова // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, № 1. – С. 66–81.

65. *Дубинский Ю.А.* К теории задачи Коши для уравнений в частных производных / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 259, № 4. – С. 781–785.

66. *Дубинский Ю.А.* Алгебра дифференциальных операторов бесконечного порядка и псевдодифференциальные уравнения с аналитическим символом / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 26, № 4. – С. 807–812.

67. *Дубинский Ю.А.* Псевдодифференциальные операторы с комплексными переменными и их приложения / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 268, № 5. – С. 1046–1050.

68. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области / Ю.А. Дубинский // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 2. – С. 115–142.

69. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

70. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, А.В. Князюк // Успехи мат. наук. – 1989. – Т. 44, № 3. – С. 55–91.

71. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // Матем. сб. – 1977. – Т. 102, № 1. – С. 124–150.

72. *Gorbachuk M.L.* Boundary value problems for operator differential equations / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.

73. *Gorbachuk M.L.* On behavior of weak solutions of operator differential equations on $(0, \infty)$) / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Operator Theory. Advances and Applications. – 2009. – 191. – P. 116–126.

74. *Gorbachuk M.L.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Math. Nachr. – 2012. – 285< N 14–15. – P. 1860–1879.

75. *Treves F.* Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators / F. Treves // Notas de Matem. Pura Appl. Rio De Janeiro. – 1968. – V. 46. – P. 1–237.

76. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / [*Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук*]. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

77. *Каленюк П.І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

78. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 4. – С. 65–70.

79. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

80. *Городецкий В.В.* Эволюционные уравнения с операторами обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева. I / В.В. Городецкий, Н.М. Шевчук // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 4. – С. 480–490.

81. *Городецкий В.В.* Эволюционные уравнения с операторами обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева. II / В.В. Городецкий, Н.М. Шевчук // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 785–794.

82. *Коробейник Ю.Ф.* К вопросу о представлении любого линейного оператора в виде дифференциального оператора бесконечного порядка / Ю.Ф. Коробейник // Матем. заметки. – 1974. – Т. 16, вып. 2. – С. 277–283.

83. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій / М.І. Нагнибіда. – К.: Ін-т математики НАН України, 1995. – 297 с.

84. *Подпорин В.П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка / В.П. Подпорин // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т. 18, № 6. – С. 1422–1425.

85. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність деяких класів операторів нескінченного порядку / С.С. Лінчук // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 191-192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 79–81.

86. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність складових операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування / С.С. Лінчук // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 45–47.

87. *Лінчук С.С.* Про застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку / С.С. Лінчук // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 60–62.

88. *Kothe G.* Topologische lineare Raume. Bd 1 / G. Kothe. – Berlin, 1960. – 307 p.

89. *Власов В.В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики / В.В. Власов. – К.: Стройиздат, 1975. – 224 с.

90. *Лурье А.И.* Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

91. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці / Я.С. Підстригач. – М.: Наукова думка, 1995. – 460 с.

92. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978 – 463 с.

93. *Алексеева С.М.* Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым усло-

вием / С.М. Алексеева, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 495–502.

94. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами / В.М. Вігак // Доп. АН України. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

95. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

96. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 637–645.

97. *Ионкин Н.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями / Н.И. Ионкин, Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1284–1295.

98. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями / Л.И. Камынин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – Т. 4, № 6. – С. 1006–1024.

99. *Кеферов А.А.* Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений / А.А. Кеферов // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 74–78.

100. *Митропольский Ю.А.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения / Ю.А. Митропольский, М.Х. Шхануков, А.А. Березовский // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 780–800.

101. *Bouziani A.* Probleme mixte avec conditions integrales pour une class d'equations paraboliques / A. Bouziani, N.-E. Benouar // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser I. – 1995. – Vol. 321. – P. 1177–1182.

102. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 21. – P. 155–160.

103. *Водахова В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса / В.А. Водахова // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 280–285.

104. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

105. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

106. *Cannon J.* Diffusion subject to the specification of mass / J. Cannon, Ivan der Hoek / J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 115, N 2. – P. 517–529.

107. *Майков А.Р.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волноводных систем / А.Р. Майков, А.Д. Поезд, С.А. Якунин // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267–1271.

108. *Муравей Л.А.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54, № 4. – С. 98–116.

109. *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н.И. Иванчов // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 547–564.

110. *Камынин В.Л.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка / В.Л. Камынин, М. Саролди // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1683–1691.

111. *Нахушев А.М.* Уравнения математской биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высшая, школа, 1995. – 301 с.

112. *Белавин И.А.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения / И.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.

113. *Lions J.* Equations differentielles operationelles et problemes aux limites / J.Lions. – Springer, grundlehrer edition: Berlin, 1961. – Vol. 111. – 292 p.

114. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.

115. *Крейн С.Г.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 3. – С. 382–390.

116. *Лаптев Г.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаовом пространстве и их приложения: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 / Г.И. Лаптев. – Воронеж, 1964. – 8 с.

117. *Крейн С.Г.* Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 7. – С. 919–926.

118. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

119. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.

120. *Дезин А.А.* Об операторных уравнениях второго порядка / А.А. Дезин // Сиб. мат. журн. – 1978. – Т. 19, № 5. – С. 1032–1042.

121. *Романко В.К.* К теории операторов вида $\dfrac{d^m}{dt^m} - a$ / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1957–1970.

122. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 11. – С. 117–131.

123. *Романко В.К.* Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений / В.К. Романко // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 812–816.

124. *Романко В.К.* Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 6. – С. 1081–1092.

125. *Романко В.К.* Операционное исчисление и разрешимость граничных задач / В.К. Романко // Матем. заметки. – 1979. – Т. 26, № 3. – С. 399–409.

126. *Романко В.К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений / В.К. Романко // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 7. – С. 727–733.

127. *Романко В.К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений / В.К. Романко // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 1. – С. 47–50.

128. *Романко В.К.* О системах операторных дифференциальных уравнений / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1574–1585.

129. *Макаров А.А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных / А.А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 320–324.

130. *Макаров А.А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений / А.А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 144–150.

131. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое / А.Х. Мамян // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.

132. *Юнусов М.Ю* Операторные уравнения с малым параметром и нелокальные граничные условия / М.Ю. Юнусов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 172–181.

133. *Юнусов М.Ю.* О некоторых краевых задачах, содержащих малый параметр / М.Ю. Юнусов // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 12. – С. 67–79.

134. *Балаев М.К.* Корректность смешанной задачи для некоторых классов корректных по Петровскому уравнений / М.К. Балаев, С.Я. Якубов / Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 4. – С. 527–536.

135. *Бицадзе А.В.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739–740.

136. *Гуревич П.Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач / П.Л. Гуревич // Мат. заметки. – 2002. – Т. 72, № 2. – С. 178–197.

137. *Гуревич П.Л.* Обобщенные решения нелокальних эллиптических задач / П.Л. Гуревич // Мат. заметки. – 2005. – Т. 77, № 5. – С. 665–682.

138. *Гущин А.К.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Мат. сб. – 1994. – Т. 185, № 1. – С. 121–160.

139. *Гущин А.К.* Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351, № 1. – С. 7–8.

140. *Житарашу Н.В.* О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений / Н.В. Житарашу, С.Д. Эйдельман // Мат. исследования. – 1971. – Т. 6, № 2. – С. 63–73.

141. *Камынин Л.И.* Единственность решений краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / Л.И. Камынин // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 39–49.

142. *Лопушанская Г.П.* О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, № 11. – С. 1487–1494.

143. *Панеях Б.П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов / Б.П. Панеях // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35, № 3. – С. 425–434.

144. *Ройтберг Я.А.* Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 3. – С. 511–513.

145. *Ройтберг Я.А.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 13, № 1. – С. 165–181.

146. *Скубачевский А.Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах / А.Л. Скубачевский // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 120–131.

147. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I / А.Л. Скубачевский. – М.: РУДН, 2007. – Т. 26. Фундаментальные направления. – С. 3–132.

148. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II / А.Л. Скубачевский. – М.: РУДН, 2009. – Т. 33. Фундаментальные направления. – С. 3–179.

149. *Chabrowski J.* On non-local problems for elliptic linear equations / J. Chabrowski // Funckcialaj Ekvacioj. – 1980. – Vol. 32. – P. 215–226.

150. *Житарашу Н.В.* Параболические граничные задачи / Н.В. Житарашу, С.Д. Эйдельман. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.

151. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений / А.И. Кожанов // Вестник СамГУ. – 2008. – № 3. – С. 165–174.

152. *Комарницька Л.І.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом / Л.І. Комарницька, Б.Й. Пташник // Укр. мат. журн. – Т. 47, № 9. – С. 1197–1208.

153. *Маловичко В.А.* О разрешимости нелокальных краевых задач для некоторых систем эволюционных дифференциальных уравнений / В.А. Маловичко // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 2. – С. 211–216.

154. *Матійчук М.І.* Про нелокальну параболічну крайову задачу / М.І. Матійчук // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 3. – С. 362–367.

155. *Пукальський І.Д.* Нелокальна параболічна крайова задача з внутрішнім і фінальним керуванням / І.Д. Пукальський // Нелінійні крайові задачі. – 2000. – Т. 20. – С. 116–128.

156. *Пукальський І.Д.* Нелокальна задача Діріхде та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням / І.Д. Пукальський // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – № 314–315. – С. 150–158.

157. *Шополов Н.Н.* Смешанная задача для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием / Н.Н. Шополов // Докл. Болг. АН. – 1981. – Т. 34, № 7. – С. 935–936.

158. *Орынбасаров М.* Нелокальные начальные и краевые задачи для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени //

М.Орынбасаров, Е.М. Орынбасаров // Математический журнал. Алмааты. – 2002. – Т. 2, № 4. – С. 68–74.

159. *Chabrowski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation / J. Chabrowski // Funckcialaj Ekvacioj. – 1984. – Vol. 27. – P. 101–123.

160. *Шелухин В.В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана / В.В. Шелухин // Мат. заметки. – 1991. – Т. 49, № 1. – С. 135–143.

161. *Шелухин В.В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В.В. Шелухин // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 2. – С. 191–207.

162. *Шелухин В.В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана / В.В. Шелухин // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 3. – С. 701–724.

163. *Либерман Г.М.* Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений / Г.М. Либерман // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. – 2002. – Т. 1. – С. 233–254.

164. *Каленюк П.И.* Обобщенный метод разделения переменных / П.И. Каленюк, Я.О. Баранецкий, З.Н. Нитребич. – К.: Наукова думка, 1993. – 232 с.

165. *Дрінь Я.М.* Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами / Я.М. Дрінь, С.Д. Ейдельман // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. Відп. ред. С.Д. Івасишен. – Чернівці, 1990. – С.21-31.

166. *Маценис И.* О регулярности краевых условий / И. Маценис // Дифференц. уравнения и их приложения. – Ин-т матем. и кибернет. АН Литов. ССР, 1978. – С. 17–24.

167. *Чесалин В.И.* Задача с граничными условиями для абстрактных уравнений Лява / В.И. Чесалин, Н.И. Юрчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 63–73.

168. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных уравнений Лява / В.И. Чесалин // Деп. в ВИНИТИ. – 1976. – N2913-76. – 18 с.

169. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для некоторых абстрактных гиперболических уравнений / В.И. Чесалин // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 2104–2106.

170. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка / В.И. Чесалин // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 3. – С. 468–476.

171. *Чесалин В.И.* Задача сопряжения абстрактных параболических и гиперболических уравнений с нелокальными условиями по t. / В.И. Чесалин, Н.И. Дрчук // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 3. – С. 197–200

172. *Энгельман У.* Задача с нелокальными граничными условиями для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка / У. Энгельман // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 9. – С. 1687–1693.

173. *Каленюк П.І.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для однорідної системи рівнянь із частинними похідними / П.І. Каленюк, І.В. Когут, З.Н. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 46, № 3. – С. 25–31.

174. *Каленюк П.І.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними / П.І. Каленюк, І.В. Когут, З.Н. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 7–15.

175. *Мельникова И.В.* Условия разрешимости абстрактных краевых задач / И.В. Мельникова // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 17–24.

176. *Сабитова К.Б.* Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения / Ю.К. Сабитова // Изв. вузов. Математика. –2009. – № 12. – С. 49–58.

177. *Сабитова К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитова // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 4. – С. 596–602.

178. *Смагина Т.И.* О разрешимости обобщенной периодической задачи / Т.И. Смагина // Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тези докл. – Минск, 1982. – С. 180.

179. *Борок В.М.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое / В.М. Борок, И.И. Антыпко / Теория функций, функицональный анализ и их приложения. – Харьков, 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.

180. *Фардигола Л.В.* Нелокальная краевая задача в слое: влияние параметров на свойства решений / Л.В. Фардигола // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 2151–2161.

181. *Кмить И.Я.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем / И.Я. Кмить, С.П. Лавренюк // Успехи мат. наук. – 1991. – Т. 46, № 9. – С. 149.

182. *Кміть І.Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними / І.Я. Кміть // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45. № 9. – С. 1307–1311.

183. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / М.І. Матійчук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

184. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні / М.І. Матійчук. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 248 с.

185. *Корбут Л.І.* Про зображення розв'язків нелокальних задач для параболічних рівнянь / Л.І. Корбут, М.І. Матійчук // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 7. – С. 947–951.

186. *Городецький В.В.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь / В,В, Городецький, Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 61–78.

187. *Дрінь Я.М.* Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Збірник наук. праць. Вип. 501. Математика. 2010. С. 24–32.

188. *Дрінь Я.М.* Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН Украни. 2010. 7. С. 7–11.

189. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

190. *Дрінь М.М.* Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладкими символами/ М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь //Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol.16 (KROMSH - 2005). September 18-29. – 2006. – P.33-37.

191. *Drin Y.M.* On representation of the solutions of nonlocal boundary value problems for parabolic pseudodifferential equations / Y.M. Drin // Nonlinear partial differential equations/ International Conference Kyiv, August 22-28, 2001. Book of Abstracts. – Donetsk, 2001. – P. 41-42.

192. *Дрінь Я.М.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь. Міжнародна

наук. конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь (1-5 жовтня 2001р., м. Дрогобич). Тези доповідей. – К., 2001. – С. 56.

193. *Дрінь М.М.* Зображення розв'язку нелокальної задачі Діріхле для параболічного псевдодиференціального рівняння / М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу Івано-Франківськ. Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2003. – С. 31.

194. *Дрінь М.М.* Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння зі змінним по t символом/ М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // Міжнародна наук. конф. "Математичний аналіз і суміжні питання"(17-20 листопада 2005 р.). Тези доповідей. – Львів, 2005. – С. 24.

195. *Дрінь Я.М.* Дослідження задачі Коші та нелокальних багатоточкових крайових параболічних задач для псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнародна наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування"(11-14 жовтня 2006 р.). Тези доповідей. – Чернівці, 2006. – С. 204.

196. *Дрінь Я.М.* Дослідження прямої і оберненої задачі для одного класу псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2010 р., Київ, матеріали конф. Т. 1. – К.: НТУУ, 2010. – С. 147.

197. *Дрінь М.М.* Зображення розв'язку нелокальної розривної задачі Діріхле для модельного псевдодиференціального рівняння / М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // Шості Боголюбовські читання. Тези доповідей міжнародної наукової конференції, 26-30 серпня 2003року. – К., 2003. – С. 66.

198. *Дрінь Я.М.* Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння зі змінним по t символом / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn

Mathematical School-Symposium. Vol.16 (KROMSH – 2005, September 18-29, 2005). – Simferopol, 2006. – P.11–12.

199. *Дрінь М.М.* Нелокальна задача Неймана для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладким неоднорідним символом / Дрінь М.М., Дрінь Я.М. // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. Тези доповідей. – Чернівці: Книги-XXI, 2009. – С. 44–45.

200. *Лучко В.М.* Задача Коші та задача з імпульсною дією для параболічних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь вищого порядку по t / В.М. Лучко // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2010.

201. *Дринь Я.М.* Задача Коши для некоторых классов параболических псевдодифференциальных уравнений /Я.М. Дринь // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1979. – 123 с.

202. *Самко С.Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения / Стефан Григорьевич Самко. – Ростов-на-Дону: Ростовский ун-т, 1984. – 208 с.

203. *Дрінь Я.М.* Нелокальна задача Діріхле для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 2–3. – С.72–81.

204. *Ейдельман С.Д.* До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь / С.Д. Ейдельман, Я.М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 10-12.

205. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для рівномірно параболічних систем псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Наукові записки НаУКМА, т. 152. Фізико-математичні науки, 2014. – С.21-26.

206. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння з негладким символом / Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького

університету: Збірник наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 18-22.

207. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійного псевдодиференціального рівняння з інтегральним коефіцієнтом / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Тези міжнародної конференції присвяченої пам'яті академіка М.П. Кравчука (22-28 вересня 1992р.). – Київ-Луцьк, 1992. – С. 70.

208. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

209. *Дрінь М.М.* Задача з нелокальними псевдодиференціальними умовами для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / М.М. Дрінь, Я.М. Дрінь // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 4. – С.48–56.

210. *Лавренчук В.П.* Задача Коші для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку з інтегральним коефіцієнтом / В.П. Лавренчук // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. Відп. ред. С.Д. Івасишен. – Чернівці, 1990. – С. 120 – 127.

211. *Городецький В.В.* Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – Т. 1, вип. 3. – Чернівці: Рута, 2011. – С. 13–18.

212. *Дрінь Я.М.* Про структуру псевдодиференціальних операторів з узагальнено однорідними символами / Я.М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 7. – С. 592–595.

213. *Дринь Я.М.* О параболических псевдодифференциальных операторах / Я.М. Дринь // VIII Воронежская зимняя математическая школа. Тез. докл. – Воронеж, 1974. – С. 33–34.

214. *Дринь Я.М.* Шаудеровские оценки и теорема о корректной разрешимости краевых задач для параболических уравнений в свертках с гладкими сим-

волами / Я.М. Дринь // Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 116–123.

215. *Литовченко В.А.* Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами / В.А. Литовченко // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С.374–393.

216. *Гельфанд И.М.* Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 472 с.

217. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

218. *Івасишен С.Д.* Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь / С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42. – С. 31–38.

219. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Эльсгольц Л.Э. Норкин С.Б. – М.: Наука, 1971. – 293 с.

220. *Гурли А.С.* Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика / А.С. Гурли, Дж. В.-Х. Соу, Лж. Х. Ву // Совр. математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 84–120.

221. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Аниконов Ю.Е. – Новосибирск, 1978.

222. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: ГИФМЛ, 1968. – 110 с.

223. *Gorodetsii V.V.* Method of Hybrid Integral Transforms for Analizing Direct and Inverse Problems for a Class of Equations with a Pseudodifferential

Operator / V.V. Gorodetskii and Ya.M. Drin // Differential Equations, 2013, Vol. 49, No 4, P. 1–7. Pleiades Publishing, Ltd, 2013. (Original Russian Test, V.V. Gorodetskii and Ya. M. Drin, 2013, publisher in Differential'nye Uravneniya, 2013, Vol. 49, No 4, P. 487–493).

224. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

225. *Горбачук В.И.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 4. – С. 799 – 803.

226. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений / В.И. Горбачук // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 144 – 150.

227. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 334 с.

228. *Готинчан Т.І.* Різні форми означення просторів типу W / Т.І. Готинчан, Р.М. Атаманюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21-26.

229. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем / Б.Л. Гуревич // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893-896.

230. *Літовченко В.А.* Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання / В.А. Літовченко // Укр. мат. журн., 2005. – Т. 57, № 12. – С.1653–1667.

231. *Drin' Ya. M., Petryshyn R. I.* Cauchy Problem for Autonomous Quasilinear Parabolic Pseudodifferential Equations with Deviating Argument. – Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 197, Issue 1. – PP. 29–38. DOI:

10.1007/S 10985-014-1699-0. (Translated from Neliniini Kolyvannya, Vol. 16, No 1. – P. 29–37. January-March, 2013).

232. *Гельфанд И.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – Т. 15. – С. 309–360.

233. *Ghosh Roy.* Methods of Inverse Problems in Physics / Ghosh Roy, Dilip N. – CRC Press, 1991. – 504 p.

234. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I Existence and uniqueness / B.F. Jones / J. Math. Mech. – 1962. – Vol. 11, No 5. – P. 907–918.

235. *Jones B.F.* Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations / B.F. Jones / Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33–34.

236. *Ivanchov M.I.* Inverse problem for equations of parabolic type / Ivanchov M.I. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 240 p.

237. *Іванчов М.І.* Про одну задачу нелінійні теплопровідності / М.І. Іванчов, Л.Е. Губаль // Вісник Львівського університету. Серія: Механіко-математична. Вип. 18. – 1981. – С. 34–38.

238. *Ivanchov M.I.* Free boundary problem for nonlinear diffusion equation / M.I. Ivanchov // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 19, No 2. – P. 156–164.

239. *Ivanchov M.I.* Inverse problem for semilinear parabolic equation / M.I. Ivanchov // Matematychni Studii. – 2008. – Vol. 29, No 2. – P. 181–191.

240. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами / Іванчов М.І.. – К.: Міністерство освіти України, 1995. – 82 с.

241. *Ivanchov Mykola I.* An inverse problem for a parabolica equation in a free-boundary domain degenerating at the initial moment / Mykola I. Ivanchov and Tetyana Savitska // J. of Mathematical Sci. – Vol. 181, No 1. – 2012. – P. 47–64.

242. *Drinh Nho Hao.* Determination of a source in the heat equation from integral observations // Nho Hao Drinh, Xuan Thanh Phan, L. Lesnic, M.Ivanchov // J. of Computational and Applied Mathematics. – 264 (2014). – P. 82–89.

243. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы / Чикрий А.А. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.

244. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля // Кибернетика та системный анализ. – 2001. – № 6. – С. 66–99.

245. *Chikrii A.A., Eidelman S.D.* Game problems for systems with Volterra evolution fractal games // Int. J. Math. Game Theory Algebra. – 2001. – **11,** No 5. – P. 9.

246. *Chikrii A.A., Eidelman S.D.* Game problems for evolutionary equations of fractional order // Int. J. Comput. Math. Appl. Issue "Global optimization, Control and Games, IV". – 2001. – No 4. – P. 3–28.

247. *Дрінь Я.М.* Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором // Доп. НАН України. – 2011, № 5. – С. 12–17.

248. *Дрінь Я.М.* Дослідження прямої і оберненої задачі для неоднорідних псевдодиференціальних рівнянь. Наук. вісн. ЧНУ, 2010, вип. 528. – С. 36–42.

249. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1964.

250. *Дрінь Я.М.* Дослідження задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М., Дрінь М.М. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – **2**, № 1. – С. 32–34.

251. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

252. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

253. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівннь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М., Петришин Р.І. // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, № 1. – С. 29–37.

254. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М., Дрінь М.М. // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (11–13.06.2012, Чернівці): Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 69.

255. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з символом, залежним від часу, і з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М. // Differential Equations and their applications. Materials of Intern. Scientific conf. dedicated to the 70^{th} years of V.V. Marinets (September 27-29, 2012, Uzhgorod). – Ужгород, 2012. – P. 26.

256. *Дрінь Я.М.* Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М. // Міжнар. матем. конф "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-ліття від дня народження член.-кор. України Положого Г.М. (23-24 квітня, 2014, Київ). – Матеріали конф. – С. 60.

257. *Слюсарчук В.Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом / Слюсарчук В.Ю. // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, № 1. – С. 118–124.

258. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі / Слюсарчук В.Ю. // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 307–312.

259. *Слюсарчук В.Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом / Слюсарчук В.Ю. // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 416–425.

260. *Дрінь Я.М.* Задача Коші для квазілінійних систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента / Дрінь Я.М. // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці' (11–13.06.2012, Чернівці): Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 70.

261. *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Уфлянд Я.С. // Вопросы мат. физики. Л., 1976. С. 93–106.

262. *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966.

263. *Дрінь Я.М.* Розв'язування прямої і оберненої задач для деяких песвдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь // Міжнар. наук. конф. "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури" (17-21.10.2010, Чернівці): Тези доп. – Чернівці: Золоті литаври, 2010. – С. 66–67.

264. *Дрінь Я.М.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України. – Київ, 1993. – С. 25–32.

265. *Дрінь Я.М.* Коректна розв'язність задачі Коші для однієї системи нелінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Нелинейные краевые задачи математической физики и их

приложения: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 73–74.

266. *Дрінь Я.М.* Класична розв'язність багатоточкової нелокальної задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Я.М. Дрінь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Зб. наук. пр. Фізико-математичні науки. – № 804. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – С. 21–28.

267. *Городецький В.В.* Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в зліченно нормованих просторах гладких функцій / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 2. – С. 96–111.

268. *Ya.M. Drin'* Nonlocal problem for one class equations of diffusion in space of generalized functions. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OU, pp. 1–12 (December 17, 2013).

269. *V.V. Gorodetsky, Ya.M. Drin'.* Investigation of Cauchy and Nonlocal problems of Diffusion Equation. Pros. Spie 9066, Eleventh Intern. Conf. on Correlation Optics, 9066OT, pp. 1–20 (December 17, 2013).

270. *Городецкий В.В.* Нелокальная по времени двухточечная задача и задача оптимального управления для эволюционных псевдодифференциальных уравнений / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь // Проблемы управления и информатики. – 2014, № 2. – С. 65–79.

271. *Городецький В.В.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій / Городецький В.В., Дрінь Я.М. // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 1. – С. 26–42.

272. *Городецький В.В.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь / Городецький В.В., Дрінь Я.М.

// Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 5. – С. 619–633. ISSN 1027-3130.

273. *Дрінь Я.М.* Нелокальна задача для автономних квазілінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента / Я.М. Дрінь, Р.І. Петришин // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 200–212. ISSN 1562-3076.

274. *Дрінь Я.М.* Класичні та узагальнені нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Ярослав М. Дрінь // Third intern. conf. for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (Lviv, November 3–6, 2010): Book of abstracts, Donetsk, 2010. – P. 55.

275. *Дрінь Я.М.* Точні оцінки осцилюючих інтегралів / Я.М. Дрінь // Матеріали Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченої 65–річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нац. ун-ту. ім. Тараса Шевченка (8–10.06.2011). – Київ, 2011. – С. 78.

276. *Дрінь Я. М.* Дослідження нелокальних задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / Ярослав Дрінь // Міжнар. математ. конф. ім. В.Я. Скоробагатька (19–23.09.2011, Дрогобич): Тези доп. – Львів, 2011. – С. 68

277. *Дрінь Я.М.* Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами / Дрінь Я.М. // Fouth Intern. conf for Yong Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynskii (November, 14–17, 2012, Donetsk): Book of abstracts. – Донецьк, 2012. – P. 40.

278. *Дринь Я.М.* О классических фундаментальных решениях задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений и

их применения / Я.М. Дринь // Респ. конф. по нелинейным задачам мат. физики: Тез. докл. – Донецьк, 1983. – С. 44.

279. *Дринь Я.М.* Фундаментальная матрица решений задачи Коши для параболических систем / Я.М. Дринь // Тез. докл. VI республ. конф. "Нелинейные задачи математической физики". – Донецк, 1987. – С. 44.

280. *Дрінь Я.М.* Про задачу Коші для однієї системи квазілінійних рівнянь / Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь // Міжнар. математ. конф., присвячена пам'яті Ганса Гана (10–15.10.1994, Чернівці): Тези доп. – Чернівці: Рута, 1994. – С.43.

281. *Городецький В.В.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Наук. конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (24–27.09.1996): Тези доп. – Івано-Франківськ, 1996. – С. 20.

282. *Дрінь Я.М.* Параболічна псевдодиференціальна багатоточкова задача / Я.М. Дрінь // Праці IV-ої Міжнародної наук.-практичної конф. "Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки" (ПІКТ-2015), Чернівці, 26–29 травня 2015 р. – С. 130–132.