НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЧЕПУРУХІНА ІРИНА СЕРГІЇВНА

УДК 517.956.2

ЕЛІПТИЧНІ ЗА ЛАВРУКОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
МУРАЧ Олександр Олександрович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАСИШЕН Степан Дмитрович,
Національний технічний університет України "КПІ", м. Київ,
професор кафедри математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКА Галина Петрівна,
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
професор кафедри диференціальних рівнянь.

Захист дисертації відбудеться " 1 " березня 2016 р. о 15 годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики
НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 28 " січня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена розвитку сучасної теорії загальних еліптичних диференціальних рівнянь, а саме, дослідженню характеру розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач і властивостей їх розв'язків у шкалах гільбертових функціональних просторів Хермандера.

У 1963 році польським математиком Б. Лавруком (B. Lawruk) був введений важливий клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Цей клас природно виникає при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі відносно деякої формули Гріна і є замкненим відносно такого переходу. Згодом з'ясувалося, що до цього класу належать різні крайові задачі, які виникають у теорії пружності і гідромеханіці (А. Г. Асланян, Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский (1981), P. G. Ciarlet (1990), S. Nazarov, K. Pileckas (1993)). Відмітимо, що оператори, відповідні еліптичним за Лавруком крайовим задачам, утворюють підалгебру алгебри Буте де Монвеля.

Еліптичні за Лавруком крайові задачі є нетеровими у підходящих парах позитивних соболєвських просторів. Цей факт міститься у результатах Буте де Монвеля (L. Boutet de Monvel (1971)), Г. І. Ескіна (1973), Ш. Ремпеля і Б.-В. Шульце (S. Rempel, B.-W. Schulze (1982)), Г. Грубб (G. Grubb (1990)), які стосуються властивостей загальних еліптичних псевдодиференціальних крайових задач. Наприкінці минулого століття у монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна (V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann (1997)), статтях І. Я. Ройтберг (1997, 1998) і монографії Я. А. Ройтберга (Ya. A. Roitberg (1999)) було доведено теореми про нетеровість еліптичних за Лавруком крайових задач, апріорні оцінки і регулярність їх розв'язків у модифікованій за Я. А. Ройтбергом двобічній соболєвській шкалі. Згодом А. Н. Кожевніков (A. Kozhevnikov (2001)) для цієї шкали встановив нетеровість еліптичних крайових задач, породжених алгеброю Буте де Монвеля.

У теперішній час досить активно досліджуються різні класи диференціальних рівнянь з частинними похідними у шкалах функціональних просторів, для яких показником регулярності розподілів служить не числовий (як у просторах Соболєва), а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (див. монографії B. P. Paneah (2000), H. Triebel (2001), В. А. Михайлеця і О. О. Мурача (2010, 2014), F. Nicola, L. Rodino (2010)). Важливі класи таких просторів були введені Л. Хермандером (L. Hörmander) у 1963 році і застосовані ним до дослідження регулярності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Протягом останніх десяти років у роботах В. А. Михайлеця, О. О. Мурача, Т. М. Зінченко і А. В. Аноп було побудовано теорію розв'язності загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Ключовим методом у цій теорії служить інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили класи гільбертових просторів Хермандера — уточнену соболєвську шкалу і розширену соболєвську шкалу, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Знайдено різні застосування цієї теорії до задач, де класична соболєвська шкала є недостатньо тонко градуйованою.

Втім, клас еліптичних за Лавруком крайових задач не був охоплений зазначеною теорією. Більше того, соболєвська теорія цих задач не розвинута у тій же повноті, як це зроблено для класичних (регулярних) еліптичних крайових задач. Це, зокрема, стосується теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса (J.-L. Lions, E. Magenes (1962, 1963, 1968)) про розв'язність регулярних еліптичних крайових задач у негативних просторах Соболєва.

Зважаючи на це, побудова теорії розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень у рамках науково-дослідної теми «Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики» (номер державної реєстрації 0111U001011).

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у гільбертових шкалах функціональних просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є еліптичні за Лавруком крайові задачі, задані в обмеженій евклідовій області з нескінченно гладкою межею.

Предметом дослідження є властивості еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах гільбертових ізотропних функціональних просторів Хермандера. А саме: характер розв'язності цих задач, апріорні оцінки їх узагальнених розв'язків, регулярність цих розв'язків, достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Завдання дослідження:

1. Дослідити характер розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу і складаються з регулярних розподілів.

2. Дослідити характер розв'язності цих задач у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Ройтбергом.

3. Встановити теореми типу Ліонса-Мадженеса про характер розв'язності цих задач у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.

4. Встановити апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера та їх модифікацій за Ройтбергом.

5. Дослідити регулярність зазначених розв'язків у цих просторах і встановити нові достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу і теорії функцій. Ключовим у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, зокрема, соболєвських просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Доведено теореми про нетеровість еліптичної за Лавруком крайової задачі і породжені нею ізоморфізми у парах просторів Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів.

2. Доведено теореми про нетеровість цієї задачі у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Ройтбергом, і породжений задачею повний набір ізоморфізмів.

3. Встановлено теореми типу Ліонса-Мадженеса про нетеровість цієї задачі у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.

4. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера та їх модифікацій за Ройтбергом.

5. Доведено теореми про регулярність зазначених розв'язків у цих просторах. Для цих розв'язків знайдено нові достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Основні її результати та методика їх отримання можуть бути використані в подальших дослідженнях у теорії рівнянь з частинними похідними, насамперед еліптичних і параболічних рівнянь, та у спектральній теорії диференціальних операторів.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дисертації, постановка задач і схема їх дослідження належать науковому керівникові О. О. Мурачу. Результати статей [1, 4, 5] отримані здобувачкою самостійно. У спільних з керівником статтях [2, 3] О. О. Мурачу належать аналіз отриманих результатів і участь у підготовці робіт до публікації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на:
— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);
— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);
— спільному семінарі кафедр вищої і прикладної математики Чернігівського національного педагогічного університету і Чернігівського національного технологічного університету (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);
— Міжнародній міждисциплінарній конференції молодих вчених „Шевченківська весна" (Київ, 1–3 квітня 2015 року);
— Шістнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 14–15 травня 2015 року);
— Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 року);
— Математичній конференції „Алгебра, топологія, аналіз (X літня школа)" (Одеса, 3–15 серпня 2015 року);
— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 року);

— Всеукраїнській науково-практичній конференції „Диференціальні рівняння і суміжні питання” (III сіверські читання з математики), присвяченій 90-річчю від дня народження Я. А. Ройтберга (Чернігів, 25 вересня 2015 року).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 10 наукових працях. З них 5 статей [1 – 5] — у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, а роботи [6 – 10] — у матеріалах наукових конференцій, серед яких 4 міжнародних. Серед статей 2 опубліковано в журналах, які входять до наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus, MathSciNet).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків і списку використаних джерел, що налічує 194 найменування. Повний обсяг роботи складає 164 сторінки друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об’єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації викладено факти, на яких грунтується ключовий метод дослідження — інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Розглянуто класи гільбертових просторів Хермандера — розширену і уточнену соболєвську шкали, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва.

Підрозділ 2.1 присвячений класам RO і $\mathcal{M}$ функціональних параметрів, які служать показниками регулярності для просторів Хермандера, що утворюють ці шкали.

За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що $c^{-1} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1$ і $\lambda \in [1,b]$ (сталі b і c можуть залежати від α). Такі функції називають RO-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем (V. G. Avakumović) у 1936 році і досить повно досліджений (див. монографії Є. Сенети (1985) (додаток 1) і N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels (1989) (пп. 2.0 – 2.2)).

Цей клас допускає простий інтегральний опис:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \iff \alpha(t) = \exp\biggl(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\,d\tau\biggr) \;\text{для}\; t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1,\infty)$.

Між RO-змінними і степеневими функціями існує такий зв'язок: знайдуться числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c\lambda^{s_1} \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1,\ \lambda \geq 1. \tag{1}$$

Поведінку функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ на нескінченності характеризують її індекси Матушевської:

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва частина нерівності (1)}\},$$
$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права частина нерівності (1)}\}.$$

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Й. Караматою, тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для довільного $\lambda > 0$.

Якщо $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$, то функція $\alpha(t) := t^{\sigma}\varphi(t)$ належить до класу RO і має рівні індекси Матушевської $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sigma$.

Еталонним прикладом функції класу $\mathcal{M}$ служить неперервна функція $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ така, що

$$\varphi(t) := (\ln t)^{q_1}(\ln\ln t)^{q_2}\ldots(\ln\ldots\ln t)^{q_k}, \quad t \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $s, q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$.

Наведемо приклад функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ з різними індексами Матушевської:

$$\alpha(t) := t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^r},\ \ t > e, \quad \text{і} \quad \alpha(t) := t^{\theta},\ \ 1 \leq t \leq e,$$

де $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1]$. Тут $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

У підрозділі 2.2 розглянуто класи гільбертових просторів Хермандера, які утворюють розширену та уточнену соболевські шкали на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\alpha(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi)$ є функцією аргументу ξ, квадратично інтегровною на $\mathbb{R}^n$; тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}(\xi)$ є перетворення Фур'є розподілу w. У цьому просторі означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, введених і досліджених Л. Хермандером (1963). А саме, $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) \equiv \alpha(\langle\xi\rangle)$.

Якщо $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}$, то $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) =: H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів простір Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$. Узагалі виконуються неперервні і щільні вкладення

$$H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n) \text{ для всіх } s_1 > \sigma_1(\alpha),\ s_0 < \sigma_0(\alpha).$$

Клас усіх просторів $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, називається розширеною соболєвською шкалою (на $\mathbb{R}^n$).

Її підклас — уточнена соболєвська шкала — складається з усіх просторів Хермандера $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) := H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ з показником регулярності $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Ця шкала прив'язана до соболєвської шкали за допомогою числового параметра σ, оскільки

$$H^{(\sigma+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(\sigma-\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для довільного} \quad \varepsilon > 0.$$

У підрозділах 2.3 і 2.4 розглянуто метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, його властивості і застосування до зазначених шкал просторів Хермандера.

Нагадаємо означення цієї інтерполяції. Нехай задана упорядкована пара комплексних гільбертових просторів $X := [X_0, X_1]$ така, що ці простори сепарабельні і $X_1 \hookrightarrow X_0$, причому вкладення неперервне і щільне. Таку пару називаємо припустимою. Для неї існує самоспряжений додатно визначений (взагалі, необмежений) оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для кожного $w \in X_1$. Оператор J однозначно визначається за парою X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a,b]$ і відокремлені від нуля на кожній множині $[r,\infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектральної теореми означений самоспряжений оператор $\psi(J)$ у просторі X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_{\psi}$ або, коротше, X_{ψ} область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком $(w_1, w_2)_{X_{\psi}} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$. Простір X_{ψ} гільбертів.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ називається інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така властивість. Якщо для кожного $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_{ψ} є обмеженим оператором $T : X_{\psi} \to Y_{\psi}$. У цьому випадку говоримо, що простір X_{ψ} отримується методом інтерполяції з функціональним параметром ψ пари X.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$, де ψ_1 — деяка додатна угнута функція.

При інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість лінійних операторів, що у них діють, а і нетеровість операторів при незмінному їх дефекті. Ця обставина робить метод інтерполяції корисним у теорії еліптичних крайових задач.

Простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, можна отримати інтерполяцією з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. А саме, нехай функція $\alpha \in \mathrm{RO}$, а числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо

$$\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha(t^{1/(s_1-s_0)}) \quad \text{при} \quad t \geq 1$$

і $\psi(t) := 1$ при $0 < t < 1$. Тоді функція ψ є інтерполяційним параметром і

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \bigl[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\bigr]_{\psi}. \tag{2}$$

Відмітимо, що розширена соболєвська шкала складається (з точністю до еквівалентності норм) з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва.

Основні результати дисертації викладено у третьому, четвертому і п'ятому її розділах.

У *третьому* розділі дисертації досліджено еліптичну за Лавруком крайову задачу у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу і складаються з регулярних розподілів.

У підрозділі 3.1 дано означення цієї задачі. Нехай Ω є довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею Γ. Розглянемо в області Ω лінійну крайову задачу

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{4}$$

Тут $A = A(x, D)$ — диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, кожне $B_j = B_j(x, D)$ — крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $m_j \leq 2q - 1$, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ — (дотичний) диференціальний оператор на Γ порядку $\mathrm{ord}\, C_{j,k} \leq m_j + r_k$, де $r_1, \ldots, r_\varkappa$ — фіксовані цілі числа. Усі коефіцієнти цих лінійних диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Позначимо $v := (v_1, \ldots, v_\varkappa)$ і $g := (g_1, \ldots, g_{q+\varkappa})$.

У крайовій задачі (3), (4) є невідомими функція u в області Ω та $\varkappa \geq 1$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на межі Γ. Останні містяться лише у крайових умовах.

У роботі припускаємо, що крайова задача (3), (4) еліптична за Лавруком в області Ω, тобто диференціальний оператор A є еліптичним на $\overline{\Omega}$, правильно еліптичним на Γ, а система крайових умов (4) задовольняє аналогу умови Шапіро-Лопатинського щодо A на Γ.

Для цієї задачі правильна така спеціальна формула Гріна:

$$(Au,w)_\Omega+\sum_{j=1}^{q+\varkappa}\Big(B_ju+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}v_k,h_j\Big)_\Gamma=$$

$$=(u,A^+w)_\Omega+\sum_{j=1}^{2q}\Big(D_\nu^{j-1}u,K_jw+\sum_{k=1}^{q+\varkappa}Q_{k,j}^+h_k\Big)_\Gamma+\sum_{j=1}^{\varkappa}\Big(v_j,\sum_{k=1}^{q+\varkappa}C_{k,j}^+h_k\Big)_\Gamma,$$

де $u,w\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v_1,\ldots,v_\varkappa,h_1,\ldots,h_{q+\varkappa}\in C^\infty(\Gamma)$, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$, а також розширення цих скалярних добутків за неперервністю. Тут A^+ є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$, а $C_{k,j}^+$ і $Q_{k,j}^+$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення крайових операторів B_j у вигляді

$$B_j(x,D)=\sum_{k=1}^{2q}Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1}.$$

(Звісно, якщо $k>m_j$, то $Q_{j,k}=0$). Тут і далі $D_\nu:=i\partial/\partial\nu$, де ν — векторне поле ортів внутрішніх нормалей до Γ. Окрім того, кожне K_j — деякий крайовий диференціальний оператор Γ порядку $\operatorname{ord}K_j\leq 2q-j$.

З огляду на цю формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q+\varkappa$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$A^+w=\omega\quad\text{в}\quad\Omega,\tag{5}$$

$$K_jw+\sum_{k=1}^{q+\varkappa}Q_{k,j}^+h_k=\chi_j\quad\text{на}\quad\Gamma,\quad j=1,...,2q,\tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa}C_{k,j}^+h_k=\chi_{2q+j}\quad\text{на}\quad\Gamma,\quad j=1,...,\varkappa.\tag{7}$$

Ця задача є формально спряженою до задачі (3), (4) відносно наведеної формули Гріна. Відмітимо, що еліптичність задачі (3), (4) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (5), (6), (7).

У підрозділі 3.2 наведено різні приклади еліптичних за Лавруком крайових задач.

У підрозділі 3.3 розглянуто гільбертові простори $H^{\alpha}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, у яких досліджується крайова задача (3), (4). Вони утворюють розширені соболєвські шкали на Ω і Γ.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень u в область Ω усіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. У ньому введена норма за формулою

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),\ w = u \ \text{в} \ \Omega \,\bigr\}.$$

Він гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми.

Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на C^{∞}-многовиді Γ, які у локальних координатах належать до $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Перейдемо до детального означення.

Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ складають покриття многовиду Γ. Також виберемо довільним чином функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, підпорядковане умові $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$.

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Скалярний добуток у $H^{\alpha}(\Gamma)$ означений за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{p} \bigl((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j\bigr)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^{\alpha}(\Gamma)$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ позначає зображення розподілу h у локальній карті π_j. Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ гільбертів і сепарабельний. Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці (В. А. Михайлець, О. О. Мурач (2009)).

Для просторів Хермандера $H^{\alpha}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma)$ правильна інтерполяційна формула (2), якщо у ній замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ.

Уточнена соболєвська шкала на Ω або Γ складається з усіх просторів Хермандера $H^{\sigma,\varphi}(\Omega \text{ або } \Gamma) := H^{\alpha}(\Omega \text{ або } \Gamma)$ таких, що $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Далі у третьому розділі досліджено властивості еліптичної крайової задачі (3), (4) у розглянутих просторах Хермандера.

Пов'яжемо з цією задачею відображення

$$(u, v) \mapsto (f, g), \quad \text{де} \quad (u, v) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa}. \tag{8}$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\begin{gathered}\Lambda : \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) := H^{\eta}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma) \to \\ \to H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\end{gathered} \tag{9}$$

для кожного $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Тут і далі для лаконічності формул використовуємо функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$.

Позначимо через N множину всіх розв'зків

$$(u, v_1, ..., v_\varkappa) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$$

крайової задачі (3), (4) у випадку, коли її праві частини є нуль-функції. Аналогічно, позначимо через N^+ множину всіх розвя'зків

$$(w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

формально спряженої крайової задачі (5), (6), (7) у випадку, коли її праві частини є нуль-функції. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, лінійні простори N і N^+ скінченновимірні.

Теорема 3.1. *Для кожного $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$, оператор* (9) *нетерів. Його ядро збігається з простором N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ таких, що*

$$(f, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \quad \textit{для всіх} \quad (w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in N^+. \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *та не залежить від* η.

Ця теорема доводиться методом інтерполяції з функціональним параметром пар соболєвських просторів.

У випадку, коли $N = \{0\}$ і $N^+ = \{0\}$, оператор (9) встановлює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації зобразимо простори, в яких діє оператор (9) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) = N \dotplus \Big\{(u, v_1, ..., v_\varkappa) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) : \\ (u,\theta)_\Omega + \sum_{k=1}^{\varkappa} (v_k, \theta_k)_\Gamma = 0 \ \text{ для всіх } \ (\theta, \theta_1, ..., \theta_\varkappa) \in N\Big\},\end{gathered} \tag{11}$$

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)=N^{+}\dotplus\big\{(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma):\text{ виконується (10)}\big\}. \qquad (12)$$

Позначимо через P і P^{+} відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок в сумах (11) і (12) паралельно першому доданку. Відображення P і P^{+} не залежать від η.

Теорема 3.2. *Для кожного $\eta\in\mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$, звуження відображення* (9) *на підпростір $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P\big(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\big)\leftrightarrow P^{+}(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)).$$

Позначимо через $\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання усіх просторів $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$. Для вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ означена за допомогою обмеженого оператора (9) права частина (f,g) крайової задачі (3), (4). Цей вектор називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі.

З теореми 3.2 випливає така апріорна оцінка цього розв'язку у просторах Хермандера. Нехай $\eta\in\mathrm{RO}$, $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$ і число $\sigma>0$. Тоді існує число $c=c(\eta,\sigma)>0$ таке, що

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)}\leq c\,\big(\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}+\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)}\big) \qquad (13)$$

для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$.

Далі у третьому розділі досліджено властивості регулярності узагальнених розв'язків крайової задачі (3), (4).

Нехай V є відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0:=\Omega\cap V\neq\varnothing$. Покладемо $\Gamma_0:=\Gamma\cap V$(можливий випадок, коли $\Gamma_0=\varnothing$). Введемо локальні аналоги просторів Хермандера. Нехай $\eta\in\mathrm{RO}$. Позначимо через $\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ простір усіх векторів $(u,v)\in\mathcal{D}'(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$ таких, що $\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ для довільної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Цілком аналогічно означається простір $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Теорема 3.5. *Нехай вектор $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3), (4), *права частина якої задовольняє умову $(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ для деякого параметра $\eta\in\mathrm{RO}$ із $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$. Тоді $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.*

Як застосування просторів Хермандера наведено такі достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку розв'язків досліджуваної крайової задачі.

Теореми 3.6, 3.7. *Нехай ціле $l\geq 0$. Припустимо, що умови теореми* 3.5 *виконуються для деякого $\eta\in\mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$ і*

$$\int_{1}^{\infty}t^{2l+n-1}\eta^{-2}(t)dt<\infty. \qquad (14)$$

Тоді $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. *Якщо замість* (14) *виконується умова*

$$\int_1^\infty t^{2(l-r_k)+n-1}\eta^{-2}(t)dt < \infty$$

для деякого $k \in \{1, ..., \varkappa\}$, *то* $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Ця теорема випливає з теореми 3.5 і теореми вкладення Хермандера

$$\int_1^\infty t^{2l+n-1}\eta^{-2}(t)\,dt < \infty \iff H^\eta(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega})$$

та її аналогу для Γ; тут $\eta \in \mathrm{RO}$ і ціле число $l \geq 0$.

У підрозділі 3.9 наведені результати конкретизовано для уточненої соболєвської шкали.

У *четвертому* розділі дисертації досліджено еліптичну за Лавруком крайову задачу у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Я. А. Ройтбергом.

У підрозділі 4.1 наведено означення цієї шкали. Вона складається з комплексних гільбертових просторів $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, які означаються так.

Якщо $s \notin \{1/2, 3/2, \ldots, 2q-1/2\}$, то $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ є поповнення лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2q} \|(D_\nu^{k-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Тут $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) := H^{s,\varphi}(\Omega)$ при $s \geq 0$. Якщо $s < 0$, то $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ є дуальний простір до $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ відносно форми $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

У випадку, коли $s \in \{1/2, 3/2, \ldots, 2q-1/2\}$, простір $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ означається шляхом інтерполяції з параметром $\psi(t) \equiv t^{1/2}$ за формулою:

$$H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) := \left[H^{s-\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)\right]_\psi, \text{ де } 0 < \varepsilon < 1.$$

Відмітимо, що

$$H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad s > 2q - 1/2,$$

$$H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad s > -1/2.$$

Сформулюємо центральний результат четвертого розділу. Відображення (8) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$
\begin{aligned}
\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to \\
\to H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Теорема 4.1. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ оператор* (15) *нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову* (10)*. Індекс оператора* (15) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *та не залежить від s і φ.*

Якщо $s > 2q - 1/2$, то ця теорема є окремим випадком теореми 3.1. Теорема 4.1 виводиться з соболєвського випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ методом інтерполяції з функціональним параметром.

Для модифікованої за Ройтбергом уточненої соболєвської шкали правильні також версії теорем 3.2, 3.5 – 3.7.

У *п'ятому* розділі дисертації досліджено еліптичну крайову задачу (3), (4) у просторах Хермандера, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку і належать до уточненої соболєвської шкали. При цьому припускається, що права частина еліптичного рівняння належить до $L_2(\Omega)$.

Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$
\begin{aligned}
H^{s,\varphi}_{A}(\Omega) &:= \bigl\{ u \in H^{s,\varphi}(\Omega) :\ Au \in L_2(\Omega) \bigr\}, \\
\|u\|_{H^{s,\varphi}_{A}(\Omega)} &:= \bigl(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{L_2(\Omega)} \bigr)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Тут образ Au розуміється в сенсі теорії розподілів. Простір $H^{s,\varphi}_{A}(\Omega)$ гільбертів відносно введеної норми. Він залежить від усіх коефіцієнтів диференціального оператора A, навіть молодших (L. Hörmander (1955)).

Теорема 5.1. *Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}_{A}(\Omega)$, а відображення* (8) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$
\begin{aligned}
\Lambda :\ \mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi}_{A}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to \\
\to L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) := \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$, які задовольняють умову (10). *Індекс оператора* (16) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *та не залежить від s і φ.*

Цей результат є версією теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса (J.-L. Lions, E. Magenes (1962, 1963)), доведених для регулярних еліптичних крайових задач і просторів Соболєва.

Далі у п'ятому розділі наведено застосування теореми 5.1 до дослідження властивостей узагальнених розв'язків крайової задачі (3), (4).

Покладемо
$$\mathcal{S}'_A(\Omega) := \{u \in \mathcal{S}'(\Omega) : \, Au \in L_2(\Omega)\},$$
де $\mathcal{S}'(\Omega)$ є топологічний простір звужень на Ω усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для вектора $(u, v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$ означена за допомогою обмеженого оператора (16) права частина (f, g) крайової задачі (3), (4). Цей вектор називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі.

Теорема 5.3. *Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор $(u, v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3), (4), *праві частини якої задовольняють умови $f \in H^{s-2q,\varphi}(\Omega)$, якщо $s \geq 2q$, і $g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)$ для усіх $j \in \{1, ..., q+\varkappa\}$. Тоді $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $v_k \in H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma)$ для усіх $k \in \{1, ..., \varkappa\}$.*

Відмітимо, що теореми 5.1 і 5.3 є новими також і для соболєвських просторів навіть цілих порядків.

У завершальному підрозділі 5.4 теореми 5.1 і 5.3 застосовано до дослідження крайової задачі (3), (4) у важливому випадку однорідного еліптичного рівняння.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Доведено теорему про нетеровість еліптичної за Лавруком крайової задачі у підходящих парах просторів Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів, та теорему про породжені задачею ізоморфізми у цих просторах.

2. Встановлено теореми про нетеровість цієї задачі і породжені нею ізоморфізми у повній модифікованій за Ройтбергом уточненій соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему типу Ліонса-Мадженеса про нетеровість цієї задачі у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.

4. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичної за Лавруком крайової задачі у просторах Хермандера та їх модифікаціях за Ройтбергом.

5. Доведено теореми про регулярність зазначених розв'язків у цих просторах.

6. Знайдено нові достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) цих розв'язків, зокрема, достатні умови класичності узагальнених розв'язків.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. Чепурухіна І. С. Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 284 — 304.

2. Chepurukhina I. S. Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scales of spaces / I. S. Chepurukhina, A. A. Murach // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2015. — V. 21, № 1. — P. 6 — 21.

3. Murach A. A. Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces / A. A. Murach, I. S. Chepurukhina // Український математичний журнал. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 672 — 691. (Англійський переклад: Ukrainian Mathematical Journal — 2015. — V. 67, № 5. — P. 764 — 784.)

4. Чепурухіна І. С. Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах / І. С. Чепурухіна // Доповіді НАН України. — 2015. — № 7. — С. 20 — 29.

5. Чепурухіна І. С. Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 338 — 374.

6. Чепурухіна І. С. Про еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями на межі області у повних гільбертових шкалах функціональних просторів / І. С. Чепурухіна // Матеріали XIII

Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2015” (1–3 квітня 2015 р., м. Київ, Україна). — К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2015. — С. 59 — 62.

7. Мурач О. О. Про еліптичні крайові задачі за Лавруком у просторах Соболєва і Хермандера/ О. О. Мурач, І. С. Чепурухіна // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — К.: НТУУ „КПІ”, 2015. — С. 166 — 168.

8. Чепурухіна І. С. Про еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями на межі області у просторах Хермандера / І. С. Чепурухіна // Міжнародна конференція молодих математиків (3–6 червня 2015 р., Київ, Україна): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — С. 178.

9. Чепурухіна І. С. Про деякі напіводнорідні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера / І. С. Чепурухіна // X літня школа „Алгебра, топологія, аналіз” (3–15 серпня 2015 р., Одеса, Україна): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — С. 63.

10. Chepurukhina I. S. Elliptic problems with additional uknown functions in boundary conditions and Hörmander spaces /I. S. Chepurukhina // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (25–28 серпня 2015, Дрогобич, Україна): Тези доповідей. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. — С. 23.

Анотації

Чепурухіна І. С. Еліптичні за Лавруком крайові задачі у просторах Хермандера. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

У дисертаційній роботі побудовано теорію розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера — розширеній соболєвській шкалі та уточненій соболєвській шкалі. На відміну від класичних еліптичних крайових задач, еліптичні за Лавруком задачі містять додаткові невідомі функції у крайових умовах. Розширена соболєвська шкала складається з усіх гільбертових просторів Хермандера,

для яких показником регулярності розподілів служить функціональний параметр, RO-змінний за Авакумовичем на нескінченності. Її важливий підклас — уточнена соболєвська шкала — прив'язана до гільбертової соболєвської шкали числовим параметром. Ці шкали просторів Хермандера більш тонко градуйовані за допомогою функціонального параметра, ніж зазначена соболєвська шкала. Їх застосування дозволяє отримати більш точні результати про властивості еліптичних задач, ніж це можливо у межах теорії соболєвських просторів.

У дисертації доведено теореми про нетеровість еліптичних за Лавруком крайових задач у підходящих парах просторів Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів, та про породжені цими задачами набори ізоморфізмів. Встановлено теореми про нетеровість цих задач і породжені ними ізоморфізми у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Ройтбергом. Доведено теорему типу Ліонса-Мадженеса про нетеровість цих задач у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичних за Лавруком крайових задач у просторах Хермандера та їх модифікаціях за Ройтбергом. Доведено теореми про регулярність розв'язків у цих просторах. Знайдено нові достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) цих розв'язків, зокрема, достатні умови класичності узагальнених розв'язків.

Ключові слова: еліптична за Лавруком крайова задача, простір Хермандера, нетерів оператор, апріорна оцінка розв'язку, регулярність розв'язку, інтерполяція гільбертових просторів, RO-змінні функції, правильно змінні функції.

Чепурухина И. С. Эллиптические по Лавруку краевые задачи в пространствах Хермандера. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

В диссертационной работе построена теория решимости эллиптических по Лавруку краевых задач в классах гильбертовых пространств Хермандера — расширенной соболевской шкале и уточненной соболевской шкале. В отличии от классических эллиптических краевых задач, эллиптические по Лавруку задачи имеют дополнительные неизвестные функции в краевых условиях. Расширенная соболевская шкала состоит из гильбертовых изотропных пространств Хермандера, для которых показателем регулярности распределений служит функциональный параметр, RO-меняющийся по Авакумовичу на бесконечности. Ее важный подкласс — уточненная соболевская шкала — привязана к соболевской шкале числовым параметром.

Эти шкалы пространств Хермандера более тонко градуированы с помощью функционального параметра, чем классическая гильбертова шкала пространств Соболева. Их применение позволяет получить более точные результаты о свойствах эллиптических задач, чем это возможно в рамках теории соболевских пространств. Указанные шкалы пространств Хермандера получаются интерполяцией с функциональным параметром пар гильбертовых пространств Соболева. Более того, расширенная соболевская шкала состоит из всех гильбертовых пространств, интерполяционных для этих пар, и является замкнутой относительно указанного метода интерполяции. Последний играет ключевую роль в диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, выводов и библиографии.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность ее тематики, сформулированы основные результаты работы и указана их научная новизна, а также приведены данные об апробации работы.

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации.

Во второй главе приведены результаты, относящиеся к основному методу исследования — интерполяции с функциональным параметром пар гильбертовых пространств, в частности, соболевских. Дано определение используемых в работе шкал пространств Хермандера и рассмотрены их интерполяционные свойства.

В третьей главе исследованы эллиптические по Лавруку краевые задачи в пространствах Хермандера, которые принадлежат расширенной соболевской шкале и состоят из регулярных распределений. Доказаны теоремы о нетеровости этих задач и порожденные ими изоморфизмы в указанных пространствах. Установлены априорные оценки обобщенных решений эллиптических по Лавруку краевых задач в пространствах Хермандера и доказаны теоремы о регулярности этих решений. В качестве приложения этих теорем найдены новые достаточные условия непрерывности обобщенных производных (заданного порядка) решений, в частности, условия классичности обобщенных решений.

В четвертой главе исследованы эллиптические по Лавруку краевые задачи в полной уточненной соболевской шкале, модифицированной по Ройтбергу. Доказано, что эти задачи нетеровы в этой шкале и порождают там полный набор изоморфизмов. Для обобщенных по Ройтбергу решений этих задач установлены априорные оценки и теоремы о регулярности.

В пятой главе указанные задачи исследованы в пространствах Хермандера и Соболева, которые принадлежат уточненной соболевской шкале и содержат нерегулярные распределения произвольного отрицательного порядка. Доказана теорема типа Лионса-Мадженеса о нетеровости этих задач. Для их обобщенных решений установлены априорные оценки и теоремы о регулярности. Результаты пятой главы являются новыми и для пространств Соболева.

Ключевые слова: эллиптическая по Лавруку краевая задача, пространство Хермандера, нетеров оператор, априорная оценка решения, регулярность решения, интерполяция гильбертовых пространств, RO-меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции.

Chepurukhina I. S. Lawruk elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

In the thesis, we have built the theory of solvability of Lawruk elliptic boundary-value problems in the classes of inner product Hörmander spaces; namely, in the extended Sobolev scale and the refined Sobolev scale. In contrast to classical elliptic boundary-value problems, Lawruk elliptic problems contain additional unknown functions in boundary conditions. The extended Sobolev scale consists of all Hörmander inner product spaces for which the index of regularity of distributions is a function parameter RO-varying at infinity in the sense of Avakumović. Its important subclass—the refined Sobolev scale—is attached to the Hilbert-Sobolev scale by the number parameter. These scales of Hörmander spaces are calibrated more finely by means of the function parameter than this Sobolev scale. Their application allows us to obtain more precise results on properties of elliptic problems than this is possible in the framework of the theory of Sobolev spaces.

In the thesis, we prove theorems on the Fredholm property of Lawruk elliptic boundary-value problems in appropriate pairs of Hörmander spaces that belong to the refined Sobolev scale and consist of regular distributions. We prove theorems about the Fredholm property of these problems on the complete refined Sobolev scale modified in the sense of Roitberg. We also prove a Lions-Magenes-type theorem on the Fredholm property of these problems in Hörmander and Sobolev spaces that contain irregular distributions of arbitrary negative order. A priori estimates are established for generalized solutions to Lawruk elliptic boundary value problems considered in Hörmander spaces and their modifications. We prove theorems about the regularity of the solutions in these spaces. We find new sufficient conditions under which generalized derivatives (of a given order) of these solutions are continuous; specifically, we obtain sufficient conditions for the generalized solutions to be continuous.

Key words: Lawruk elliptic boundary-value problem, Hörmander space, Fredholm operator, a priori estimate for solution, regularity of solution, interpolation of Hilbert spaces, RO-varying function, regularly varying function.