НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЧЕПУРУХІНА ІРИНА СЕРГІЇВНА

УДК 517.956.2

ЕЛІПТИЧНІ ЗА ЛАВРУКОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 — ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Мурач Олександр Олександрович

Київ — 2015

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена розвитку сучасної теорії загальних еліптичних диференціальних рівнянь, а саме, дослідженню характеру розв'язності еліптичних за Б. Лавруком крайових задач і властивостей їх розв'язків у шкалах гільбертових просторів Хермандера.

Актуальність теми. У 1963 році польським математиком Б. Лавруком [29, 30] був введений важливий клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Цей клас природно виникає при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі відносно деякої формули Гріна і є замкненим відносно такого переходу. Згодом з'ясувалося [9, 125, 170], що до цього класу належать різні крайові задачі, які виникають у теорії пружності і гідромеханіці. Відмітимо, що оператори, відповідні еліптичним за Лавруком крайовим задачам, утворюють підалгебру алгебри Буте де Монвеля [117].

Еліптичні за Лавруком крайові задачі є нетеровими у підходящих парах позитивних соболєвських просторів. Цей факт міститься у результатах Буте де Монвеля [117], Г. І. Ескіна [107] (§ 23), Ш. Ремпеля і Б.-В. Шульце [71] (розд. 4), Г. Грубб [136, 137], які стосуються властивостей загальних еліптичних псевдодиференціальних крайових задач. Наприкінці минулого століття у роботах В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [146] (розд. 3), І. Я. Ройтберг [72, 179] і Я. А. Ройтберга [181] (розд. 2) було доведено теореми про нетеровість еліптичних за Лавруком крайових задач, апріорні оцінки і регулярність їх розв'язків у модифікованій за Я. А. Ройтбергом двобічній соболєвській шкалі. Згодом А. Н. Кожевніков [145] для цієї шкали встановив нетеровість еліптичних крайових задач, породжених алгеброю Буте де Монвеля.

У теперішній час досить активно досліджуються [52, 171, 174, 192] різні класи диференціальних рівнянь з частинними похідними у шкалах функціональних просторів, для яких показником регулярності розподілів служить не числовий (як у просторах Соболєва), а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних. Важливі класи таких просторів були введені Л. Хермандером у 1963 році і застосовані ним до дослідження регулярності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь [92, 94].

Протягом останніх десяти років у роботах В. А. Михайлеця, О. О. Мурача [52, 163, 164], Т. М. Зінченко [20, 22] і А. В. Аноп [7] було побудувано теорію розв'язності загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера. Ключовим методом у цій теорії служить інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили класи гільбертових просторів Хермандера — уточнену соболєвську шкалу і розширену соболєвську шкалу, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Знайдено різні застосування цієї теорії до задач, де класична соболєвська шкала є недостатньо тонко градуйованою.

Втім, клас еліптичних за Лавруком крайових задач не був охоплений зазначеною теорією. Більше того, соболєвська теорія цих задач не розвинута у тій же повноті, як це зроблено для класичних (регулярних) еліптичних крайових задач. Це, зокрема, стосується теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [33, 148, 149] про розв'язність регулярних еліптичних крайових задач у негативних просторах Соболєва.

Зважаючи на це, побудова теорії розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом роботи у рамках науково-дослідної теми «Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики» (номер державної реєстрації 0111U001011).

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у гільбертових шкалах функціональних просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є еліптичні за Лавруком крайові задачі, задані в обмеженій евклідовій області з нескінченно гладкою межею.

Предметом дослідження є властивості еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах гільбертових ізотропних функціональних просторів Хермандера. А саме, характер розв'язності цих задач, апріорні оцінки їх узагальнених розв'язків, регулярність цих розв'язків, достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Завдання дослідження:

1. Дослідити характер розв'язності еліптичних за Лавруком крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу і складаються з регулярних розподілів.
2. Дослідити характер розв'язності цих задач у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Ройтбергом.
3. Встановити теореми типу Ліонса-Мадженеса про характер розв'язності цих задач у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.
4. Встановити апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера та їх модифікацій за Ройтбергом.
5. Дослідити регулярність зазначених розв'язків у цих просторах і встановити нові достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу і теорії функцій. Ключовим у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, зокрема, соболєвських просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Доведено теореми про нетеровість еліптичної за Лавруком крайової задачі і породжені нею ізоморфізми у парах просторів Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів.
2. Доведено теореми про нетеровість цієї задачі у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Ройтбергом, і породжений задачею повний набір ізоморфізмів.
3. Встановлено теореми типу Ліонса-Мадженеса про нетеровість цієї задачі у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.
4. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичних за Лавруком крайових задач у шкалах просторів Хермандера та їх модифікацій за Ройтбергом.
5. Доведено теореми про регулярність зазначених розв'язків у цих просторах. Для цих розв'язків знайдено нові достатні умови неперервності їх узагальнених похідних заданого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Основні її результати та методика їх отримання можуть бути використані в подальших дослідженнях у теорії рівнянь з частинними похідними, насамперед еліптичних і параболічних рівнянь, та у спектральній теорії диференціальних операторів.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дисертації, постановка задач і схема їх дослідження належать науковому керівникові О. О. Мурачу. Результати статей [96, 97, 98] отримані здобувачкою самостійно. У спільних з керівником статтях [123, 168] О. О. Мурачу належать аналіз отриманих результатів і участь у підготовці робіт до публікації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на:

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— спільному семінарі кафедр вищої і прикладної математики Чернігівського національного педагогічного університету і Чернігівського національного технологічного університету (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);

— Міжнародній міждисциплінарній конференції молодих вчених „Шевченківська весна" (Київ, 1–3 квітня 2015 року);

— Шістнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 14–15 травня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 року);

— Математичній конференції „Алгебра, топологія, аналіз (X літня школа)" (Одеса, 3–15 серпня 2015 року);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 року);

— Всеукраїнській науково-практичній конференції „Диференціальні рівняння і суміжні питання" (III сіверські читання з математики), присвяченій

90-річчю від дня народження Я. А. Ройтберга (Чернігів, 25 вересня 2015 року).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 10 наукових працях. З них 5 статей [96, 97, 98, 123, 168] — у наукових виданнях, які включено до переліку фахових видань, а роботи [65, 99, 100, 101, 124] — у матеріалах наукових конференцій, серед яких 4 міжнародних. Серед статей 2 опубліковано в журналах, які входять до наукометричних баз даних (Scopus, Web of Science, MathSciNet).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, що налічує 194 найменування. Повний обсяг роботи складає 164 сторінки друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* розділі дисертації викладено факти, на яких грунтується ключовий метод дослідження — інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Розглянуто класи гільбертових просторів Хермандера — розширену і уточнену соболєвську шкали, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва.

Підрозділ 2.1 присвячений класам RO і $\mathcal{M}$ функціональних параметрів, які служать показниками регулярності для просторів Хермандера, що утворюють ці шкали.

За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c \quad \text{для довільних} \quad t \geq 1,\ \lambda \in [1, b]$$

(сталі b і c можуть залежати від α). Такі функції називають RO-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем [115] і досить повно досліджений (див. монографії Є. Сенети [79] (додаток 1) і Н. Г. Бінхема, Ч. М. Голді і Дж. Л. Тейгельза [116] (пп. 2.0 – 2.2)).

Цей клас допускає простий інтегральний опис:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_{1}^{t} \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \ \text{для} \ t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1, \infty)$.

Між RO-змінними і степеневими функціями існує такий зв'язок: знайдуться числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c\lambda^{s_1} \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1,\ \lambda \geq 1. \tag{1}$$

Поведінку функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ на нескінченності характеризують її індекси Матушевської [153]:

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва частина нерівності (1)}\},$$
$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права частина нерівності (1)}\}.$$

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Й. Караматою, тобто $\varphi(\lambda\, t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для довільного $\lambda > 0$.

Якщо $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\sigma \in \mathbb{R}$, то функція $\alpha(t) := t^{\sigma}\varphi(t)$ належить до класу RO і має рівні індекси Матушевської $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sigma$.

Еталонним прикладом функції класу $\mathcal{M}$ служить неперервна функція $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ така, що

$$\varphi(t) := (\ln t)^{r_1}(\ln\ln t)^{r_2}\ldots(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\ \text{разів}} t)^{r_k}, \quad t \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $s, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$.

Наведемо приклад функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ з різними індексами Матушевської:

$$\alpha(t) := t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^r}, \;\; t > e, \quad \text{і} \quad \alpha(t) := t^{\theta}, \;\; 1 \le t \le e,$$

де $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1]$. Тут $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

У підрозділі 2.2 розглянуто класи гільбертових просторів Хермандера, які утворюють розширену та уточнену соболєвські шкали на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\alpha(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi)$ є функцією аргументу ξ, квадратично інтегровною на $\mathbb{R}^n$; тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}(\xi)$ є перетворення Фур'є розподілу w. У цьому просторі означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, введених і досліджених Л. Хермандером [92] (п. 2.2). А саме, $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) \equiv \alpha(\langle\xi\rangle)$.

Якщо $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}$, то $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) =: H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів простір Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$. Узагалі виконуються неперервні і щільні вкладення

$$H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n) \;\; \text{для всіх} \;\; s_1 > \sigma_1(\alpha), \; s_0 < \sigma_0(\alpha).$$

Клас усіх просторів $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, називається розширеною соболєвською шкалою (на $\mathbb{R}^n$).

Її підклас — уточнена соболєвська шкала — складається з усіх просторів Хермандера $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) := H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ з показником регулярності $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$, де

$\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Ця шкала прив'язана до соболєвської шкали за допомогою числового параметра σ, оскільки

$$H^{(\sigma+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(\sigma-\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для довільного} \quad \varepsilon > 0.$$

У підрозділах 2.3 і 2.4 розглянуто метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, його властивості і застосування до зазначених шкал просторів Хермандера.

Нагадаємо означення цієї інтерполяції. Нехай задана упорядкована пара комплексних гільбертових просторів $X := [X_0, X_1]$ така, що ці простори сепарабельні і $X_1 \hookrightarrow X_0$, причому вкладення неперервне і щільне. Таку пару називаємо припустимою. Для неї існує самоспряжений додатно визначений (взагалі, необмежений) оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для кожного $w \in X_1$. Оператор J однозначно визначається за парою X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектральної теореми означений самоспряжений оператор $\psi(J)$ у просторі X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком $(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$. Простір X_ψ гільбертів.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ називається інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така властивість. Якщо для кожного $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. У цьому випадку говоримо, що простір X_ψ отримується методом інтерполяції з функціональним параметром ψ пари X.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли $\psi(t) \asymp \psi_1(t)$ при $t \gg 1$, де ψ_1 — деяка додатна угнута функція.

При інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість лінійних операторів, що у них діють, а і нетеровість операторів при незмінному їх дефекті. Ця обставина робить метод інтерполяції корисним у теорії еліптичних крайових задач.

Простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, можна отримати інтерполяцією з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. А саме, нехай функція $\alpha \in \mathrm{RO}$, а числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо

$$\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha(t^{1/(s_1-s_0)}) \quad \text{при} \quad t \geq 1$$

і $\psi(t) := 1$ при $0 < t < 1$. Тоді функція ψ є інтерполяційним параметром і

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \bigl[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\bigr]_{\psi}. \tag{2}$$

Основні результати дисертації викладено у третьому, четвертому і п’ятому її розділах.

У *третьому* розділі дисертації досліджено еліптичну за Лавруком крайову задачу у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу і складаються з регулярних розподілів.

У підрозділі 3.1 дано означення цієї задачі. Нехай Ω є довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею Γ. Розглянемо в області Ω лінійну крайову задачу

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{4}$$

Тут A — диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, кожне B_j — крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $m_j \leq 2q-1$, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ — (дотичний) диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$, де $r_1, \ldots, r_\varkappa$ — фіксовані цілі числа. Усі коефіцієнти цих лінійних диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. Позначимо $v := (v_1, \ldots, v_\varkappa)$ і $g := (g_1, \ldots, g_{q+\varkappa})$.

У крайовій задачі (3), (4) є невідомими функція u в області Ω та $\varkappa \geq 1$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на межі Γ. Останні містяться лише у крайових умовах.

У роботі припускаємо, що крайова задача (3), (4) еліптична за Лавруком в області Ω, тобто диференціальний оператор A є еліптичним на $\overline{\Omega}$, правильно еліптичним на Γ, а система крайових умов (4) задовольняє аналогу умови Шапіро-Лопатинського щодо A на Γ.

Для цієї задачі правильна така спеціальна формула Гріна:

$$(Au, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \left(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j \right)_\Gamma =$$

$$= (u, A^+ w)_\Omega + \sum_{j=1}^{2q} \left(D_\nu^{j-1} u, K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left(v_j, \sum_{k=1}^{q+\varkappa} C_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma,$$

де $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v \in (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$, $h \in (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$, а також розширення цих скалярних добутків за неперервністю. Тут A^+ є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$, а $C_{k,j}^+$ і $Q_{k,j}^+$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення граничних операторів B_j у вигляді

$$B_j(x, D) = \sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}(x, D_\tau) D_\nu^{k-1}.$$

(Звісно, якщо $k > m_j$, то $Q_{j,k} = 0$). Тут і далі $D_\nu := i\partial/\partial\nu$, де ν — векторне поле ортів внутрішніх нормалей до Γ. Окрім того, K_j — деякий крайовий диференціальний оператор Γ порядку $\operatorname{ord} K_j \leq 2q - j$.

З огляду на цю формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q + \varkappa$ додатковими невідомими функціями на межі Γ:

$$A^+ w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^+_{k,j} h_k = \chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., 2q, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^+_{k,j} h_k = \chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., \varkappa. \tag{7}$$

Ця задача є формально спряженою до задачі (3), (4) відносно наведеної формули Гріна. Відмітимо, що еліптичність задачі (3), (4) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (5), (6), (7).

У підрозділі 3.2 наведено різні приклади еліптичних за Лавруком крайових задач.

У підрозділі 3.3 розглянуто гільбертові простори, у яких досліджується крайова задача (3), (4). Ці простори утворюють розширені соболєвські шкали на Ω і Γ.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, лінійний простір $H^\alpha(\Omega)$ складається зі звужень u в область Ω усіх розподілів $w \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$. У ньому введена норма за формулою

$$\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} := \inf\bigl\{ \|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} : \, w \in H^\alpha(\mathbb{R}^n), \; w = u \;\text{ в }\; \Omega \bigr\}.$$

Він гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми.

Простір $H^\alpha(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на C^∞-многовиді Γ, які у локальних координатах належать до $H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$. Перейдемо до детального означення.

Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ складають покриття многовиду Γ. Також виберемо довільним чином функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, підпорядковане умові $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$.

За означенням, лінійний простір $H^\alpha(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Скалярний добуток у $H^\alpha(\Gamma)$ означений за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^\alpha(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{p} ((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j)_{H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^\alpha(\Gamma)$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ позначає зображення розподілу h у локальній карті π_j. Простір $H^\alpha(\Gamma)$ гільбертів і сепарабельний. Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [52, с. 139].

Для просторів Хермандера $H^\alpha(\Omega)$ і $H^\alpha(\Gamma)$ правильна інтерполяційна формула (2), якщо у ній замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ.

Уточнена соболєвська шкала на Ω або Γ складається з усіх просторів Хермандера $H^{\sigma,\varphi}(\Omega \text{ або } \Gamma) := H^\alpha(\Omega \text{ або } \Gamma)$ таких, що $\alpha(t) \equiv t^\sigma \varphi(t)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Далі у третьому розділі досліджено властивості еліптичної крайової задачі (3), (4) у цих просторах.

Пов'яжемо з цією задачею відображення

$$(u, v) \mapsto (f, g), \quad \text{де} \quad (u, v) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{\varkappa}. \tag{8}$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\begin{gathered}\Lambda : \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma) := H^\eta(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma) \to \\ \to H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)\end{gathered} \tag{9}$$

для кожного $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Тут і далі для лаконічності формул використовуємо функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$.

Позначимо через N множину всіх розв'зків

$$(u, v_1, ..., v_\varkappa) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$$

крайової задачі (3), (4) у випадку, коли її праві частини є нуль-функції. Аналогічно, позначимо через N^+ множину всіх розв'зків

$$(w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

формально спряженої крайової задачі (5), (6), (7) у випадку, коли її праві частини є нуль-функції. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, лінійні простори N і N^+ скінченновимірні.

Теорема 1 (3.1). *Для кожного* $\eta \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$, *оператор* (9) *нетерів. Його ядро збігається з простором* N, *а область значень складається з усіх векторів* $(f, g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ *таких, що*

$$(f, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \quad \text{для всіх} \quad (w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in N^+. \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *та не залежить від* η.

Ця теорема доводиться методом інтерполяції з функціональним параметром пар соболєвських просторів.

У випадку, коли $N = \{0\}$ і $N^+ = \{0\}$, оператор (9) встановлює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$. У загальній ситуації зобразимо простори, в яких діє оператор (9) у вигляді прямих сум (замкнених) підпросторів

$$\begin{gathered} \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma) = N \dotplus \Big\{ (u, v_1, ..., v_\varkappa) \in \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma) : \\ (u, \theta)_\Omega + \sum_{k=1}^{\varkappa} (v_k, \theta_k)_\Gamma = 0 \ \text{ для всіх } \ (\theta, \theta_1, ..., \theta_\varkappa) \in N \Big\}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) = N^+ \dotplus \big\{ (f, g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) : \text{виконується (10)} \big\}. \tag{12}$$

Позначимо через P і P^+ відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ на другий доданок в сумах (11) і (12) паралельно першому доданку. Відображення P і P^+ не залежать від η.

Теорема 2 (3.2). *Для довільного* $\eta \in \mathrm{RO}$ *звуження відображення* (9) *на підпростір* $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ *є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P\big(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\big) \leftrightarrow P^{+}(\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)).$$

Позначимо через $\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання усіх просторів $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$. Для вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ означена за допомогою обмеженого оператора (9) права частина (f,g) крайової задачі (3), (4). Цей вектор називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі.

З теореми 2 випливає така апріорна оцінка цього розв'язку у просторах Хермандера. Нехай $\eta\in\mathrm{RO}$, $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$ і число $\sigma>0$. Тоді існує число $c=c(\eta,\sigma)>0$ таке, що

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq c\,\Big(\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)}\Big) \tag{13}$$

для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$.

Далі у третьому розділі досліджено властивості регулярності узагальнених розв'язків крайової задачі (3), (4).

Нехай V є відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega\cap V \neq \varnothing$. Покладемо $\Gamma_0 := \Gamma\cap V$(можливий випадок, коли $\Gamma_0=\varnothing$). Введемо локальні аналоги просторів Хермандера. Нехай $\eta\in\mathrm{RO}$. Позначимо через $\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ простір усіх векторів $(u,v)\in\mathcal{D}'(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$ таких, що $\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ для довільної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Цілком аналогічно означається простір $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Теорема 3 (3.5). *Нехай вектор* $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3), (4), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ *для деякого параметра* $\eta\in\mathrm{RO}$ *із* $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$. *Тоді* $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Як застосування просторів Хермандера наведено такі достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку розв'язків досліджуваної крайової задачі.

Теорема 4 (3.6, 3.7). *Нехай ціле* $l \geq 0$. *Припустимо, що умови теореми* 3 *виконуються для деякого* $\eta \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{2l+n-1}\eta^{-2}(t)dt < \infty. \qquad (14)$$

Тоді $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. *Якщо замість* (14) *виконується умова*

$$\int\limits_1^\infty t^{2(l-r_k)+n-1}\eta^{-2}(t)dt < \infty$$

для деякого $k \in \{1, ..., \varkappa\}$, *то* $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Ця теорема випливає з теореми 3 і теореми вкладення Хермандера

$$\int\limits_1^\infty t^{2l+n-1}\eta^{-2}(t)\,dt < \infty \iff H^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega})$$

та її аналогу для Γ; тут $\eta \in \mathrm{RO}$ і ціле число $l \geq 0$.

У підрозділі 3.9 наведені результати конкретизовано для уточненої соболєвської шкали.

У *четвертому* розділі дисертації досліджено еліптичну за Лавруком крайову задачу у повній уточненій соболєвській шкалі, модифікованій за Я. А. Ройтбергом.

У підрозділі 4.1 наведено означення цієї шкали. Вона складається з гільбертових просторів $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, які означаються так.

Якщо $s \notin \{1/2, 3/2, \ldots, 2q - 1/2\}$, то $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2q} \|(D_\nu^{k-1}u)\upharpoonright\Gamma\|^2_{H^{s-k+1/2,\varphi}(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Тут $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) := H^{s,\varphi}(\Omega)$ при $s \geq 0$. Якщо $s < 0$, то $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ є дуальний простір до $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ відносно форми $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

У випадку, коли $s \in \{1/2, 3/2, \dots, 2q-1/2\}$, простір $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ означається шляхом інтерполяції з параметром $\psi(t) \equiv t^{1/2}$ за формулою:

$$H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) := \bigl[H^{s-\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi}, \text{ де } 0 < \varepsilon < 1.$$

Відмітимо, що

$$H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad s > 2q - 1/2,$$

$$H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad s > -1/2.$$

Сформулюємо центральний результат четвертого розділу. Відображення (8) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\begin{gathered}\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to \\ \to H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma).\end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 5 (4.1). *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ оператор* (15) *нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову* (10)*. Індекс оператора* (15) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *та не залежить від s і φ.*

Якщо $s > 2q - 1/2$, то ця теорема є окремим випадком теореми 1. Теорема 5 виводиться з соболєвського випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ методом інтерполяції з функціональним параметром.

Для модифікованої за Ройтбергом уточненої соболєвської шкали правильні також версії теорем 2 – 4.

У *п'ятому* розділі дисертації досліджено еліптичну крайову задачу (3), (4) у просторах Хермандера, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку і належать до уточненої соболєвської шкали. При цьому припускається, що права частина еліптичного рівняння належить до $L_2(\Omega)$.

Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$H^{s,\varphi}_A(\Omega) := \bigl\{u \in H^{s,\varphi}(\Omega) : \, Au \in L_2(\Omega)\bigr\},$$
$$\|u\|_{H^{s,\varphi}_A(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{L_2(\Omega)}\bigr)^{1/2}.$$

Тут образ Au розуміється в сенсі теорії розподілів. Простір $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ гільбертів відносно введеної норми. Зауважимо, що він залежить від усіх коефіцієнтів диференціального оператора A, навіть молодших [91] (теорема 3.1).

Теорема 6 (5.1). *Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$, а відображення* (8) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\begin{aligned}\Lambda : \, \mathcal{D}^{s,\varphi}_A(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi}_A(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to \\ \to L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) := \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma).\end{aligned} \tag{16}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (10). *Індекс оператора* (16) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *та не залежить від s і φ.*

Цей результат є версією теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [148, 149], доведених для регулярних еліптичних крайових задач і просторів Соболєва.

Далі у п'ятому розділі наведено застосування теореми 6 до дослідження властивостей узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (3), (4).

Покладемо

$$\mathcal{S}'_A(\Omega) := \bigl\{u \in \mathcal{S}'(\Omega) : \, Au \in L_2(\Omega)\bigr\},$$

де $\mathcal{S}'(\Omega)$ є топологічний простір звужень на Ω усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для вектора $(u,v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^\varkappa$ означена за допомогою обмеженого оператора (16) права частина (f,g) крайової задачі (3), (4). Цей вектор називаємо (сильним) узагальненим розв'язком цієї задачі.

Теорема 7 (5.3). *Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор $(u,v) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^\varkappa$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3), (4), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \quad \text{якщо} \quad s \geq 2q,$$

$$g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1, ..., q+\varkappa\}.$$

Тоді

$$u \in H^{s,\varphi}(\Omega),$$

$$v_k \in H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad k \in \{1, ..., \varkappa\}.$$

Відмітимо, що теореми 6 і 7 є новими також і для соболєвських просторів навіть цілих порядків.

У завершальному підрозділі 5.4 ці теореми застосовано до дослідження крайової задачі (3), (4) у важливому випадку однорідного еліптичного рівняння.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Теорія загальних еліптичних крайових задач була створена у 50 – 70-х роках XX століття. У 1953 році З. Я. Шапіро [102] і Я. Б. Лопатинський [34, 35] незалежно ввели поняття еліптичної крайової задачі та показали, що вона зводиться до системи інтегральних рівнянь на межі області. Згодом теореми про характер розв'язності еліптичних крайових задач і властивості їх розв'язків у просторах Соболєва і Гельдера-Зігмунда були доведені у роботах Ш. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1, 108], М. С. Аграновича і А. С. Диніна [2], Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [11, 12, 13], Ф. Браудера [118, 119], Л. Р. Волевича [15, 16], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [33, 148, 149], Ж. Петре [68], Я. А. Ройтберга [73, 74, 75, 77], Л. Н. Слободецького [80, 81], В. А. Солонникова [82, 83, 84], Л. Хермандера [92], М. Шехтера [103, 104, 182, 184, 185] (див. також огляд М. С. Аграновича [110] і вказану там літературу). При цьому було досліджено як еліптичні крайові задачі для одного еліптичного рівняння, так і для різних систем рівнянь (однорідні за порядком еліптичні системи, еліптичні за Петровським системи [69; 70, с. 235], еліптичні системи мішаного порядку, або системи, еліптичні за Дуглісом-Ніренбергом [129]).

Центральний результат теорії еліптичних крайових задач полягає у тому, що як нетеровість крайової задачі, так і апріорна оцінка її розв'язків у підходящих парах просторів Соболєва або Гельдера-Зігмунда еквіваленті еліптичності цієї задачі. Сформулюємо відповідні теореми стосовно крайової задачі для одного еліптичного диференціального рівняння, що розглядається у просторах Соболєва.

Нехай Ω є обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з нескінченно гладкою межею Γ. Розглянемо в Ω таку крайову задачу:

$$Au = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j u = g_j \ \text{ на } \ \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{1.1}$$

Тут $A = A(x, D)$ є лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, а кожне $B_j = B_j(x, D)$ є лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ довільного порядку $m_j \leq 2q - 1$. Припускаємо, що всі коефіцієнти операторів A і B_j є комплекснозначними функціями з класів $C^\infty(\overline{\Omega})$ і $C^\infty(\Gamma)$ відповідно.

Крайову задача (1.1) називають еліптичною в Ω, якщо диференціальний оператор A є еліптичним на $\overline{\Omega}$ та правильно еліптичним на Γ, а набір крайових диференціальних операторів $B := (B_1, \ldots, B_q)$ задовольняє умову Шапіро–Лопатинського стосовно A на Γ. Класичними прикладами такої задачі служать крайові задачі Діріхле і Неймана для рівняння Пуассона.

Пов'яжемо з (1.1) відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Для кожного дійсного $s \geq 2q$ це відображення продовжується за неперервністю до обмеженого лінійного оператора

$$(A, B) : H^{(s)}(\Omega) \to H^{(s-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma). \qquad (1.2)$$

Тут і далі через $H^{(\sigma)}(\Omega)$ і $H^{(\sigma)}(\Gamma)$ позначено комплексні гільбертові простори Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$, задані в Ω і на Γ відповідно.

Функцію $u \in H^{(2q)}(\Omega)$ називають (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1.1) з правою частиною

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_q) \in L_2(\Omega) \oplus (L_2(\Gamma))^q,$$

якщо $(A, B)u = (f, g)$ для оператора (1.2) при $s = 2q$.

Класична теорема A. *Якщо крайова задача* (1.1) *еліптична в* Ω*, то для будь-якого* $s \geq 2q$ *правильна така апріорна оцінка її узагальненого розв'язку:*

$$\|u\|_{H^{(s)}(\Omega)} \leq c_s \left(\|(f, g)\|_{\mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

для довільної функції $u \in H^{(s)}(\Omega)$*, де вектор* $(f, g) := (A, B)u$*, а число* $c_s > 0$ *не залежить від* u *і* (f, g)*. Зворотно, якщо для деякого* $s \geq 2q$ *виконується ця апріорна оцінка, то крайова задача* (1.1) *еліптична в області* Ω*.*

Ця теорема доведена у роботах Ш. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1, с. 133], Ф. Е. Браудера [119], Л. Н. Слободецького [80, 81] і М. Шехтера [103, 182].

Класична теорема B. *Якщо крайова задача* (1.1) *еліптична в* Ω, *то для будь-якого* $s \geq 0$ *оператор* (1.2) *є нетеровим, а його ядро* $\mathcal{N}$ *лежить у просторі* $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *і разом з індексом не залежить від* s. *Зворотно, якщо для деякого* $s \geq 0$ *оператор* (1.2) *є нетеровим, то крайова задача* (1.1) *еліптична в області* Ω.

Цей результат належить Ф. Е. Браудеру [119] і М. Шехтеру [103].

Серед еліптичних крайових задач важливе місце належить регулярним задачам, які характеризуються тим, що набір крайових операторів $B := (B_1, \ldots, B_q)$ є нормальним за Н. Ароншайном, А. Мільграмом [112] і М. Шехтером [103]. Наприклад, набір крайових операторів $B_j := \partial^{j-1}/\partial_{\nu}^{j-1}$, де $j = 1, \ldots, q$, є нормальним. Тут ν позначає векторне поле одиничних векторів внутрішніх нормалей до межі Γ.

Якщо диференціальний оператор A еліптичний на $\overline{\Omega}$, а набір крайових операторів B є нормальним, то для крайової задачі (1.1) правильна така формула Гріна:

$$(Au, v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, C_j^{+} v)_{\Gamma} = (u, A^{+} v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} (C_j u, B_j^{+} v)_{\Gamma} \tag{1.3}$$

для будь-яких функцій $u, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Тут A^{+} є диференціальний оператор, формально спряжений до A, а $\{B_j^{+}\}$, $\{C_j\}$ і $\{C_j^{+}\}$ є деякі нормальні системи лінійних крайових диференціальних операторів з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Порядки цих операторів задовольняють умову

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^{+} = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^{+} = 2q - 1.$$

Ця формула Гріна отримана незалежно Н. Ароншайном, А. Мільграмом [112] і М. Шехтером [103].

Відносно неї крайовій задачі (1.1) відповідає формально спряжена крайова задача

$$A^{+}w=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \quad B_{j}^{+}w=\chi_{j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \ \ j=1,\ldots,q. \tag{1.4}$$

Як показав М. Шехтер [103], крайова задача (1.1) є регулярною еліптичною в області Ω тоді і лише тоді, коли формально спряжена крайова задача (1.4) є також регулярною еліптичною в Ω. Нехай $\mathcal{N}^{+}$ позначає лінійний простір усіх розв'язків $w\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ однорідної крайової задачі (1.4) (тобто, коли коли $\omega=0$ і всі $\chi_{j}=0$). Оскільки вона еліптична в Ω, то простір $\mathcal{N}^{+}$ скінченновимірний. Він не залежить від вибору спряженої системи крайових операторів $\{B_{1}^{+},\ldots,B_{q}^{+}\}$ у формулі Гріна (1.4).

Теорема М. Шехтера [104]**.** *Припустимо, що крайова задача* (1.1) *є регулярною еліптичною в області* Ω*. Тоді для кожного* $s\geq 0$ *область значень нетерового оператора* (1.2)*, відповідного цій задачі, складається з усіх векторів* $(f,g_{1},\ldots,g_{q})\in\mathcal{H}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$*, які задовольняють умову*

$$(f,w)_{\Omega}+\sum_{j=1}^{q}\,(g_{j},C_{j}^{+}w)_{\Gamma}=0 \quad \textit{для всіх} \quad v\in\mathcal{N}^{+}. \tag{1.5}$$

Відмітимо, що для крайової задачі (1.1) поняття еліптичності є змістовним також у ситуації, коли $m:=\max\{m_{1},\ldots,m_{q}\}\geq 2q$. Таку еліптичну крайову задачу можна звести до еліптичної крайової задачі, у якій порядки всіх крайових диференціальних операторів не перевищують число $2q-1$ (див., наприклад, монографію Л. Хермандера [95, с. 313]). Звідси випливає, що класичні теореми A і B залишаються правильними у цій ситуації, якщо $s>m+1/2$. Ця нерівність гарантує обмеженість оператора (1.2), відповідного крайовій задачі.

У теорії еліптичних крайових задач відмітимо окремий напрям, присвячений їх властивостям у повній (двобічній) соболєвській шкалі. Повнота цієї шкали характеризується тим, що у ній показник регулярності розподілів є довільним дійсним числом. Зазначений напрям був сформований зусиллями

Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [11, 12, 13], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [33, 41, 148, 149], Я. А. Ройтберга [73 — 78, 180] і М. Шехтера [183, 185 — 187]. До цього напряму можна віднести і локальну теорію Л. Хермандера [92] (п. 10.5) еліптичних крайових задач у двобічній шкалі анізотропних просторів Соболєва. Дослідження цих авторів були стимульовані важливими питаннями, які виникають при вивченні властивостей функції Гріна еліптичної крайової задачі, при дослідженні еліптичних задач із степеневими особливостями у правих частинах рівнянь, у спектральній теорії диференціальних операторів. У вказаних роботах доведено різні теореми про обмеженість і нетеровість оператора (A, B) у підходящих парах просторів Соболєва та їх модифікаціях для довільного дійсного показника регулярності s. Ці результати часто формулюються як теореми про повний набір ізоморфізмів, породжених еліптичною крайовою задачею.

З огляду на завдання дисертаційної роботи, обговоримо детальніше цей напрям досліджень. У статті Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [11] доведена теорема про повний набір ізоморфізмів, породжений регулярною еліптичною крайовою задачею з однорідними крайовими умовами у шкалі соболєвських просторів $H^{s,(0)}(\Omega)$, де s пробігає всю дійсну вісь (див. також монографії Ю. М. Березанського [12] (розд. 3, § 6, п. 6) і Я. А. Ройтберга [180] (§ 5.5)). Тут гільбертові простори $H^{s,(0)}(\Omega) := H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{-s,(0)}(\Omega)$, де $s > 0$, утворюють оснащення простору $L_2(\Omega)$ за допомогою позитивного і негативних просторів. Негативний соболєвський простір $H^{-s,(0)}(\Omega)$ був введений М. Шехтером [183] і застосований ним до дослідження регулярності узагальнених розв'язків еліптичних крайових задач.

Якщо еліптична крайова задача (1.1) неоднорідна, то її дослідження у випадку, коли показник регулярності $s < 2q$, пов'язане з істотними труднощами. Це зумовлено насамперед тим, що обмежений оператор (1.2) не можна коректно означити при $s \leq m + 1/2$. Для того, що отримати версії сформульованих теорем про нетеровість цієї задачі для усіх дійсних s треба певним чином видозмінити область визначення оператора (A, B) задачі. З цією метою Ж.-Л. Ліонсом, Е. Мадженесом [33, 41, 148, 149] і Я. А. Ройтбергом [73, 74] було запропоновано два принципово різних підходи. Підхід Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса приводить до індивідуальних теорем про розв'язність задачі (1.1). У цих теоремах область визначення оператора (A, B) суттєво залежить від усіх коефіцієнтів диференціального рівняння $Au = f$. Підхід Я. А. Ройтберга приводить до загальних теорем про розв'язність задачі (1.1), але виводить за межі класу узагальнених функцій. У загальних теоремах область визначення оператора еліптичної крайової задачі є спільною для усіх задач одного порядку. Так, сформульовані вище теореми про нетеровість крайової задачі (1.1) є загальними.

Сформулюємо деякі теореми про характер розв'язності еліптичних крайових задач, отримані у рамках цих підходів.

Почнемо з підходу Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса. Для довільного $s < 2q$ позначимо через $H^s_A(\Omega)$ лінійний простір усіх розподілів $u \in H^{(s)}(\Omega)$ таких, що $Au \in L_2(\Omega)$, де образ Au розуміємо у сенсі теорії розподілів в області Ω. Цей простір гільбертів відносно норми графіка

$$\|u\|_{H^s_A(\Omega)} := \bigl(\, \|u\|^2_{H^{(s)}(\Omega)} + \|Au\|^2_{L_2(\Omega)}\bigr)^{1/2}.$$

Із результату Л. Хермандера [91] (теорема 3.1) випливає, що простір $H^s_A(\Omega)$ залежить від усіх коефіцієнтів диференціального оператора A.

Теорема Ліонса-Мадженеса [148, 149]. *Нехай крайова задача* (1.1) *є регулярною еліптичною в області* Ω. *Тоді для кожного числа* $s < 2q$ *такого, що* $s \notin \{-1/2, -3/2, -5/2, \ldots\}$, *відображення* $u \mapsto (Au, Bu)$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується единим чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A, B) : H^s_A(\Omega) \to L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з $\mathcal{N}$, *а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \dots, g_q) \in L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma),$$

які задовольняють умову (1.5).

Нагадаємо, що тут, згідно з класичною теоремою B, $\mathcal{N}$ є скінченновимірний лінійний простір усіх розв'язків $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ однорідної еліптичної крайової задачі (1.1).

Ж.-Л. Ліонс і Е. Мадженес у монографії [33] систематично розвинули свій підхід й довели індивідуальні теореми про нетеровість регулярної еліптичної крайової задачі для істотно більш ширших, ніж $H^s_A(\Omega)$, просторів правих частин еліптичного рівняння $Au = f$.

Перейдемо до підходу Я. А. Ройтберга. Для кожного $s \in \mathbb{R}$ такого, що $s \notin \{1/2, 3/2, \dots, 2q - 1/2\}$ позначимо через $H^{s,(2q)}(\Omega)$ поповнення лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,(2q)}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^{s,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2q} \|(D_\nu^{k-1} u) \restriction \Gamma\|^2_{H^{(s-k+1/2)}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Для виключених значень s простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$ означається за допомогою інтерполяції пари просторів $H^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega)$ і $H^{s+\varepsilon,(2q)}(\Omega)$, де $0 < \varepsilon < 1$. Клас просторів $H^{s,(2q)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$, природно називати модифікованою за Ройтбергом соболєвською шкалою. Якщо $s > 2q - 1/2$, то простори $H^{s,(2q)}(\Omega)$ і $H^{(s)}(\Omega)$ рівні як поповнення $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Якщо $s \leq 2q - 1/2$, то це різні простори, причому $H^{s,(2q)}(\Omega)$ не можна трактувати як простір вкладений у топологічний простір усіх розподілів на Ω.

Теорема Ройтберга [73]. *Нехай крайова задача* (1.1) *є регулярною еліптичною в області* Ω. *Тоді для кожного* $s \in \mathbb{R}$ *відображення* $u \mapsto (Au, Bu)$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обме-*

женого оператора

$$(A, B) : H^{s,(2q)}(\Omega) \to H^{s-2q,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з $\mathcal{N}$*, а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^{s-2q,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma),$$

які задовольняють умову (1.5).

Я. А. Ройтберг [74, 76 – 78] довів аналоги цієї теореми для банахових просторів Соболєва, побудованих на основі просторів Лебега $L_p(\Omega)$, де $1 < p < \infty$, для нерегулярних еліптичних крайових задач і еліптичних крайових задач для еліптичних систем мішаного порядку. Ці результати підсумовано у його монографії [180]. За допомогою цієї теореми Я. А. Ройтберг [75] вивів теореми Ліонса-Мадженеса та інші теореми про нетеровість еліптичних крайових задач. Питання про зв'язок сформульованої теореми Ройтберга з іншими теоремами про нетеровість еліптичних крайових задач досліджувалось також у статтях Ю. М. Березанського і Я. А. Ройтберга [13], Ю. В. Костарчука і Я. А. Ройтберга [26] та О. О. Мурача [167].

Окрім класичних шкал просторів Гельдера і Соболєва, широке застосування в аналізі і теорії диференціальних рівнянь мають шкали функціональних просторів Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля (див. монографії С. М. Нікольського [66], О. В. Бєсова, В. П. Ільїна і С. М. Нікольського [14], Г. Трібеля [88, 89, 191, 192, 193] і наведену там літературу). Так, у монографіях Г. Трібеля [88, 89] наведено застосування просторів Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля до еліптичних крайових задач. Там встановлено теореми про нетеровість регулярних еліптичних крайових задач у підходящих парах позитивних просторів Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля. Ці результати істотно доповнені у статтях Й. Франке, Т. Рунста [132] і О. О. Мурача [56, 57].

Теореми про нетеровість еліптичних крайових задач мають численні застосування, серед яких зазначимо твердження про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків еліптичних задач, застосування до дослідження властивостей їх функції Гріна, теореми про існування і регулярність слідів на межі області узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь, застосування у теорії індексу еліптичних крайових задач, у спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів, застосування до задач оптимального управління, до деяких класів нелінійних еліптичних крайових задач та інші. Тут доречно відмітити, що формула індексу довільної еліптичної крайової задачі була знайдена М. Ф. Атьюю і Р. Ботом [114]. Доведення цієї формули спирається на фундаментальний результат М. Ф. Атьї і І. М. Зінгера [113] — формулу індексу довільної еліптичної системи, заданої на замкненому (тобто компактному і без краю) многовиді. Зауважимо також, що еліптичні з параметром крайові задачі мають важливі застосування у теорії параболічних мішаних задач [3].

Теорія загальних еліптичних крайових задач систематично викладена у монографіях Ш. Агмона [109], Ю. М. Березанського [12], Й. Т. Влоки, Б. Ровлі і Б. Лаврука [194], Ж.-Л. Ліонса і Э. Мадженеса [33], Ю. В. Егорова [19], О. І. Панича [67], Я. А. Ройтберга [180], Г. Трібеля [88, 89], Л. Хермандера [92, 95], М. Шехтера [189] та інших. Їй присвячений огляд М. С. Аграновича [110].

У 1963 році польський математик Б. Лаврук [29, 30] (див. також [31]) ввів і дослідив важливий та досить широкий клас еліптичних задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Цей клас природно виникає при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі відносно деякої (спеціальної) формули Гріна та є замкненим відносно такого переходу. Б. Лаврук розглядав ці крайові задачі для систем диференціальних рівнянь, вивів для них спеціальну формулу Гріна, побудував формально спряжену крайову задачу відносно цієї формули та отримав необхідну умову, а для однорідних еліптичних систем і достатню умову розв'язності цих задач. Їх Б. Лаврук назвав параметричними крайовими задачами, оскільки додаткові невідомі функції у крайових умовах можна розглядати як (функціональні) параметри.

Для скалярного диференціального рівняння у евклідовій області Ω еліптична за Лавруком крайова задача набирає вигляду

$$Au = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \ \text{ на } \ \Gamma, \ \ j = 1, \ldots, q + \varkappa. \tag{1.6}$$

Вона, на відміну від (класичної) еліптичної крайової задачі (1.1), містить у крайових умовах $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на межі Γ. Тут диференціальні оператори A і B_j є такі самі як і раніше, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ є (дотичний) диференціальний оператор на Γ з нескінченно гладкими коефіцієнтами, порядок якого $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$, де $r_1, \ldots, r_\varkappa$ — фіксовані цілі числа.

Еліптичність крайової задачі (1.6) значить, що диференціальний оператор A є еліптичним на $\overline{\Omega}$ та правильно еліптичним на Γ, а крайові умови задовольняють аналогу умови Шапіро–Лопатинського стосовно A на Γ (див. означення 3.1). Відмітимо, що крайову задачу (1.1) можна розглядати як окремий випадок крайової задачі (1.6) для $\varkappa = 0$; при цьому поняття еліптичності для них будуть еквівалентними.

Для еліптичної крайової задачі (1.6) правильна спеціальна формула Гріна (див. вступ до дисертації), встановлена Б. Лавруком [29] у більш загальної ситуації крайової задачі для еліптичних систем. Ним же показано, що еліптичність задачі зберігається при переході до формально спряженої задачі відносно цієї формули Гріна. Якщо вихідна еліптична крайова задача регулярна, то формально спряжені до неї крайові задачі відносно формули Гріна (1.3) і спеціальної формули Гріна еквівалентні у сенсі, вказаному в [146, с. 69].

Різні приклади еліптичних за Лавруком крайових задач наведено у монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [146] (п. 3.1) і у п. 3.2 дисертації. Ще Б. Лаврук [29, с. 259] дав простий приклад такої задачі, еквівалентної задачі Гільберта-Рімана у теорії аналітичних функцій. Різні важливі приклади еліптичних за Лавруком крайових задач виникають у теорії пружності і гідродимеханіці (див., наприклад, монографію П. Г. Сіарлета [125], статті А. Г. Асланяна, Д. Г. Васильєва і В. Б. Лідського [9], С. Назарова і К. Пілескаса [170]). Ці задачі були використані Л. Р. Волевичем і С. Г. Гіндікиним [18] при дослідженні мішаних задач для еволюційних рівнянь з квазіоднорідною старшою частиною. Тут доречно зауважити, що змістовні приклади крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах відомі і для еволюційних рівнянь; зокрема вони виникають у теорії крайових задач з вільною межею (див., наприклад, статті Р. Денка, Л. Р. Волевича [128] і Р. Денка, Й. Прусса і Р. Захера [127]).

Корисно мати на увазі, що оператори, відповідні еліптичним за Лавруком крайовим задачам, утворюють підалгебру алгебри Буте де Монвеля [117]. Вона утворена блочними матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} A+G & K \\ B & C \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

де A — еліптичний псевдодиференціальний оператор на Ω, G — сингулярний оператор Гріна, K — оператор Пуассона (або кокрайовий оператор), B — крайовий псевдодиференціальний оператор і C — (дотичний) псевдодиференціальний оператор на Γ. Усі ці оператори є, взагалі кажучи, матричними. В окремому випадку, коли $G = 0$ і $K = 0$, а оператори A, B і C є диференціальними, отримаємо еліптичну за Лавруком крайову задачу для системи $Au = f$.

Як і класичні еліптичні задачі, еліптичні за Лавруком крайові задачі є нетеровими у підходящих парах позитивних соболєвських просторів. Цей факт міститься у результатах Буте де Монвеля [117], Г. І. Ескіна [107] (§ 23), Ш. Ремпеля і Б.-В. Шульце [71] (розд. 4), Г. Грубб [136, 137], які стосуються властивостей еліптичних псевдодиференціальних операторів вигляду (1.7).

У модифікованій за Ройтбергом соболєвській шкалі еліптичні за Лавруком крайові задачі досліджено у монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [146] (розд. 3) переважно для одного еліптичного рівняння та І. Я. Ройтберг [72, 179] для еліптичних систем мішаного порядку. (Результати І. Я. Ройтберг викладено у монографії її батька, Я. А. Ройтберга [181] (розд. 2)). Було доведено теореми про нетеровість обмежених операторів, що відповідають цим задачам у модифікованій шкалі, про повний набір породжених ними ізоморфізмів, про апріорні оцінки розв'язків задач і підвищення регулярності розв'язків. Ці результати були застосовані В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю і Й. Россманном [146] до дослідження класичних еліптичних крайових задач у областях з негладкою межею. Відмітимо, що з точки зору застосувань є найбільш цікавим саме випадок гільбертових просторів, розглянутий у згаданій монографії [146].

Сформулюємо центральний результат „соболєвської" теорії еліптичних за Лавруком крайових задач. Розглянемо скалярний випадок, тобто задачу (1.6). Пов'яжемо з нею відображення

$$\begin{gathered}\Lambda : (u, v_1, \ldots, v_\varkappa) \mapsto (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}),\\ \text{де}\quad (u, v_1, \ldots, v_\varkappa) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa.\end{gathered}$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\begin{gathered}\Lambda : H^{s,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{(s+r_k-1/2)}(\Gamma) \to\\ \to H^{s-2q,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{E}^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma)\end{gathered} \tag{1.8}$$

для довільного $s \in \mathbb{R}$.

Теорема Козлова, Маз'ї, Россманна [146, с. 86] **та І. Я. Ройтберг** [72, 179]. *Для кожного $s \in \mathbb{R}$ оператор* (1.8) *нетерів. Його ядро N лежить в $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa}$ і разом з індексом не залежить від s. Область значень оператора* (1.8) *складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{s-2q,(0)}(\Omega, \Gamma)$, ортогональних у $L_2(\Omega) \oplus (L_2(\Gamma))^{q+\varkappa}$ ядру N^{+} оператора формально спряженої задачі.*

Цей результат був доведений у 1997 році. Згодом А. Н. Кожевніков [145] встановив нетеровість еліптичних псевдодиференціальних крайових задач вигляду (1.7) у модифікованій за Ройтбергом соболєвській шкалі.

Застосовані у теорії еліптичних крайових задач класичні функціональні простори Гельдера-Зігмунда, Соболєва, Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля параметризовані за допомогою скінченного набору числових параметрів, які характеризують у певний спосіб регулярність функцій або розподілів. Втім, ще у 60-х роках XX століття з'явилися широкі класи функціональних просторів, для яких показником регулярності розподілів служить не числовий, а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних (дуальних до просторовим відносно перетворення Фур'є). Він дозволяє істотно більш тонко охарактеризувати регулярність розподілів за поведінкою на нескінченності їх перетворення Фур'є. Ці простори тепер називають просторами узагальненої гладкості.

Уперше вони з'явилися у статті Б. Мальгранжа [152], де були застосовані у дослідженні властивостей регулярності розв'язків гіпоеліптичних рівнянь. Згодом у 1963 році Л. Хермандер у монографії [92] (яка стала тепер класикою сучасної теорії рівнянь з частинними похідними) ввів і систематично досліджені широкі класи просторів узагальненої гладкості. Нагадаємо означення просторів, введених Л. Хермандером.

Нехай числовий параметр p такий, що $1 \leq p \leq \infty$. Нехай, окрім того, вимірний за Борелем функціональний параметр $\mu : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ задовольняє умову: існують додатні числа c і l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq (1 + c\,|\xi - \eta|)^{l} \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^{n}.$$

За означенням, лінійний простір Хермандера $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, перетворення Фур'є $\widehat{w} := \mathcal{F}w$ яких задовольняє умову $\mu\,\mathcal{F}w \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Норма у просторі $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ означена за формулою

$$\|w\|_{\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)} := \|\mu\,\mathcal{F}w\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Він є повним простором відносно цієї норми.

Л. Хермандер [92] дав систематичне застосування просторів $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ у дослідженні проблем існування і регулярності розв'язків широкого класу лінійних диференціальних рівнянь і систем, до якого належать і еліптичні рівняння (див. також його монографію [94]). При цьому важливу роль відігравала така властивість цих просторів.

Теорема вкладення Л. Хермандера [92, с. 59]. *Нехай* $1/p + 1/p' = 1$ *і ціле* $l \geq 0$. *Якщо*

$$(1 + |\xi|)^{l}\, \mu^{-1}(\xi) \in L_{p'}(\mathbb{R}^{n}_{\xi}), \tag{1.9}$$

то $\mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n) \subset C^l(\mathbb{R}^n)$. *Зворотно, якщо для деякої непорожньої відкритої множини* $V \subset \mathbb{R}^n$ *виконується включення*

$$\bigl\{w \in \mathcal{B}_{p,\mu}(\mathbb{R}^n) :\, \operatorname{supp} w \subset V\bigr\} \subset C^{l}(\mathbb{R}^n),$$

то μ *задовольняє умову* (1.9).

У важливому випадку $p = 2$ простори Хермандера є гільбертовими і збігаються з функціональними просторами, введеними й дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [17] (§ 2) у 1965 році.

Протягом останніх 40 років простори узагальненої гладкості є предметом різних і глибоких досліджень; див. огляд П. І. Лізоркіна [32], монографії Ф. Нікола і Л. Родіно [171], О. І. Степанця [86, 87], Г. Трібеля [192, розд. III] і Н. Якоба [142], недавні статті П. Гурки і Б. Опіка [138], А. М. Каетано і Г.-Г. Леопольда [121], В. Фаркаса і Г.-Г. Леопольда [133], Д. Д. Хароске і С. Д. Моури [140, 141] й наведену там літературу. Були введені різні версії просторів Соболєва, Нікольського–Бєсова і Лізоркіна–Трібеля з функціональними показниками регулярності. За допомогою просторів узагальненої гладкості отримано точні умови вкладення одних класів функціональних просторів у інші, встановлено теореми про продовження розподілів за межі їх області визначення і про сліди розподілів на многовидах меншої розмірності й встановлено інші важливі результати.

В останні двадцять років простори узагальненої гладкості викликають чималий інтерес з точки зору їх застосувань, насамперед, у теорії диференціальних рівнянь. Ці простори були використані Д. Е. Едмундсом і Г. Трібелем [130, 131, 192] у спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів, заданих на фрактальних множинах, В. Г. Маз'єю і Т. О. Шапошніковою [154] (розд. 16) до інтегральних рівнянь, В. А. Михайлецем, В. М. Молибогою [160, 161, 162] і Й. Пешелем [178] у спектральній теорії диференціальних операторів Шрьодінгера і Хіла, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [52, 55, 159, 163, 164] у теорії еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач, Ф. Нікола і Л. Родіно [171] до еліптичних псевдодиференціальних операторів в $\mathbb{R}^n$, Б. П. Панеяхом [174] до крайової задачі з косою похідною та її узагальнень, О. І. Степанцем [86, 87] у теорії апроксимації функцій, Н. Якобом [142] у теорії випадкових процесів.

Широкі класи просторів узагальненої гладкості виникають при інтерполяції з функціональними параметрами пар просторів Соболєва, Нікольського–Бесова і Лізоркіна–Трібеля. Узагалі, різні методи інтерполяції пар нормованих просторів відіграють помітну роль в аналізі і теорії операторів. Це зумовлено тим, що при інтерполяції просторів успадковується обмеженість лінійних операторів, що в них діють.

Перший метод інтерполяції був запропонований незалежно Ж.-Л. Ліонсом [147] і С. Г. Крейном [27] для пар гільбертових просторів. Згодом були запропоновані різні методи інтерполяції нормованих просторів, що характеризуються числовими параметрами інтерполяції. Систематичний виклад теорії інтерполяції нормованих просторів містять монографії Й. Берга і Й. Льофстрьома [10], Ю. А. Брудного і Н. Я. Кругляка [120], С. Г. Крейна, Ю. І. Петуніна і Е. М. Семенова [28], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [33], В. І. Овчинникова [172], Л. Тартара [190], Г. Трібеля [88]. Відмітимо, що у книгах Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса [33, 150] і Г. Трібеля [88] дано систематичне застосування методів інтерполяції з числовими параметрами у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідних.

Застосування функцій як параметрів інтерполяції приводить до більш гнучких інтерполяційних методів. К. Фояш і Ж.-Л. Ліонс [134] першими ввели і дослідили деякі методи інтерполяції з функціональним параметром пар нормованих просторів. Згодом різні узагальнення методів інтерполяції на випадок функціональних параметрів інтерполяції були запропоновані Я. Густавссоном [139], Т. Ф. Калугіною [25], М. І. Карро, Й. Л. Керда [122], Ф. Кобосом і Д. Л. Фернандезом [126], К. Меруччі [155], В. І. Овчинниковим [172, 173], Л.-Е. Перссоном [177], М. Шехтером [188], С. Янсоном [143] та іншими.

Зауважимо, що з точки зору застосувань (зокрема, у спектральній теорії операторів), окреме місце належить інтерполяції пар гільбертових просторів. Вона має дві фундаментальні властивості. Перша з них полягає у тому, що клас усіх функціональних параметрів цієї інтерполяції збігається з множиною усіх додатних функцій, псевдоугнутих в околі нескінченності, тобто (слабко) еквівалентних там угнутим додатним функціям. Цей результат випливає з теореми Я. Петре [175, 176]. Друга властивість полягає у тому, що гільбертів простір є інтерполяційним для заданої сумісної пари гільбертових просторів тоді і тільки тоді, коли він є результатом інтерполяції цієї пари з деяким функціональним параметром. Цей результат належить В. І. Овчинникову

[172, с. 511]. Систематичний виклад теорії інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів дано у монографіях В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [52, 164].

На відміну від інтерполяції з числовими параметрами, інтерполяцію з функціональним параметром до недавнього часу не використовували у теорії диференціальних операторів. Єдиним виключенням була стаття Г. Шлензак [105], де за допомогою інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів Соболєва була доведена теорема про ізоморфізми, породжені регулярною еліптичною крайовою задачею у підходящих парах просторів Хермандера $\mathcal{B}_{2,\mu}$. Істотним недоліком цього результату є те, що використаний Г. Шлензак клас функціональних параметрів μ не належить до відомих в аналізі і не був конструктивно описаний.

У 2005 – 2010 роках В. А. Михайлець і О. О. Мурач у серії статей [42 — 49, 58 — 62, 64, 157, 158, 166] побудували теорію загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у класі гільбертових просторів Хермандера — уточненій соболєвській шкалі. Для них показником регулярності розподілів служать радіальні функції, правильно змінні за Й. Караматою [144] на нескінченності. Клас цих функцій добре відомий в аналізі і детально досліджений. Йому присвячені, зокрема, монографії Є. Сенети [79] і Н. Х. Бінхема, Ч. М. Голді, Дж. Л. Тейгельза [116].

Обговоримо результати В. А. Михайлеця і О. О. Мурача, пов'язані з темою дисертації. Уточнена соболєвська шкала на $\mathbb{R}^n$ складається з гільбертових просторів Хермандера $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{B}_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$, де $\mu(\xi) \equiv \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$, а $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ — згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{M}$ є множина усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені й відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються за Караматою на нескінченності, тобто $\varphi(\lambda\, t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Відмітимо, що використаний тут показник регулярності μ є правильно змінною функцію аргументу $\langle\xi\rangle$ на нескінченності. Уточнені соболєвські шкали на евклідовій області Ω та її межі $\Gamma \in C^{\infty}$ будуються у стандартний спосіб за класом просторів $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Уточнена соболєвська шкала

$$\bigl\{H^{s,\varphi}(G) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\bigr\},$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$, прив'язана до соболєвських просторів числовим параметром s, оскільки

$$H^{(s+\varepsilon)}(G) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(G) \hookrightarrow H^{(s-\varepsilon)}(G) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0,$$

причому вкладення неперервні і щільні. Як бачимо, у цій шкалі функціональний параметр φ задає додаткову гладкість відносно основної (степеневої) гладкості s. Коротко кажучи, φ уточнює основну гладкість s. Звідси походить назва шкали.

Уточнена соболєвська шкала має важливу інтерполяційну властивість, яка робить цю шкалу дуже зручною у застосуваннях. А саме [45], кожний простір $H^{s,\varphi}(G)$ є результатом інтерполяції з функціональним параметром ψ пари гільбертових просторів Соболєва $H^{(s-\varepsilon)}(G)$ і $H^{(s+\delta)}(G)$, де ε і δ — довільні додатні числа, а $\psi(t) = t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ при $t \geq 1$.

Наведемо одне із застосувань уточненої соболєвської шкали у теорії еліптичних рівнянь.

Теорема Михайлеця-Мурача [45, с. 369]. *Нехай крайова задача* (1.1) *є еліптичною в області* Ω. *Тоді для довільних* $s > 2q - 1/2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *відображення* $u \mapsto (Au, Bu)$, *де* $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$(A, B) : H^{s,\varphi}(\Omega) \to H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з $\mathcal{N}$ *і разом з індексом не залежить від* s *і* φ.

Ця теорема була доведена методом інтерполяції з функціональним параметром пар соболєвських просторів.

У вказаних вище роботах В. А. Михайлець і О. О. Мурач довели версії цієї теореми для еліптичних матричних операторів на гладкому замкненому многовиді, для еліптичних крайових задач з параметром, для регулярних еліптичних крайових задач у випадку довільного дійсного s (у рамках підходів Ліонса-Мадженеса і Ройтберга). Як застосування цих результатів, встановлено твердження про набори ізоморфізмів, породжених еліптичними операторами і еліптичними крайовими задачами в уточненій соболєвській шкалі, отримано апріорні оцінки їх узагальнених розв'язків у цій шкалі, доведено теореми про глобальну і локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера, знайдено нові достатні умови неперервності узагальнених похідних розв'язків. Можна сказати, що для уточненої соболєвської шкали теорія розв'язності еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач побудована у тому ж обсязі як і для просторів Соболєва. В. А. Михайлець і О. О. Мурач виклали цю теорію у монографіях [52, 164] і оглядах [159, 55, 163].

Як бачимо, уточнена соболєвська шкала виявилася досить корисною у теорії еліптичних рівнянь. Її застосування спирається на метод інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів, який дозволяє перейти від просторів Соболєва до просторів Хермандера, що утворюють цю шкалу. Втім, вона не містить у собі усі гільбертові простори, які можна отримати цим методом. Нагадаємо, що за теоремою В. І. Овчинникова [172, с. 511] клас усіх цих просторів збігається з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва.

В. А. Михайлець і О. О. Мурач [50, 165] дали конструктивний опис останнього класу у термінах просторів Хермандера. Вони показали, що він збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом просторів Хермандера $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{B}_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$, де $\mu(\xi) \equiv \varphi(\langle\xi\rangle)$, а $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ є довільна функція, RO-змінна за В. Г. Авакумовичем на нескінченності. Цей клас назвали розширеною соболєвською шкалою [54]. Він є замкненим відносно інтерполяції з функціональним параметром. Такі ж інтерполяційні властивості мають його аналоги для Ω і Γ.

У статтях В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [50, 51, 63], Т. М. Зінченко і О. О. Мурача [20 — 24, 169] була побудована теорія розв'язності загальних еліптичних рівнянь (скалярних і матричних) в розширених соболєвських шкалах, заданих на $\mathbb{R}^n$ або замкненому нескінченно гладкому многовиді. У роботах А. В. Аноп і О. О. Мурача [4 – 7, 111] була розроблена теорія розв'язності еліптичних крайових задач у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу в евклідовій обмеженій області і складаються з регулярних розподілів.

Відмітимо також, що В. М. Лось і О. О. Мурач [36 — 40, 151] застосували деякі анізотропні гільбертові простори Хермандера до загальних параболічних початково-крайових задач. Доведено теореми про коректну розв'язність цих задач і регулярність їх розв'язків у підходящих парах цих просторів.

Проте, на відміну від класичних (регулярних) еліптичних крайових задач, важливий і широкий клас еліптичних за Лавруком крайових задач не був досліджений в інших класах функціональних просторів, окрім соболєвських шкал (та їх модифікацій за Я. А. Ройтбергом). З огляду на різні застосування еліптичних за Лавруком задач, є актуальним їх дослідження у різних шкалах функціональних просторів. Серед них є перспективними зазначені вище класи гільбертових просторів Хермандера, які виявилися корисними й зручними у теорії класичних еліптичних крайових задач.

РОЗДІЛ 2
ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ З ФУНКЦІОНАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Цей розділ присвячений класам гільбертових просторів Хермандера — розширеній і уточненій соболєвським шкалам, у яких досліджуємо еліптичні за Лавруком крайові задачі. Ці шкали мають важливу для застосувань властивість — вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Цей метод інтерполяції є ключовим у дисертації. Він також викладений у даному розділі.

2.1. RO-змінні та правильно змінні функції

У дисертації використовуються гільбертові простори Хермандера, для яких показником регулярності розподілів служить довільна додатна функція $\alpha(t)$ аргументу $t \geq 1$, яка є RO-змінною за В. Г. Авакумовичем на нескінченності. Клас цих функцій позначаємо через RO. Він містить важливий підклас функцій, правильно змінних за Й. Караматою на нескінченності. Сформулюємо означення цих класів і обговоримо деякі їх властивості, потрібні у подальшому. Наведемо також характерні приклади функцій, приналежних цим класам.

Означення 2.1. Клас RO складається, за означенням, з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1 \quad \text{і} \quad \lambda \in [1, b]$$

(числа b і c можуть залежати від α). Ці функції називають RO- (або OR-) *змінними на нескінченності.*

Клас RO був введений В. Г. Авакумовичем [115]. Цей клас досить повно вивчений (див. монографії [79] (додаток 1) і [116] (пп. 2.0 – 2.2)). Відмітимо деякі його основні властивості.

Зауважимо спочатку, що кожна функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ обмежена і відокремлена від нуля на будь-якому відрізку $[1, q]$, де $1 < q < \infty$ (див. [79, с. 87], лема П.1).

Клас RO має такий інтегральний опис (див., наприклад, [79, с. 87]).

Твердження 2.1. *Функція* $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ *належить до* RO *тоді і тільки тоді, коли*

$$\alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \quad \textit{при} \quad t \geq 1$$

для деяких вимірних за Борелем обмежених функцій $\beta, \gamma : [1, \infty) \to \mathbb{R}$.

Важливу роль для функцій класу RO відіграють їх індекси Матушевської [153]. Для означення цих індексів знадобиться така властивість класу RO (див., наприклад, [79, с. 88]).

Твердження 2.2. *Для будь-якої функції* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *існують дійсні числа* s_0 *і* s_1, *причому* $s_0 \leq s_1$, *і додатні числа* c_0 *і* c_1 *такі, що*

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \textit{для усіх} \quad t \geq 1 \quad \textit{і} \quad \lambda \geq 1. \tag{2.1}$$

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$; покладемо

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність в (2.1)}\},$$

$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність в (2.1)}\}.$$

Зазначимо, що

$$-\infty < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < \infty.$$

Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ називають відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції α (див. [116] (п. 2.1.2)).

Поклавши $t := 1$ у твердженні 2.2, робимо висновок, що кожна функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ є міжстепеневою, тобто

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ (c_0' \lambda^{s_0} \leq \alpha(\lambda) \leq c_1' \lambda^{s_1} \text{ для усіх } \lambda \geq 1). \tag{2.2}$$

Тут додатні числа $c_0' := c_0\alpha(1)$ і $c_1' := c_1\alpha(1)$ не залежать від λ.

Наведемо важливий приклад функцій з класу RO.

Приклад 2.1. Розглянемо неперервну функцію $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таку, що

$$\alpha(t) := t^{\sigma}(\ln t)^{q_1}(\ln\ln t)^{q_2}\ldots(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\ \text{разів}} t)^{q_k} \quad \text{для} \quad t \gg 1. \tag{2.3}$$

Тут $k \in \mathbb{N}$ і $\sigma, q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільно вибрані числа. Функція α належить до класу RO; для неї $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sigma$.

Функції вигляду (2.3) є еталонним прикладом функцій, правильно змінних за Й. Караматою [144] на нескінченності. Нагадаємо означення останніх. Будемо розглядати функції, задані на проміні $[1,\infty)$.

Означення 2.2. Вимірна за Борелем функція $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ називається *правильно змінною* за Караматою на нескінченності, якщо існує число $\sigma \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} = \lambda^{\sigma} \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Число σ називається *порядком змінення* функції α на нескінченності. Функція, правильно змінна порядку 0 на нескінченності, називається *повільно змінною* на нескінченності за Караматою.

Звісно, функція α є правильно змінною порядку σ на нескінченності тоді і тільки тоді коли $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$ для деякої функції φ, повільно змінної на нескінченності.

Теорія правильно змінних функцій викладена у монографіях [79, 116].

З теореми про рівномірну збіжність (див., наприклад, [79] (теорема 1.1)) випливає такий факт: якщо вимірна за Борелем функція $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ обмежена і відокремлена від нуля на кожному відрізку $[1,q]$, де $1 < q < \infty$, і є правильно змінною порядку σ за Караматою на нескінченності, то $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sigma$.

Різні приклади правильно змінних функцій можна отримати, скориставшись такою їх властивістю [79, с. 15]: неперервно диференційовна функція

$\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ є повільно змінною за Караматою на нескінченності тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0.$$

Приклад 2.2. Покладемо

$$\eta(t) := t^s e^{(\ln t)^r} \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Тут $s \in \mathbb{R}$ і $r \in (0, 1)$ є довільно вибрані числа. Неперервна функція η є правильно змінною на нескінченності порядку s і тому належить до класу RO. Відмітимо, що ця функція зростає швидше на нескінченності, ніж будь-яка функція α з прикладу 2.1 при $\sigma = s$, але повільніше, за будь-яку функцію з цього ж прикладу при $\sigma > s$.

Приклад 2.3. Нехай $\theta, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причому $\theta \neq 0$ и $0 < \gamma < \beta < 1$. Покладемо $h(t) := \theta(\ln t)^{-\beta} \sin \ln^{\gamma} t$ і $\alpha(t) := t^{h(t)}$ при $t > e$, та, окрім того, $\alpha(t) := e^{\theta \sin 1}$ при $1 \leq t \leq e$. Тоді неперервна функція α є повільно змінною на нескінченності і належить до класу RO. Цей приклад цікавий тим, що

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \alpha(t) = 0 \quad \text{і} \quad \overline{\lim}_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$$

(див. [52, с. 47]).

Відмітимо, що існують функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ такі, що $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha)$, але α не еквівалентна в околі нескінченності жодній функції $\eta > 0$, правильно змінній на нескінченності. Тут і далі додатні функції α і η називаємо еквівалентними в околі нескінченності, якщо обидві функції $\alpha(t)/\eta(t)$ і $\eta(t)/\alpha(t)$ обмежені на деякому промені $[r, \infty)$, де $r \gg 1$.

Приклад 2.4. Прикладом такої функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ служить функція $\alpha(t) := e^{h(\ln t)}$ аргументу $t \geq 1$, де h означено за формулами: $h(x) := 0$ при $x \in [0, 1]$ та $h(x) := h(2^j) + (x - 2^j)^{1/2}$ при $x \in [2^j, 2^{j+1}]$ для кожного цілого $j \geq 0$. Для неї $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = 0$. Це обгрунтовано в [116] (твердження 2.2.8).

Наведемо також відомий приклад функції класу RO з різними індексами Матушевської.

Приклад 2.5. Покладемо

$$\alpha(t) := \begin{cases} t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^r}, & \text{якщо } t > e, \\ t^{\theta}, & \text{якщо } 1 \le t \le e. \end{cases}$$

Тут довільно вибрані числа $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0, 1]$. Безпосередньо перевіряється, що $\alpha \in \mathrm{RO}$, причому $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$. Отже, $\sigma_0(\alpha) < \sigma_1(\alpha)$.

2.2. Шкали просторів Хермандера

Наведемо спочатку означення гільбертових просторів Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$. Ці простори складаються з розподілів на $\mathbb{R}^n$.

Як звичайно, позначимо через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ комплексний лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$. У дисертації всі розподіли трактуються як *анти*лінійні функціонали на відповідних просторах основних функцій. При цьому всі розподіли і функції вважаємо *комплексно*значними. Отже, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ є антидуальним простором до лінійного топологічного простору $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ нескінченно гладких швидко спадаючих функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$.

Означення 2.3. Комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається, за означенням, з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

У просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi, \tag{2.4}$$

де $w_1, w_2 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Тут і далі $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Скалярний добуток (2.4) задає на $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і відповідну їй норму

$$\|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Цей простір сепарабельний; у ньому щільна множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм. Виконуються неперервні і щільні вкладення

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, введених і досліджених Л. Хермандером [92] (п. 2.2) (див також його монографію [94] (п. 10.1)). А саме, $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{R}^n)$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Відмітимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [17] (§ 2).

У випадку степеневої функції $\alpha(t) \equiv t^\sigma$, простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ стає гільбертовим простором Соболєва $H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$ порядку $\sigma \in \mathbb{R}$.

Слідуючи [54], клас гільбертових функціональних просторів

$$\left\{H^\alpha(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathrm{RO}\right\} \tag{2.5}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Він виділений і досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем у статтях [50, 54, 165] і монографіях [52, 164] (п. 2.4.2).

Сформулюємо дві властивості розширеної соболєвської шкали (2.5), які стосуються вкладень просторів Хермандера, що утворюють її. Ці властивості є наслідками теорем, доведених Л. Хермандером у монографії [92] (п. 2.2, відповідно теореми 2.2.2 і 2.2.3).

Твердження 2.3. *Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Якщо функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності, то виконується неперервне і щільне вкладення $H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)$. Зворотно, якщо для деякої відкритої підмножини $V \neq \varnothing$ простору $\mathbb{R}^n$ виконується включення*

$$\left\{w \in H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset V\right\} \subset H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n),$$

то функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності.

На підставі цього твердження та імплікації (2.2) робимо висновок, що розширена соболєвська шкала пов'язана з просторами Соболєва у такий спосіб:

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n). \qquad (2.6)$$

Тут обидва вкладення є неперервними і щільними.

Твердження 2.4. *Нехай $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Припустимо, що Q є компактна множина в $\mathbb{R}^n$ така, що Q має принаймні одну внутрішню точку. Тоді компактне вкладення*

$$\bigl\{w \in H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset Q\bigr\} \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)$$

еквівалентне умові $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

У цьому твердженні ліву частину вкладення трактуємо як підпростір простору $H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n)$.

Сформулюємо також одну версію теореми вкладення Хермандера [92, с. 59] (теорема 2.2.7), яка пов'язує розширену соболєвську шкалу (2.5) із просторами $C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$, де ціле $l \geq 0$. За означенням, простір $C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх функцій $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які мають неперервні і обмежені на $\mathbb{R}^n$ частинні похідні до порядку l включно. У цьому просторі введена норма за формулою

$$\|w\|_{C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)} := \max_{|\mu|\leq l}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^{\mu} w(x)|; \qquad (2.7)$$

тут μ — мультиіндекс вимірності n. Простір $C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ повний відносно цієї норми.

Твердження 2.5. *Нехай ціле число $l \geq 0$ і функція $\alpha \in \mathrm{RO}$. Якщо*

$$\int_1^{\infty} t^{2l+n-1}\, \alpha^{-2}(t)\, dt < \infty, \qquad (2.8)$$

то виконується неперервне вкладення $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$. Зворотно, якщо для деякої відкритої підмножини $V \neq \varnothing$ простору $\mathbb{R}^n$ справджується вкладення

$$\bigl\{w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset V\bigr\} \subset C^l(\mathbb{R}^n),$$

то виконується нерівність (2.8).

Тут доречно зауважити, що умова (2.8) еквівалентна умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|)^{2l}}{k^2(\xi)}\, d\xi < \infty,$$

де $k(\xi) \equiv \alpha(\langle\xi\rangle)$. Остання використана Л. Хермандером у теоремі вкладення [92, с. 59]. Доведення цієї еквівалентності є в [20, с. 1487].

Перейдемо тепер до розгляду уточненої соболєвської шкали, яка є важливим для застосувань [52, 163, 164] підкласом розширеної соболєвської шкали. Уточнена соболєвська шкала складається з усіх просторів Хермандера $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ таких, що параметр $\alpha \in \mathrm{RO}$ є правильно змінною функцією за Караматою на нескінченності. Цей параметр будемо подавати у вигляді $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$, де число $\sigma \in \mathbb{R}$ є порядком змінення функції α на нескінченності, а функція φ є повільно змінною на нескінченності. Клас усіх цих функцій φ позначаємо через $\mathcal{M}$.

Отже, клас $\mathcal{M}$ складається, за означенням, з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Караматою.

З теореми про інтегральне зображення повільно змінних функцій (див., наприклад, [79, с. 10]) випливає такий опис класу $\mathcal{M}$.

Твердження 2.6. *Функція $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ належить до класу $\mathcal{M}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \quad \text{\textit{при}} \quad t \geq 1$$

для деяких вимірної за Борелем функції $\beta : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ і неперервної функції $\gamma : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ таких, що $\beta(t) \to l \in \mathbb{R}$ при $t \to \infty$ і $\gamma(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Нехай $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ гільбертів простір Хермандера $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ з показником регулярності $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$.

Слідуючи В. А. Михайлецю і О. О. Мурачу [52, 164] (п. 1.3.3), клас гільбертових функціональних просторів

$$\left\{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) :\, \sigma \in \mathbb{R},\, \varphi \in \mathcal{M}\right\} \tag{2.9}$$

називаємо уточненою соболєвською шкалою на множині $\mathbb{R}^n$.

Як уже зазначалося, цей клас є частиною розширеної соболєвської шкали. Він містить у собі шкалу гільбертових просторів Соболєва $\{H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) : \sigma \in \mathbb{R}\}$, бо $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) = H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n)$, якщо $\varphi(t) \equiv 1$.

Оскільки для функції $\alpha(t) \equiv t^\sigma \varphi(t)$ індекси Матушевської $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = \sigma$, то для уточненої соболєвської шкали властивість (2.6) можна подати у вигляді

$$H^{(\sigma+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(\sigma-\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для довільного} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.10}$$

Тут обидва вкладення неперервні та щільні.

З них видно, що у класі функціональних просторів (2.9) числовий параметр σ задає основну (степеневу) гладкість, а функціональний параметр φ визначає додаткову (узагальнену) гладкість, підпорядковану основній. У залежності від того, чи $\varphi(t) \to \infty$ або $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, параметр φ задає додаткову додатну або від'ємну гладкість. Іншими словами, параметр φ уточнює основну σ-гладкість. Тому для цього класу використано назву „уточнена соболєвська шкала".

Для нього правильна така версія теореми вкладення Хермандера.

Твердження 2.7. *Нехай ціле число $l \geq 0$ і функція $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді умова*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} < \infty \tag{2.11}$$

рівносильна вкладенню

$$H^{l+n/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n).$$

Це вкладення неперервне.

Звісно, це твердження є окремим випадком твердження 2.5. Твердження 2.7 уточнює для граничного значення показника $\sigma = l + n/2$ класичну теорему вкладення Соболєва, згідно з якою

$$H^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n) \subset C^l(\mathbb{R}^n) \iff \sigma > l + \frac{n}{2}.$$

2.3. Метод інтерполяції з функціональним параметром

Цей метод інтерполяції вперше з'явився у статті К. Фояша і Ж.-Л. Ліонса [134, с. 278]. Він є природнім узагальненням класичного інтерполяційного методу Ж.-Л. Ліонса [147] і С. Г. Крейна [27] на випадок, коли замість числового параметра інтерполяції береться досить загальна функція.

Наведемо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та обговоримо деякі її властивості. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними гільбертовими просторами. Будемо слідувати [52, 164] (п. 1.1).

Упорядковану пару $X := [X_0, X_1]$ комплексних гільбертових просторів називаємо *припустимою*, якщо ці простори сепарабельні і виконується неперервне й щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$.

Нехай задана *припустима* пара $X := [X_0, X_1]$ комплексних гільбертових просторів. Існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для довільного $w \in X_1$ (див. [33, с. 22] або [90, с. 251]). Оператор J визначається за парою X однозначно і називається *породжуючим* оператором для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi :(0,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлені від нуля на кожній множині $[r,\infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектрального розкладу самоспряженого оператора J означений оператор $\psi(J)$ у просторі X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$. У комплексному лінійному просторі X_ψ введемо скалярний добуток

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідну норму

$$\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}.$$

Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний. Для нього виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Надалі центральну роль відіграватиме

Означення 2.4. Функція $\psi \in \mathcal{B}$ називається *інтерполяційним параметром*, якщо для будь-яких припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така властивість. Якщо для кожного індексу $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Іншими словами, функціональний параметр ψ є інтерполяційним тоді і тільки тоді, коли відображення $X \mapsto X_\psi$ є інтерполяційним функтором, заданим на категорії усіх припустимих пар X гільбертових просторів (див. означення інтерполяційного функтора в монографіях [10, с. 41] або [88, с. 18]).

Якщо функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром, то говоримо, що простір X_ψ отримується методом *інтерполяції з функціональним параметром* ψ пари X. Тоді виконуються неперервні та щільні вкладення $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$ (див. [52, 164], теорема 1.1).

Класичний результат Ж.-Л. Ліонса [147] і С. Г. Крейна [27] в теорії інтерполяції гільбертових просторів полягає у тому, що степенева функція $\psi(t) \equiv t^\theta$ порядку $\theta \in (0, 1)$ є інтерполяційним параметром (див також монографії [33, с. 41] або [90, с. 253]). У цьому випадку показник θ служить числовим параметром інтерполяції, а простір X_ψ позначається через X_θ.

З теореми Ж. Петре [175, 176] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного порядку (див. також монографію [10, с. 153]) випливає важливий для застосувань критерій того, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром.

Перед тим як сформулювати цей критерій нагадаємо таке поняття. Функцію $\psi : (r, \infty) \to (0, \infty)$, де $r \in \mathbb{R}$, називають *псевдоугнутою* в околі нескінченності, якщо вона еквівалентна там деякій додатній угнутій функції.

Твердження 2.8. *Функція* $\psi \in \mathcal{B}$ *є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності.*

Доведення цього твердження наведено, наприклад, у монографіях [52, 164] (п. 1.1.9).

Розглянемо дві властивості розглянутого методу інтерполяції, які будуть неодноразово використані у дисертації.

У теорії еліптичних диференціальних рівнянь важливу роль відіграє властивість, згідно з якою при інтерполяції пар просторів успадковується не лише обмеженість лінійних операторів, що діють у цих просторах, але і їх нетеровість при деяких додаткових умовах. Нагадаємо відповідні означення і результат.

Означення 2.5. Лінійний обмежений оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називається *нетеровим*, якщо його ядро $\ker T := \{w \in E_1 : Tw = 0\}$ і коядро $\operatorname{coker} T := E_2/T(E_1)$ обидва скінченновимірні. *Індексом* нетерового оператора T називається число

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T.$$

Нетерів оператор, індекс якого дорівнює нулю, називається *фредгольмовим.*

Якщо оператор нетерів, то його область значення замкнена (див., наприклад, [95, с. 246]). Зауважимо, що в англомовній літературі нетерові оператори прийнято називати фредгольмовими.

Наступна властивість нетерових операторів виконується для довільних інтерполяційних функторів [135, с. 281], зокрема і для розглянутого функтора $X \mapsto X_\psi$ (див. [52, 164], п. 1.1.7).

Твердження 2.9. *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задане лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j*, де* $j = 0, 1$*, є обмеженими і нетеровими операторами* $T : X_j \to Y_j$*, які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений* *оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень рівна* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

В дисертації доведеться інтерполювати пари ортогональних сум гільбертових просторів. Нагадаємо означення таких сум і властивість, що стосується їх інтерполяції.

Нехай задано p гільбертових просторів $H_1, \dots, H_p$, де ціле $p \geq 2$. Їх ортогональною сумою називається гільбертів простір

$$H := \bigoplus_{j=1}^{p} H_j := \{u = (u_1, \dots, u_p) :\ u_1 \in H_1, \dots, u_p \in H_p\},$$

наділений скалярним добутком

$$(u, v)_H = \sum_{j=1}^{p} (u_j, v_j)_{H_j}$$

та відповідною нормою

$$\|u\|_H = \left(\sum_{j=1}^{p} \|u_j\|^2_{H_j} \right)^{1/2}.$$

Тут вектори $u = (u_1, \dots, u_p)$ і $v = (v_1, \dots, v_p)$ належать до H. Якщо усі гільбертові простори $H_1, \dots, H_p$ однакові: $H_1 = \ldots = H_p =: E$, то їх пряму суму позначаємо через E^p.

Твердження 2.10. *Нехай задано* $p \geq 2$ *припустимих пар гільбертових просторів*

$$X^{(j)} := \bigl[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\bigr], \quad \text{де} \quad j = 1, \dots, p. \tag{2.12}$$

Тоді пара гільбертових просторів

$$\left[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)} \right]$$

є припустимою, і для будь-якого функціонального параметра $\psi \in \mathcal{B}$ *виконується рівність просторів*

$$\left[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)} \right]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p} \bigl[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\bigr]_\psi \tag{2.13}$$

з рівністю норм у них.

Доведення цього твердження наведено, наприклад, в [52, 164] (п. 1.1.5).

2.4. Інтерполяційні властивості шкал просторів Хермандера

Розширена та уточнена соболєвські шкали мають важливу інтерполяційну властивість, яка відіграє ключову роль у дисертації. Кожний простір Хермандера, що належить цим шкалам, можна отримати інтерполяцію з підходящим функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. А саме, правильні такі твердження.

Твердження 2.11. *Нехай функція* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *і числа* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ *такі, що* $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ *і* $\sigma_1(\alpha) < s_1$. *Покладемо*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha(t^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \text{для} \quad t \in (0,1). \end{cases} \tag{2.14}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ *є інтерполяційним параметром, і виконується рівність просторів*

$$\bigl[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\bigr]_\psi = H^\alpha(\mathbb{R}^n) \tag{2.15}$$

разом з рівністю норм у них.

Твердження 2.12. *Нехай задано функцію* $\varphi \in \mathcal{M}$ *і додатні числа* ε, δ. *Покладемо*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\,\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)}) & \text{для} \quad t \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad t \in (0,1). \end{cases} \tag{2.16}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ *є інтерполяційним параметром, і для довільного* $\sigma \in \mathbb{R}$ *виконується рівність просторів*

$$\bigl[H^{(\sigma-\varepsilon)}(\mathbb{R}^n), H^{(\sigma+\delta)}(\mathbb{R}^n)\bigr]_\psi = H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \tag{2.17}$$

разом з рівністю норм у них.

Ці твердження встановлено в монографії [52] (теореми 2.19 і 1.14 відповідно).

Там же показано, що розширена соболєвська шкала замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$. (Останній факт випливає з теореми В. І. Овчинникова [172, с. 511] про опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для заданої пари гільбертових просторів.) У цьому зв'язку нагадаємо, що властивість гільбертового простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає виконання таких двох умов: а) наявні неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) якщо лінійний обмежений оператор $T : X_0 \to X_0$ такий, що його звуження на простір X_1 є обмеженим оператором $T : X_1 \to X_1$, то і звуження оператора T на простір H є обмеженим оператором $T : H \to H$.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації наведено потрібні надалі факти про простори Хермандера, які утворюють розширену та уточнену соболєвські шкали на $\mathbb{R}^n$. Розширена соболєвська шкала складається з гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності розподілів служить довільний функціональний параметр, RO-змінний на нескінченності за Авакумовичем. Її підклас — уточнена соболєвська шкала — утворена гільбертовими просторами Хермандера, для яких основна регулярність розподілів задається числовим параметром σ, а додаткова регулярність — функціональним параметром φ, повільно змінним за Караматою на нескінченності. Обидві шкали отримуються методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Розширена соболєвська шкала замкнена відносно методу інтерполяції з функціональним параметром.

У цьому розділі також розглянуто метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Він відіграє ключову роль у дисертації.

РОЗДІЛ 3
ЕЛІПТИЧНА ЗА ЛАВРУКОМ КРАЙОВА ЗАДАЧА В РОЗШИРЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ

У цьому розділі розглядаються еліптична за Лавруком крайова задача в розширеній соболєвській шкалі. Ми дослідимо характер розв'язності цієї задачі і властивості їх розв'язків у просторах Хермандера, що складаються з регулярних розподілів.

3.1. Еліптична за Лавруком крайова задача

Надалі у дисертації позначаємо через Ω довільну обмежену область (відкриту, зв'язну і непорожню множину) в $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є замкненим (тобто компактним і без краю) орієнтовним і нескінченно гладким многовидом вимірності $n-1$ (при цьому C^∞-структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$). Зауважимо, що тоді Ω локально лежить по один бік від своєї межі. Як завжди, $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ є замикання області Ω. Позначимо через $\nu(x)$ орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$, а через ν нескінченно гладке векторне поле цих ортів, задане на Γ.

Виберемо довільно цілі числа $q \geq 1$, $\varkappa \geq 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa} \leq 2q-1$ і $r_1, \ldots, r_\varkappa$.

Розглянемо в області Ω лінійну крайову задачу із $\varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q+\varkappa. \tag{3.2}$$

Тут

$$A := A(x, D) := \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu$$

є лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q$, кожне

$$B_j := B_j(x, D) := \sum_{|\mu| \le m_j} b_{j,\mu}(x) D^{\mu}$$

є крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку m_j, а кожне $C_{j,k} := C_{j,k}(x, D_\tau)$ є (дотичний) лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \le m_j + r_k$. (Звісно, якщо $m_j < 0$, то $B_j = 0$, а якщо $m_j + r_k < 0$, то $C_{j,k} = 0$.) Припускаємо, що усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно.

Тут і надалі використовуємо стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^{\mu} := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_l := i\partial/\partial x_l$, де i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Окрім того, покладаємо $D_\nu := i\partial/\partial\nu$ та $\xi^{\mu} := \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ для вектора $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

У крайовій задачі (3.1), (3.2) функція u на Ω, і $\varkappa$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ є шуканими. Нагадаємо, що у роботі всі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

Надалі припускаємо, що крайова задача (3.1), (3.2) є еліптичною в області Ω за Б. Лавруком [30] (п. 1). Слідуючи [146] (п. 3.1.3), подамо означення еліптичності цієї задачі у такій еквівалентній формі.

Позначимо через $A^{(0)}(x, \xi)$ і $B_j^{(0)}(x, \xi)$ головні символи диференціальних операторів $A(x, D)$ і $B_j(x, D)$ відповідно. Нагадаємо, що для кожного фіксованого $x \in \overline{\Omega}$ вираз

$$A^{(0)}(x, \xi) := \sum_{|\mu| = 2q} a_{\mu}(x) \xi^{\mu}$$

є однорідним поліномом порядку $2q$ змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$, і для кожного фіксованого $x \in \Gamma$ вираз

$$B_j^{(0)}(x, \xi) := \sum_{|\mu| = m_j} b_{j,\mu}(x) \xi^{\mu}$$

є однорідним поліномом порядку m_j змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$. (Якщо $m_j < 0$, то $B_j^{(0)}(x, \xi) := 0$.) Окрім того, позначимо через $C_{j,k}^{(0)}(x, \tau)$ головний символ дотичного диференціального оператора $C_{j,k}(x, D_\tau)$, якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} = m_j + r_k$. Для кожної точки $x \in \Gamma$ вираз $C^{(0)}_{j,k}(x, \tau)$ є однорідним поліномом порядку $m_j + r_k$ змінної τ, де τ— довільний дотичний вектор до межі Γ у точці x. Якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} < m_j + r_k$, то покладаємо $C^{(0)}_{j,k}(x, \tau) := 0$.

Означення 3.1. Крайова задача (3.1), (3.2) називається еліптичною в області Ω, якщо виконуються такі три умови:

(i) Диференціальний оператор $A(x, D)$ є еліптичним у кожній точці $x \in \overline{\Omega}$, тобто $A^{(0)}(x, \xi) \neq 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Диференціальний оператор $A(x, D)$ є правильно еліптичним у кожній точці $x \in \Gamma$, тобто для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, многочлен $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ комплексної змінної ζ має q коренів з додатною уявною частиною і стільки ж коренів з від'ємною уявною частиною (порахованих з урахуванням їх кратності).

(iii) Система крайових умов (3.2) накриває рівняння (3.1) у кожній точці $x \in \Gamma$. Це значить, що для кожного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, крайова задача

$$A^{(0)}(x, \tau + \nu(x)D_t)\theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{3.3}$$

$$B^{(0)}_j(x, \tau + \nu(x)D_t)\theta(t)\big|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(x, \tau)\lambda_k = 0, \qquad j = 1, ..., q + \varkappa, \tag{3.4}$$

має лише тривіальний (нульовий) розв'язок. Ця задача розглядається відносно невідомої функції $\theta \in C^\infty([0, \infty))$, що задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, і невідомих комплексних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa$. Тут $A^{(0)}(x, \tau + \nu(x)D_t)$ і $B^{(0)}_j(x, \tau + \nu(x)D_t)$ є диференціальні оператори відносно $D_t := i\partial/\partial t$, які отримуємо, поклавши $\zeta := D_t$ у відповідно многочленах $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ і $B^{(0)}_j(x, \tau + \zeta\nu(x))$ змінної ζ.

Відмітимо, що умова (ii) є наслідком умови (i) у випадку, коли $n \geq 3$.

Пов'яжемо із задачею (3.1), (3.2) лінійне відображення

$$\begin{gathered}\Lambda : (u, v_1, ..., v_{\varkappa}) \mapsto \\ \mapsto \left(Au,\ B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k \right), \\ \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \quad v_1, \ldots, v_{\varkappa} \in C^{\infty}(\Gamma).\end{gathered} \tag{3.5}$$

У дисертації буде досліджено властивості продовження за неперервністю цього відображення у підходящих парах гільбертових просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження знадобиться така спеціальна формула Гріна [29] (п. 4) (див. також [146] (теорема 3.1.2)):

$$\begin{gathered}(Au, w)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \left(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j \right)_{\Gamma} = \\ = (u, A^{+} w)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{2q} \left(D_{\nu}^{j-1} u, K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q_{k,j}^{+} h_k \right)_{\Gamma} + \\ + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left(v_j, \sum_{k=1}^{q+\varkappa} C_{k,j}^{+} h_k \right)_{\Gamma},\end{gathered}$$

де функції $u, w \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_{\varkappa}, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa} \in C^{\infty}(\Gamma)$ довільні, а $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно. Тут

$$A^{+} w := A^{+}(x, D) w(x) := \sum_{|\mu| \leq 2q} D^{\mu} (\overline{a_{\mu}(x)} w(x)),$$

тобто A^{+} є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Окрім того, $C_{k,j}^{+}$ і $Q_{k,j}^{+}$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення крайових операторів B_j у вигляді

$$B_j(x, D) = \sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}(x, D_{\tau}) D_{\nu}^{k-1}.$$

(Звісно, якщо $k > m_j$, то $Q_{j,k} = 0$). Нарешті, $K_j := K_j(x, D)$ є деякий лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_j \le 2q - j$, який однозначно визначається цією формулою Гріна.

З огляду на формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q + \varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$A^+ w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.6}$$

$$K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^+_{k,j} h_k = \chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., 2q, \tag{3.7}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^+_{k,j} h_k = \chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., \varkappa. \tag{3.8}$$

Ця задача формально спряжена до задачі (3.1), (3.2) відносно наведеної формули Гріна. Відмітимо [146] (теорема 3.1.2), що еліптичність задачі (3.1), (3.2) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (3.6), (3.7), (3.8).

3.2. Приклади

Наведемо приклади еліптичних за Лавруком крайових задач.

Приклад 3.1. Простим прикладом еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2), де $n=2$ і $\varkappa=1$, служить така задача:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u+v=g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$\partial_\nu u + \partial_\tau v = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тут і далі Δ — оператор Лапласа, $\partial_\nu := \partial/\partial\nu$ є похідна вздовж орта ν, а $\partial_\tau := \partial/\partial\tau$ є похідна вздовж кривої Γ, яку обходимо так, щоб область Ω завжди була ліворуч. Запишемо спеціальну формулу Гріна для цієї крайової задачі і відповідну формально спряжену задачу. Використовуючи другу класичну формулу Гріна для оператора Лапласа, напишемо таке:

$$(\Delta u, w)_\Omega + (u+v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu u + \partial_\tau v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta w)_\Omega - (\partial_\nu u, w)_\Gamma + (u, \partial_\nu w)_\Gamma + (u+v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu u + \partial_\tau v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta w)_\Omega + (u, \partial_\nu w + h_1)_\Gamma + (\partial_\nu u, -w + h_2)_\Gamma + (v, h_1 - \partial_\tau h_2)_\Gamma$$

для довільних функцій $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v, h_1, h_2 \in C^\infty(\Gamma)$. У результаті отримали спеціальну формулу Гріна

$$(\Delta u, w)_\Omega + (u+v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu u + \partial_\tau v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta w)_\Omega + (u, \partial_\nu w + h_1)_\Gamma + (D_\nu u, -iw + ih_2)_\Gamma + (v, h_1 - \partial_\tau h_2)_\Gamma.$$

Отже, для розглянутої крайової задачі формально спряжена задача відносно цієї формули набирає вигляду

$$\Delta w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial_\nu w + h_1 = \chi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$-iw + ih_2 = \chi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$h_1 - \partial_\tau h_2 = \chi_3 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Остання задача містить на одну крайову умову більше, ніж вихідна задача. Відмітимо, що отримана формально спряжена задача еквівалентна еліптичній крайовій задачі

$$\Delta w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (\partial_\nu + \partial_\tau) w = \chi \qquad \text{на} \quad \Gamma,$$

яка не містить додаткових невідомих функцій у крайовій умові. Справді, якщо вектор (w, h_1, h_2) є розв'язком формально спряженої задачі, то безпосередньо перевіряється, що функція w є розв'язком останньої задачі, де $\chi := \chi_1 + i\partial_\tau \chi_2 - \chi_3$. Зворотно, якщо функція w є розв'язком цієї задачі, то, наприклад, вектор (w, h_1, h_2), де $h_1 := h_2 := 0$, є розв'язком формально спряженої задачі з правими частинами

$$\chi_1 := \chi - (\partial_\tau w) \restriction \Gamma, \quad \chi_2 := -iw \restriction \Gamma, \quad \chi_3 := 0.$$

Приклад 3.2. Розглянемо таку еліптичну крайову задачу вигляду (3.1), (3.2), де $n = 2$ і $\varkappa = 1$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$bu + cv = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.9}$$

$$\partial_\nu u + \partial_\tau v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.10}$$

Тут b, c і g_1 є дійсні неперервно диференційовні функції на Γ, причому $b^2(x) + c^2(x) \neq 0$ для кожної точки $x \in \Gamma$. Відомо [29, с. 259], що ця крайова задача еквівалентна такій задачі Коші-Рімана: знайти комплексну функцію $u + iv$, яка голоморфна в області Ω, неперервно диференційовна аж до межі Γ і задовольняє крайову умову (3.9). Принагідно зауважимо, що крайова умова (3.10) випливає з умов Коші-Рімана для голоморфної функції $u + iv$.

Приклад 3.3. Узагальнюючи попередні два приклади, розглянемо таку крайову задачу вигляду (3.1), (3.2), де $n = 2$ і $\varkappa = 1$:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$b_1 u + c_1 v = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$b_2\,\partial_\nu u + c_2\,\partial_\tau v = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тут диференціальний оператор A, що задовольняє умови (i), (ii) означення 3.1, має другий порядок, а коефіцієнти b_1, b_2, c_1 і c_2 є задані функції класу $C^\infty(\Gamma)$. Запишемо умову (iii) означення 3.1 для цієї задачі. Виберемо довільно точку $x \in \Gamma$ і вектор $\tau \neq 0$, дотичний до Γ у точці x. Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.3), який задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, записується у вигляді

$$\theta(t) = p \exp(-i\zeta_-(x,\tau)t), \tag{3.11}$$

де p є довільне комплексне число, а $\zeta_-(x,\tau)$ є ζ-корінь многочлена $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ такий, що $\operatorname{Im}\zeta_-(x,\tau) < 0$. Для розглянутої крайової задачі система рівнянь (3.4) набирає вигляду

$$b_1(x)\theta(0) + c_1(x)\lambda_1 = 0, \tag{3.12}$$

$$b_2(x)\theta'(0) \pm i c_2(x)|\tau|\lambda_1 = 0. \tag{3.13}$$

Зробимо пояснення стосовно останнього рівняння. Головним символом крайового диференціального оператора

$$B_2(x, D) := b_2(x)\partial_\nu = -i b_2(x)(\nu_1(x)D_1 + \nu_2(x)D_2)$$

є поліном

$$B_2^{(0)}(x,\xi) := -i b_2(x)(\nu_1(x)\xi_1 + \nu_2(x)\xi_2) \equiv -i b_2(x)\nu(x)\xi$$

від $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$; тут, звісно, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$. Тому

$$B_2^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x)) = -i b_2(x)\nu(x)(\tau + \zeta\nu(x)) = -i b_2(x)\zeta,$$

де $\zeta \in \mathbb{C}$. Отже,

$$B_2^{(0)}(x, \tau + \nu(x)D_t)\theta(t) = -i b_2(x) D_t\theta(t) = b_2(x)\theta'(t). \tag{3.14}$$

Окрім того, головним символом дотичного диференціального оператора

$$C_{2,1}(x, D_\tau) := c_2(x)\partial_\tau = -ic_2(x)(\tau_1^*(x)D_1 + \tau_2^*(x)D_2)$$

є поліном

$$C_{2,1}^{(0)}(x, \tau) := -ic_2(x)(\tau_1^*(x)\tau_1 + \tau_2^*(x)\tau_2) \equiv \pm ic_2(x)|\tau|. \tag{3.15}$$

Тут $\tau^*(x) = (\tau_1^*(x), \tau_2^*(x))$ є одиничний дотичний вектор до кривої Γ у точці x, напрям якого відповідає напряму обходу цієї кривої, а $\tau = (\tau_1, \tau_2)$. Тепер на підставі (3.14) і (3.15) робимо висновок, що крайова умова (3.4) при $j = 2$ набирає вигляду (3.13). Підставивши (3.11) в рівняння (3.12) і (3.13), запишемо

$$\begin{gathered} b_1(x)p + c_1(x)\lambda_1 = 0, \\ -ib_2(x)\zeta_-(x,\tau)p \pm ic_2(x)|\tau|\lambda_1 = 0. \end{gathered}$$

Це — система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $p, \lambda_1 \in \mathbb{C}$. Умова (iii) означення 3.1 для розглянутої крайової задачі говорить, що ця система повинна мати лише тривіальний розв'язок, тобто

$$\begin{vmatrix} b_1(x) & c_1(x) \\ b_2(x)\zeta_-(x,\tau) & \mp c_2(x)|\tau| \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.16}$$

Таким чином, розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω тоді і лише тоді, коли умова (3.16) виконується для кожної точки $x \in \Gamma$ і довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x. Зокрема, ця умова виконується, якщо

$$b_1(x)c_2(x) \in \mathbb{R}, \quad b_2(x)c_1(x) \in \mathbb{R}, \quad |b_1(x)c_2(x)| + |b_2(x)c_1(x)| \neq 0$$

для кожної точки $x \in \Gamma$. Крайові задачі, розглянуті у прикладах 3.1 і 3.2 задовольняють цю умову і тому є еліптичними в Ω.

Приклад 3.4. У випадку $\varkappa = 2$ розглянемо таку крайову задачу вигляду (3.1), (3.2):

$$
\begin{gathered}
Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\
u + v_1 = g_1, \quad \partial_\nu u + v_2 = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\
\partial_\nu^2 u + \Delta_\Gamma v_1 = g_3, \quad \partial_\nu^3 u + \Delta_\Gamma v_2 = g_4 \quad \text{на} \quad \Gamma.
\end{gathered}
$$

Тут диференціальний оператор A, що задовольняє умови (i), (ii) означення 3.1, має четвертий порядок, а Δ_Γ є оператор Бельтрамі-Лапласа на Γ (див., наприклад, [106, с. 163]), при цьому на Γ введена ріманова метрика, індукована простором $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що для довільної точки $x \in \Gamma$ і вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x, многочлен $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ не має кратних ζ-коренів. Це припущення виконується, наприклад, якщо $A = \partial_\nu^4 + \Delta_\Gamma^2$ на Γ, бо тоді $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x)) = \zeta^4 + \gamma^2(x, \tau)$. Тут $\gamma(x, \tau)$ є головний символ оператора Δ_Γ; цей символ задовольняє умову $\gamma(x, \tau) < 0$ при $\tau \neq 0$. Покажемо, що розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω. Для цієї задачі система рівнянь (3.4) набирає вигляду

$$
\begin{gathered}
\theta(0) + \lambda_1 = 0, \quad \theta'(0) + \lambda_2 = 0, \\
\theta''(0) + \gamma(x, \tau)\lambda_1 = 0, \quad \theta'''(0) + \gamma(x, \tau)\lambda_2 = 0.
\end{gathered} \tag{3.17}
$$

Тут $\theta(t)$ є загальний розв'язок диференціального рівняння (3.3), який задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а λ_1, λ_2 — довільні комплексні числа. Система (3.17) еквівалентна такій:

$$
\lambda_1 = -\theta(0), \quad \lambda_2 = -\theta'(0), \tag{3.18}
$$

$$
\theta''(0) - \gamma(x, \tau)\theta(0) = 0, \quad \theta'''(0) - \gamma(x, \tau)\theta'(0) = 0. \tag{3.19}
$$

Згідно із зробленим припущенням щодо оператора A загальний розв'язок $\theta(t)$ запишемо у вигляду

$$
\theta(t) = p_1 \exp(-i\zeta_1(x, \tau)t) + p_2 \exp(-i\zeta_2(x, \tau)t), \tag{3.20}
$$

де $\zeta_1(x,\tau)$ і $\zeta_2(x,\tau)$ є різні ζ-корені многочлена $A^{(0)}(x,\tau+\zeta\nu(x))$, які мають від'ємну уявну частину, а p_1 і p_2 є довільні комплексні числа. З огляду на (3.20) система (3.19) еквівалентна такій:

$$\gamma_1(x,\tau)p_1 + \gamma_2(x,\tau)p_2 = 0,$$
$$\zeta_1(x,\tau)\gamma_1(x,\tau)p_1 + \zeta_2(x,\tau)\gamma_2(x,\tau)p_2 = 0,$$

де позначено

$$\gamma_j(x,\tau) := -\zeta_j^2(x,\tau) - \gamma(x,\tau) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1,2\}.$$

Отримали систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $p, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Умова (iii) означення 3.1 для розглянутої крайової задачі говорить з огляду на (3.18), що ця система повинна мати лише тривіальний розв'язок, тобто

$$\gamma_1(x,\tau)\gamma_2(x,\tau)(\zeta_2(x,\tau) - \zeta_1(x,\tau)) \neq 0.$$

Оскільки корені $\zeta_1(x,\tau)$ і $\zeta_2(x,\tau)$ різні, то остання умова еквівалентна такій

$$\gamma_1(x,\tau)\gamma_2(x,\tau) \neq 0. \tag{3.21}$$

Отже, розглянута крайова задача є еліптичною в області Ω тоді і лише тоді, коли умова (3.21) виконується для кожної точки $x \in \Gamma$ і довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x. Покажемо, що ця умова виконується для вказаних x і τ. Для кожного $j \in \{1,2\}$ запишемо $\zeta_j(x,\tau) = \alpha_j + i\beta_j$, де $\alpha_j \in \mathbb{R}$ та $\beta_j < 0$. Тоді

$$\gamma_j(x,\tau) = -(\alpha_j + i\beta_j)^2 - \gamma(x,\tau) = \beta_j^2 - \alpha_j^2 - \gamma(x,\tau) - 2i\alpha_j\beta_j;$$

тут, нагадаємо, $\gamma(x,\tau) < 0$. Отже, якщо $\alpha_j = 0$, то $\gamma_j(x,\tau) > 0$, а якщо $\alpha_j \neq 0$, то $\gamma_j(x,\tau) \notin \mathbb{R}$. Таким чином, умова (3.21) виконується і тому розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω.

Приклад 3.5. У гідромеханіці важливу роль відіграє така крайова задача з $\varkappa = 3$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$-k\,\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} C_{1,k}\, v_k &= \lambda v_1, \\ \sum_{k=1}^{3} C_{2,k}\, v_k &= \lambda v_2, \\ \sum_{k=1}^{3} C_{3,k}\, v_k &= \lambda (v_3 + k_1 u), \\ -\partial_\nu u &= v_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad \Gamma$$

(див., наприклад, [9, с. 1]). Ця крайова задача описує вільні коливання замкненої тонкої пружної оболонки Γ, яка заповнена нев'язкою рідиною. Тут u є шуканий потенціал переміщення рідини, а v_1, v_2 і v_3 є компоненти шуканого вектора переміщення довільної точки оболонки Γ. Окрім того, k і k_1 є задані додатні числові параметри, пов'язані з фізичними характеристиками оболонки і рідини, λ є спектральний параметр, а $C_{j,k}$, де $j, k = 1, 2, 3$, є (дотичні) диференціальні оператори теорії оболонок. Так, система

$$\sum_{k=1}^{3} C_{j,k}\, v_k = \lambda v_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

описує вільні коливання оболонки у вакуумі. Ця система є еліптичною за Дуглісом-Ніренбергом на Γ, тобто

$$\det\bigl(C^{(0)}_{j,k}(x,\tau)_{j,k=1,2,3}\bigr) \neq 0 \tag{3.22}$$

для кожної точки $x \in \Gamma$ і довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x. Тут $\operatorname{ord} C_{j,k} = s_j + l_k$ для усіх $j, k \in \{1, 2, 3\}$, де $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 2$ і $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = 2$. Розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω, якщо узяти $m_1 = m_2 = -1$, $m_3 = 0$, $m_4 = 1$ та $r_1 = r_2 = 3$, $r_3 = 4$. Справді, тоді для цієї задачі система рівнянь (3.4) набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^{3} C^{(0)}_{1,k}(x,\tau)\,\lambda_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} C_{2,k}^{(0)}(x,\tau)\,\lambda_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} C_{3,k}^{(0)}(x,\tau)\,\lambda_k = \lambda\, p\, k_1,$$

$$i\zeta_{-}(x,\tau)p = 0.$$

Тут x і τ такі як і вище, а $\zeta_{-}(x,\tau)$ є ζ-корінь многочлена $A^{(0)}(x,\tau+\zeta\nu(x))$, де $A=\Delta$, такий, що $\operatorname{Im}\zeta_{-}(x,\tau)<0$. Ця система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих комплексних чисел λ_1, λ_2, λ_3 і p невироджена на підставі (3.22), тобто умова (iii) означення 3.1 виконується.

Зауважимо, що спеціальна формула Гріна правильна і у випадку, коли $\varkappa=0$. (Звісно, тоді у ній відсутні суми, у яких підсумовування здійснюється за індексом k або j, що пробігає значення від 1 до $\varkappa$.) Узявши довільну еліптичну крайову задачу (без додаткових невідомих функцій) і перейшовши до формально спряженої задачі відносно цієї формули Гріна, отримаємо еліптичну задачу з q додатковими невідомими функціями у крайових умовах, де $2q$ — порядок правильно еліптичного рівняння, що фігурує у вихідній крайовій задачі. Якщо ця задача нерегулярна, то додаткові невідомі функції не можна, взагалі кажучи, виключити з крайових умов формально спряженої задачі. Наведемо такий приклад [146] (п. 3.1.5).

Приклад 3.6. Для рівняння Пуассона у двовимірній області Ω розглянемо еліптичну крайову задачу з косою похідною:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$b\,\partial_{\nu}u + c\,\partial_{\tau}v = g \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тут коефіцієнти b, c є дійсними функціями класу $C^{\infty}(\Gamma)$ такими, що $b^2+c^2=1$. Для цієї задачі формально спряженою відносно спеціальної формули

Гріна (при $\varkappa = 0$) є така крайова задача:

$$\Delta w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\partial_\nu w - \partial_\tau (ch) = \chi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$
$$w - bh = \chi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Ця задача містить додаткову невідому функцію h у крайових умовах і є еліптичною за Лавруком в області Ω. У випадку, коли $b(x_0) = 0$ для деякої точки $x_0 \in \Gamma$, функцію h не можна виключити з крайових умов. У цьому випадку вихідна еліптична крайова задача не є регулярною

3.3. Простори Хермандера, пов'язані з задачею

Крайову задачу (3.1), (3.2) досліджуємо у просторах Хермандера, які утворюють розширені соболєвські шкали на області Ω та її межі Γ. Дамо означення цих просторів і наведемо їх властивості, потрібні у подальшому.

Розширена соболєвська шкала на евклідовій області Ω означається на основі класу (2.5) у такий спосіб (див. [17, с. 20] або [165, с. 139]), стандартний у теорії функціональних просторів [88, с. 384].

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$.

Означення 3.2. Комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається, за означенням, зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Норма у просторі $H^{\alpha}(\Omega)$ означена за формулою

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} : \, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n), \; w = u \;\text{ в }\; \Omega \,\bigr\}, \tag{3.23}$$

де $u \in H^{\alpha}(\Omega)$.

Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми, бо він є факторпростір гільбертового сепарабельного простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ за підпростором

$$\bigl\{\omega \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega\bigr\}. \tag{3.24}$$

Відмітимо, що у просторі $H^{\alpha}(\Omega)$ норма (3.23) породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{\alpha}(\Omega)} := (w_1 - \Pi w_1, w_2 - \Pi w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.25}$$

Тут $u_j \in H^{\alpha}(\Omega)$, $w_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $u_j = w_j$ в Ω для кожного $j \in \{1, 2\}$, а Π є ортопроектор простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ на підпростір (3.24). Зауважимо, що права частина рівності (3.25) не залежить від зазначеного вибору розподілів w_1 і w_2.

Слідуючи [165, с. 146], клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^{\alpha}(\Omega) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{3.26}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на області Ω.

У важливому випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}$ для деякого $\sigma \in \mathbb{R}$ покладаємо $H^{(\sigma)}(\Omega) := H^{\alpha}(\Omega)$. Простір $H^{(\sigma)}(\Omega)$ є гільбертів простір Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$, заданий на області Ω. При цьому ми приймаємо досить поширене означення просторів Соболєва на евклідовій області, однакове як для додатного, так і для від'ємного порядку σ (див., наприклад, монографію Г. Трібеля [88, с. 384]).

Відмітимо, що $H^{\alpha}(\Omega)$ є окремий ізотропний випадок гільбертових функціональних просторів, які ввели і дослідили Л. Р. Волевич і Б. П. Панеях [17] (§ 3).

У просторі $H^{\alpha}(\Omega)$ є щільною множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка складається зі звужень на замкнену область $\overline{\Omega}$ усіх функцій, заданих і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$. Цей факт є прямим наслідком щільності множини $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ у просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Тут і далі, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів в області Ω.

Сформулюємо потрібні нам властивості розширеної соболєвської шкали (3.26), які стосуються вкладень функціональних просторів й, зокрема, пов'язують цю шкалу з класичними просторами Соболєва і просторами неперервно диференційовних функцій.

Твердження 3.1. *Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\alpha_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\Omega)$. Це вкладення неперервне і щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$*

Цей факт є прямим наслідком тверджень 2.3 і 2.4.

З нього і формули (2.2) негайно випливає такий аналог властивості (2.6) для просторів на Ω:

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Omega), \tag{3.27}$$

де обидва вкладення компактні та щільні.

Твердження 3.2. *Нехай ціле число* $l \geq 0$ *і функція* $\alpha \in \mathrm{RO}$. *Тоді умова* (2.8) *рівносильна вкладенню* $H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{l}(\overline{\Omega})$. *Це вкладення неперервне.*

Тут, як звичайно, банахів простір $C^{l}(\overline{\Omega})$ складається зі звужень на $\overline{\Omega}$ усіх функцій $w \in C^{l}(\mathbb{R}^{n})$. Норма у цьому просторі означається за формулою (2.7), у якій замінено $\mathbb{R}^{n}$ на $\overline{\Omega}$. Твердження 3.2 є прямим наслідком твердження 2.5.

Перейдемо до розширеної соболєвської шкали на межі Γ області Ω.

Нехай, як і раніше, $\alpha \in \mathrm{RO}$. Коротко кажучи, простір Хермандера $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення.

Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ. Нехай він утворений локальними картами $\pi_{j} : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_{j}$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $\Gamma_{1}, \ldots, \Gamma_{p}$ складають покриття многовиду Γ. Окрім того, виберемо довільним чином функції $\chi_{j} \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, підпорядковане умові $\operatorname{supp} \chi_{j} \subset \Gamma_{j}$.

Означення 3.3. Комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається, за означенням, з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_{j} h) \circ \pi_{j} \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Скалярний добуток у $H^{\alpha}(\Gamma)$ означений за формулою

$$(h_{1}, h_{2})_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{p} ((\chi_{j} h_{1}) \circ \pi_{j}, (\chi_{j}\, h_{2}) \circ \pi_{j})_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_{1}, h_{2} \in H^{\alpha}(\Gamma)$.

Тут і далі, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Gamma)$ є комплексний лінійний топологічний простір усіх розподілів на многовиді Γ, антидуальний до лінійного топологічного простору $\mathcal{D}(\Gamma) = C^{\infty}(\Gamma)$ усіх нескінченно диференційовних функцій на Γ. Окрім того, вираз $(\chi_{j} h) \circ \pi_{j}$ позначає зображення розподілу h у локальній карті π_{j}.

Скалярний добуток у просторі $H^{\alpha}(\Gamma)$ породжує норму

$$\|h\|_{H^{\alpha}(\Gamma)} := (h, h)_{H^{\alpha}(\Gamma)}^{1/2}.$$

Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ гільбертів і сепарабельний. Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [52, с. 139] (теорема 2.21). Тому означення 3.3 є коректним.

Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна у просторі $H^{\alpha}(\Gamma)$. Ця властивість є прямим наслідком щільності множини $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$ у просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^{\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma)$.

Клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^{\alpha}(\Gamma) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{3.28}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на Γ. Він був введений і досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем у статті [51] і монографіях [52, 164] (п. 2.4.2).

Якщо функція α степенева: $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}$ для деякого $\sigma \in \mathbb{R}$, то покладаємо $H^{(\sigma)}(\Gamma) := H^{\alpha}(\Gamma)$. Простір $H^{(\sigma)}(\Gamma)$ є гільбертів простір Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$, заданий на замкненому многовиді Γ.

Для розширеної соболєвської шкали (3.28) правильні такі аналоги тверджень 3.1 і 3.2.

Твердження 3.3. *Твердження* 3.1 *залишається правильним, якщо у ньому замінити* Ω *на* Γ.

Цей факт є прямим наслідком тверджень 2.3 і 2.4. Як його застосування, відмітимо такий аналог властивостей (2.6) і (3.27):

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Gamma), \tag{3.29}$$

де обидва вкладення компактні та щільні.

Твердження 3.4. *Нехай ціле число* $l \geq 0$ *і функція* $\alpha \in \mathrm{RO}$. *Тоді умова*

$$\int\limits_1^{\infty} t^{2l+n-2}\, \alpha^{-2}(t)\, dt < \infty \tag{3.30}$$

рівносильна вкладенню $H^{\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow C^{l}(\Gamma)$. *Це вкладення неперервне.*

Цей факт є прямим наслідком твердження 2.5. Тут, як звичайно, $C^l(\Gamma)$ позначає банахів простір усіх функцій $h : \Gamma \to \mathbb{C}$ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Цей простір наділений нормою

$$\|h\|_{C^l(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{p} \|(\chi_j h) \circ \pi_j\|_{C^l_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{3.31}$$

Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці на Γ.

Уточнені соболєвські шкали на Ω і Γ складаються відповідно з просторів Хермандера $H^{\sigma,\varphi}(\Omega) := H^{\alpha}(\Omega)$ і $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) := H^{\alpha}(\Gamma)$ таких, що $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Ці шкали введено і досліджено В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [52, 164] (п. 2.1 і 3.2.1).

У дисертації знадобляться такі аналоги властивості (2.10) і твердження 2.7 для цих шкал.

Для довільних $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і числа $\varepsilon > 0$ виконуються компактні і щільні вкладення

$$H^{(\sigma+\varepsilon)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{(\sigma-\varepsilon)}(\Omega), \tag{3.32}$$

$$H^{(\sigma+\varepsilon)}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{(\sigma-\varepsilon)}(\Gamma). \tag{3.33}$$

Ці властивості є прямими наслідками тверджень 3.1 і 3.3 відповідно.

Твердження 3.5. *Нехай ціле число $l \geq 0$ і функція $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді умова* (2.11) *рівносильна кожному із вкладень*

$$H^{l+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega}) \quad i \quad H^{l+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^l(\Gamma).$$

Ці вкладення неперервні.

Ця властивість є прямим наслідком тверджень 3.2 і 3.4. Вона уточнює теореми вкладення Соболєва для області Ω і многовиду Γ, згідно з якими

$$H^{(\sigma)}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega}) \iff \sigma > l + \frac{n}{2},$$

$$H^{(\sigma)}(\Gamma) \hookrightarrow C^l(\Gamma) \iff \sigma > l + \frac{n-1}{2}.$$

Розглянуті у цьому підрозділі шкали просторів Хермандера мають інтерполяційні властивості, аналогічні твердженням 2.11 і 2.12.

Твердження 3.6. *Нехай функція* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *і числа* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ *такі, що* $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ *і* $\sigma_1(\alpha) < s_1$. *Означимо інтерполяційний параметр* ψ *за формулою* (2.14). *Тоді правильні такі рівності просторів разом з еквівалентністю норм у них:*

$$\begin{gathered}\bigl[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{\alpha}(\Omega),\\ \bigl[H^{(s_0)}(\Gamma), H^{(s_1)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{\alpha}(\Gamma).\end{gathered}$$

Твердження 3.7. *Нехай задано функцію* $\varphi \in \mathcal{M}$ *і додатні числа* ε, δ. *Означимо інтерполяційний параметр* ψ *за формулою* (2.16). *Тоді для довільного числа* $\sigma \in \mathbb{R}$ *правильні такі рівності просторів разом з еквівалентністю норм у них:*

$$\begin{gathered}\bigl[H^{(\sigma-\varepsilon)}(\Omega), H^{(\sigma+\delta)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{\sigma,\varphi}(\Omega),\\ \bigl[H^{(\sigma-\varepsilon)}(\Gamma), H^{(\sigma+\delta)}(\Gamma)\bigr]_{\psi} = H^{\sigma,\varphi}(\Gamma).\end{gathered}$$

Ці твердження доведено в монографії [52] (теореми 2.2, 2.22 і 3.2) та у статті [165] (теорема 5.1).

Відмітимо також, що розширена соболєвська шкала на $G \in \{\Omega, \Gamma\}$, як і на $\mathbb{R}^n$, замкнена відносно розглянутого у п. 2.3 методу інтерполяції з функціональним параметром і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$. Це встановлено в [165] (теореми 2.7, 5.2) для $G = \Omega$ і в [52] (теореми 2.22, 2.24) для $G = \Gamma$.

З огляду на застосування розширеної соболєвської шкали до крайових задач вигляду (3.1), (3.2) розглянемо питання про обмеженість лінійних диференціальних операторів у підходящих парах просторів Хермандера, приналежних цій шкалі.

Попередньо домовимося про таке. У дисертації часто доведеться мати справу з просторами Хермандера $H^{\alpha(t)t^{\sigma}}(G)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ і $G \in \{\Omega, \Gamma\}$. Для цих просторів показником регулярності служить функціональний параметр $\alpha(t)t^{\sigma}$ аргументу $t \geq 1$. Для того, щоб не писати щоразу аргумент t у верхньому індексі, який є показником регулярності, будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$. Тоді $H^{\alpha(t)t^{\sigma}}(G) = H^{\alpha\varrho^{\sigma}}(G)$. Звісно, функція $\alpha\varrho^{\sigma} \in \mathrm{RO}$, а її індекси Матушевської $\sigma_j(\alpha\varrho^{\sigma}) = \sigma_j(\alpha) + \sigma$ для кожного $j \in \{0, 1\}$. Зокрема, якщо $\varphi \in \mathcal{M}$, то $H^{\varphi\varrho^{\sigma}}(G)$ є простір $H^{\sigma,\varphi}(G)$, що належить уточненій соболєвській шкалі.

Твердження 3.8. (i) *Нехай L є лінійний диференціальний оператор порядку $l \geq 0$ на $\overline{\Omega}$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Тоді відображення $u \mapsto Lu$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$L: H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-l}}(\Omega) \tag{3.34}$$

для кожного $\alpha \in \mathrm{RO}$.

(ii) *Нехай K є крайовий лінійний диференціальний оператор порядку $k \geq 0$ на Γ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Тоді відображення $u \mapsto Ku$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$K: H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-k-1/2}}(\Gamma) \tag{3.35}$$

для кожного $\alpha \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\alpha) > k + 1/2$.

(iii) *Нехай S є (дотичний) лінійний диференціальний оператор порядку $s \geq 0$ на Γ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Тоді відображення $u \mapsto Su$, де $u \in C^{\infty}(\Gamma)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$S: H^{\alpha}(\Gamma) \to H^{\alpha\varrho^{-s}}(\Gamma) \tag{3.36}$$

для кожного $\alpha \in \mathrm{RO}$.

У соболєвському випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^\sigma$, це твердження добре відоме. У загальній ситуації воно легко виводиться з цього випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром на підставі твердження 3.6 (див. [8] (п. 3.2) стосовно пп. (i), (ii) та [22] (лема 4.1) щодо п. (iii)).

Стосовно твердження 3.8 зауважимо також, що оператор (3.34) є звуженням неперервного лінійного оператора $L : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ на простір $H^\alpha(\Omega)$, а оператор (3.36) є звуженням неперервного лінійного оператора $S : \mathcal{D}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ на простір $H^\alpha(\Gamma)$.

Наприкінці цього підрозділу відмітимо, що між розширеними соболєвськими шкалами на Ω і Γ існує такий зв'язок: кожний простір $H^\alpha(\Gamma)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) > 0$, складається із слідів на Γ усіх розподілів $u \in H^{\alpha\varrho^{1/2}}(\Omega)$ [8, с. 77]. А саме, відображення $R_\Gamma : u \mapsto u \restriction \Gamma$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого лінійного і сюр'єктивного оператора сліду

$$R_\Gamma : \; H^{\alpha\varrho^{1/2}}(\Omega) \to H^\alpha(\Gamma). \tag{3.37}$$

(Він є окремим випадком оператора (3.35).) Більше того, виконується еквівалентність норм

$$\|h\|_{H^\alpha(\Gamma)} \asymp \inf\bigl\{\|u\|_{H^{\alpha\varrho^{1/2}}(\Omega)} : \; u \in H^{\alpha\varrho^{1/2}}(\Omega), \; R_\Gamma u = h\bigr\},$$

де $h \in H^\alpha(\Gamma)$.

3.4. Нетеровість задачі у просторах Хермандера

Пов'яжемо із крайовою задачею (3.1), (3.2) такі гільбертові простори:

$$\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) := H^{\eta}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma),$$

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) := H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma),$$

де $\eta \in \mathrm{RO}$. У соболєвському випадку, коли $\eta(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, ці простори позначаємо через $\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{(s-2q)}(\Omega,\Gamma)$ відповідно.

Згідно з твердженням 3.8 відображення (3.5) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\Lambda : \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \tag{3.38}$$

для кожного $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Зауважимо тут, що, оскільки кожне $m_j \leq 2q-1$, то $\sigma_0(\eta) > m_j + 1/2$ і можна застосувати п. (ii) цього твердження.

Окрім того, із досліджуваною задачею і формально спряженою до неї задачею пов'яжемо лінійні простори N і N^{+} нескінченно гладких розв'язків цих задач у випадку нульових правих частин. А саме, N складається з усіх розв'язків

$$(u, v_1, ..., v_{\varkappa}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa}$$

крайової задачі (3.1), (3.2) у випадку, коли $f = 0$ на Ω і $g_j = 0$ на Γ для кожного $j \in \{1, \ldots, q+\varkappa\}$. Аналогічно, N^{+} складається з усіх розв'язків

$$(w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

формально спряженої крайової задачі (3.6), (3.7), (3.8) у випадку, коли $\omega = 0$ на Ω і $\chi_j = 0$ на Γ для кожного $j \in \{1, \ldots, 2q+\varkappa\}$. Оскільки ці задачі еліптичні в області Ω, простори N і N^{+} скінченновимірні [146] (лема 3.4.2).

Надалі у дисертації позначаємо через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ скалярні добутки в гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$, а також продовження за неперервністю цих скалярних добутків.

Теорема 3.1. *Для довільного функціонального параметра* $\eta\in\mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$, *обмежений оператор* (3.38) *є нетеровим. Його ядро збігається з* N, *а область значень складається з усіх векторів*

$$(f,g):=(f,g_1,\ldots,g_{q+\varkappa})\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \tag{3.39}$$

таких, що

$$(f,w)_\Omega+\sum_{j=1}^{q+\varkappa}(g_j,h_j)_\Gamma=0 \quad \text{для всіх} \quad (w,h_1,...,h_{q+\varkappa})\in N^{+}. \tag{3.40}$$

Індекс оператора (3.38) *дорівнює* $\dim N-\dim N^{+}$ *і не залежить від* η.

Доведення. У випадку просторів Соболєва, тобто коли $\eta(t)\equiv t^s$ і $s>2q-1/2$, ця теорема доведена в монографії [146] (теорема 3.4.1) для цілих s і в статтях [72, 179] та у книзі [181] (теорема 2.4.1) для дійсних s і загальних еліптичних систем. (Твердження теореми 3.1 про нетеровість оператора (3.38) доведено у роботах [117] і [107] (теорема 23.1), присвячених еліптичним крайовим задачам для псевдодиференціальних операторів.)

Виведемо теорему 3.1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Нехай параметр $\eta\in\mathrm{RO}$ задовольняє умову $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$. Виберемо дійсні числа l_0 і l_1 такі, що $2q-1/2<l_0<\sigma_0(\eta)$ і $\sigma_1(\eta)<l_1$. Відображення (3.5) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\Lambda:\ \mathcal{D}^{(l_i)}(\Omega,\Gamma)\to\mathcal{E}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad i\in\{0,1\}, \tag{3.41}$$

які діють у парах просторів Соболєва. Оператори (3.41) мають спільне ядро N та однаковий індекс, рівний $\dim N-\dim N^{+}$. Окрім того,

$$\Lambda\big(\mathcal{D}^{(l_i)}(\Omega,\Gamma)\big)=\big\{(f,g)\in\mathcal{E}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma):\text{правильно (3.40)}\big\}. \tag{3.42}$$

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (2.14), у якій беремо $\alpha := \eta$ та $s_0 := l_0$ і $s_1 := l_1$. На підставі твердження 2.9 з нетеровості обох операторів (3.41) випливає нетеровість обмеженого оператора

$$\Lambda : \left[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\right]_\psi \to \left[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\right]_\psi. \tag{3.43}$$

Він є звуженням оператора (3.41) з $i = 0$. Покажемо, що (3.43) є оператор (3.38) із формулювання теореми 3.1. Для цього опишемо інтерполяційні простори, у яких діє оператор (3.43).

Згідно з твердженням 2.10 маємо:

$$\begin{gathered}\left[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\right]_\psi = \\ = \left[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\right]_\psi \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} \left[H^{(l_0+r_k-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1+r_k-1/2)}(\Gamma)\right]_\psi\end{gathered} \tag{3.44}$$

та

$$\begin{gathered}\left[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\right]_\psi = \\ = \left[H^{(l_0-2q)}(\Omega), H^{(l_1-2q)}(\Omega)\right]_\psi \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} \left[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\right]_\psi.\end{gathered} \tag{3.45}$$

Тут на підставі твердження 3.6 виконуються такі рівності просторів разом еквівалентністю норм у них:

$$\left[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\right]_\psi = H^{\eta}(\Omega), \tag{3.46}$$

$$\left[H^{(l_0+r_k-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1+r_k-1/2)}(\Gamma)\right]_\psi = H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma) \tag{3.47}$$

та

$$\left[H^{(l_0-2q)}(\Omega), H^{(l_1-2q)}(\Omega)\right]_\psi = H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega), \tag{3.48}$$

$$\left[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\right]_\psi = H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma). \tag{3.49}$$

Щодо останніх трьох формул зауважимо таке. Рівність (3.47) отримали, поклавши

$$\alpha := \eta\varrho^{r_k-1/2}, \quad s_0 := l_0 + r_k - 1/2, \quad s_1 := l_1 + r_k - 1/2$$

у твердженні 3.6. Аналогічно, рівності (3.48) та (3.49) отримали, поклавши у цьому твердженні

$$\alpha := \eta\varrho^{-2q}, \quad s_0 := l_0 - 2q, \quad s_1 := l_1 - 2q$$

та

$$\alpha := \eta\varrho^{-m_j-1/2}, \quad s_0 := l_0 - m_j - 1/2, \quad s_1 := l_1 - m_j - 1/2$$

відповідно. При цьому в усіх випадках функція ψ задовольняє (2.14).

На підставі формул (3.44), (3.46) і (3.47) маємо рівність

$$\big[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi} = \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma). \tag{3.50}$$

Окрім того, на підставі формул (3.45), (3.48) і (3.49) маємо ще одну рівність

$$\big[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi} = \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma). \tag{3.51}$$

Ці рівності просторів виконуються разом з еквівалентністю норм.

З останніх двох рівностей негайно випливає, що обмежений і нетерів оператор (3.43) діє у парі просторів (3.38). Оскільки, до того ж, цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (3.5), то він є оператором (3.38). Згідно з твердженням 2.9 ядро цього оператора та його індекс збігаються з спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N - \dim N^{+}$ операторів (3.41). Окрім того, на підставі цього ж твердження і формули (3.42) робимо висновок, що область значень оператора (3.38) дорівнює

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\big(\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma)\big) =$$
$$= \big\{(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (3.40)}\big\}.$$

Тут також скористалися вкладенням

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{E}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma),$$

що є наслідком властивостей (3.27) і (3.29). Таким чином, обгрунтовано усі властивості оператора (3.38), вказані у теоремі 3.1.

Теорема 3.1 доведена.

У випадку соболєвських просторів, тобто коли $\eta(t) \equiv t^s$ і $s > 2q - 1/2$, ця теорема і наступні теореми 3.2 — 3.5 міститься у результатах Буте де Монвеля [117], Г. І. Ескіна [107] (§ 23, п. 4), В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [146] (пп. 3.2 і 3.4), І. Я. Ройтберг [72, 179] (див. також монографію Я. А. Ройтберга [181] (п. 2.4)), А. Н. Кожевнікова [145] та інших.

3.5. Ізоморфізми, породжені задачею

В окремому випадку, коли $N=\{0\}$ і $N^{+}=\{0\}$, оператор (3.38) встановлює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор задає ізоморфізм між деякими їх (замкненими) підпросторами, які мають скінченну ковимірність. У цьому зв'язку корисно розглянути такі розклади цих просторів у прямі суми (замкнених) підпросторів:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)=N\dotplus\Big\{(u,v_1,...,v_{\varkappa})\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma):\\ (u,\theta)_{\Omega}+\sum_{k=1}^{\varkappa}(v_k,\theta_k)_{\Gamma}=0\ \text{ для всіх }\ (\theta,\theta_1,...,\theta_{\varkappa})\in N\Big\}\end{gathered}\tag{3.52}$$

та

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)=N^{+}\dotplus\big\{(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma):\ \text{виконується (3.40)}\big\}.\tag{3.53}$$

Тут, як і у теоремі 3.1, параметр $\eta\in\mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$. Ці розклади існують, оскільки у їх правих частинах підпростори мають перетин $\{0\}$ і скінченна вимірність першого підпростору дорівнює ковимірності другого.

Позначимо через P і P^{+} відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок в сумах (3.52) і (3.53) паралельно першому доданку. Відображення P і P^{+} не залежать від η.

Теорема 3.2. *Для будь-якого* $\eta\in\mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta)>2q-1/2$ *звуження відображення* (3.38) *на підпростір* $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ *є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P\big(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\big)\leftrightarrow P^{+}(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)).\tag{3.54}$$

Доведення. За теоремою 1 звуження оператора (3.38) на підпростір $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ є неперервним і взаємно однозначним лінійним відображенням цього підпростору на підпростір $P^{+}(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma))$. Тому згідно з теоремою Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом (3.54).

Теорема 3.2 доведена.

3.6. Апріорна оцінка розв'язків задачі

Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку крайової задачі (3.1), (3.2). Покладемо

$$\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma) := \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathrm{RO}:\\ \sigma_0(\alpha)>2q-1/2}} \mathcal{D}^{\alpha}(\Omega,\Gamma) = \bigcup_{s>2q-1/2} \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma).$$

Зауважимо, що остання рівність виконується з огляду на вкладення (3.27) і (3.29).

Означення 3.4. Вектор

$$(u,v) := (u, v_1, ..., v_{\varkappa}) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$$

називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) з правою частиною

$$(f,g) := (f, g_1, ..., g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{D}'(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^{q+\varkappa},$$

якщо $\Lambda(u,v) = (f,g)$, де Λ є оператор (3.38) для деякого параметра $\eta\in\mathrm{RO}$ із $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$.

Оскільки ця задача еліптична, то її узагальнений розв'язок задовольняє таку апріорну оцінку.

Теорема 3.3. *Нехай задано функцію* $\eta\in\mathrm{RO}$, *яка задовольняє умову* $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$, *і дійсне число* $\sigma > 0$. *Тоді існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq c\,\big(\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)}\big) \tag{3.55}$$

для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$. *Тут* $c = c(\eta,\sigma)$ *не залежить від* (u,v).

Доведення. Для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ маємо на підставі теореми 3.2 такий ланцюжок нерівностей:

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq \|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)-P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq$$
$$\leq c_1\|\Lambda P(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|(u,v)-P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)} \leq$$
$$\leq c_1\|\Lambda P(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)}.$$

Тут c_1 є норма оператора, оберненого до ізоморфізму (3.54), а c_2 є деяке додатне число, не залежне від (u,v). Це число існує, оскільки вектор $(u,v)-P(u,v)$ належить до скінченновимірного простору N, а в ньому еквівалентні всі норми, зокрема, норми у просторах $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)$. Окрім того,

$$\|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)} \leq \|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq c_1\|\Lambda P(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}.$$

Тому, з огляду на $\Lambda P(u,v) = \Lambda(u,v)$ отримуємо нерівність

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)} \leq c_1(1+c_2)\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{\eta\varrho^{-\sigma}}(\Omega,\Gamma)},$$

тобто потрібну оцінку (3.55), де число $c := \max\{c_1(1+c_2), c_2\}$ не залежить від (u,v).

Теорема 3.3 доведена.

Якщо $N = \{0\}$, то другий доданок у правій частині нерівності (3.55) можна прибрати. Це негайно випливає з ізоморфізму (3.54).

3.7. Регулярність розв'язків задачі

Дослідимо глобальну і локальну регулярність узагальнених розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2) у просторах Хермандера. Почнемо з глобальної регулярності в області Ω аж до її межі Γ.

Теорема 3.4. *Нехай вектор* $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ *для деякого параметра* $\eta \in \mathrm{RO}$ *із* $\sigma_0(\alpha) > 2q-1/2$. *Тоді* $(u,v) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$.

Доведення. За умовою, $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$. Тому $(u,v) \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ для деякого числа s такого, що $2q-1/2 < s < \sigma_0(\eta)$. Відмітимо, що $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ з огляду на властивості (3.27) і (3.29). За умовою і теоремою 3.1 маємо:

$$(f,g) = \Lambda(u,v) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\big(\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)\big) = \Lambda\big(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\big).$$

Отже, поряд з умовою $\Lambda(u,v) = (f,g)$ виконується рівність $\Lambda(u',v') = (f,g)$ для деякого вектора $(u',v') \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$. Тоді

$$(u^\circ,v^\circ) := (u,v) - (u',v') \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma) \quad \text{і} \quad \Lambda(u^\circ,v^\circ) = 0,$$

що за теоремою 3.1 (розглянутою у соболєвському випадку) тягне за собою включення

$$(u^\circ,v^\circ) \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times \big(C^\infty(\Gamma)\big)^{\varkappa}.$$

Звідси

$$(u,v) = (u',v') + (u^\circ,v^\circ) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma).$$

Теорема 3.4 доведена.

Перейдемо до локальної регулярності розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2). Нехай V є довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$. Покладемо $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Позначимо через

$H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$, де $\alpha\in\mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u\in H^{\alpha}(\Omega)$ для довільної функції $\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Аналогічно, позначимо через $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $h\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h\in H^{\alpha}(\Gamma)$ для довільної функції $\chi\in C^{\infty}(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0$. Покладемо

$$\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0):=H^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\times\prod_{k=1}^{\varkappa}H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0),$$
$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0):=H^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\times\prod_{j=1}^{q+\varkappa}H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0),$$

де $\eta\in\mathrm{RO}$.

Теорема 3.5. *Нехай вектор* $(u,v)\in\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ *для деякого параметра* $\eta\in\mathrm{RO}$ *із* $\sigma_0(\alpha)>2q-1/2$. *Тоді* $(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Доведення. За умовою, $(u,v)\in\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ для деякого числа s такого, що $2q-1/2<s<\sigma_0(\alpha)$. Позначимо

$$\Upsilon:=\bigl\{\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega}):\,\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0\bigr\}.$$

Попередньо доведемо, що за умови теореми 3.5 є правильною для кожного $i\in\mathbb{N}$ така імплікація:

$$\begin{aligned}&\bigl(\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)+\mathcal{D}^{(s+i-1)}(\Omega,\Gamma)\ \text{ для всіх }\ \chi\in\Upsilon\bigr)\ \Rightarrow\\ &\Rightarrow\ \bigl(\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)+\mathcal{D}^{(s+i)}(\Omega)\ \text{ для всіх }\ \chi\in\Upsilon\bigr).\end{aligned}\tag{3.56}$$

Тут і далі у доведенні використовуємо алгебраїчні суми просторів. Звісно, добуток функції $\chi\in\Upsilon$ на вектор вигляду (u,v) розуміємо по-компонентно, до того ж $\chi h:=(\chi\!\restriction\!\Gamma)h$ для $h\in\mathcal{D}'(\Gamma)$.

Виберемо довільне $i\in\mathbb{N}$ і припустимо, що посилка імплікації (3.56) істинна. Розглянемо будь-яку функцію $\chi\in\Upsilon$ та функцію $\theta\in\Upsilon$ таку, що $\theta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. За умовою, $\chi(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$, де $(f,g)=\Lambda(u,v)$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з усіма диференціальними операторами A, B_j і $C_{j,k}$, отримаємо такі рівності:

$$A(\chi u) = A(\chi\theta u) = \chi A(\theta u) + A'(\theta u) = \chi A u + A'(\theta u), \tag{3.57}$$

$$B_j(\chi u) = B_j(\chi\theta u) = \chi B_j(\theta u) + B'_j(\theta u) = \chi B_j u + B'_j(\theta u), \tag{3.58}$$

$$\begin{gathered} C_{j,k}(\chi v_k) = C_{j,k}(\chi\theta v_k) = \chi C_{j,k}(\theta v_k) + C'_{j,k}(\theta v_k) = \\ = \chi C_{j,k} v_k + C'_{j,k}(\theta v_k). \end{gathered} \tag{3.59}$$

Тут A' — деякий лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$, B'_j — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ, а $C'_{j,k}$ — деякий (дотичний) лінійний диференціальний оператор на Γ. Коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно, а порядки задовольняють умови

$$\operatorname{ord} A' \leq 2q - 1, \;\; \operatorname{ord} B'_j \leq m_j - 1, \;\; \operatorname{ord} C'_{j,k} \leq m_j + r_k - 1. \tag{3.60}$$

Покладемо

$$\Lambda'(u, v) := \left(A'u,\, B'_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{1,k} v_k, ..., B'_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{q+\varkappa,k} v_k \right).$$

З рівностей (3.57) – (3.59) випливає, що

$$\Lambda(\chi(u, v)) = \chi\Lambda(u, v) + \Lambda'(\theta(u, v)) = \chi(f, g) + \Lambda'(\theta(u, v)). \tag{3.61}$$

За посилкою імплікації (3.56) запишемо

$$\theta(u, v) = (u^*, v^*) + (u^{**}, v^{**})$$

для деяких векторів

$$(u^*, v^*) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega, \Gamma) \quad \text{і} \quad (u^{**}, v^{**}) \in \mathcal{D}^{(s+i-1)}(\Omega, \Gamma).$$

Звідси на підставі рівності (3.61) можемо записати

$$\Lambda(\chi(u, v)) = (f^*, g^*) + (f^{**}, g^{**}), \tag{3.62}$$

де

$$(f^*, g^*) := \chi(f,g) + \Lambda'(u^*, v^*) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma), \tag{3.63}$$

$$(f^{**}, g^{**}) := \Lambda'(u^{**}, v^{**}) \in \mathcal{E}^{(s+i-2q)}(\Omega,\Gamma). \tag{3.64}$$

Останні два включення негайно випливають з твердження 3.8, властивостей (3.60) і умови $\chi(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$.

Скористаємося проектором P^+ і теоремою 3.2 (у соболєвському випадку також). З рівності (3.62) та включень (3.63) і (3.64) випливає, що

$$\Lambda(\chi(u,v)) = P^+\Lambda(\chi(u,v)) =$$
$$= P^+(f^*, g^*) + P^+(f^{**}, g^{**}) = \Lambda(u', v') + \Lambda(u'', v'').$$

Тут вектори

$$(u', v') \in P\big(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\big) \quad \text{і} \quad (u'', v'') \in P\big(\mathcal{D}^{(s+i)}(\Omega,\Gamma)\big) \tag{3.65}$$

є розв'язки (єдині) задач

$$\Lambda(u', v') = P^+(f', g') \in P^+\big(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\big)$$

і

$$\Lambda(u'', v'') = P^+(f'', g'') \in P^+\big(\mathcal{E}^{(s+i-2q)}(\Omega,\Gamma)\big).$$

Тепер з рівності

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \Lambda((u', v') + (u'', v'')),$$

де вектори $\chi(u,v)$ і $(u', v') + (u'', v'')$ належать до $\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$, випливає на підставі теореми 3.1, що

$$\chi(u,v) = (u', v') + ((u'', v'') + (u^\circ, v^\circ))$$

для деякого вектора

$$(u^\circ, v^\circ) \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{\varkappa}.$$

Ця формула з урахуванням включень (3.65) та довільності функції $\chi \in \Upsilon$ означає істинність висновку імплікації (3.56).

Таким чином, доведено, що ця імплікація істинна для кожного $i \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що $(u, v) \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega, \Gamma)$; тому посилка імплікації (3.56) істинна при $i = 1$. Виберемо число $p \in \mathbb{N}$ таке, що $p > \sigma_1(\eta)$; тоді $\mathcal{D}^{(p)}(\Omega, \Gamma) \subset \mathcal{D}^{\eta}(\Omega, \Gamma)$ з огляду на властивості (3.27) і (3.29). Скориставшись імплікацією (3.56) послідовно для значень $i = 1, 2, \ldots, p$, робимо висновок, що

$$\chi(u, v) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega, \Gamma) + \mathcal{D}^{(p)}(\Omega, \Gamma) = \mathcal{D}^{\eta}(\Omega, \Gamma)$$

для довільного $\chi \in \Upsilon$. Отже, $(u, v) \in \mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Теорема 3.5 доведена.

Щодо неї зауважимо таке: якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \varnothing$, то регулярність компоненти u узагальненого розв'язку (u, v) підвищується в околах усіх внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

3.8. Достатні умови неперервності узагальнених похідних розв'язків

Відомо [93] (теорема 7.9.8), що

$$Au = f \in C(\Omega) \not\Rightarrow u \in C^{2q}(\Omega)$$

(навіть для диференціального оператора A порядку $2q$ зі сталими коефіцієнтами). Тому для того, щоб отримати, наприклад, достатні умови приналежності розв'язку u еліптичного рівняння $Au = f$ до простору $C^{l+2q}(\Omega)$, де ціле $l \geq 0$, треба використовувати інші простори, ніж $C^l(\Omega)$. З огляду на теорему 3.5 і твердження 3.2 тут є корисними простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. За допомогою цих просторів отримаємо достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) компонент розв'язку (u, v) еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2). Множини Ω_0 і Γ_0 є такі, як у п. 3.7.

Теорема 3.6. *Нехай задано ціле число $l \geq 0$. Припустимо, що умови теореми 3.5 виконуються для деякого параметра $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ і*

$$\int_1^\infty t^{2l+n-1}\eta^{-2}(t)dt < \infty \tag{3.66}$$

Тоді $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. (Звісно, цей окіл береться у топології на $\overline{\Omega}$.) На підставі теореми 3.5, умови (3.66) і твердження 3.2 маємо включення

$$\chi u \in H^\eta(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}).$$

Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає, що $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Теорема 3.6 доведена.

Теорема 3.7. *Нехай задано цілі числа* $l \geq 0$ *і* $k \in \{1, ..., \varkappa\}$. *Припустимо, що умови теореми* 3.5 *виконуються для деякого параметра* $\eta \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{2(l-r_k)+n-1}\eta^{-2}(t)dt < \infty. \tag{3.67}$$

Тоді $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. На підставі теореми 3.5, умови (3.67) і твердження 3.4, у якому беремо $\alpha(t) \equiv \eta(t)t^{r_k-1/2}$, маємо включення

$$\chi v_k \in H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma) \subset C^l(\Gamma).$$

Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає, що $v_k \in C^l(\Gamma_0)$. Теорема 3.7 доведена.

Зауваження 3.1. Умови (3.66) і (3.67) не лише достатні у теоремах 3.6 і 3.7 відповідно, але і необхідні на класі усіх розв'язків, що розглядаються у цих теоремах. А саме, нехай ціле $l \geq 0$, а $\eta \in \mathrm{RO}$ таке, що $\sigma_0(\eta) > -1/2$. Тоді умова (3.66) еквівалентна імплікації

$$\begin{gathered}\big((u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma) \text{ задовольняє умову теореми 3.6}\big) \Rightarrow \\ \Rightarrow u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0).\end{gathered} \tag{3.68}$$

Окрім того, якщо $k \in \{1, ..., \varkappa\}$, то умова (3.67) еквівалентна імплікації

$$\begin{gathered}\big((u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma) \text{ задовольняє умову теореми 3.7}\big) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_k \in C^l(\Gamma_0).\end{gathered} \tag{3.69}$$

Обгрунтуємо сказане у зауваженні 3.1. Встановимо спочатку еквівалентність (3.66) $\Leftrightarrow$ (3.68). З огляду на теорему 3.6 залишається показати, що (3.68) $\Rightarrow$ (3.66). Припустимо, що (3.68) істинне. Нехай Ω_1 — деяка відкрита куля у просторі $\mathbb{R}^n$, замикання якої лежить в Ω_0. Виберемо довільний розподіл $w \in H^{\eta}(\mathbb{R}^n)$ такий, що $\operatorname{supp} w \subset \Omega_1$. Розглянемо вектор (u,v), де $u := w \restriction \Omega$, а $v := 0$. Вектор $(u,v) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ задовольняє умову теореми 3.6 і тому $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$ згідно зробленого припущення. Отже, $w \in C^l(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$\bigl\{w \in H^{\eta}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset \Omega_1\bigr\} \subset C^l(\mathbb{R}^n).$$

На підставі твердження 2.5, це вкладення тягне за собою умову (3.66). Таким чином, (3.68) $\Rightarrow$ (3.66).

Встановимо тепер еквівалентність (3.67) $\Leftrightarrow$ (3.69). З огляду на теорему 3.7 залишається показати, що (3.69) $\Rightarrow$ (3.67). Припустимо, що (3.69) істинне. Нехай W — деяка відкрита непорожня підмножина межі Γ така, що $\overline{W} \subset \Gamma_0 \cap \Gamma_j$ для деякого $j \in \{1,\ldots,p\}$. Тут $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$ є локальна карта на многовиді Γ, що фігурує в означенні просторів Хермандера на Γ. Виберемо довільний розподіл $w \in H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ такий, що $\operatorname{supp} w \subset U$, де $U := \pi_j^{-1}(W)$ є відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^{n-1}$. Розглянемо вектор $(u,v) := (u, v_1, \ldots, v_{\varkappa})$, де $u := 0$, $v_k := \Theta_j(w \circ \pi_j^{-1})$ і $v_i := 0$ при $i \neq k$. Тут Θ_j оператор продовження нулем фінітного розподілу з підмножини Γ_j на увесь многовид Γ. Вектор $(u,v) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ задовольняє умову теореми 3.7 і тому $v_k \in C^l(\Gamma_0)$ згідно зробленого припущення. Отже, $w \in C^l(\mathbb{R}^{n-1})$, тобто

$$\bigl\{w \in H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\mathbb{R}^{n-1}) : \operatorname{supp} w \subset U\bigr\} \subset C^l(\mathbb{R}^{n-1}).$$

На підставі твердження 2.5, це вкладення тягне за собою умову (3.67). Таким чином, (3.69) $\Rightarrow$ (3.67).

За допомогою теорем 3.6 і 3.7 встановимо тепер достатню умову, за якою узагальнений розв'язок (u,v) еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2) є класичним, тобто $u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$ і $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$. Тут і надалі $m := \max\{m_1,...,m_{q+\varkappa}\}$. Якщо розв'язок (u,v) є класичним, то ліві частини задачі (3.1), (3.2) обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями на Ω і Γ відповідно.

Теорема 3.8. *Нехай вектор* $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{\eta_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{\eta_2}(\Omega),$$
$$g_j \in H^{\eta_2 \varrho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma), \quad j = 1, ..., q + \varkappa, \tag{3.70}$$

для деяких функціональних параметрів $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{RO}$ *таких, що* $\sigma_0(\eta_1) > -1/2$, $\sigma_0(\eta_2) > -1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{n-1} \eta_1^{-2}(t) dt < \infty, \tag{3.71}$$

$$\int\limits_1^\infty t^{2m-4q+n-1} \eta_2^{-2}(t) dt < \infty. \tag{3.72}$$

Тоді розв'язок (u, v) *класичний.*

Доведення. З умов $f \in H^{\eta_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)$ і (3.71) випливає, що $u \in C^{2q}(\Omega)$ на підставі теореми 3.6 для $l := 2q$, $\eta(t) := \eta_1(t) t^{2q}$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$. З умов $f \in H^{\eta_2}(\Omega)$, (3.70) і (3.72) випливає, що $u \in C^m(\overline{\Omega})$ згідно з теоремою 3.6 для $l := m$, $\eta(t) := \eta_2(t) t^{2q}$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \Gamma$. Окрім того з тих же умов випливає включення $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$, якщо скористатися теоремою 3.7 для $l := m + r_k$, $\eta(t) := \eta_2(t) t^{2q}$ і $\Gamma_0 := \Gamma$. Отже, (u, v) — класичний розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2).

Теорема 3.8 доведена.

3.9. Задача в уточненій соболєвській шкалі

Конкретизуємо деякі встановлені вище теореми про властивості еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2) стосовно уточненої соболєвської шкали. Це робиться для зручності порівнянь результатів цього розділу з теоремами, які будуть встановлені у четвертому і п'ятому розділах дисертації.

Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ покладемо

$$\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma),$$

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma) := H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Ці простори збігаються з гільбертовими просторами $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$, якщо $\eta(t) \equiv t^s\varphi(t)$. Тому відображення (3.5) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma) \tag{3.73}$$

для довільних $s > 2q - 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Теорема 3.9. *Нехай $s > 2q-1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді оператор* (3.73) *нетерів. Його ядро збігається з простором N, а область значення складається з усіх векторів*

$$(f,g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma), \tag{3.74}$$

які задовольняють умову (3.40). *Індекс оператора* (3.73) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *та не залежить від s і φ.*

Цей результат є окремим випадком теореми 3.1.

Для характеризації локальної регулярності узагальнених розв'язків задачі (3.1), (3.2) в уточненій соболєвській шкалі потрібні локальні простори Хермандера

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) := H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \quad \text{і} \quad H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) := H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0),$$

де $\alpha(t) \equiv t^{\sigma}\varphi(t)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Тут, як і раніше, V є довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$, а $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$.

Теорема 3.10. *Нехай вектор* $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *права частина якої задовольняє умову*

$$(f, g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) := H^{s-2q,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \times \prod_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$$

для деяких параметрів $s > 2q - 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді розв'язок

$$(u, v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) := H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0).$$

Цей результат є окремим випадком теореми 3.5.

З теореми 3.10 видно, що узагальнений розв'язок успадковує (додаткову) регулярність φ правої частини еліптичної крайової задачі.

Теорема 3.11. *Нехай вектор* $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *де*

$$f \in H^{n/2,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m-2q+n/2,\varphi_2}(\Omega),$$
$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi_2}(\Gamma), \quad j = 1, ..., q + \varkappa,$$

для деяких параметрів $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$, які задовольняють умову (2.11) *при $\varphi := \varphi_1$ і $\varphi := \varphi_2$ відповідно. Тоді цей розв'язок класичний.*

Доведення. Якщо $m+n/2 > 2q-1/2$, то ця теорема є окремим випадком теореми 3.8, у якій покладаємо $\eta_1(t) := t^{n/2}\varphi_1(t)$ і $\eta_2(t) := t^{m-2q+n/2}\varphi_2(t)$. Тут $\sigma_0(\eta_1) = n/2 > -1/2$ і $\sigma_0(\eta_2) = m-2q+n/2 > -1/2$. Якщо $m+n/2 \leq 2q-1/2$, то на підставі умови $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$ і теореми вкладення Соболєва маємо:

$$(u, v) \in H^{(\sigma)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{(\sigma+r_k-1/2)}(\Gamma) \subset C^m(\overline{\Omega}) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} C^{m+r_k}(\Gamma);$$

тут σ — деяке число таке, що $\sigma > m + n/2$. Окрім того, з умови $f \in H^{n/2,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)$ випливає згідно з теоремою 3.6, що $u \in C^{2q}(\Omega)$. У цій теоремі слід покласти $\eta(t) := t^{2q+n/2}\varphi_1(t)$ і врахувати, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Отже, і у випадку $m + n/2 \leq 2q - 1/2$ розв'язок (u, v) є класичним.

Теорему 3.11 доведено.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації досліджено властивості еліптичної за Лавруком крайової задачі у просторах Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів. Отримано такі результати:

1. Доведено теорему про нетеровість обмежених операторів, що відповідають цій задачі у розширеній соболєвській шкалі.
2. Доведено теорему про ізоморфізми, породжені задачею у цій шкалі.
3. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків задачі у просторах Хермандера.
4. Доведено теорему про регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера.
5. Встановлено нові достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) розв'язків еліптичної за Лавруком крайової задачі, зокрема, знайдено нові умови класичності узагальнених розв'язків цієї задачі.
6. Ці результати конкретизовано для уточненої соболєвської шкали.

Результати третього розділу опубліковані у статтях [96] і [98].

РОЗДІЛ 4
ЕЛІПТИЧНА ЗА ЛАВРУКОМ КРАЙОВА ЗАДАЧА В МОДИФІКОВАНІЙ УТОЧНЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ

Висновки теорем попереднього розділу не є правильними у випадку, коли $\sigma_0(\eta) \leq 2q - 1/2$, оскільки тоді не можна коректно означити обмежений оператор (3.38), відповідний крайовій задачі (3.1), (3.2). Це пов'язано з тим, що відображення $u \mapsto u \restriction \Gamma$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора сліду $R_\Gamma : H^{(\sigma)}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$, якщо $\sigma \leq 1/2$ (див., наприклад, [52, с. 156]).

Для того, щоб отримати версії теорем третього розділу у цьому випадку треба видозмінити простори, у яких діє оператор (3.38). Тут відомі два принципово різних підходи, запропонованих Я. А. Ройтбергом [73, 74, 180] і Ж.-Л. Ліонсом, Е. Мадженесом [33, 41, 148, 149] для еліптичних крайових задач (без додаткових невідомих функцій у крайових умовах). Підхід Я. А. Ройтберга приводить до загальних теорем про розв'язність цих задач, але виводить за межі класу узагальнених функцій. Підхід Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса залишається у рамках теорії узагальнених функцій, але приводить до індивідуальних теорем про розв'язність. У загальних теоремах простори, в яких діє оператор крайової задачі, залежать лише від порядків диференціальних операторів. Так, теореми третього розділу є загальними. В індивідуальних теоремах область визначення оператора крайової задачі залежить від усіх коефіцієнтів еліптичного рівняння, навіть молодших. Підходи Я. А. Ройтберга і Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса, розроблені для соболєвських просторів, були перенесені В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [49, 52, 53, 164] на простори Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу.

У цьому розділі досліджуємо еліптичну за Лавруком крайову задачу (3.1), (3.2) у повній модифікованій за Я. А. Ройтбергом уточненій соболєвській шкалі. Підхід Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса буде реалізований для цієї задачі у п'ятому розділі.

4.1. Модифікована за Ройтбергом уточнена соболєвська шкала

Ця шкала складається з гільбертових просторів $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а число $2q$ є її порядком модифікації. Дамо означення цієї шкали і обговоримо її властивості, потрібні у подальшому.

Спочатку означимо простір $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$, на базі якого вводиться простір $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$.

Означення 4.1. Нехай $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку $\sigma \geq 0$ покладемо $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega) := H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$. У випадку $\sigma < 0$ простір $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$ означимо як дуальний гільбертів простір до $H^{-\sigma,1/\varphi}(\Omega)$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Отже, якщо $\sigma < 0$, то $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$ є поповненням простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)} := \sup\left\{ \frac{|(u,w)_\Omega|}{\|w\|_{H^{-\sigma,1/\varphi}(\Omega)}} \,:\, w \in H^{-\sigma,1/\varphi}(\Omega),\, w \neq 0 \right\}.$$

Оскільки $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$, то наведене означення є коректним.

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ шкала просторів $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$, була введена Ю. М. Березанським, С. Г. Крейном, Я. А. Ройтбергом [11] і М. Шехтером [183] та застосована ними до дослідження еліптичних крайових задач (див. також монографії Ю. М. Березанського [12] (розд. I, § 3 і розд. III, § 6) і Я. А. Ройтберга [180] (пп. 1.10 і 5.5)). У цьому випадку простір $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$ позначаємо також через $H^{\sigma,(0)}(\Omega)$. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ ця шкала була введена і досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [47] (див. також їх монографії [52, 164] (п. 3.2.3)).

Наведемо деякі властивості шкали гільбертових сепарабельних просторів

$$\left\{ H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega) \,:\, \sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M} \right\}. \tag{4.1}$$

Нехай, як і раніше, $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тотожне відображення $u \mapsto u$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмежених лінійних операторів вкладення

$$H^{\sigma+\varepsilon,(0)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma-\varepsilon,(0)}(\Omega) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

Ці вкладення компактні та щільні [52] (теорема 3.9 (iv)).

Згідно з означенням 4.1 скалярний добуток $(u, w)_{\Omega}$ в $L_2(\Omega)$ функцій $u, w \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ продовжується за неперервністю до півторалінійної форми $(u, w)_{\Omega}$ від функцій $u \in H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$ і $w \in H^{-\sigma,1/\varphi,(0)}(\Omega)$.

Відмітимо [52] (теорема 3.8 (iii)), що відображення $u \mapsto \mathcal{O}u$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізометричного ізоморфізму простору $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $\sigma < 0$, на підпростір $\{w \in H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}\}$ простору $H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Тут, $\mathcal{O}u := u$ на $\overline{\Omega}$, і $\mathcal{O}u := 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Відмітимо також [52] (теорема 3.9 (i)), що виконується рівність просторів

$$H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega) = H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad \sigma > -1/2 \tag{4.3}$$

як поповнень множини $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. (Звісно, тут є цікавим лише випадок, коли $-1/2 < \sigma < 0$, бо для $\sigma \geq 0$ ця рівність перетворюється в означення простору $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$.)

Перейдемо до означення простору $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Покладемо

$$E_{2q} := \{k - 1/2 : \, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2q\}.$$

Означення 4.2. Нехай $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку, коли $\sigma \notin E_{2q}$, гільбертів простір $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням простору $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2q} \, \|(D_{\nu}^{k-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{\sigma-k+1/2,\varphi}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

У випадку, коли $\sigma \in E_{2q}$, гільбертів простір $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$ означається за формулою

$$H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega) := \bigl[H^{\sigma-\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega), H^{\sigma+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)\bigr]_{1/2}, \quad \text{де} \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{4.4}$$

Стосовно формули (4.4) нагадаємо, що її права частина є результат інтерполяції зі степеневим параметром $\psi(t) \equiv t^{1/2}$ пари сепарабельних гільбертових просторів $H^{\sigma-\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)$ і $H^{\sigma+\varepsilon,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Ця права частина не залежить (з точністю до еквівалентності норм) від зазначеного вибору числа ε [52] (теорема 4.21).

У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ шкала просторів $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$, введена Я. А. Ройтбергом [73, 74] і застосована ним у дослідженні еліптичних крайових задач (див. також монографії Ю. М. Березанського [12] (розд. III, § 6) і Я. А. Ройтберга [180, 181]). У цьому випадку простір $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$ позначаємо також через $H^{\sigma,(2q)}(\Omega)$. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ ця шкала введена і досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [49] (див. також їх монографії [52, 164] (п. 4.2)).

Слідуючи [164] (п. 4.2.2), клас гільбертових сепарабельних просторів

$$\left\{H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega) :\, \sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\right\} \tag{4.5}$$

називаємо модифікованою за Ройтбергом уточненою соболєвською шкалою на області Ω, а число $2q$ — порядком модифікації. Шкала (4.5), як і шкала (4.1), є повною, оскільки у ній параметр σ пробігає всю дійсну вісь. Зауважимо, що цілком аналогічно означаються гільбертові простори $H^{\sigma,\varphi,(p)}(\Omega)$, де p є довільне натуральне число (не обов'язкове парне). Втім у роботі буде потрібен лише випадок $p = 2q$, де, нагадаємо, $2q$ є парний порядок еліптичного рівняння (3.1).

Обговоримо властивості шкали (4.5), потрібні у подальшому. Нехай, як і раніше, $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Тотожне відображення $u \mapsto u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмежених лінійних операторів вкладення

$$H^{\sigma+\varepsilon,(2q)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma-\varepsilon,(2q)}(\Omega) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0. \tag{4.6}$$

Ці вкладення компактні та щільні [52] (теорема 4.12 (iv)).

Відмітимо також [52] (теорема 4.12 (iii)), що виконується рівність просторів

$$H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega) = H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \quad \text{при} \quad \sigma > 2q - 1/2 \tag{4.7}$$

як поповнень множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами.

З означення 4.2 випливає, що лінійне відображення

$$T_{2q} : u \mapsto \bigl(u, u\restriction\Gamma, \ldots, (D_\nu^{2q-1}u)\restriction\Gamma\bigr),$$

де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$T_{2q} :\ H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega) \to H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{2q} H^{\sigma-k+1/2,\varphi}(\Gamma) =: \Pi_{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma).$$

Якщо $\sigma \notin E_{2q}$, то цей оператор ізометричний, а його область значень складається з усіх векторів

$$(u_0, u_1, \ldots, u_{2q}) \in \Pi_{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$$

таких, що $u_k = D_\nu^{k-1}u_0$ на Γ для всіх цілих $k \in \{1, \ldots, 2q\}$, що задовольняють нерівність $\sigma > k - 1/2$ [52] (теорема 4.11 (i)). Тут, D_ν^{k-1} трактується як обмежений крайовий диференціальний оператор

$$D_\nu^{k-1} : H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \to H^{\sigma-k+1/2,\varphi}(\Gamma)$$

згідно з твердженням 3.8 (ii).

Для застосувань важливо, що шкали просторів (4.1) і (4.5) можна отримати інтерполяцією з підходящим функціональним параметром пар відповідних просторів, для яких $\varphi \equiv 1$.

Твердження 4.1. *Нехай задано функцію $\varphi \in \mathcal{M}$ і додатні числа ε, δ. Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою* (2.16). *Тоді для довільного числа $\sigma \in \mathbb{R}$ правильні такі рівності просторів разом з еквівален-*

тністю норм у них:

$$\big[H^{\sigma-\varepsilon,(0)}(\Omega),H^{\sigma+\delta,(0)}(\Omega)\big]_{\psi}=H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega),$$
$$\big[H^{\sigma-\varepsilon,(2q)}(\Omega),H^{\sigma+\delta,(2q)}(\Omega)\big]_{\psi}=H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega).$$

Це твердження доведено в [52] (теореми 3.10 і 4.22).

Для шкали просторів (4.5) правильний такий аналог твердження 3.8.

Твердження 4.2. (i) *Нехай L є лінійний диференціальний оператор порядку $l\in[0,2q]$ на $\overline{\Omega}$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Тоді відображення $u\mapsto Lu$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$L:\,H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)\rightarrow H^{\sigma-2q,\varphi,(0)}(\Omega)$$

для довільних $\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$.

(ii) *Нехай K є крайовий лінійний диференціальний оператор порядку $k\in[0,2q-1]$ на Γ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Тоді відображення $u\mapsto Ku$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$K:\,H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)\rightarrow H^{\sigma-k-1/2,\varphi}(\Gamma) \tag{4.8}$$

для довільних $\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$.

Це твердження доведено в [52] (теорема 4.13). Зауважимо, що на відміну від твердження 3.8 (ii) у твердженні 4.2 (ii) нема обмежень на нижній індекс Матушевської функції $\alpha(t)\equiv t^{\sigma}\varphi(t)$.

Відмітимо також, що множення на функцію класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ є обмеженим оператором у кожному просторі $H^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega)$ і $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Це випливає з означення цих просторів.

4.2. Узагальнені за Ройтбергом розв'язкі задачі

Обговоримо тут поняття узагальнених за Я. А. Ройтбергом розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2), які можна розуміти у сильному і слабкому сенсі. Їх означення прив'язано до шкали просторів (4.5).

Пов'яжемо з цією задачею гільбертові простори

$$\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma),$$

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma) := H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma),$$

де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У соболєвському випадку $\varphi \equiv 1$ ці простори позначаємо також як $\mathcal{D}^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma)$ відповідно.

Згідно з твердженнями 4.2 та 3.8 (iii) відображення (3.5) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\Lambda:\ \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma) \tag{4.9}$$

для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Позначимо через $\mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання всіх просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Відмітимо, що

$$\mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma) = H^{-\infty,(2q)}(\Omega) \times \big(\mathcal{D}'(\Gamma)\big)^{\varkappa},$$

де $H^{-\infty,(2q)}(\Omega)$ позначає об'єднання всіх просторів $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Аналогічно, позначимо через $\mathcal{E}^{-\infty,(0)}(\Omega,\Gamma)$ об'єднання всіх просторів $\mathcal{E}^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Відмітимо також, що

$$\mathcal{E}^{-\infty,(0)}(\Omega,\Gamma) = H^{-\infty,(0)}(\Omega) \times \big(\mathcal{D}'(\Gamma)\big)^{q+\varkappa},$$

де $H^{-\infty,(0)}(\Omega)$ позначає об'єднання всіх просторів $H^{\sigma,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Зауважимо, що при означенні цих просторів можна обмежитися випадком $\varphi \equiv 1$; це випливає з вкладень (4.2), (4.6) і (3.33).

Означення 4.3. Вектор

$$(u,v) := (u, v_1, \ldots, v_\varkappa) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$$

називаємо сильним узагальненим за Ройтбергом розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) з правою частиною

$$(f,g) := (f, g_1, ..., g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{-\infty,(0)}(\Omega,\Gamma), \tag{4.10}$$

якщо $\Lambda(u,v) = (f,g)$, де Λ є оператор (4.9) для деяких параметрів $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Відмітимо, що для вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ означення 3.4 і 4.3 узагальнених розв'язків еквівалентні. Це випливає з рівностей (4.7) і (4.3).

Перейдемо до поняття слабкого узагальненого за Ройтбергом розв'язку крайової задачі (3.1), (3.2).

В околі межі Γ запишемо диференціальний оператор $A = A(x,D)$ у вигляді

$$A = \sum_{k=0}^{2q} A_k\, D_\nu^k.$$

Тут кожне $A_k = A_k(x, D_\tau)$ — деякий дотичний щодо Γ диференціальний оператор порядку $\operatorname{ord} A_k \leq 2q-k$. Зінтегрувавши частинами, запишемо таку формулу Гріна

$$(Au, w)_\Omega = (u, A^+ w)_\Omega - i \sum_{k=1}^{2q} (D_\nu^{k-1} u, A^{(k)} w)_\Gamma \tag{4.11}$$

для довільних функцій $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$; тут

$$A^{(k)} := \sum_{l=k}^{2q} D_\nu^{l-k} A_l^+,$$

де $A_l^+ = A_l^+(x, D_\tau)$ — диференціальний оператор, формально спряжений до $A_l(x, D_\tau)$ (див., наприклад, [180] (§ 2.4)).

Означення 4.4. Вектор

$$(u_0, u_1, \dots, u_{2q}, v_1, \dots, v_{\varkappa}) \in H^{-\infty,(0)}(\Omega) \times \bigl(\mathcal{D}'(\Gamma)\bigr)^{2q+\varkappa}$$

називаємо слабким узагальненим за Ройтбергом розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) з правою частиною (4.10), якщо

$$(u_0, A^{+}w)_{\Omega} - i \sum_{k=1}^{2q} (u_k, A^{(k)}w)_{\Gamma} = (f, w)_{\Omega} \quad \text{для усіх} \quad w \in C^{\infty}(\overline{\Omega}),$$

$$\sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k} u_k + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на } \Gamma \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, q.$$

Тут, нагадаємо, $Q_{j,k} = Q_{j,k}(x, D_{\tau})$ є (дотичні) диференціальні оператори на Γ, узяті із зображення

$$B_j(x, D) = \sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}\, D_{\nu}^{k-1}. \tag{4.12}$$

З формул (4.11) і (4.12) випливає, що означення 4.3 і 4.4 еквівалентні, якщо ототожнювати елемент $u \in H^{-\infty,(2q)}(\Omega)$ і вектор

$$(u_0, u_1, \dots, u_{2q}) := T_{2q} u \in H^{-\infty,(0)}(\Omega) \times \bigl(\mathcal{D}'(\Gamma)\bigr)^{2q}.$$

Ці означення запропоновано Я. А. Ройтбергом [74] для еліптичних крайових задач (без додаткових невідомих функцій у крайових умовах); див. також [180] (§ 2.3 і 2.4). Для крайової задачі (3.1), (3.2) ці означення використано у роботах В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [146] (п. 3.2.2) та І. Я. Ройтберг [72, 179] (див. також монографію Я. А. Ройтберга [181] (п. 2.3.6))

З огляду на еквівалентність означень 4.3 і 4.4 будемо пропускати прикметник „сильний" або „слабкий", застосовуючи термін „узагальнений за Ройтбергом розв'язок".

4.3. Нетеровість задачі в модифікованій шкалі

Дослідимо властивості оператора (4.9), що відповідає еліптичній крайовій задачі (3.1), (3.2) у модифікованій за Ройтбергом уточненій соболєвській шкалі.

Теорема 4.1. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ обмежений оператор* (4.9) *нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega, \Gamma), \tag{4.13}$$

які задовольняють умову (3.40). *Індекс оператора* (4.9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *та не залежить від s і φ.*

Доведення. У соболєвському випадку $\varphi(t) \equiv 1$, ця теорема доведена в монографії [146] (теорема 3.4.1) для цілих s і в статтях [72, 179] та у книзі [181] (теорема 2.4.1) для дійсних s і загальних еліптичних систем. Виведемо теорему 4.1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Виберемо додатні числа ε і δ такі, що числа $s - \varepsilon$ і $s + \delta$ цілі. Згідно з [146] (теорема 3.4.1) відображення (3.5) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\begin{aligned} &\Lambda : \mathcal{D}^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q,(0)}(\Omega, \Gamma), \\ &\Lambda : \mathcal{D}^{s+\delta,(2q)}(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{E}^{s+\delta-2q,(0)}(\Omega, \Gamma). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Вони мають спільне ядро N і однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim N^+$. Область значень першого оператора набирає вигляду

$$\Lambda(\mathcal{D}^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega, \Gamma)) = \big\{(f, g) \in \mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q,(0)}(\Omega, \Gamma) : \ \text{виконується (3.40)}\big\}. \tag{4.15}$$

(Аналогічний опис має і область значень другого оператора.)

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (2.16). На підставі твердження 2.9 з нетеровості обох операторів (4.14) випливає нетеровість обмеженого оператора

$$\begin{aligned}\Lambda:\ &\bigl[\mathcal{D}^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{s+\delta,(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}\to\\ &\to\bigl[\mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q,(0)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}^{s+\delta-2q,(0)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Цей оператор є розширенням за неперервністю відображення (3.5). Покажемо, що (4.16) є оператор (4.9) із формулювання теореми 4.1. Для цього опишемо інтерполяційні простори, у яких діє оператор (4.16).

Застосовуючи послідовно твердження 2.10, 4.1 і 3.6, отримаємо

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{D}^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{s+\delta,(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =\bigl[H^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega),H^{s+\delta,(2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi}\oplus\\ \oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}\bigl[H^{(s+r_k-1/2-\varepsilon)}(\Gamma),H^{(s+r_k-1/2+\delta)}(\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma)=\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma).\end{gathered}$$

Аналогічно,

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q,(0)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}^{s+\delta-2q,(0)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =\bigl[H^{s-2q-\varepsilon,(0)}(\Omega),H^{s-2q+\delta,(0)}(\Omega)\bigr]_{\psi}\oplus\\ \oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}\bigl[H^{(s-m_j-1/2-\varepsilon)}(\Gamma),H^{(s-m_j-1/2+\delta)}(\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =H^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)=\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma).\end{gathered}$$

Ці рівності просторів виконуються з точністю до еквівалентності норм.

Таким чином, обмежений і нетерів оператор (4.16) є оператор (4.9) з формулювання теореми 4.1. Згідно з твердженням 2.9, ядро та індекс оператора (4.9) збігаються відповідно зі спільним ядром N і спільним індексом $\dim N-\dim N^{+}$ операторів (4.14). Окрім того, на підставі цього ж твердження і формули (4.15) робимо висновок, що область значень цього оператора дорівнює

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)\cap\Lambda\bigl(\mathcal{D}^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr)=$$
$$\bigl\{(f,g)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma):\ \text{виконується (3.40)}\bigr\}.$$

Тут також скористалися вкладенням

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow\mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q,(0)}(\Omega,\Gamma),$$

яке є наслідком властивостей (4.2) і (3.33). Таким чином, обгрунтовано усі властивості оператора (4.9), вказані у теоремі 4.1.

Теорема 4.1 доведена.

Якщо $s>2q-1/2$, то ця теорема збігається з теоремою 3.9. Це випливає з рівностей (4.3) і (4.7).

У соболєвському випадку $\varphi(t)\equiv 1$ теорема 4.1 і наступні теореми 4.2 — 4.5 встановлені В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю і Й. Россманном [146] (пп. 3.2, 3.4 і 4.4.1) та І. Я. Ройтберг [72, 179], (див. також монографію Я. А. Ройтберга [181] (п. 2.4)). Теорема 4.1 у цьому випадку міститься також у теоремі А. Н. Кожевнікова [145, с.411] про нетеровість у модифікованій за Ройтбергом соболєвській шкалі еліптичної крайової задачі, породженої псевдодиференціальними операторами алгебри Буте де Монвеля.

4.4. Повний набір ізоморфізмів, породжений задачею

В окремому випадку, коли $N=\{0\}$ і $N^{+}=\{0\}$, оператор (4.9) встановлює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$. У загальному випадку, цей оператор породжує ізоморфізм між деякими їх підпросторами, які мають скінченну ковимірність. У цьому зв'язку розглянемо такі розклади цих просторів у прямі суми їх підпросторів:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)=N\dotplus\Big\{(u,v_1,\ldots,v_{\varkappa})\in\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma):\\ (u_0,\theta)_{\Omega}+\sum_{k=1}^{\varkappa}(v_k,\theta_k)_{\Gamma}=0\ \text{ для усіх }\ (\theta,\theta_1,...,\theta_{\varkappa})\in N\Big\},\end{gathered}\tag{4.17}$$

де u_0 перша координата вектора $T_{2q}u=(u_0,u_1,\ldots,u_{2q})$, та

$$\begin{gathered}\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)=\\ =N^{+}\dotplus\big\{\big(f,g\big)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma):\ \text{виконується (3.40)}\big\}.\end{gathered}\tag{4.18}$$

Ці розклади існують, оскільки у їх правих частинах підпростори мають перетин $\{0\}$, а скінченна вимірність першого підпростору дорівнює ковимірності другого. Зауважимо, що написані розклади збігаються з розкладами (3.52) і (3.53) відповідно, якщо $\eta(t)\equiv t^{s}\varphi(t)$ і $s>2q-1/2$. Це випливає з рівностей (4.3) і (4.7).

Позначимо через P і P^{+} відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок в сумах (4.17) і (4.18) паралельно першому доданку. Ці проектори не залежать, як відображення, від s і φ.

Теорема 4.2. *Для довільних $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, звуження відображення* (4.9) *на підпростір $P(\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma))$ є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P\big(\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)\big)\leftrightarrow P^{+}\big(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)\big).\tag{4.19}$$

Доведення. Згідно з теоремою 4.1, звуження оператора (4.9) на підпростір $P(\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma))$ є неперервним і взаємно однозначним лінійним відображенням цього підпростору на підпростір $P^{+}(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma))$. Тому, за теоремою Банаха про обернений оператор, це відображення є ізоморфізмом (4.19).

Теорема 4.2 доведена.

Відмітимо, що у цій теоремі набір ізоморфізмів (4.19) є повним для модифікованої за Ройтбергом уточненої соболєвської шкали, оскільки у ньому параметри s і φ пробігають цілком множини $\mathbb{R}$ і $\mathcal{M}$ відповідно.

4.5. Апріорна оцінка узагальнених за Ройтбергом розв'язків задачі

Ці розв'язки задовольняють таку апріорну оцінку.

Теорема 4.3. *Нехай задано* $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ *і дійсне число* $\sigma > 0$. *Тоді існує число* $c > 0$ *таке, що*

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)} \leq c\left(\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)}\right) \qquad (4.20)$$

для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. *Тут число* $c = c(s,\varphi,\sigma)$ *не залежить від* (u,v).

Доведення. Для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ маємо на підставі теореми 4.2 такі нерівності:

$$\begin{gathered}\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)} \leq \\ \|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)-P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)} \leq \\ \leq c_1\|\Lambda P(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)} + c_2\|(u,v)-P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)}.\end{gathered} \qquad (4.21)$$

Тут, c_1 є норма оберненого оператора до ізоморфізму (4.19), а c_2 є деяке додатне число, яке не залежить від (u,v). Це число існує, оскільки вектор $(u,v) - P(u,v)$ належить до скінченновимірного простору N, де всі норми еквівалентні, зокрема, норми в просторах $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. Окрім того,

$$\|P(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)} \leq c_3\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)}, \qquad (4.22)$$

де c_3 норма проектора P, що діє у просторі $\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. З формул (4.21) і (4.22) безпосередньо випливає потрібна оцінка (4.20).

Теорема 4.3 доведена.

Якщо $N = \{0\}$, то другий доданок у правій частині нерівності (4.20) можна прибрати. Це негайно випливає з ізоморфізму (4.19).

4.6. Регулярність узагальнених за Ройтбергом розв'язків задачі

Дослідимо глобальну і локальну регулярність узагальнених за Ройтбергом розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2) у просторах $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Почнемо з глобальної регулярності в області Ω аж до її межі Γ.

Теорема 4.4. *Нехай вектор* $(u,v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим за Ройтбергом розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma)$ *для деяких параметрів* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$.

Доведення. За умовою, $(u,v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тому $(u,v) \in \mathcal{D}^{\sigma,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ для деякого числа $\sigma < s$. За умовою і теоремою 4.1 маємо:

$$(f,g) = \Lambda(u,v) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\bigl(\mathcal{D}^{\sigma,(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr) = \Lambda\bigl(\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr).$$

Отже, поряд з умовою $\Lambda(u,v) = (f,g)$ виконується рівність $\Lambda(u',v') = (f,g)$ для деякого вектора $(u',v') \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тоді

$$(u^\circ,v^\circ) := (u,v) - (u',v') \in \mathcal{D}^{\sigma,(2q)}(\Omega,\Gamma) \quad \text{і} \quad \Lambda(u^\circ,v^\circ) = 0.$$

Це за теоремою 3.1 (розглянутою у випадку $\varphi \equiv 1$) тягне за собою включення

$$(u^\circ,v^\circ) \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^\infty(\Gamma)\bigr)^{\varkappa}.$$

Звідси

$$(u,v) = (u',v') + (u^\circ,v^\circ) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma).$$

Теорема 4.4 доведена.

Перейдемо до локальної регулярності узагальнених за Ройтбергом розв'язків крайової задачі (3.1), (3.2).

Нехай, як і в п. 3.7, V є довільна відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$; покладемо $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$. Введемо локальні аналоги просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $\mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ лінійний простір усіх векторів $(u,v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $\chi(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такої, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно, позначимо через $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх векторів $(f,g) \in \mathcal{E}^{-\infty,(0)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $\chi(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega)$ для довільної функції χ, вказаної вище. Тут, звісно, множення скалярної функції χ на вектор виконується по-компонентно, причому добуток χh, де $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, розуміється як $(\chi\restriction\Gamma)\, h$.

Теорема 4.5. *Нехай вектор* $(u,v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим за Ройтбергом розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *права частина якої задовольняє умову* $(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ *для деяких параметрів* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Доведення. Попередньо доведемо, що для кожного числа $p \geq 1$ за умов теореми виконується імплікація

$$(u,v) \in \mathcal{D}^{s-p,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \;\Rightarrow\; (u,v) \in \mathcal{D}^{s-p+1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0). \tag{4.23}$$

Припустимо, що посилка цієї імплікації правильна для деякого $p \geq 1$. Довільно виберемо функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Виберемо також деяку функцію $\theta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умови $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\theta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з кожним із диференціальних операторів A, B_j і $C_{j,k}$, отримаємо рівність (3.61), тобто

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \chi\Lambda(u,v) + \Lambda'(\theta(u,v)) = \chi(f,g) + \Lambda'(\theta(u,v)). \tag{4.24}$$

Тут, як і в доведенні теореми 3.5, Λ' є оператор крайової задачі вигляду (3.1), (3.2), у якій порядки усіх диференціальних операторів принаймні на одиницю менші, ніж порядки відповідних операторів у крайовій задачі (3.1), (3.2). Тому, згідно з твердженнями 4.2 та 3.8 (iii) маємо обмежений оператор

$$\Lambda' : \mathcal{D}^{\sigma,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{\sigma+1-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma) \tag{4.25}$$

для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$.

За умовою теореми,

$$\chi(f,g) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma) \subset \mathcal{E}^{s-p+1-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma). \tag{4.26}$$

Згідно з посилкою імплікації,

$$\theta(u,v) \in \mathcal{D}^{s-p,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma).$$

Отже, на підставі (4.25), де $\sigma := s-p$, отримаємо:

$$\Lambda'(\theta(u,v)) \in \mathcal{E}^{s-p+1-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma). \tag{4.27}$$

Тепер на підставі формул (4.24), (4.26) і (4.27) маємо включення

$$\Lambda(\chi(u,v)) \in \mathcal{E}^{s-p+1-2q,\varphi,(0)}(\Omega,\Gamma).$$

Тому, за теоремою 4.4,

$$\chi(u,v) \in \mathcal{D}^{s-p+1,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma)$$

З огляду на довільність зазначеного вибору функції χ, це включення означає, що висновок імплікації (4.23) правильний. Отож, ця імплікація доведена для кожного числа $p \geq 1$.

Тепер, використовуючи імплікацію (4.23), можемо довести теорему 4.5. За умовою цієї теореми, $(u,v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тому

$$(u,v) \in \mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi,(2q)}(\Omega,\Gamma) \subset \mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{N}$. Використовуючи імплікацію (4.23) послідовно для значень $p=\lambda$, $p=\lambda-1$, ..., $p=1$, отримаємо:

$$\begin{gathered}(u,v) \in \mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \ \Rightarrow\ (u,v) \in \mathcal{D}^{s-\lambda+1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \ \Rightarrow\ \ldots \\ \ldots \ \Rightarrow\ (u,v) \in \mathcal{D}^{s-1,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \ \Rightarrow\ (u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi,(2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0).\end{gathered}$$

Теорема 4.5 доведена.

Якщо $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ і $s > 2q-1/2$, то ця теорема збігається з теоремою 3.10. Це випливає з рівностей (4.3) і (4.7).

4.7. Застосування до дослідження гладкості розв'язків

Як застосування теореми 4.5 отримаємо достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку компонент розв'язку $(u, v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega, \Gamma)$ еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2). Множини Ω_0 і Γ_0 є такі, як у п. 4.6.

Теорема 4.6. *Нехай ціле число* $l \geq 0$ *таке, що* $l > 2q - (n+1)/2$. *Припустимо, що умови теореми* 4.5 *виконуються для* $s = l + n/2$ *і деякої функції* $\varphi \in \mathcal{M}$, *яка задовольняє умову* (2.11). *Тоді* $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Доведення. Довільно виберемо точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. За теоремою 4.5 маємо включення $\chi u \in H^{l+n/2,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Звідси на підставі рівності (4.7) і твердження 3.5 запишемо

$$\chi u \in H^{l+n/2,\varphi,(2q)}(\Omega) = H^{l+n/2,\varphi}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}).$$

(Остання рівність виконується, оскільки, за умовою, $l+n/2 > 2q-1/2$.) Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає потрібне включення $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Теорема 4.6 доведена.

Зауваження 4.1. Висновок теореми 4.6 зберігає силу, якщо замість умови $l > 2q - (n+1)/2$ припустити, що $u \in H^{(\sigma)}(\Omega)$ для деякого $\sigma > 2q - 1/2$. Справді, якщо $l \leq 2q - (n+1)/2$, то $u \in H^{(\sigma)}(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega})$ за теоремою вкладення Соболєва і припущенням $\sigma > 2q - 1/2$.

Теорема 4.7. *Нехай задано цілі числа* $l \geq 0$ *і* $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. *Припустимо, що умови теореми* 4.5 *виконуються для* $s = l - r_k + n/2$ *і деякої функції* $\varphi \in \mathcal{M}$, *яка задовольняє умову* (2.11). *Тоді* $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Доведення. Довільно виберемо точку $x \in \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. За теоремою 4.5 маємо включення $\chi v_k \in H^{l+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma)$. Тому $\chi v_k \in C^l(\Gamma)$ на підставі твердження 3.5. Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає потрібне включення $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Теорема 4.7 доведена.

Зауваження 4.2. Умова (2.11) не лише достатня в теоремах 4.6 і 4.7, але і необхідна на класі усіх розв'язків, що розглядаються у цих теоремах. Це обґрунтовується так само, як і зауваження 3.1.

За допомогою теорем 4.6 і 4.7 встановимо достатню умову, за якою узагальнений за Ройтбергом розв'язок (u, v) еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2) є класичним.

Теорема 4.8. *Нехай $u \in H^{(\sigma)}(\Omega)$ для деякого числа $\sigma > 2q - 1/2$, а $v \in (\mathcal{D}'(\Gamma))^{\varkappa}$. Припустимо, що вектор $(u, v) \in \mathcal{D}^{-\infty,(2q)}(\Omega, \Gamma)$ є узагальненим за Ройтбергом розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *де*

$$f \in H^{n/2,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m-2q+n/2,\varphi_2,(0)}(\Omega),$$
$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi_2}(\Gamma), \quad j = 1, ..., q + \varkappa,$$

для деяких параметрів $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$, які задовольняють умову (2.11) *при $\varphi := \varphi_1$ і $\varphi := \varphi_2$ відповідно. Тоді цей розв'язок класичний.*

Доведення. Оскільки, за умовою,

$$(f, g) \in \mathcal{E}^{n/2,\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) = \mathcal{E}^{n/2,\varphi_1,(0)}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing),$$

то $u \in C^{2q}(\Omega)$ на підставі теореми 4.6, у якій беремо $l := 2q$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$ і $\varphi := \varphi_1$. Окрім того, включення $u \in C^m(\overline{\Omega})$ випливає з умови

$$(f, g) \in \mathcal{E}^{m+n/2-2q,\varphi_2,(0)}(\Omega) \tag{4.28}$$

з огляду на ту саму теорему при $l := m$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \Gamma$, якщо узяти до уваги зауваження 4.1. Нарешті, для кожного номера $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$ включення $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ випливає з умови (4.28) на підставі теореми 4.7 для $l := m + r_k$ і $\Gamma_0 := \Gamma$.

Теорема 4.8 доведена.

Якщо $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$, то ця теорема збігається з теоремою 3.11.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації досліджено властивості еліптичної за Лавруком крайової задачі у повній модифікованій за Ройтбергом уточненій соболєвській шкалі. Отримано такі результати:

1. Доведено теорему про нетеровість обмежених операторів, що відповідають цій задачі у зазначеній шкалі.
2. Доведено теорему про повний набір ізоморфізмів, породжених задачею у цій шкалі.
3. Встановлено нові апріорні оцінки узагальнених за Ройтбергом розв'язків задачі.
4. Доведено теорему про регулярність узагальнених за Ройтбергом розв'язків задачі у модифікованій уточненій соболєвській шкалі.
5. Встановлено нові достатні умови приналежності (локально) цих розв'язків до просторів неперервно диференційовних функцій, зокрема, знайдено умови класичності цих розв'язків.

Результати четвертого розділу опубліковані у статті [123].

РОЗДІЛ 5
ТЕОРЕМИ ТИПУ ЛІОНСА-МАДЖЕНЕСА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ЗА ЛАВРУКОМ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У цьому розділі досліджуємо еліптичну за Лавруком крайову задачу у (немодифікованих) просторах Хермандера, елементами яких можуть бути розподіли довільного від'ємного порядку (на відміну від третього розділу дисертації). Задачу розглядаємо в уточненій соболєвській шкалі у припущенні, що права частина еліптичного рівняння належить до гільбертового простору $L_2(\Omega)$ функцій квадратично інтегровних на Ω. Для регулярних еліптичних крайових задач і соболєвських просторів ця постановка дослідження була запропонована Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [148, 149].

5.1. Теорема про нетеровість

У цьому розділі є базовим такий гільбертів простір. Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Означення 5.1. Лінійний простір $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ складається, за означенням, з усіх розподілів $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ таких, що $Au \in L_2(\Omega)$. Цей простір наділений скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{s,\varphi}_A(\Omega)} := (u_1, u_2)_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + (Au_1, Au_2)_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1}$$

Тут, звісно, образ Au розуміється в сенсі теорії розподілів в області Ω. Скалярний добуток (5.1) породжує у просторі $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ норму графіка

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}_A(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{L_2(\Omega)}\bigr)^{1/2}.$$

У соболєвському випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ цей простір позначаємо також через $H^{s}_A(\Omega)$. Він був використаний Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [148, 149] у теорії регулярних еліптичних крайових задач. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ простір $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ розглядався В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [52, 53 164]. На відміну від цієї роботи, зазначені автори застосовували цей простір у випадку, коли $s \neq k - 1/2$ для усіх $k \in \mathbb{N}$.

Простір $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ повний, тобто гільбертів. Справді, якщо $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальна послідовність у цьому просторі, то існують границі

$$u := \lim_{k\to\infty} u_k \ \text{ в } \ H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$
$$f := \lim_{k\to\infty} Au_k \ \text{ в } \ L_2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

оскільки простори $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $L_2(\Omega)$ повні (тут вкладення неперервні). Диференціальний оператор A неперервний у топологічному просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$; тому

$$Au = \lim_{k\to\infty} Au_k = f \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Нагадаємо, що $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $f \in L_2(\Omega)$. Отже, $u \in H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ і $u_k \to u$ у просторі $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ при $k \to \infty$. Таким чином, цей простір повний.

Відмітити, що навіть коли всі коефіцієнти оператора A сталі, простір $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ залежить суттєво від кожного з них. Це випливає з результату Л. Хермандера [91] (теорема 3.1.)

Пов'яжемо з крайовою задачею (3.1), (3.2) гільбертові простори

$$\mathcal{D}^{s,\varphi}_A(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi}_A(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma),$$
$$\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := L_2(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Як звичайно, у соболєвському випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ будемо пропускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

Теорема 5.1. *Нехай $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$, а відображення* (3.5) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi}_A(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{5.2}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів

$$(f,g) := (f, g_1, \dots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma), \tag{5.3}$$

які задовольняють умову (3.40). *Індекс оператора* (5.2) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *та не залежить від s і φ.*

Зауваження 5.1. У випадку, коли

$$s \notin \{k - 1/2 :\ k \in \mathbb{N}\}, \tag{5.4}$$

щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ у просторі $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$ встановлена в [52] (теорема 4.31 (i)).

Перед тим, як доводити теорему 5.1, сформулюємо два результата, потрібних у доведенні. Перший з них говорить про зв'зок між простором $H^s_A(\Omega)$ і його аналогом для модифікованої за Ройтбергом соболєвської шкали $\{H^{s,(2q)}(\Omega) : s \in \mathbb{R}\}$.

Для довільного дійсного числа $s < 2q$ розглянемо лінійний простір

$$H^{s,(2q)}_A(\Omega) := \bigl\{u \in H^{s,(2q)}(\Omega) :\ Au \in L_2(\Omega)\bigr\},$$

наділений нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,(2q)}_A(\Omega)} := \bigl(\, \|u\|^2_{H^{s,(2q)}(\Omega)} + \|Au\|^2_{L_2(\Omega)}\bigr)^{1/2}. \tag{5.5}$$

Тут образ Au розуміється у сенсі твердження 4.2 (i). Простір $H^{s,(2q)}_A(\Omega)$ гільбертів відносно норми (5.5), а множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у ньому (див., наприклад, [52, с. 295, 296].

Твердження 5.1. *Нехай дійсне число s задовольняє умову* (5.4). *Тоді тотожне відображення на $C^\infty(\overline{\Omega})$ продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму між просторами $H^{s,(2q)}_A(\Omega)$ і $H^s_A(\Omega)$. Отже, ці простори рівні як поповнення множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами.*

Якщо $s > 2q - 1/2$, то це твердження є прямим наслідком рівності (4.7). Для решти значень параметра s його доведення наведено у монографії [164, с. 298 – 300].

Другий результат (досить громіздкий за формулюванням) стосується інтерполяції деяких підпросторів, пов'язаних з довільним лінійним обмеженим оператором, що діє у парі гільбертових просторів. Попередньо приймемо таке позначення.

Нехай H, Φ і Ψ є гільбертові простори, причому виконується неперервне вкладення $\Phi \hookrightarrow \Psi$. Окрім того, нехай задано лінійний обмежений оператор $T : H \to \Psi$. Покладемо

$$(H)_{T,\Phi} := \{u \in H : Tu \in \Phi\}.$$

У лінійному просторі $(H)_{T,\Phi}$ введено скалярний добуток

$$(u_1, u_2)_{(H)_{T,\Phi}} := (u_1, u_2)_H + (Tu_1, Tu_2)_\Phi.$$

Цей простір гільбертів і не залежить від Ψ.

Твердження 5.2. *Розглянемо шість сепарабельних гільбертових просторів X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1 і Z_1 та три лінійних відображення T, R і S, які задовольняють такі властивості:*

(i) *пари $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ припустимі;*

(ii) *простори Z_0 і Z_1 є підпросторами деякого лінійного простору E;*

(iii) *виконуються неперервні вкладення $Y_0 \hookrightarrow Z_0$ і $Y_1 \hookrightarrow Z_1$;*

(iv) *відображення T означене на просторі X_0 і задає обмежені оператори $T : X_0 \to Z_0$ і $T : X_1 \to Z_1$;*

(v) *відображення R означене на просторі E і задає обмежені оператори $R : Z_0 \to X_0$ і $R : Z_1 \to X_1$;*

(vi) *відображення S означене на просторі E і задає обмежені оператори $S : Z_0 \to Y_0$ і $S : Z_1 \to Y_1$;*

(vii) *для довільного* $\omega \in E$ *виконується рівність* $TR\omega = \omega + S\omega$.

Тоді пара просторів $[\,(X_0)_{T,Y_0},\,(X_1)_{T,Y_1}\,]$ *припустима, і для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *правильна рівність просторів*

$$\big[\,(X_0)_{T,Y_0},\,(X_1)_{T,Y_1}\,\big]_\psi = (X_\psi)_{T,Y_\psi}$$

з точністю до еквівалентності норм у них.

Аналог твердження 5.2 був уперше доведений Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [150] (теорема 14.3), де розглядався випадок комплексної інтерполяції. Це твердження доведене В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [46] (п. 4); див. також [164] (теорема 3.12).

Доведення теореми 5.1. Спочатку доведемо її у соболєвському випадку, коли $s \in \mathbb{Z}$, $s < 2q$ і $\varphi \equiv 1$. Скористаємося обмеженим і нетеровим оператором (4.9)

$$\Lambda :\, \mathcal{D}^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma) \tag{5.6}$$

з теореми 4.1. Його звуження на простір

$$\mathcal{D}_A^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma) := H_A^{s,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{(s+r_k-1/2)}(\Gamma)$$

є обмеженим оператором

$$\Lambda :\, \mathcal{D}_A^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}_{0,s}(\Omega,\Gamma). \tag{5.7}$$

Оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H_A^{s,(2q)}(\Omega)$, цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (3.5). Позначимо оператор (5.6) через $\Lambda_{s,(2q)}$, а оператор (5.7) через Λ_s. Звісно, $\ker\Lambda_s = \ker\Lambda_{s,(2q)}$ і

$$\operatorname{Ran}\Lambda_s = \big\{(f,g) \in \operatorname{Ran}\Lambda_{s,(2q)} :\, f \in L_2(\Omega)\big\},$$

де Ran позначає область значень відповідного оператора. Звідси за теоремою 4.1 випливає, що $\ker\Lambda_s = N$ і

$$\operatorname{Ran}\Lambda_s = \big\{(f,g) \in \mathcal{E}_{0,s}(\Omega,\Gamma) :\ \text{виконується (3.40)}\big\}.$$

Тому

$$\dim\ker\Lambda_s = \dim N < \infty \quad \text{and} \quad \dim\operatorname{coker}\Lambda_s = \dim N^+ < \infty.$$

Отже, обмежений оператор Λ_s, тобто (5.7), нетерів. На підставі твердження 5.1 робимо висновок, що (5.7) є оператор (5.2) з теореми 5.1, причому множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $H^s_A(\Omega)$.

Доведемо тепер теорему 5.1 у загальній ситуації за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар просторів Соболєва. Нехай $s \in \mathbb{R}$, $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Візьмемо ціле число $p \geq 2$ таке, що $s > -2q(p-1)$. Відображення (3.5) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\Lambda:\ \mathcal{D}_A^{-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}_{0,-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma), \tag{5.8}$$

$$\Lambda:\ \mathcal{D}^{(2q)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{(0)}(\Omega,\Gamma) = \mathcal{E}_{0,2q}(\Omega,\Gamma). \tag{5.9}$$

Для першого оператора це було щойно доведено, а для другого оператора це стверджується у теоремі 4.1. Ці оператори мають спільне ядро N і однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim N^+$. Область значень першого оператора

$$\Lambda\bigl(\mathcal{D}_A^{-2q(p-1)}(\Omega)\bigr) = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}_{0,-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (3.40)}\bigr\}. \tag{5.10}$$

Аналогічна рівність правильна і для другого оператора. Відмітимо, що другий оператор є звуженням першого.

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (2.16), у якій беремо $\varepsilon := s + 2q(p-1) > 0$ і $\delta := 2q - s > 0$. Застосовуючи інтерполяцію з функціональним параметром ψ до пари просторів з (5.8) і (5.9), отримаємо обмежений оператор

$$\Lambda:\ \bigl[\mathcal{D}_A^{-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi \to \bigl[\mathcal{E}_{0,-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}_{0,2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi. \tag{5.11}$$

Згідно з твердженням 2.9, цей оператор нетерів з ядром N та індексом $\dim N - \dim N^+$.

Опишемо інтерполяційні простори, наявні у формулі (5.11). Застосовуючи послідовно твердження 2.10 і 3.7, маємо:

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{D}_A^{-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{(2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi=\\=\bigl[H_A^{-2q(p-1)}(\Omega),H^{(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi\oplus\\\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}\bigl[H^{(-2q(p-1)+r_k-1/2)}(\Gamma),H^{(2q+r_k-1/2)}(\Gamma)\bigr]_\psi=\\=\bigl[H_A^{-2q(p-1)}(\Omega),H^{(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma).\end{gathered}\tag{5.12}$$

Тут враховано рівності

$$s-\varepsilon=-2q(p-1)\quad\text{і}\quad s+\delta=2q.\tag{5.13}$$

Аналогічно,

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{E}_{0,-2q(p-1)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}_{0,2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi=\\=\bigl[L_2(\Omega),L_2(\Omega)\bigr]_\psi\oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}\bigl[H^{(-2q(p-1)-m_j-1/2)}(\Gamma),H^{(2q-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_\psi=\\=L_2(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)=\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma).\end{gathered}\tag{5.14}$$

Ці рівності просторів виконуються з точністю до еквівалентності норм.

Покажемо, що

$$\bigl[H_A^{-2q(p-1)}(\Omega),H^{(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi=H_A^{s,\varphi}(\Omega)\tag{5.15}$$

з точністю до еквівалентності норм. Для цього застосуємо твердження 5.2, у якому візьмемо

$$\begin{gathered}X_0:=H^{(-2q(p-1))}(\Omega),\quad X_1:=H^{(2q)}(\Omega),\quad Y_0:=Y_1:=Z_1:=L_2(\Omega),\\Z_0:=E:=H^{(-2qp)}(\Omega),\quad T:=A.\end{gathered}$$

Тоді

$$H_A^{-2q(p-1)}(\Omega)=(X_0)_{T,Y_0}\quad\text{і}\quad H^{(2q)}(\Omega)=(X_1)_{T,Y_1}.\tag{5.16}$$

Відмітимо, що остання рівність виконується з точністю до еквівалентності норм на підставі твердження 3.8 (i).

Звісно, умови (i)–(iv) твердження 5.2 виконуються. Введемо деякі оператори R та S, які задовольняють умови (v)–(vii). У цьому зв'язку використаємо той відомий факт, що відображення $u \mapsto A^p A^{p+} u + u$ задає ізоморфізм

$$A^p A^{p+} + I : \, H_D^{(\sigma)}(\Omega) \leftrightarrow H^{(\sigma-4qp)}(\Omega) \quad \text{для кожного} \quad \sigma \geq 2qp \tag{5.17}$$

(див. [164] (лема 3.1). Тут, звичайно, A^p є p-та ітерація A, тоді A^{p+} є формально спряжений оператор до диференціального оператора A^p, а I – тотожний оператор. Окрім того,

$$H_D^{(\sigma)}(\Omega) := \bigl\{ u \in H^{(\sigma)}(\Omega) : \, D_\nu^{j-1} u = 0 \, \text{ на } \, \Gamma \, \text{ для усіх } \, j \in \{1, \ldots, 2qp\} \bigr\}$$

є підпростір простору $H^{(\sigma)}(\Omega)$. Оператор, обернений до (5.17), є обмежений лінійний оператор

$$(A^p A^{p+} + I)^{-1} : \, H^{(\sigma)}(\Omega) \to H^{(\sigma+4qp)}(\Omega) \quad \text{для кожного} \quad \sigma \geq -2qp. \tag{5.18}$$

Покладемо

$$R := A^{p-1} A^{p+} (A^p A^{p+} + I)^{-1} \quad \text{і} \quad S := -(A^p A^{p+} + I)^{-1}.$$

Використовуючи (5.18), отримаємо обмежені оператори

$$R : \, Z_0 = H^{(-2qp)}(\Omega) \to H^{(2qp-2qp-2q(p-1))}(\Omega) = X_0,$$
$$R : \, Z_1 = L_2(\Omega) \to H^{(4qp-2qp-2q(p-1))}(\Omega) = X_1,$$
$$S : \, Z_0 = H^{(-2qp)}(\Omega) \to H^{(2qp)}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) = Y_0,$$
$$S : \, Z_1 = L_2(\Omega) \to H^{(4qp)}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) = Y_1;$$

тут, вкладення неперервні. Окрім того,

$$AR = AA^{p-1} A^{p+} (A^p A^{p+} + I)^{-1} = (A^p A^{p+} + I - I)(A^p A^{p+} + I)^{-1} = I + S$$

на $E = H^{(-2qp)}(\Omega)$. Отже, умови (v)–(vii) твердження 5.2 також задовольняються.

Тепер, на підставі цього твердження і з огляду на (5.16), маємо

$$\bigl[H_A^{-2q(p-1)}(\Omega), H^{(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi = \bigl[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\bigr]_\psi = (X_\psi)_{T,Y_\psi}.$$

Тут, згідно з твердженням 3.7 і формулою (5.13),

$$X_\psi = \bigl[H^{(-2q(p-1))}(\Omega), H^{(2q)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{s,\varphi}(\Omega).$$

До того ж,

$$Y_\psi = \bigl[L_2(\Omega), L_2(\Omega)\bigr]_\psi = L_2(\Omega).$$

Ці три формули дають потрібну рівність (5.15).

Відмітимо, що

$$\text{множина } C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ щільна в просторі } H_A^{s,\varphi}(\Omega). \tag{5.19}$$

Це випливає зі щільності множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $H^{(2q)}(\Omega)$ та з неперервного щільного вкладення $H^{(2q)}(\Omega) \hookrightarrow H_A^{s,\varphi}(\Omega)$. Останнє вкладення є загальна властивість інтерполяції, використаної в (5.15).

З інтерполяційних формул (5.12), (5.14) і (5.15) випливає, що обмежений і нетерів оператор (5.11) діє у парі просторів $\mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Як було зазначено вище, цей оператор має ядро N та індекс $\dim N - \dim N^+$. Окрім того, на підставі твердження 2.9 і формули (5.10), область значень цього оператора дорівнює

$$\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\bigl(H_A^{-2q(p-1)}(\Omega)\bigr) = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (3.40)}\bigr\}.$$

Нарешті, з огляду на (5.19), цей оператор є розширенням за неперервністю відображення (3.5). Таким чином, він є потрібний оператор (5.2).

Теорема 5.1 доведена.

З теореми 5.1 випливає

Наслідок 5.1. *Якщо* $N = \{0\}$ *і* $N^+ = \{0\}$, *то оператор* (5.2) *є ізоморфізмом між просторами* $\mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ *і* $\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. *У загальному випадку, цей оператор природним чином породжує ізоморфізм*

$$\Lambda :\, \mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)/N \leftrightarrow \mathcal{R}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{5.20}$$

Тут,

$$\mathcal{R}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) : \ \textit{виконуеться}\ (3.40)\bigr\}$$

є підпростір простору $\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

5.2. Теорема про апріорну оцінку узагальнених розв'язків задачі

Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку крайової задачі (3.1), (3.2) в ситуації, розглянутій у цьому розділі. Покладемо

$$\mathcal{S}'_A(\Omega) := \bigl\{u \in \mathcal{S}'(\Omega) :\ Au \in L_2(\Omega)\bigr\};$$

тут $\mathcal{S}'(\Omega)$ позначає топологічний лінійний простір звужень в область Ω усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Оскільки область Ω обмежена, $\mathcal{S}'_A(\Omega)$ є об'єднанням усіх просторів $H^{s,\varphi}_A(\Omega)$, де $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Означення 5.2. Вектор

$$(u,v) := (u, v_1, \ldots, v_\varkappa) \in \mathcal{S}'_A(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^\varkappa \tag{5.21}$$

називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (3.1), (3.2) з правою частиною

$$(f,g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in L_2(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{q+\varkappa},$$

якщо $\Lambda(u,v) = (f,g)$, де Λ є оператор (5.2) для деяких параметрів $s < 2q$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Звісно, означення 3.4 і 5.2 узагальнених розв'язків еквівалентні, якщо $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ і $f \in L_2(\Omega)$.

Введений в означенні 5.2 узагальнений розв'язок задовольняє таку апріорну оцінку в уточненій соболєвській шкалі.

Теорема 5.2. *Нехай задано число $s < 2q$, функцію $\varphi \in \mathcal{M}$ і число $\sigma > 0$. Тоді існує число $c > 0$ таке, що*

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_A(\Omega,\Gamma)} \leq c\,\bigl(\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr) \tag{5.22}$$

для кожного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}_A(\Omega,\Gamma)$. Тут, $c = c(s,\varphi,\sigma)$ не залежить від (u,v).

Доведення. З ізоморфізму (5.20) випливає, що

$$\begin{gathered}\inf\bigl\{\,\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}:\,(u^{\circ},v^{\circ})\in N\,\bigr\}\leq\\ \leq c_{0}\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\end{gathered}\tag{5.23}$$

для кожного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)$, де c_0 норма оператора, оберненого до (5.20). Оскільки N є скінченновимірний підпростір кожного з просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, то норми у них еквівалентні на N. Отже, для усіх $(u^{\circ},v^{\circ})\in N$ маємо нерівність

$$\|(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}\leq c_{1}\|(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)},$$

де число $c_1>0$ не залежить від (u,v) і (u°,v°). Окрім того,

$$\begin{gathered}\|(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq c_{2}\,\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}+\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.\end{gathered}$$

Тут, c_2 є норма оператора неперервного вкладення $\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Отже,

$$\begin{gathered}\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}\leq\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}+\|(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}+c_{1}\|(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq(1+c_{1}c_{2})\,\|(u,v)+(u^{\circ},v^{\circ})\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}+c_{1}\,\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.\end{gathered}$$

Перейшовши в останній нерівності до інфімуму за усіма $(u^{\circ},v^{\circ})\in N$ і скориставшись формулою (5.23), отримуємо потрібну оцінку (5.22):

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}_{A}(\Omega,\Gamma)}\leq(1+c_{1}c_{2})\,c_{0}\,\|\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+c_{1}\,\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.$$

Теорема 5.2 доведена.

Якщо $N=\{0\}$, то другий доданок у правій частині нерівності (5.22) можна прибрати. Це зразу випливає з ізоморфізму (5.20).

5.3. Теорема про глобальну регулярність узагальнених розв'язків

Дослідимо в уточненій соболєвській шкалі глобальну регулярність узагальнених розв'зків (5.21) еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2).

Теорема 5.3. *Нехай* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Припустимо, що вектор* (5.21) *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (3.1), (3.2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{s-2q,\varphi}(\Omega), \quad \text{якщо} \quad s \geq 2q, \tag{5.24}$$

та

$$g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1, ..., q+\varkappa\}. \tag{5.25}$$

Тоді

$$u \in H^{s,\varphi}(\Omega), \tag{5.26}$$

$$v_k \in H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad k \in \{1, ..., \varkappa\}. \tag{5.27}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $s < 2q$. За умовою (5.21), вектор $(u, v) \in \mathcal{D}_A^{\sigma}(\Omega, \Gamma)$ для деякого числа $\sigma < s$, а $f \in L_2(\Omega)$. За умовою (5.25) і теоремою 5.1, маємо:

$$(f, g) = \Lambda(u, v) \in \mathcal{E}_{0,s,\varphi}(\Omega, \Gamma) \cap \Lambda\big(\mathcal{D}_A^{\sigma}(\Omega, \Gamma)\big) = \Lambda\big(\mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)\big).$$

Отже, поряд з умовою $\Lambda(u, v) = (f, g)$ виконується рівність $\Lambda(u', v') = (f, g)$ для деякого вектора $(u', v') \in \mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$. Тоді

$$(u^{\circ}, v^{\circ}) := (u, v) - (u', v') \in \mathcal{D}_A^{\sigma}(\Omega, \Gamma) \quad \text{i} \quad \Lambda(u^{\circ}, v^{\circ}) = 0,$$

що за теоремою 5.1 тягне за собою включення

$$(u^{\circ}, v^{\circ}) \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \big(C^{\infty}(\Gamma)\big)^{\varkappa}.$$

Отже,

$$(u, v) = (u', v') + (u^\circ, v^\circ) \in \mathcal{D}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma).$$

Таким чином, у випадку $s < 2q$ теорема 5.3 доведена.

Розглянемо тепер випадок, коли $s \geq 2q$. Як було щойно доведено, умова

$$g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \subset H^{2q-1/4-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)$$
$$\text{для кожного} \quad j \in \{1, ..., q + \varkappa\}$$

тягне за собою включення $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/4,\varphi}(\Omega, \Gamma)$. Звідси на підставі умов (5.24), (5.25) і теореми 3.10, у якій беремо $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \Gamma$, робимо висновок, що $(u, v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$, тобто виконуються властивості (5.26) і (5.27).

Теорема 5.3 доведена.

Зауважимо, що обмеження $s \geq 2q$ в умові (5.24) викликане такими міркуваннями: якщо $s < 2q$, то

$$f = Au \in L_2(\Omega) \subset H^{s-2q,\varphi}(\Omega)$$

з огляду на формули (5.21) і (3.32). Отже, припущення про те, що $f \in H^{s-2q,\varphi}(\Omega)$, є зайвим у теоремі 5.3 у випадку $s < 2q$.

5.4. Випадок однорідного еліптичного рівняння

Застосуємо теореми 5.1 — 5.3 та їх аналоги з третього розділу дисертації до дослідження еліптичної крайової задачі (3.1), (3.2) у важливому випадку однорідного еліптичного рівняння, тобто задачі

$$Au = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5.28}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa.. \tag{5.29}$$

Таку задачу коротко називаємо напіводнорідною.

Позначимо через $K_A^\infty(\overline{\Omega})$ множину усіх функцій $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таких, що $Au = 0$ в області Ω. Пов'яжемо з крайовою задачею (5.28), (5.29) лінійне відображення

$$\begin{gathered}\Lambda' : \, (u, v_1, ..., v_\varkappa) \mapsto \left(B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k \right), \\ \text{де} \quad u \in K_A^\infty(\overline{\Omega}), \quad \text{і} \quad v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma).\end{gathered} \tag{5.30}$$

Дослідимо властивості продовження (за неперервністю) цього відображення у повній уточненій соболєвській шкалі.

Позначимо через N_1^+ скінченновимірний простір усіх векторів $(h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$ таких, що $(w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in N^+$ для деякого $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ покладемо

$$K_A^{s,\varphi}(\Omega) := \bigl\{ u \in H^{s,\varphi}(\Omega) : Au = 0 \text{ в } \Omega \bigr\}.$$

Тут образ Au розуміємо у сенсі теорії розподілів, а $K_A^{s,\varphi}(\Omega)$ розглядаємо як (замкнений) підпростір гільбертового простору $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Згідно з [164] (теорема 3.11) множина $K_A^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $K_A^{s,\varphi}(\Omega)$.

Пов'яжемо з напіводнорідною крайовою задачею (5.28), (5.29) гільбертові простори

$$\mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) := K_A^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma)$$

та

$$\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma) := \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Теорема 5.4. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (5.30) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda' : \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma). \tag{5.31}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$ таких, що

$$\sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \quad \text{для кожного} \quad (h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in N_1^+. \tag{5.32}$$

Індекс оператора (5.31) *дорівнює* $\dim N - \dim N_1^+$ *і не залежить від s і φ.*

Цей результат є прямим наслідком теорем 3.1 і 5.1.

Дослідимо властивості узагальнених розв'язків напіводнорідної еліптичної крайової задачі (5.28), (5.29).

Теорема 5.5. *Нехай задано $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і число $\sigma > 0$. Тоді існує число $c > 0$ таке, що*

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c \left(\|\Lambda'(u, v)\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)} + \|(u, v)\|_{\mathcal{D}^{s-\sigma,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \right) \tag{5.33}$$

для довільного вектора $(u, v) \in \mathcal{K}_A^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$. Тут $c = c(s, \varphi, \sigma)$ не залежить від (u, v).

Цей результат є прямим наслідком теорем 3.3 і 5.2.

Теорема 5.6. *Нехай вектор* (5.21) *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (5.28), (5.29), *праві частини якої задовольняють умову $g := (g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$ для деяких параметрів $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $(u, v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega, \Gamma)$.*

Цей результат є окремим випадком теореми 5.3.

З огляду на вкладення $K_A^{s,\varphi}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, узагальнений розв'язок (5.21) крайової задачі (5.28), (5.29) називається класичним, якщо $u \in C^m(\overline{\Omega})$ і

$v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$. Тоді ліві частини рівнянь (5.29) обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями.

Теорема 5.7. *Припустимо, що вектор* (5.21) *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (5.28), (5.29), *праві частини якої задовольняють умову* $g \in \mathcal{H}_{m+n/2,\varphi}(\Gamma)$ *для деякого параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє умову* (2.11). *Тоді цей розв'язок класичний.*

Доведення. З умови $g \in \mathcal{H}_{m+n/2,\varphi}(\Gamma)$ випливає включення $(u, v) \in \mathcal{D}^{m+n/2,\varphi}(\Omega, \Gamma)$ за теоремою 5.6. Тому

$$u \in H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$$

і

$$v_k \in H^{m+n/2+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \subset C^{m+r_k}(\Gamma)$$

для кожного номера $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$ на підставі теореми 5.6, твердження 3.5 і умови (2.11). Отже, розв'язок (u, v) класичний.

Теорема 5.7 доведена.

Зауважимо, що в цій теоремі умова (2.11) не лише достатня для класичності розв'язку, але й необхідна на класі всіх розглянутих узагальнених розв'язків напіводнорідної еліптичної крайової задачі (5.28), (5.29). Це обґрунтовується аналогічно до обґрунтування зауваження 3.1.

Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі дисертації досліджено властивості еліптичних за Лавруком крайових задач у просторах Хермандера, які належать до уточненої соболєвської шкали і містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку. При цьому припускається, що права частина еліптичного рівняння належить до простору $L_2(\Omega)$. Отримано такі результати:

1. Доведено теорему про обмеженість і нетеровість операторів, що відповідає цій задачі у зазначених просторах.
2. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків задачі у цих просторах.
3. Доведено теорему про глобальну регулярність цих розв'язків у повній уточненій соболєвській шкалі.
4. Ці результати конкретизовано для важливого випадку однорідного еліптичного рівняння.

Отримані результати є новими також і для соболєвських просторів, навіть цілих порядків. Вони є версіями теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса стосовно розглянутих у дисертації крайової задачі і шкали функціональних просторів.

Результати п'ятого розділу опубліковано у статтях [97] і [168].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі досліджено властивості еліптичних за Лавруком крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера — розширеній соболєвській шкалі та уточненій соболєвській шкалі. На відміну від класичних еліптичних крайових задач, еліптичні за Лавруком задачі містять додаткові невідомі функції у крайових умовах. Розширена соболєвська шкала складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера, для яких показником регулярності розподілів служить функціональний параметр, RO-змінний за Авакумовичем на нескінченності. Її важливий підклас — уточнена соболєвська шкала — прив'язана до гільбертової соболєвської шкали числовим параметром. Ці шкали більш тонко градуйовані за допомогою функціонального параметра, ніж класична гільбертова шкала просторів Соболєва. Їх застосування дозволяє отримати більш точні результати про властивості еліптичних крайових задач, ніж це можливо у межах теорії соболєвських просторів. Зазначені шкали просторів Хермандера отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Більше того, розширена соболєвська шкала складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних щодо цих пар і замкнута відносно зазначеного методу інтерполяції. Він відіграє ключову роль у дисертації.

У роботі отримані такі основні результати:

1. Доведено теорему про нетеровість еліптичної за Лавруком крайової задачі у підходящих парах просторів Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали і складаються з регулярних розподілів, та теорему про породжені задачею ізоморфізми у цих просторах.
2. Встановлено теореми про нетеровість цієї задачі і породжені нею ізоморфізми у повній модифікованій за Ройтбергом уточненій соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему типу Ліонса-Мадженеса про нетеровість цієї задачі у просторах Хермандера і Соболєва, які містять нерегулярні розподіли довільного від'ємного порядку.
4. Встановлено апріорні оцінки узагальнених розв'язків еліптичної за Лавруком крайової задачі у просторах Хермандера та їх модифікаціях за Ройтбергом.
5. Доведено теореми про регулярність зазначених розв'язків у цих просторах.
6. Знайдено нові достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) цих розв'язків, зокрема, достатні умови класичності узагальнених розв'язків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агмон С. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. — Москва: Изд. иностранной литературы, 1962. — 206 с. (Переклад статті: Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Commun. Pure. Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 4. — P. 623 — 727.)
2. Агранович М. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области / М. С. Агранович, А. С. Дынин // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 146, № 3. — С. 511 — 514.
3. Агранович М. С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи матем. наук. — 1964. — Т. 19, № 3. — С. 53 — 161.
4. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі / А. В. Аноп // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 37 — 59.
5. Аноп А. В. Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі / А. В. Аноп // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2014. — № 4. — С. 7 — 14.
6. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у просторах узагальненої гладкості / А. В. Аноп // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 7 — 34.
7. Аноп А. В. Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале / А. В. Аноп, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 7. — С. 867 — 883.

8. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі у просторах узагальненої гладкості: Дис. ...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / А. В. Аноп. — Київ, 2014. — 170 с.
9. Асланян А. Г. Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей з жидкостью / А. Г. Асланян, Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский // Функц. анализ и его прилож. — 1981. — **15**, № 3. — С. 1 — 9.
10. Берг Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. — Москва: Мир, 1980. — 264 с.
11. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений / Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 4. — С. 745 — 748.
12. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
13. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач / Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1967. — Т. 19, № 5. — С. 3 — 32.
14. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — Москва: Наука, 1975. — 480 с.
15. Волевич Л. Р. К теории краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 489 — 492.
16. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Матем. сборник. — 1965. — Т. 68, № 3. — С. 373 — 416.
17. Волевич Л. Р. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения / Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях // Успехи матем. наук. — 1965. — Т. 20, № 1. — С. 3 — 74.

18. Волевич Л. Р. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. — Москва: Эдиториал УРСС, 1999. — 272 с.

19. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа / Ю. В. Егоров. — Москва: Наука, 1984. — 360 с.

20. Зинченко Т. Н. Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 11. — С. 1477 — 1491.

21. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 180 — 202.

22. Зинченко Т. Н. Эллиптические по Петровскому системы в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2013. — Т. 10, № 3. — С. 433 — 449.

23. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2013. — № 3. — С. 14 — 20.

24. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале на замкнутом многообразии / Т. Н. Зинченко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 100 — 125.

25. Калугина Т. Ф. Интерполяция банаховых пространств с функциональным параметром. Теорема реитерации / Т. Ф. Калугина // Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механика. — 1975. — Т. 30, № 6. — С. 68 — 77.

26. Костарчук Ю. В. Теореми про ізоморфізми для еліптичних граничних задач з граничними умовами, які не є нормальними / Ю. В. Костарчук, Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1973. — Т. 25, № 2. — С. 271 — 277.

27. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов / С. Г. Крейн // Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 130, № 3. — С. 491 — 494.
28. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
29. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. – V. 11, No 5. — P. 257 — 267.
30. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. — V. 11, No 5. — P. 269 — 278.
31. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. III. Сопряженная граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — V. 13, No 2. — P. 105 — 110.
32. Лизоркин П. И. Пространства обобщенной гладкости / П. И. Лизоркин // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. — Москва: Мир, 1986. — С. 381 — 415.
33. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — Москва: Мир, 1971. — 372 с. (Переклад видання: Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. — Paris: Dunod, 1968. — 372 p.)
34. Лопатинский Я. Б. Об одном способе сведения краевых задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. — 1953. — Т. 5, № 2. — С. 123 — 151.

35. Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач. Избранные труды / Я. Б. Лопатинский. — Киев: Наукова думка, 1984. — 316 с.

36. Лось В. М. Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач / В. М. Лось, О. О. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 219 — 234.

37. Лось В. М. Неоднорідні параболічні мішані задачі і простори узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 249 — 267.

38. Лось В. М. Параболічні мішані задачі для систем Петровського у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2014. — № 10. — С. 24 — 32.

39. Лось В. М. Мішані задачі для двовимірного рівняння теплопровідності в анізотропних просторах Хермандера / В. М. Лось // Укр. матем. журн. — 2015. — Т. 67, № 6. — С. 645 — 656.

40. Лось В. Н. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости / В. Н. Лось, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2014. — № 6. — С. 23 — 31.

41. Мадженес Э. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных / Э. Мадженес // Успехи матем. наук. — 1966. — Т. 21, № 2. — С. 169 — 218.

42. Михайлец В. А. Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2005. — Т. 57, № 5. — С. 689 — 696.

43. Михайлец В. А. Интерполяция пространств с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2006. — № 6. — С. 13 — 18.

44. Михайлец В. А. Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2006. — № 10 — С. 27 — 33.

45. Михайлец В. А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 352 — 370.

46. Михайлец В. А. Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 11. — С. 1536 — 1555.

47. Михайлец В. А. Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 547 — 580.

48. Михайлец В. А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 5. — С. 679 — 701.

49. Михайлец В. А. Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2008. — Т. 60, № 4. — С. 497 — 520.

50. Михайлец В. А. Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 205 — 226.

51. Михайлец В. А. Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2009. — № 3. — С. 13 — 19.

52. Михайлец В. А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи / В. А. Михайлец, А. А. Мурач. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с.
53. Михайлец В. А. Индивидуальные теоремы о разрешимости эллиптических задач и пространства Хермандера / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2011. — № 4. — С. 30 — 36.
54. Михайлец В. А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2013. — Т. 65, № 3. — С.368 — 380.
55. Михайлець В. А. Простори Хермандера та еліптичні задачі / В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2011. — Т. 1, № 1 — 2. — С. 129 — 144.
56. Мурач А. А. Эллиптические краевые задачи в полных шкалах пространств типа Лизоркина–Трибеля / А. А. Мурач // Доклады АН Украины. — 1994. — № 12 — С. 36 — 39.
57. Мурач А. А. Эллиптические краевые задачи в полных шкалах пространств типа Никольского / А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 1994. — Т. 46. — № 12 — С. 1647 — 1654.
58. Мурач А. А. Эллиптические краевые задачи в многосвязных областях в уточненной шкале пространств / А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 4. — С. 29 — 35.
59. Мурач А. А. Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии / А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 5. — С. 29 — 35.
60. Мурач А. А. Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии / А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 6. — С. 798 — 814.

61. Мурач А. А. Эллиптические по Дуглису-Ниренбергу системы в пространствах обобщенной гладкости / А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2008. — Т. 5, № 3. — С. 350 — 365.

62. Мурач А. А. Эллиптические системы в двусторонней шкале пространств Хермандера / А. А. Мурач // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 1. — С. 126 — 141.

63. Мурач А. А. Об эллиптических системах в пространствах Хермандера / А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2009. — Т. 61, № 3. — С. 391 — 399.

64. Мурач О. О. Крайова задача для еліптичної за Петровським системи диференціальних рівнянь в уточненій шкалі просторів / О. О. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 6. — С. 24—31.

65. Мурач О. О. Про еліптичні крайові задачі за Лавруком у просторах Соболєва і Хермандера/ О. О. Мурач, І. С. Чепурухіна // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — К.: НТУУ „КПІ", 2015. — С. 166 — 168.

66. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — Москва: Наука, 1969. — 480 с.

67. Панич О. И. Введение в общую теорию эллиптических краевых задач / О. И. Панич. — Киев: Выща школа, 1986. — 128 с.

68. Петре Ж. О новом подходе к граничным задачам для эллиптических уравнений / Ж. Петре // Математика: сб-к переводов.— 1963. — Т. 7, № 1. — С. 43 — 65.

69. Петровский И. Г. Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными / И. Г. Петровский // Матем. сборник. — 1939. — Т. 5, № 1. — С. 3 — 70.

70. Петровский И. Г. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избр. тр. / И. Г. Петровский. — Москва: Наука, 1986. — 499 с.

71. Ремпель Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце. — Москва: Мир, 1986. — 575 с.

72. Ройтберг И. Я. Эллиптические граничные задачи для общих систем уравнений в полных шкалах банаховых пространств / И. Я. Ройтберг // Доклады Академии Наук. — 1997. — Т. 354, № 1. — С. 25 — 29.

73. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 798 — 801.

74. Ройтберг Я. А. Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1965. — Т. 17, № 5. — С. 122 — 129.

75. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 180, № 3. — С. 542 — 545.

76. Ройтберг Я. А. Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1969. — **21**, № 3. — С. 406–413.

77. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Я. А. Ройтберг // Матем. сборник. — 1970. — Т. 83, № 2. — С. 181 — 213.

78. Ройтберг Я. А. Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических по Дуглису-Ниренбергу систем / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1975. — Т. 27, № 4. — С. 544 — 548.

79. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — Москва: Наука, 1985. — 142 с.

80. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем / Л. Н. Слободецкий // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 123, № 4. — С. 616 — 619.

81. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_2 решений линейных эллиптических и параболических систем, I / Л. Н. Слободецкий // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. — 1960. — № 7. — С. 28 — 47.

82. Солонников В. А. Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем / В. А. Солонников // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 4. — С. 783 — 785.

83. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. I / В. А. Солонников // Известия АН СССР, сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 665 — 706.

84. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. II / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1966. — Т. 92. — С. 233 — 297.

85. Солонников В. А. Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1967. — Т. 102. — С. 137 — 160.

86. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

87. Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2-х томах / А. И. Степанец. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 468 с. — Т. 2. — 427 с.

88. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

89. Трибель Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1986. — 447 с.

90. Функциональный анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. — Москва: Наука, 1972. — 544 с.

91. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хермандер. — Москва: Изд. иностр. лит., 1959. — 132 с.

92. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1965. — 380 с. (Переклад видання: Hörmander L. Linear partial differential operators. — Berlin: Springer, 1963. — vii+287 p.)

93. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 464 с.

94. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.

95. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

96. Чепурухіна І. С. Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 284 — 304.

97. Чепурухіна І. С. Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах / І. С. Чепурухіна // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2015. — № 7. — С. 20 — 29.

98. Чепурухіна І. С. Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 338 — 374.

99. Чепурухіна І. С. Про еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями на межі області у повних гільбертових шкалах функціональних просторів / І. С. Чепурухіна // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна — 2015” (1–3 квітня 2015 р., м. Київ, Україна). — К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2015. — С. 59 — 62.

100. Чепурухіна І. С. Про еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями на межі області у просторах Хермандера / І. С. Чепурухіна // Міжнародна конференція молодих математиків (3–6 червня 2015 р., Київ, Україна): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — С. 178.

101. Чепурухіна І. С. Про деякі напіводнорідні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера / І. С. Чепурухіна // X літня школа „Алгебра, топологія, аналіз” (3–15 серпня 2015 р., Одеса, Україна): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — С. 63.

102. Шапиро З. Я. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений / З. Я. Шапиро // Известия АН СССР, сер. матем. — 1953. — Т. 17. — С. 539 — 562.

103. Шехтер М. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных / М. Шехтер // Математика: сб-к перево-

дов. — 1960. — Т. 4, № 5. — С. 93 — 122. (Перевод статьи: Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. — Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 3. — P. 457 — 486.)

104. Шехтер М. Замечания об эллиптических граничных задачах / М. Шехтер // Математика: сб-к переводов. — 1960. — Т. 4, № 6. — С. 3 — 21.

105. Шлензак Г. Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств / Г. Шлензак // Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механика. — 1974. — Т. 29, № 4. — С. 48 — 58.

106. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — Москва: Наука, 1978. — 280 с.

107. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин. — Москва: Наука, 1973. — 232 с.

108. Agmon S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Commun. Pure Appl. Math. — 1964. — V. 17, № 1. — P. 35 — 92.

109. Agmon S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems / S. Agmon. — Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., 1965. — 292 p.

110. Agranovich M. S. Elliptic boundary problems / M. S. Agranovich // Encycl. Math. Sci., vol. 79, Partial differential equations. IX. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. — P. 1 — 144.

111. Anop A. V. Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter / A. V. Anop, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — V. 20, № 2. — P. 103 — 116.

112. Aronszajn N. Differential equations on Riemannian manifolds / N. Aronszajn, A. N. Milgram // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1953. — V. 2. — P. 1 — 61.

113. Atiyah M. F. The index of elliptic operators on compact manifolds / M. F. Atiyah, I. M. Singer // Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 69, № 3. — P. 422 — 433.

114. Atiyah M. F. The index theorem for manifolds with boundary / M. F. Atiyah, R. Bott // Proc. Symp. on Differentional Analysis. Bombay Coll. — London: Oxford University Press, 1964. — P. 175 — 186.

115. Avakumović V. G. O jednom O-inverznom stavu / V. G. Avakumović // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. — 1936. — V. 254. — P. 167 — 186.

116. Bingham N. H. Regular variation / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

117. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential operators / L. Boutet de Monvel // Acta Math. — 1971. — V. 126, № 1 — 2. — P. 11 — 51.

118. Browder F. E. On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations / F. E. Browder // Commun. Pure Appl. Math. — 1956. — V. 9, № 3. — P. 351 — 361.

119. Browder F. E. Estimates and existence theorems for elliptic boundary-value problems / F. E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1959. — V. 45, № 3. — P. 365 — 372.

120. Brudnyï Yu. A. Interpolation functors and interpolation spaces / Yu. A. Brudnyï, N. Ya. Krugljak. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — xvi+718 p.

121. Caetano A. M. Local growth envelops of Triebel–Lizorkin spaces of generalized smoothness / A. M. Caetano, H.-G. Leopold // J. Fourier Anal. Appl. — 2006. — V. 12, № 4. — P. 427 — 445.

122. Carro M. J. On complex interpolation with an analytic functional / M. J. Carro, J. Cerdà // Math. Scand. — 1990. — V. 66, № 2. — P. 264 — 274.

123. Chepurukhina I. S. Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scales of spaces / I. S. Chepurukhina, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2015. — V. 21, № 1. — P. 6 — 21.

124. Chepurukhina I. S. Elliptic problems with additional uknown functions in boundary conditions and Hörmander spaces /I. S. Chepurukhina // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (25–28 серпня 2015, Дрогобич, Україна): Тези доповідей. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. — С. 23.

125. Ciarlet P. G. Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis / P. G. Ciarlet. — Paris: Mayson, 1990. — viii+218 p.

126. Cobos F. Hardy-Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter / F. Cobos, D. L. Fernandez // Proc. Lund Conf. 1986. Lecture Notes in Math. V. 1302. — Berlin: Springer, 1988. — P. 158 — 170.

127. Denk R. Maximal L_p-regularity of parabolic problems with boundary dynamics of relaxation type / R. Denk, J. Prüss, R. Zacher // J. Funct. Anal. — 2008. — V. 255, № 11. — P. 3149 — 3187.

128. Denk R. Parabolic boundary value problems connected with Newton's polygon and some problems of crystallization / R. Denk, L. R. Volevich // J. Evol. Equ. — 2008. — V. 8, № 3. — P. 523 — 556.

129. Douglis A. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations / A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1955. — V. 8, № 4. — P. 503 — 538.

130. Edmunds D. E. Spectral theory for isotropic fractal drums / D. E. Edmunds, H. Triebel // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1998. — V. 326. — P. 1269 – 1274.

131. Edmunds D. E. Eigenfrequencies of isotropic fractal drums / D. E. Edmunds, H. Triebel // Operator Theory: Advances and Applications. V. 110. — Basel: Birkhäser, 1999. — P. 81 — 102.

132. Franke J. Regular elliptic boundary value problems in Besov–Triebel–Lizorkin spaces / J. Franke, T. Runst // Math. Nachr. 1995. — V. 174. — P. 113 — 149.

133. Farkas W. Characterisations of function spaces of generalized smoothness / W. Farkas, H.-G. Leopold // Ann. Mat. Pura Appl. — 2006. — V. 185, № 1. — P. 1 — 62.

134. Foiaş C. Sur certains théorèmes d'interpolation / C. Foiaş, J.-L. Lions // Acta Scient. Math. Szeged. — 1961. — V. 22, № 3 – 4. — P. 269 — 282.

135. Geymonat G. Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici / G. Geymonat // Annali di Matematica Pura ed Applicata. (4). — 1965. — V. 69. — P. 207 — 284.

136. Grubb G. Pseudo-differential boundary problems in L_p spaces / G. Grubb // Comm. Partial Differential Equations. — 1990. — V. 15. — P. 289 — 340.

137. Grubb G. Functional calculas of pseudo-differential boundary problems / G. Grubb. — 2-nd ed. — Boston: Birkhäser, 1996. — 522 p.

138. Gurka P. Sharp embeddins of Besov-type spaces / P. Gurka, B. Opic // J. Comp. Appl. Math. — 2007. — V. 208, № 1. — P. 235 — 269.

139. Gustavsson J. A function parameter in connection with interpolation of Banach spaces / J. Gustavsson // Math. Scand. — 1978. — V. 42, № 2. — P. 289 – 305.

140. Haroske D. D. Continuity envelopes of spaces of generalised smoothness, entropy and approximation numbers / D. D. Haroske, S. D. Moura // J. Approximation Theory. — 2004. — V. 128. — P. 151 — 174.

141. Haroske D. D. Continuity envelopes and sharp embeddings in spaces of generalised smoothness / D. D. Haroske, S. D. Moura // J. Funct. Anal. — 2008. — V. 254, № 8. — P. 1487 — 1521.

142. Jacob N. Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 volumes / N. Jacob. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

143. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation / S. Janson // J. Funct. Anal. — 1981. — V. 44, № 1. — P. 50 — 73.

144. Karamata J. Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood / J. Karamata // Mathematica (Cluj). — 1930. — V. 3. — P. 33 — 48.

145. Kozhevnikov A. Complete scale of isomorphisms for elliptic pseudodifferential boundary-value problems / A. Kozhevnikov // J. London Math. Soc. (2). — 2001. — V. 64, № 2. — P. 409–422.

146. Kozlov V. A. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – x+414 p.

147. Lions J.-L. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications / J.-L. Lions // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie. — 1958. — V. 50, № 4. — P. 419 — 432.

148. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, V / J.-L. Lions, E. Magenes // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. — 1962. — V. 16. — P. 1 — 44.

149. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, VI / J.-L. Lions, E. Magenes // J. d'Analyse Math. — 1963. — V. 11. — P. 165 — 188.

150. Lions J.-L. Non-homogeneous boundary-value problems and applications, Vol. II / J.-L. Lions, E. Magenes. — Berlin: Springer, 1972. — x+242 p.

151. Los V. Parabolic problems and interpolation with a function parameter / V. Los, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — V. 19, № 2. — P. 146 — 160.

152. Malgrange B. Sur une classe d'opératuers différentiels hypoelliptiques / B. Malgrange // Bull. Soc. Math. France. — 1957. — V. 85. — P. 283 — 306.

153. Matuszewska W. On a generalization of regularly increasing functions / W. Matuszewska // Studia Math. — 1964. — V. 24. — P. 271 — 279.

154. Maz'ya V. G. Theory of Sobolev multipliers. With applications to differential and integral operators / V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova. — Berlin: Springer, 2009. — xiii+609 p.

155. Merucci C. Interpolation réelle avec fonction paramètre: réitération et applications aux espaces $\Lambda^{\varrho}(\varphi)$ / C. Merucci // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1982. — V. 295, № 6. — P. 427 — 430.

156. Merucci C. Application of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces / C. Merucci // Proc. Lund Conf. 1983. Lecture Notes in Math. V. 1070. — Berlin: Springer, 1984. — P. 183 — 201.

157. Mikhailets V. A. Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — V 14, № 1. — P. 81 — 100.

158. Mikhailets V. A. Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2008. — V. 56, № 3 — 4. — P. 213 — 224.

159. Mikhailets V. A. Elliptic problems and Hörmander spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Operator Theory: Advances and Applications. V. 191. — Basel: Birkhäser, 2009. — P. 447 — 470.

160. Mikhailets V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — **15**, № 1. — P. 31 — 40.

161. Mikhailets V. A. Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps / V. A. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topology. — 2011. — **17**, № 3. — P. 235 — 243.

162. Mikhailets V. A. Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps / V. A. Mikhailets, V. Molyboga // Operator Theory: Advances and Applications. V. 221. — Basel: Birkhäser, 2012. — P. 467 — 478.

163. Mikhailets V. A. The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Banach J. Math. Anal. — 2012. — V. 6, № 2. — P. 211 — 281.

164. Mikhailets V. A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach. — Basel: Birkhäuser, 2014. — xii+297 p.

165. Mikhailets V. A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Results Math. — 2015. — V. 67, № 1. — P. 135 — 152.

166. Murach A. A. Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold / A. A. Мурач // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — V. 14, № 2. — P. 142 — 158.

167. Murach A. A. Extension of some Lions-Magenes theorems // Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — **15**, №. 2. — P. 152 — 167.

168. Murach A. A. Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces / A. A. Murach, I. S. Chepurukhina // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 672 — 691.

169. Murach A. A. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale / A. A. Murach, T. Zinchenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — V. 19, № 1. — P. 29 — 39.

170. Nazarov S. On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations / S. Nazarov, K. Pileckas // J. Reine Angew. Math. — 1993. — V. 438. — P. 103 — 141.

171. Nicola F. Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces / F. Nicola, L. Rodino. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

172. Ovchinnikov V. I. The methods of orbits in interpolation theory / V. I. Ovchinnikov // Math. Rep. — 1984. — V. 1, № 2. — P. 349 — 515.

173. Ovchinnikov V. I. Interpolation orbits in couples of Lebesgue spaces / V. I. Ovchinnikov // Funct Anal Appl. — 2005. — V. 39, № 1. — P. 46 — 56.

174. Paneah B. The oblique derivative problem. The Poincaré problem / B. Paneah. — Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

175. Peetre J. On interpolation functions / J. Peetre // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1966. — V. 27. — P. 167 — 171.

176. Peetre J. On interpolation functions. II / J. Peetre // Acta sci. math. — 1968. — V. 29, № 1. — P. 91 — 92.

177. Persson L.-E. Interpolation with a function parameter / L.-E. Persson // Math. Scand. — 1986. — V. 59, № 2. — P. 199 — 222.

178. Pöschel J. Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps / J. Pöschel // Hamiltonian dynamical systems and applications. — Dordrecht: Springer, 2008. — P. 421 — 430.

179. Roitberg I. Ya. Elliptic boundary value problems for general elliptic systems in complete scales of Banach spaces / I. Ya. Roitberg // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 1998. — V. 102. — P. 231 — 241.

180. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

181. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1999. — x+276 p.

182. Schechter M. Integral inequalities for partial differential equations and functions satisfying general boundary conditions / M. Schechter // Comm. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 1. — P. 37 — 66.

183. Schechter M. Negative norms and boundary problems / M. Schechter // Ann. of Math. (2). — 1960. — V. 72, № 3. — P. 581 — 593.

184. Schechter M. A local regularity theorem / M. Schechter // J. Math. Mech. — 1961. — V. 10, № 2. — P. 279 — 288.

185. Schechter M. On L_p estimates and regularity, I / M. Schechter // Amer. J. Math. — 1963. — V. 85, № 1. — P. 1 — 13.

186. Schechter M. On L_p estimates and regularity, II / M. Schechter // Math. Scand. — 1963. — V. 13, № 1. — P. 47 — 69.

187. Schechter M. On L_p estimates and regularity, III / M. Schechter // Ric. Mat. — 1964. — V. 13. — P. 192 — 206.

188. Schechter M. Complex interpolation // Compos. Math. — 1967. — **18**, no. 1, 2. — P. 117 — 147.

189. Schechter M. Modern methods in partial differential equations / M. Schechter. — New York: McGraw-Hill Inc, 1977. — xv+245 p.

190. Tartar L. An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces / L. Tartar. — Berlin: Springer, 2007. — xxv+219 p.

191. Triebel H. Theory of function spaces. II / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 1992. — viii+370 p.

192. Triebel H. The structure of functions / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+425 p.

193. Triebel H. Theory of function spaces. III / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2006. — xii+426 p.

194. Wloka J. T. Boundary value problems for elliptic systems / J. T. Wloka, B. Rowley, B. Lawruk. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — xiv+641 p.