НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КАРПАЛЮК Тамара Олексіївна

УДК 517.95

СИМЕТРІЙНА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Полтавському національному технічному університеті імені Юрія Кондратюка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
професор
СЄРОВ Микола Іванович,
Полтавський національний
технічний університет
імені Юрія Кондратюка,
завідувач кафедри вищої математики

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України,
професор
Нікітін Анатолій Глібович,
Інститут математики НАН
України,
завідувач відділу прикладних
досліджень;

кандидат фізико-математичних наук, професор
Юрик Іван Іванович,
Національний університет харчових технологій,
професор кафедри вищої математики імені проф. Можара В.І.

Захист відбудеться "17" 05 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "12" 04 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. ПЕЛЮХ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасні наукові дослідження багатьох фізичних, хімічних, біологічних процесів потребують аналізу відповідних математичних моделей. Значна кількість процесів, що відбуваються в природі, моделюються диференціальними рівняннями з частинними похідними або їх системами. Оскільки системи диференціальних рівнянь, які мають прикладне значення, часто є нелінійними, то при їх інтегруванні класичні методи не є дієвими. Саме тому, задача відшукання точних розв’язків нелінійних систем дала поштовх до розвитку нових методів інтегрування диференціальних рівнянь. Одним із таких методів є метод оберненої задачі теорії розсіяння (та ряд споріднених з ними методів), який було розроблено у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) та Р. Міури (R. Miura) на прикладі нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза. Важливу роль у розвитку методів оберненої задачі теорії розсіяння та споріднених із ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь відіграли праці українських математиків, зокрема, Ю. М. Березанського, В. О. Марченка, Л.П. Нижника, Є. Д. Білоколоса, Є. Я. Хруслова та ін.

Серед методів, які з'явилися останнім часом, слід відзначити також асимптотичний та чисельно-аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, у розробку яких свій вагомий внесок зробили А. М. Самойленко, Ю. О. Митропольський, Р.І. Петришин та інші; варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, запропоновані І.О. Луковським; алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, розроблені М.О. Перестюком; асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком; чисельно-аналітичний метод знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, запропонований В.Л. Макаровим, та інші.

При побудові точних розв’язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними часто використовують сучасні теоретико-групові методи, в основі яких лежить метод, започаткований у кінці XIX століття видатним норвезьким математиком Софусом Лі. Він першим застосував алгебру інваріантності диференціального рівняння для теоретико-групової редукції та знаходження його точних розв'язків.

У подальшому ці методи одержали розвиток у роботах багатьох видатних вчених. Так, 1905 року А. Пуанкаре застосував ідеї С. Лі до системи рівнянь Максвела, а 1909 року Г. Бейтман одержав точні розв'язки лінійного хвильового ріняння за допомогою методів симетрійного аналізу, Г. Біркгоф відзначив можливість застосування теорії груп у механіці.

Новий етап розвитку метод Лі одержав у роботах Л.В. Овсяннікова, який розробив теорію інваріантних і частковоінваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Важливі результати в області теоретико-групового аналізу були одержані Дж. Блюманом та Дж. Коулом, У. Міллером, П. Олвером, Н.Х. Ібрагімовим, П. Вінтерніцем. В Україні перші роботи з цієї тематики були опубліковані В. Г. Костенком наприкінці 50-х років минулого століття.

У середині семидесятих років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено суттєвий внесок як у класичні, так і в нові методи дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних досягнень необхідно відзначити розроблений В. І. Фущичем і А. Г. Нікітіним новий метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь, особливість якого полягає в тому, що базисними елементами алгебри інваріантності є інтегро-диференціальні оператори. Такий підхід дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака, Максвела, Ламе, тощо. Новим етапом розвитку симетрійних методів стало введення В.І. Фущичем разом зі своїми учнями: В.І. Чопиком, І.М. Цифрою та М.І. Сєровим поняття *умовної симетрії*, що дало можливість отримати принципово нові симетрії багатьох диференціальних рівнянь, на основі яких знайдено їх точні розв'язки, які не можуть бути отримані стандартним методом Лі. А.Ф. Баранником, Т.А. Баранником, І.І. Юриком запропоновано метод узагальненого відокремлення змінних для нелінійних рівнянь математичної фізики.

Існує тісний зв'язок між симетрією і законами збереження у природі. 1918 року німецьким математиком Е. Нетер була сформульована фундаментальна теорема теоретичної фізики, яка зв'язує закони збереження із симетріями системи. Із теореми випливає: якщо властивості системи не змінюються від деякого перетворення, то цьому відповідає певний закон збереження. Наявність симетрії в системі обумовлює існування для неї фізичної величини, що зберігається. Наприклад, закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, а закон збереження енергії — наслідком однорідності часу. Після того, як робота Е. Нетер стала загальновідомою, багато авторів шукали закони збереження, використовуючи симетрійний підхід, який грунтувався на її результатах.

Отже, симетрія завжди пов'язана зі збереженням і виділяє в навколишньому світі різні інваріанти. Відомо, що усі фізичні закони та явища природи підпорядковуються певним законам симетрії. Наприклад, однорідність простору та часу є інваріантністю відносно перенесення, ізотропія простору — інваріантністю відносно поворотів, рівнозначність усіх інерціальних систем відліку — інваріантністю відносно перетворень Галілея. Таким чином, симетрія у найбільш широкому значенні — це інваріантність явища чи об'єкта відносно деяких його перетворень.

В. І. Фущич зазначав, що для адекватного математичного опису фізичних явищ треба поставити принципи симетрії в основу науки про побудову математичних моделей, а симетрійний принцип у такій науці має відігравати роль правила відбору, який виділяє з множини допустимих математичних моделей (рівнянь) тільки ті, котрі мають широку симетрію. Адже, серед усієї множини диференціальних рівнянь існує порівняно небагато тих, що описують природні явища. Виникає питання: в чому їх особливість. Так, усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь.

Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Так, знання груп симетрії даного рівняння дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих. Важливою є задача про можливі перетворення в класі диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо відома група еквівалентності деякого класу рівнянь, то для конкретного рівняння за її допомогою можна відшукати такі перетворення, щоб модифіковане рівняння мало найбільш просту для дослідження форму.

Оскільки теоеретико-групові методи дають можливість інтегрування диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача повної групової класифікації диференціальних рівянь, що дозволяє із заданого класу рівнянь виділити такі, які володіють широкими симетрійними властивостями. Ще однією важливою задачею є задача виділення із заданого класу рівнянь тих, що допускають у якості групи інваріантності деяку відому групу.

Таким чином, розвиток методів групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення при розв'язуванні тих диференціальних рівнянь чи систем, для яких інші методи є неефективними.

Розв'язанню таких актуальних задач стосовно систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та конвекції-дифузії і присвячена дана дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано згідно з загальним планом досліджень кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Дисертаційну роботу виконано в рамках науково-дослідницьких робіт, що розроблялися кафедрою вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка за рахунок видатків загального фонду державного бюджету, “Симетрійний аналіз нелінійних рівнянь математичної фізики” (номер державної реєстрації 0104U000320), “Класифікація симетрійних властивостей та знаходження деяких класів точних розв’язків нелінійних рівнянь математичної фізики” (номер державної реєстрації 0109U001520), “Дослідження галілеївської інваріантності систем нелінійних рівнянь математичної фізики еволюційного типу” (номер державної реєстрації 0112U002321).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є виділення з класу систем реакції-конвекції-дифузії та конвекції-дифузії таких, що допускають інваріантність відносно алгебр Галілея та їх розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

Об'єктом дослідження є система рівнянь реакції-конвекції-дифузії та системи рівнянь конвекції-дифузії.

Предметом дослідження є класифікація ліївських симетрій систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії та конвекції-дифузії.

Методи дослідження. Для виділення із заданого класу рівнянь реакції-конвекції-дифузії та конвекції-дифузії таких, які допускають інваріантність відносно алгебр Галілея та їх розширень, використано класичний метод Лі. Основні перетворення еквівалентності знайдено з використанням інфінітезимального підходу, запропонованого в роботах І. С. Ахатова, Р.К. Газізова, Н. Х. Ібрагімова та В. І. Лагна, С. В. Спічака, В. І. Стогнія.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну дисертації, виносяться на захист і отримані вперше, є такі:

1. Встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, які інваріантні відносно алгебри Галілея без центрального розширення.

2. Досліджено найбільш загальний вигляд нелінійностей, при яких система рівнянь реакції-конвекції-дифузії інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея без центрального розширення.

3. Знайдено нелінійності, при яких система рівнянь реакції-конвекції-дифузії інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея без центрального розширення.

4. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності та основну алгебру інваріантності n-вимірної системи рівнянь конвекції-дифузії у випадку m-вимірного векторного поля U, також знайдено необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора інваріантності цієї системи.

5. Встановлено вигляд системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії, яка інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку двовимірного векторного поля U та двох просторових змінних.

6. Знайдено вигляд нелінійностей, при яких одновимірна та двовимірна системи рівнянь конвекції-дифузії інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку $U \in R^3$.

7. Вказано спосіб узагальнення трикомпонентної системи рівнянь конвекції-дифузії у випадку однієї та двох просторових змінних, інваріантної відносно узагальненої алгебри Галілея, до системи, яка є аналогом системи рівнянь Нав'є-Стокса при $m \neq n$.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь, теорії теплопровідності, дифузії, гідродинаміки, газової динаміки та деяких інших.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — М.І. Сєрову. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

У роботах, які опубліковано разом із іншими авторами та включено до автореферату, особистий внесок дисертанта наступний. У роботах [2-9] М. І. Сєрову належить загальна постановка задач і аналіз отриманих результатів. У роботі [2] дисертанту належить класифікація лінійних зображень алгебр Галілея та її застосування для дослідження симетрійних властивостей системи конвекції-дифузії, Л. М. Блажко належить класифікація лінійних зображень алгебр Пуанкаре і конформної та її застосування для дослідження симетрійних властивостей системи квазілінійних хвильових рівнянь. У роботі [3] дисертанту належить розробка алгоритму дослідження Q-умовної еквівалентності, І. В. Рассосі — дослідження Q-умовної еквівалентності та її застосування до задачі групової класифікації. У статті [4] дисертанту належить виділення із класу одновимірних систем конвекції-дифузії при $U \in R^3$ таких, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, М.І. Сєрову — уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів із попередніми дослідженнями. У статті [5] дисертанту належить узагальнення трикомпонентних систем конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебр $AG_2(1,1)$ та $AG_2(1,2)$, до систем, що є аналогами системи рівнянь Нав'є-Стокса при $m \neq n$, М. М. Сєровій — уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів з попередніми дослідженнями. У роботі [6] дисертанту належить знаходження систем реакції-конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень, О.Г. Плюхіну — відшукання перетворень еквівалентності системи та перевірка складних технічних обчислень. У роботі [7] дисертанту належить відшукання систем реакції-конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень, а також — точних розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, І.В. Рассосі належить знаходження систем реакції-конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебр Галілея з центральним розширенням, О.Г. Плюхіну — відшукання перетворень еквівалентності системи та геометрична інтерпретація отриманих розв'язків системи рівнянь Ван-дер-Ваальса. У роботі [8] дисертанту належить знаходження основної алгебри інваріантності, перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії при $U \in R^2$ та розбиття класу системи рівнянь конвекції-дифузії на підкласи нееквівалентних між собою систем відносно знайдених перетворень, М.І. Сєрову — уточнення формулювань теорем та перевірка складних технічних обчислень. У роботі [9] дисертанту належить знаходження систем конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебр $AG_2(1,\ 1)$, $AG_2(1,\ 2)$, О. М. Омеляну — знаходження систем реакції-дифузії, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, М. М. Сєровій належить узагальнення однієї з систем конвекції-дифузії, інваріантної відносно алгебри $AG_2(1,\ 1)$, до системи, що є аналогом системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, на наукових конференціях науково-педагогічного колективу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, 2003-2009р., 2012р.), на ІІ Всеукраїнському науковому семінарі "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи" (м. Полтава, 2011р.), на семінарах відділу прикладних досліджень і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на Українському математичному конгресі до 100-річчя від дня народження М. М. Боголюбова (м. Київ, 2011 р.), на Міжнародній науковій конференції, присвяченій 70-річчю В. В. Маринця (м. Ужгород, 2012 р.), на Міжнародному семінарі на честь професора В. І. Фущича "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (м.Київ, 2013 р.), на 15-й Міжнародній науковій конференції імені акад. Михайла Кравчука, (м. Київ, 2014 р.).

Публікації. Основні результати дисертації відображені в десяти публікаціях, з них: 2 роботи [1, 10] написано без співавторів; 7 статей [1-7] у провідних наукових фахових виданнях, що затверджені Міністерством освіти і науки України; з них 2 статті [2, 7] опубліковано в журналах, які індексуються в бібліографічній базі Scopus; 1 тези доповідей [9] на всеукраїнській і 1 тези доповідей [10] на міжнародній конференціях.

Структура дисертації. Робота викладена на 135 сторінках друкованого тексту, складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури, що містить 148 найменувань, та додатків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми, проаналізовано сучасний стан розглянутих проблем, сформульовано задачі дослідження та коротко викладено основні результати роботи.

У **першому розділі** обгрунтовано вибір напрямку досліджень і здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації. Також описано основні етапи розвитку наукової думки щодо групового аналізу диференціальних рівнянь та подано огляд праць, які стосуються цієї проблеми.

У **другому розділі** розв'язано задачу побудови за заданою групою перетворень математичної моделі (системи рівнянь), яка володіє зазначеною симетрією. Ця задача розглядається стосовно системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії:

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U), \tag{1}$$

де $U = \binom{u^1}{u^2}$, $u^a = u^a(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $F(U) = \left(f^{ab}(U)\right)$, $G(U) = \left(g^{ab}(U)\right)$, – довільні функціональні матриці розмірності 2×2, $H(U) = \left(h^a(U)\right)$ — довільна функціональна матриця розмірності 2×1, $a, b \in \{1,2\}$, нижній індекс функції означає диференціювання за відповідною змінною, верхній індекс — номер функції, нижні індекси незалежних змінних чи сталих також означають їх номери.

Система (1) при конкретних значеннях нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$ застосовується при моделюванні різних процесів фізики, хімії, біології, екології. Так, модифікації системи (1) застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури та густини в термоядерній плазмі, при описі процесів переносу в організмі, наприклад, при моделюванні переносу кисню в кровоносній системі. Одним із застосувань системи (1) в екології є дослідження процесів розповсюдження речовини, що забруднює водойми. У біології система рівнянь реакції-адвекції-дифузії описує модель спільноти хижак-жертва, переміщення в колоніях бактерій під дією різних чинників та ін. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Математична модель цього явища також включає в себе систему рівнянь реакції-конвекції-дифузії. При переході в системі (1) до комплексної змінної можна одержати моделі, що описують рух квантової частинки (рівняння Шредінгера), стан надпровідника в зовнішньому магнітному полі (рівняння Гінзбурга-Ландау) та магнітогідродинамічні хвилі в плазмі.

Симетрійні властивості систем класу (1) вивчались багатьма авторами. Серед найвагоміших результатів можна виділити роботи А.Г. Нікітіна та Р. Вілтшира, Р. М. Черніги та М. І. Сєрова, Р. М. Черніги та Дж. Кінга, М.І. Сєрова та І.В. Рассохи. Але повну групову класифікацію нелінійних систем класу (1) досі не проведено.

У першому підрозділі цього розділу наведено максимальну групу локальних неперервних перетворень еквівалентності системи (1):

$$x_0' = d_0 x_0 + q_0,\ x_1' = d_1 x_1 + q x_0 + q_1,\ u^{a'} = k_{ab} u^b + l_a, \quad (2)$$

де $d_0, d_1, q, q_0, q_1, k_{ab}, l_a$ — довільні сталі, $a, b \in \{1,2\}$, а також систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} системи (1).

У другому підрозділі знайдено реалізацію алгебри Галілея:

$$AG(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1,\ G = x_0\partial_1 + Q_1 \rangle, \quad (3)$$

де оператор Q_1 набуває вигляду $Q_1 = (\alpha_{1ab} u^b + \beta_{1a})\partial_{u^a}$, α_{1ab}, β_{1a} – const, $a, b \in \{1,2\}$, а також знайдено необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора інваріантності X системи (1).

У третьому підрозділі з точністю до перетворень еквівалентності (2) встановлено 5 можливих нееквівалентних виглядів нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, за яких система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея (3).

У четвертому підрозділі знайдено зображення розширеної алгебри Галілея для системи (1)

$$AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1,\ G = x_0\partial_1 + Q_1,\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2 \rangle, \quad (4)$$

де оператори Q_1, Q_2 задовольняють умову

$$[Q_1,\ Q_2] = -Q_1. \quad (5)$$

Крім того, встановлено 6 нееквівалентних відносно перетворень еквівалентності (2) зображень алгебри (4).

У п’ятому підрозділі з точністю до перетворень еквівалентності (2) вказано 8 можливих нееквівалентних виглядів нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$, за яких система (1) інваріантна відносно алгебри (4).

У шостому підрозділі встановлено, що реалізація узагальненої алгебри Галілея для системи (1) має вигляд

$$\begin{gathered} AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1,\ G = x_0\partial_1 + Q_1,\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0 x_1\partial_1 + x_1 Q_1 + x_0 Q_2 + Q_3 \rangle, \end{gathered} \quad (6)$$

де оператори Q_s повинні задовольняти умови (5) та

$$[Q_1, Q_3] = 0,\ [Q_2, Q_3] = 2Q_3. \quad (7)$$

Також доведено теорему, в якій прокласифіковано зображення цієї алгебри: наведено 8 нееквівалентних відносно перетворень (2) зображень алгебри (6) у випадку двовимірного векторного поля U.

Варто підкреслити важливість результатів, отриманих у сьомому підрозділі, де з точністю до перетворень еквівалентності (2) виписано всі можливі вигляди систем (1), інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея (6).

Теорема 1. *Система рівнянь (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (6) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності (2) набуває одного з виглядів:*

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}(u^2)^{k-1}\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right] + \begin{pmatrix}0 & \mu_{12}(u^2)^{2k-1}\\ -\dfrac{u^2}{k} & \mu_{22}(u^2)^k\end{pmatrix}U_1 + \begin{pmatrix}\nu_1(u^2)^{3k}\\ \nu_2(u^2)^{2k+1}\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{k}u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$, $k \neq 0; 1$;

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right] + \begin{pmatrix}0 & \mu_{12}\\ -1 & \mu_{22}\end{pmatrix}u^2 U_1 + \begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}(u^2)^3, \qquad (9)$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -I$, $Q_3 = 0$;

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}U_1\right], \qquad (10)$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1}$, $Q_3 = 0$;

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})\ln u^2\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right] + \qquad (11)$$
$$+\begin{pmatrix}1 & \mu_{12} + (1-\mu_{22})\ln u^2 + \ln^2 u^2\\ -1 & \mu_{22} - 2\ln u^2\end{pmatrix}u^2 U_1 + \begin{pmatrix}\nu_1 - \nu_2\ln u^2\\ \nu_2\end{pmatrix}(u^2)^3,$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -I + u^2\partial_{u^1}$, $Q_3 = 0$;

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right] + \begin{pmatrix}0 & \mu_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_1 + \begin{pmatrix}0\\ -(u^2)^2\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$;

$$U_0 + u^1 U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix}k(k\nu_2+1) & 0\\ (k(k\nu_2+1) - \lambda_{22})u^1 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right] + \qquad (13)$$
$$+\begin{pmatrix}-\mu_{12}u^1 & \mu_{12}\\ -2(k\nu_2+1)\omega - \mu_{12}(u^1)^2 & \mu_{12}u^1\end{pmatrix}U_1 + \begin{pmatrix}0\\ \nu_2\omega^2\end{pmatrix},$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = k\partial_{u^2}$, $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$, $k \neq 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} -\lambda_{12}u^1 & \lambda_{12} \\ -\lambda_{12}(u^1)^2 - 2\lambda_{12}\omega - \lambda_{22}\sqrt{\omega}u^1 & \lambda_{22}\sqrt{\omega} + \lambda_{12}u^1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\omega}}U_1\right] +$$

$$+\begin{pmatrix} -(\mu_{12}+1)u^1 & \mu_{12} \\ -\mu_{12}(u^1)^2 - 2\omega - \mu_{22}\sqrt{\omega}u^1 & \mu_{22}\sqrt{\omega} + (\mu_{12}-1)u^1 \end{pmatrix}U_1 + \tag{14}$$

$$+\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2\sqrt{\omega} + \nu_1 u^1 \end{pmatrix}\sqrt{\omega^3},$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$, $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$;

$$U_0 + \frac{u^2}{u^1}U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21}(u^1)^k + 2\lambda_{11}\frac{u^2}{u^1} & -\lambda_{11} \end{pmatrix}U_1\right] +$$

$$+\begin{pmatrix} \mu_{11}(u^1)^k + \frac{1}{k}\frac{u^2}{u^1} & -\frac{1}{k} \\ \left(\mu_{21}(u^1)^k + \mu_{11}\frac{u^2}{u^1}\right)(u^1)^k + \frac{1}{k}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 & -\frac{1}{k}\frac{u^2}{u^1} \end{pmatrix}U_1 + \tag{15}$$

$$+\begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2(u^1)^{k+1} + \nu_1 u^2 \end{pmatrix}(u^1)^{2k},$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -\frac{k+1}{k}I + u^1\partial_{u^1}$, $Q_3 = 0$, $k \neq 0$;

$$U_0 + u^1U_1 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}e^{-u^2} \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}U_1\right] + \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12}e^{-2u^2} \\ 1 & \mu_{22}e^{-u^2} \end{pmatrix}U_1 + \begin{pmatrix} \nu_1 e^{-3u^2} \\ \nu_2 e^{-2u^2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$;

$$U_0 = \partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \frac{\lambda_{21} + 2\lambda_{11}(u^2 - \ln u^1)}{u^1} & -\lambda_{11} \end{pmatrix}U_1\right] +$$

$$+\begin{pmatrix} \mu_{11} - 2(u^2 - \ln u^1) & u^1 \\ \frac{\mu_{21} + (\mu_{11}-1)(u^2 - \ln u^1) - (u^2 - \ln u^1)^2}{u^1} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{u^1}U_1 + \tag{17}$$

$$+\begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2 + \nu_1(u^2 - \ln u^1) \end{pmatrix}\frac{1}{(u^1)^2},$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$,

$$U_0 + \frac{u^2}{u^1} U_1 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \dot{\theta} & 0 \\ \frac{u^2}{u^1}\left(\frac{\theta}{u^1} + \dot{\theta}\right) & -\frac{\theta}{u^1} \end{pmatrix} U_1 \right], \tag{18}$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}, Q_2 = -u^2\partial_{u^2}, Q_3 = 0$.

У системах (8)-(18) $k,\ \lambda_{ab},\ \mu_{ab},\ \nu_a,$ *— const,* $\theta = \theta(u^1),\ \varphi = \varphi(u^2)$ *—* довільні гладкі функції своїх аргументів.

Зауважимо, що частинним випадком системи (9) є система рівнянь Ван-дер-Ваальса:

$$u_0^1 + u^1 u_1^1 = \lambda_{11} u_{11}^1 + \mu_{12} u^2 u_1^2,$$
$$u_0^2 + u^1 u_1^2 = \lambda_{22} u_{11}^2 - u^2 u_1^1,$$

яка ефективно застосовується при описі процесів молекулярно-кінетичної теорії газів і рідин.

Таким чином, у даному розділі в класі систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії (1) виділено ті, які володіють симетрійними властивостями, характерними для систем, що описують процеси, підпорядковані принципу відносності Галілея. Тому одержані системи більшою мірою, ніж інші, претендують на опис таких фізичних процесів.

Третій розділ присвячено дослідженню системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U) U_i, \tag{19}$$

де $U \in R^m,\ x = (x_0, \vec{x}),\ \vec{x} \in R^n,\ F^i(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m,\ i = \overline{1,n}$, за індексами, що повторюються, проводиться підсумовування.

У першому підрозділі цього розділу наведено максимальну групу локальних неперервних перетворень еквівалентності системи (19):

$$x_0' = 2\sigma x_0 + \sigma_0,\ x_i' = \sigma x_i + q_{ij} x_j + d_i x_0 + \sigma_i,\ u^{a\prime} = k_{ab} u^b + l_a, \tag{20}$$

де $\sigma, \sigma_0, \sigma_i, d_i, k_{ab}, l_a, q_{ji} = -q_{ij}$ — const, $a, b = \overline{1,m},\ \ i, j = \overline{1,n},$ а також систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності системи (19).

Теорема 2. *Основною алгеброю інваріантності системи (19) є алгебра*

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle.$$

Також у цьому підрозділі сформульовано необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора інваріантності системи:

$$X = \xi^0(x,u)\partial_0 + \xi^a(x,u)\partial_a + \eta^a(x,u)\partial_{u^a}. \tag{21}$$

Теорема 3. *Якщо система (19) інваріантна відносно інфінітезимального оператора (21) то даний оператор має вигляд*

$$X = 2A(x_0)\partial_0 + \left[\dot{A}(x_0)x_i + c^{ij}(x_0)x_j + c^i(x_0)\right]\partial_i + [\alpha^{ab}(x)u^b + \beta^a(x)]\partial_{u^a},$$

де A, $c^{ji} = -c^{ij}$, c^i, α^{ab}, β^a — *довільні гладкі функції своїх аргументів,* $a, b = \overline{1, m}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Другий підрозділ цього розділу присвячено дослідженню інваріантності двовимірної системи (19) у випадку двовимірного векторного поля U відносно узагальненої алгебри Галілея.

Отримано реалізацію узагальненої алгебри Галілея для двовимірної системи (19)

$$\langle \partial_0,\ \partial_i,\ G_i = x_0\partial_i + Q_i, J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3,$$
$$D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_4, \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_iQ_i + x_0Q_4 + Q_5\rangle, \quad (22)$$

де оператори Q_s задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$[Q_1, Q_2] = 0, [Q_1, Q_3] = Q_2, [Q_2, Q_3] = -Q_1, [Q_i, Q_4] = -Q_i, [Q_3, Q_4] = 0,$$
$$[Q_i, Q_5] = [Q_3, Q_5] = 0, \qquad [Q_4, Q_5] = 2Q_5, \qquad i = 1,2,$$

та встановлено, що з точністю до перетворень еквівалентності (20) при $m = n = 2$ існує єдине зображення цієї алгебри, яке визначається операторами

$$Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -u^a\partial_{u^a}, \ Q_5 = 0. \quad (23)$$

Серед результатів, отриманих у цьому підрозділі, найвагомішими є результати, сформульовані в наступній теоремі.

Теорема 4. *З точністю до перетворень еквівалентності (20) система рівнянь (19) у разі* $m = n = 2$ *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (22) тоді і тільки тоді, коли нелінійності набувють вигляду:*

$$F^{abi} = -\delta_{ab}u^i,$$

де $a, b, i \in \{1, 2\}$, *при цьому узагальнену алгебру Галілея визначають оператори (23).*

Отже, у класі систем (19) за умови $m = n = 2$ існує єдина система рівнянь, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (22), і вона співпадає з класичною системою рівнянь Бюргерса:

$$\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u},$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$.

У третьому підрозділі цього розділу досліджено систему (19) у випадку тривимірного векторного поля U та двох просторових змінних. Прокласифіковано зображення алгебри Галілея та узагальненої алгебри Галілея для $U \in R^3$ і отримано, відповідно, 10 і 12 нееквівалентних відносно перетворень еквівалентності (20) зображень цих алгебр.

Серед результатів цього підрозділу варто підкреслити важливість результатів, сформульованих у наступній теоремі.

Теорема 5. *З точністю до перетворень еквівалентності (20) система (19) у випадку* $m = 3$, $n = 2$ *інваріантна відносно алгебри (22) тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з наступних виглядів:*

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u},$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\frac{s}{2}\left(u_1^1 - u_2^2\right) + lu_2^2 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \tag{24}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + lu^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$, $l \neq 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u},$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + \sin\left(\frac{2}{s}\ln u^3\right)\vec{D}\vec{u} + \cos\left(\frac{2}{s}\ln u^3\right)\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \tag{25}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}, Q_4 = -I_{12}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u} + (u^3)^{-\frac{2}{s}-1}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right),$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\frac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \tag{26}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -I_{12} + su^3\partial_{u^3}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u},$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \psi\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \tag{27}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -I_{12}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u} + e^{-2u^3}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right),$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \tag{28}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -I_{12} + \partial_{u^3}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u},$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \frac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \tag{29}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}, Q_4 = -I_{12} + s\partial_{u^3}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u},$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + \sin 2u^3\,\vec{D}\vec{u} + \cos 2u^3\,\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \tag{30}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}, Q_4 = -I_{12}, Q_5 = 0$;

$$\vec{u}_0 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \Delta\vec{u} + \vec{L}\omega,$$
$$u_0^3 + \left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u^3 = \Delta u^3 + \left(\vec{u}\vec{L}\right)\omega - \omega\vec{\nabla}\vec{u}, \tag{31}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i} + u^i\partial_{u^3}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -I - u^3\partial_{u^3}, Q_5 = 2\partial_{u^3}$.

У системах (24)-(31) $\omega = u^3 - \frac{\vec{u}^2}{2}$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{L} = \lambda_1\vec{\nabla} + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$, $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$, $\vec{\nabla}^{\perp} = (\partial_2, -\partial_1)$, $\vec{D} = \left(\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp}, \vec{c}\vec{\nabla}\right)$, $\vec{D}^{\perp} = \left(\vec{c}\vec{\nabla}, -\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp}\right)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $c_i, \lambda_a, \lambda, l, s \neq 0$ — *довільні сталі,* $\psi = \psi(u^3)$ — *довільна гладка функція,* $i \in \{1,2\}$, $a = \overline{1,3}$.

Отже, у класі систем (19) при $m = 3, n = 2$ існує 8 систем рівнянь, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея (22), і вони наведені в теоремі 5.

У четвертому підрозділі третього розділу досліджено інваріантність системи (19) відносно узагальненої алгебри Галілея (6) у випадку тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної. Результати досліджень викладено у наступній теоремі.

Теорема 6. *З точністю до перетворень еквівалентності (20) система (19) за умови* $m=3$, $n=1$ *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (6) тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з виглядів:*

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1 w_1^1 = w_{11}^1 + \lambda_{12} w_1^2 + \lambda_{13}(w^3)^{2l-1} w_1^3 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1 w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2 w_1^1 + \lambda_{22}(w^3)^l w_1^2 + \lambda_{23}(w^3)^{3l-1} w_1^3 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1 w_1^3 = w_{11}^3 - \frac{1}{l} w^3 w_1^1 + \lambda_{32}(w^3)^{1-l} w_1^2 + \lambda_{33}(w^3)^l w_1^3 + G^3, \end{aligned} \tag{32}$$

де λ_{ab} *— довільні сталі,* $l \neq 0$ *— стала, значення якої, а також функцій* w^a, G^a *подані в таблиці 3.3 дисертації, при цьому*

$Q_1 = \partial_{w^1}, Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} - \frac{1}{l} w^3 \partial_{w^3}, Q_3 = \partial_{w^2};$

або

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1 w_1^1 = w_{11}^1 + \psi w_1^2 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1 w_1^2 = w_{11}^2 - 2w^2 w_1^1 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1 w_1^3 = w_{11}^3 + G^3, \end{aligned} \tag{33}$$

де $\psi = \psi(w^3)$ *— довільна функція, значення* w^a, G^a *подані в таблиці 3.4 дисертації, при цьому*

$Q_1 = \partial_{w^1}, Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2}, Q_3 = \partial_{w^2};$

або

$$\begin{aligned} &w_0^1 + w^1 w_1^1 = w_{11}^1 + (w^2)^{2l-1}\psi^{12} w_1^2 + (w^2)^{2l}\psi^{13} w_1^3 + G^1,\\ &w_0^2 + w^1 w_1^2 = w_{11}^2 - \frac{1}{l} w^2 w_1^1 + (w^2)^l \psi^{22} w_1^2 + (w^2)^{l+1}\psi^{23} w_1^3 + G^2,\\ &w_0^3 + w^1 w_1^3 = w_{11}^3 + (w^2)^{l-1}\psi^{32} w_1^2 + (w^2)^l \psi^{33} w_1^3 + G^3, \end{aligned} \tag{34}$$

де $\psi^{ab} = \psi^{ab}(w^3)$ *— довільні функції,* $l \neq 0$ *— стала, значення якої, а також функцій* w^a, G^a *подані в таблиці 3.5 дисертації, при цьому*

$Q_1 = \partial_{w^1}, Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - \frac{1}{l} w^2\partial_{w^2}, Q_3 = 0.$

П’ятий підрозділ цього розділу присвячено узагальненню одержаних систем конвекції-дифузії у випадку тривимірного векторного поля U до систем, які є аналогами системи Нав’є-Стокса при $n \neq m$, де n — кількість незалежних просторових змінних, m — розмірність векторного поля U.

У випадку тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної узагальнено систему (33) з функціями w^a, G^a із другого пункту таблиці 3.4 дисертації до наступної системи:

$$
\begin{aligned}
&u_0^1+u^1u_1^1-u_{11}^1-\psi\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)_1=0,\\
&u_0^2+u^1u_1^2-u_{11}^2-\psi u^1\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)_1+2\left(u^2-\frac{(u^1)^2}{2}\right)u_1^1=\frac{c_1\rho^2}{\dot f(\rho)}p_1,\\
&u_0^3+u^1u_1^3-u_{11}^3=\frac{c_2}{\dot f(\rho)}p_1,\\
&\rho_0+(u^1\rho)_1+\lambda(u^3\rho^2)_1=0,\\
&p=f(\rho),
\end{aligned}
\tag{35}
$$

де $\psi=\psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i $(i=1{,}2)$ — довільні сталі. Доведено, що вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої мають вигляд:

$$\partial_0,\partial_1,G=x_0\partial_1+\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2},D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}-\rho\partial_\rho,$$

$$\Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_1\partial_1+x_1(\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2})-x_0\left(u^1\partial_{u^1}+2u^2\partial_{u^2}+\rho\partial_\rho\right)+\partial_{u^2}.$$

У випадку тривимірного векторного поля U та двох просторових змінних узагальнено систему (27) до системи:

$$
\begin{aligned}
&u_0^a+u^bu_b^a-\Delta u^a=\frac{\delta_{ab}c_1+\varepsilon_{ab}c_2}{\dot f(\rho)}p_b,\\
&u_0^3+u^bu_b^3-\Delta u^3-\varphi\varepsilon_{ab}u_b^a=0,\\
&\rho_0+(\rho u^a)_a=0,\\
&p=f(\rho),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

де $\varepsilon=(\varepsilon_{ab})=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\varphi=\varphi(u^3)$ — довільна гладка функція, c_i — довільні сталі. Доведено, що вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої мають вигляд:

$$\partial_0,\partial_i,G_i=x_0\partial_i+\partial_{u^i},J_{12}=x_1\partial_2-x_2\partial_1+u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1},\ D=2x_0\partial_0+$$

$$+x_i\partial_i-u^i\partial_{u^i}-2\rho\partial_\rho,\ \ \Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_i\partial_i+x_i\partial_{u^i}-x_0\left(u^i\partial_{u^i}+2\rho\partial_\rho\right).$$

Системи (35), (36) пропонуються нами в якості аналогів системи рівнянь Нав'є–Стокса при різній розмірності векторного поля U та кількості незалежних просторових змінних. Важливо, що при цьому зберігається інваріантність отриманих систем відносно узагальненої алгебри Галілея.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати наступним чином:

1. З точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$, розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ та узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$.

2. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії у випадку m-вимірного векторного поля U та n незалежних просторових змінних.

3. З точністю до перетворень еквівалентності встановлено, при яких значеннях нелінійностей двовимірна система рівнянь конвекції-дифузії у випадку $U \in R^2$ інваріантна відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

4. Знайдено всі двовимірні системи рівнянь конвекції-дифузії у випадку $U \in R^3$, інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

5. Досліджено інваріантність системи рівнянь конвекції-дифузії у випадку тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

6. Здійснено узагальнення деяких трикомпонентних систем рівнянь конвекції-дифузії, інваріантних відносно узагальнених алгебр Галілея, до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є-Стокса у випадку $n \neq m$, зі збереженням інваріантності отриманих систем відносно вказаних алгебр.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Жадан Т. О. (тепер Карпалюк Т. О.) Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. / Т.О. Жадан // Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. — 2004. — В.12. — С. 70-75.
2. Сєров М. І. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування / М. І. Сєров, Т. О. Жадан (тепер Т. О. Карпалюк), Л. М. Блажко // УМЖ. — 2006. — Т. 58, № 8. — С. 1128-1145.
3. Сєров М. І. Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь за допомогою перетворень Q-умовної еквівалентності / М. І. Сєров, І. В. Рассоха, Т. О. Карпалюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — Т. 4, № 3. — С. 232-246.
4. Сєров М. І. Інваріантність системи рівнянь конвекції-дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля. / М. І. Сєров, Т. О. Карпалюк // Математичний вісник НТШ. — Київ. — 2010. — Т. 7. — С. 267-288.
5. Сєров М. І. Застосування принципів симетрії для узагальнення системи рівнянь Нав’є-Стокса. / М. І. Сєров, М. М. Сєрова, Т.О. Карпалюк // Науковий вісник Ужгородського університету. — Ужгород. — 2012. — В. 23, № 2. — С. 149-159.

6. Сєров М. І. Системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея. / М. І. Сєров, Т. О. Карпалюк, О. Г. Плюхін // Буковинський математичний журнал. — Чернівці. — 2013 — Т. 1, № 1-2. — С. 125-135.
7. Serov M. I. Systems of reaction-convection-diffusion equations invariant under Galilean algebras. / M. I. Serov, T. O. Karpaliuk, O. G. Pliukhin, I.V. Rassokha. / J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V.422. — P.185-211.
8. Сєров М.І. Симетрійна класифікація двовимірної системи нелінійних рівнянь конвекції дифузії (частина 1) / М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк // Збірник праць ІІ Всеукраїнського наукового семінару "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи", 19-20 жовтня 2011р. — Полтава, 2012. — С. 99-111.
9. Сєров М. І. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії [Електронний ресурс] / М. І. Сєров, М.М. Сєрова, О. М. Омелян, Т. О. Карпалюк // Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). — Київ. — 2009. — Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Serov.pdf
10. Карпалюк Т. О. Узагальнення тривимірної системи рівнянь конвекції-дифузії до системи типу Нав’є-Стокса / Т. О. Карпалюк // Матеріали 15-ї Міжнародної наукової конференції імені акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ: НТУУ "КПІ". — 2014 р. — С. 135-136.

АНОТАЦІЇ

Карпалюк Т.О. «Симетрійна класифікація нелінійних рівнянь конвекції-дифузії відносно алгебр Галілея». — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії та реакції-конвекції-дифузії.

З точністю до групи локальних неперервних перетворень еквівалентності системи встановлено нелінійні системи рівнянь класу реакції-конвекції-дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних і проективних перетворень. Знайдено двовимірні системи рівнянь конвекції-дифузії, інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея у випадках двовимірного та тривимірного векторного поля U, а

також одновимірні системи рівнянь конвекції-дифузії для $U \in R^3$, інваріантні відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень. Здійснено узагальнення деяких трикомпонентних систем рівнянь конвекції-дифузії, інваріантних відносно узагальнених алгебр Галілея, до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є-Стокса у випадку $n \neq m$, зі збереженням інваріантності отриманих систем відносно вказаних алгебр.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, алгебра Лі, група еквівалентності, система рівнянь реакції-конвекції-дифузії, система рівнянь конвекції-дифузії.

Карпалюк Т.А. «Симметрийная классификация нелинейных уравнений конвекции-диффузии относительно алгебр Галилея». — Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию симметрийных свойств систем нелинейных уравнений конвекции-диффузии и реакции-конвекции-диффузии.

При построении точных решений систем нелинейных диференциальных уравнений в частных производных используют современные теоретико-групповые методы, основанные на классическом методе Ли. Групповые методы являются одними из современных методов, которые позволяют находить преобразования эквивалентности в классе дифференциальных уравнений; находить решения дифференциальных уравнений, имеющих нетривиальные группы инвариантности; генерировать новые решения, имея уже известные и т. п.

Одной из задач, рассмотренных в диссертации, является задача выделения из класса систем нелинейных уравнений реакции-конвекции-диффузии таких, которые инвариантны относительно алгебры Галилея и ее расширений. Для решения этой проблемы указано группу непрерывных преобразований эквивалентности системы, основную алгебру инвариантности, найдена реализация алгебры Галилея и ее расширений операторами масштабных и проэктивных преобразований. Получена классификация представлений алгебр Галилея без центрального расширения относительно преобразований эквивалентности системы. С точностью до непрерывных преобразований эквивалентности установлены системы нелинейных уравнений класса реакции-конвекции-диффузии, инвариантные относительно алгебры Галилея и её расширений операторами масштабных и проэктивных преобразований. В силу своих симметрийных свойств полученные системы

могут быть использованы при моделировании реальных физических процессов.

Кроме того, в диссертации рассматривается класс нелинейных систем конвекции-диффузии. Для n −мерной системы в случае m −мерного векторного поля U найдены группа непрерывных преобразований эквивалентности, основная алгебра инвариантности. В случае одной и двух пространственных переменных построены реализации обобщенных алгебр Галилея, для обоих случаев получена классификация неэквивалентных представлений соответствующих алгебр относительно преобразований эквивалентности системы. С точностью до непрерывных преобразований эквивалентности установлены двумерные системы уравнений конвекции-диффузии, инвариантные относительно обобщённой алгебры Галилея, для случая двумерного и трёхмерного векторного поля U, а также одномерные системы уравнений конвекции-диффузии для $U \in R^3$, инвариантные относительно алгебры Галилея, расширенной операторами масштабных и проэктивных преобразований. Выполнено обобщение некоторых трикомпонентных систем уравнений конвекции-диффузии, инвариантных относительно обобщённых алгебр Галилея, к системам, которые являются аналогами системы уравнений Навьє-Стокса в случае $n \neq m$, с сохранением инвариантности полученных систем относительно указанных алгебр.

Ключевые слова: симметрия, инвариантность, алгебра Ли, группа эквивалентности, система уравнений реакции-конвекции-диффузии, система уравнений конвекции-диффузии.

Karpalyuk T.O. “Symmetry classification of nonlinear convection-diffusion equations in the case of Galilean algebras”. — Manuscript.

Ph.D. thesis in physics and mathematics, specialty 01.01.02 - differential equations. - Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis focuses on the research of symmetry properties of systems of nonlinear convection-diffusion and reaction-convection-diffusion equations.

Nonlinear systems of reaction-convection-diffusion equations, which are invariant in respect to a Galilean algebra and some extensions of this algebra with scale and projective operators, were established up to groups of local continuous equivalence transformation of the systems.

Two-dimensional systems of convection-diffusion equations, which are invariant with respect to a generalized Galilean algebra at a two- and three-dimensional vector field U, were found. Also one-dimensional systems of convection-diffusion equations at $\in R^3$, which are invariant with respect to a Galilean algebra, extended by scale and projective operators, were detected.

Some three-component systems of convection-diffusion equations, which are invariant in respect to generalized Galilean algebras, were generalized to systems, which are analogues of the Navier-Stokes system at $n \neq m$, still keeping invariance of the received systems in respect of the same algebras.

Keywords: symmetry, invariance, Lie algebra, equivalence group, system of of reaction-convection-diffusion equations, system of convection-diffusion equations.