Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка

На правах рукопису

КАРПАЛЮК Тамара Олексіївна

УДК 517.9

СИМЕТРІЙНА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
СЄРОВ Микола Іванович

Полтава — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n, грецькими — від 0 до n. За індексами, що повторюються, проводиться підсумовування. Нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною, а верхній індекс — номер функції, нижні індекси сталих чи змінних також означають їх номери.

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел

$\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа функції $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_{u^a} = \dfrac{\partial}{\partial u^a}$ — оператори диференціювання, відповідно, за змінними x_μ та u^a

$\epsilon = (\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — антисиметричний тензор 2-го порядку

δ_{ab} — символ Кронекера

$(u^a)^k$ — запис означає, що функція u^a підноситься до степеня k

Вступ

Актуальність теми. Виконуючи математичний опис різних явищ природи, часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь. З виникненням і наступним розвитком теорії диференціальних рівнянь природознавство дістало могутній засіб моделювання та дослідження різноманітних найскладніших задач науки та техніки. Найчастіше математичні моделі є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, притаманних даному процесу.

Математичні моделі у фізиці почали інтенсивно розроблятися в працях І. Ньютона зі створення основ класичної механіки, всесвітнього тяжіння, теорії світла. Їх подальше застосування до різних фізичних явищ пов'язані з іменами Ж. Л. Лагранжа, Л. Ейлера, П. Лапласа, Ж. Фур'є, К. Гауса, Б. Рімана, М. В. Остроградського і багатьох інших учених. Значний внесок у розвиток методів математичних моделей у фізиці зробили А. М. Ляпунов, В. А. Стєклов, С. Лі та інші провідні вчені світової науки. Починаючи з другої половини XIX століття диференціальні рівняння успішно застосовувалися для вивчення математичних моделей явищ, пов'язаних із різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро– і аеродинаміці. Математичні моделі цього класу явищ найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними. Таким чином, диференціальні рівняння стали ефективним засобом моделювання та дослідження різноманітних задач науки та техніки.

Це дало поштовх до розвитку різних методів розв'язування диференціальних рівнянь: методу відокремлення змінних, методу спеціальних підстановок, методу варіації, методу Ейлера, методу д'Аламбера, методу характеристик (Монжа), методу каскадів (Лапласа), методу Пуассона, методу розвинення в ряди Фур'є, методу спуску Адамара та інших. Одним із таких методів є метод оберненої задачі теорії розсіяння (та ряд споріднених із ним методів), який було розроблено у 1967 році в спільній роботі К. Гарднера (C. Gardner), Дж. Гріна (J. Green), М. Крускала (M. Kruskal) та Р. Міури (R. Miura) [111] на прикладі нелінійного рівняння Кортевега–де Фріза. Важливу роль у розвитку методів оберненої задачі теорії розсіяння та споріднених із ним підходів до розв'язання багатьох нелінійних диференціальних рівнянь відіграли праці українських математиків, зокрема, Ю.М. Березанського [11]–[14], В.О. Марченка [36], Л.П. Нижника [41, 42], Є.Д. Білоколоса, [9, 10], Є.Я. Хруслова [83].

Серед методів, які з'явилися останнім часом, слід відзначити асимптотичний та чисельно–аналітичний методи дослідження нових класів диференціальних та диференціально–функціональних рівнянь, що були розроблені в працях А.М. Самойленка та Ю.О. Митропольського ([37], [39], [40], [53]), А.М. Самойленка та Р.І. Петришина ([55], [56], [142]), А.М. Самойленка та М.Й. Ронто ([54]); варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І.О. Луковським ([31], [32], [33], [34]); алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, розроблені М.О. Перестюком ([17], [48], [49]); асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком ([2], [50], [51]); чисельно–аналітичний метод знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В.Л. Макаровим ([30], [35]) та інші.

Будуючи точні розв'язки систем нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, вчені часто використовують сучасні теоретико–групові методи, в основі яких лежить метод, започаткований у кінці XIX століття видатним норвезьким математиком Софусом Лі ([118], [119], [120], [121], [122], [123]). Він першим застосував алгебру інваріантності диференціального рівняння для теоретико–групової редукції та знаходження його точних розв'язків. У подальшому ці методи одержали розвиток у роботах багатьох видатних вчених. Так, 1905 року А. Пуанкаре застосував ідеї С. Лі до системи рівнянь Максвелла, а 1909 року Г. Бейтмен опублікував свою роботу [91], де одержав точні розв'язки лінійного хвильового рівняння за допомогою методів симетрійного аналізу, Г. Біркгоф наголосив на можливості застосування теорії груп у механіці [15].

Новий етап розвитку метод Лі одержав у роботах Л.В. Овсяннікова [43, 44, 45], ним була розроблена теорія інваріантних і частково–інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Підсумком цього періоду стало опублікування відомої монографії [43].

Важливі результати в області теоретико–групового аналізу були одержані Дж. Блюманом та Дж. Коулом [94, 93], У. Міллером [38], П. Олвером [47, 131, 132, 133], Н.Х. Ібрагімовим [22, 23], П. Вінтерніцем [135, 136, 140]. В Україні перші роботи з цієї тематики були опубліковані В.Г. Костенком наприкінці 50–х років минулого століття [27].

У середині семидесятих років минулого століття була створена Київська школа математиків, яку очолив В.І. Фущич. Науковцями цієї школи було зроблено суттєвий вклад як у класичні, так і в нові методи симетрійного аналізу дослідження диференціальних рівнянь. Серед основних досягнень необхідно відзначити розроблений В. І. Фущичем і А. Г. Нікітіним [71, 72, 73, 74, 75] новий метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь, особливість якого полягає в тому, що базисними елементами алгебри інваріантності є інтегродиференціальні оператори. Такий підхід дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Максвела [75], Ламе [76] тощо. Продовжуючи розвиток ідей Дж. Блюмана, Дж. Коула [93], П. Олвера та Ф. Розено [131, 134], В. І. Фущич, В. І. Чопик, І. М. Цифра та М. І. Сєров [73, 77, 78, 79, 107] ввели поняття умовної симетрії та розробили методи її дослідження. Результати досліджень умовної симетрії багатьох конкретних рівнянь [80, 77, 95, 108, 117] дали можливість побудувати принципово нові анзаци, на основі яких були знайдені точні розв'язки, що не можуть бути отримані за допомогою стандартного алгоритму Лі. А. Ф. Баранником, Т. А. Баранником, І. І. Юриком запропоновано метод узагальненого відокремлення змінних для нелінійни рівнянь математичної фізики [5, 6, 7].

Існує тісний зв'язок між симетрією і законами збереження у природі. 1918 року видатним німецьким математиком Е. Нетер була сформульована фундаментальна теорема теоретичної фізики, яка зв'язує закони збереження із симетріями системи. З неї випливає: якщо властивості системи не змінюються від деякого перетворення, то цьому відповідає певний закон збереження. Наявність симетрії в системі обумовлює існування для неї фізичної величини, що зберігається. Наприклад, закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, а закон збереження енергії — наслідком однорідності часу. Ідеї і наукові погляди Е. Нетер справили величезний вплив на багатьох вчених, як математиків, так і фізиків, а після того, як її робота [130] стала загальновідомою, ще більше авторів (див., наприклад, [47], [105], [114], [145], [146]) шукали закони збереження, використовуючи симетрійний підхід, оснований на її результатах.

Отже, симетрія завжди пов'язана зі збереженням і виділяє в навколишньому світі різні інваріанти. Відомо, що усі фізичні закони та явища природи підпорядковуються певним законам симетрії. Наприклад, однорідність простору та часу є інваріантністю відносно перенесення, ізотропія простору — інваріантністю відносно поворотів, рівнозначність усіх інерціальних систем відліку — інваріантністю відносно перетворень Галілея. Таким чином, симетрія у найбільш широкому значенні — це інваріантність явища чи об'єкта відносно деяких його перетворень.

В. І. Фущич [72], [82] зазначав, що для адекватного математичного опису фізичних явищ треба поставити принципи симетрії в основу науки про побудову математичних моделей, а симетрійний принцип у такій науці має відігравати роль правила відбору, який виділяє з множини допустимих математичних моделей (рівнянь) тільки ті, котрі володіють широкою симетрією. Адже, серед усієї множини диференціальних рівнянь існує порівняно небагато тих, що описують природні явища. Виникає питання: в чому їх особливість? Так, усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвела і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь.

Принципи симетрії виражають найбільш загальні властивості природи. Тому пошук нових симетрій складає одну з найважливіших задач фізики взагалі. "Функція, яку несуть принципи симетрії, — за твердженням Е. Вігнера [16], — полягає у наділенні структурою законів природи або встановленні між ними внутрішнього зв'язку, так само, як закони природи встановлюють структуру чи взаємозв'язок у світі явищ". Таким чином, якщо закони керують явищами, то принципи симетрії — це закони фізичних законів. Тому одним із застосувань апарату групового аналізу є знаходження законів збереження. Отже, побудова конструктивного математичного апарату, розробленого видатним норвезьким математиком С. Лі, здатного виявляти різні типи симетрій, — одна з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь.

Існує багато областей застосування методів групового аналізу диференціальних рівнянь. Так, знання груп симетрії даного рівняння дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих. Важливою є задача про можливі перетворення в класі диференціальних рівнянь. Зокрема, якщо відома група еквівалентності деякого класу рівнянь, то для конкретного рівняння з її допомогою можна відшукати такі перетворення, щоб модифіковане рівняння мало найбільш просту для дослідження форму.

Оскільки теоеретико–групові методи дають можливість знаходження розв'язків диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні групи інваріантності, актуальною є задача повної групової класифікації диференціальних рівнянь, що дозволяє із заданого класу рівнянь виділити ті, які володіють широкими симетрійними властивостями. Ще однією важливою задачею є задача виділення із заданого класу рівнянь таких, які допускають у якості групи інваріантності деяку відому групу.

Таким чином, розвиток методів групового аналізу є актуальним і набуває особливого значення у разі розв'язування тих диференціальних рівнянь, для яких інші методи є неефективними. Розв'язанню таких актуальних задач і присвячена дана дисертація.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано згідно з загальним планом досліджень кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Дисертаційну роботу виконано в рамках науково–дослідницьких робіт, що розроблялися кафедрою вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка за рахунок видатків загального фонду державного бюджету, "Симетрійний аналіз нелінійних рівнянь математичної фізики" (номер державної реєстрації 0104U000320), "Класифікація симетрійних властивостей та знаходження деяких класів точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики" (номер державної реєстрації 0109U001520), "Дослідження галілеївської інваріантності систем нелінійних рівнянь математичної фізики еволюційного типу" (номер державної реєстрації 0112U002321).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є виділення з класу систем реакції–конвекції–дифузії та конвекції–дифузії таких, що допускають інваріантність відносно алгебр Галілея та їх розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

Об'єкт дослідження. *Об'єктом дослідження* є система рівнянь реакції–конвекції–дифузії та системи рівнянь конвекції–дифузії.

Предмет дослідження. *Предметом дослідження* є класифікація ліївських симетрій нелінійних систем рівнянь реакції–конвекції–дифузії та конвекції–дифузії.

Методи дослідження. Коротко сформулюємо основні поняття та визначення, що використовуються в дисертаційній роботі.

Розглядаємо клас систем диференціальних рівнянь з частинними похідними m – го порядку

$$S(x, u_{(m)}, F_{(s)}) = 0, \tag{0.1}$$

де $S \in R^k$, $x = (x_0, \overrightarrow{x}) \in R^{1+n}$, $u = u(x) \in R^k$, $F = F(x, u_{(r)}) \in R^l$ — довільні гладкі функції, $u_{(r)} = (u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u})$, $\underset{r}{u}$ — сукупність всеможливих похідних r–го порядку функцій u за змінними x, $F_{(s)} = (F, \underset{1}{F}, \ldots, \underset{s}{F})$, $\underset{s}{F}$ — сукупність всеможливих похідних s–го порядку функцій F за змінними $y = (x, u_{(r)})$.

Наведемо основні поняття методу С. Лі згідно [43].

Означення 0.1. *Група Лі локальних перетворень вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \widetilde{u} = g(x, u, \theta), \tag{0.2}$$

де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називається l–параметричною групою точкових симетрій рівняння (0.1), якщо множина розв'язків (0.1) інваріантна відносно перетворень (0.2).

Означення 0.2. *Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори першого порядку*

$$X_b = \xi^b(x, u)\partial_x + \eta^b(x, u)\partial_u, \tag{0.3}$$

де

$$\xi^b = \left.\frac{\partial f^b}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}, \eta^b = \left.\frac{\partial g^b}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} \tag{0.4}$$

зі стандартною операцією комутування.

Між групами Лі перетворень (0.2) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Якщо відомі перетворення (0.2), то координати інфінітезімальних операторів (0.3) знаходяться з умов (0.4). Щоб відновити групу Лі, знаючи її алгебру Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial\theta} = \xi(f,g), \quad \frac{\partial g}{\partial\theta} = \eta(f,g), \\ &f\Big|_{\theta=0} = x, \qquad g\Big|_{\theta=0} = u. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.1).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u \tag{0.6}$$

є оператором інваріантності системи (0.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\widetilde{X} S(x, u_{(m)}) \Bigg|_{S=0} \equiv 0, \tag{0.7}$$

де $\widetilde{X}$ — продовження інфінітезимального оператора X, яке визначається наступним чином

$$\widetilde{X} = X + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \ldots, \tag{0.8}$$

причому

$$\begin{aligned} &\underset{k}{\eta} = D\underset{k-1}{\eta} - \underset{k}{u}D\xi, \\ &D = \partial_x + \underset{1}{u}\partial_u + \underset{2}{u}\partial_{\underset{1}{u}} + \ldots + \underset{k}{u}\partial_{\underset{k-1}{u}} + \ldots. \end{aligned}$$

Записавши (0.7) у розгорнутому вигляді, після розщеплення за похідними, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівнянь (0.1). Використовуючи формули (0.5), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Означення 0.3. *Перетворення вигляду*

$$\widetilde{x} = f(x, u, \theta), \;\; \widetilde{u} = g(x, u, \theta), \;\; \widetilde{F} = \Phi(x, u, F, \theta), \tag{0.9}$$

де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називаються перетвореннями еквівалентності системи (0.1), якщо дія перетворень (0.9) перетворює систему (0.1) в іншу систему S', яка належить до того ж класу систем, що й система (0.1).

Нехай, функції F задовольняють деякі додаткові умови

$$Q(x, u_{(m)}, F_{(q)}(x, u_{(m)})) = 0, \;\; Q \in R^r. \tag{0.10}$$

Ці умови складаються з r диференціальних рівнянь для функцій F, де $F_{(q)}(x, u_{(m)})$ — множина всіх частинних похідних функцій F порядку не вище q.

Позначимо кожний клас систем рівнянь вигляду (0.1), в якому функції F задовольняють умові (0.10), як $S|_Q$.

Кожній однопараметричній групі локальних точкових перетворень, що залишає систему $S|_Q$ інваріантною, відповідає інфінітезимальний оператор (0.8). Повний набір таких груп генерує **максимальну групу** $G^{max} = G^{max}(S|_Q)$ з відповідною алгеброю Лі $A^{max} = A^{max}(S|_Q)$ інфінітезимальних операторів системи $S|_Q$.

Основною групою інваріантності системи (0.1) назвемо групу:

$$G^{bas} = G^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} G^{max}(S|_Q)$$

з відповідною алгеброю Лі

$$A^{bas} = A^{bas}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} A^{max}(S|_Q).$$

Групу перетворень вигляду (0.9) системи (0.1) позначимо

$$G^{equiv} = G^{equiv}(S|_Q).$$

Тоді задача групової класифікації системи (0.1) полягає у знаходженні всіх нееквівалентних випадків розширення A^{bas}, тобто у знаходженні всіх G^{equiv} — нееквівалентних виглядів функцій F, які задовольняють рівняння (0.10) і умову $A^{max}(S|_Q) \neq A^{bas}$.

Повна група еквівалентності G^{equiv} класу систем $S|_Q$ складається з групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} та з групи точкових перетворень екввалентності G^{equiv}_{point}.

Детальніше зупинимося на відшуканні групи неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

Для відшукання G^{equiv}_{cont} можна застосувати інфінітезимальний підхід, згідно якого G^{equiv}_{cont} породжується інфінітезимальним оперетором еквівалентності, який шукатимемо у вигляді

$$E = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u + \zeta(x,u_{(m)},F)\partial_F. \tag{0.11}$$

Умову еквівалентності системи $S|_Q$ відносно перетворень, породжених оператором еквівалентності E, можна записати у вигляді

$$\widetilde{E}S\Big|_{\substack{S=0,\\ Q=0}} = 0, \quad \widetilde{E}Q\Big|_{\substack{S=0,\\ Q=0}} = 0, \tag{0.12}$$

де $\widetilde{E}$ — продовження оператора E, яке визначається за правилом:

$$\widetilde{E} = E + \underset{1}{\eta}\partial_{\underset{1}{u}} + \underset{1}{\zeta}\partial_{\underset{1}{F}} + \underset{2}{\eta}\partial_{\underset{2}{u}} + \underset{2}{\zeta}\partial_{\underset{2}{F}} + \ldots + \underset{k}{\eta}\partial_{\underset{k}{u}} + \underset{k}{\zeta}\partial_{\underset{k}{F}} + \ldots, \tag{0.13}$$

$$\underset{k}{\zeta} = \mathcal{D}\underset{k-1}{\zeta} - \underset{k}{F}\mathcal{D}\chi,$$

$$\mathcal{D} = \partial_y + \underset{1}{F}\partial_F + \underset{2}{F}\partial_{\underset{1}{F}} + \ldots + \underset{k}{F}\partial_{\underset{k-1}{F}} + \ldots,$$

$$y = (x, u_{(m)}), \qquad \chi = (\xi, \eta_{(m)}), \qquad \eta_{(m)} = (\eta, \underset{1}{\eta}, \underset{2}{\eta}, \ldots, \underset{m}{\eta}).$$

Розщепивши за похідними функцій u та F умови (0.12), одержуємо систему визначальних рівнянь, загальний розв'язок якої визначає координати оператора еквівалентності E.

Коли координати оператора E встановлені, перетворення еквівалентності можна визначити, розв'язавши наступну задачу Коші (систему рівнянь типу Лі):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \theta} = \xi(f,g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f,g), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \zeta(f,g,\Phi),\\
&f\Big|_{\theta=0} = x, \qquad g\Big|_{\theta=0} = u, \qquad \Phi\Big|_{\theta=0} = F.
\end{aligned} \tag{0.14}
$$

На алгоритм Лі та алгоритм знаходження перетворень еквівалентності, описані вище, спирається доведення ряду основних результатів даної дисертаційної роботи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. Встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії, які інваріантні відносно алгебри Галілея без центрального розширення.

2. Досліджено найбільш загальний вигляд нелінійностей, за яких система рівнянь реакції–конвекції–дифузії інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея.

3. Знайдено нелінійності, за яких система рівнянь реакції–конвекції–дифузії інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея.

4. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності та основну алгебру інваріантності n–вимірної системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку m–вимірного векторного поля U, також знайдено необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора цієї системи.

5. Встановлено вигляд системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії, яка інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку двовимірного векторного поля U та двох просторових змінних.

6. Знайдено вигляд нелінійностей, за яких одновимірна та двовимірна системи рівнянь конвекції–дифузії інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку $U \in \mathbb{R}^3$.

7. Вказано спосіб узагальнення трикомпонентної системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку однієї та двох просторових змінних, інваріантної відносно узагальненої алгебри Галілея, до системи, яка є аналогом системи рівнянь Нав'є–Стокса.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь, теорії теплопровідності, дифузії, гідродинаміки, газової динаміки та деяких інших.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — М.І. Сєрову. Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

У роботах, які опубліковано разом з іншими авторами і включено до автореферату, особистий внесок дисертанта наступний. У роботах [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [141] М.І. Сєрову належить загальна постановка задач і аналіз отриманих результатів. У роботі [57] дисертанту належить класифікація лінійних зображень алгебр Галілея у випадку двовимірного векторного поля U та її застосування для дослідження симетрійних властивостей системи конвекції–дифузії, Л.М. Блажко належить класифікація лінійних зображень алгебр Пуанкаре та конформної у випадку $U \in \mathbb{R}^2$

та застосування одержаної класифікації лінійних зображень конформної алгебри для дослідження симетрійних властивостей системи квазілінійних хвильових рівнянь. У роботі [58] дисертанту належить розробка алгоритму дослідження Q–умовної еквівалентності, І.В. Рассосі — дослідження Q–умовної еквівалентності та її застосування до задачі групової класифікації. У роботі [59] дисертанту належить знаходження систем конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебр $AG_2(1,1)$, $AG_2(1,2)$, О.М. Омеляну — знаходження систем реакції–дифузії, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея, М.М. Сєровій належить узагальнення однієї з систем конвекції–дифузії, інваріантної відносно алгебри $AG_2(1,1)$, до системи, що є аналогом системи рівнянь Нав'є–Стокса. У роботі [60] дисертанту належить виділення із класу одновимірних систем конвекції–дифузії для $U \in \mathbb{R}^3$ таких, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, М.І. Сєрову — уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів із попередніми дослідженнями. У роботі [61] дисертанту належить знаходження основної алгебри інваріантності, системи визначальних рівнянь, перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії для $U \in \mathbb{R}^2$ та розбиття класу системи рівнянь конвекції–дифузії на підкласи нееквівалентних між собою систем відносно знайдених перетворень, М.І. Сєрову — уточнення формулювань теорем та перевірка складних технічних обчислень. У статті [62] дисертанту належить узагальнення трикомпонентних систем конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебр $AG_2(1,1)$ та $AG_2(1,2)$, до систем, що є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса, якщо $m \neq n$, М.М. Сєровій — уточнення формулювань теорем та аналіз зв'язку результатів із попередніми дослідженнями. У роботі [63] дисертанту належить знаходження систем реакції–конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень, О.Г. Плюхіну — відшукання перетворень еквівалентності системи та перевірка складних технічних обчислень. У роботі [141] дисертанту належить відшукання систем реакції–

конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень, а також — точних розв'язків системи рівнянь Ван–дер–Ваальса, І.В. Рассосі належить знаходження систем реакції–конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея з центральним розширенням оператором маси, О.Г. Плюхіну — відшукання перетворень еквівалентності системи та геометрична інтерпретація отриманих розв'язків системи рівнянь Ван–дер–Ваальса.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, на наукових конференціях науково–педагогічного колективу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка (м. Полтава, 2003–2009 р., 2012 р.), на II Всеукраїнському науковому семінарі "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи" (м. Полтава, 2011 р.), на семінарах відділу прикладних досліджень і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на Українському математичному конгресі до 100–річчя від дня народження М.М. Боголюбова (м. Київ, 2011 р.), на Міжнародній науковій конференції, присвяченій 70–річчю В.В. Маринця (м. Ужгород, 2012 р.), на Міжнародному семінарі на честь професора В.І. Фущича "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики" (м. Київ, 2013), на 15–й Міжнародній науковій конференції імені акад. Михайла Кравчука, (м. Київ, 2014 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в десяти роботах [21], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [25], [141], з них: 2 роботи [21], [25] написано без співавторів; 7 статей [21], [57], [58], [60], [62], [63], [141] у провідних наукових фахових виданнях, що затверджені Міністерством освіти і науки України; з них 2 статті [57], [141] опубліковано в журналах, які індексуються в бібліографічній базі Scopus; 1 тези доповідей [25] на міжнародній та 1 тези доповідей [59] на всеукраїнській конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Коротко опишемо структуру та зміст даної дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, проведено короткий огляд робіт за темою дисертації, сформульовано основні поняття та визначення, що використовуються в роботі, зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

У першому розділі обгрунтовано вибір напрямку досліджень і здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації. Також описано основні етапи розвитку наукової думки щодо групового аналізу диференціальних рівнянь та подано огляд праць, які стосуються цієї проблеми.

У другому розділі розглянуто систему нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U). \tag{0.15}$$

де $U = \binom{u^1}{u^2}$, $F(U), G(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності 2×2, $H(U)$ — довільна функціональна матриця розмірності 2×1, $u^a = u^a(x_0, x_1)$.

Для класу систем (0.15) поставлена та розв'язана задача знаходження таких нелінійностей, за яких система допускає інваріантність відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

У першому підрозділі виписано групу неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} системи (0.15), а також систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} системи (0.15).

У другому підрозділі знайдено реалізацію алгебри Галілея без центрального розширення, нею є алгебра вигляду

$$\langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1 \rangle, \tag{0.16}$$

де оператор Q_1 набуває вигляду $Q_1 = (\alpha_{1ab}u^b + \beta_{1a})\partial_{u^a}$, α_{1ab}, β_{1a} — const.

У третьому підрозділі з точністю до перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} встановлено вигляд нелінійностей, за яких система (0.15) інваріантна відносно алгебри Галілея (0.16).

У четвертому підрозділі встановлено реалізацію розширеної алгебри Галілея та здійснено класифікацію нееквівалентних зображень цієї алгебри у випадку $U \in \mathbb{R}^2$. У п'ятому — з точністю до перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} знайдено нелінійності, за яких система (0.15) інваріантна відносно цієї алгебри.

У шостому підрозділі знайдено реалізацію узагальненої алгебри Галілея та прокласифіковано нееквівалентні зображення цієї алгебри у випадку двовимірного векторного поля U.

Серед результатів дослідження варто наголосити на одержаних у сьомому підрозділі, де з точністю до перетворень еквівалентнгості G^{equiv}_{cont} знайдено всі можливі вигляди нелінійностей, за яких система (0.15) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея. Слід зазначити, що у виписаних результатах одержано систему, яка є узагальненням системи, що досліджувалась у роботах [112], [64].

У третьому розділі розглянуто систему нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U)U_i. \tag{0.17}$$

Для одновимірної та двовимірної систем (0.17) поставлена та розв'язана задача знаходження таких нелінійностей, за яких система допускає інваріантність відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень, у випадку двовимірного та тривимірного векторного поля U.

У першому підрозділі знайдено групу неперервних перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} системи (0.17), систему визначальних рівнянь і вигляд основної алгебри інваріантності A^{bas} системи (0.17). Крім того, сформульовано необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора інваріантності (0.6) системи (0.17). Підкреслимо, що все це знайдено для n–вимірної системи рівнянь у випадку m–вимірного векторного поля U.

У другому підрозділі досліджено систему (0.17) для $U \in \mathbb{R}^2$ у випадку двох просторових змінних. Для цієї системи поставлена та розв'язана задача знаходження таких нелінійностей, за яких система допускає інваріантність відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень. Попередньо виписано реалізацію цієї алгебри та прокласифіковано її нееквівалентні зображення відносно перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont}.

У третьому підрозділі досліджено двовимірну систему рівнянь (0.17) для $U \in \mathbb{R}^3$. Для цієї системи поставлена та розв'язана задача знаходження таких нелінійностей, за яких система допускає інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея. Попередньо прокласифіковано зображення алгебри Галілея та узагальненої алгебри Галілея для тривимірного векторного поля U.

У четвертому підрозділі розглянуто систему рівнянь (0.17) для $U \in \mathbb{R}^3$ у випадку однієї просторової змінної. Для цього випадку з точністю до перетворень еквівалентності G^{equiv}_{cont} прокласифіковано зображення алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень, та знайдено всі нелінійності, за яких система конвекції–дифузії допускає інваріантність відносно цієї алгебри.

Слід наголосити на результатах, отриманих у п'ятому підрозділі цього розділу, оскільки тут здійснено узагальнення двох систем, отриманих у третьому й четвертому підрозділах, до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса у випадку, коли розмірність векторного поля U не дорівнює кількості незалежних просторових змінних. Важливо, що для отриманих систем зберігається інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.

У кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки, де підбито підсумки роботи автора.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико–математичних наук **Сєрову Миколі Івановичу** за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу до роботи, всебічну підтримку та допомогу.

Також автор висловлює вдячність А.Г. Нікітіну та всім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів роботи.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури за темою дисертації та вибір напрямку досліджень

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, в якій досліджуються симетрійні властивості нелінійних диференціальних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, а також здійснено постановку задач, що розглядаються в наступних розділах.

Вирішуючи фундаментальні проблеми з різних сфер діяльності, науковці часто зустрічаються з проблемою побудови математичних моделей процесів, що досліджуються, і вибору рівнянь чи систем, які б найточніше описували цей процес. У багатьох випадках те чи інше фізичне явище вдається змоделювати цілком визначеним диференціальним рівнянням чи системою диференціальних рівнянь. Найпростіші формулювання законів природи приводять до лінійних задач математичної фізики, але часто такі моделі неточні та не дають задовільного результату, адже багатьом реальним процесам відповідають саме нелінійні математичні моделі. І тоді виникає проблема обмеженості наявного математичного апарату для розв'язування отриманих диференціальних рівнянь чи систем. Та якщо нелінійне диференціальне рівняння (чи система рівнянь), що описує певний процес, має нетривіальні симетрійні властивості, то тут дослідники можуть застосовувати методи теорії груп і алгебр Лі.

Однією з основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача знаходження найширшої (максимальної) групи симетрії, яку допускає диференціальне рівняння, і не менш важливою є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, яку започаткував С. Лі. У своїх роботах він здійснив групову класифікацію лінійних (1+1)–вимірних рівнянь другого порядку параболічного типу [119]. Сучасну постановку задачі групової класифікації було здійснено Л.В. Овсянніковим, який у роботі [44] вперше провів повну групову класифікацію нелінійного (1+1) – вимірного рівняння теплопровідності

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x). \tag{1.1}$$

У наступних дослідженнях симетрійних властивостей об'єктом розгляду стали узагальнення рівняння (1.1). Так, зокрема, класифікацію рівняння:

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x) \tag{1.2}$$

проводив у своїх дослідженнях В.Л. Катков. Результати цих досліджень відображені в роботі [26].

У роботі [70] В.А. Тичиніним досліджено симметрію і знайдено точні розв'язки рівняння

$$u_t = h(u)u_{xx}.$$

Повну групову класифікацію рівняння теплопровідності з джерелом (стоком), яке використовується для моделювання біологічних і фізико–хімічних процесів

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u), \tag{1.3}$$

та його узагальнень на двовимірний і тривимірний випадок провів В.А. Дородніцин у роботах [19], [20]. Зауважимо, що це було зроблено значно пізніше роботи Л.В. Овсяннікова, оскільки пов'язано зі складністю реалізації алгоритму Лі для розв'язання таких задач у випадку, коли рівняння містить дві і більше довільні функції. Продовжили роботу в цьому напрямку А. Орон, Ф. Розено (1986, [134]), С.М. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє (1994,

[148]), та М.П. Едвардс (1994, [113]), які працювали над дослідженням симетрійних властивостей рівнянь дифузії–конвекції

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x. \tag{1.4}$$

Вагомий внесок у цьому напрямку було зроблено І.Ш. Ахатовим, Р.К. Газізовим і Н.Х. Ібрагімовим. 1987 року було опубліковано роботу [4], де вони провели класифікацію симетрійних властивостей рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}. \tag{1.5}$$

У роботах М.І. Сєрова, Р.М. Черніги, І.В Рассохи [68], [100], [103] з точністю до перетворень еквівалентності проведено вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u). \tag{1.6}$$

Деякі класи точних розв'язків цього рівняння побудовані в роботах А.Ф. Баранника, Т.А. Баранника, І.І Юрика [8], [86].

Р.О. Попович і Н.М. Іванова в роботі [138] провели повну групову класифікацію та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \tag{1.7}$$

У роботах [1], [28] А.М. Самойленко та В.І. Лагно; у роботі [29] В.І. Лагно, С.В. Спічак і В.І. Стогній; а також Р.З. Жданов [92], [147] і П. Басараб-Горват [92] провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x). \tag{1.8}$$

У роботах С.В. Спічака, В.І. Стогнія [143], [144] знайдені максимальні групи перетворень і побудовані деякі класи точних розв'язків для одновимірного рівняння Фокера–Планка з довільними достатньо гладкими функціями $A(t, x), B(t, x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t, x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t, x)u]. \tag{1.9}$$

Таким чином, протягом останніх років багато уваги приділялось дослідженню класичних симетрій рівняння реакції–конвекції–дифузії, оскільки рівняння цього класу займають вагоме місце серед рівнянь математичної фізики. Є також дослідження, присвячені узагальненню рівняння реакції–конвекції–дифузії на випадок системи:

$$U_0{=}\partial_a\left[F^{ab}(U)U_b\right]+G^a(U)U_a+H(U). \tag{1.10}$$

З математичної точки зору ця система за рахунок наявності багатьох довільних функцій описує фактично не одну, а цілий клас систем. Симетрійні властивості нелінійних систем цього класу не досліджені в повній мірі, оскільки повну групову класифікацію їх симетрійних властивостей досі не проведено. Тому дуже важливою є інша задача групового аналізу: дослідження інваріантності диференціальних рівнянь відносно тої чи іншої групи перетворень та вибору з цілого класу систем тих, які були б інваріантними відносно цієї групи перетворень.

Зазначимо, що дослідженням симетрійних властивостей систем з цього класу займалось багато авторів.

До класу систем (1.10) належать системи, які описують різні фізичні та біохімічні процеси. Однією з систем типу (1.10) є відома дифузійна система Лотки–Вольтера

$$\begin{aligned} u_t &= d_1u_{xx}+u(a_1+b_1u+c_1v),\\ v_t &= d_2v_{xx}+v(a_2+b_2u+c_2v), \end{aligned}$$

запропонована незалежно обома авторами, як математична модель конкретних процесів. Перший з них показав, що ця модель описує експерементально зафіксовану періодичну зміну концентрацій двох хімічних речовин, які реагують, другий — що такі рівняння моделюють процес боротьби між двома популяціями тварин, одна з яких репрезентує хижаків, а друга — жертв.

У роботах [96, 125] зроблено вичерпний опис симетрій Лі для багатовимірних систем диференціальних рівнянь реакції–дифузії зі сталими коефіцієнтами дифузії вигляду

$$u_t = \Delta u + F(u,v),$$
$$v_t = \Delta v + G(u,v),$$

де $u = u(t, \overrightarrow{x}), v = v(t, \overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

У роботах [68], [81], [106] побудовані класи нелінійних систем двох рівнянь параболічного типу, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень. Для конкретних виглядах нелінійностей $F(U)$ симетрійні властивості двовимірної системи рівнянь

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x], \tag{1.11}$$

досліджено в роботах [3], [84], [99] і методами ліївської та умовної симетрії знайдено деякі точні розв'язки цих систем. У роботі [85] досліджено конформну інваріантність цієї ж системи для деякого конкретного вигляду матриці F. Система (1.11) досліджувалась також і в роботі А.В. Гладкова, В.А. Байкова [90], де виявлені два зображення алгебри конформного типу.

Кооперативна поведінка найпростіших мікроорганізмів описується системою вигляду (1.10) у разі нульової матриці конвекції G. Так, розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль описується математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера–Сегеля [115]. Моделлю Келлера–Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [87] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях у разі їх взаємодії [24]. У роботах [65], [66] проведено повну групову класифікацію симетрійних властивостей системи

$$U_t = \partial_x\left[F(U)U_x\right] + G(U), \tag{1.12}$$

з матрицею дифузії $F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, яка є узагальненням згаданих систем.

І.В. Князева та М.Д. Попов в роботі [116] виконали групову класифікацію системи нелінійних рівнянь дифузії вигляду

$$u_t - (f(u,v)u_x)_x = 0, \;\; v_t - (g(u,v)v_x)_x = 0.$$

При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ та $G(U) = 0$ одержали вагомі результати А.Г. Нікітін та Р. Вилтшир (див. наприклад, [125], [126], [127], [128], [129]), Р.М. Черніга та Дж. Кінг [96], [97], [98].

У роботах [52], [67] із класу систем рівнянь (1.10) у випадку двовимірного векторного поля U та однієї просторової змінної виділено ті, які інваріантні відносно алгебри Галілея з центральним розширенням, а також її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

До цього ж класу систем належить і нелінійна система рівнянь конвекції–дифузії, симетрійні властивості якої також вивчались багатьма авторами. Так, у роботі [102] досліджено ліївську та Q–умовну симетрії системи двох рівнянь типу Бюргерса. Також ліївська та Q-умовна симетрії описані в роботі [101] для одновимірної системи типу (0.17), в якій $U \in \mathbb{R}^2$, а матриця F містить дві довільні функції. Інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея одновимірної системи (0.17) досліджено у роботі [18] для двовимірного векторного поля U.

Зважаючи на актуальність задачі відбору з класу систем тих, які були б інваріантними відносно тої чи іншої групи перетворень, ця задача і визначила напрямок проведених у дисертації досліджень. Другий розділ дисертації є доповненням досліджень, виконаних Сєровим М.І., Рассохою І.В у роботах [52], [67], зокрема, його присвячено відбору із класу одновимірних систем (1.10) у випадку двовимірного векторного поля U тих, що інваріантні відносно алгебри Галілея без центрального розширення, а також її розширень операторами масштабних і проективних перетворень. У третьому розділі розглянуто частинний випадок системи (1.10) — систему конвекції–дифузії з одиничною матрицею дифузії. Цей розділ дисертації є логічним продовженням досліджень Сєрова М.І., Глєби А.В. [18], його присвячено відбору із класу одновимірних і двовимірних систем конвекції–дифузії у випадку двовимірного та тривимірного векторного поля U тих, що інваріантні відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

Слід зазначити, що обидві задачі розв'язано з точністю до перетворень еквівалентності відповідних систем. Очевидно, що знання перетворень еквівалентності значно полегшує розв'язання поставлених задач. Вагомий внесок у розроблення методів побудови груп перетворень еквіваленності було зроблено І.Ш. Ахатовим, Р.К. Газізовим і Н.Х. Ібрагімовим. Подальший розвиток ці ідеї одержали в роботах В.І. Лагна, С.В. Спічака та В.І. Стогнія, де описано новий підхід до розв'язування задачі групової класифікації диференціальних рівнянь, який є синтезом методу Лі–Овсяннікова, результатом класифікації абстрактних скінченовимірних дійсних алгебр Лі та техніки використання перетворень еквівалентності.

Р.О. Поповичем у роботі [137] модифіковано концепцію групової класифікації і поширено до класифікації допустимих перетворень у класах диференціальних рівнянь. Ним переглянуто існуючі поняття групового аналізу, описано поняття умовної групи еквівалентності, нормалізовано клас диференціальних рівнянь та досліджено їх властивості.

Внаслідок досліджень, проведених у даній дисертаційній роботі, запропоновані галілей–інваріантні системи нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії та конвекції–дифузії, які в силу своїх симетрійних властивостей претендують на опис фізичних процесів, що задовольняють принципу відносності Галілея.

РОЗДІЛ 2

Інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії відносно алгебр Галілея

Оскільки більшість основних фізичних процесів задовольняють принципу відносності Галілея чи Пуанкаре–Енштейна, то і рівняння, які їх описують, повинні також бути інваріантні відносно алгебри Галілея чи алгебри Пуанкаре. Тому вимога інваріантності диференціальних рівнянь відносно тієї чи іншої групи перетворень, наявність широкої симетрії рівняння можуть служити критерієм відбору його в якості математичної моделі опису конкретного фізичного процесу. У зв'язку з цим і розглядається задача: за заданою групою перетворень побудувати математичну модель (систему диференціальних рівнянь), що володіє зазначеною симетрією.

Розглянемо систему рівнянь реакції–конвекції–дифузії

$$U_0{=}\partial_1\left[F(U)U_1\right]+G(U)U_1+H(U), \tag{2.1}$$

де $U{=}\left(\begin{smallmatrix}u^1\\u^2\end{smallmatrix}\right){\in}\mathbb{R}^2$, $u^a{=}u^a(x)$, $x{=}(x_0,x_1)$, $F(U){=}(f^{ab}(U))$, $G(U){=}(g^{ab}(U))$ — довільні функціональні матриці розмірності 2×2, $H(U){=}(h^a(U))$ — довільна функціональна матриця розмірності 2×1, $a,b\in\{1;2\}$, x_0 — часова, x_1 — просторова змінні. Система (2.1) у разі конкретних значеннях нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$ застосовується для моделювання різних процесів фізики, хімії, біології, екології. Так, модифікації системи (2.1) застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, для опису процесів переносу в організмі, наприклад, для моделювання переносу кисню в кровоносній системі, для моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань системи (2.1) в екології є дослідження процесів розповсюдження речовини, що забруднює водойми. У біології система рівнянь реакції–адвекції–дифузії описує модель спільноти хижак–жертва, переміщення в колоніях бактерій під дією різних чинників та ін. Гідродинамічна нестійкість, яка виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, що не змішуються, зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Математична модель цього явища включає в себе систему рівнянь реакції–конвекції–дифузії. Здійснюючи перехід в системі (2.1) до комплексної змінної, можна одержати моделі, що описують рух квантової частинки (рівняння Шредінгера), стан надпровідника в зовнішньому магнітному полі (рівняння Гінзбурга–Ландау) та магнітогідродинамічні хвилі в плазмі.

Спочатку опишемо алгебру, інваріантність відносно якої системи (2.1) будемо досліджувати. Добре відомо (див., наприклад [119], [104]), що лінійне рівняння теплопровідності

$$u_0 = u_{11}$$

інваріантне відносно алгебри, базисні оператори якої мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + x_1 Q_1, \quad Q_1 = -\frac{1}{2}u\partial_u, \tag{2.2}$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \tag{2.3}$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + \frac{x_1^2}{2}Q_1, \tag{2.4}$$

де $Q_2 = -Q_1$.

Ще одним рівнянням, яке інваріантне відносно подібного зображення алгебри, є рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 = u_{11},$$

максимальною алгеброю інваріантності якого (див., наприклад, [26], [68]) є алгебра з базисними генераторами

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \tag{2.5}$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \tag{2.6}$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + x_1Q_1, \tag{2.7}$$

де $Q_1 = \partial_u, \quad Q_2 = -u\partial_u$.

Оператори алгебри (2.5)–(2.7) задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, G] = \partial_1, \quad [\partial_1, G] = 0, \tag{2.8}$$

$$[\partial_0, D] = 2\partial_0, \quad [\partial_1, D] = \partial_1, \quad [G, D] = -G, \tag{2.9}$$

$$[\partial_0, \Pi] = D, \quad [\partial_1, \Pi] = G, \quad [G, \Pi] = 0, \quad [D, \Pi] = 2\Pi. \tag{2.10}$$

Оскільки оператори G, задані у формулах (2.2) або (2.5), породжують перетворення Галілея

$$x_0' = x_0, \; x_1' = x_1 + \theta x_0 \tag{2.11}$$

простору (x_0, x_1) (див., наприклад, [106]), то оператори такого типу називаються операторами Галілея. Алгебру (2.5) називають алгеброю Галілея, алгебру (2.2) — алгеброю Галілея з центральним розширенням. Алгебри (2.2)–(2.3) або (2.5)–(2.6) називають розширеними алгебрами Галілея, а алгебри операторів (2.2)–(2.4) або (2.5)–(2.7) — узагальненими алгебрами Галілея.

У роботах [52], [67] розв'язана задача опису систем рівнянь класу (2.1), інваріантних відносно алгебри Галілея з центральним розширенням, а також її розширень операторами масштабних і проективних перетворень. Ми ж опишемо всі системи класу (2.1), інваріантні відносно алгебри Галілея з комутаційними співвідношеннями (2.8), а також відносно її розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

Тривимірну алгебру $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (2.8), будемо називати алгеброю Галілея і позначати $AG(1,1)$, чотиривимірну алгебру $\langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (2.8)–(2.9), будемо називати розширеною алгеброю Галілея і позначати $AG_1(1,1)$, а п'ятивимірну алгебру $\langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\rangle$, оператори якої задовольняють комутаційні співвідношення (2.8)–(2.10), будемо називати узагальненою алгеброю Галілея і позначати $AG_2(1,1)$. Цифри в дужках означають, що простір незалежних змінних системи диференціальних рівнянь складається з двох змінних: однієї часової x_0 і однієї просторової x_1. Зазначимо, що у статтях В.І Фущича, А.Ф. Баранника, Л.Ф. Баранника (див., наприклад, [109], [110]) ці алгебри названо reduced classical Galilei algebra, reduced extended Galilei algebra, reduced special Galilei algebra, і позначено $A\bar{G}_1(1)$, $A\bar{G}_2(1)$, $A\bar{G}_3(1)$, відповідно.

2.1. Перетворення еквівалентності. Система визначальних рівнянь

Важливу роль для групової класифікації класу диференціальних рівнянь відіграють перетворення еквівалентності даного класу. Знання перетворень еквівалентності дозволяє поділити клас диференціальних рівнянь на нееквівалентні підкласи, виділити в кожному підкласі канонічного представника, дослідити його симетрійні властивості та за допомогою даних перетворень поширити одержаний результат на всі рівняння даного підкласу.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2.1. *Групою неперервних перетворень еквівалентності системи (2.1) є група вигляду*

$$x_0' = c_0 x_0 + q_0, \quad x_1' = c_1 x_1 + q x_0 + q_1, \tag{2.12}$$

$$u^{a'} = k_{ab} u^b + l_a, \tag{2.13}$$

де $c_0,\ c_1,\ q,\ q_0,\ q_1,\ k_{ab},\ l_a$ *– довільні сталі.*

Зазначимо, що доведення леми 2.1 наведено в роботі [52]. Зауважимо також, що всі подальші міркування проведено з точністю до перетворень еквівалентності (2.12), (2.13).

Як показано в роботі [52], координати інфінітезимального оператора алгебри інваріантності системи (2.1)

$$X = \xi^0(x,u)\partial_0 + \xi^i(x,u)\partial_i + \eta^a(x,u)\partial_{u^a} \tag{2.14}$$

та нелінійності f^{ab}, g^{ab}, h^a задовольняють систему визначальних рівнянь

$$\xi^0_1 = \xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = 0, \tag{2.15}$$

$$f^{sb}\eta^a_{u^d u^s} + f^{sd}\eta^a_{u^b u^s} = 0, \tag{2.16}$$

$$\eta^d f^{ab}_{u^d} + (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)f^{ab} + \eta^d_{u^b} f^{ad} - \eta^a_{u^d} f^{db} = 0, \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}\eta^d g^{ab}_{u^d}+(\xi^0_0-\xi^1_1)g^{ab}+\eta^d_{u^b}g^{ad}-\eta^a_{u^d}g^{db}+\eta^d_1(f^{ab}_{u^d}+f^{ad}_{u^b})+2\eta^d_{1u^b}f^{ad}-\\ -\xi^1_{11}f^{ab}+\delta_{ab}\xi^1_0=0,\end{gathered} \tag{2.18}$$

$$\eta^b h^a_{u^b} + \xi^0_0 h^a - \eta^a_{u^b} h^b + \eta^b_{11} f^{ab} + \eta^b_1 g^{ab} - \eta^a_0 = 0, \tag{2.19}$$

де $a, b, d, s \in \{1, 2\}, i = 1$.

Координати $\xi^0 = c_0,\ \xi^1 = c_1,\ \eta^a = 0$, ($c_0, c_1$ – довільні сталі) оператора (2.14) задовольняють систему (2.15)–(2.19) у разі довільних нелінійностей $F(U)$, $G(U)$, $H(U)$. Даний оператор породжує основну алгебру інваріантності системи (2.1)

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \quad \partial_1 \rangle. \tag{2.20}$$

2.2. Реалізація алгебри Галілея

Встановимо вигляд операторів алгебри Галілея, відносно якої може бути інваріантна система (2.1). Уточнимо загальний вигляд інфінітезимального оператора (2.14) для системи (2.1), задовольнивши рівняння (2.15), (2.16).

Із системи рівнянь (2.15) випливає, що $\xi^0 = A(x_0)$, $\xi^1 = B(x_0, x_1)$, де $A(x_0), B(x_0, x_1)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів. Подивимось на систему рівнянь (2.16), як на лінійну алгебраїчну систему відносно невідомих $\eta^a_{u^b u^s}$. Визначник даної системи має вигляд

$$\Delta = \langle 1 \rangle \cdot \Delta_F,$$

де вираз $\langle 1 \rangle = f^{11} + f^{22}$ є слідом матриці $F = (f^{ab})$, а Δ_F — її детермінантом.

За умови Δ_F=0 система (2.1) описує процеси, пов'язані з поведінкою двофазної рідини, а при $\langle 1 \rangle = 0$ система (2.1) є рівнянням шредінгерівського типу для комплексної функції $\psi = u^1 + iu^2$. Покладемо

$$\Delta \neq 0, \tag{2.21}$$

оскільки саме при такій умові система (2.1) описує процеси дифузії.

Лінійна однорідна відносно змінних $\eta^a_{u^b u^s}$ система (2.16) за умови (2.21) має лише тривіальний розв'язок

$$\eta^a_{u^b u^s} = 0. \tag{2.22}$$

Загальний розв'язок системи (2.22) має вигляд

$$\eta^a = \sigma^{ad}(x_0, x_1) u^d + \tau^a(x_0, x_1).$$

Таким чином ми встановили наступне твердження.

Теорема 2.1. *Якщо система (2.1) за умови (2.21) інваріантна відносно оператора (2.14), то даний оператор має вигляд*

$$X = A(x_0)\partial_0 + B(x_0, x_1)\partial_1 + [\sigma^{ad}(x_0, x_1) u^d + \tau^a(x_0, x_1)]\partial_{u^a}, \tag{2.23}$$

де A, B, σ^{ad}, τ^a — довільні гладкі функції своїх аргументів.

Оскільки система (2.1) у разі довільних нелінійностей F, G, H інваріантна відносно алгебри (2.20), то в якості двох операторів алгебри Галілея візьмемо оператори $X_1 = \partial_0$ і $X_2 = \partial_1$, а третій оператор даної алгебри будемо шукати, як випливає з теореми 2.1, у вигляді (2.23), де $A(x_0)$, $B(x_0, x_1)$, $\sigma^{ad}(x_0, x_1)$, $\tau^a(x_0, x_1)$ – шукані функції.

Вимагаючи виконання умов комутування (2.8), одержимо

$$\dot{A} = B_1 = 0, \quad B_0 = 1, \quad \sigma_0^{ad} = \sigma_1^{ad} = \tau_0^a = \tau_1^a = 0. \tag{2.24}$$

Розв'язавши рівняння (2.24), визначаємо, що оператор X_3 має вигляд

$$X_3 = c_0\partial_0 + (x_0 + c_1)\partial_1 + [\alpha_{1ab}u^b + \beta_{1a}]\partial_{u^a},$$

де $c_0, c_1, \alpha_{1ab}, \beta_{1a}$ – сталі інтегрування. Отже, поклавши $G{=}X_3{-}c_0\partial_0{-}c_1\partial_1$, одержуємо реалізацію алгебри (2.8):

$$AG(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G = x_0\partial_1 + Q_1 \rangle, \tag{2.25}$$

де

$$Q_1 = (\alpha_{1ab}u^b + \beta_{1a})\partial_{u^a}. \tag{2.26}$$

Зауважимо, що в роботі [139] з точністю до всеможливих локальних перетворень встановлені нееквівалентні реалізації алгебр розмірності до 4-х включно. Серед алгебр, наведених у цій роботі, є алгебра (2.25), але за умови, що $Q_1 = \partial_{u^1}$. Оскільки система (2.1) не допускає всеможливі перетворення еквівалентності, а тільки перетворення вигляду (2.12), (2.13), то клас операторів Q_1 для неї є значно ширшим.

У роботі [18] прокласифіковано зображення алгебри (2.25) та встановлено, що існує 5 нееквівалентних відносно перетворень (2.13) зображень цієї алгебри. Фактично, опис зображень алгебри (2.25) зводиться до опису нееквівалентних зображень оператора Q_1. Наведемо ці зображення, врахувавши, крім того, ще й перетворення еквівалентності (2.12):

$$Q_1 = \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}, \tag{2.27}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \tag{2.28}$$

$$Q_1 = æI + u^1\partial_{u^2}, \tag{2.29}$$

$$Q_1 = I + ku^2\partial_{u^2}, \tag{2.30}$$

$$Q_1 = kI + J, \tag{2.31}$$

де $æ \in \{0,1\}$, $k \in \mathbb{R}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $J = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$.

Таким чином, всі можливі реалізації алгебри $AG(1,1)$ для системи (2.1) визначаються алгеброю (2.25), де оператор Q_1 набуває одного з п'яти виглядів, наведених у формулах (2.27)–(2.31).

2.3. Інваріантність системи реакції–конвекції–дифузії відносно алгебри Галілея

Дослідимо, для яких значень нелінійностей F, G, H система (2.1) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$ для кожного з п'яти вказаних у (2.27)–(2.31) зображень оператора Q_1.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 2.2. *Система* (2.1) *інваріантна відносно зображення алгебри Галілея* (2.25), (2.27) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають вигляду*

$$\begin{gathered} F(U)=D(u^1,\varphi)=\begin{pmatrix} \varphi^{11}-\varphi^{12}æu^1 & \varphi^{12} \\ \varphi^{21}+\left(\varphi^{11}-\varphi^{22}\right)æu^1-\varphi^{12}(æu^1)^2 & \varphi^{22}+\varphi^{12}æu^1 \end{pmatrix}, \\ G(U) = D(u^1,\psi) - u^1E, H(U) = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 + \chi^1 æu^1 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.32}$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^a=\chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргументу* $\omega = u^2 - æ\frac{(u^1)^2}{2}$, E *— одинична матриця розмірності* 2×2.

Доведення. Базисні оператори зображення (2.25), (2.27) алгебри Галілея мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}, \tag{2.33}$$

а координати оператора X:

$$\xi^0 = q_0, \quad \xi^1 = rx_0 + q_1, \quad \eta^1 = r, \quad \eta^2 = ræu^1, \tag{2.34}$$

де r, q_0, q_1 — довільні сталі.

У теоремі 2.1 ми уточнили вигляд інфінітезимального оператора (2.14), задовольнивши рівняння (2.15), (2.16) визначальної системи. Тому підставимо відповідні ξ^0, ξ^1, η^a вже тільки в рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи. Отримуємо наступну систему для знаходження нелінійностей f^{ab}, g^{ab}, h^a:

$$\left(\delta_{d1} + \delta_{d2}æu^1\right) f^{ab}_{u^d} + æ(\delta_{b1}f^{a2} - \delta_{a2}f^{1b}) = 0, \tag{2.35}$$

$$\left(\delta_{d1} + \delta_{d2}æu^1\right) g^{ab}_{u^d} + æ(\delta_{b1}g^{a2} - \delta_{a2}g^{1b}) + \delta_{ab} = 0, \tag{2.36}$$

$$\left(\delta_{b1} + \delta_{b2}æu^1\right) h^{a}_{u^b} - \delta_{a2}æh^1 = 0. \tag{2.37}$$

Загальним розв'язком системи (2.35), є функції

$$f^{11} = \varphi^{11} - \varphi^{12}æu^1, \qquad f^{12} = \varphi^{12},$$
$$f^{21} = \varphi^{21} + \left(\varphi^{11} - \varphi^{22}\right)æu^1 - \varphi^{12}(æu^1)^2, \qquad f^{22} = \varphi^{22} + \varphi^{12}æu^1,$$

де $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega = u^2 - æ\frac{(u^1)^2}{2}$. Заміною

$$g^{ab} = \sigma^{ab} - \delta_{ab}u^1 \tag{2.38}$$

система (2.36) зводиться до системи рівнянь вигляду (2.35) відносно невідомих функцій σ^{ab}. Тому можна зробити висновок, що

$$g^{11} = \psi^{11} - (1 + æ\psi^{12})u^1, \qquad g^{12} = \psi^{12},$$
$$g^{21} = \psi^{21} + \left(\psi^{11} - \psi^{22}\right)æu^1 - \psi^{12}(æu^1)^2, \qquad g^{22} = \psi^{22} - (1 - æ\psi^{12})u^1,$$

де $\psi^{ab} = \psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції. Очевидно загальним розв'язком системи (2.37) є функції

$$h^1 = \chi^1, \quad h^2 = \chi^2 + \chi^1 æu^1,$$

де $\chi^a = \chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Теорему доведено.

Теорема 2.3. *Система (2.1) інваріантна відносно зображення алгебри Галілея* (2.25), (2.28) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають вигляду*

$$F=D(u^2,\varphi)=\begin{pmatrix}\varphi^{11} & \frac{\varphi^{12}}{u^2}\\ \varphi^{21}u^2 & \varphi^{22}\end{pmatrix},\ G=D(u^2,\psi)-u^1E,\ H=\begin{pmatrix}\chi^1\\ \chi^2u^2\end{pmatrix},\quad(2.39)$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^a=\chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргументу* $\omega=u^2e^{-u^1}$.

Доведення. Випишемо базисні оператори зображення алгебри (2.25), (2.28):

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G=x_0\partial_1+\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2}.\quad(2.40)$$

Підставивши відповідні координати оператора X у рівняння (2.17)–(2.19), отримаємо наступну систему:

$$\left(\delta_{d1}+\delta_{d2}u^2\right)f^{ab}_{u^d}+\delta_{b2}f^{a2}-\delta_{a2}f^{2b}=0,\quad(2.41)$$

$$\left(\delta_{d1}+\delta_{d2}u^2\right)g^{ab}_{u^d}+\delta_{b2}g^{a2}-\delta_{a2}g^{2b})+\delta_{ab}=0,\quad(2.42)$$

$$\left(\delta_{b1}+\delta_{b2}u^2\right)h^{a}_{u^b}-\delta_{a2}h^2=0.\quad(2.43)$$

Загальний розв'язок системи (2.41), визначає матрицю нелінійностей

$$F(U)=\begin{pmatrix}\varphi^{11} & \frac{\varphi^{12}}{u^2}\\ \varphi^{21}u^2 & \varphi^{22}\end{pmatrix}=D(u^2,\ \varphi),$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega=u^2e^{-u^1}$. Заміною (2.38) система (2.42) зводиться до системи вигляду (2.41) відносно невідомих функцій σ^{ab}, тому

$$g^{11}=\psi^{11}-u^1,\quad g^{12}=\frac{\psi^{12}}{u^2},\quad g^{21}=\psi^{21}u^2,\quad g^{22}=\psi^{22}-u^1,$$

або у матричному вигляді

$$G(U)=D(u^2,\ \psi)-u^1E,$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції, E — одинична матриця розмірності 2×2. Загальним розв'язком системи (2.43) є функції

$$h^1=\chi^1,\quad h^2=\chi^2u^2,$$

де $\chi^a=\chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Теорему доведено.

Теорема 2.4. *Система (2.1) інваріантна відносно зображення алгебри Галілея* (2.25), (2.29) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають вигляду*

$$\begin{gathered}F(U)=D\left(\tfrac{u^2}{u^1},\varphi\right)=\begin{pmatrix}\varphi^{11}-\varphi^{12}\frac{u^2}{u^1} & \varphi^{12}\\ \varphi^{21}+\left(\varphi^{11}-\varphi^{22}\right)\frac{u^2}{u^1}-\varphi^{12}(\frac{u^2}{u^1})^2 & \varphi^{22}+\varphi^{12}\frac{u^2}{u^1}\end{pmatrix},\\ G(U)=D\left(\tfrac{u^2}{u^1},\psi\right)-\tfrac{u^2}{u^1}E,\ H(U)=\begin{pmatrix}\chi^1u^1\\ \chi^1u^2+\chi^2u^1\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{2.44}$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^a=\chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргументу* $\omega=u^1e^{-\text{æ}\frac{u^2}{u^1}}$.

Доведення. Зображення алгебри Галілея (2.25), (2.29) визначає наступні базисні оператори

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G=x_0\partial_1+\text{æ}I+u^1\partial_{u^2}\tag{2.45}$$

та координати інфінітезимального оператора:

$$\xi^0=q_0,\quad \xi^1=rx_0+q_1,\quad \eta^1=r\text{æ}u^1,\quad \eta^2=r(u^1+\text{æ}u^2).\tag{2.46}$$

Підставивши (2.46) в рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи, отримуємо систему для знаходження нелінійностей f^{ab}, g^{ab}, h^a:

$$\begin{gathered}\text{æ}u^1f^{ab}_{u^1}+\left(\text{æ}u^2+u^1\right)f^{ab}_{u^2}+\text{æ}\left(\delta_{b1}f^{a1}+\delta_{b2}f^{a2}-\delta_{a1}f^{1b}-\delta_{a2}f^{2b}\right)+\\ +\delta_{b1}f^{a2}-\delta_{a2}f^{1b}=0,\\ \text{æ}u^1g^{ab}_{u^1}+\left(\text{æ}u^2+u^1\right)g^{ab}_{u^2}+\text{æ}\left(\delta_{b1}g^{a1}+\delta_{b2}g^{a2}-\delta_{a1}g^{1b}-\delta_{a2}g^{2b}\right)+\end{gathered}\tag{2.47}$$

$$+\delta_{b1}g^{a2}-\delta_{a2}g^{1b}+\delta_{ab}=0, \tag{2.48}$$

$$æu^1h^a_{u^1}+\left(æu^2+u^1\right)h^a_{u^2}-(\delta_{a1}æ+\delta_{a2})h^1-\delta_{a2}æh^2=0. \tag{2.49}$$

Система (2.47) має загальний розв'язок

$$f^{11}=\varphi^{11}-\varphi^{12}\frac{u^2}{u^1}, \qquad f^{12}=\varphi^{12},$$

$$f^{21}=\varphi^{21}+(\varphi^{11}-\varphi^{22})\frac{u^2}{u^1}-\varphi^{12}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2, \qquad f^{22}=\varphi^{22}+\varphi^{12}\frac{u^2}{u^1},$$

де φ^{ab}=$\varphi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega=u^1e^{-æ\frac{u^2}{u^1}}$. Заміна

$$g^{ab}=\sigma^{ab}-\delta_{ab}\frac{u^2}{u^1}$$

зводить систему (2.48) до вигляду (2.47), тому

$$g^{11}=\psi^{11}-(1+\psi^{12})\frac{u^2}{u^1}, \qquad g^{12}=\psi^{12},$$

$$g^{21}=\psi^{21}+(\psi^{11}-\psi^{22})\frac{u^2}{u^1}-\psi^{12}\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2, \qquad g^{22}=\psi^{22}-(1-\psi^{12})\frac{u^2}{u^1},$$

де ψ^{ab}=$\psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції. Розв'язавши систему (2.49), отримуємо вигляд функцій h^a, за яких система (2.1) інваріантна відносно зображення алгебри Галілея (2.25), (2.29),

$$h^1=\chi^1u^1, \quad h^2=\chi^1u^2+\chi^2u^1,$$

де χ^a=$\chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Теорему доведено.

Теорема 2.5. *Система* (2.1) *інваріантна відносно зображення алгебри Галілея* (2.25), (2.30) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають вигляду*

$$\begin{gathered}F(U)=D\left(\tfrac{u^2}{u^1},\varphi\right)=\begin{pmatrix}\varphi^{11} & \varphi^{12}\frac{u^1}{u^2}\\ \varphi^{21}\frac{u^2}{u^1} & \varphi^{22}\end{pmatrix},\\ G(U)=D\left(\tfrac{u^2}{u^1},\psi\right)-\ln u^1E,\ \ H(U)=\begin{pmatrix}\chi^1u^1\\ \chi^2u^2\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{2.50}$$

де $\varphi^{ab}{=}\varphi^{ab}(\omega)$, $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\chi^{a}{=}\chi^{a}(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргументу* $\omega = \frac{\left(u^1\right)^{k+1}}{u^2}$.

Доведення. Координати інфінітезимального оператора X за умови (2.30) мають вигляд

$$\xi^0 = q_0, \quad \xi^1 = rx_0 + q_1, \quad \eta^1 = ru^1, \quad \eta^2 = r(k+1)u^2. \tag{2.51}$$

Підставивши (2.51) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи, отримуємо систему для знаходження нелінійностей f^{ab}, g^{ab}, h^a:

$$u^1 f^{ab}_{u^1} + (k{+}1)\, u^2 f^{ab}_{u^2} + (k{+}1)\left(\delta_{b2} f^{a2} {-} \delta_{a2} f^{2b}\right) + \delta_{b1} f^{a1} {-} \delta_{a1} f^{1b} {=} 0, \tag{2.52}$$

$$u^1 g^{ab}_{u^1} {+} (k{+}1)\, u^2 g^{ab}_{u^2} + (k{+}1)\left(\delta_{b2} g^{a2} {-} \delta_{a2} g^{2b}\right) {+} \delta_{b1} g^{a1} {-} \delta_{a1} g^{1b} {+} \delta_{ab} {=} 0, \tag{2.53}$$

$$u^1 h^{a}_{u^1} {+} (k{+}1)\, u^2 h^{a}_{u^2} - \delta_{a1} h^1 - \delta_{a2}(k+1)h^2 = 0. \tag{2.54}$$

Загальний розв'язок системи (2.52) — це функції, які утворюють матрицю

$$F(U) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \frac{u^1}{u^2} \\ \varphi^{21} \frac{u^2}{u^1} & \varphi^{22} \end{pmatrix} = D\left(\frac{u^2}{u^1}, \varphi\right)$$

де $\varphi^{ab}{=}\varphi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega = \frac{\left(u^1\right)^{k+1}}{u^2}$. Заміна

$$g^{ab} = \sigma^{ab} - \delta_{ab} \ln u^1$$

зводить систему (2.53) до вигляду (2.52), тому

$$g^{11} = \psi^{11} - \ln u^1, \quad g^{12} = \psi^{12} \frac{u^1}{u^2}, \quad g^{21} = \psi^{21} \frac{u^2}{u^1}, \quad g^{22} = \psi^{22} - \ln u^1,$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Загальним розв'язком системи (2.54) є функції

$$h^1 = \chi^1 u^1, \quad h^2 = \chi^2 u^2,$$

де $\chi^a{=}\chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Теорему доведено.

Теорема 2.6. *Система (2.1) інваріантна відносно зображення алгебри Галілея* (2.25), (2.31) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають вигляду*

$$
\begin{gathered}
F(U) = D(u^1, u^2, \varphi) = \begin{pmatrix} \varphi^3 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b & -\varphi^4 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b \\ \varphi^4 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b & \varphi^3 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b \end{pmatrix}, \\
G(U) = D(u^1, u^2, \psi) + \operatorname{arctg}\tfrac{u^1}{u^2}E, \;\; H(U) = \begin{pmatrix} \delta_{ab}\chi^a u^b \\ -\varepsilon_{ab}\chi^a u^b \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{2.55}
$$

де $\varphi^i{=}\varphi^i(\omega)$, $\psi^i{=}\psi^i(\omega)$, $\chi^a{=}\chi^a(\omega)$ *— довільні гладкі функції аргументу* $\omega = \vec{u}^2 e^{2k\operatorname{arctg}\frac{u^1}{u^2}}$, $\vec{u} = (u^1,\ u^2)$, $i = \overline{1,4}$, $a, b = 1, 2$.

Доведення. Координати інфінітезимального оператора X за умови (2.31) мають вигляд

$$
\xi^0 = q_0, \quad \xi^1 = rx_0 + q_1, \quad \eta^1 = r(ku^1 - u^2), \quad \eta^2 = r(u^1 + ku^2). \tag{2.56}
$$

Підставивши (2.56) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&\left(ku^1 - u^2\right) f^{ab}_{u^1} + \left(u^1 + ku^2\right) f^{ab}_{u^2} + \left(k\delta_{b1} - \delta_{b2}\right) f^{a1} + \left(\delta_{b1} + k\delta_{b2}\right) f^{a2} - \\
&- \delta_{a1}\left(kf^{1b} - f^{2b}\right) - \delta_{a2}\left(f^{1b} + kf^{2b}\right) = 0, \qquad (2.57)\\
&\left(ku^1 - u^2\right) g^{ab}_{u^1} + \left(u^1 + ku^2\right) g^{ab}_{u^2} + \left(k\delta_{b1} - \delta_{b2}\right) g^{a1} + \left(\delta_{b1} + k\delta_{b2}\right) g^{a2} - \\
&- \delta_{a1}\left(kg^{1b} - g^{2b}\right) - \delta_{a2}\left(g^{1b} + kg^{2b}\right) + \delta_{ab} = 0, \qquad (2.58)\\
&\left(ku^1 - u^2\right) h^a_{u^1} + \left(u^1 + ku^2\right) h^a_{u^2} - \delta_{a1}\left(kh^1 - h^2\right) - \delta_{a2}\left(h^1 + kh^2\right) = 0. \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

Загальним розв'язком системи (2.57) є функції

$$
\begin{aligned}
f^{11} &= \varphi^3 + \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\left(\varphi^1 u^2 - \varphi^2 u^1\right), \qquad & f^{12} &= -\varphi^4 + \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\left(\varphi^1 u^2 - \varphi^2 u^1\right), \\
f^{21} &= \varphi^4 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\left(\varphi^1 u^1 + \varphi^2 u^2\right), \qquad & f^{22} &= \varphi^3 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\left(\varphi^1 u^1 + \varphi^2 u^2\right),
\end{aligned}
$$

де $\varphi^i{=}\varphi^i(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega = \vec{u}^2 e^{2k\operatorname{arctg}\frac{u^1}{u^2}}$. Очевидно, ввівши в розгляд матриці $\varepsilon = (\varepsilon_{ab}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ та $\delta = (\delta_{ab}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, отримуємо наступний вигляд функцій f^{ab}:

$$f^{11} = \varphi^3 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b, \qquad f^{12} = -\varphi^4 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b,$$
$$f^{21} = \varphi^4 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b, \qquad f^{22} = \varphi^3 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b.$$

Заміною

$$g^{ab} = \sigma^{ab} + \delta_{ab}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u^1}{u^2}$$

система (2.58) зводиться до вигляду (2.57), тому

$$g^{11} = \psi^3 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b + \mathrm{arctg}\,\frac{u^1}{u^2}, \quad g^{12} = -\psi^4 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\varepsilon_{ab}\varphi^a u^b,$$
$$g^{21} = \psi^4 - \frac{2u^1}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b, \qquad g^{22} = \psi^3 - \frac{2u^2}{\vec{u}^2}\delta_{ab}\varphi^a u^b + \mathrm{arctg}\,\frac{u^1}{u^2},$$

де $\psi^i{=}\psi^i(\omega)$ — довільні гладкі функції. Загальним розв'язком системи (2.59) є функції

$$h^1 = \chi^1 u^1 + \chi^2 u^2 = \delta_{ab}\chi^a u^b, \quad h^2 = \chi^1 u^2 - \chi^2 u^1 = -\varepsilon_{ab}\chi^a u^b,$$

де $\chi^a{=}\chi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Теорему доведено.

2.4. Класифікація зображень розширеної алгебри Галілея

Розширеною алгеброю Галілея ми назвали одну з реалізацій чотиривимірної лінійної алгебри диференціальних операторів 1–го порядку, для якої виконуються комутаційні співвідношення

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = X_2, \qquad [X_2, X_3] = 0, \tag{2.60}$$
$$[X_1, X_4] = 2X_1, \qquad [X_2, X_4] = X_2, \qquad [X_3, X_4] = -X_3. \tag{2.61}$$

Розширимо алгебру Галілея (2.25) оператором масштабних перетворень X_4 так, щоб виконувались умови комутування (2.61).

Згідно теореми 2.1 загальний вигляд оператора X_4 має бути таким

$$X_4 = A^4(x_0)\partial_0 + B^4(x_0, x_1)\partial_1 + (\sigma^{4ad}u^d + \tau^{4a})\partial_{u^a}, \tag{2.62}$$

де A^4, B^4, σ^{4ad}, τ^{4a} — довільні гладкі функції відповідних аргументів.

Із умови $[X_1, X_4] = 2X_1$, отримуємо $\dot{A}^4 = 2$, $B^4_0 = \sigma^{4ad}_0 = \tau^{4a}_0 = 0$. Вимагаючи виконання умови $[X_2, X_4] = X_2$, маємо $B^4_1{=}1$, $\sigma^{4ab}_1{=}\tau^{4a}_1{=}0$. Розв'язавши одержані рівняння, приходимо до висновку, що оператор X_4 набуває вигляду

$$X_4 = (2x_0 + c_0)\partial_0 + (x_1 + c_1)\partial_1 + (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a},$$

де c_0, c_1, α_{2ab}, β_{2a} — довільні сталі. Оператор масштабних перетворень або оператор ділатації позначимо D та, оскільки оператори ∂_0, ∂_1 входять до алгебри, покладемо

$$D = X_4 - c_0\partial_0 - c_1\partial_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2,$$

де

$$Q_2 = (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}. \tag{2.63}$$

Із комутаційних співвідношень $[X_3, X_4] = -X_3$ випливають умови комутування між операторами Q_1, Q_2:

$$[Q_1, Q_2] = -Q_1. \tag{2.64}$$

Отже, всі реалізації розширеної алгебри Галілея, що відповідають симетріям системи рівнянь (2.1), описуються наступною формулою:

$$AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2 \rangle, \tag{2.65}$$

де Q_2 набуває вигляду (2.63) та комутує з Q_1 згідно формули (2.64).

Прокласифікуємо зображення розширеної алгебри Галілея, що зводиться (враховуючи зображення алгебри (2.65)) до опису нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.7. *З точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *існує 6 нееквівалентних зображень розширеної алгебри Галілея* (2.65), *які визначаються операторами Q_1, Q_2, наведеними в наступній таблиці:*

Таблиця 2.1: Нееквівалентні зображення операторів Q_1, Q_2 у випадку двовимірного векторного поля U.

№	Q_1	Q_2
1.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$
2.	∂_{u^1}	$-I + u^2\partial_{u^1}$
3.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$
4.	$\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$
5.	$u^1\partial_{u^2}$	$kI + u^1\partial_{u^1}$
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$

У таблиці 2.1 $k \in \mathbb{R}$.

Доведення. Як вже вказувалось вище, оператор Q_1 набуває одного з виглядів (2.27)–(2.31), оператор Q_2 має вигляд (2.63), і вони мають комутувати за формулою (2.64).

Розглянемо зображення (2.27) оператора Q_1. Із умови комутування:

$$[\partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2},\ (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = -\partial_{u^1} - æu^1\partial_{u^2}$$

отримуємо систему рівнянь:

$$\alpha_{211} = -1, \quad æ\alpha_{212} = 0, \quad \alpha_{221} = æ\beta_{21}, \quad æ(\alpha_{222} + 2) = 0.$$

Очевидно, розв'язок цієї системи залежить від значень сталої æ.

1. Якщо æ=0, систему задовольняють сталі α_{211}=-1, α_{221}=0, а оператори Q_1, Q_2 набувають вигляду:

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = (-u^1 + \alpha_{212}u^2 + \beta_{21})\partial_{u^1} + (\alpha_{222}u^2 + \beta_{22})\partial_{u^2}. \quad (2.66)$$

2. Якщо æ=1, розв'язком системи є набір сталих α_{211}=-1, α_{212}=0, α_{221}=β_{21}, α_{222}=-2, а оператори Q_1, Q_2 мають вигляд:

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (-u^1 + \beta_{21})\partial_{u^1} + (\beta_{21}u^1 - 2u^2 + \beta_{22})\partial_{u^2}. \quad (2.67)$$

Оскільки у формули (2.66), (2.67) входять довільні сталі, то спробуємо спростити вигляд операторів. Знайдемо всі зображення Q_2, нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності

$$W = KU + L, \quad (2.68)$$

де $K = \left(\begin{smallmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $L = \left(\begin{smallmatrix} l_1 \\ l_2 \end{smallmatrix}\right)$, вимагаючи інваріантності відносно перетворень (2.68) оператора Q_1. Розглянемо кожен випадок окремо.

1. Після заміни (2.68) $\partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1} + k_{21}\partial_{w^2}$, тоді з рівності $Q_1 = \partial_{u^1} = \partial_{w^1}$ одержимо $k_{11} = 1$, $k_{21} = 0$. Таким чином, лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор Q_1, у даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \\ w^2 &= k_{22}u^2 + l_2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Із (2.69) маємо $\partial_{u^1} = \partial_{w^1}$, $\partial_{u^2} = k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2}$. Подіємо перетвореннями (2.69) на оператор Q_2 із (2.66). Одержимо

$$\begin{aligned} Q_2 = \Big[&-w^1 + \frac{1}{k_{22}}(\alpha_{212} + k_{12}(\alpha_{222}+1))w^2 + l_1 + \beta_{21} + k_{12}\beta_{22} - \\ &- \frac{l_2}{k_{22}}(\alpha_{212} + k_{12}(\alpha_{222}+1))\Big]\partial_{w^1} + \left[\alpha_{222}w^2 + k_{22}\beta_{22} - \alpha_{222}l_2\right]\partial_{w^2} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Підберемо сталі k_{ab}, l_a таким чином, щоб максимально спростити оператор (2.70). Неважко побачити, що це виконується за таких наборів констант:

(a) $\alpha_{222} \neq 0, -1$, $k_{12} = -\frac{\alpha_{212}}{\alpha_{222}+1}$, $l_1 = -\beta_{21} + \frac{\alpha_{212}\beta_{22}}{\alpha_{222}+1}$, $l_2 = \frac{k_{22}\beta_{22}}{\alpha_{222}}$, тоді $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} + \alpha_{222}w^2\partial_{w^2}$;

(b) $\alpha_{222}{=}-1$, $k_{22}{=}\alpha_{212} \neq 0$, $l_1{=}-\beta_{21} - k_{12}\beta_{22} - \alpha_{212}\beta_{22}$, $l_2{=}-\alpha_{212}\beta_{22}$, тоді $Q_2 = -I + w^2\partial_{w^1}$;

(c) $\alpha_{222}{=}-1$, $\alpha_{212} = 0$, $l_1{=}-\beta_{21} - k_{12}\beta_{22}$, $l_2{=}-k_{22}\beta_{22}$, $Q_2 = -I$;

(d) $\alpha_{222}{=}0$, $\beta_{22} \neq 0$, $k_{12} = -\alpha_{212}$, $l_1 = -\beta_{21} + \alpha_{212}\beta_{22}$, $k_{22} = \frac{1}{\beta_{22}}$, тоді $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} + \partial_{w^2}$;

(e) $\alpha_{222}{=}0$, $\beta_{22} = 0$, $k_{12} = -\alpha_{212}$, $l_1 = -\beta_{21}$, тоді $Q_2 = -w^1\partial_{w^1}$.

Очевидно, пункти (c) і (e) доповнюють (a) за умов $\alpha_{222}{=}-1$ та $\alpha_{222}{=}0$, відповідно. Тому ці три пункти об'єднуємо в один — пункт (a) без умови $\alpha_{222} \neq 0, -1$. Отримана класифікація відповідає першим трьом пунктам таблиці 2.1 (після перепозначення $\alpha_{222} = k$, $w^a = u^a$).

2. Вимагаючи, щоб оператор $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$ був інваріантним відносно перетворень (2.68), одержуємо умови $k_{11}{=}k_{22}{=}1$, $k_{12}{=}0$, $k_{21}{=}l_1$. Таким чином, лінійні невироджені перетворення, які не змінюють оператора Q_1 мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= u^1 + l_1, \\ w^2 &= l_1u^1 + u^2 + l_2. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Звідси $\partial_{u^1} = \partial_{w^1} + l_1\partial_{w^2}$, $\partial_{u^2} = \partial_{w^2}$. Подіявши перетвореннями (2.71) на оператор Q_2 із (2.67), отримуємо

$$Q_2{=}\left[-w^1{+}l_1{+}\beta_{21}\right]\partial_{w^1}{+}\left[(l_1{+}\beta_{21})w^1{-}2w^2{+}2l_2{+}\beta_{22}{-}l_1^2\right]\partial_{w^2}. \tag{2.72}$$

Вибравши сталі $l_1 = -\beta_{21}$, $l_2 = \frac{\beta_{21}^2-\beta_{22}}{2}$, бачимо, що (2.72) набуває вигляду $Q_2 = -w^1\partial_{w^1} - 2w^2\partial_{w^2} = -I - w^2\partial_{w^2}$, що відповідає четвертому пункту таблиці (2.1).

Розглянемо зображення (2.28) оператора Q_1. Із умови комутування:

$$[Q_1, Q_2] = [\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2},\ (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = -\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$$

отримуємо систему рівнянь

$$\alpha_{211} + \alpha_{212}u^2 = -1, \quad \alpha_{221} + \alpha_{222}u^2 - (\alpha_{22b}u^b + \beta_{22}) = -u^2,$$

яка, очевидно, не має розв'язків. Отже, за умови (2.28) алгебру Галілея (2.25) неможливо розширити оператором масштабних перетворень.

Розглянемо зображення (2.29) оператора Q_1. Записавши комутаційні співвідношення між операторами Q_1, Q_2:

$$[Q_1, Q_2] = [æI + u^1\partial_{u^2},\ (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = -æI - u^1\partial_{u^2},$$

отримуємо систему

$$\begin{aligned} &æ\alpha_{211}u^1 + \alpha_{212}(æu^2 + u^1) - æ(\alpha_{21b}u^b + \beta_{21}) = -æu^1, \\ &æ\alpha_{221}u^1 + \alpha_{222}(æu^2+u^1) - (\alpha_{21b}u^b+\beta_{21}) - æ(\alpha_{22b}u^b+\beta_{22}) = -æu^2 - u^1. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Розщепивши її за степенями u^1, u^2, одержуємо набір сталих

$$æ = 0, \quad \alpha_{212} = \beta_{21} = 0, \quad \alpha_{222} = \alpha_{211} - 1,$$

які задовольняють систему (2.73) та визначають вигляд операторів Q_1, Q_2:

$$Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \alpha_{211}u^1\partial_{u^1} + \left[\alpha_{221}u^1 + (\alpha_{211} - 1)u^2 + \beta_{22}\right]\partial_{u^2}. \tag{2.74}$$

Із умови інваріантності оператора Q_1 відносно перетворень (2.68) маємо:

$$Q_1 = \frac{1}{\det K}\left[k_{22}w^1 - k_{12}w^2 + k_{12}l_2 - k_{22}l_1\right](k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2}) = w^1\partial_{w^2}. \tag{2.75}$$

Звідси випливає, що лінійні невироджені перетворення еквівалентності, які не змінюють оператора Q_1, мають вигляд

$$\begin{aligned} &w^1 = k_{11}u^1, \\ &w^2 = k_{21}u^1 + k_{11}u^2 + l_2. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Подіявши перетвореннями (2.76) на оператор Q_2, отримуємо

$$Q_2 = \alpha_{211}w^1\partial_{w^1} + \left[(\alpha_{221} + \frac{k_{21}}{k_{11}})w^1 + (\alpha_{211} - 1)w^2 + k_{11}\beta_{22} - (\alpha_{211} - 1)l_2\right]\partial_{u^2}.$$

Спробуємо максимально спростити його вигляд, підбираючи відповідні значення для констант k_{ab}, l_a. Таким чином, спрощення вигляду оператора Q_2 можливі за наступних наборів сталих:

1. $\alpha_{211} \neq 1, \quad l_2 = \frac{k_{11}\beta_{22}}{\alpha_{211}-1}, \quad k_{21} = -k_{11}\alpha_{221}$, тоді оператор Q_2 має вигляд $Q_2 = \alpha_{211} w^1 \partial_{w^1} + (\alpha_{211} - 1) w^2 \partial_{w^2}$;
2. $\alpha_{211} = 1, \quad \beta_{22} \neq 0, \quad k_{11} = \frac{1}{\beta_{22}}, \quad k_{21} = -\frac{\alpha_{221}}{\beta_{22}}$, тоді $Q_2 = w^1 \partial_{w^1} + \partial_{w^2}$;
3. $\alpha_{211} = 1, \quad \beta_{22} = 0, \quad k_{21} = -k_{11}\alpha_{221}$, тоді оператор Q_2 набуває вигляду $Q_2 = w^1 \partial_{w^1}$.

Очевидно, третій пункт є доповненням першого, якщо $\alpha_{211} = 1$, тому логічно їх об'єднати в один — перший (відкинувши обмеження $\alpha_{211} \neq 1$).

Таким чином, оператори пункту 1. із вказаною поправкою співпадають з операторами п'ятого пункту таблиці 2.1 після перепозначення $\alpha_{211} = k+1$, $w^a = u^a$, а оператори пункту 2. після перепозначення $w^a = u^a$ відповідають шостому пункту таблиці 2.1.

При розгляді зображень (2.30), (2.31) оператора Q_1 спроба виконати умову комутування (2.64) приводить до систем, які не задовольняє жоден набір сталих.

Отже, за умов (2.30), (2.31) алгебру Галілея (2.25) неможливо розширити оператором масштабних перетворень.

Теорему доведено.

Таким чином, всі реалізації алгебри $AG_1(1,1)$, що відповідають симетріям системи (2.1), описує алгебра (2.65), де оператори Q_1, Q_2 набувають одного з виглядів, наведених у таблиці 2.1.

2.5. Інваріантність системи (2.1) відносно розширеної алгебри Галілея

Дослідимо, за яких значень нелінійностей F, G, H система (2.1) буде інваріантною відносно алгебри $AG_1(1,1)$. Для цього уточнимо вигляди систем із теорем 2.2–2.6, для яких можливе розширення алгебри $AG(1,1)$ оператором масштабних перетворень.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.8. *Система (2.1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея* (2.65) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності F, G, H з точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *набувають одного з наступних виглядів*

$$
\begin{gathered}
F(U) = D(u^2,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}(u^2)^{k-1} \\ \lambda_{21}(u^2)^{1-k} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\
G(U) = D(u^2,\mu)(u^2)^k - u^1 E,\ \ H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 (u^2)^{3k} \\ \nu_2 (u^2)^{2k+1} \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.77}
$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{k}u^2\partial_{u^2}$*;*

$$
F(U)=\begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}, G(U)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi & 0 \end{pmatrix} - u^1E, H(U)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.78}
$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1}$*;* $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$, $\psi = \psi(u^2)$ *– довільні гладкі функції;*

$$
\begin{gathered}
F(U)=D(u^2,\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_{21}\ln u^2 & \lambda_{12}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})\ln u^2 - \lambda_{21}\ln^2 u^2 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}+\lambda_{21}\ln u^2 \end{pmatrix}, \\
G(U)=D(u^2,\mu)u^2-(u^1+u^2\ln u^2)E,\ \ H(U)=\begin{pmatrix} \nu_1-\nu_2\ln u^2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}(u^2)^3,
\end{gathered} \tag{2.79}
$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -I + u^2\partial_{u^1}$*;*

$$
\begin{gathered}
F(U)=D(u^2,\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12}e^{-u^2} \\ \lambda_{21}e^{u^2} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \\
G(U) = D(u^2,\mu)e^{-u^2} - u^1E,\ \ H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 e^{-3u^2} \\ \nu_2 e^{-2u^2} \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.80}
$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$*;*

$$
\begin{gathered}
F(U) = D(u^1,\omega,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_{12}\frac{u^1}{\sqrt{\omega}} & \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\omega}} \\ \lambda_{21}\sqrt{\omega}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})u^1-\lambda_{12}\frac{(u^1)^2}{\sqrt{\omega}} & \lambda_{22}+\lambda_{12}\frac{u^1}{\sqrt{\omega}} \end{pmatrix}, \\
G(U)=D(u^1,\omega,\mu)\sqrt{\omega}-u^1E, H(U)=\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_1 u^1+\nu_2\sqrt{\omega} \end{pmatrix}\omega^{\frac{3}{2}}, \omega=u^2-\frac{\left(u^1\right)^2}{2},
\end{gathered} \tag{2.81}
$$

коли $Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -I - u^2\partial_{u^2}$;

$$F(U){=}D(u^1,u^2,\lambda){=}\begin{pmatrix} \lambda_{11}{-}\lambda_{12}\frac{u^2}{(u^1)^{k+1}} & \lambda_{12}(u^1)^{-k} \\ \lambda_{21}(u^1)^k{+}(\lambda_{11}{-}\lambda_{22})\frac{u^2}{u^1}{-}\lambda_{12}\frac{(u^2)^2}{(u^1)^{k+2}} & \lambda_{22}{+}\lambda_{12}\frac{u^2}{(u^1)^{k+1}} \end{pmatrix}$$
$$G(U){=}D(u^1,u^2,\mu)(u^1)^k{-}\frac{u^2}{u^1}E,\ \ H(U){=}\begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2(u^1)^{k+1}+\nu_1 u^2 \end{pmatrix}(u^1)^{2k}, \tag{2.82}$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = u^1\partial_{u^1} - \frac{k+1}{k}I$;

$$F(U){=}\begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 \\ (\varphi^1{-}\varphi^2)\frac{u^2}{u^1} & \varphi^2 \end{pmatrix}, G(U){=}\begin{pmatrix} -1 & \frac{u^1}{u^2} \\ -\frac{u^2}{u^1} & 1 \end{pmatrix}\frac{u^2}{u^1}\psi{-}\frac{u^2}{u^1}E,\ H(U){=}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$; $\varphi^a = \varphi^a(u^1)$, $\psi = \psi(u^1)$ – *довільні гладкі функції;*

$$F(U) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}{-}\lambda_{12}\left(u^2{-}\ln u^1\right) & \lambda_{12}u^1 \\ \frac{\lambda_{21}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})(u^2-\ln u^1)-\lambda_{12}(u^2-\ln u^1)^2}{u^1} & \lambda_{22}+\lambda_{12}(u^2-\ln u^1) \end{pmatrix} =$$
$$= D(u^1,u^2,\lambda),\ \ G(U){=}D(u^1,u^2,\mu)\frac{1}{u^1} - \frac{u^2-\ln u^1}{u^1}E, \tag{2.84}$$
$$H(U) = \begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2+\nu_1\left(u^2-\ln u^1\right) \end{pmatrix}(u^1)^{-2},$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$,
у системах (2.77)–(2.84) k, λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a – *довільні сталі.*

Доведення. Розглянемо систему (2.1) з нелінійностями (2.32) у разі $æ = 0$, оскільки, як видно з таблиці 2.1, у перших трьох її пунктах розширення зображення алгебри (2.25), (2.27) відбувається за умови $æ = 0$. Розглянемо кожен із цих випадків окремо.

1. Зображення операторів Q_1, Q_2 з першого пункту таблиці 2.1 визначає базисні оператори розширеної алгебри Галілея:

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G = x_0\partial_1+\partial_{u^1},\quad D = 2x_0\partial_0+x_1\partial_1-u^1\partial_{u^1}+ku^2\partial_{u^2} \tag{2.85}$$

   та координати оператора X:

$$\xi^0 = 2cx_0{+}q_0,\quad \xi^1 = cx_1{+}rx_0{+}q_1,\quad \eta^1 = -cu^1{+}r,\quad \eta^2 = cku^2, \tag{2.86}$$

де c, r, q_0, q_1 — довільні сталі. Підставивши (2.86) у визначальну систему (2.17)–(2.19) та врахувавши формули (2.35)–(2.37) за умови $æ = 0$, бачимо, що вона зводиться до наступної системи:

$$-u^1 f^{ab}_{u^1} + k u^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{a1} f^{1b} - \delta_{b1} f^{a1} + k(\delta_{b2} f^{a2} - \delta_{a2} f^{2b}) = 0, \tag{2.87}$$

$$-u^1 g^{ab}_{u^1} + k u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{a1} g^{1b} - \delta_{b1} g^{a1} + k(\delta_{b2} g^{a2} - \delta_{a2} g^{2b}) + g^{ab} = 0, \tag{2.88}$$

$$-u^1 h^a_{u^1} + k u^2 h^a_{u^2} + \delta_{a1} h^1 - \delta_{a2} k h^2 + 2h^a = 0. \tag{2.89}$$

Підставимо нелінійності (2.32) за умови $æ = 0$ у систему (2.87)–(2.89) та розв'яжемо її. Очевидно, розв'язок отриманої системи залежить від значень сталої k. У разі $k \neq 0$ її загальним розв'язком є функції

$$\begin{aligned}
f^{11} &= \lambda_{11}, & f^{12} &= \lambda_{12}(u^2)^{-\frac{1}{k}-1},\\
f^{21} &= \lambda_{21}(u^2)^{\frac{1}{k}+1}, & f^{22} &= \lambda_{22};\\
g^{11} &= \mu_{11}(u^2)^{-\frac{1}{k}} - u^1, & g^{12} &= \mu_{12}(u^2)^{-\frac{2}{k}-1},\\
g^{21} &= \mu_{21}u^2, & g^{22} &= \mu_{22}(u^2)^{-\frac{1}{k}} - u^1;\\
h^1 &= \nu_1(u^2)^{-\frac{3}{k}}, & h^2 &= \nu_2(u^2)^{-\frac{2}{k}+1},
\end{aligned} \tag{2.90}$$

де λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a – довільні сталі. Перепозначивши в отриманих функціях $-\frac{1}{k} \to k$ приходимо до нелінійностей (2.77). За умови $k = 0$ систему (2.87)–(2.89) задовольняють нелінійності (2.78).

Перші два пункти теореми доведено.

2. Оператори Q_1, Q_2 з другого пункту таблиці 2.1 визначають базисні оператори розширеної алгебри Галілея:

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - I + u^2\partial_{u^1} \tag{2.91}$$

та координати оператора X

$$\xi^0 = 2cx_0 + q_0, \quad \xi^1 = cx_1 + rx_0 + q_1, \quad \eta^1 = c(u^2 - u^1) + r, \quad \eta^2 = -cu^2. \tag{2.92}$$

Підставивши (2.92) у визначальну систему (2.17)–(2.19) та врахувавши формули (2.35)–(2.37) за умови æ $= 0$, отримуємо

$$(u^2-u^1)f^{ab}_{u^1}-u^2f^{ab}_{u^2}+[\delta_{c1}(\delta_{b2}-\delta_{b1})-\delta_{c2}\delta_{b2}]\,f^{ac}-$$
$$-\,[\delta_{a1}(\delta_{c2}-\delta_{c1})-\delta_{c2}\delta_{a2}]\,f^{cb}=0, \tag{2.93}$$
$$(u^2-u^1)g^{ab}_{u^1}-u^2g^{ab}_{u^2}+[\delta_{c1}(\delta_{b2}-\delta_{b1})-\delta_{c2}\delta_{b2}]\,g^{ac}-$$
$$-\,[\delta_{a1}(\delta_{c2}-\delta_{c1})-\delta_{c2}\delta_{a2}]\,g^{cb}+g^{ab}=0, \tag{2.94}$$
$$(u^2-u^1)h^{a}_{u^1}-u^2h^{a}_{u^2}-[\delta_{a1}(\delta_{c2}-\delta_{c1})-\delta_{c2}\delta_{a2}]\,h^{c}+2h^a=0. \tag{2.95}$$

Розв'яжемо систему (2.93)–(2.95), попередньо підставивши в неї нелінійності (2.32) при æ $= 0$. Приходимо до висновку, що загальним розв'язком системи є нелінійності (2.79).

Третій пункт теореми доведено.

3. Для розширеної алгебри Галілея, яку визначають оператори Q_1, Q_2 з третього пункту таблиці 2.1, координати інфінітезимального оператора X мають вигляд

$$\xi^0=2cx_0+q_0,\quad \xi^1=cx_1+rx_0+q_1,\quad \eta^1=-cu^1+r,\quad \eta^2=c. \tag{2.96}$$

Підставивши (2.96) у визначальну систему (2.17)–(2.19) та врахувавши формули (2.35)–(2.37) за умови æ $= 0$, отримуємо систему

$$-\,u^1f^{ab}_{u^1}+f^{ab}_{u^2}-\delta_{b1}f^{a1}+\delta_{a1}f^{1b}=0, \tag{2.97}$$
$$-\,u^1g^{ab}_{u^1}+g^{ab}_{u^2}-\delta_{b1}g^{a1}+\delta_{a1}g^{1b}+g^{ab}=0, \tag{2.98}$$
$$-\,u^1h^{a}_{u^1}+h^{a}_{u^2}+\delta_{a1}h^{1}+2h^a=0. \tag{2.99}$$

Підставимо нелінійності (2.32) при æ $= 0$ у систему (2.97)–(2.99) та, розв'язавши її, знаходимо функції

$$\varphi^{11}=\lambda_{11},\qquad \varphi^{12}=\lambda_{12}e^{-u^2},\qquad \varphi^{21}=\lambda_{21}e^{u^2},\qquad \varphi^{22}=\lambda_{22},$$
$$\psi^{11}=\mu_{11}e^{-u^2},\qquad \psi^{12}=\mu_{12}e^{-2u^2},\qquad \psi^{21}=\mu_{21},\qquad \psi^{22}=\mu_{22}e^{-u^2},$$

$$\chi^1 = \nu_1 e^{-3u^2}, \qquad \chi^2 = \nu_2 e^{-2u^2}.$$

Очевидно, підставивши ці функції у (2.32), одержуємо нелінійності (2.80).

Четвертий пункт теореми доведено.

У четвертому пункті таблиці 2.1 розширення зображення алгебри (2.25), (2.27) відбувається за умови æ $= 1$, тому розглянемо систему (2.1) з нелінійностями (2.32) у разі æ $= 1$.

Для операторів Q_1, Q_2 із четвертого пункту таблиці 2.1 координати оператора X мають вигляд

$$\xi^0{=}2cx_0{+}q_0, \quad \xi^1{=}cx_1{+}rx_0{+}q_1, \quad \eta^1{=}{-}cu^1{+}r, \quad \eta^2{=}{-}2cu^2{+}ru^1. \tag{2.100}$$

Підставимо (2.100) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи та, врахувавши формули (2.35)–(2.37) за умови æ $= 1$, отримуємо систему

$$-u^1 f^{ab}_{u^1} - 2u^2 f^{ab}_{u^2} + \delta_{a1} f^{1b} - \delta_{b1} f^{a1} + 2(\delta_{a2} f^{2b} - \delta_{b2} f^{a2}) = 0, \tag{2.101}$$
$$-u^1 g^{ab}_{u^1} - 2u^2 g^{ab}_{u^2} + \delta_{a1} g^{1b} - \delta_{b1} g^{a1} + 2(\delta_{a2} g^{2b} - \delta_{b2} g^{a2}) + g^{ab}{=}0, \tag{2.102}$$
$$-u^1 h^a_{u^1} - 2u^2 h^a_{u^2} + \delta_{a1} h^1 + 2\delta_{a2} h^2{+}2h^a{=}0. \tag{2.103}$$

Підставимо нелінійності (2.32) за умови æ $= 1$ у систему (2.101)–(2.103) та, розв'язавши її, знаходимо функції

$$\varphi^{11} = \lambda_{11}, \qquad \varphi^{12} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\omega}}, \qquad \varphi^{21} = \lambda_{21}\sqrt{\omega}, \qquad \varphi^{22} = \lambda_{22},$$
$$\psi^{11} = \mu_{11}\sqrt{\omega}, \qquad \psi^{12} = \mu_{12}, \qquad \psi^{21} = \mu_{21}\omega, \qquad \psi^{22} = \mu_{22}\sqrt{\omega},$$
$$\chi^1 = \nu_1\sqrt{\omega^3}, \qquad \chi^2 = \nu_2\omega^2, \qquad \omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}.$$

Очевидно, підстановка отриманих функцій у (2.32) приводить до нелінійностей (2.81).

П'ятий пункт теореми доведено.

Як випливає з таблиці 2.1, для системи (2.39), інваріантної відносно алгебри Галілея (2.40), не існує розширень оператором масштабних перетворень.

Розглянемо систему (2.1) з нелінійностями (2.44). Із таблиці 2.1 випливає, що розширення алгебри Галілея (2.45) оператором масштабних перетворень можливе лише за умови $æ = 0$. Тому і в нелінійностях (2.44) приймемо $æ = 0$. Крім того, зазначимо, що є два випадки розширення оператором ділатації алгебри $AG(1,1)$ (відповідно, п'ятий та шостий пункти таблиці 2.1). Розглянемо кожен із них окремо.

1. Зображення Q_1, Q_2 із п'ятого пункту таблиці 2.1 визначає базисні оператори розширеної алгебри Галілея

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + u^1\partial_{u^2}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + kI + u^1\partial_{u^1} \quad (2.104)$$

та координати оператора X

$$\xi^0{=}2cx_0{+}q_0,\ \xi^1{=}cx_1{+}rx_0{+}q_1,\ \eta^1{=}(k{+}1)cu^1,\ \eta^2{=}cku^2{+}ru^1. \quad (2.105)$$

Підставимо (2.105) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи та, врахувавши формули (2.47)–(2.49) із $æ = 0$, отримуємо систему

$$(k{+}1)u^1 f^{ab}_{u^1}{+}ku^2 f^{ab}_{u^2}{-}(k{+}1)(\delta_{a1}f^{1b}{-}\delta_{b1}f^{a1}){-}k(\delta_{a2}f^{2b}{-}\delta_{b2}f^{a2}){=}0, \quad (2.106)$$

$$(k{+}1)u^1 g^{ab}_{u^1}{+}ku^2 g^{ab}_{u^2}{-}(k{+}1)(\delta_{a1}g^{1b}{-}\delta_{b1}g^{a1}){-}k(\delta_{a2}g^{2b}{-}\delta_{b2}g^{a2}){+}g^{ab}{=}0, \quad (2.107)$$

$$(k+1)u^1 h^a_{u^1} + ku^2 h^a_{u^2} - \delta_{a1}(k+1)h^1 - \delta_{a2}kh^2{+}2h^a{=}0. \quad (2.108)$$

Підставимо нелінійності (2.44) за умови $æ = 0$ у систему (2.106)–(2.108) та розв'яжемо її. Очевидно, в залежності від значень сталої k отримуємо два розгалудження.

(a) У разі $k \neq -1$ загальним розв'язком (2.106)–(2.108) є функції

$$\varphi^{11}{=}\lambda_{11},\ \varphi^{12}{=}\lambda_{12}(u^1)^{\frac{1}{k+1}},\ \varphi^{21}{=}\lambda_{21}(u^1)^{\frac{-1}{k+1}},\ \varphi^{22}{=}\lambda_{22},$$
$$\psi^{11}{=}\mu_{11}(u^1)^{\frac{-1}{k+1}},\ \psi^{12}{=}\mu_{12},\ \psi^{21}{=}\mu_{21}(u^1)^{\frac{-2}{k+1}},\ \psi^{22}{=}\mu_{22}(u^1)^{\frac{-1}{k+1}},$$
$$\chi^1{=}\nu_1(u^1)^{\frac{-2}{k+1}},\ \chi^2{=}\nu_2(u^1)^{\frac{-3}{k+1}},$$

які після заміни $\frac{-1}{k+1} \to k$ і підстановки в (2.44) приводять до шуканих нелінійностей (2.82).

(b) Якщо $k = -1$, систему (2.106)–(2.108) задовольняють функції

$$\varphi^{12}{=}\varphi^{21}{=}0,\quad \psi^{11}{=}\psi^{21}{=}\psi^{22}{=}0,\quad \chi^1{=}\chi^2{=}0,$$
$$\varphi^{11},\varphi^{22},\psi^{12}\text{— довільні гладкі функції аргументу } u^1.$$

Підставивши ці функції в (2.44) за умови $æ = 0$ та замінивши $\varphi^{11} = \varphi^1$, $\varphi^{22} = \varphi^2$, $\psi^{12} = \psi$, приходимо до нелінійностей (2.83).

Таким чином, шостий і сьомий пункти теореми доведено.

2. Зображення Q_1, Q_2 із шостого пункту таблиці 2.1 визначає наступні базисні оператори алгебри $AG_1(1,1)$:

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G = x_0\partial_1 + u^1\partial_{u^2},\quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2} \tag{2.109}$$

та координати оператора X

$$\xi^0{=}2cx_0{+}q_0,\ \xi^1{=}cx_1{+}rx_0{+}q_1,\ \eta^1{=}cu^1,\ \eta^2{=}c{+}ru^1. \tag{2.110}$$

Підставимо (2.110) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи та з урахуванням формул (2.47)–(2.49) за умови $æ = 0$, одержуємо

$$u^1f^{ab}_{u^1}{+}f^{ab}_{u^2}{-}(\delta_{a1}f^{1b}{-}\delta_{b1}f^{a1}){=}0, \tag{2.111}$$
$$u^1g^{ab}_{u^1}{+}g^{ab}_{u^2}{-}(\delta_{a1}g^{1b}{-}\delta_{b1}g^{a1}){+}g^{ab}{=}0, \tag{2.112}$$
$$u^1h^a_{u^1} + h^a_{u^2} - \delta_{a1}h^1{+}2h^a{=}0. \tag{2.113}$$

Підставивши нелінійності (2.44) при æ $= 0$ у систему (2.111)–(2.113) та розв'язавши її, уточнюємо вигляд функцій φ^{ab}, ψ^{ab}, χ^a та отримуємо нелінійності (2.84).

Восьмий пункт теореми доведено.

Якщо розглянути систему (2.1) з нелінійностями (2.50) і (2.55), то згідно таблиці 2.1 розширення алгебр Галілея оператором масштабних перетворень у цих випадках неможливе.

Теорему доведено.

2.6. Класифікація зображень узагальненої алгебри Галілея

Узагальненою алгеброю Галілея ми назвали одну з реалізацій п'ятивимірної лінійної алгебри диференціальних операторів 1-го порядку, для якої виконуються комутаційні співвідношення (2.60), (2.61) та наступні умови комутування:

$$[X_1, X_5] = X_4, \quad [X_2, X_5] = X_3, \quad [X_3, X_5] = 0, \quad [X_4, X_5] = 2X_5. \quad (2.114)$$

Розширимо алгебру (2.65) оператором проективних перетворень X_5 так, щоб виконувались умови комутування (2.114). Отриману алгебру назвемо узагальненою алгеброю Галілея, а оператор X_5 — проективним оператором і позначимо його П.

Згідно теореми 2.1 загальний вигляд оператора X_5 має бути таким

$$X_4 = A^5(x_0)\partial_0 + B^5(x_0, x_1)\partial_1 + (\sigma^{5ad}u^d + \tau^{5a})\partial_{u^a}, \quad (2.115)$$

де A^5, B^5, σ^{5ad}, τ^{5a} — довільні гладкі функції, які підлягають уточненню за формулами (2.114). Із умови $[X_1, X_5] = X_4$, маємо

$$\dot{A}^5 = 2x_0, \quad B^5_0 = x_1, \quad \sigma^{5ad}_0 = \alpha_{2ad}, \quad \tau^{5a}_0 = \beta_{2a}, \quad (2.116)$$

де α_{2ad}, β_{2a} — коефіцієнти оператора (2.63). Вимагаючи виконання умови $[X_2, X_5] = X_3$, отримуємо

$$B_1^5{=}x_0, \quad \sigma_1^{5ad}{=}\alpha_{1ad}, \quad \tau_1^{4a}{=}\beta_{1a}, \tag{2.117}$$

де α_{1ab}, β_{1a} — коефіцієнти оператора (2.26). Розв'язавши рівняння (2.116), (2.117), одержуємо вигляд оператора X_5:

$$X_5{=}(x_0^2{+}c_0)\partial_0{+}(x_0x_1{+}c_1)\partial_1{+}$$
$$+x_0(\alpha_{2ab}u^b{+}\beta_{2a})\partial_{u^a}{+}x_1(\alpha_{1ab}u^b{+}\beta_{1a})\partial_{u^a}{+}(\alpha_{3ab}u^b{+}\beta_{3a})\partial_{u^a},$$

де c_0, c_1, α_{3ab}, β_{3a} — довільні сталі. Оскільки оператори ∂_0, ∂_1 входять до алгебри, покладемо $\Pi = X_5 - c_0\partial_0 - c_1\partial_1 = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + x_1Q_1 + Q_3$, де Q_1, Q_2 визначені у формулах (2.26), (2.63), а оператор Q_3 має вигляд

$$Q_3 = (\alpha_{3ab}u^b + \beta_{3a})\partial_{u^a}. \tag{2.118}$$

Із комутаційних співвідношень $[X_3, X_5] = 0$ випливають умови комутування між операторами Q_1, Q_3:

$$[Q_1, Q_3] = 0. \tag{2.119}$$

Вимагаючи виконання умов комутування $[X_4, X_5] = 2X_5$, отримуємо співвідношення, за якими комутують оператори Q_2, Q_3:

$$[Q_2, Q_3] = 2Q_3. \tag{2.120}$$

Отже, всі реалізації узагальненої алгебри Галілея, що відповідають симетріям системи рівнянь (2.1), описуються алгеброю з наступними базисними генераторами

$$\begin{gathered} AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_0Q_2 + x_1Q_1 + Q_3\rangle, \end{gathered} \tag{2.121}$$

де оператори Q_s комутують один з одним згідно формул (2.64), (2.119), (2.120).

Прокласифікуємо зображення узагальненої алгебри Галілея, що зводиться (враховуючи зображення алгебри (2.121)) до класифікації нееквівалентних наборів операторів Q_1, Q_2, Q_3.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.9. *З точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *існує 8 нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея* (2.121), *які задаються операторами Q_1, Q_2, Q_3, наведеними в наступній таблиці:*

Таблиця 2.2: Нееквівалентні зображення операторів Q_1–Q_3 у випадку двовимірного векторного поля U.

№	Q_1	Q_2	Q_3
1.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$	0
2.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	$u^2\partial_{u^1}$
3.	∂_{u^1}	$-I + u^2\partial_{u^1}$	0
4.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$	0
5.	$\partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$	$l\partial_{u^2}$
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$kI + u^1\partial_{u^1}$	0
7.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I - u^2\partial_{u^2}$	∂_{u^2}
8.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$	0

У таблиці 2.2 $æ \in \{0, 1\}$, $(æ, l) \in \{(0, 1), (1, k)\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Доведення. Розглянемо реалізацію розширеної алгебри Галілея (2.85). Доповнимо її базисні генератори проективним оператором Π так, щоб між операторами $Q_s (s \in \{1, 3\})$ виконувались комутаційні співвідношення (2.119), (2.120). Виконання співвідношення (2.119) забезпечують сталі

$\alpha_{3a1} = 0$ і, таким чином,

$$Q_3 = (\alpha_{3a2} u^2 + \beta_{3a})\partial_{u^a}. \tag{2.122}$$

Очевидно, для того, щоб виконувалось співвідношення (2.120):

$$[-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}, (\alpha_{3a2}u^2 + \beta_{3a})\partial_{u^a}] = k\alpha_{3a2}u^2\partial_{u^a} + (\alpha_{312}u^2 + \beta_{31})\partial_{u^1} -$$
$$-(\alpha_{322}u^2 + \beta_{32})k\partial_{u^2} = 2(\alpha_{3a2}u^2 + \beta_{3a})\partial_{u^a},$$

існує кілька наборів сталих, а саме:

1. $k \neq 1, -2$, $\beta_{31} = \beta_{32} = \alpha_{312} = \alpha_{322} = 0$. У цьому випадку

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = 0; \tag{2.123}$$

2. $k = 1$, $\beta_{31} = \beta_{32} = \alpha_{322} = 0$, тоді $Q_3 = \alpha_{312}u^2\partial_{u^1}$. Після застосування перетворень еквівалентності $w^1 = u^1$, $w^2 = \alpha_{312}u^2$ за умови $\alpha_{312} \neq 0$ отримуємо наступні оператори

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = æu^2\partial_{u^1}; \tag{2.124}$$

3. $k = -2$, $\beta_{31} = \alpha_{312} = \alpha_{322} = 0$. Тому оператор $Q_3 = \beta_{32}\partial_{u^2}$. Застосувавши перетворення еквівалентності $w^1 = u^1$, $w^2 = \frac{1}{\beta_{32}}u^2$ у разі $\beta_{32} \neq 0$, зводимо оператори Q_s до вигляду

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = -u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}, \quad Q_3 = æ\partial_{u^2}. \tag{2.125}$$

Порівнюючи набори (2.123), (2.124), (2.125), приходимо до висновку, що за умови $æ = 0$ формули (2.124), (2.125) є доповненням формули (2.123) у разі $k = 1$ та $k = -2$, відповідно. Тому відкинемо у першому наборі операторів обмеження $k \neq 1, -2$, а в другому і третьому покладемо $æ = 1$.

Описані вище набори операторів Q_s відповідають першому, другому та п'ятому (при $(æ, l) = (0, 1)$) пунктам таблиці 2.2.

Розглянемо розширену алгебру Галілея (2.91), доповнимо її оператором П, причому оператор Q_3 одразу беремо у вигляді (2.122), оскільки оператори Q_1 алгебр (2.85), (2.91) співпадають. Із комутаційного співвідношення

$$[Q_2, Q_3] = -\alpha_{3a2}u^2\partial_{u^a} + (\alpha_{312}u^2 + \beta_{31})\partial_{u^1} + (\alpha_{322}u^2 + \beta_{32})(\partial_{u^2} - \partial_{u^1}) = \\ = 2(\alpha_{3a2}u^2 + \beta_{3a})\partial_{u^a}$$

отримуємо систему

$$-\alpha_{312}u^2 - (\alpha_{322}u^2 + \beta_{32}) = \alpha_{312}u^2 + \beta_{31}, \\ -\alpha_{322}u^2 = \alpha_{322}u^2 + \beta_{32},$$

яку задовольняє лише набір нульових констант, тобто $Q_3 = 0$, що співпадає з третім пунктом таблиці 2.2.

Аналогічно попередньому випадку, доповнивши оператором Π розширену алгебру Галілея, яку визначають оператори Q_1, Q_2 з третього пункту таблиці 2.1, бачимо, що вигляд оператора Q_3 описується формулою (2.122). Так само, виконання комутаційного співвідношення

$$[Q_2, Q_3] = \alpha_{3a2}\partial_{u^a} + (\alpha_{312}u^2 + \beta_{31})\partial_{u^1} = 2(\alpha_{3a2}u^2 + \beta_{3a})\partial_{u^a}$$

приводить до нульового набору сталих, тобто $Q_3 = 0$. Ми отримали оператори четвертого пункту таблиці 2.2.

Доповнюючи оператором Π реалізацію розширеної алгебри Галілея, яку визначають оператори Q_1, Q_2 з четвертого пункту таблиці 2.1, вимагаємо виконання умов комутування (2.119), (2.120). Перша з яких

$$[Q_1, Q_3] = \alpha_{3a1}\partial_{u^a} + \alpha_{3a2}u^1\partial_{u^a} - (\alpha_{31b}u^b + \beta_{31})\partial_{u^2} = 0$$

виконується, якщо $\alpha_{311} = \alpha_{312} = \alpha_{322} = 0$, $\alpha_{321} = \beta_{31}$; другу

$$[Q_2, Q_3] = -\beta_{31}u^1\partial_{u^2} + \beta_{31}\partial_{u^1} + 2(\beta_{31}u^1 + \beta_{32})\partial_{u^2} = 2\beta_{31}\partial_{u^1} + 2(\beta_{31}u^1 + \beta_{32})\partial_{u^2}$$

задовольняє стала $\beta_{31} = 0$, отже, $Q_3 = \beta_{32}\partial_{u^2}$. Заміна $\beta_{32} = k$ приводить до зображень алгебри, описаних за умови $(æ, l) = (1, k)$ у п'ятому пункті таблиці 2.2.

Розглянемо алгебру (2.104) та доповнимо її оператором проективних перетворень. Умова комутування (2.119):

$$[Q_1, Q_3] = \alpha_{3a2} u^1 \partial_{u^a} - (\alpha_{31b} u^b + \beta_{31}) \partial_{u^2} = 0 \tag{2.126}$$

виконується у разі $\alpha_{312} = \beta_{31} = 0$, $\alpha_{322} = \alpha_{311}$. Умова (2.120) приводить до рівняння

$$-k\beta_{32}\partial_{u^2} = 2\alpha_{311} u^1 \partial_{u^1} + \alpha_{321} u^1 \partial_{u^2} + 2(\alpha_{311} u^2 + \beta_{32})\partial_{u^2},$$

яке задовольняють два набори констант:

1. $k \neq -2$, $\alpha_{311} = \alpha_{321} = \beta_{32} = 0$. Тоді:

   $$Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = kI + u^1 \partial_{u^1} \quad Q_3 = 0, \tag{2.127}$$

   що співпадає з шостим пунктом таблиці 2.2.

2. $k = -2$, $\alpha_{311} = \alpha_{321} = 0$. Тут

   $$Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = -I - u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_3 = \beta_{32} \partial_{u^2}. \tag{2.128}$$

   У разі $\beta_{32} = 0$ приєднаємо (2.128) до набору (2.127), відкинувши обмеження $k \neq -2$, а якщо $\beta_{32} \neq 0$, перетвореннями еквівалентності $w^1 = \frac{1}{\beta_{32}} u^1$, $w^2 = \frac{1}{\beta_{32}} u^2$ зведемо (2.128) до набору із сьомого пункту таблиці 2.2.

Оператори з шостого пункту таблиці 2.1 визначають зображення розширеної алгебри Галілея (2.109). Доповнюючи його оператором проективних перетворень, бачимо, що умова комутування (2.119), так як і в попередньому пункті, описується формулою (2.126). Умова (2.120) приводить до рівняння

$$\alpha_{311}\partial_{u^2} = 2\alpha_{311} u^1 \partial_{u^1} + \alpha_{321} u^1 \partial_{u^2} + 2(\alpha_{311} u^2 + \beta_{32})\partial_{u^2},$$

яке задовольняє набір нульових констант. Таким чином, отримуємо оператори восьмого пункту таблиці 2.2.

Теорему доведено.

Отже, всі реалізації алгебри $AG_2(1,1)$, що відповідають симетріям системи (2.1), описує алгебра (2.121), де оператори Q_1, Q_2, Q_3 набувають одного з виглядів, наведених у таблиці 2.2.

2.7. Інваріантність системи (2.1) відносно узагальненої алгебри Галілея

Знайдемо вигляд нелінійностей F, G, H, за яких система (2.1) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,1)$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.10. *З точністю до перетворень еквівалентності* (2.12), (2.13) *система (2.1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея* (2.121) *тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з виглядів:*

$$U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}(u^2)^{k-1}\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\begin{pmatrix}0 & \mu_{12}(u^2)^{2k-1}\\ -\frac{u^2}{k} & \mu_{22}(u^2)^k\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}\nu_1(u^2)^{3k}\\ \nu_2(u^2)^{2k+1}\end{pmatrix} \tag{2.129}$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-u^1\partial_{u^1}-\frac{1}{k}u^2\partial_{u^2}$, $Q_3=0$, $k\neq 0,\ 1$*;*

$$U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\begin{pmatrix}0 & \mu_{12}\\ -1 & \mu_{22}\end{pmatrix}u^2U_1+\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}(u^2)^3 \tag{2.130}$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-I$, $Q_3=0$*;*

$$U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}U_1\right] \tag{2.131}$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-u^1\partial_{u^1}$, $Q_3=0$*;*

$$\begin{gathered}U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}+(\lambda_{11}-\lambda_{22})\ln u^2\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\\ +\begin{pmatrix}1 & \mu_{12}+(1-\mu_{22})\ln u^2+\ln^2 u^2\\ -1 & \mu_{22}-2\ln u^2\end{pmatrix}u^2U_1+\begin{pmatrix}\nu_1-\nu_2\ln u^2\\ \nu_2\end{pmatrix}(u^2)^3\end{gathered} \tag{2.132}$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-I+u^2\partial_{u^1}$, $Q_3=0$;

$$U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}e^{-u^2}\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\begin{pmatrix}0 & \mu_{12}e^{-2u^2}\\ 1 & \mu_{22}e^{-u^2}\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}\nu_1e^{-3u^2}\\ \nu_2e^{-2u^2}\end{pmatrix} \quad (2.133)$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-u^1\partial_{u^1}+\partial_{u^2}$, $Q_3=0$;

$$U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0\\ 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\begin{pmatrix}0 & \mu_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}0\\ -(u^2)^2\end{pmatrix} \quad (2.134)$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}$, $Q_2=-I-u^2\partial_{u^2}$, $Q_3=\partial_{u^2}$;

$$\begin{gathered}U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}k(k\nu_2+1) & 0\\ (k(k\nu_2+1)-\lambda_{22})\,u^1 & \lambda_{22}\end{pmatrix}U_1\right]+\\ +\begin{pmatrix}-\mu_{12}u^1 & \mu_{12}\\ -2(k\nu_2+1)\omega-\mu_{12}(u^1)^2 & \mu_{12}u^1\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}0\\ \nu_2\omega^2\end{pmatrix}\end{gathered} \quad (2.135)$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=-I-u^2\partial_{u^2}$, $Q_3=k\partial_{u^2}$, $\omega=u^2-\frac{\left(u^1\right)^2}{2}$, $k\neq 0$;

$$\begin{gathered}U_0+u^1U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}-\lambda_{12}u^1 & \lambda_{12}\\ -\lambda_{12}(u^1)^2-2\lambda_{12}\omega-\lambda_{22}\omega^{\frac12}u^1 & \lambda_{22}\omega^{\frac12}+\lambda_{12}u^1\end{pmatrix}\omega^{-\frac12}U_1\right]+\\ +\begin{pmatrix}-\mu_{12}u^1 & \mu_{12}\\ -\mu_{12}(u^1)^2-2\omega-\mu_{22}\omega^{\frac12}u^1 & \mu_{22}\omega^{\frac12}+\mu_{12}u^1\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\omega^{\frac12}+\nu_1u^1\end{pmatrix}\omega^{\frac32}\end{gathered} \quad (2.136)$$

коли $Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=-I-u^2\partial_{u^2}$, $Q_3=0$, $\omega=u^2-\frac{\left(u^1\right)^2}{2}$;

$$\begin{gathered}U_0+\tfrac{u^2}{u^1}U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0\\ \lambda_{21}(u^1)^k+2\lambda_{11}\frac{u^2}{u^1} & -\lambda_{11}\end{pmatrix}U_1\right]+\\ +\begin{pmatrix}\mu_{11}(u^1)^k+\frac1k\frac{u^2}{u^1} & -\frac1k\\ (\mu_{21}(u^1)^k+\mu_{11}\frac{u^2}{u^1})(u^1)^k+\frac1k\left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 & -\frac{u^2}{ku^1}\end{pmatrix}U_1+\begin{pmatrix}\nu_1u^1\\ \nu_2(u^1)^{k+1}+\nu_1u^2\end{pmatrix}(u^1)^{2k}\end{gathered} \quad (2.137)$$

коли $Q_1=u^1\partial_{u^2}$, $Q_2=-\frac{k+1}{k}I+u^1\partial_{u^1}$, $Q_3=0$, $k\neq 0$;

$$U_0+\frac{u^2}{u^1}U_1=\partial_1\left[\begin{pmatrix}\dot\gamma & 0\\ \frac{u^2}{u^1}(\frac{\gamma}{u^1}+\dot\gamma) & -\frac{\gamma}{u^1}\end{pmatrix}U_1\right] \quad (2.138)$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$;

$$\begin{gathered} U_0=\partial_1\left[\begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}+2\lambda_{11}(u^2-\ln u^1)}{u^1} & -\lambda_{11} \end{pmatrix} U_1\right]+ \\ +\begin{pmatrix} \frac{\mu_{11}-2(u^2-\ln u^1)}{u^1} & 1 \\ \frac{\mu_{21}+(\mu_{11}-1)(u^2-\ln u^1)-(u^2-\ln u^1)^2}{(u^1)^2} & \frac{1}{u^1} \end{pmatrix} U_1+\begin{pmatrix} \nu_1 u^1 \\ \nu_2+\nu_1(u^2-\ln u^1) \end{pmatrix}\frac{1}{(u^1)^2} \end{gathered} \tag{2.139}$$

коли $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}$, $Q_3 = 0$.
У системах (2.129)–(2.139) k, λ_{ab}, μ_{ab}, ν_a *— const*, $\gamma = \gamma(u^1)$, $\varphi = \varphi\left(u^2\right)$ *— довільні гладкі функції своїх аргументів.*

Доведення. Для доведення теореми користуємось таблицею 2.2, в якій наведена класифікація нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея (2.121).

Як і в теоремі 2.8, для знаходження функції $f^{ab}(u)$, $g^{ab}(u)$, $h^a(u)$, за яких система рівнянь (2.1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, підставимо відповідні ξ^0, ξ^1, η^a, одержані із зображень операторів алгебри (2.121), у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи та розв'яжемо їх для кожного пункту таблиці 2.2.

Розглянемо реалізацію узагальненої алгебри Галілея, що отримується з першого пункту таблиці 2.2. Зображення операторів Q_1, Q_2, Q_3, записаних у цьому пункті, визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$\begin{gathered} \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1\partial_{u^1} + x_0(-u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}) \end{gathered} \tag{2.140}$$

та координати оператора X:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, &&\xi^1 = \varsigma x_0x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1, \\ &\eta^1 = \varsigma(x_1 - x_0u^1) - cu^1 + r, &&\eta^2 = (\varsigma x_0 + c)ku^2, \end{aligned} \tag{2.141}$$

де ς, c, r, q_0, q_1 — довільні сталі. Підставивши (2.141) у визначальну систему (2.17)–(2.19) та врахувавши формули (2.35)–(2.37) за умови $æ = 0$, а також (2.87)–(2.89), бачимо, що вона зводиться до наступної системи рівнянь:

$$f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b}=0, \tag{2.142}$$

$$g^{a1}+\delta_{a1}u^1-\delta_{a2}ku^2=0. \tag{2.143}$$

Очевидно, алгебру (2.140) отримано, доповнивши оператором проективних перетворень Π алгебру (2.85). Оскільки нелінійності, за яких система (2.1) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея для $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}$, вже знайдено в теоремі 2.8 (а саме, функції (2.90) у випадку $k \neq 0$ та (2.78), якщо $k = 0$), то використаємо їх для розв'язування отриманої системи (2.142)–(2.143).

Розглянемо спочатку випадок $k \neq 0$. Підставивши функції (2.90) у систему (2.142)–(2.143), бачимо, що її розв'язок залежить від значень сталої k, а саме:

1. якщо $k \neq -1$, систему (2.142)–(2.143) задовольняють константи $\lambda_{21} = 0$, $\mu_{11} = 0$, $\mu_{21} = k$. Перепозначивши $-\frac{1}{k} \to k$ в отриманих функціях f^{ab}, g^{ab}, h^a, приходимо до системи (2.129);

2. за умови $k=-1$ система (2.142)–(2.143) має розв'язок, якщо $\mu_{11}=0$, $\mu_{21}=-1$. Уточнивши таким чином константи в нелінійностях f^{ab}, g^{ab}, h^a, отримуємо систему (2.130).

Перший і другий пункти теореми доведено.

Тепер розлянемо випадок $k = 0$. Підставивши функції (2.78), знайдені в теоремі 2.8, у систему (2.142)–(2.143) та розв'язавши її, бачимо, що систему задовольняють $\varphi^{11} = \lambda_{11}$, $\psi^{21} = 0$, $\varphi^{22} = \varphi^{22}(u^2)$ — довільна гладка функція. Система (2.1) з уточнненими таким чином нелінійностями (2.78) співпадає з системою (2.131), якщо ввести позначення $\lambda_{11} = \lambda$, $\varphi^{22} = \varphi$.

Третій пункт теореми доведено.

Розглянемо узагальнену алгебру Галілея, що отримується з другого пункту таблиці 2.2. Зображення операторів Q_1, Q_2, Q_3, записаних у цьому пункті, визначає координати оператора X:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, && \xi^1 = \varsigma x_0 x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1, \\ &\eta^1 = \varsigma(x_1 - x_0 u^1 + u^2) - cu^1 + r, && \eta^2 = (\varsigma x_0 + c)u^2. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Підставивши (2.144) у рівняння (2.17)–(2.19) визначальної системи, розщепивши їх за змінними x_0, x_1 та врахувавши рівності (2.35)–(2.37) у разі $æ = 0$ та (2.87)–(2.89) за умови $k = 1$, одержимо систему

$$u^2 f^{ab}_{u^1} + \delta_{b2} f^{a1} - \delta_{a1} f^{2b} = 0, \tag{2.145}$$

$$u^2 g^{ab}_{u^1} + \delta_{b2} g^{a1} - \delta_{a1} g^{2b} + f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b} = 0, \tag{2.146}$$

$$u^2 h^a_{u^1} - \delta_{a1} h^2 + g^{a1} + \delta_{a1} u^1 - \delta_{a2} u^2 = 0, \tag{2.147}$$

яка є несумісною.

Доповнивши оператори алгебри (2.91) оператором проективних перетворень $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1\partial_{u^1} + x_0(-I + u^2\partial_{u^1})$, отримуємо узагальнену алгебру Галілея, яку визначають оператори з третього пункту таблиці 2.2. Координати інфінітезимального оператора в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, && \xi^1 = \varsigma x_0 x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1, \\ &\eta^1 = (\varsigma x_0 + c)(u^2 - u^1) + \varsigma x_1 + r, && \eta^2 = -(\varsigma x_0 + c)u^2. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Підставимо (2.148) у визначальну систему. Розщепивши рівняння отриманої системи за змінними x_0, x_1 та врахувавши рівності (2.35)–(2.37) за умови $æ = 0$ та (2.93)–(2.95), одержимо систему (2.142) та

$$g^{a1} - \delta_{a1}(u^2 - u^1) + \delta_{a2} u^2 = 0. \tag{2.149}$$

Оскільки нелінійності, за яких система (2.1) інваріантна відносно алгебри (2.91), вже знайдені в теоремі 2.8 (нелінійності (2.79)), то підставимо їх у (2.142) і (2.149). Розв'язавши отриману систему, уточнюємо значення сталих:

$$\lambda_{21} = 0, \quad \mu_{11} = 1, \quad \mu_{21} = -1. \tag{2.150}$$

Таким чином, система (2.1) з нелінійностями (2.79) за умови (2.150) співпадає з системою (2.132).

Четвертий пункт теореми доведено.

Розглянемо алгебру $AG_2(1,1)$, яка визначається операторами з четвертого рядка таблиці 2.2. Координати інфінітезимального оператора для неї мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, && \xi^1 = \varsigma x_0 x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1, \\ &\eta^1 = -(\varsigma x_0 + c)u^1 + \varsigma x_1 + r, && \eta^2 = \varsigma x_0 + c. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Підставивши ξ^0, ξ^1, η^a, у визначальну систему з урахуванням (2.35)–(2.37) за умови $æ = 0$ та (2.97)–(2.99), одержимо систему (2.142) та

$$g^{a1} + \delta_{a1}u^1 - \delta_{a2} = 0. \tag{2.152}$$

Як і в попередньому пункті, розв'язуючи систему (2.142), отримуємо умову $\lambda_{21} = 0$, а система (2.152) накладає умови на сталі $\mu_{11} = 0$, $\mu_{21} = 1$. Система (2.1) з нелінійностями (2.80) за вказаних умов співпадає з системою (2.133).

П'ятий пункт теореми доведено.

П'ятий пункт таблиці 2.2, зважаючи на константи $æ$, l, визначає фактично дві узагальнені алгебри Галілея. Розглянемо кожну з них окремо.

1. Набору $(æ, l) = (0, 1)$ відповідає алгебра з базисними операторами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - I - u^2\partial_{u^2}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1\partial_{u^1} - x_0(I + u^2\partial_{u^2}) + \partial_{u^2}. \end{aligned} \tag{2.153}$$

   Підставивши відповідні координати оператора X у визначальну систему, розщепивши її за змінними x_0, x_1 та врахувавши (2.35)–(2.37) у разі $æ = 0$ та (2.87)–(2.89) у разі $k = -2$, одержуємо систему для уточнення нелінійностей:

$$f^{ab}_{u^2} = 0, \tag{2.154}$$

$$g^{ab}_{u^2} + f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b} = 0, \tag{2.155}$$

$$h^{a}_{u^2} + g^{a1} + \delta_{a1}u^1 + 2\delta_{a2}u^2 = 0. \tag{2.156}$$

Підставимо функції (2.90) у разі $k = -2$ в отриману систему та розв'яжемо її. Систему (2.154) задовольняють сталі $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$, систему (2.155) — $\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{22} = 0$, із системи (2.156) маємо $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = -1$. Таким чином, уточнивши нелінійності (2.90), отримуємо систему (2.134).

Шостий пункт теореми доведено.

2. Набору $(æ, l) = (1, k)$ відповідає алгебра з базисними операторами

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_1, \quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}, \quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}I{-}u^2\partial_{u^2}, \\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1(\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) - x_0(I + u^2\partial_{u^2}) + k\partial_{u^2}.\end{gathered} \tag{2.157}$$

Підставивши відповідні координати оператора X у визначальну систему (2.17)–(2.19), розщепивши її за змінними x_0, x_1 та врахувавши (2.35)–(2.37) за умови $æ = 1$ та (2.101)–(2.103), отримуємо систему

$$kf^{ab}_{u^2} = 0, \tag{2.158}$$

$$kg^{ab}_{u^2} + f^{ab}_{u^1} + f^{a1}_{u^b} + u^1(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b1}f^{a2} = 0, \tag{2.159}$$

$$kh^{a}_{u^2} + g^{a1} + u^1g^{a2} + \delta_{a1}u^1 + 2\delta_{a2}u^2 = 0. \tag{2.160}$$

У систему (2.158)–(2.160) підставимо нелінійності (2.81), знайдені в теоремі 2.8, та розв'яжемо її. Очевидно, розв'язок отриманої системи залежить від значень сталої k.

За умови $k \neq 0$ систему задовольняють сталі $\nu_1 = 0$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$, $\lambda_{11} = k(k\nu_2 + 1)$, $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$, $\mu_{21} = -2(k\nu_2 + 1)$, після підстановки яких в нелінійності (2.81), одержуємо систему (2.135).

Сьомий пункт теореми доведено.

У разі $k = 0$ систему задовольняють сталі $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} = -2\lambda_{12}$, $\mu_{11} = 0$, $\mu_{21} = -2$. Система (2.1) з уточненими таким чином нелінійностями (2.81) співпадає з системою (2.136).

Восьмий пункт теореми доведено.

Алгебру, яку визначають оператори Q_s із шостого пункту таблиці 2.2, отримано доповненням зображення розширеної алгебри Галілея (2.104) оператором $\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1u^1\partial_{u^2} + x_0(kI + u^1\partial_{u^1})$. Підставивши відповідні координати оператора X у визначальну систему (2.17)–(2.19), розщепивши її за змінними x_0, x_1 та врахувавши (2.47)–(2.49) за умови æ $= 0$ та (2.106)–(2.108), отримуємо систему

$$u^1(f^{ab}_{u^2} + f^{a2}_{u^b}) + 2\delta_{b1}f^{a2} = 0, \tag{2.161}$$

$$u^1g^{a2} - \delta_{a1}(k+1)u^1 - \delta_{a2}ku^2 = 0. \tag{2.162}$$

Як показано в теоремі 2.8, нелінійності, за яких система (2.1) інваріантна відносно алгебри (2.104), різні в залежності від значень сталої k. Так, якщо $k \neq -1$, нелінійності мають вигляд (2.82), якщо $k = -1$ — (2.83). Підставивши нелінійності (2.82) у систему (2.161), (2.162) та розв'язавши її, приходимо до висновку, що сталі

$$\lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{22} = -\lambda_{11}, \quad \mu_{12} = k + 1 \to -\frac{1}{k}, \quad \mu_{22} = 0 \tag{2.163}$$

є її розв'язком. Підставивши нелінійності (2.83) у систему (2.161), (2.162), бачимо, що її задовольняють функції

$$\varphi^2 = -\frac{1}{u^1}\int \varphi^1(u^1)du^1 = -\frac{\gamma(u^1)}{u^1}, \quad \psi = 0. \tag{2.164}$$

Легко побачити, що підстановка сталих (2.163) у нелінійності (2.82) та функцій (2.164) у нелінійності (2.83) приводить, відповідно, до систем (2.137) та (2.138).

Дев'ятий і десятий пункти теореми доведено.

Провівши аналогічні міркування, приходимо до висновку, що реалізація узагальненої алгебри Галілея, яку породжують оператори Q_s із сьомого пункту таблиці (2.2), приводять до несумісної системи.

Розглянемо алгебру, породжену операторами Q_s із восьмого пункту таблиці (2.2):

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G{=}x_0\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}, \quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1 + u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + x_1u^1\partial_{u^2} + x_0(u^1\partial_{u^1} + \partial_{u^2}). \end{aligned} \tag{2.165}$$

Підставивши відповідні координати оператора X у систему (2.17)–(2.19), розщепивши її за змінними x_0, x_1 та врахувавши (2.47)–(2.49) у разі $æ = 0$ та (2.111)–(2.113), отримуємо систему (2.161) та

$$u^1g^{a2} - \delta_{a1}u^1 - \delta_{a2} = 0. \tag{2.166}$$

Значення нелінійностей (2.84) підставимо у рівняння (2.161) та (2.166). Розв'язавши їх, маємо

$$\lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{22} = -\lambda_{11}, \quad \mu_{12} = \mu_{22} = 1. \tag{2.167}$$

Система (2.1) з нелінійностями (2.84) за умови (2.167) співпадає з системою (2.139).

Одинадцятий пункт теореми доведено.

Теорему доведено.

Зауваження 2.1. *Проаналізувавши результати, одержані в теоремі 2.10, ми бачимо, що деякі з отриманих систем застосовуються для опису конкретних фізичних процесів. Так, наприклад, система*

$$\begin{aligned} &u_0^1{+}u^1u_1^1{=}\lambda_{11}u_{11}^1{+}\mu_{12}u^2u_1^2, \\ &u_0^2{+}u^1u_1^2{=}\lambda_{22}u_{11}^2{-}u^2u_1^1, \end{aligned} \tag{2.168}$$

отримана із системи (2.130) *за умов* $\lambda_{12}{=}\lambda_{21}{=}0$, $\mu_{22}{=}0$, $\nu_1{=}\nu_2{=}0$, *є системою рівнянь Ван–дер–Ваальса, яка ефективно застосовується для* *опису процесів молекулярно–кінетичної теорії газів і рідин [112]. Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь Ван–дер–Ваальса описані в роботі [64], і система* (2.168) *співпадає з однією із систем, яку отримали автори, досліджуючи максимальну алгебру інваріантності.*

Оскільки системи (2.129)–(2.139) володіють симетрійними властивостями, які є характерними для систем, що описують процеси, підпорядковані принципу відносності Галілея, то вони в більшій мірі, ніж інші, претендують на опис таких процесів.

2.8. Висновки до розділу 2

У даному розділі встановлено реалізації алгебри Галілея, розширеної та узагальненої алгебр Галілея у випадку однієї просторової змінної, крім того, прокласифіковано нееквівалентні зображення цих алгебр у випадку двовимірного векторного поля. Встановлено, за яких значень нелінійностей F, G, H система рівнянь реакції–конвекції–дифузії (2.1) інваріантна відносно алгебри Галілея, а також її розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

Основні результати, отримані в даному розділі, наступні:

1. Вказано зображення алгебри Галілея $AG(1,1)$ у випадку однієї просторової змінної та доведено, що система реакції–конвекції–дифузії інваріантна відносно вказаної алгебри тоді і тільки тоді, коли нелінійності мають один із п'яти нееквівалентних виглядів, наведених в теоремах 2.2–2.6.

2. Встановлено реалізацію розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ у випадку однієї просторової змінної та прокласифіковано нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності (2.12), (2.13) зображення цієї алгебри.

3. Доведено, що існує вісім нееквівалентних виглядів нелінійностей системи реакції–конвекції–дифузії, за яких вона з точністю до перетворень еквівалентності інваріантна відносно алгебри Галілея, розширеної оператором масштабних перетворень.

4. Встановлено реалізацію узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ у випадку однієї просторової змінної та прокласифіковано для $U \in \mathbb{R}^2$ всеможливі зображення цієї алгебри, нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності.

5. Встановлено, що система (2.1) інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності (2.12), (2.13) набуває одного із одинадцяти виглядів (2.129)–(2.139), наведених в теоремі 2.10.

РОЗДІЛ 3

Інваріантність систем нелінійних рівнянь конвекції–дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея

Під час математичного моделювання багатьох природних явищ і технічних задач застосовується система рівнянь Нав'є–Стокса, названа за іменами французького фізика Клода–Луї Нав'є та британського математика Джорджа Габріеля Стокса. У гідродинаміці система рівнянь Нав'є–Стокса описує рух і теплопередачу в'язкої рідини або газу. Будучи доповненою рівняннями перенесення тепла і перенесення маси, а також відповідних масових сил, система рівнянь Нав'є–Стокса може описувати конвекцію, термодифузію в рідинах, поведінку багатокомпонентних сумішей декількох рідин і т. п. У гідродинаміці часто виникають задачі, де потрібно досліджувати рух в'язкої нестисненої рідини в загальному випадку в будь-якому середовищі. До таких задач належить прогнозування погоди та катастрофічних подій, розробка гідрологічної техніки, дослідження водних потоків тощо. Важливе місце в таких дослідженнях належить аналізу хвильових процесів у атмосфері, які також можуть описуватись гідродинамічними моделями. Найкраще описує такі фізичні явища повна система рівнянь Нав'є–Стокса. Одним із застосувань цієї системи є опис течій у мантії Землі. Також багато математичних моделей, які використовуються для моделювання нестаціонарних режимів магістральних газопроводів, базуються на системі рівнянь

Нав'є–Стокса. Ми розглянемо одну з модифікацій цієї системи:

$$
\begin{aligned}
&\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\
&\rho_0 + div(\rho\vec{u}) = 0, \\
&p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, ..., u^n)$ — векторне поле швидкостей, $u^a = u^a(x)$, $\rho = \rho(x)$ — густина, $p = p(x)$ — тиск рідини, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = \overline{1, n}$, $f(\rho)$ — довільна гладка функція.

Як бачимо, особливістю системи (3.1) є те, що використовуватись вона може лише для опису процесів, де розмірність векторного поля $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Звичайно, в природі існують гідродинамічні процеси, в яких ці дві величини не співпадають, тобто $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, а $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, де $m \neq n$. Тоді для моделювання таких процесів система Нав'є–Стокса не може бути застосована, і треба використовувати якісь інші рівняння чи системи. Як же отримати такі системи? Ми пропонуємо метод, оснований на принципах симетрії, в якому у якості моделі, що має різну розмірність векторного поля і простору незалежних змінних, вибираємо такі узагальнення системи Нав'є–Стокса, які повторюють її симетрійні властивості.

Щоб правильно узагальнити систему Нав'є–Стокса, проаналізуємо її структуру. Можна вважати, що основу системи рівнянь Нав'є–Стокса складає система рівнянь Бюргерса

$$
\vec{u_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} = 0,
\tag{3.2}
$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ця система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея з наступними базисними генераторами:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}, \quad G_i = x_0\partial_i + \partial_{u^i}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i - u^i\partial_{u^i}, \\
&\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + (x_i - x_0u^i)\partial_{u^i}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Як відомо, система рівнянь Бюргерса (3.2) є узагальненням скалярного рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 - u_{11} = 0, \tag{3.4}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, і зображення її алгебри інваріантності (3.3) відповідає зображенню алгебри $AG_2(1,1)$ рівняння Бюргерса (3.4):

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u,\\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u)\partial_u.\end{aligned} \tag{3.5}$$

У свою чергу, скалярне рівняння Бюргерса можна отримати, досліджуючи максимальну алгебру інваріантності нелінійного рівняння конвекції–дифузії

$$u_0 + f(u)u_1 - u_{11} = 0. \tag{3.6}$$

Як відомо, рівняння (3.6) має широке застосування у фізиці [89], біології [124] та привернуло увагу багатьох дослідників у області математики, зокрема, симетрійного аналізу. Ліївську симетрію рівняння (3.6) досліджено у роботі [26]. Зокрема відомо, що рівняння (3.6) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея тільки тоді, коли воно співпадає з рівнянням Бюргерса.

Розглянемо узагальнення скалярного рівняння (3.6) системою рівнянь конвекції–дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U)U_i, \tag{3.7}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $F^i(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$, $i = \overline{1,n}$, та дослідимо її симетрійні властивості. Система (3.7) з конкретними нелінійностями та значеннями n, m знаходить широке застосування для опису різноманітних фізичних, хімічних, біологічних процесів. Так, математичні моделі, що базуються на цій системі, застосовуються у макрокінетиці, основний зміст якої є вивчення ролі дифузії, теплопередачі та конвекції в протіканні хімічних реакцій. Розв'язання широкого кола науково–технічних проблем передбачає дослідження явища вільної конвекції. Процес тепломасообміну має велике практичне значення для інтенсифікації теплоенергетичних і хімікотехнологічних процесів у різних сферах промисловості. Для нас ця система важлива ще й тому, що кількість просторових змінних і розмірність векторного поля U в ній може бути як однаковою, так і різною.

Знайдемо такі матриці $F^i(U)$, за яких система (3.7) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, а потім узагальнимо одержані системи до систем, які є аналогами системи Нав'є–Стокса у випадку $m \neq n$, таким чином, щоб зберігалась інваріантність отриманих систем відносно даної алгебри.

3.1. Перетворення еквівалентності. Основна алгебра інваріантності

Оскільки система (3.7) містить довільні функції, то вона описує деякий клас систем. Важливою є задача знаходження перетворень еквівалентності цього класу, оскільки в результаті дії перетворень із групи еквівалентності дана система переходить в еквівалентну їй систему, а її алгебра інваріантності — в подібну їй алгебру Лі операторів симетрії. Тому дослідження симетрійних властивостей однієї системи виявляється дослідженням відразу всього класу систем, які отримуються із даної шляхом заміни змінних. Знайдемо групу перетворень еквівалентності системи (3.7), застосувавши метод, запропонований у роботах [88], [29].

Справедливе наступне твердження.

Лема 3.1. *Група вигляду*

$$x_0^{'} = 2cx_0 + q_0, \quad x_i^{'} = cx_i + q_{ij}x_j + r_ix_0 + q_i, \tag{3.8}$$

$$u^{a'} = k_{ab}u^b + l_a, \tag{3.9}$$

де c, q_0, q_i, r_i, k_{ab}, l_a, $q_{ji}=-q_{ij}$ *— const,* $a,b=\overline{1,m}$, $i,j=\overline{1,n}$ *є групою неперервних перетворень еквівалентності системи (3.7).*

Доведення. З умови еквівалентності (див. [88]) системи (3.7) відносно оператора

$$E=\tau^0(x,U)\partial_0+\tau^i(x,U)\partial_i+\gamma^a(x,U)\partial_{u^a}+\zeta^{abi}(x,U,F)\partial_{F^{abi}}, \tag{3.10}$$

одержимо систему рівнянь для визначення функцій τ^0, τ^i, γ^a, ζ^{abi}:

$$\tau^0_i=\tau^0_{u^a}=\tau^i_{u^a}=0,\quad \tau^0_0=2\tau^1_1=2\tau^2_2=2\tau^3_3=\ldots,\quad \tau^i_j+\tau^j_i=0\ (i\neq j), \tag{3.11}$$

$$\gamma^a_{u^bu^c}=0,\quad \gamma^a_0=\gamma^a_j=0, \tag{3.12}$$

$$\zeta^{abi}=\gamma^a_{u^d}F^{dbi}-\gamma^d_{u^b}F^{adi}-\tau^0_0F^{abi}-\delta_{ab}\tau^i_0+\delta_{ab}\Delta\tau^i+\tau^i_jF^{abj}, \tag{3.13}$$

$$\zeta^{abi}_0=\zeta^{abi}_j=0. \tag{3.14}$$

Рівняння (3.11) визначають вигляд функцій τ^μ:

$$\tau^0=2A(x_0),\quad \tau^i=\dot{A}(x_0)x_i+g^{ij}(x_0)x_j+\sigma^i(x_0),\quad g^{ji}=-g^{ij}. \tag{3.15}$$

З рівнянь (3.12) отримуємо вигляд функцій γ^a:

$$\gamma^a=k_{ab}u^b+l_a. \tag{3.16}$$

Підставимо (3.15), (3.16) у рівняння (3.13). Продиференціюємо одержані функції ζ^{abi} за змінними x_0, x_i ($i=\overline{1,n}$) та, враховуючи рівність (3.14), отримуємо умови

$$\ddot{A}=\dot{g}^{ij}=\ddot{\sigma}^i=0.$$

З їх урахуванням функції τ^μ, γ^a, ζ^{abi} набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\tau^0&=2cx_0+q_0,\quad \tau^i=cx_i+q_{ij}x_j+r_ix_0+q_i,\\
\gamma^a&=k_{ab}u^b+l_a,\\
\zeta^{abi}&=k_{ad}F^{dbi}-k_{db}F^{adi}-cF^{abi}-\delta_{ab}r_i+q_{ij}F^{abj}.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Зауважимо, що всі подальші міркування проведено з точністю до перетворень еквівалентності (3.8), (3.9).

Знайдемо основну алгебру інваріантності системи (3.7), під якою розуміємо алгебру, відносно якої дана система інваріантна за довільних нелінійностей F^{abi}. Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.1. *Основною алгеброю інваріантності системи (3.7) є алгебра*

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_1, ..., \partial_n \rangle. \tag{3.17}$$

Доведення. Доведення теореми базується на основі алгоритму Лі (див., наприклад, [43]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (3.7) шукаємо у вигляді (2.14), де $a = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Із умови інваріантності системи (3.7) відносно оператора (2.14) одержуємо систему визначальних рівнянь:

$$\xi^0_i = \xi^0_{u^a} = \xi^i_{u^a} = 0, \quad \xi^0_0 = 2\xi^1_1 = 2\xi^2_2 = 2\xi^3_3 = ..., \quad \xi^i_j + \xi^j_i = 0 \ (i \neq j), \tag{3.18}$$

$$\eta^a_{u^b u^d} = 0, \tag{3.19}$$

$$\eta^a_0 - \Delta\eta^a - F^{abi}\eta^b_i = 0, \tag{3.20}$$

$$\eta^d F^{abi}_{u^d} - \eta^a_{u^d} F^{dbi} + \eta^d_{u^b} F^{adi} + \xi^0_0 F^{abi} + \delta_{ab}\xi^i_0 - \xi^i_j F^{abj} + 2\eta^a_{iu^b} = 0, \tag{3.21}$$

де $a, b, d = \overline{1, m}$, $i, j = \overline{1, n}$. Із системи визначальних рівнянь випливає, що для довільних значень функцій F^{abi} координати оператора (2.14) мають вигляд

$$\xi^0 = c_0, \quad \xi^i = c_i, \quad \eta^a = 0, \tag{3.22}$$

де c_0, c_i — довільні сталі.

Оператор (2.14) з координатами (3.22) породжує алгебру (3.17).

Теорему доведено.

Уточнимо загальний вигляд інфінітезимального оператора (2.14) для системи (3.7), задовольнивши рівняння (3.18), (3.19) визначальної системи.

Із системи рівнянь (3.18) випливає, що

$$\xi^0 = 2A(x_0), \quad \xi^i = \dot{A}(x_0)x_i + g^{ij}(x_0)x_j + \sigma^i(x_0), \quad g^{ji} = -g^{ij}.$$

Загальним розв'язком системи (3.19) є функції

$$\eta^a = \gamma^{ab}(x)u^b + \tau^a(x).$$

Таким чином ми встановили наступне твердження.

Теорема 3.2. *Якщо система (3.7) інваріантна відносно оператора (2.14), то даний оператор має вигляд*

$$X = 2A(x_0)\partial_0 + [\dot{A}(x_0)x_i + g^{ij}(x_0)x_j + \sigma^i(x_0)]\partial_i + [\gamma^{ab}(x)u^b + \tau^a(x)]\partial_{u^a}, \quad (3.23)$$

де A, $g^{ji} = -g^{ij}$, σ^i, γ^{ab}, τ^a *— довільні гладкі функції своїх аргументів,* $a, b = \overline{1, m}$, $i, j = \overline{1, n}$.

3.2. Випадок двовимірного векторного поля U та двох просторових змінних

У підрозділі розглянемо випадок системи конвекції–дифузії (3.7) за умови m=n=2, тобто

$$u_0^a = \Delta u^a + F^{abi} u_i^b, \quad (3.24)$$

де $a, b, i \in \{1, 2\}$, та дослідимо її інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея.

Поставимо задачу: дослідити, за яких нелінійностей F^{abi} система (3.24) інваріантна відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень. Цю алгебру будемо називати узагальненою алгеброю Галілея та позначатимемо $AG_2(1, 2)$, де перший номер у дужках означає кількість часових змінних, другий — просторових. Такою алгеброю є одна з реалізацій восьмивимірної лінійної алгебри диференціальних операторів, для якої виконуються комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned}&[X_1,X_2]=[X_1,X_3]=[X_2,X_3]=0,\ [X_1,X_4]=X_2,\ [X_2,X_4]=[X_3,X_4]=0,\\&[X_1,X_5]=X_3,\ [X_2,X_5]=[X_3,X_5]=[X_4,X_5]=0,\ [X_1,X_6]=0,\\&[X_2,X_6]=X_3,\ [X_3,X_6]=-X_2,\ [X_4,X_6]=X_5,\ [X_5,X_6]=-X_4,\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}&[X_1,X_7]=2X_1,\ [X_2,X_7]=X_2,\ [X_3,X_7]=X_3,\ [X_4,X_7]=-X_4,\\&[X_5,X_7]=-X_5,\ [X_6,X_7]=0,\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}&[X_1,X_8]=X_7,\ [X_2,X_8]=X_4,\ [X_3,X_8]=X_5,\\&[X_4,X_8]=[X_5,X_8]=[X_6,X_8]=0,\ [X_7,X_8]=2X_8.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Оскільки система (3.24) з довільними нелінійностями F^{abi} інваріантна відносно алгебри (3.17), то в якості трьох операторів узагальненої алгебри Галілея візьмемо оператори $X_1=\partial_0$, $X_2=\partial_1$, $X_3=\partial_2$, а решту операторів алгебри (3.25)–(3.27) будемо шукати, як випливає з теореми 3.2, у вигляді (3.23), де A, g^{ij}, σ^i, γ^{ab}, τ^a — шукані функції.

Знайдемо оператор X_4 вигляду

$$X_4=2A^1(x_0)\partial_0+[\dot A^1x_i+g^{1ij}(x_0)x_j+\sigma^{1i}(x_0)]\partial_i+[\gamma^{1ab}(x)u^b+\tau^{1a}(x)]\partial_{u^a}.$$

Із комутаційного співвідношення

$$[X_1,X_4]=2\dot A^1\partial_0+[\ddot A^1x_i+\dot g^{1ij}x_j+\dot\sigma^{1i}]\partial_i+[\gamma_0^{1ab}u^b+\tau_0^{1a}]\partial_{u^a}=\partial_1$$

маємо $A^1{=}c_1$, $g^{1ij}{=}c_{1ij}$, $\sigma^{1i}{=}\delta_{1i}x_0{+}c_{1i}$, $\gamma^{1ab}{=}\gamma^{1ab}(x_1,x_2)$, $\tau^{1a}{=}\tau^{1a}(x_1,x_2)$, де c_1, c_{1ij},c_{1i} — const.

Із комутаційних співвідношень $[X_2,X_4]{=}[X_3,X_4]{=}0$ уточнюємо:

$$X_4=2c_1\partial_0+(\delta_{1i}x_0+c_{1i})\partial_i+(\alpha_{1ab}u^b+\beta_{1a})\partial_{u^a},$$

де α_{1ab}, β_{1a} — const. Оскільки оператори ∂_0, ∂_i входять в алгебру, то за оператор Галілея G_1 приймемо лінійну комбінацію операторів:

$$G_1=X_4-2c_1\partial_0-c_{1i}\partial_i=x_0\partial_1+Q_1,\tag{3.28}$$

$$Q_1 = (\alpha_{1ab} u^b + \beta_{1a})\partial_{u^a}. \tag{3.29}$$

Згідно теореми 3.2 оператор X_5 шукаємо у вигляді

$$X_5 = 2A^2(x_0)\partial_0 + [\dot{A}^2 x_i + g^{2ij}(x_0)x_j + \sigma^{2i}(x_0)]\partial_i + [\gamma^{2ab}(x)u^b + \tau^{2a}(x)]\partial_{u^a}.$$

Аналогічні міркування приводять до оператора Галілея

$$G_2 = X_5 - 2c_2\partial_0 - c_{2i}\partial_i = x_0\partial_2 + Q_2,$$

$$Q_2 = (\alpha_{2ab} u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}. \tag{3.30}$$

Із комутаційного співвідношення $[X_4, X_5]{=}0$ отримуємо умову комутування між операторами Q_1 і Q_2, а саме:

$$[Q_1, Q_2] = 0. \tag{3.31}$$

Міркуючи аналогічно, оператор X_6 шукаємо у вигляді

$$X_6 = 2A^3(x_0)\partial_0 + [\dot{A}^3 x_i + g^{3ij}(x_0)x_j + \sigma^{3i}(x_0)]\partial_i + [\gamma^{3ab}(x)u^b + \tau^{3a}(x)]\partial_{u^a}.$$

Із умови комутування $[X_1, X_6]{=}0$ отримуємо $A^3{=}c_3$, $g^{3ij}{=}c_{3ij}$, $\sigma^{3i}{=}c_{3i}$ — довільні сталі, γ^{3ab}, τ^{3a} — довільні функції аргументів x_1, x_2. Комутаційні співвідношення $[X_2, X_6]{=}X_3$, $[X_3, X_6]{=}{-}X_2$ уточнюють їх вигляд:

$$c_{311} = c_{322} = 0, c_{312} = -1, c_{321} = 1, \gamma^{3ab} = \alpha_{3ab}, \tau^{3a} = \beta_{3a} - const.$$

Таким чином, оператор X_6 набуває вигляду

$$X_6 = 2c_3\partial_0 + (\delta_{2i}x_1 - \delta_{1i}x_2 + c_{3i})\partial_i + (\alpha_{3ab}u^b + \beta_{3a})\partial_{u^a}.$$

Оскільки оператори ∂_0, ∂_i входять в алгебру, то, віднявши від X_6 лінійну комбінацію цих операторів, отримуємо оператор повороту

$$J_{12} = X_6 - 2c_3\partial_0 - c_{3i}\partial_i = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3,$$

де

$$Q_3 = (\alpha_{3ab} u^b + \beta_{3a})\partial_{u^a}. \tag{3.32}$$

Комутаційні співвідношення $[X_4,X_6]{=}X_5$, $[X_5,X_6]{=}{-}X_4$ визначають, як комутують з оператором Q_3 оператори Q_1 і Q_2:

$$[Q_1,Q_3]=Q_2,\quad [Q_2,Q_3]=-Q_1. \tag{3.33}$$

Згідно теореми 3.2 оператор X_7 має вигляд

$$X_7=2A^4(x_0)\partial_0+[\dot{A}^4x_i+g^{4ij}(x_0)x_j+\sigma^{4i}(x_0)]\partial_i+[\gamma^{4ab}(x)u^b+\tau^{4a}(x)]\partial_{u^a}.$$

Вимагаючи виконання комутаційного співвідношення

$$[X_1,X_7]=2\dot{A}^4\partial_0+[\ddot{A}^4x_i+\dot{g}^{4ij}x_j+\dot{\sigma}^{4i}]\partial_i+[\gamma_0^{4ab}u^b+\tau_0^{4a}]\partial_{u^a}=2\partial_0,$$

отримуємо деякі обмеження на функції A^4, g^{4ij}, σ^{4i}, γ^{4ab}, τ^{4a}, причому оператор X_7 набуває вигляду

$$X_7=2(x_0+c_4)\partial_0+[x_a+c_{4ij}x_j+c_{4i}]\partial_i+[\gamma^{4ab}(x_1,x_2)u^b+\tau^{4a}(x_1,x_2)]\partial_{u^a},$$

де c_4, c_{4ij}, c_{4i} — довільні сталі.

Комутаційні співвідношення $[X_2,X_7]{=}X_2$, $[X_3,X_7]{=}X_3$ приводять до умов $c_{4ij}=0$, $\gamma^{4ab}{=}\alpha_{4ab}$, $\tau^{4a}{=}\beta_{4a}$ — довільні сталі. Покладемо

$$D=X_7-c_4\partial_0-c_{4i}\partial_i=2x_0\partial_0+x_i\partial_i+Q_4,$$

$$Q_4=(\alpha_{4ab}u^b+\beta_{4a})\partial_{u^a}. \tag{3.34}$$

Із комутаційних співвідношень $[X_4,X_7]{=}{-}X_4$, $[X_5,X_7]{=}{-}X_5$, $[X_6,X_7]{=}0$, випливають наступні умови комутування

$$[Q_1,Q_4]=-Q_1,\quad [Q_2,Q_4]=-Q_2,\quad [Q_3,Q_4]=0. \tag{3.35}$$

Міркуючи аналогічно, прокомутуємо оператор X_8 вигляду (3.23) із усіма операторами алгебри. Не втрачаючи загальності, оператор X_8 набуває вигляду

$$\Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_i\partial_i+x_iQ_i+x_0Q_4+Q_5,$$

де $Q_5=(\alpha_{5ab}u^b+\beta_{5a})\partial_{u^a}$, $a,b,i\in\{1,2\}$, оператори Q_1, Q_2, Q_4 описані, відповідно, формулами (3.29), (3.30), (3.34).

Крім того, отримуємо наступні умови комутування

$$[Q_1, Q_5] = [Q_2, Q_5] = [Q_3, Q_5] = 0, \quad [Q_4, Q_5] = 2Q_5. \tag{3.36}$$

Таким чином, ми отримали реалізацію алгебри (3.25)–(3.27) вигляду

$$\begin{aligned} &AG_2(1,2) {=} <\partial_0, \quad \partial_i, \quad G_i{=}x_0\partial_i + Q_i, \quad J_{12}{=}x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3, \\ &D{=}2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_4, \quad \Pi{=}x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_iQ_i + x_0Q_4 + Q_5 >, \end{aligned} \tag{3.37}$$

де оператори

$$Q_s = (\alpha_{sab}u^b + \beta_{sa})\partial_{u^a}, \quad s = \overline{1,5} \tag{3.38}$$

задовольняють комутаційні співвідношення (3.31), (3.33), (3.35), (3.36).

Встановимо вигляд операторів Q_s, за яких зображення алгебри (3.37) будуть нееквівалентні відносно перетворень (3.8)–(3.9).

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.3. *З точністю до перетворень еквівалентності* (3.8), (3.9) *за умови* $m{=}n{=}2$ *існує єдине зображення узагальненої алгебри Галілея* (3.37), *яке визначається наступними операторами*

$$Q_i = \partial_{u^i}, \quad Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, \quad Q_4 = -u^a\partial_{u^a}, \quad Q_5 = 0. \tag{3.39}$$

Доведення. Для оператора Q_1 використаємо виконану в роботі [18] класифікацію (2.27)–(2.31) та прокомутуємо в кожному з п'яти випадків класифікації оператор Q_1 з операторами Q_2–Q_5 згідно формул (3.31), (3.33), (3.35), (3.36).

Розглянемо зображення (2.27) оператора Q_1. Оператор Q_2 вигляду (3.30) прокомутуємо з Q_1 згідно формули (3.31). Отже,

$$\begin{aligned} [Q_1,\ Q_2] &= [\partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2},\ (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = \\ &= \alpha_{2a1}\partial_{u^a} + æu^1\alpha_{2a2}\partial_{u^a} - (\alpha_{21b}u^b + \beta_{21})æ\partial_{u^2} = 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

де $æ \in \{0, 1\}$. Очевидно, із комутаційного співвідношення (3.40) отримуємо різні обмеження на сталі в залежності від значень æ. Так

1. для æ $=1$: $\alpha_{211}=\alpha_{212}=\alpha_{222}=0$, $\alpha_{221}=\beta_{21}$,

2. для æ $=0$: $\alpha_{211}=\alpha_{221}=0$.

При æ $=1$, прокомутувавши Q_1, $Q_2=\beta_{21}\partial_{u^1}+(\beta_{21}u^1+\beta_{22})\partial_{u^2}$ з оператором Q_3 вигляду (3.32), приходимо до протиріччя. Тобто в першому випадку оператори Q_s умови комутування алгебри (3.37) не задовольняють.

У другому випадку комутування оператора $Q_1=\partial_{u^1}$ з Q_3 вигляду (3.32) приводить до умов $\alpha_{212}{=}\alpha_{222}{=}0$, $\alpha_{3a1}{=}\beta_{2a}$. Тоді маємо оператори

$$Q_1=\partial_{u^1},\ Q_2=\beta_{2a}\partial_{u^a},\ Q_3=(\beta_{2a}u^1+\alpha_{3a2}u^2+\beta_{3a})\partial_{u^a}.$$

Умова комутування $[Q_2,Q_3]=\beta_{21}\beta_{2a}\partial_{u^a}+\beta_{22}\alpha_{3a2}\partial_{u^a}=-\partial_{u^1}$ виконується тільки у разі $\beta_{22}\neq 0$ та уточнює вигляд оператора Q_3:

$$Q_3=(\beta_{21}u^1-\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\beta_{22}}u^2+\beta_{31})\partial_{u^1}+(\beta_{22}u^1-\beta_{21}u^2+\beta_{32})\partial_{u^2}.$$

Прокомутувавши одержані оператори з операторами Q_4, Q_5 згідно співвідношень (3.35), (3.36), отримуємо наступний набір операторів

$$\begin{gathered}Q_1=\partial_{u^1},\ Q_2=\beta_{2a}\partial_{u^a},\ Q_3=\left[\beta_{21}(u^1-\beta_{41})-\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\beta_{22}}(u^2-\beta_{42})\right]\partial_{u^1}+\\ +[\beta_{22}(u^1{-}\beta_{41}){-}\beta_{21}(u^2{-}\beta_{42})]\partial_{u^2},\ Q_4{=}{-}(u^a{-}\beta_{4a})\partial_{u^a},\ Q_5{=}0,\ \beta_{22}{\neq}0.\end{gathered}\tag{3.41}$$

Зображення (3.41) алгебри (3.37) містить ще декілька сталих. Спробуємо спростити вигляд операторів Q_s, застосувавши до них перетворення (3.8), (3.9) та вимагаючи інваріантності оператора Q_1 відносно цих перетворень. Таким чином ми встановимо зображення алгебри (3.37), нееквівалентні відносно перетворень (3.8), (3.9).

Як відомо з підрозділу 2.4, перетворення еквівалентності, що не змінюють вигляду оператора $Q_1{=}\partial_{u^1}$, мають вигляд (2.69). Застосувавши ці перетворення зі сталими, вибраними наступним чином:

$$k_{12}=-\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}},\ k_{22}=\frac{1}{\beta_{22}},\ l_1=-\beta_{41}+\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}}\beta_{42},\ l_2=-\frac{\beta_{42}}{\beta_{22}},$$

до решти операторів із (3.41), отримуємо набір операторів

$$Q_a = \partial_{w^a},\ Q_3 = w^1\partial_{w^2} - w^2\partial_{w^1},\ Q_4{=}{-}w^a\partial_{w^a},\ Q_5{=}0, \tag{3.42}$$

де $a \in \{1, 2\}$. Перепозначивши $w^a = u^a$ отримуємо набір (3.39).

Розглянемо зображення (2.28)–(2.31) оператора Q_1. Комутуючи їх з операторами Q_2, Q_3, бачимо, що спроба задовольнити комутаційні співвідношення (3.33) приводить до протиріччя. Тобто для (2.28)–(2.31) не існує таких операторів Q_s, щоб задовольнялись умови комутування алгебри (3.37).

Отже, з точністю до перетворень еквівалентності (3.8), (3.9) існує єдине зображення узагальненої алгебри Галілея (3.37), яке визначається операторами (3.39).

Теорему доведено.

Тепер ми можемо дати відповідь на питання про інваріантність системи (3.24) відносно узагальненої алгебри Галілея (3.37).

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.4. *З точністю до перетворень еквівалентності* (3.8)*,* (3.9) *у разі $m{=}n{=}2$ система* (3.24) *інваріантна відносно алгебри* (3.37) *тоді і тільки тоді, коли нелінійності набувають вигляду*

$$F^{abi} = -\delta_{ab}u^i, \tag{3.43}$$

де $a, b, i \in \{1, 2\}$, а узагальнену алгебру Галілея визначають оператори (3.39)*.*

Доведення. Зображення (3.39) визначає узагальнену алгебру Галілея

$$\begin{gathered} AG_2(1,2){=}\langle\partial_0, \quad \partial_i, \quad G_i{=}x_0\partial_i + \partial_{u^i}, \quad J_{12}{=}\epsilon_{ij}(x_j\partial_i + u^j\partial_{u^i}), \\ D{=}2x_0\partial_0 + x_i\partial_i - u^i\partial_{u^i}, \quad \Pi{=}x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_i\partial_{u^i} - x_0u^i\partial_{u^i}\rangle. \end{gathered} \tag{3.44}$$

Використовуючи загальний вигляд операторів алгебри (3.44), випишемо координати інфінітезимального оператора X:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0,\\
&\xi^i = \varsigma x_0 x_i + cx_i + c_{ij}x_j + r_i x_0 + q_i,\\
&\eta^i = \varsigma(x_i - x_0 u^i) - cu^i + c_{ij}u^j + r_i,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

де ς, c, $c_{ji} = -c_{ij}$, r_i, q_i, q_0 — довільні сталі.

Ці координати підставимо у систему визначальних рівнянь (3.18)–(3.21) у разі $n = m = 2$ та розв'яжемо її. Оскільки рівняння (3.18) та (3.19) визначальної системи вже розв'язані (див. теорему 3.2), то залишається розв'язати лише рівняння (3.20), (3.21). Після підстановки та розщеплення рівняння (3.21) за змінними x_0, x_i система набуває вигляду

$$F^{abi}_{u^d} + \delta_{ab}\delta_{di} = 0, \tag{3.46}$$

$$-u^d F^{abi}_{u^d} + \delta_{ad}F^{dbi} - \delta_{bd}F^{adi} + F^{abi} = 0, \tag{3.47}$$

$$\epsilon_{jd}u^d F^{abi}_{u^j} - \epsilon_{ad}F^{dbi} + \epsilon_{db}F^{adi} - \epsilon_{id}F^{abd} = 0, \tag{3.48}$$

$$u^a + \delta_{bi}F^{abi} = 0. \tag{3.49}$$

Розв'язавши систему (3.46), отримуємо вигляд нелінійностей:

$$F^{abi} = -\delta_{ab}u^i + \lambda_{abi}, \tag{3.50}$$

де λ_{abi} — довільні сталі. Система (3.47) задовольняється у разі $\lambda_{abi} = 0$, а системи (3.48), (3.49) при цьому перетворюються на тотожності. Таким чином, нелінійності набувають вигляду (3.43).

Теорему доведено.

Отже, в класі систем (3.24) існує єдина система, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3.37), і вона співпадає з класичною системою рівнянь Бюргерса:

$$\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \tag{3.51}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$.

3.3. Випадок тривимірного векторного поля U та двох просторових змінних

Цей підрозділ присвячений дослідженню інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея системи (3.7) у випадку тривимірного векторного поля U та двох просторових змінних, тобто за умови $m = 3$, $n = 2$. Ця система має вигляд (3.24) у разі $a, b = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,2}$, тому скрізь у цьому підрозділі $a, b, d = \overline{1,3}$, $i, j = \overline{1,2}$. Слід зазначити також, що, оскільки кількість незалежних просторових змінних не міняється, то реалізацією узагальненої алгебри Галілея (3.25)–(3.27) у даному випадку, як і в підрозділі 3.2, є алгебра вигляду (3.37), де оператори Q_s набувають вигляду (3.38) та задовольняють комутаційні співвідношення (3.31), (3.33), (3.35), (3.36). Що стосується класифікації зображень узагальненої алгебри Галілея, то тут будуть зміни, оскільки змінюється розмірність векторного поля U.

Якщо для розв'язування поставленої задачі у разі $m = 2$ використовувалась класифікація зображень алгебри Галілея, що була проведена у роботі [18], то для $m = 3$ цю класифікацію ще треба провести. Отож, роз'яжемо задачу класифікації зображень алгебри Галілея (фактично зображень оператора G_1) для випадку $U \in \mathbb{R}^3$. Ця задача виникає під час знаходження нееквівалентних розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{du^1}{\alpha_{1b}u^b + \beta_1} = \frac{du^2}{\alpha_{2b}u^b + \beta_2} = \frac{du^3}{\alpha_{3b}u^b + \beta_3} = dt,$$

де α_{ab}, β_a — коефіцієнти оператора $G_1 = x_0\partial_1 + Q_1$, де $Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}$, або:

$$\dot{U} = \Gamma U + \Upsilon, \tag{3.52}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, $\Upsilon = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.

У залежності від коренів характеристичного рівняння $\mid \Gamma - \lambda E \mid = 0$ та від рангу матриці $(\Gamma - \lambda E)$ можливі 16 нееквівалентних випадків:

1. $\lambda_a \in \mathbb{R}$ — різні корені, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$,
2. $\lambda_a \in \mathbb{R}$ — різні корені, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$,
3. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 1$,
4. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 2$,
5. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 1$,
6. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 2$,
7. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 1$,
8. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 2$,
9. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 0$,
10. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 1$,
11. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 2$,
12. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 0$,
13. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 1$,
14. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $rg(\Gamma - \lambda_1 E) = 2$,
15. $\lambda_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$,
16. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$.

Не втрачаючи загальності, у кожному з випадків виберемо певний вигляд коренів λ_a та матриць Γ, Υ. Тоді зображення оператора Q_1, застосувавши конкретні перетворення еквівалентності (3.8), (3.9), можна звести до одного з наступних виглядів:

$$Q_1 = I + k_1 u^2 \partial_{u^2} + k_2 u^3 \partial_{u^3}, \tag{3.53}$$

$$Q_1 = æI + u^1\partial_{u^2} + \theta u^3\partial_{u^3}, \tag{3.54}$$

$$Q_1 = æI + u^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3}, \tag{3.55}$$

$$Q_1 = k_1 I + k_2 I_{23} + u^2\partial_{u^3} - u^3\partial_{u^2}, \tag{3.56}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \tag{3.57}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2} + u^3\partial_{u^3}, \tag{3.58}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + æu^3\partial_{u^3}, \tag{3.59}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + æu^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3}, \tag{3.60}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + I_{23} + u^2\partial_{u^3}, \tag{3.61}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1} + kI_{23} + u^2\partial_{u^3} - u^3\partial_{u^2}, \tag{3.62}$$

де $I = u^1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2}+u^3\partial_{u^3}$, $I_{23}=u^2\partial_{u^2}+u^3\partial_{u^3}$, $æ \in \{0,1\}$, $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $(æ, \theta) \in \{(0,0),(0,1),(1,k)\}$.

Це і є класифікація нееквівалентних зображень оператора Галілея G_1 у випадку тривимірного векторного поля $U \in \mathbb{R}^3$. Прокласифікуємо тепер нееквівалентні відносно перетворень (3.8), (3.9) набори операторів Q_r $(r=\overline{1,5})$, тобто фактично нееквівалентні зображення алгебри (3.37).

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.5. *З точністю до перетворень еквівалентності* (3.8), (3.9) *у разі m=3, n=2 існує 12 нееквівалентних зображень алгебри* (3.37), *визначених операторами Q_1– Q_5 з наступної таблиці.*

Таблиця 3.1: Нееквівалентні зображення операторів Q_1–Q_5 у випадку тривимірного векторного поля U.

№	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
1.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}$	$kI+u^2\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^2}$	$lI+u^1\partial_{u^1}$	0
2.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^1}$	$-I-u^2\partial_{u^2}$	∂_{u^2}

3.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$kI{+}u^1\partial_{u^3}{-}u^3\partial_{u^1}$	$lI{-}u^2\partial_{u^2}$	0
4.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}{-}u^3\partial_{u^1}{+}æ\partial_{u^2}$	$I_{13}{+}\theta\partial_{u^2}$	0
5.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}ku^3\partial_{u^3}$	$-I_{12}{+}lu^3\partial_{u^3}$	0
6.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}$	$-I{-}u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}
7.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}$	$-I_{12}{+}\partial_{u^3}$	0
8.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}\partial_{u^3}$	$-I{-}u^3\partial_{u^3}$	$s\partial_{u^3}$
9.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}\partial_{u^3}$	$-I_{12}{+}su^3\partial_{u^3}$	0
10.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}\partial_{u^3}$	$-I_{12}{+}l\partial_{u^3}$	0
11.	$\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3}$	$u^1\partial_{u^3}{-}u^3\partial_{u^1}$	$-I{-}u^2\partial_{u^2}$	$k\partial_{u^2}$
12.	$\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}{-}\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^1}{-}u^1\partial_{u^3}$	$-I_{13}$	0

У таблиці 3.1 $s \neq 0, k, l \in \mathbb{R}$, $(æ, \theta) \in \{(0,1),(1,k)\}$, $I_{12} = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $I_{13} = u^1\partial_{u^1} + u^3\partial_{u^3}$.

Доведення. Для зображень оператора Q_1 використаємо класифікацію (3.53)–(3.62). Щоб отримати зображення узагальненої алгебри Галілея (3.37), прокомутуємо в кожному випадку оператор Q_1 з операторами Q_2–Q_5 згідно формул (3.31), (3.33), (3.35), (3.36).

Розглянемо зображення (3.54) оператора Q_1. Вигляд оператора Q_1 змінюється залежно від сталих $æ, \theta$. Комутуючи оператори, впевнюємось у тому, що комутаційні співвідношення алгебри (3.37) виконуються лише для зображення Q_1 з набором $(æ, \theta) = (0, 0)$, тобто $Q_1 = u^1\partial_{u^2}$. Умова комутування (3.31)

$$[u^1\partial_{u^2}, (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}] = \alpha_{2a2}u^1\partial_{u^a} - (\alpha_{21b}u^b + \beta_{21})\partial_{u^2} = 0$$

уточнює вигляд оператора Q_2:

$$Q_2{=}\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}{+}(\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{211}u^2{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2}{+}(\alpha_{231}u^1{+}\alpha_{233}u^3{+}\beta_{23})\partial_{u^3}.$$

Комутаційні співвідношення (3.33) містять дві умови. Виписуючи першу

$$[u^1\partial_{u^2}, (\alpha_{3ab}u^b + \beta_{3a})\partial_{u^a}] = \alpha_{3a2}u^1\partial_{u^a} - (\alpha_{31b}u^b + \beta_{31})\partial_{u^2} = Q_2,$$

отримуємо обмеження на константи $\alpha_{312}{=}\alpha_{211}{=}\alpha_{233}{=}\beta_{23}{=}0$, $\alpha_{313}{=}{-}\alpha_{223}$, $\alpha_{332}{=}\alpha_{231}$, $\alpha_{322}{=}\alpha_{311}+\alpha_{221}$, $\beta_{31}{=}{-}\beta_{22}$. Виписуючи другу умову, приходимо до наступної системи

$$\begin{aligned}
&\alpha_{231}\alpha_{223} = \alpha_{231}\beta_{22} = 0, \quad \alpha_{231}\alpha_{323} - \alpha_{223}\alpha_{331} = -1 - \alpha_{221}^2,\\
&\alpha_{223}(\alpha_{311} + 2\alpha_{221} - \alpha_{333}) = 0, \quad (\alpha_{311} + 2\alpha_{221})\beta_{22} - \alpha_{223}\beta_{33} = 0,\\
&\alpha_{231}(\alpha_{311} - \alpha_{221} - \alpha_{333}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

розв'язки якої визначають вигляд операторів Q_2, Q_3. Так, якщо $\alpha_{231}{\neq}0$, то сталі, які задовольняють систему (3.63), визначають оператори

$$\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2}, Q_2{=}\alpha_{221}u^1\partial_{u^2}{+}\alpha_{231}u^1\partial_{u^3}, Q_3{=}\alpha_{311}u^1\partial_{u^1}{+}\Big[\alpha_{321}u^1{+}(\alpha_{311}{+}\\
&{+}\alpha_{221})u^2{-}\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{231}}u^3{+}\beta_{32}\Big]\,\partial_{u^2}{+}[\alpha_{331}u^1{+}\alpha_{231}u^2{+}(\alpha_{311}{-}\alpha_{221})u^3{+}\beta_{33}]\partial_{u^3},
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Якщо ж $\alpha_{231}{=}0$, то тоді систему (3.63) задовольняють коефіцієнти наступних операторів

$$\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = (\alpha_{221}u^1 + \alpha_{223}u^3 + \beta_{22})\partial_{u^2}, \quad \alpha_{223} \neq 0,\\
&Q_3{=}(\alpha_{311}u^1{-}\alpha_{223}u^3{-}\beta_{22})\partial_{u^1}{+}\big[\alpha_{321}u^1{+}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})u^2{+}\alpha_{323}u^3{+}\\
&{+}\beta_{32}]\partial_{u^2}{+}\Big[\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}u^1{+}(\alpha_{311}{+}2\alpha_{221})u^3{+}\tfrac{\alpha_{311}+2\alpha_{221}}{\alpha_{223}}\beta_{22}\Big]\,\partial_{u^3}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Кожен з наборів операторів (3.64) та (3.65) прокомутувавши з операторами Q_4, Q_5 згідно формул (3.35), (3.36), отримуємо наступні набори операторів, які визначають узагальнену алгебру Галілея (3.37):

якщо $\alpha_{231}\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2=\alpha_{221}u^1\partial_{u^2}+\alpha_{231}u^1\partial_{u^3},\quad Q_3{=}\alpha_{311}u^1\partial_{u^1}+\\
&+\left[\left(\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{231}}\alpha_{431}{-}\alpha_{221}\alpha_{421}\right)u^1{+}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})u^2{-}\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{231}}u^3{+}\beta_{32}\right]\partial_{u^2}+\\
&+\left[(\alpha_{221}\alpha_{431}{-}\alpha_{231}\alpha_{421})u^1{+}\alpha_{231}u^2{+}(\alpha_{311}{-}\alpha_{221})u^3{+}\beta_{33}\right]\partial_{u^3},\\
&Q_4{=}\alpha_{411}u^1\partial_{u^1}+\\
&+\left[\alpha_{421}u^1{+}(\alpha_{411}{-}1)\left(u^2{+}\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{231}(\alpha_{311}^2+1)}\beta_{33}{+}\tfrac{(\alpha_{311}-\alpha_{221})\beta_{32}}{\alpha_{311}^2+1}\right)\right]\partial_{u^2}+\\
&+\left[\alpha_{431}u^1{+}(\alpha_{411}{-}1)u^3{+}\tfrac{\alpha_{411}-1}{\alpha_{311}^2+1}\left\{(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})\beta_{33}{-}\alpha_{231}\beta_{32}\right\}\right]\partial_{u^3},\ Q_5{=}0,
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

якщо $\alpha_{223}{\neq}0,\ \beta_{52}{\neq}0$:

$$
\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2},Q_2{=}(\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2},Q_3{=}{-}[\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22}]\partial_{u^1}+\\
&+\left[\left(\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}\alpha_{423}{-}\alpha_{221}\alpha_{421}\right)u^1{+}(\alpha_{221}\alpha_{423}{-}\alpha_{223}\alpha_{421})\left(u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^2}+\\
&+\left[\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}u^1{+}\alpha_{221}\left(u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^3},\ Q_4{=}{-}u^1\partial_{u^1}{+}\left[\alpha_{421}u^1{-}2u^2{+}\alpha_{423}u^3+\right.\\
&\left.+\beta_{42}\right]\partial_{u^2}{-}\left[u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right]\partial_{u^3},\ Q_5{=}\beta_{52}\partial_{u^2},
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

якщо $\alpha_{223}{\neq}0,\ \alpha_{411}{\neq}1$:

$$
\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2},Q_2{=}(\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2},Q_3{=}[\alpha_{311}u^1{-}\alpha_{223}u^3{-}\beta_{22}]\partial_{u^1}+\\
&+\left[\left(\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}\alpha_{423}{-}\alpha_{221}\alpha_{421}\right)u^1{+}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})u^2{+}(\alpha_{221}\alpha_{423}{-}\alpha_{223}\alpha_{421})(u^3+\right.\\
&\left.+\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}){+}\tfrac{\alpha_{311}+\alpha_{221}}{\alpha_{411}-1}\left(\beta_{42}{-}\alpha_{423}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^2}{+}\left[\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}u^1{+}(\alpha_{311}{+}2\alpha_{221})\left(u^3+\right.\right.\\
&\left.\left.+\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^3},\ Q_4{=}\alpha_{411}u^1\partial_{u^1}{+}\left[\alpha_{421}u^1{+}(\alpha_{411}{-}1)u^2{+}\alpha_{423}u^3{+}\beta_{42}\right]\partial_{u^2}+\\
&+\alpha_{411}\left[u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right]\partial_{u^3},\ Q_5{=}0,
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

якщо $\alpha_{223}{\neq}0,\ \alpha_{311}{\neq}{-}\alpha_{221}$:

$$
\begin{aligned}
&Q_1{=}u^1\partial_{u^2},Q_2{=}(\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2},Q_3{=}[\alpha_{311}u^1{-}\alpha_{223}u^3{-}\beta_{22}]\partial_{u^1}+\\
&+\left[\left(\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}\alpha_{423}{-}\alpha_{221}\alpha_{421}\right)u^1{+}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})u^2{+}(\alpha_{221}\alpha_{423}{-}\alpha_{223}\alpha_{421})u^3+\right.\\
&\left.+\beta_{32}\right]\partial_{u^2}{+}\left[\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}u^1{+}(\alpha_{311}{+}2\alpha_{221})\left(u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^3},Q_4{=}u^1\partial_{u^1}{+}\left[\alpha_{421}u^1+\right.\\
&\left.+\alpha_{423}\left(u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^2}{+}\left[u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right]\partial_{u^3},\ Q_5{=}0,
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

якщо $\alpha_{223}{\neq}0$:

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2}, Q_2{=}(\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2}, Q_3{=}{-}[\alpha_{221}u^1{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22}]\partial_{u^1}{+}$$
$$+\left[\left(\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}\alpha_{423}{-}\alpha_{221}\alpha_{421}\right)u^1{+}(\alpha_{221}\alpha_{423}{-}\alpha_{223}\alpha_{421})u^3{+}\beta_{32}\right]\partial_{u^2}{+}$$
$$+\left[\tfrac{\alpha_{221}^2+1}{\alpha_{223}}u^1{+}\alpha_{221}\left(u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right)\right]\partial_{u^3},\ Q_4{=}u^1\partial_{u^1}{+}\left[\alpha_{421}u^1{+}\alpha_{423}u^3{+}\beta_{42}\right]\partial_{u^2}{+} \quad (3.70)$$
$$+\left[u^3{+}\tfrac{\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right]\partial_{u^3},\ Q_5{=}0.$$

Отже, розглядаючи зображення (3.54) оператора Q_1, ми отримали 5 зображень узагальненої алгебри Галілея (3.37), які описуються наборами операторів (3.66)–(3.70). Одержані оператори містять ще багато сталих, тому спробуємо спростити їх вигляд за допомогою перетворень еквівалентності (3.9). Для кожного набору операторів Q_1–Q_5 знайдемо всі такі зображення, які були б нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності

$$W = KU + L, \quad (3.71)$$

де K — невироджена стала матриця розмірності 3×3, L — стала матриця розмірності 3×1, вимагаючи при цьому інваріантності відносно перетворень (3.71) оператора Q_1.

Після заміни (3.71)

$$u^1{=}\tfrac{1}{\det K}\left[(k_{22}k_{33}{-}k_{23}k_{32})(w^1{-}l_1){+}(k_{13}k_{32}{-}k_{12}k_{33})(w^2{-}l_2){+}\right.$$
$$\left.+\,(k_{12}k_{23}{-}k_{13}k_{22})(w^3{-}l_3)\right], \quad \partial_{u^2} = k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2} + k_{32}\partial_{w^3},$$

тоді з рівності $Q_1 = u^1\partial_{u^2} = w^1\partial_{w^2}$ одержимо $k_{12}{=}k_{13}{=}k_{32}{=}l_1{=}0$, $k_{22}{=}k_{11}$. Таким чином, лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор Q_1, у даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= k_{11}u^1,\\ w^2 &= k_{21}u^1 + k_{11}u^2 + k_{23}u^3 + l_2,\\ w^3 &= k_{31}u^1 + k_{33}u^3 + l_3. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Перетворення (3.72) з наступним набором сталих

$$k_{21}{=}k_{11}\left(\tfrac{\alpha_{221}\alpha_{431}}{\alpha_{231}}{-}\alpha_{421}\right), \quad k_{31}{=}{-}\tfrac{k_{11}\alpha_{431}}{\alpha_{231}}, \quad l_3{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{311}^2+1}\left\{\tfrac{\alpha_{311}+\alpha_{221}}{\alpha_{231}}\beta_{33}{-}\beta_{32}\right\},$$

$$k_{23}{=}-\tfrac{k_{11}\alpha_{221}}{\alpha_{231}},\quad k_{33}{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{231}},\quad l_2{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{311}^2+1}\left\{\tfrac{1-\alpha_{311}\alpha_{221}}{\alpha_{231}}\beta_{33}{+}\alpha_{311}\beta_{32}\right\}$$

зводить оператори (3.66) до вигляду

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\alpha_{311}I{-}w^3\partial_{w^2}{+}w^2\partial_{w^3},$$
$$Q_4{=}(\alpha_{411}{-}1)I{+}w^1\partial_{w^1},\quad Q_5{=}0,$$

що співпадає з першим рядком таблиці 3.1 після очевидних позначень $\alpha_{311} = k$, $\alpha_{411}{-}1 = l$, $w^a = u^a$.

Вибравши у перетвореннях (3.72) сталі наступним чином

$$k_{11}{=}\tfrac{k_{33}}{\alpha_{223}},\ k_{21}{=}-\tfrac{k_{33}\alpha_{421}}{\alpha_{223}},\ k_{23}{=}-\tfrac{k_{33}\alpha_{423}}{\alpha_{223}},\ k_{31}{=}\tfrac{k_{33}\alpha_{221}}{\alpha_{223}},\ l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{22}}{\alpha_{223}}, \tag{3.73}$$
$$l_2{=}-\tfrac{k_{33}}{2\alpha_{223}^2}\left\{\alpha_{223}\beta_{42}{+}\alpha_{423}\beta_{22}\right\},\ k_{33}{=}\tfrac{\alpha_{223}}{\beta_{52}} \tag{3.74}$$

та подіявши на оператори (3.67), маємо:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\ Q_2{=}w^3\partial_{w^2},\ Q_3{=}w^1\partial_{w^3}{-}w^3\partial_{w^1},\ Q_4{=}{-}I{-}w^2\partial_{w^2},\ Q_5{=}\partial_{w^2}.$$

Ці оператори співпадають з операторами другого рядка таблиці 3.1 після позначень $w^a{=}u^a$.

Перетворення (3.72) зі сталими (3.73) та

$$l_2{=}\tfrac{k_{33}(\alpha_{223}\beta_{42}-\alpha_{423}\alpha_{411}\beta_{22})}{\alpha_{223}^2(\alpha_{411}-1)} \tag{3.75}$$

зводять оператори (3.68) до наступного вигляду:

$$\begin{gathered}Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\ Q_2{=}w^3\partial_{w^2},\ Q_3{=}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})I{-}w^3\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^3},\\ Q_4{=}\alpha_{411}I{-}w^2\partial_{w^2},\quad Q_5{=}0,\quad \alpha_{411}\neq 1.\end{gathered} \tag{3.76}$$

Оператори (3.76) співпадають з операторами третього рядка таблиці 3.1 після очевидних позначень $\alpha_{311}{+}\alpha_{221}{=}k$, $\alpha_{411}{=}l$, $w^a{=}u^a$ у разі $l{\neq}1$.

Перетворення (3.72) з набором сталих (3.73) та

$$l_2{=}\tfrac{k_{33}}{\alpha_{223}(\alpha_{311}+\alpha_{221})}\left\{\beta_{32}{+}\alpha_{421}\beta_{22}{-}\tfrac{(\alpha_{311}+2\alpha_{221})\alpha_{423}\beta_{22}}{\alpha_{223}}\right\} \tag{3.77}$$

зводять оператори (3.69) до вигляду

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\ Q_2{=}w^3\partial_{w^2},\ Q_3{=}(\alpha_{311}{+}\alpha_{221})I{-}w^3\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^3},$$
$$Q_4{=}w^1\partial_{w^1}{+}w^3\partial_{w^3}{=}I_{13},\quad Q_5{=}0,\quad \alpha_{311}{\neq}{-}\alpha_{221},$$

що співпадає з операторами третього рядка таблиці 3.1 після очевидних позначень $w^a{=}u^a$, $\alpha_{311}{+}\alpha_{221}{=}k$ у разі $l{=}1$, $k{\neq}0$.

Перетворення (3.72) зі сталими (3.73) зводять оператори (3.70) до вигляду

$$\begin{aligned}&Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\ Q_2{=}w^3\partial_{w^2},\ Q_3{=}w^1\partial_{w^3}{-}w^3\partial_{w^1}{+}\tfrac{k_{33}}{\alpha_{223}}(\beta_{32}{+}\alpha_{421}\beta_{22})\partial_{w^2},\\&Q_4{=}I_{13}{+}\tfrac{k_{33}}{\alpha_{223}^2}(\alpha_{223}\beta_{42}{-}\alpha_{423}\beta_{22})\partial_{w^2},\quad Q_5{=}0,\quad \alpha_{223}{\neq}0.\end{aligned}\tag{3.78}$$

Крім того, уточнивши в наборі (3.73) сталу $k_{33}{=}\frac{\alpha_{223}}{\beta_{32}+\alpha_{421}\beta_{22}}$ за умови $\beta_{32}{\neq}{-}\alpha_{421}\beta_{22}$, зведемо оператор Q_3 до наступного вигляду

$$Q_3{=}w^1\partial_{w^3}{-}w^3\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2},\ æ\in\{0,\ 1\}.$$

Причому якщо $\beta_{32}{=}{-}\alpha_{421}\beta_{22}$ (тобто $æ{=}0$), то уточнимо сталу k_{33} наступним чином

$$k_{33}{=}\frac{\alpha_{223}^2}{\alpha_{223}\beta_{42}-\alpha_{423}\beta_{22}}$$

за умови $\beta_{42}{\neq}\frac{\alpha_{423}\beta_{22}}{\alpha_{223}}$, що в свою чергу дасть можливість звести оператор Q_4 до вигляду

$$Q_4{=}I_{13}{+}\theta\partial_{w^2},\ \theta\in\{0,\ 1\}.$$

Враховуючи ці міркування, набір операторів (3.78) записується наступним чином

$$\begin{aligned}&Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^3\partial_{w^2},\quad Q_3{=}w^1\partial_{w^3}{-}w^3\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2},\\&Q_4{=}I_{13}{+}\theta\partial_{w^2},\quad Q_5{=}0,\end{aligned}\tag{3.79}$$

де $(æ,\theta)\in\{(0,0),\ (0,1),\ (1,k)\}$. Після позначень $w^a{=}u^a$ оператори (3.79) з набором $(æ,\ \theta){=}(0,\ 0)$ співпадають з операторами третього рядка таблиці 3.1 за умов $l{=}1$, $k{=}0$, а з набором $(æ,\ \theta)\in\{(0,\ 1),\ (1,\ k)\}$ — співпадають з операторами четвертого рядка таблиці 3.1.

Розглянемо зображення (3.57) оператора Q_1. Прокомутуємо його згідно формул (3.31) з оператором Q_2:

$$[Q_1, Q_2] = \left[\partial_{u^1},\ (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}\right] = 0,$$

звідки отримуємо умову $\alpha_{2a1} = 0$, яка уточнює вигляд оператора

$$Q_2 = (\alpha_{2a2}u^2 + \alpha_{2a3}u^3 + \beta_{2a})\partial_{u^a}.$$

Виписуючи першу рівність із комутаційних співвідношень (3.33):

$$[Q_1, Q_3] = \left[\partial_{u^1},\ (\alpha_{3ab}u^b + \beta_{3a})\partial_{u^a}\right] = \alpha_{3a1}\partial_{u^a} = (\alpha_{2a2}u^2 + \alpha_{2a3}u^3 + \beta_{2a})\partial_{u^a},$$

приходимо до умов $\alpha_{2a2} = \alpha_{2a3} = 0$, $\alpha_{3a1} = \beta_{2a}$.

Друга з умов комутування (3.33) приводить до співвідношень

$$\beta_{21}\beta_{2a} + \beta_{22}\alpha_{3a2} + \beta_{23}\alpha_{3a3} = -\delta_{a1}. \tag{3.80}$$

Розглянемо спочатку випадок $\beta_{22} \neq 0$, тоді з рівнянь (3.80) маємо:

$$\alpha_{3a2} = -\frac{\delta_{a1} + \beta_{21}\beta_{2a} + \beta_{23}\alpha_{3a3}}{\beta_{22}}.$$

Отримуємо наступний набір операторів

$$Q_1 = \partial_{u^1},\ Q_2 = \beta_{2a}\partial_{u^a},\ Q_3 = \left(\beta_{2a}u^1 - \frac{\delta_{a1} + \beta_{21}\beta_{2a} + \beta_{23}\alpha_{3a3}}{\beta_{22}}u^2 + \alpha_{3a3}u^3 + \beta_{3a}\right)\partial_{u^a}. \tag{3.81}$$

Ці оператори, очевидно, містить багато сталих, тому спробуємо спростити їх вигляд за допомогою перетворень еквівалентності (3.9). Для цього знайдемо всі такі зображення операторів (3.81), які були б нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності (3.71), вимагаючи при цьому інваріантності відносно вказаних перетворень оператора Q_1.

Після заміни (3.71)

$$\partial_{u^1} = k_{11}\partial_{w^1} + k_{21}\partial_{w^2} + k_{31}\partial_{w^3},$$

тоді з рівності $Q_1 = \partial_{u^1} = \partial_{w^1}$ одержимо $k_{11}=1$, $k_{21}=k_{31}=0$. Таким чином, лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор Q_1, у даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} &w^1 = u^1 + k_{12}u^2 + k_{13}u^3 + l_1,\\ &w^2 = k_{22}u^2 + k_{23}u^3 + l_2,\\ &w^3 = k_{32}u^2 + k_{33}u^3 + l_3. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Подіявши перетвореннями (3.82) на оператор Q_2, отримуємо

$$Q_2=(\beta_{21}+k_{12}\beta_{22}+k_{13}\beta_{23})\partial_{w^1}+(k_{22}\beta_{22}+k_{23}\beta_{23})\partial_{w^2}+(k_{32}\beta_{22}+k_{33}\beta_{23})\partial_{w^3}. \tag{3.83}$$

Розглянемо спочатку випадок $\beta_{23} \neq 0$, тоді вибравши в перетвореннях (3.82) наступний вигляд сталих:

$$\begin{aligned} &k_{13}=-\tfrac{\beta_{21}+k_{12}\beta_{22}}{\beta_{23}}, k_{23}=\tfrac{1-k_{22}\beta_{22}}{\beta_{23}}, k_{33}=-\tfrac{k_{32}\beta_{22}}{\beta_{23}}, l_1=\{\beta_{21}+\alpha_{333}+k_{22}\beta_{23}\alpha_{323}-\\ &\ -\beta_{22}(k_{22}\alpha_{333}-k_{12})\}\tfrac{l_3}{k_{32}\beta_{22}}+k_{22}\beta_{32}+\tfrac{\beta_{33}(1-k_{22}\beta_{22})}{\beta_{23}},\ l_2=\tfrac{\beta_{33}(\beta_{21}+k_{12}\beta_{22})}{\beta_{23}}-\\ &-\beta_{31}-k_{12}\beta_{32}+\tfrac{l_3\{\beta_{22}(k_{22}+k_{12}\alpha_{333})-1-\beta_{23}(\alpha_{313}+k_{12}\alpha_{323})+\beta_{21}\alpha_{333}\}}{k_{32}\beta_{22}},\\ &k_{12}=\tfrac{(1+\beta_{23}\alpha_{313}-\beta_{21}\alpha_{333})(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})-\beta_{22}(\beta_{21}+\alpha_{333})}{(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})^2+\beta_{22}^2},\\ &k_{22}=\tfrac{(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})(\beta_{21}+\alpha_{333})+\beta_{22}(1+\beta_{23}\alpha_{313}-\beta_{21}\alpha_{333})}{(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})^2+\beta_{22}^2}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

зведемо оператори Q_2, Q_3 до вигляду

$$Q_2=\partial_{w^2}, Q_3=-w^2\partial_{w^1}+w^1\partial_{w^2}+\Big[\tfrac{\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323}}{\beta_{22}}(w^3-l_3)+\tfrac{k_{32}}{\beta_{23}}(\beta_{32}\beta_{23}-\beta_{22}\beta_{33})\Big]\partial_{w^3}.$$

Очевидно, подальше спрощення оператора Q_3 залежить від значень сталої $(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})$. Так, у разі довільного ненульового її значення, застосувавши до Q_3 перетворення (3.82) зі сталими (3.84) та $l_3 = \frac{k_{32}\beta_{22}(\beta_{32}\beta_{23}-\beta_{22}\beta_{33})}{\beta_{23}(\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323})}$, отримуємо $Q_3 = -w^2\partial_{w^1}+w^1\partial_{w^2}+kw^3\partial_{w^3}$, де $k = \beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323} \neq 0$. У разі $\beta_{22}\alpha_{333}-\beta_{23}\alpha_{323} = 0$ виберемо $k_{32} = \frac{\beta_{23}}{\beta_{32}\beta_{23}-\beta_{22}\beta_{33}}$, якщо $\beta_{32}\beta_{23}-\beta_{22}\beta_{33} \neq 0$. Такі міркування та перепозначення $w^a = u^a$, приводять нас до двох нееквівалентних відносно перетворень (3.71) наборів наступних операторів:

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = \partial_{u^2}, \quad Q_3 = -u^2\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}+ku^3\partial_{u^3}, \quad k \neq 0, \tag{3.85}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = \partial_{u^2}, \quad Q_3 = -u^2\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}+æ\partial_{u^3}, \ æ \in \{0, 1\}. \qquad (3.86)$$

Виписані набори не містять ще операторів Q_4 та Q_5. Розглянемо кожен з випадків окремо, дописуючи вказані оператори таким чином, щоб виконувались комутаційні співвідношення (3.35), (3.36).

Для набору операторів (3.85), виписуючи умови (3.35), отримуємо

$$Q_4 = -u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2} + \alpha_{433}u^3\partial_{u^3}. \qquad (3.87)$$

Прокомутувавши оператори (3.85) та (3.87) з оператором Q_5 згідно комутаційних співвідношень (3.36), одержуємо

$$Q_5 = 0. \qquad (3.88)$$

Отже, набір операторів (3.85), (3.87), (3.88) співпадає з операторами п'ятого рядка таблиці 3.1 у разі $\alpha_{433} = l$, $k \neq 0$.

Прокомутувавши оператори з набору (3.86) з операторами Q_4, Q_5 згідно співвідношень (3.35), (3.36), отримуємо наступні розгалудження:

1. якщо $æ = 0$, $\beta_{53} \neq 0$, оператори набувають вигляду

$$\begin{aligned} &Q_1{=}\partial_{u^1}, \quad Q_2{=}\partial_{u^2}, \quad Q_3{=}-u^2\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}, \\ &Q_4{=}-u^1\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}+(-2u^3+\beta_{43})\partial_{u^3}, \quad Q_5{=}\beta_{53}\partial_{u^3}; \end{aligned} \qquad (3.89)$$

2. коли $æ = 0$, маємо

$$\begin{aligned} &Q_1{=}\partial_{u^1}, \quad Q_2{=}\partial_{u^2}, \quad Q_3{=}-u^2\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}, \\ &Q_4{=}-u^1\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}+(\alpha_{433}u^3+\beta_{43})\partial_{u^3}, \quad Q_5{=}0; \end{aligned} \qquad (3.90)$$

3. якщо $æ = 1$, $\beta_{53} \neq 0$, отримуємо наступні оператори

$$\begin{aligned} &Q_1{=}\partial_{u^1}, \quad Q_2{=}\partial_{u^2}, \quad Q_3{=}-u^2\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}+\partial_{u^3}, \\ &Q_4{=}-u^1\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}+(-2u^3+\beta_{43})\partial_{u^3}, \quad Q_5{=}\beta_{53}\partial_{u^3}, \end{aligned} \qquad (3.91)$$

4. коли $æ = 1$, оператори набувають вигляду

$$\begin{aligned} &Q_1{=}\partial_{u^1}, \quad Q_2{=}\partial_{u^2}, \quad Q_3{=}{-}u^2\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3}, \\ &Q_4{=}{-}u^1\partial_{u^1}{-}u^2\partial_{u^2}{+}(\alpha_{433}u^3{+}\beta_{43})\partial_{u^3}, \quad Q_5{=}0. \end{aligned} \tag{3.92}$$

В отриманих наборах операторів (3.89)–(3.92) оператори Q_4, Q_5 ще містять деякі сталі, тому спробуємо спростити їх вигляд, використавши перетворення еквівалентності (3.71), які не змінюють решти операторів. Як відомо, лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор ∂_{u^1}, мають вигляд (3.82). Тоді, враховуючи рівності

$$\begin{aligned} &\partial_{u^2} = k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2} + k_{32}\partial_{w^3} = \partial_{w^2}, \quad u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{=} \\ &{=}[w^1{-}\tfrac{k_{13}}{k_{33}}(w^3{-}l_3){-}l_1]\partial_{w^2}{-}[w^2{-}\tfrac{k_{23}}{k_{33}}(w^3{-}l_3){-}l_2]\partial_{w^1}{=}w^1\partial_{w^2}{-}w^2\partial_{w^1}, \end{aligned}$$

отримуємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} &w^1 = u^1, \\ &w^2 = u^2, \\ &w^3 = k_{33}u^3 + l_3, \end{aligned} \tag{3.93}$$

відносно яких інваріантні оператори Q_1–Q_3 у наборах (3.89), (3.90).

Під дією перетворень (3.93) зі сталими

$$k_{33} = \frac{1}{\beta_{53}}, \ l_3 = -\frac{\beta_{43}}{2\beta_{53}},$$

оператори (3.89) співпадають з операторами шостого рядка таблиці 3.1 (після перепозначення $w^a = u^a$).

Оператор Q_4 з набору (3.90) під дією перетворень (3.93) набуває наступного вигляду

$$Q_4{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}w^2\partial_{w^2}{+}(\alpha_{433}w^3{-}\alpha_{433}l_3{+}k_{33}\beta_{43})\partial_{w^3}.$$

Його подальше спрощення залежить від значень сталої α_{433}. Якщо $\alpha_{433}{\neq}0$, виберемо в перетвореннях (3.93) сталу $l_3{=}\frac{k_{33}\beta_{43}}{\alpha_{433}}$, маємо

$$Q_4{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}w^2\partial_{w^2}{+}\alpha_{433}w^3\partial_{w^3}.$$

Набір операторів (3.90) з таким Q_4 після перепозначення $w^a = u^a, \alpha_{433} = l$ міститься в операторах п'ятого пункту таблиці 3.1 (за умов k=0, l≠0).

Якщо ж α_{433}=0, то вибравши $k_{33} = \frac{1}{\beta_{43}}$ у разі $\beta_{43} \neq 0$, отримуємо

$$Q_4{=}-w^1\partial_{w^1}{-}w^2\partial_{w^2}{+}æ\partial_{w^3},\ æ \in \{0,1\}.$$

Набір операторів (3.90) з таким Q_4 у разі æ=0 після перепозначення w^a=u^a міститься у операторах п'ятого пункту таблиці 3.1 (за умов k=l=0). Цей же набір операторів у разі æ=1 співпадає з операторами сьомого пункту.

Як вже вказувалось раніше, лінійні невироджені перетворення, відносно яких інваріантний оператор ∂_{u^1}, мають вигляд (3.82). Тоді, враховуючи рівності

$$\begin{aligned}
&\partial_{u^2}{=}k_{12}\partial_{w^1}{+}k_{22}\partial_{w^2}{+}k_{32}\partial_{w^3}{=}\partial_{w^2},\\
&u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}\partial_{u^3}{=}[w^1{-}\tfrac{k_{13}}{k_{33}}(w^3{-}l_3){-}l_1{+}k_{23}]\partial_{w^2}{-}\\
&-[w^2{-}\tfrac{k_{23}}{k_{33}}(w^3{-}l_3){-}l_2{-}k_{13}]\partial_{w^1}{+}k_{33}\partial_{w^3}{=}w^1\partial_{w^2}{-}w^2\partial_{w^1}{+}\partial_{w^3},
\end{aligned}$$

отримуємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
&w^1 = u^1,\\
&w^2 = u^2,\\
&w^3 = u^3 + l_3,
\end{aligned} \tag{3.94}$$

відносно яких інваріантні оператори Q_1–Q_3 у наборах (3.91), (3.92).

Під дією перетворень (3.94) зі сталою $l_3 = -\frac{\beta_{43}}{2}$ набір операторів (3.91) переходить у набір операторів восьмого пункту таблиці 3.1 (при перепозначенні $w^a = u^a$ та $\beta_{53} = s \neq 0$).

Оператор Q_4 з набору (3.92) під дією перетворень (3.94) набуде наступного вигляду

$$Q_4{=}-w^1\partial_{w^1}{-}w^2\partial_{w^2}{+}(\alpha_{433}w^3{-}\alpha_{433}l_3{+}\beta_{43})\partial_{w^3}.$$

Очевидно, його подальше спрощення залежить від значень сталої α_{433}. Якщо α_{433}≠0, вибравши в перетвореннях (3.94) сталу l_3=$\frac{\beta_{43}}{\alpha_{433}}$, маємо

$$Q_4{=}-w^1\partial_{w^1}{-}w^2\partial_{w^2}{+}\alpha_{433}w^3\partial_{w^3}.$$

Набір операторів (3.92) з таким Q_4 після перепозначення $w^a{=}u^a$, $\alpha_{433}{=}s{\neq}0$ співпадає з операторами дев'ятого пункту таблиці 3.1. Якщо ж $\alpha_{433}{=}0$, то набір операторів (3.92) з таким Q_4 після перепозначення $w^a{=}u^a$ та $\beta_{43}{=}l$ співпадає з операторами десятого пункту таблиці 3.1.

Нагадаємо, що набори операторів, описаних у 5–10 пунктах таблиці 3.1, одержані за умов $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{23} \neq 0$. Тепер розглянемо випадок $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{23} = 0$. Використовуючи рівності (3.81), маємо наступний набір операторів Q_1–Q_3 для цього випадку:

$$\begin{aligned}&Q_1{=}\partial_{u^1},\ Q_2{=}\beta_{21}\partial_{u^1}{+}\beta_{22}\partial_{u^2},\ Q_3{=}(\beta_{21}u^1{-}\tfrac{1+\beta_{21}^2}{\beta_{22}}u^2{+}\alpha_{313}u^3{+}\beta_{31})\partial_{u^1}{+}\\&{+}(\beta_{22}u^1{-}\beta_{21}u^2{+}\alpha_{323}u^3{+}\beta_{32})\partial_{u^2} + (\alpha_{333}u^3{+}\beta_{33})\partial_{u^3}.\end{aligned} \tag{3.95}$$

Подіявши на ці операторами перетвореннями (3.82) зі сталими

$$\begin{aligned}&k_{12} = -\tfrac{\beta_{21}}{\beta_{22}},\ k_{22} = \tfrac{1}{\beta_{22}},\ k_{32} = 0,\ l_1{=}\tfrac{\beta_{32}}{\beta_{22}}{+}k_{23}\beta_{33}{+}\tfrac{l_3}{k_{33}}(k_{13}{-}\tfrac{\alpha_{323}}{\beta_{22}}{-}k_{23}\alpha_{333}),\\&l_2{=}\tfrac{\beta_{21}}{\beta_{22}}\beta_{32}{-}\beta_{31}{-}k_{13}\beta_{33}{+}\tfrac{l_3}{k_{33}}(k_{23}{+}\alpha_{313}{-}\tfrac{\beta_{21}}{\beta_{22}}\alpha_{323}{+}k_{13}\alpha_{333})\\&k_{13}{=}\tfrac{1}{\Delta}(\alpha_{333}(\tfrac{\beta_{21}}{\beta_{22}}\alpha_{323}{-}\alpha_{313}){+}\tfrac{\alpha_{323}}{\beta_{22}}),\ k_{23}{=}\tfrac{1}{\Delta}({-}\tfrac{\alpha_{323}\alpha_{333}}{\beta_{22}}{+}\tfrac{\beta_{21}}{\beta_{22}}\alpha_{323}{-}\alpha_{313}),\end{aligned}$$

де $\Delta{=}\alpha_{333}^2{+}1$, отримуємо:

$$Q_1{=}\partial_{w^1},\ Q_2{=}\partial_{w^2},\ Q_3{=}{-}w^2\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^2}{+}[\alpha_{333}w^3{-}\alpha_{333}l_3{+}k_{33}\beta_{33}]\partial_{w^3}. \tag{3.96}$$

Подальше спрощення оператора Q_3 залежить від значень сталих α_{333} та β_{33}. Так, у разі $\alpha_{333} \neq 0$, вибравши $l_3 = \frac{k_{33}\beta_{33}}{\alpha_{333}}$, маємо

$$Q_3 = -w^2\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^2}{+}\alpha_{333}w^3\partial_{w^3}. \tag{3.97}$$

Якщо $\alpha_{333} = 0$, $\beta_{33} \neq 0$, оператор (3.96) набуває вигляду

$$Q_3 = -w^2\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^2}{+}\partial_{w^3}, \tag{3.98}$$

а якщо $\alpha_{333} = \beta_{33} = 0$, відповідно,

$$Q_3 = -w^2\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^2}. \tag{3.99}$$

Набір операторів (3.96), де оператор Q_3 набуває одного з виглядів (3.97)–(3.99), після відповідного перепозначення співпадає з наборами операторів (3.85), (3.86). Таким чином, випадок $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{23} = 0$ зводиться до випадку $\beta_{22} \neq 0$, $\beta_{23} \neq 0$, який нами вже розглянуто.

Отже, для зображення (3.57) оператора Q_1 залишається розглянути випадок $\beta_{22} = 0$. Виконавши співвідношення (3.31), (3.33), приходимо до системи (3.80), яка за умови $\beta_{22} = 0$ набуває наступного вигляду

$$\begin{aligned}
&\beta_{23}\alpha_{313} = -1 - \beta_{21}^2,\\
&\beta_{23}\alpha_{323} = 0,\\
&\beta_{23}\alpha_{333} = -\beta_{21}\beta_{23},
\end{aligned}$$

звідки $\alpha_{313} = -\frac{1+\beta_{21}^2}{\beta_{23}}$, $\alpha_{323} = 0$, $\alpha_{333} = -\beta_{21}$.

Таким чином, оператори Q_1–Q_3 набувають вигляду

$$\begin{aligned}
&Q_1{=}\partial_{u^1},\ Q_2{=}\beta_{21}\partial_{u^1}{+}\beta_{23}\partial_{u^3},\ Q_3{=}(\beta_{21}u^1{+}\alpha_{312}u^2{-}\tfrac{1+\beta_{21}^2}{\beta_{23}}u^3{+}\beta_{31})\partial_{u^1}{+}\\
&{+}(\alpha_{322}u^2{+}\beta_{32})\partial_{u^2}{+}(\beta_{23}u^1{+}\alpha_{332}u^2{-}\beta_{21}u^3{+}\beta_{33})\partial_{u^3}.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Очевидно, перетворення еквівалентності $u^2 \to u^3$, $u^3 \to u^2$ та перепозначення констант $\beta_{23} = \tilde{\beta}_{22}$, $\beta_{33} = \tilde{\beta}_{32}$, $\beta_{32} = \tilde{\beta}_{33}$, $\alpha_{312} = \tilde{\alpha}_{313}$, $\alpha_{332} = \tilde{\alpha}_{323}$, $\alpha_{322} = \tilde{\alpha}_{333}$ переводить набір операторів (3.100) в оператори (3.95), який вже розглянуто нами раніше.

Розглянемо зображення (3.59) оператора Q_1. Легко переконатись, що для цього зображення комутаційні співвідношення між операторами Q_s виконуються лише для випадку æ $= 0$. Отож, розглянемо зображення $Q_1{=}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}$. Згідно умов комутування (3.31) з оператором Q_2, маємо

$$[\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2},\ (\alpha_{2ab}u^b{+}\beta_{2a})\partial_{u^a}] = \alpha_{2a1}\partial_{u^a}{+}\alpha_{2a2}u^1\partial_{u^a} - (\alpha_{21b}u^b{+}\beta_{21})\partial_{u^2} = 0,$$

звідки $\alpha_{2a2} = 0$, $\alpha_{211} = \alpha_{213} = \alpha_{231} = 0$, $\alpha_{221} = \beta_{21}$. Врахувавши ці умови, випишемо оператор Q_2:

$$Q_2 = \beta_{21}\partial_{u^1} + (\beta_{21}u^1 + \alpha_{223}u^3 + \beta_{22})\partial_{u^2} + (\alpha_{233}u^3 + \beta_{23})\partial_{u^3}.$$

Комутаційні співвідношення (3.33) задовольняють наступні оператори:

$$Q_1{=}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2},\ Q_2{=}(\tfrac{1}{\beta_{23}}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2}{+}\beta_{23}\partial_{u^3},\ Q_3{=}(-\tfrac{1}{\beta_{23}}u^3{+}\beta_{31})\partial_{u^1}{+} \\ +\left((\beta_{31}{+}\beta_{22})u^1{+}\alpha_{323}u^3{+}\beta_{32}\right)\partial_{u^2}{+}\beta_{23}(u^1{+}\alpha_{323}\beta_{23})\partial_{u^3},\ \beta_{23}\neq 0. \tag{3.101}$$

Із комутаційних співвідношень (3.35), (3.36) отримуємо умови:

$$\alpha_{411}{=}{-}1,\ \alpha_{422}{=}{-}2,\ \alpha_{412}{=}\alpha_{413}{=}\alpha_{431}{=}\alpha_{432}{=}0,\ \alpha_{421}{=}\beta_{41}{=}{-}\alpha_{323}\beta_{23},$$
$$\alpha_{433}{=}{-}1,\ \beta_{22}{=}\beta_{23}\alpha_{423}{-}\tfrac{\beta_{43}}{\beta_{23}},\ \beta_{31}{=}\tfrac{\beta_{43}}{\beta_{23}},\ \beta_{32}{=}\alpha_{323}(\beta_{23}^2\alpha_{423}{-}\beta_{43}),$$
$$\alpha_{5ab}=\beta_{51}=\beta_{53}=0.$$

Отже, нами отримано набір операторів:

$$Q_1{=}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}(\tfrac{u^3}{\beta_{23}}{+}\beta_{23}\alpha_{423}{-}\tfrac{\beta_{43}}{\beta_{23}})\partial_{u^2}{+}\beta_{23}\partial_{u^3}, \\ Q_3{=}\tfrac{\beta_{43}-u^3}{\beta_{23}}\partial_{u^1}{+}\left(\beta_{23}\alpha_{423}u^1{+}\alpha_{323}(u^3{+}\beta_{23}^2\alpha_{423}{-}\beta_{43})\right)\partial_{u^2}{+} \\ +\beta_{23}(u^1{+}\alpha_{323}\beta_{23})\,\partial_{u^3},\ Q_4{=}{-}(u^1{+}\alpha_{323}\beta_{23})\partial_{u^1}{+}\left({-}\alpha_{323}\beta_{23}u^1{-}2u^2{+}\right. \\ \left.{+}\alpha_{423}u^3{+}\beta_{42}\right)\partial_{u^2}{-}(u^3{-}\beta_{43})\partial_{u^3},\quad Q_5{=}\beta_{52}\partial_{u^2},\quad \beta_{23}\neq 0, \tag{3.102}$$

в якому є багато сталих. Спростимо вигляд цих операторів за допомогою таких перетворень еквівалентності (3.71), які не змінюють оператора Q_1. Нескладно переконатись, що ці перетворення мають наступний вигляд:

$$w^1=u^1+l_1, \\ w^2=l_1u^1+u^2+k_{23}u^3+l_2, \\ w^3=k_{33}u^3+l_3,\quad k_{33}\neq 0. \tag{3.103}$$

Застосувавши пертворення (3.103) з наступними сталими:

$$k_{23}=-\alpha_{423},k_{33}=\tfrac{1}{\beta_{23}},l_1=\beta_{23}\alpha_{323},l_2=\tfrac{1}{2}(\alpha_{323}^2\beta_{23}^2-\beta_{42}+\alpha_{423}\beta_{43}),l_3=-\tfrac{\beta_{43}}{\beta_{23}}$$

до операторів (3.102), бачимо, що вони набувають вигляду

$$Q_1{=}\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^3\partial_{w^2}{+}\partial_{w^3},\quad Q_3{=}{-}w^3\partial_{w^1}{+}w^1\partial_{w^3}, \\ Q_4{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}2w^2\partial_{w^2}{-}w^3\partial_{w^3},\quad Q_5{=}\beta_{52}\partial_{w^2} \tag{3.104}$$

і співпадають із операторами 11–го рядка таблиці 3.1 після перепозначення $w^a = u^a$, $\beta_{52} = k$.

Розглянемо зображення (3.60) оператора Q_1. Нескладно переконатись у тому, що, вимагаючи виконання умов комутування у випадку æ=1, приходимо до несумісної системи рівнянь. Тому розглянемо зображення (3.60) у разі æ=0, тобто $Q_1{=}\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^3}$. Виписавши співвідношення (3.31):

$$[Q_1,\ Q_2]{=}(\alpha_{2a1}{+}\alpha_{2a3}u^2)\partial_{u^a}{-}(\alpha_{22b}u^b{+}\beta_{22})\partial_{u^3}{=}0,$$

маємо умови на сталі $\alpha_{211}{=}\alpha_{213}{=}\alpha_{221}{=}\alpha_{223}{=}0$, $\alpha_{233}{=}\alpha_{222}$, $\alpha_{231}{=}\beta_{22}$. Перша з умов комутування (3.33) приводить нас до системи, розв'язком якої є набір сталих $\alpha_{222}{=}\beta_{22}{=}\alpha_{321}{=}\alpha_{323}{=}0$, $\alpha_{311}{=}\beta_{21}$, $\alpha_{313}{=}\alpha_{212}$, $\alpha_{331}{=}\beta_{32}{+}\beta_{23}$, $\alpha_{333} = \alpha_{322} + \alpha_{232}$. Другу з умов комутування (3.33) задовольняють сталі $\alpha_{232}{=}{-}\beta_{21}$, $\alpha_{322}{=}\beta_{32}{=}0$, $\beta_{23}{=}{-}\frac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}$.

Таким чином, оператори Q_1–Q_3 набувають вигляду

$$Q_1 = \partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^3},\ Q_2{=}(\alpha_{212}u^2{+}\beta_{21})\partial_{u^1}{-}\left(\beta_{21}u^2{+}\frac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}\right)\partial_{u^3},$$
$$Q_3{=}(\beta_{21}u^1{+}\alpha_{312}u^2{+}\alpha_{212}u^3{+}\beta_{31})\partial_{u^1}{-}(\frac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}u^1{-}\alpha_{332}u^2{+}\beta_{21}u^3{-}\beta_{33})\partial_{u^3}.$$

Прокомутуємо оператор Q_4 з отриманими операторами згідно комутаційних співвідношень (3.35). Перше співвідношення приводить нас до системи

$$\alpha_{411}{+}\alpha_{413}u^2{=}-1,$$
$$\alpha_{421}{+}\alpha_{423}u^2{=}0,$$
$$\alpha_{431}{+}\alpha_{433}u^2{-}\alpha_{421}u^1{-}\alpha_{422}u^2{-}\alpha_{423}u^3{-}\beta_{42}{=}-u^2,$$

розв'язком якої є сталі $\alpha_{411} = -1$, $\alpha_{413} = \alpha_{421} = \alpha_{423} = 0$, $\alpha_{433} = \alpha_{422} - 1$, $\alpha_{431} = \beta_{42}$. Друге співвідношення з (3.35) додає умови $\alpha_{422} = \beta_{42} = 0$, а третє — задовольняють наступні сталі:

$$\alpha_{312}{=}{-}(\beta_{21}\alpha_{412}{+}\alpha_{212}\alpha_{432}),\quad \alpha_{332}{=}\alpha_{412}\frac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}{+}\beta_{21}\alpha_{432},$$

$$\beta_{31}{=}-(\beta_{21}\beta_{41}{+}\alpha_{212}\beta_{43}), \quad \beta_{33}{=}\beta_{41}\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}{+}\beta_{21}\beta_{43}, \quad \alpha_{212}\neq 0.$$

Комутаційні співвідношення (3.36) виконуються за умов $\alpha_{5ab}{=}\beta_{5a}=0$. Враховуючи вигляд всіх отриманих сталих, випишемо наступний набір операторів

$$\begin{aligned}
&Q_1=\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^3},\ Q_2{=}(\alpha_{212}u^2{+}\beta_{21})\partial_{u^1}{-}\left(\beta_{21}u^2{+}\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}\right)\partial_{u^3},\\
&Q_3{=}\left(\beta_{21}u^1{-}(\beta_{21}\alpha_{412}{+}\alpha_{212}\alpha_{432})u^2{+}\alpha_{212}u^3{-}(\beta_{21}\beta_{41}{+}\alpha_{212}\beta_{43})\right)\partial_{u^1}{-}\\
&-\left(\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}u^1{-}(\alpha_{412}\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}{+}\beta_{21}\alpha_{432})u^2{+}\beta_{21}u^3{-}(\beta_{41}\tfrac{\beta_{21}^2+1}{\alpha_{212}}{+}\beta_{21}\beta_{43})\right)\partial_{u^3},\\
&Q_4{=}({-}u^1{+}\alpha_{412}u^2{+}\beta_{41})\partial_{u^1}{+}(\alpha_{432}u^2{-}u^3{+}\beta_{43})\partial_{u^3},\ Q_5{=}0,\ \alpha_{212}\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Очевидно, набір операторів (3.105) потребує спрощення за допомогою перетворень (3.71). Неважко впевнитись у тому, що лінійні невироджені перетворення еквівалентності (3.71), які не змінюють оператора $Q_1=\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^3}$, мають вигляд

$$\begin{aligned}
&w^1=u^1+k_{12}u^2+l_1,\\
&w^2=k_{22}u^2+l_2,\\
&w^3=l_2u^1+k_{32}u^2+k_{22}u^3+l_3, \quad k_{22}\neq 0.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Вибравши в перетвореннях (3.106) сталі наступним чином:

$$\begin{aligned}
&k_{12}{=}-\alpha_{412},\ k_{22}{=}\alpha_{212},\ k_{32}{=}-\alpha_{212}\alpha_{432}{-}\beta_{21}\alpha_{412},\\
&l_1{=}-\beta_{41},\ l_2{=}\beta_{21},\ l_3{=}-\beta_{21}\beta_{41}{-}\alpha_{212}\beta_{43}
\end{aligned}$$

та подіявши ними на оператори (3.105), зводимо їх до вигляду

$$\begin{aligned}
&Q_1{=}\partial_{w^1}{+}w^2\partial_{w^3}, \quad Q_2{=}w^2\partial_{w^1}{-}\partial_{w^3}, \quad Q_3{=}w^3\partial_{w^1}{-}w^1\partial_{w^3},\\
&Q_4{=}-w^1\partial_{w^1}{-}w^3\partial_{w^3}, \quad Q_5{=}0,
\end{aligned} \tag{3.107}$$

що співпадає з операторами останнього рядка таблиці 3.1 після перепозначення $w^a{=}u^a$.

Розглядаючи зображення (3.53), (3.55), (3.56), (3.58), (3.61), (3.62) оператора Q_1 та комутуючи їх з операторами Q_2–Q_5 згідно умов (3.31), (3.33), (3.35), (3.36), приходимо до висновку, що у всіх цих випадках комутаційні співвідношення алгебри (3.37) не виконуються.

Теорему доведено.

Таким чином, всі можливі реалізації узагальненої алгебри Галілея, що відповідають симетріям системи (3.24) у разі $m = 3, n = 2$, визначає алгебра (3.37), де оператори Q_1–Q_5 набувають одного з 12 виглядів, наведених у таблиці 3.1. Перевіримо, чи задовольняють координати цих операторів систему визначальних рівнянь.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.6. *З точністю до перетворень еквівалентності* (3.8), (3.9) *система* (3.24) *у випадку* $m = 3, n = 2$ *інваріантна відносно алгебри* (3.37) *тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з наступних виглядів*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\tfrac{s}{2}(u^1_1 - u^2_2) + l u^2_2 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \end{aligned} \tag{3.108}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + lu^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$, $l \neq 0$*;*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + sin(\tfrac{2}{s}\ln u^3)\vec{D}\vec{u} + cos(\tfrac{2}{s}\ln u^3)\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.109}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$*;*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + (u^3)^{-\frac{2}{s}-1}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right), \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\tfrac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \end{aligned} \tag{3.110}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$*;*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \psi\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.111}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + e^{-2u^3}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right), \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.112}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12} + \partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \tfrac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.113}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + s\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + sin2u^3\vec{D}\vec{u} + cos2u^3\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + \vec{L}\omega, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + (\vec{u}\vec{L})\omega - \omega\vec{\nabla}\vec{u}, \end{aligned} \tag{3.115}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i} + u^i\partial_{u^3}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I - u^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 2\partial_{u^3}$.

У системах (3.108)–(3.115) $\omega = u^3 - \dfrac{\vec{u}^2}{2}$, $\vec{L} = \lambda_1\vec{\nabla} + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$, $\vec{\nabla}=(\partial_1, \partial_2)$, $\vec{\nabla}^{\perp}=(\partial_2, -\partial_1)$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{D} = (\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp}, \vec{c}\vec{\nabla})$, $\vec{D}^{\perp} = (\vec{c}\vec{\nabla}, -\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp})$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$, $\psi = \psi(u^3)$ *— довільна гладка функція,* c_i, λ_a, λ, k, l, $s \neq 0$ *— довільні сталі,* $i \in \{1, 2\}$, $a = \overline{1,3}$.

Доведення. Перші два рівняння визначальної системи (3.18)–(3.21) вже розв'язано у теоремі 3.2. Тому для знаходження функцій F^{abi}, за яких система рівнянь (3.24) у випадку $a, b{=}\overline{1,3}$, $i \in \{1, 2\}$ інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, залишається розв'язати два останні рівняння визначальної системи. Використаємо таблицю 3.1, в якій наведено класифікацію нееквівалентних зображень алгебри (3.37).

Розглянемо оператори п'ятого пункту таблиці 3.1. Реалізацією узагальненої алгебри Галілея, визначеною цими операторами, є алгебра з базисними генераторами

$$\begin{aligned} &\partial_0,\ \partial_i,\ G_i{=}x_0\partial_i{+}\partial_{u^i},\ J_{12}{=}x_1\partial_2{-}x_2\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}ku^3\partial_{u^3}, \\ &D{=}2x_0\partial_0{+}x_i\partial_i{-}I_{12}{+}lu^3\partial_{u^3},\ \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_i\partial_i{+}x_i\partial_{u^i}{-}x_0(I_{12}{-}lu^3\partial_{u^3}). \end{aligned} \tag{3.116}$$

Тоді координати інфінітезимального оператора X набувають вигляду:

$$\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, \quad \xi^i = \varsigma x_0x_i + cx_i + r_ix_0 + c_{ji}x_j + q_i, \tag{3.117}$$

$$\eta^a{=}-(\varsigma x_0{+}c)u^a{+}\delta_{a1}(r_1{-}c_{12}u^2{+}\varsigma x_1){+}\delta_{a2}(r_2{+}c_{12}u^1{+}\varsigma x_2){+}$$
$$+\delta_{a3}\left(c_{12}ku^3{+}(\varsigma x_0{+}c)(l+1)u^3\right). \qquad (3.118)$$

де ς, c, r_i, q_0, q_i, $c_{ji}=-c_{ij}$ — довільні сталі, $i,j\in\{1,2\}$.

Підставивши (3.117), (3.118) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_i, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$(\delta_{j1}\delta_{d1}{+}\delta_{j2}\delta_{d2})F^{abi}_{u^d}{+}\delta_{ab}\delta_{ij}{=}0, \qquad (3.119)$$
$$(-u^d{+}\delta_{d3}(l+1)u^3)F^{abi}_{u^d}{-}\delta_{a3}(l+1)F^{3bi}{+}\delta_{b3}(l+1)F^{a3i}{+}F^{abi}{=}0, \qquad (3.120)$$
$$(-\delta_{d1}u^2{+}\delta_{d2}u^1{+}\delta_{d3}ku^3)F^{abi}_{u^d}{+}\delta_{a1}F^{2bi}{-}\delta_{a2}F^{1bi}{-}k\delta_{a3}F^{3bi}{-}$$
$$-\delta_{b2}F^{a1i}{+}\delta_{b1}F^{a2i}{+}\delta_{b3}kF^{a3i}{-}\epsilon_{ij}F^{abj}{=}0, \qquad (3.121)$$
$$u^a-\delta_{a3}(l+1)u^3+F^{a11}+F^{a22}{=}0, \qquad (3.122)$$

де $a,b,d=\overline{1,3}$. Проінтегрувавши систему (3.119) у разі $j=1$, маємо:

$$F^{abi}{=}-\delta_{ab}\delta_{i1}u^1{+}\varphi^{abi}(u^2,u^3).$$

Підставивши ці функції у систему (3.119) у разі $j=2$ та проінтегрувавши, отримуємо загальний розв'язок системи (3.119):

$$F^{abi}{=}-\delta_{ab}(\delta_{i1}u^1{+}\delta_{i2}u^2){+}\psi^{abi}, \qquad (3.123)$$

де $\psi^{abi}{=}\psi^{abi}(u^3)$ — довільні гладкі функції.

Підставимо (3.123) у систему (3.120)–(3.122) та розв'яжемо її. Очевидно, розв'язок залежить від значень сталих k, l. Отже,

1. При $k{=}s{\neq}0$, $l{\neq}0$ загальним розв'язком системи (3.119), (3.120) є наступний набір функцій:

$$F^i(U){=}\begin{pmatrix}\lambda_{11i}(u^3)^{-\frac{1}{l}}{-}u^i & \lambda_{12i}(u^3)^{-\frac{1}{l}} & \lambda_{13i}(u^3)^{-\frac{2}{l}-1}\\ \lambda_{21i}(u^3)^{-\frac{1}{l}} & \lambda_{22i}(u^3)^{-\frac{1}{l}}{-}u^i & \lambda_{23i}(u^3)^{-\frac{2}{l}-1}\\ \lambda_{31i}u^3 & \lambda_{32i}u^3 & \lambda_{33i}(u^3)^{-\frac{1}{l}}{-}u^i\end{pmatrix}, \qquad (3.124)$$

де λ_{abi} — довільні сталі. Підставимо функції (3.124) у систему (3.121), (3.122). Розв'язавши її, уточнюємо сталі: $\lambda_{111}{=}\lambda_{112}{=}\lambda_{121}{=}0$, $\lambda_{311}{=}\frac{s}{2}$,

$\lambda_{122} = \lambda_{131} = \lambda_{132} = \lambda_{211} = \lambda_{212} = \lambda_{221} = \lambda_{222} = \lambda_{231} = \lambda_{232} = 0$, $\lambda_{321} = -\lambda_{312}$, $\lambda_{322}{=}l{-}\frac{s}{2}$, $\lambda_{331} = \lambda_{332}{=}0$. Таким чином, нелінійності, які є розв'язком системи (3.119)–(3.122), набувають вигляду

$$F^{abi}{=}{-}\delta_{ab}\delta_{ij}u^j{+}\delta_{a3}u^3\left[(\delta_{b1}\delta_{i1}{-}\delta_{b2}\delta_{i2})\tfrac{s}{2}{+}\delta_{b2}\delta_{i2}l{+}(\delta_{b1}\delta_{i2}{-}\delta_{b2}\delta_{i1})\lambda_{312})\right]. \tag{3.125}$$

Ввівши позначення

$$\vec{\nabla}{=}(\partial_1,\partial_2),\quad \vec{\nabla}^{\perp}{=}(\partial_2,-\partial_1),\quad \vec{u}=(u^1,u^2), \tag{3.126}$$

бачимо, що система (3.7) з нелінійностями (3.125) за умови $\lambda_{312} = \lambda$ співпадає з системою (3.108).

Перший пункт теореми доведено.

2. Розв'язавши систему (3.120) за умов $k = s \neq 0$, $l = 0$, отримуємо $\psi^{iaj}{=}0$, $\psi^{331}{=}\psi^{332}{=}0$. Таким чином, систему (3.119), (3.120) задовольняють наступні функції:

$$F^{abi}{=}{-}\delta_{ab}(\delta_{i1}u^1{+}\delta_{i2}u^2){+}\delta_{a3}(\delta_{b1}\psi^{31i}{+}\delta_{b2}\psi^{32i}). \tag{3.127}$$

Підставивши функції (3.127) у систему (3.121), (3.122) та розв'язавши її, бачимо, що система (3.122) задовольняється за умови

$$\psi^{322}{=}{-}\psi^{311}, \tag{3.128}$$

а система (3.121) після підстановки зводиться до наступної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$su^3\dot{\psi}^{311} - s\psi^{311} + \psi^{312} + \psi^{321} = 0, \tag{3.129}$$

$$su^3\dot{\psi}^{312} - s\psi^{312} - 2\psi^{311} = 0, \tag{3.130}$$

$$su^3\dot{\psi}^{321} - s\psi^{321} - 2\psi^{311} = 0, \tag{3.131}$$

де крапка означає диференціювання за змінною u^3. Загальним розв'язком цієї системи є функції:

$$\begin{aligned}
\psi^{311} &= u^3\left(c_1\cos\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right) - c_2\sin\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right)\right),\\
\psi^{312} &= u^3\left(c_1\sin\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right) + c_2\cos\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right) + c_3\right),\\
\psi^{321} &= u^3\left(c_1\sin\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right) + c_2\cos\left(\tfrac{2}{s}\ln u^3\right) - c_3\right).
\end{aligned}\tag{3.132}$$

Отже, система рівнянь конвекції–дифузії з нелінійностями (3.127), де функції ψ^{31i}, ψ^{32i} описуються формулами (3.128), (3.132), інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3.116) у разі $k{=}s{\neq}0$, $l=0$. Отримана система співпадає з системою (3.109) після введення позначень $c_3=\lambda$, а також

$$\vec{c}=(c_1,c_2),\quad \vec{D}=(\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp},\vec{c}\vec{\nabla}),\quad \vec{D}^{\perp}=(\vec{c}\vec{\nabla},-\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp}),\tag{3.133}$$

та враховуючи вже введені позначення (3.126).

Другий пункт теореми доведено.

3. При $k{=}0$, $l{\neq}0$ підставивши функції (3.124) у систему (3.122) та розв'язавши її, отримуємо умову

$$\lambda_{a22}=\delta_{a3}l-\lambda_{a11}.\tag{3.134}$$

Підставивши функції (3.124) з урахуванням умов (3.134) у систему (3.121) та розв'язавши її у разі $k=0$, одержуємо наступні умови

$$\begin{aligned}
&\lambda_{i11}{=}\lambda_{i12}{=}\lambda_{i21}{=}0, && \lambda_{231}{=}-\lambda_{132}, && \lambda_{232}{=}\lambda_{131},\\
&\lambda_{331}{=}\lambda_{332}{=}0, && \lambda_{321}{=}-\lambda_{312}, && \lambda_{311}{=}\tfrac{l}{2}.
\end{aligned}\tag{3.135}$$

Таким чином, нелінійності (3.124) з урахуванням умов (3.134), (3.135) набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
&F^{11i}{=}F^{22i}{=}F^{33i}{=}-\delta_{i1}u^1-\delta_{i2}u^2, && F^{12i}{=}F^{21i}{=}0,\\
&F^{13i}{=}\lambda_{13i}(u^3)^{-\frac{2}{l}-1}, && F^{23i}{=}\epsilon_{ij}\lambda_{13j}(u^3)^{-\frac{2}{l}-1},\\
&F^{311}{=}F^{322}{=}\tfrac{l}{2}u^3, && F^{312}{=}-F^{321}{=}\lambda_{312}u^3.
\end{aligned}\tag{3.136}$$

Отже, система (3.7) (за умови $m = 3$, $n = 2$) з нелінійностями (3.136) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3.116) у разі $k = 0$, $l \neq 0$. Отримана система співпадає з системою (3.110) після введення позначень $\lambda_{131}{=}\lambda_1$, $\lambda_{132}{=}\lambda_2$, $\lambda_{312}{=}\lambda_3$, $l{=}s{\neq}0$, та врахувавши вже введені позначення (3.126).

Третій пункт теореми доведено.

4. Розглянемо тепер випадок $k = l = 0$. Підставивши функції (3.127) у систему (3.122) та розв'язавши її, отримуємо умову

$$\psi^{322} = -\psi^{311}. \tag{3.137}$$

Підставивши функції (3.127) з урахуванням (3.137) у систему (3.121) та розв'язавши її у разі $k = 0$, одержуємо наступні умови

$$\psi^{311}{=}0, \quad \psi^{321}{=}{-}\psi^{312}. \tag{3.138}$$

Таким чином, нелінійності (3.127) з урахуванням умов (3.137), (3.138) набувають вигляду

$$F^{abi}{=}{-}\delta_{ab}(\delta_{i1}u^1{+}\delta_{i2}u^2){+}\delta_{a3}\psi^{312}(\delta_{b1}\delta_{i2}{-}\delta_{b2}\delta_{i1}). \tag{3.139}$$

Отже, система (3.7) (у разі $m{=}3$, $n{=}2$) з нелінійностями (3.139) інваріантна відносно алгебри (3.116) за умов $k{=}l{=}0$. Отримана система співпадає з системою (3.111) після введення позначень $\psi^{312}{=}\psi$, та врахувавши вже введені позначення (3.126).

Четвертий пункт теореми доведено.

Розглянемо оператори, описані у сьомому рядку таблиці 3.1. Базисні оператори алгебри (3.37), визначені в цьому пункті, мають вигляд

$$\begin{gathered}\partial_0,\ \partial_i,\ G_i{=}x_0\partial_i{+}\partial_{u^i},\ J_{12}{=}x_1\partial_2{-}x_2\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1},\\ D{=}2x_0\partial_0{+}x_i\partial_i{-}I_{12}{+}\partial_{u^3},\ \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_i\partial_i{+}x_i\partial_{u^i}{-}x_0(I_{12}{-}\partial_{u^3}),\end{gathered} \tag{3.140}$$

а координати оператора X у свою чергу набувають вигляду (3.117) і

$$\begin{aligned}\eta^a{=}&-(\varsigma x_0{+}c)u^a{+}\delta_{a1}(r_1{-}c_{12}u^2{+}\varsigma x_1){+}\delta_{a2}(r_2{+}c_{12}u^1{+}\varsigma x_2){+}\\&+\delta_{a3}\,(\varsigma x_0{+}c)\,(u^3{+}1).\end{aligned}\tag{3.141}$$

Підставивши (3.117), (3.141) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_i, отримуємо систему рівнянь, в яку входять вже відомі рівняння (3.119), (3.121) у разі $k=0$, а також нові:

$$\left(-u^d{+}\delta_{d3}(u^3{+}1)\right)F^{abi}_{u^d}{-}\delta_{a3}F^{3bi}{+}\delta_{b3}F^{a3i}{+}F^{abi}{=}0,\tag{3.142}$$

$$u^a-\delta_{a3}(u^3+1)+F^{a11}+F^{a22}{=}0.\tag{3.143}$$

Розв'язком (3.119), як вже доведено, є функції (3.123). Підставивши їх у систему (3.142) та розв'язавши її, отримуємо наступні матриці нелінійностей:

$$F^i(U){=}\begin{pmatrix}\lambda_{11i}e^{-u^3}{-}u^i & \lambda_{12i}e^{-u^3} & \lambda_{13i}e^{-2u^3}\\ \lambda_{21i}e^{-u^3} & \lambda_{22i}e^{-u^3}{-}u^i & \lambda_{23i}e^{-2u^3}\\ \lambda_{31i} & \lambda_{32i} & \lambda_{33i}e^{-u^3}{-}u^i\end{pmatrix},\tag{3.144}$$

де λ_{abi} — довільні сталі. Підставивши нелінійності (3.144) в систему (3.143), приходимо до умови

$$\lambda_{a22}=\delta_{a3}-\lambda_{a11}.\tag{3.145}$$

Урахувавши (3.144) та (3.145), розв'яжемо систему (3.121) за умови $k=0$. Отримуємо:

$$\begin{aligned}&\lambda_{i11}{=}\lambda_{i12}{=}\lambda_{i21}{=}0, && \lambda_{231}{=}-\lambda_{132}, && \lambda_{232}{=}\lambda_{131},\\ &\lambda_{331}{=}\lambda_{332}{=}0, && \lambda_{321}{=}-\lambda_{312}, && \lambda_{311}{=}\tfrac{1}{2}.\end{aligned}\tag{3.146}$$

Таким чином, нелінійності (3.144) з урахуванням умов (3.145), (3.146) набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned}F^{abi}{=}&-\delta_{ab}(\delta_{i1}u^1{+}\delta_{i2}u^2){+}\delta_{a3}\{\lambda_{312}(\delta_{b1}\delta_{i2}{-}\delta_{b2}\delta_{i1}){+}\tfrac{1}{2}(\delta_{b1}\delta_{i1}{+}\delta_{b2}\delta_{i2})\}{+}\\&+\delta_{b3}e^{-2u^3}\{\lambda_{131}(\delta_{a1}\delta_{i1}{+}\delta_{a2}\delta_{i2}){+}\lambda_{132}(\delta_{a1}\delta_{i2}{-}\delta_{a2}\delta_{i1})\}\end{aligned}\tag{3.147}$$

Отже, система (3.7) (у разі $m{=}3$, $n{=}2$) з нелінійностями (3.147) інваріантна відносно зображення узагальненої алгебри Галілея (3.140). Отримана система співпадає з системою (3.112) після введення позначень $\lambda_{131}{=}\lambda_1$, $\lambda_{132}{=}\lambda_2$, $\lambda_{312}{=}\lambda_3$, та врахувавши вже введені позначення (3.126).

П'ятий пункт теореми доведено.

Розглянемо оператори з десятого рядка таблиці 3.1. Базисні оператори алгебри (3.37), описані в цьому рядку, мають вигляд

$$\begin{aligned}&\partial_0,\ \partial_i,\ G_i{=}x_0\partial_i{+}\partial_{u^i},\ J_{12}{=}x_1\partial_2{-}x_2\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}{-}u^2\partial_{u^1}{+}\partial_{u^3},\\&D{=}2x_0\partial_0{+}x_i\partial_i{-}I_{12}{+}l\partial_{u^3}, \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_i\partial_i{+}x_i\partial_{u^i}{-}x_0(I_{12}{-}l\partial_{u^3}),\end{aligned} \tag{3.148}$$

а координати оператора X набувають вигляду (3.117) та

$$\begin{aligned}&\eta^a{=}{-}(\varsigma x_0{+}c)u^a{+}\delta_{a1}(r_1{-}c_{12}u^2{+}\varsigma x_1){+}\delta_{a2}(r_2{+}c_{12}u^1{+}\varsigma x_2){+}\\&\quad{+}\delta_{a3}\left(c_{12}{+}(\varsigma x_0{+}c)(u^3{+}l)\right).\end{aligned} \tag{3.149}$$

Підставивши (3.117), (3.149) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_i, отримуємо систему рівнянь, в яку входить вже відоме рівняння (3.119), а також нові:

$$\left(-u^d{+}\delta_{d3}(u^3{+}l)\right)F^{abi}_{u^d}{-}\delta_{a3}F^{3bi}{+}\delta_{b3}F^{a3i}{+}F^{abi}{=}0, \tag{3.150}$$

$$\begin{aligned}&-u^2F^{abi}_{u^1}{+}u^1F^{abi}_{u^2}{+}F^{abi}_{u^3}{+}\delta_{a1}F^{2bi}{-}\delta_{a2}F^{1bi}{-}\delta_{b2}F^{a1i}{+}\delta_{b1}F^{a2i}{+}\\&{+}\delta_{i1}F^{ab2}{-}\delta_{i2}F^{ab1}{=}0,\end{aligned} \tag{3.151}$$

$$u^a-\delta_{a3}(u^3+l)+F^{a11}+F^{a22}{=}0. \tag{3.152}$$

Розв'язком системи (3.119), як вже зазначалося, є функції (3.123). Підставивши їх у систему (3.150), розв'яжемо її. Очевидно, розв'язок залежить від значень сталої l. Так, у разі $l\neq 0$ матриці нелінійностей набувають наступного вигляду:

$$F^i(U){=}\begin{pmatrix}\lambda_{11i}e^{-\frac{u^3}{l}}{-}u^i & \lambda_{12i}e^{-\frac{u^3}{l}} & \lambda_{13i}e^{-\frac{2u^3}{l}}\\ \lambda_{21i}e^{-\frac{u^3}{l}} & \lambda_{22i}e^{-\frac{u^3}{l}}{-}u^i & \lambda_{23i}e^{-\frac{2u^3}{l}}\\ \lambda_{31i} & \lambda_{32i} & \lambda_{33i}e^{-\frac{u^3}{l}}{-}u^i\end{pmatrix}, \tag{3.153}$$

а якщо $l = 0$, то розв'язком є функції (3.127).

У випадку $l \neq 0$, розв'язавши систему (3.152), отримуємо умову (3.134), а з системи (3.151) маємо

$$\lambda_{i11}=\lambda_{i12}=\lambda_{i21}=\lambda_{i31}=\lambda_{i32}=\lambda_{331}=\lambda_{332}=0,\ \ \lambda_{321}=-\lambda_{312}, \lambda_{311}=\tfrac{l}{2}.$$

Враховуючи всі ці умови, бачимо, що розв'язком системи визначальних рівнянь у разі $l \neq 0$ є наступні функції:

$$F^{abi}=-\delta_{ab}(\delta_{i1}u^1+\delta_{i2}u^2)+\delta_{a3}\{\lambda_{312}(\delta_{b1}\delta_{i2}-\delta_{b2}\delta_{i1})+\tfrac{l}{2}(\delta_{b1}\delta_{i1}+\delta_{b2}\delta_{i2})\}. \quad (3.154)$$

Отже, система (3.7) з нелінійностями (3.154) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3.148) та співпадає з системою (3.113) після введення позначень (3.126) і $\lambda_{312}=\lambda$, $l = s \neq 0$.

Шостий пункт теореми доведено.

У випадку $l = 0$ треба розв'язати рівняння (3.151), (3.152). Підставивши функції (3.127) у систему (3.152), отримуємо умову (3.128). Підставивши функції (3.127) з урахуванням цієї умови у систему (3.151), бачимо, що вона зводиться до наступної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{\psi}^{311} + \psi^{321} + \psi^{312} = 0, \quad (3.155)$$

$$\dot{\psi}^{312} - 2\psi^{311} = 0, \quad (3.156)$$

$$\dot{\psi}^{321} - 2\psi^{311} = 0, \quad (3.157)$$

де крапка означає диференціювання за змінною u^3. Загальним розв'язком цієї системи є функції

$$\begin{aligned}&\psi^{311}=c_1\cos(2u^3) - c_2\sin(2u^3), \quad \psi^{312}=c_1\sin(2u^3)+c_2\cos(2u^3)+c_3,\\ &\psi^{321}=c_1\sin(2u^3) + c_2\cos(2u^3) - c_3,\end{aligned} \quad (3.158)$$

де c_a — довільні сталі.

Таким чином, система рівнянь конвекції–дифузії з нелінійностями (3.127), де функції ψ^{31i}, ψ^{32i} описуються формулами (3.128), (3.158), інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (3.148) у разі $l = 0$. Отримана система співпадає з системою (3.114) після введення позначень $c_3 = \lambda$, та враховуючи вже введені позначення (3.126), (3.133).

Сьомий пункт теореми доведено.

Розглянемо оператори з 11-го рядка таблиці 3.1. Базисні оператори алгебри (3.37), описані в цьому рядку, мають вигляд

$$\begin{gathered}\partial_0,\ \partial_i,\ G_1{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2},\ G_2{=}x_0\partial_2{+}u^3\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},\\ J_{12}{=}x_1\partial_2{-}x_2\partial_1{+}u^1\partial_{u^3}{-}u^3\partial_{u^1},\ D{=}2x_0\partial_0{+}x_i\partial_i{-}I{-}u^2\partial_{u^2},\\ \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_i\partial_i{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){+}x_2(u^3\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3}){-}x_0(I{+}u^2\partial_{u^2}){+}k\partial_{u^2},\end{gathered} \tag{3.159}$$

а координати оператора X набувають вигляду (3.117) та

$$\begin{aligned}\eta^a{=}&{-}(\varsigma x_0{+}c)u^a{+}\delta_{a1}(r_1{-}c_{12}u^3{+}\varsigma x_1){+}\delta_{a3}(r_2{+}c_{12}u^1{+}\varsigma x_2){+}\\&{+}\delta_{a2}\{r_1u^1{+}r_2u^3{-}(\varsigma x_0{+}c)u^2{+}\varsigma(x_1u^1{+}x_2u^3{+}k)\}.\end{aligned} \tag{3.160}$$

Підставивши (3.117), (3.160) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_i та груповими параметрами, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$(\delta_{d1}{+}\delta_{d2}u^1)F^{abi}_{u^d}{-}\delta_{a2}F^{1bi}{+}\delta_{b1}F^{a2i}{+}\delta_{ab}\delta_{i1}{=}0, \tag{3.161}$$

$$(\delta_{d2}u^3{+}\delta_{d3})F^{abi}_{u^d}{-}\delta_{a2}F^{3bi}{+}\delta_{b3}F^{a2i}{+}\delta_{ab}\delta_{i2}{=}0, \tag{3.162}$$

$$-(u^d{+}\delta_{d2}u^2)F^{abi}_{u^d}{+}\delta_{a2}F^{2bi}{-}\delta_{b2}F^{a2i}{+}F^{abi}{=}0, \tag{3.163}$$

$$-u^3F^{abi}_{u^1}{+}u^1F^{abi}_{u^3}{+}\delta_{a1}F^{3bi}{-}\delta_{a3}F^{1bi}{-}\delta_{b3}F^{a1i}{+}\delta_{b1}F^{a3i}{-}\epsilon_{ij}F^{abj}{=}0, \tag{3.164}$$

$$kF^{abi}_{u^2}{+}2(\delta_{a2}\delta_{b1}\delta_{i1}{+}\delta_{a2}\delta_{b3}\delta_{i2}) = 0, \tag{3.165}$$

$$u^a + \delta_{a2}u^2 + F^{ab1}(\delta_{b1}{+}\delta_{b2}u^1) + F^{ab2}(\delta_{b2}u^3{+}\delta_{b3}){=}0. \tag{3.166}$$

Розв’язавши систему (3.161), отримуємо функції

$$F^i{=}\begin{pmatrix}\varphi^{11i}{-}(\delta_{i1}{+}\varphi^{12i})u^1 & \varphi^{12i} & \varphi^{13i}\\ \varphi^{21i}{+}(\varphi^{11i}{-}\varphi^{22i})u^1{-}\varphi^{12i}(u^1)^2 & \varphi^{22i}{-}(\delta_{i1}{-}\varphi^{12i})u^1 & \varphi^{23i}{+}\varphi^{13i}u^1\\ \varphi^{31i}{-}\varphi^{32i}u^1 & \varphi^{32i} & \varphi^{33i}{-}\delta_{i1}u^1\end{pmatrix} \tag{3.167}$$

де $\varphi^{abi}=\varphi^{abi}(\omega^1,\ \omega^2)$ — довільні гладкі функції аргументів $\omega^1=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$, $\omega^2=u^3$. Підставивши нелінійності (3.167) у (3.162), отримуємо систему для визначення функцій φ^{abi}:

$$\omega^2\varphi^{abi}_{\omega^1}+\varphi^{abi}_{\omega^2}-\delta_{a2}\varphi^{3bi}+\delta_{b3}\varphi^{a2i}+\delta_{ab}\delta_{i2}=0. \tag{3.168}$$

Після підстановки розв'язку системи (3.168) у нелінійності (3.167), маємо:

$$\begin{aligned}
&F^{11i}=\psi^{11i}-(\delta_{i1}+\psi^{12i})u^1-\delta_{i2}u^3, \quad F^{12i}=\psi^{12i}, \quad F^{13i}=\psi^{13i}-\psi^{12i}u^3,\\
&F^{21i}=\psi^{21i}+\psi^{31i}u^3+(\psi^{11i}-\psi^{22i}-\psi^{32i}u^3)u^1-\psi^{12i}(u^1)^2,\\
&F^{22i}=\psi^{22i}+\psi^{32i}u^3-(\delta_{i1}-\psi^{12i})u^1-\delta_{i2}u^3,\\
&F^{23i}=\psi^{23i}+(\psi^{33i}-\psi^{22i})u^3-\psi^{32i}(u^3)^2+(\psi^{13i}-\psi^{12i}u^3)u^1,\\
&F^{31i}=\psi^{31i}-\psi^{32i}u^1, \quad F^{32i}=\psi^{32i}, \quad F^{33i}=\psi^{33i}-\psi^{32i}u^3-\delta_{i1}u^1-\delta_{i2}u^3,
\end{aligned} \tag{3.169}$$

де $\psi^{abi}=\psi^{abi}(\omega)$ — довільні гладкі функції аргументу $\omega=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}-\frac{(u^3)^2}{2}$.

Підставивши нелінійності (3.169) у систему рівнянь (3.163) та спростивши, отримуємо систему для визначення функцій ψ^{abi}:

$$\omega\dot{\psi}^{abi}-\tfrac{1}{2}\left\{\psi^{abi}-\delta_{b2}(\delta_{a1}\psi^{12i}+\delta_{a3}\psi^{32i})+\delta_{a2}(\delta_{b1}\psi^{21i}+\delta_{b3}\psi^{23i})\right\}=0,$$

загальним розв'язком якої є наступні функції:

$$\begin{aligned}
&\psi^{11i}=\lambda_{11i}\sqrt{\omega}, && \psi^{21i}=\lambda_{21i}\omega, && \psi^{31i}=\lambda_{31i}\sqrt{\omega},\\
&\psi^{12i}=\lambda_{12i}, && \psi^{22i}=\lambda_{22i}\sqrt{\omega}, && \psi^{32i}=\lambda_{32i},\\
&\psi^{13i}=\lambda_{13i}\sqrt{\omega}, && \psi^{23i}=\lambda_{23i}\omega, && \psi^{33i}=\lambda_{33i}\sqrt{\omega}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Нелінійності (3.169) з функціями (3.170) є розв'язком системи (3.161), (3.162), (3.163). Розв'яжемо тепер систему (3.164). Після підстановки нелінійностей (3.169) з функціями (3.170) у систему (3.164) отримуємо умови:

$$\lambda_{221}=\lambda_{222}=0, \quad \lambda_{231}=-\lambda_{212}, \quad \lambda_{232}=\lambda_{211}, \quad \lambda_{321}=-\lambda_{122}, \quad \lambda_{322}=\lambda_{121}$$

та систему:

$$\lambda_{131}+\lambda_{311}+\lambda_{112}=0,\quad \lambda_{312}+\lambda_{132}-\lambda_{111}=0,\quad \lambda_{331}-\lambda_{111}+\lambda_{132}=0,$$
$$\lambda_{131}+\lambda_{311}-\lambda_{332}=0,\quad \lambda_{312}+\lambda_{132}+\lambda_{331}=0,\quad \lambda_{331}-\lambda_{111}+\lambda_{312}=0,$$
$$\lambda_{332}-\lambda_{112}-\lambda_{131}=0,\quad \lambda_{332}-\lambda_{112}-\lambda_{311}=0,$$

яка, очевидно, має лише тривіальний розв'язок.

Врахувавши вказані обмеження, шукані функції набувають вигляду:

$$F^{11i}=-\delta_{i1}u^1-\delta_{i2}u^3-\lambda_{12i}u^1,\quad F^{12i}=\lambda_{12i},\quad F^{13i}=-\lambda_{12i}u^3,$$
$$F^{21i}=\lambda_{21i}\omega-\epsilon_{ij}\lambda_{12j}u^1u^3-\lambda_{12i}(u^1)^2,\quad F^{31i}=-\epsilon_{ij}\lambda_{12j}u^1,$$
$$F^{22i}=-\delta_{i1}u^1-\delta_{i2}u^3+\lambda_{12i}u^1+\epsilon_{ij}\lambda_{12j}u^3,\quad F^{32i}=\epsilon_{ij}\lambda_{12j},$$
$$F^{23i}=\epsilon_{ij}\lambda_{21j}\omega-\lambda_{12i}u^1u^3-\epsilon_{ij}\lambda_{12j}(u^3)^2,\quad F^{33i}=-\delta_{i1}u^1-\delta_{i2}u^3-\epsilon_{ij}\lambda_{12j}u^3,$$

де $\omega = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2} - \frac{(u^3)^2}{2}$. Отримані функції задовольняють систему (3.165) за умов

$$\lambda_{211} = -\tfrac{2}{k},\quad \lambda_{212} = 0,\quad k \neq 0 \tag{3.171}$$

а систему (3.166) у разі $k = 2$. Таким чином, ці функції за вказаних умов є розв'язком системи визначальних рівнянь (3.161)–(3.166). Перепозначивши $u^2 \to u^3$, $u^3 \to u^2$, отримуємо систему конвекції–дифузії

$$\begin{aligned}
u^1_0&=\Delta u^1 - u^1u^1_1 - u^2u^1_2 + \lambda_{121}\omega_1 + \lambda_{122}\omega_2,\\
u^2_0&=\Delta u^2 - u^1u^2_1 - u^2u^2_2 - \lambda_{122}\omega_1 + \lambda_{121}\omega_2,\\
u^3_0&=\Delta u^3 - u^1u^3_1 - u^2u^3_2 + \lambda_{12j}\omega_i(\delta_{ij}u^1 + \epsilon_{ij}u^2) - \omega(u^1_1 + u^2_2),
\end{aligned} \tag{3.172}$$

де $\omega = u^3 - \frac{(u^1)^2}{2} - \frac{(u^2)^2}{2}$, інваріантну відносно алгебри

$$\partial_0,\ \partial_i,\ G_i=x_0\partial_i+\partial_{u^i}+u^i\partial_{u^3},\ J_{12}=x_1\partial_2-x_2\partial_1+u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1},\ D=2x_0\partial_0+$$
$$+x_i\partial_i-I-u^3\partial_{u^3},\ \Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_i\partial_i+x_i(\partial_{u^i}+u^i\partial_{u^3})-x_0(I+u^3\partial_{u^3})+2\partial_{u^3}.$$

Ввівши позначення $\lambda_{121} = \lambda_1$, $\lambda_{122} = \lambda_2$, $\vec{L} = \lambda_1\vec{\nabla} + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$ та врахувавши вже введені позначення (3.126), бачимо, що система (3.172) співпадає з системою (3.115).

Восьмий пункт теореми доведено.

При розгляді операторів з решти рядків таблиці 3.1, підставивши координати оператора X у систему визначальних рівнянь (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_i, в кожному випадку приходимо до несумісної системи. Таким чином, для цих зображень узагальненої алгебри Галілея не існує нелінійностей F^{abi}, за яких би система конвекції–дифузії була інваріантною відносно вказаних алгебр.

Теорему доведено.

Отже, в класі систем (3.24) (при $m = 3$, $n = 2$) існує 8 систем, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея (3.37), і всі вони виписані в теоремі 3.6.

3.4. Випадок тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної

Цей підрозділ присвячено дослідженню інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея системи (3.7) у випадку тривимірного векторного поля та однієї просторової змінної, тобто у разі $m = 3$, $n = 1$. Ця система має наступний вигляд

$$u_0^a = u_{11}^a + F^{ab} u_1^b, \tag{3.173}$$

де $a, b = \overline{1, 3}$. Поставимо задачу: дослідити, за яких нелінійностях F^{ab} система (3.173) інваріантна відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

Слід зазначити, що, оскільки кількість часових і просторових змінних систем (3.173) та (2.1) однакові, у якості зображення узагальненої алгебри Галілея ми можемо використати вже готовий результат з розділу 2. Так, реалізацією узагальненої алгебри Галілея є алгебра (2.121), де оператори Q_a набувають виглядів (2.26), (2.63), (2.118) та комутують один з одним згідно формул (2.64), (2.119), (2.120), де $U \in \mathbb{R}^3$, $a, b = \overline{1, 3}$.

Як зазначалося раніше (див. лему 3.1), система рівнянь (3.173) допускає лінійні перетворення еквівалентності (3.71). Оскільки оператори Q_a ($a = \overline{1,3}$) містять довільні сталі, то вони задають цілий клас операторів алгебри (2.121). Прокласифікуємо зображення цієї алгебри, нееквівалентні відносно перетворень еквівалентності (3.71), у випадку $U \in \mathbb{R}^3$.

Має місце твердження.

Теорема 3.7. *З точністю до перетворень еквівалентності* (3.71) *існує 49 нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея* (2.121), *які визначаються операторами Q_a, наведеними в наступній таблиці.*

Таблиця 3.2: Нееквівалентні зображення операторів Q_1–Q_3 у випадку тривимірного векторного поля U.

№	Q_1	Q_2	Q_3	*Умови*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1.	$u^1\partial_{u^2}$	$-2I-I_{12}-u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	
2.	$u^1\partial_{u^2}$	$sI_{12}-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	$s \neq 0$
3.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}-3u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	
4.	$u^1\partial_{u^2}$	$-2I-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	∂_{u^3}	
5.	$u^1\partial_{u^2}$	$sI-I_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	$s\neq-1$
6.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	
7.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	
8.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}-2u^3\partial_{u^3}$	$u^1\partial_{u^3}$	
9.	$u^1\partial_{u^2}$	$-I-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	∂_{u^2}	
10.	$u^1\partial_{u^2}$	$s_1I-I_{23}+s_2u^3\partial_{u^3}$	0	$s_i\neq-1$

Продовження на наступній сторінці

1	2	3	4	5
11.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+su^3\partial_{u^3}$	0	
12.	$u^1\partial_{u^2}$	$sI-u^2\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
13.	$u^1\partial_{u^2}$	$I_{13}+\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
14.	$u^1\partial_{u^2}$	$-u^2\partial_{u^2}+(u^1+1)\partial_{u^3}$	0	
15.	$u^1\partial_{u^2}$	$sI-I_{23}+u^3\partial_{u^2}$	0	$s\neq-1$
16.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	
17.	$u^1\partial_{u^2}$	$sI_{12}-u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	$s\neq-1,2$
18.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$(\theta u^1+1)\partial_{u^3}$	
19.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$sI-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta u^1\partial_{u^3}$	
20.	$u^1\partial_{u^2}+æu^2\partial_{u^3}$	$I_{12}+u^1\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	$\theta u^1\partial_{u^3}$	
21.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I_{12}-u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	
22.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}+su^3\partial_{u^3}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
23.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}+u^3\partial_{u^2}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
24.	$æ_1\partial_{u^1}+æ_2u^1\partial_{u^2}$	$-I_{12}-u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	$\theta_1\partial_{u^2}$	
25.	$\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$	$-I-I_{23}$	∂_{u^3}	
26.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{13}+sI_{23}$	0	$s\neq\pm1,-2$
27.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{13}+\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3}$	0	
28.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$-I_{12}+2u^2\partial_{u^2}+s_1\partial_{u^3}$	$s_2u^2\partial_{u^1}$	
29.	$\partial_{u^1}+æu^2\partial_{u^3}$	$-I+u^2\partial_{u^1}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta\partial_{u^3}$	
30.	$\partial_{u^1}+æu^1\partial_{u^2}+u^2\partial_{u^3}$	$-I-I_{23}-u^3\partial_{u^3}$	$\theta(\partial_{u^2}+u^1\partial_{u^3})$	
31.	∂_{u^1}	$-I+s_1u^2\partial_{u^2}+s_2u^3\partial_{u^3}$	0	$s_i\neq-1$

Продовження на наступній сторінці

1	*2*	*3*	*4*	*5*
32.	∂_{u^1}	$-I+sI_{23}+u^3\partial_{u^2}$	0	$s\neq-1$
33.	∂_{u^1}	$-I_{12}+su^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	$s\neq-1$
34.	∂_{u^1}	$-I+u^2\partial_{u^1}+su^3\partial_{u^3}$	0	$s\neq-1$
35.	∂_{u^1}	$-I_{12}+u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	0	
36.	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	0	
37.	∂_{u^1}	$-I+u^2\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}$	0	
38.	∂_{u^1}	$-I+(u^2+u^3)\partial_{u^1}$	0	
39.	∂_{u^1}	$-I+s_1I_{23}+s_2J_{32}$	0	$s_2\neq 0$
40.	∂_{u^1}	$-I+sI_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	$s\neq-1$
41.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	
42.	∂_{u^1}	$-I_{13}+\partial_{u^2}+3u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^2}$	
43.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+2u^3\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^2}$	
44.	∂_{u^1}	$-I-I_{23}-2u^2\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	
45.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+su^3\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
46.	∂_{u^1}	$-I_{12}+2u^2\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
47.	∂_{u^1}	$-I+2I_{23}+u^2\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}$	
48.	∂_{u^1}	$-I+u^3\partial_{u^1}+2u^2\partial_{u^2}$	$u^2\partial_{u^1}$	
49.	∂_{u^1}	$-I-I_{23}+3u^3\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^1}+\partial_{u^2}$	

У таблиці 3.2 s, s_i – *довільні сталі,* $i = 1,2$, $I_{12}=u^1\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^2}$, $I_{13}=u^1\partial_{u^1}+u^3\partial_{u^3}$, $J_{32}=u^2\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^2}$, $(æ_1, æ_2) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}$,

$$\theta_1 \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{якщо } æ_1\cdot æ_2 = 1, \\ \{0,1\}, & \text{якщо } æ_1\cdot æ_2 = 0. \end{cases}$$

Доведення теореми подано в додатку А.

Тепер розв'яжемо задачу класифікації нелінійностей $F^{ab}(U)$, за яких система (3.173) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (2.121) у випадку тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.8. *Система (3.173) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (2.121) тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з виглядів:*

$$\begin{aligned}
&w^1_0+w^1w^1_1=w^1_{11}+\lambda_{12}w^2_1+\lambda_{13}(w^3)^{2l-1}w^3_1+G^1,\\
&w^2_0+w^1w^2_1=w^2_{11}-2w^2w^1_1+\lambda_{22}(w^3)^lw^2_1+\lambda_{23}(w^3)^{3l-1}w^3_1+G^2,\\
&w^3_0+w^1w^3_1=w^3_{11}-\frac{w^3}{l}w^1_1+\lambda_{32}(w^3)^{1-l}w^2_1+\lambda_{33}(w^3)^lw^3_1+G^3,
\end{aligned}\tag{3.174}$$

де λ_{ab} — довільні сталі, $l\neq0$ — стала, значення якої, як і функцій w^a, G^a, подані у таблиці 3.3, коли

$$Q_1=\partial_{w^1},\ Q_2=-w^1\partial_{w^1}-2w^2\partial_{w^2}-\frac{1}{l}w^3\partial_{w^3},\ Q_3=\partial_{w^2};\tag{3.175}$$

або

$$\begin{aligned}
&w^1_0+w^1w^1_1=w^1_{11}+\psi w^2_1+G^1,\\
&w^2_0+w^1w^2_1=w^2_{11}-2w^2w^1_1+G^2,\\
&w^3_0+w^1w^3_1=w^3_{11}+G^3,
\end{aligned}\tag{3.176}$$

де $\psi=\psi(w^3)$ — довільна функція, значення w^a, G^a подані у таблиці 3.4, коли

$$Q_1=\partial_{w^1},\ Q_2=-w^1\partial_{w^1}-2w^2\partial_{w^2},\ Q_3=\partial_{w^2};\tag{3.177}$$

або

$$\begin{aligned}
&w^1_0+w^1w^1_1=w^1_{11}+(w^2)^{2l-1}\psi^{12}w^2_1+(w^2)^{2l}\psi^{13}w^3_1+G^1,\\
&w^2_0+w^1w^2_1=w^2_{11}-\frac{w^2}{l}w^1_1+(w^2)^l\psi^{22}w^2_1+(w^2)^{l+1}\psi^{23}w^3_1+G^2,\\
&w^3_0+w^1w^3_1=w^3_{11}+(w^2)^{l-1}\psi^{32}w^2_1+(w^2)^l\psi^{33}w^3_1+G^3,
\end{aligned}\tag{3.178}$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(w^3)$ — *довільні функції,* $l\neq 0$ — *стала, значення якої, а також функцій* w^a, G^a, *подані в таблиці 3.5, коли*

$$Q_1=\partial_{w^1},\ Q_2=-w^1\partial_{w^1}-\frac{1}{l}w^2\partial_{w^2},\ Q_3=0. \tag{3.179}$$

Таблиця 3.3: Набір значень l, w^a, G^a *для системи* (3.174).

№	l	w^a	G^a
1	*2*	*3*	*4*
1.	l	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$	$G^1=\frac{2w_1^1w_1^3}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w_1^3$
		$w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{(u^2)^2}{2(u^1)^2}$	$G^2=(w_1^1)^2+\frac{2w_1^2w_1^3}{w^3}$
		$w^3=u^1$	$G^3=0$
2.	$-\frac{1}{2}$	$w^1=\frac{u^2}{u^1}$	$G^1=\frac{2w_1^1w_1^3}{w^3}-\frac{2w^2}{w^3}w_1^3$
		$w^2=\frac{u^3}{u^1}-\frac{(u^2)^2}{2(u^1)^2}-\frac{1}{2u^1}\ln u^1$	$G^2=(w_1^1)^2+\frac{2w_1^2w_1^3}{w^3}-\frac{(w_1^3)^2}{2(w^3)^3}$
		$w^3=u^1$	$G^3=0$
3.	l	$w^1=u^1$	$G^1=0$
		$w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$	$G^2=(w_1^1)^2$
		$w^3=u^3$	$G^3=0$
4.	$\frac{1}{2}$	$w^1=u^1$	$G^1=0$
		$w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}+u^3\ln\sqrt{u^3}$	$G^2=(w_1^1)^2-\frac{(w_1^3)^2}{2w^3}$
		$w^3=u^3$	$G^3=0$
5.	1	$w^1=u^1$	$G^1=0$
		$w^2=u^2-\frac{(u^1)^2}{2}$	$G^2=(w_1^1)^2$
		$w^3=e^{-u^3}$	$G^3=-\frac{(w_1^3)^2}{w^3}$

1	2	3	4
6.	$\frac{1}{3}$	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^1u^2 - u^3 + \frac{(u^1)^3}{3}$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 2w^2w^2_1 - 2w^1_1w^2_1$

Таблиця 3.4: Набір значень w^a, G^a для системи (3.176).

№	w^a	G^a
1.	$w^1 = \frac{u^2}{u^1}$ $w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{(u^2)^2}{2(u^1)^2}$ $w^3 = u^1$	$G^1 = \frac{2w^1_1w^3_1}{w^3} - \frac{2w^2}{w^3}w^3_1$ $G^2 = (w^1_1)^2 + \frac{2w^2_1w^3_1}{w^3}$ $G^3 = 0$
2.	$w^1 = u^1$ $w^2 = u^2 - \frac{(u^1)^2}{2}$ $w^3 = u^3$	$G^1 = 0$ $G^2 = (w^1_1)^2$ $G^3 = 0$

Таблиця 3.5: Набір значень l, w^a, G^a для системи (3.178).

№	l	w^a	G^a
1	2	3	4
1.	l	$w^1 = u^1,$ $w^2 = u^2$ $w^3 = u^3(u^2)^k$	$G^1 = 0$ $G^2 = 0$ $G^3 = \frac{k(k+1)w^3(w^2_1)^2}{(w^2)^2} - \frac{2kw^2_1w^3_1}{w^2}$
2.	1	$w^1 = u^1,$	$G^1 = 0$

1	2	3	4
		$w^2 = e^{-\frac{u^2}{u^3}}$	$G^2 = \frac{2w_1^2 w_1^3}{w^3} - (2s-1)\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$
		$w^3 = u^3 e^{-(s-1)\frac{u^2}{u^3}}$	$G^3 = -(s-1)^2 w^3 \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
3.	1	$w^1 = u^1$	$G^1 = 0$
		$w^2 = e^{-u^3}$	$G^2 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$
		$w^3 = u^2 e^{-ku^3}$	$G^3 = k^2 \frac{w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \frac{2k w_1^2 w_1^3}{w^2}$
4.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^2$	$G^1 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$
		$w^2 = u^2$	$G^2 = 0$
		$w^3 = u^3 (u^2)^k$	$G^3 = \frac{k(k+1) w^3 (w_1^2)^2}{(w^2)^2} - \frac{2k w_1^2 w_1^3}{w^2}$
5.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^2$	$G^1 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$
		$w^2 = u^2$	$G^2 = 0$
		$w^3 = u^3 + \ln u^2$	$G^3 = \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
6.	1	$w^1 = u^1$	$G^1 = 0$
		$w^2 = e^{-u^3}$	$G^2 = -\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$
		$w^3 = u^2 - \frac{(u^3)^2}{2}$	$G^3 = \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
7.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^3 + \frac{1}{2} u^3 \ln^2 u^3$	$G^1 = \frac{(w_1^2)^2}{w^2} - \frac{w^3 (w_1^2)^2}{w^2} - 2 w_1^2 w_1^3$
		$w^2 = u^3$	$G^2 = 0$
		$w^3 = \frac{u^2}{u^3} + \ln u^3$	$G^3 = \frac{2 w_1^2 w_1^3}{w^2} - \frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$
8.	1	$w^1 = u^1 + u^2 \ln u^2 + u^3 \ln u^3$	$G^1 = -\frac{w^3 (w_1^2)^2}{w^2} - \frac{w^2 (w_1^3)^2}{w^3} -$
		$w^2 = u^2$	$-\frac{(w_1^2)^2}{w^2} - 2 w_1^2 w_1^3,$
		$w^3 = \frac{u^3}{u^2}$	$G^2 = 0,\ G^3 = \frac{2 w_1^2 w_1^3}{w^2}$
9.	1	$w^1 = u^1$	$G^1 = 0$

1	*2*	*3*	*4*
		$w^2=e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},\ s{\neq}0$ $w^3=\ln\vec{u}^2-\frac{2k}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}$	$G^2{=}w_1^2w_1^3{-}(2k{+}1)\frac{(w_1^2)^2}{w^2}$ $G^3=\frac{(w_1^3)^2}{2}{-}2(s^2{+}k^2)\frac{(w_1^2)^2}{(w^2)^2}$

У таблиці 3.5 k, s — довільні сталі.

Доведення теореми наведено в додатку В.

Таким чином, із класу систем (3.173) виділені системи, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, та підібрані заміни, що значно спрощують вигляди цих систем. Оскільки дані системи володіють широкими симетріями, то вони претендують на опис реальних фізичних процесів.

3.5. Аналог системи рівнянь Нав'є–Стокса у випадку $\mathbf{n \neq m}$

У даному підрозділі ми реалізуємо задачу, поставлену на початку розділу, зокрема, на основі одержаних систем конвекції–дифузії, отримаємо аналог системи рівнянь Нав'є–Стокса у разі $m \neq n$.

У теоремах 3.6, 3.8 (відповідно, для $(m, n) = (3, 2)$ та $(m, n) = (3, 1)$) наведені системи конвекції–дифузії (3.7), інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея. Узагальнимо деякі з них до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса у разі $m \neq n$, так, щоб зберігалась інваріантність отриманих систем відносно вказаних алгебр. Зазначимо, що подібне узагальнення у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної виконувалось у роботі [69]. Ми ж покажемо це для $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

У випадку $m = 3$, $n = 1$ розглянемо систему (3.176), значення w^a, G^a якої описані у другому рядку таблиці 3.4. Після відповідної підстановки вона має вигляд

$$
\begin{aligned}
&u^1_0+u^1u^1_1-u^1_{11}-\psi(u^3)\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1=0,\\
&u^2_0+u^1u^2_1-u^2_{11}-\psi(u^3)u^1\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1+2\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1=0,\\
&u^3_0+u^1u^3_1-u^3_{11}=0,
\end{aligned}
\tag{3.180}
$$

та інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея з наступними базисними генераторами:

$$
\begin{aligned}
&\partial_0,\partial_1,G=x_0\partial_1+\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2},D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2},\\
&\Pi={x_0}^2\partial_0+x_0x_1\partial_1+x_1(\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2})-x_0(u^1\partial_{u^1}+2u^2\partial_{u^2})+\partial_{u^2}.
\end{aligned}
$$

Розглянемо наступне узагальнення системи (3.180):

$$
\begin{aligned}
&u^1_0+u^1u^1_1-u^1_{11}-\psi(u^3)\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1=f^1p_1,\\
&u^2_0+u^1u^2_1-u^2_{11}-\psi(u^3)u^1\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1+2\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1=f^2p_1,\\
&u^3_0+u^1u^3_1-u^3_{11}=f^3p_1,\\
&\rho_0+\partial_1[\vec{g}\vec{u}]=0,\\
&p=f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.181}
$$

де $\vec{g}=(g^1,g^2,g^3)$, f^a, g^a $(a=\overline{1,3})$ — довільні гладкі функції аргументу ρ. Вимагаємо, щоб система (3.181) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (2.121), де

$$
Q_1=\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2},\quad Q_2=-u^1\partial_{u^1}-2u^2\partial_{u^2}-ku^3\partial_{u^3}-l\rho\partial_\rho,\quad Q_3=\partial_{u^2}. \tag{3.182}
$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.9. *Нехай система (3.181) має вигляд*

$$
\begin{aligned}
&u^1_0+u^1u^1_1-u^1_{11}-\psi\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1=0,\\
&u^2_0+u^1u^2_1-u^2_{11}-\psi u^1\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)_1+2\left(u^2-\tfrac{1}{2}(u^1)^2\right)u^1_1=\frac{c_1\rho^2}{\dot{f}(\rho)}p_1,\\
&u^3_0+u^1u^3_1-u^3_{11}=\frac{c_2}{\dot{f}(\rho)}p_1,\\
&\rho_0+(u^1\rho)_1+\lambda(u^3\rho^2)_1=0,\\
&p=f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.183}
$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i $(i = 1, 2)$ — довільні сталі, тоді вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\begin{array}{l}\partial_0, \partial_1, G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}, D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{-}2u^2\partial_{u^2}{-}\rho\partial_\rho, \\ \Pi{=}{x_0}^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){-}x_0(u^1\partial_{u^1}{+}2u^2\partial_{u^2}{+}\rho\partial_\rho){+}\partial_{u^2}.\end{array} \tag{3.184}$$

Доведення. Для зручності в обчисленнях позначимо $\rho = u^4$. Тоді після підстановки останнього рівняння в перші три та заміни

$$f^1\dot{f} = \tilde{f}^1, \quad f^2\dot{f} = \tilde{f}^2, \quad f^3\dot{f} = \tilde{f}^3$$

отримаємо систему

$$\begin{array}{l} u_0^1{+}u^1u_1^1{-}u_{11}^1{-}\psi(u^3)\left(u^2{-}\frac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{-}\tilde{f}^1u_1^4 = 0, \\ u_0^2{+}u^1u_1^2{-}u_{11}^2{-}\psi(u^3)u^1\left(u^2{-}\frac{1}{2}(u^1)^2\right)_1{+}2\left(u^2{-}\frac{1}{2}(u^1)^2\right)u_1^1{-}\tilde{f}^2u_1^4 = 0, \\ u_0^3{+}u^1u_1^3{-}u_{11}^3{-}\tilde{f}^3u_1^4 = 0, \\ u_0^4 + \dot{g^a}u^au_1^4 + g^au_1^a = 0. \end{array} \tag{3.185}$$

Для доведення застосуємо алгоритм С. Лі (див., наприклад, [119], [43], [47]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (3.185) має вигляд:

$$X = \xi^0(x,u)\partial_0 + \xi^1(x,u)\partial_1 + \eta^b(x,u)\partial_{u^b}, \tag{3.186}$$

де $b = \overline{1,4}$.

З умови інваріантності системи (3.185) відносно оператора (3.186)

$$\tilde{X}S\mid_{S=0} = 0, \tag{3.187}$$

де S – ліва частина системи (3.185); отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та уточнення невідомих функцій.

Зображення операторів Q_i з (3.182) визначає базисні оператори узагальненої алгебри Галілея:

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2},$$
$$D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{-}2u^2\partial_{u^2}{-}ku^3\partial_{u^3}{-}lu^4\partial_{u^4},$$
$$\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){-}x_0(u^1\partial_{u^1}{+}2u^2\partial_{u^2}{+}ku^3\partial_{u^3}{+}lu^4\partial_{u^4}){+}\partial_{u^2},$$

де $k, l \in \mathbb{R}$ — довільні сталі, та координати оператора X:

$$\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, \quad \xi^1 = \varsigma x_0x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1,$$
$$\eta^1 = \varsigma(x_1 - x_0u^1) - cu^1 + r,$$
$$\eta^2 = \varsigma(x_1u^1 - 2x_0u^2 + 1) - 2cu^2 + ru^1,$$
$$\eta^3 = -k(\varsigma x_0 + c)u^3, \quad \eta^4 = -l(\varsigma x_0 + c)u^4,$$

де ς, c, r, q_0, q_1 – довільні сталі.

Підставивши відповідні ξ^0, ξ^1, η^b ($b = \overline{1,4}$) у систему визначальних рівнянь, отриману з умови (3.187), та розв'язавши її, уточнюємо значення невідомих функцій та сталих. Отже, систему визначальних рівнянь задовольняють

$$\tilde{f}^1 = 0, \quad \tilde{f}^2 = c_1(u^4)^2, \quad \tilde{f}^3 = c_2,$$
$$g^1 = u^4, \quad g^2 = 0, \quad g^3 = \lambda(u^4)^2,$$
$$k = 0, \quad l = 1.$$

Виконавши зворотню заміну $u^4 = \rho$, отримуємо систему (3.183), інваріантну відносно алгебри, базисні генератори якої мають вигляд (3.184).

Теорему доведено.

У випадку $m = 3$, $n = 2$ розглянемо, наприклад, систему (3.111). Вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$AG_2(1,2) = \langle \partial_0, \partial_i, G_i = x_0\partial_i + \partial_{u^i},$$
$$J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i - u^i\partial_{u^i},$$
$$\Pi = {x_0}^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_i\partial_{u^i} - x_0u^i\partial_{u^i}\rangle,$$

де $i = 1, 2$.

Розглянемо наступне узагальнення системи (3.111)

$$
\begin{aligned}
&u_0^a{+}u^b u_b^a{-}\Delta u^a{=}f^{ab}p_b,\\
&u_0^3{+}u^b u_b^3{-}\Delta u^3{+}\varphi\epsilon_{ab}u_b^a{=}f^{3b}p_b,\\
&\rho_0 + \partial_a(g^{ad}u^d) = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.188}
$$

де $f^{db}{=}f^{db}(\rho)$, $g^{ad}{=}g^{ad}(\rho)$, $(a, b{=}1, 2,\ d{=}\overline{1, 3})$, $\varphi{=}\varphi(u^3)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів. Вимагаємо, щоб система (3.188) була інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея (3.37), де

$$Q_a = \partial_{u^a}, Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}, Q_4 = -u^a\partial_{u^a} - k\rho\partial_\rho, Q_5 = 0.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.10. *Нехай система (3.188) має вигляд*

$$
\begin{aligned}
&u_0^a{+}u^b u_b^a{-}\Delta u^a{=}\frac{\delta_{ab}c_1 + \epsilon_{ab}c_2}{\dot f(\rho)}p_b,\\
&u_0^3{+}u^b u_b^3{-}\Delta u^3{-}\varphi\epsilon_{ab}u_b^a{=}0,\\
&\rho_0 + (\rho u^a)_a = 0,\\
&p = f(\rho),
\end{aligned}
\tag{3.189}
$$

тоді вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\partial_0, \partial_a, G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1},$$
$$D{=}2x_0\partial_0{+}x_a\partial_a{-}u^a\partial_{u^a}{-}2\rho\partial_\rho, \Pi{=}{x_0}^2\partial_0{+}x_0x_a\partial_a{+}x_a\partial_{u^a}{-}x_0(u^a\partial_{u^a}{+}2\rho\partial_\rho),$$

де c_i — довільні сталі, $a, b, i = 1, 2$.

Доведення теореми 3.10 базується на стандартному методі С. Лі та проводиться аналогічно до доведення теореми 3.9.

Оскільки одержані системи узагальнюють тривимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса у випадках, відповідно, однієї та двох просторових змінних не тільки за формою, а й зберігають інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея, то вони задовольняють принципу відносності Галілея, а, отже, претендують на опис реальних процесів гідродинаміки.

Підсумовуючи сказане вище, можна зробити висновок, що метод С. Лі є потужним методом, за допомогою якого серед класу математичних моделей можна відібрати ті, що задовольняють тому чи іншому принципу відносності.

3.6. Висновки до розділу 3

У даному розділі встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності та основну алгебру інваріантності n–вимірної системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку m–вимірного векторного простору U, також виписано необхідну умову вигляду інфінітезимального оператора інваріантності цієї системи. Крім того, використовуючи реалізації алгебри Галілея та узагальненої алгебри Галілея у випадку однієї просторової змінної, отримані в розділі 2, прокласифіковано зображення цих алгебр у випадку тривимірного поля U. Отримано реалізацію узагальненої алгебри Галілея у випадку двох просторових змінних та прокласифіковано нееквівалентні зображення цієї алгебри у випадку двовимірного та тривимірного поля U. Встановлено, за яких значень нелінійностей F^i система рівнянь конвекції–дифузії (3.7) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку двовимірного та тривимірного векторного поля U.

Основні результати, отримані в даному розділі, наступні:

1. В лемі 3.1 виписано групу неперервних перетворень еквівалентності n–вимірної системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку m–вимірного векторного поля U.

2. Отримано реалізацію узагальненої алгебри Галілея у випадку двох просторових змінних, єдине зображення цієї алгебри у випадку двови-

мірного векторного поля U (з точністю до перетворень еквівалентності) знайдено в теоремі 3.3, також в теоремі 3.4 доведено, що єдиною системою, інваріантною відносно цієї алгебри є класична система рівнянь Бюргерса.

3. Знайдену реалізацію узагальненої алгебри Галілея у випадку двох просторових змінних прокласифіковано з точністю до перетворень еквівалентності у випадку тривимірного векторного поля U, нееквівалентні зображення наведено в теоремі 3.5.

4. Доведено, що двовимірна система рівнянь конвекції–дифузії у випадку тривимірного векторного поля U інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,2)$ тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з восьми нееквівалентних виглядів, наведених у теоремі 3.6.

5. Реалізацію узагальненої алгебри Галілея у випадку однієї просторової змінної, отриману в розділі 2, прокласифіковано з точністю до перетворень еквівалентності у випадку тривимірного векторного поля U, нееквівалентні зображення цієї алгебри наведено в теоремі 3.7.

6. Встановлено, що одновимірна система рівнянь конвекції–дифузії у випадку $U \in \mathbb{R}^3$ інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень еквівалентності набуває одного із сімнадцяти виглядів, наведених в теоремі 3.8.

7. Вказано спосіб узагальнення трикомпонентних систем рівнянь конвекції–дифузії, інваріантних відносно узагальнених алгебр Галілея, до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса у разі $n \neq m$, де n — кількість незалежних просторових змінних, m — розмірність векторного поля U, зі збереженням інваріантності отриманих систем відносно вказаних алгебр.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати наступним чином.

1. З точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено вигляди систем нелінійних рівнянь реакції–конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея, а також її розширень операторами масштабних і проективних перетворень.

2. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії у випадку m–вимірного векторного поля U та n незалежних просторових змінних.

3. Встановлено з точністю до перетворень еквівалентності, за яких значень нелінійностей двовимірна система рівнянь конвекції–дифузії у випадку $U \in \mathbb{R}^2$ інваріантна відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

4. Знайдено всі двовимірні системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку $U \in \mathbb{R}^3$, інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

5. Досліджено інваріантність системи рівнянь конвекції–дифузії у випадку тривимірного векторного поля U та однієї просторової змінної відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень.

6. Здійснено узагальнення деяких трикомпонентних систем рівнянь конвекції–дифузії, інваріантних відносно узагальнених алгебр Галілея, до систем, які є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса у разі $n \neq m$, зі збереженням інваріантності отриманих систем відносно вказаних алгебр.

Список використаних джерел

[1] Абраменко А.А. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований / А.А. Абраменко, В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.

[2] Аль Фарах Х. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів / Аль Фарах Х., Портенко М. — Ін-т математики НАН України. — К. — 2007. — 24 с. — (Препр. 2007.6).

[3] Андреєва Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу /Н.В. Андреєва // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 10–13.

[4] Ахатов И.Ш. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации / И.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Докл. АН СССР — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.

[5] Баранник А.Ф. Узагальнена процедура відокремлення змінних / А.Ф. Баранник, Т.А. Баранник, І.І. Юрик // Доп. НАН України. — 2009. — № 8. — С. 7–13.

[6] Баранник А.Ф. Узагальнена процедура відокремлення змінних і редукція нелінійних хвильових рівнянь / А.Ф. Баранник, Т.А. Баранник, І.І. Юрик // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 7. — С. 892–905.

[7] Баранник А.Ф. Узагальнене відокремлення змінних і точні розв'язки нелінійних рівнянь / А.Ф. Баранник, Т.А. Баранник, І.І. Юрик // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 12. — С. 1598–1608.

[8] Баранник А.Ф. Про точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії / А.Ф. Баранник, І.І. Юрик // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 8. — С. 1011–1019.

[9] Белоколос Е.Д. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравненинний в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния / Е.Д. Белоколос, В.З. Эпольский // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 89–120.

[10] Белоколос Е.Д. Алгебро–геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений / Е.Д. Белоколос, А.И. Бобенко, В.Б. Матвеев, В.З. Эпольский // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41, № 2. — С. 3–42.

[11] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1965. — 798 с.

[12] Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространстве бесконечного числа переменных / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1978. — 360 с.

[13] Березанский Ю.М. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах / Ю.М. Березанский, А.А. Калюжный. — К.: Наукова думка, 1992. — 352 с.

[14] Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. — К.: Наукова думка, 1988. — 680 с.

[15] Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф. — М.: Иностранная литература, 1963. — 400 с.

[16] Вигнер Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер (пер.с англ. Ю.А. Данилов). — М.: "МИР", 1971. — 318 с.

[17] Власенко Л.А. О разрешимости дифференциально–алгебраических уравнений с импульсным воздействием / Л.А. Власенко, Н.А. Перестюк // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, N 4. — С. 458–468.

[18] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей–інваріантних рівнянь: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 /Глеба Аліна Володимирівна. — К. —2003. — 120 с.

[19] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником / В.А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.

[20] Дородницын В.А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях / В.А. Дородницын, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

[21] Жадан Т.О. (тепер Карпалюк Т.О.) Інваріантність системи рівнянь дифузії–конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. / Т.О. Жадан // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. — 2004. — В.12. — С. 70-75.

[22] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н. Х. Ибрагимов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4 (286). — С. 83–144.

[23] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[24] Иваницкий Г.Р. От беспорядка к упорядоченности - на примере движения микроорганизмов / Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161,№ 4. — С. 13–71.

[25] Карпалюк Т.О. Узагальнення тривимірної системи рівнянь конвекції–дифузії до системи типу Нав'є-Стокса / Т.О. Карпалюк // Матеріали П'ятнадцятої Міжнародної наукової конференції імені акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ: НТУУ "КПІ". — 2014 р. — С. 135–136

[26] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа / В.Л. Катков // Журнал прикладной механики и теоретической физики. — 1965. — Т. 6. — С. 105–106.

[27] Костенко В. Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом / В. Г. Костенко. — Л. : Львів. держ. ун-т, 1959. — 22 с.

[28] Лагно В.И. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований / В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.

[29] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній — Праці Інституту математики НАН України: Мат-ка та її застосування. — К., 2002. — Т. 45. — 359 с.

[30] Лазарь Р.Д. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / Р.Д. Лазарь, В.Л. Макаров, А.А. Самарский — М.: В. школа, 1987. — 296 с.

[31] Луковский И.А. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности / И.А. Луковский — Киев.: Наукова думка, 1977. — 240 с.

[32] Луковський I.О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках / I.О. Луковський // Доп. НАН України. — 2002. — № 5. — С. 53–58.

[33] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью / И.А. Луковский // Приклад. механика. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 37–77.

[34] Луковский И.А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости / Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. — Киев.: Наукова думка, 1984. — 232 с.

[35] Ляшко И.И. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач математической физики / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько — Киев.: Вища школа, 1977. — 408 с.

[36] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения./ В.А. Марченко — К.: Наук. думка., 1977. — 331 с.

[37] Мартынюк Д.Н. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно–периодическими коэффициентами / Мартынюк Д.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Наук. думка., 1984. — 213 с.

[38] Миллер У., мл. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер., мл. — М. : Мир, 1981. — 342 с.

[39] Митропольский Ю.А. Асимптотическое исследование слабонелинейных колебательных систем / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Наукова думка, 1976. — 54 с.

[40] Митропольский Ю.А. Математические проблемы нелинейной механики / Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. — К.: Вища шк., 1987. — 69 с.

[41] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния./ Нижник Л.П. — Киев: Наук. думка, 1973. — 182 с.

[42] Нижник Л.П., Починайко М.Д. Интегрирование пространственно–двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи / Л.П. Нижник, М.Д. Починайко // Функц. анализ. — 1982. — Т. 16, вып. 1. — С. 80–82.

[43] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations / Ovsiannikov L.V. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.

[44] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности./ Л.В. Овсянников. — Доклады АН СССР. — т.125, 1959. — С. 492–495.

[45] Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений / Л.В. Овсянников, С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[46] Омелян О.М. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії / О.М. Омелян // Тр. Ин-та ИПММ НАН Украины. — Донецк. — 2009. — Т. 1. — С. 138–147.

[47] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер — М. : Мир, 1989. — 639 с.

[48] Перестюк Н.А. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. — Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер.: Математика и её применение. — К, 2007. — Т. 67. — 427 с.

[49] Перестюк Н.А. О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием / Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко, А.Н. Станжицкий // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, N 8. — С. 1061–1079.

[50] Портенко М.І. Про рівняння відновлення, які виникають в деяких задачах теорії узагальнених дифузійних процесів / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, N 9. — С. 1302–1312.

[51] Портенко М.І. Ймовірнісне зображення розв'язку однієї задачі математичної фізики / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т 52, N 9. — С. 1272–1282.

[52] Рассоха І.В. Дослідження симетрійних властивостей нелінійних систем параболічного типу: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / Рассоха Інна Володимирівна. — К. — 2012. — 144с.

[53] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / А.М Самойленко. — М.: Наука, 1987. — 301 с.

[54] Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ронто Н.И. — Киев.: Наук. думка, 1992. — 279 с.

[55] Самойленко А.М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин — Київ.: Наук. думка, 2004. — 474 с.

[56] Самойленко А.М. Багаточастотні коливання нелінійних систем / А.М. Самойленко, Петришин Р.І. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.

[57] Сєров М.І. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування / М.І. Сєров, Т.О. Жадан (тепер Т.О. Карпалюк), Л.М. Блажко // УМЖ. — 2006. — Т. 58,№ 8. — С. 1128–1145.

[58] Сєров М.І. Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь за допомогою перетворень Q-умовної еквівалентності / М.І. Сєров, І.В. Рассоха, Т.О. Карпалюк // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — Т.4, №3. — С. 232–246.

[59] Сєров М.І. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-конвекції-дифузії [Електронний ресурс] / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, О.М. Омелян, Т.О. Карпалюк // Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). — Київ. — 2009. — Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Serov.pdf

[60] Сєров М.І. Інваріантність системи рівнянь конвекції–дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля./ М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк // Математичний вісник НТШ. — Київ. — 2010. — Т.7. — С. 267–288.

[61] Сєров М.І. Симетрійна класифікація двовимірної системи нелінійних рівнянь конвекції дифузії (частина 1) / М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк // Збірник праць II Всеукраїнського наукового семінару ”Українська

школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи", 19-20 жовтня 2011р. — Полтава, 2012. — С. 99–111.

[62] Сєров М.І. Застосування принципів симетрії для узагальнення системи рівнянь Нав'є-Стокса. / М.І. Сєров, М.М. Сєрова, Т.О. Карпалюк // Науковий вісник Ужгородського університету. — Ужгород. — 2012. — В.23, №2. — С. 149–159.

[63] Сєров М.І. Системи рівнянь реакції–конвекції–дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея. / М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк, О.Г. Плюхін // Буковинський математичний журнал. — Чернівці. — 2013 — Т. 1, №1–2. — С. 125–135.

[64] Сєров М.І. Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван–дер–Ваальса / М.І. Сєров, О.М. Омелян // Праці Інституту математики НАН України. — 2000. — Т.35. — С. 1–9.

[65] Сєров М.І. Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису / М.І. Сєров, О.М. Омелян// Український математичний вісник. — 2008. — Т. 5, № 4. — С. 536–562.

[66] Сєров М.І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису: монографія/ М.І. Сєров, О.М. Омелян. – Полтава: ПолтНТУ, 2011. — 238 с.

[67] Сєров М.І. Симетрійні властивості рівнянь реакції–конвекції–дифузії: монографія/ М.І. Сєров, І.В. Рассоха. – Полтава: ПолтНТУ, 2013. — 168 с.

[68] Сєров М.І. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом / М.І. Сєров, Р.М. Черніга // УМЖ. — 1997. — Т. 49, № 9. — С. 1262–1270.

[69] Сєрова М.М. Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса. / М.М. Сєрова // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: збірник статей. Зб. праць Інституту математики НАН України. — Т.3, №2. — К. — 2006. —400 с.

[70] Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t{=}h(u)u_{xx}$ / В.А. Тычинин // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. — Киев. — 1988. — № 8. — С. 72–77.

[71] Фущич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / В. И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — К. : Ин-т математики, 1987. — С. 4–16.

[72] Фущич В. И. Симметрия в задачах математической физики / В. И. Фущич // Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. — К. : Ин–т математики, 1981. — С. 6–28.

[73] Фущич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В. И. Фущич // Укр. мат. журн. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470.

[74] Фущич В. И. Симметрия уравнений квантовой механики / Фущич В.И., Никитин А.Г. — М. : Наука, 1990. — 400 с.

[75] Фущич В. И. Симметрия уравнений Максвелла / Фущич В.И., Никитин А.Г. — К. : Наук. думка, — 1983. — 199 с.

[76] Фущич В. И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений / В.И. Фущич, М.И. Серов // Докл. АН СССР. — 1991. — № 9. — С. 45–49.

[77] Фущич В. І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь / В.І. Фущич, В.І. Чопик // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1433–1443.

[78] Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.

[79] Фущич В. И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности / Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.

[80] Фущич В. И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24—27.

[81] Фущич В.І. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень / В.І. Фущич, Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1993. — № 8. — С. 44–51.

[82] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. / В.И. Фущич // Сборник научных трудов "Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред" — Киев. Наукова думка. — 1986. — С. 146–160.

[83] Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза со ступенчастыми начальными данными / Е.Я. Хруслов // Мат. сборник. — 1976. — Т. 99. — С. 261–281.

[84] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Р.М. Черніга // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. — Киев. — 1988. — № 8. — С. 49–53.

[85] Черніга Р.М. Симетрія і точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу у термоядерній плазмі / Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1995. — № 4. — С. 17–21.

[86] Юрик І.І. Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії / І.І. Юрик, Т.А. Баранник// Збірник праць Інституту математики НАН України . — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 331–336.

[87] Adler J. Chemotaxis in bacteria / J. Adler // Sciense. — 1996. — V. 153, P. 708–716.

[88] Akhatov I.S. Nonlocal symmetries. Heuristic approach / I.S. Akhatov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov // J. Sov. Math. — 55 (1991). — P. 1401–1450.

[89] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in enginering / W.F. Ames // New York, Academic Press: 1965. —– 511 p.

[90] Baikov V.A. Lie symmetry classification analysis for nonlinear coupled diffusion. V.A. Baikov, A.V. Gladkov and R.J. Wiltshire // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — P. 7483–7499.

[91] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223–264.

[92] Basarab–Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. / P. Basarab–Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43–94.

[93] Bluman G. W. The general similarity solution of the heat equation / G. W. Bluman, J. D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[94] Bluman G. Symmetries and differential equations / Bluman G., Kumei S. — New York : Springer. — Verlag. — 1989. — 142 p.

[95] Clarkson P. New similarity solutions of the Boussinesq equation / P. Clarkson, M. D. Kruskal // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 10. — P. 2201–2213.

[96] Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II. / R. Cherniha, J.R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — A 36. — P. 405–425.

[97] Cherniha R. Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions. / R. Cherniha, J.R. King // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — 308. — P. 11–35.

[98] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2000. — A 33. — P. 7839–7841.

[99] Cherniha R.M. Galilean–invariant nonlinear PDEs and their exact solutions / R.M. Cherniha // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3. — P. 374–383.

[100] Cherniha R. Symmetries ans*ä*tze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms / R. Cherniha, M. Serov // Euro. J. of Appl. Math. — 1998. — Vol. 9. — P. 527–542.

[101] Cherniha R.M. Nonlinear Diffusion-Convection Systems: Lie and Q-conditional Symmetries. / R.M. Cherniha, M.I. Serov // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine: V43, 2002. — P.102-110

[102] R.M. Cherniha. Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions / R. Cherniha, M. Serov // J. Math. Anal. Appl. — 282. — 2003. — P. 305–328.

[103] Cherniha R. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V. 342. — P. 1363–1379.

[104] Dorodnitsyn V.A. On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source / V.A. Dorodnitsyn // USSR Comput. Math. and Math. Phys. — 1982. — 22. — P. 115–122.

[105] Ibragimov N.H. Lie–B$\ddot{a}$cklund and Noether symmetries with applications / N.H. Ibragimov, A. H. Kara, F.M. Mahomed // Nonlinear Dynamics. — 1998. — V. 15. — № 2. — P. 115–136.

[106] Fushchych W. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics / Fushchych W., Shtelen W. and Serov N. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[107] Fushchych W. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. Fushchych, I. Tsyfra // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. 45–47.

[108] Fushchich W. I. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov, L. A. Tulupova // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1993. — № 4. — P. 37–40.

[109] Fushchich W. I. The Continuous subgroups of the generalized Galilei group.I. / W. I. Fushchich, A.F. Barannyk, L.F. Barannyk // Institute of Mathematics Akademy of Scinces of Ukrainian SSR; 85.19. Preprint, 1985. — 46p.

[110] Barannyk L. On the Classification on Subalgebras of the Galilei Algebras. / L. Barannyk // Nonlinear Mathematical Physics. — 1995. — V. 2. — № 3–4. — P. 263–268.

[111] Gardner C. Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura// Phys. Rev. Lett. — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.

[112] Huai–Yu–Jian. The Global Attractor of a Dissipative Nonlinear Evolution System / Huai–Yu–Jian, Xiao–Ping Wang, Din–Yu Hsieh // Journal of Mathematical Analysys and Application. — 1999. — 238. — P. 124–142.

[113] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations / M.P. Edwards // Phys. Lett. A. — 1994. — Vol. 190. — P. 149–154.

[114] Kara A.H. A basis of conservation lavs for partial differential equations / A.H. Kara, F.M. Mahomed // J. Nonlinear. Math. Phys. — 2002. — V. 9. — P. 60–72.

[115] Keller E.F. Model for chemotaxis / E.F. Keller, L.A. Segel // J.Theor.Biol. — 1971. — V. 30. — P. 225–234.

[116] Knyazeva I.V. Group classification of diffusion equations / I.V. Knyazeva, M.D. Popov // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differenrial Equations (Ed. N. Ibragimov)., CRC Press. — 1994. — Vol1. — P. 171–176.

[117] Levi D. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // J. Phys. A : Math. Gen. — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.

[118] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // Arch. Math. — 1881. — Vol. 8, № 1. — P. 112–125.

[119] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung / S. Lie // Arch for Math. — 1881. — V6, № 3. — P. 328–368.

[120] Lie S. Uber Differentialinvarianten / S. Lie // Math. Ann. — 1884. — Vol. 24, № 1. — P. 52–89.

[121] Lie S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen / Lie S. — Leipzig: Teubnner — 1893. — 805 p.

[122] Lie S. Klassifikation und Integration von gewohnlichen Differential–gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // I, II, Math. Ann. — 1888. — Vol. 32. — P. 213–281.

[123] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / Lie S., Engel F. — Leipzig:Teubner. — Bd. 1–3. — 1888, 1890, 1893. — 623 s., 554 s., 830 s.

[124] Murray J.D. Mathematical biology. / J.D. Murray — Berlin: Springer, 1989. — 767 p.

[125] Nikitin A.G. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.

[126] Nikitin A.G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations / A.G. Nikitin // Ukrainian Marhematical Bulletin. — 2005. — Vol. 2, № 2, — P. 153–204.

[127] Nikitin A.G. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics / A.G. Nikitin, R. Wiltshire // Proc. of the Third Int. Conf. — Kiev, July 12-18. — 1999, Ed. A.M. Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine). — P. 47–59.

[128] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing

systems / A.G. Nikitin // J. Math. Analysis and Applications (JMAA). — 2007. — Vol. 332, № 1, — P. 666–690.

[129] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix / A.G. Nikitin // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 59, № 3, — P. 395–411.

[130] Noether E. Invariante Variationsprobleme / E. Noether // König. Gessel. Wissen. Göttingen, Math.–Phys. Kl. — 1918. — P. 235–257 (translated in Transport Theory and Stat. Phys. — 1971. — V.1. — P. 186–207).

[131] Olver P. Group-invariant solutions of differential equations / P. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.

[132] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — Berlin : Springer. — 1986. — 510 p.

[133] Olver P. Direct reduction and differential constraints / P. Olver // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444. — P. 509–523.

[134] Oron A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.

[135] Patera J. Subgroup of the Poincare group and their invariats / J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenaus // J. Mat. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–984.

[136] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1624.

[137] Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations/ Popovych R.O. // Збірник праць Інституту математики НАН України . — К., 2006. — Т. 3. — с. 239–254.

[138] Popovych R.O. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — V.37. — P. 7547–7565.

[139] Popovych R.O. Realizations of real low–dimensional Lie algebras / Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. // J. Phys. A 36 (2003). — no. 26. — 7337–7360 (see arXiv:math-ph/0301029v7).

[140] Rideau G. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and confornal groups in two–dimensional spase–time / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1095–1105.

[141] Serov M.I. Systems of reaction–convection–diffusion equations invariant under Galilean algebras. / M.I. Serov, T.O. Karpaliuk, O.G. Pliukhin, I.V. Rassokha. // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V.422. — P. 185–211

[142] Samoilenko A. Multifrequency. Oscillations of Nonlinear Systems / Samoilenko A., Petryshyn R. — DODRECH BOSTON/LONDON: Kluwer Academic Publishers. — 2004. — 317 p.

[143] Spichak S.V. Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion / S.V. Spichak, V.I. Stognii // J. Phys. A. — 1999. — V. 32, № 47. — P. 8341–8353.

[144] Spichak S.V. Symmetric classification of the one-dimensional Fokker-Planck-Kolmogorov equation with arbitrary drift and diffusion coefficients / S.V. Spichak, V.I. Stognii // Nonlinear oscillations. — 1999. — V. 2, № 3. — P. 401–413. (in Russian).

[145] Steinberg S., Symmetry, conserved quantities and moments in diffusive equations / S. Steinberg, K.B. Wolf // J. Math. Anal. Appl. — 1981. — V. 80, № 1. — P. 36–45.

[146] Strampp W. Bӑcklund transformations for diffusion equations / W. Strampp, K.B. Wolf // Phisica D. — 1982. — V. 6. — P. 113–118.

[147] Zhdanov R.Z. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J.Phys.A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32. — P. 7405–7418.

[148] Yung C.M. Group classification and symmetry reductions of the non–linear diffusion–convection equation $u_t{=}(D(u)u_x)_x{-}K'(u)u_x$ / C.M. Yung, K. Verburg, P. Baveye // Int. J. Non-Lin. Mech. — 1994. — V. 29, № 3. — P. 273–278.

Додаток А

Доведення теореми 3.7

Доведення. Використаємо вже виконану нами класифікацію алгебри Галілея (2.25) для $U \in \mathbb{R}^3$, яка визначається зображеннями (3.53)–(3.62). Щоб отримати узагальнену алгебру Галілея (2.121) (для $U \in \mathbb{R}^3$), кожне із цих зображень доповнимо операторами масштабних і проективних перетворень, вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (2.64), (2.119), (2.120).

Розглянемо зображення (3.54) оператора Q_1. Комутаційні співвідношення (2.64), (2.119), задовольняють оператори

$$\begin{aligned} &Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\ Q_2{=}\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}{+}[\alpha_{221}u^1{+}(\alpha_{211}-1)u^2{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22}]\partial_{u^2}{+}\\ &{+}[\alpha_{231}u^1{+}\alpha_{233}u^3{+}\beta_{23}]\partial_{u^3},\ Q_3{=}\alpha_{311}u^1\partial_{u^1}{+}\\ &{+}\left[\alpha_{321}u^1{+}\alpha_{311}u^2{+}\alpha_{323}u^3{+}\beta_{32}\right]\partial_{u^2}{+}[\alpha_{331}u^1{+}\alpha_{333}u^3{+}\beta_{33}]\partial_{u^3}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Виконуючи комутаційні співвідношення (2.120), приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\alpha_{311}=\alpha_{333}=0, \quad \alpha_{231}\alpha_{323}{-}\alpha_{331}\alpha_{223}=\alpha_{321},\\ &\alpha_{323}(\alpha_{233}{-}\alpha_{211}{-}1)=0, \quad \alpha_{323}\beta_{23}-(\alpha_{211}+1)\beta_{32}-\alpha_{223}\beta_{33}=0,\\ &\alpha_{331}(\alpha_{211}-\alpha_{233}-2)=0, \quad (\alpha_{233}+2)\beta_{33}=0. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Розв'язком системи (А.2) є коефіцієнти одного з наступних наборів операторів:

$$\begin{aligned} &Q_2{=}-3u^1\partial_{u^1}{+}(\alpha_{221}u^1{-}4u^2{+}\alpha_{223}u^3{+}\beta_{22})\partial_{u^2}{+}(\alpha_{231}u^1{-}2u^3{+}\beta_{23})\partial_{u^3},\\ &Q_3{=}(\alpha_{231}\alpha_{323}u^1{+}\alpha_{323}u^3{+}\tfrac{\alpha_{223}\beta_{33}-\alpha_{323}\beta_{23}}{2})\partial_{u^2}{+}\beta_{33}\partial_{u^3},\ \alpha_{323}{\neq}0,\ \beta_{33}{\neq}0, \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$Q_2=\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1+(\alpha_{211}-1)u^2-(\alpha_{211}+1)\tfrac{\beta_{32}}{\beta_{33}}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+$$
$$+(\alpha_{231}u^1-2u^3+\beta_{23})\partial_{u^3},\ Q_3=\beta_{32}\partial_{u^2}+\beta_{33}\partial_{u^3},\ \alpha_{211}\neq 0,\ \beta_{33}\neq 0, \quad (A.4)$$

$$Q_2=(\alpha_{221}u^1-u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22})\partial_{u^2}+(\alpha_{231}u^1-2u^3+\beta_{23})\partial_{u^3},$$
$$Q_3=-\alpha_{223}(\alpha_{331}u^1+\beta_{33})\partial_{u^2}+(\alpha_{331}u^1+\beta_{33})\partial_{u^3},\ \beta_{33}\neq 0, \quad (A.5)$$

$$Q_2=\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1+(\alpha_{211}-1)u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+\left[\alpha_{231}u^1+\right.$$
$$\left.+(\alpha_{211}+1)u^3+\tfrac{\alpha_{211}+1}{\alpha_{323}}\beta_{32}\right]\partial_{u^3}, Q_3=(\alpha_{323}(\alpha_{231}u^1+u^3)+\beta_{32})\partial_{u^2}, \alpha_{323}\neq 0, \quad (A.6)$$

$$Q_2=-u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1-2u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+\left[\alpha_{231}u^1-3u^3+\beta_{23}\right]\partial_{u^3},$$
$$Q_3=(-\alpha_{331}\alpha_{223}u^1+\beta_{32})\partial_{u^2}+\alpha_{331}u^1\partial_{u^3},\ \alpha_{331}\neq 0,\ \beta_{32}\neq 0, \quad (A.7)$$

$$Q_2=\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1+(\alpha_{211}-1)u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+\left[\alpha_{231}u^1+\right.$$
$$\left.+(\alpha_{211}-2)u^3+\beta_{23}\right]\partial_{u^3},\ Q_3=-\alpha_{331}(\alpha_{223}u^1\partial_{u^2}-u^1\partial_{u^3}),\ \alpha_{331}\neq 0, \quad (A.8)$$

$$Q_2=-u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1-2u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+$$
$$+\left[\alpha_{231}u^1+\alpha_{233}u^3+\beta_{23}\right]\partial_{u^3},\ Q_3=\beta_{32}\partial_{u^2},\ \beta_{32}\neq 0, \quad (A.9)$$

$$Q_2=\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}+\left[\alpha_{221}u^1+(\alpha_{211}-1)u^2+\alpha_{223}u^3+\beta_{22}\right]\partial_{u^2}+\left[\alpha_{231}u^1+\right.$$
$$\left.+\alpha_{233}u^3+\beta_{23}\right]\partial_{u^3},\ Q_3=0. \quad (A.10)$$

Отже, розглядаючи зображення (3.54) оператора Q_1, ми отримали 8 наборів операторів, які разом з оператором Q_1 задовольняють комутаційні співвідношення узагальненої алгебри Галілея (2.121). Набори операторів (A.3)–(A.10) містять ще багато сталих. Спробуємо спростити їх вигляди за допомогою таких перетворень еквівалентності (3.71), відносно яких інваріантний оператор $Q_1=u^1\partial_{u^2}$. Як показано в теоремі 3.5, такі перетворення мають вигляд (3.72). Під дією перетворень (3.72) зі сталими

$$k_{11}=\tfrac{1}{\beta_{33}\alpha_{323}},\quad k_{21}=-k_{11}\alpha_{221}-k_{23}\alpha_{231},\quad k_{23}=-\tfrac{k_{11}\alpha_{223}}{2},\quad k_{33}=\tfrac{1}{\beta_{33}},$$
$$l_2=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{k_{11}}{k_{33}}\alpha_{223}l_3-k_{11}\beta_{22}-2k_{23}\beta_{23}\right),\quad l_3=-\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{2}$$

оператори (A.3) разом з Q_1 набувають наступного вигляду:

$$Q_1=w^1\partial_{w^2},\quad Q_2=-3w^1\partial_{w^1}-4w^2\partial_{w^2}-2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3=w^3\partial_{w^2}+\partial_{w^3}$$

та співпадають з операторами першого рядка таблиці 3.2 після перепозначення $w^a{=}u^a$.

Перетворення (3.72) зі сталими

$$k_{21}{=}k_{11}\left(\tfrac{\alpha_{231}\beta_{32}}{\beta_{33}}{-}\alpha_{221}\right),\quad k_{23}{=}{-}\tfrac{k_{11}\beta_{32}}{\beta_{33}},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{33}},\quad l_3{=}{-}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{2} \tag{A.11}$$

та

$$k_{31}{=}{-}\tfrac{\alpha_{231}}{\beta_{33}(\alpha_{211}+2)},\quad l_2{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{211}-1}\left(\beta_{22}{-}\tfrac{\beta_{23}\beta_{32}}{\beta_{33}}\right)$$

у разі $\alpha_{211} \neq 1, -2$ переводять оператори (A.4) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}w^1\partial_{w^1}{+}(\alpha_{211}{-}1)w^2\partial_{w^2}{-}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^3}. \tag{A.12}$$

Якщо $\alpha_{211} = 1$, ці ж перетворення зі сталими (A.11) та

$$k_{11}{=}\tfrac{\beta_{33}}{\beta_{22}\beta_{33}-\beta_{23}\beta_{32}},\quad k_{31}{=}{-}\tfrac{\alpha_{231}}{3\beta_{33}}$$

переводять оператори (A.4) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2}{-}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^3},\quad æ \in \{0, 1\}. \tag{A.13}$$

Під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.11) та

$$k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{231}}{\beta_{33}},\quad l_2{=}{-}\tfrac{k_{11}}{3}\left(\beta_{22}{-}\tfrac{\beta_{23}\beta_{32}}{\beta_{33}}\right)$$

у разі $\alpha_{211}{=}{-}2$ оператори (A.4) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}2w^1\partial_{w^1}{-}3w^2\partial_{w^2}{+}(æw^1{-}2w^3)\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^3}. \tag{A.14}$$

Очевидно, оператори (A.12), об'єднані з операторами (A.13), (A.14) у разі $æ = 0$, після перепозначення $w^a{=}u^a$, $\alpha_{211}{=}s{\neq}0$ співпадають з операторами другого рядка таблиці 3.2. Набори операторів (A.13), (A.14) у разі $æ{=}1$ співпадають, відповідно, з операторами третього та четвертого рядків після перепозначення $w^a{=}u^a$.

Під дією перетворень (3.72) зі сталими

$$k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{331}}{\beta_{33}},\quad k_{21}{=}{-}k_{11}(\alpha_{221}{+}\alpha_{223}\alpha_{231}),\quad k_{23}{=}k_{11}\alpha_{223},\quad k_{31}{=}{-}\tfrac{k_{33}\alpha_{231}}{2},$$

$$k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{33}},\quad l_2{=}{-}k_{11}(\beta_{22}{+}\alpha_{223}\beta_{23}),\quad l_3{=}{-}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{2}$$

оператори (A.5) разом з Q_1 набувають вигляду

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^2\partial_{w^2}{-}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}(æw^1{+}1)\partial_{w^3},\quad æ\in\{0,1\}.$$

Ці оператори після перепозначення $w^a{=}u^a$ співпадають з операторами 18–го рядка таблиці 3.2 за умов $æ{=}0$, $\theta\in\{0,1\}$.

Перетворення (3.72) зі сталими

$$\begin{aligned}&k_{21}{=}k_{11}\left(\tfrac{\alpha_{223}\alpha_{231}}{2}{-}\alpha_{221}\right),\quad k_{23}{=}{-}\tfrac{k_{11}\alpha_{223}}{2},\\&k_{31}{=}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{33}{=}k_{11}\alpha_{323},\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{32}}{\alpha_{323}}\end{aligned}\tag{A.15}$$

та $l_2{=}\frac{k_{11}}{\alpha_{211}-1}\Big(\beta_{22}{-}\frac{\alpha_{223}\beta_{32}}{2\alpha_{323}}(\alpha_{211}{+}1)\Big)$ за умови $\alpha_{211}{\neq}1$ переводять оператори (A.6) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{-}w^2\partial_{w^2}{+}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}w^3\partial_{w^2}.\tag{A.16}$$

Якщо $\alpha_{211}=1$, під дією цих же перетворень зі сталими (A.15) та

$$k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{323}}{\beta_{22}\alpha_{323}-\beta_{32}\alpha_{223}}$$

оператори (A.6) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2}{+}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}w^3\partial_{w^2},\quad æ\in\{0,1\}.\tag{A.17}$$

Таким чином, позначивши $w^a{=}u^a$, $\alpha_{211}{=}s$, оператори (A.16), об'єднані разом із (A.17) у разі $æ{=}0$, співпадають з операторами п'ятого рядка таблиці 3.2 за умови $s{\neq}{-}1$, та є частинним випадком операторів 21–го рядка з набором $(æ_1,æ_2){=}(0,1)$. Набір операторів (A.17) у разі $æ{=}1$ співпадає з операторми шостого рядка цієї ж таблиці.

Під дією перетворень (3.72) зі сталими

$$\begin{aligned}&k_{11}{=}\tfrac{1}{\beta_{32}},\quad k_{21}{=}{-}k_{11}(\alpha_{221}{+}\alpha_{223}\alpha_{231}),\quad k_{23}{=}k_{11}\alpha_{223},\quad k_{31}{=}{-}\tfrac{k_{33}\alpha_{231}}{2},\\&k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{32}\alpha_{331}},\quad l_2{=}{-}\tfrac{k_{11}}{2}(\beta_{22}{+}\alpha_{223}\beta_{23}),\quad l_3{=}{-}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{3}\end{aligned}$$

оператори (А.7) разом з Q_1 набувають вигляду

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}-w^1\partial_{w^1}{-}2w^2\partial_{w^2}{-}3w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^2}{+}w^1\partial_{w^3},$$

що співпадає у разі $w^a{=}u^a$ з операторами сьомого рядка таблиці 3.2.

Перетворення (3.72) зі сталими

$$k_{21}{=}-k_{11}\left(\alpha_{221}{+}\alpha_{223}\alpha_{231}\right),\quad k_{23}{=}k_{11}\alpha_{223},\quad k_{31}{=}-\tfrac{k_{33}\alpha_{231}}{2},\quad k_{33}{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{331}}\quad (\text{A.18})$$

та

$$l_2{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{211}-1}\left(\beta_{22}{+}\alpha_{223}\beta_{23}\right),\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{\alpha_{211}-2}$$

за умови $\alpha_{211} \neq 1, 2$ переводять оператори (А.8) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{-}w^2\partial_{w^2}{-}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}w^1\partial_{w^3}. \quad (\text{A.19})$$

Якщо $\alpha_{211} = 1$, ці ж перетворення зі сталими (А.18) та

$$l_3{=}-k_{33}\beta_{23},\quad k_{11}{=}\tfrac{1}{\beta_{22}+\alpha_{223}\beta_{23}}$$

переводять оператори (А.8) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2}{-}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}w^1\partial_{w^3},\quad æ \in \{0, 1\}. \quad (\text{A.20})$$

За умови $\alpha_{211}{=}2$ під дією перетворень (3.72) зі сталими (А.18) та

$$l_2{=}k_{11}(\beta_{22}{+}\alpha_{223}\beta_{23}),\quad k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{331}}{\beta_{23}}$$

оператори (А.8) разом з Q_1 набувають наступного вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}2w^1\partial_{w^1}{+}w^2\partial_{w^2}{+}æ\partial_{w^3},\quad Q_3{=}w^1\partial_{w^3}. \quad (\text{A.21})$$

Об’єднавши оператори (А.19) з (А.20), (А.21) у разі $æ = 0$ та перепозначивши $w^a{=}u^a$, $\alpha_{211}{=}s$, отримуємо оператори 19–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ, \theta){=}(0, 1)$. Набір операторів (А.20) у разі $æ{=}1$ співпадає з операторами восьмого рядка цієї ж таблиці після перепозначення $w^a{=}u^a$. Оператори (А.21) у разі $æ{=}1$ є частинним випадком операторів 20–го рядка за умови $(æ, \theta){=}(0, 1)$.

Розглянемо оператори (A.9). Перетворення (3.72) зі сталими

$$k_{11}{=}\tfrac{1}{\beta_{32}},\quad k_{21}{=}k_{11}\left(\tfrac{k_{23}k_{31}}{k_{11}k_{33}}(\alpha_{233}{+}2){+}\tfrac{k_{31}\alpha_{223}}{k_{33}}{-}\alpha_{221}{-}\tfrac{k_{23}\alpha_{231}}{k_{11}}\right),$$
$$l_2{=}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k_{23}l_3}{k_{33}}(\alpha_{233}{+}2){+}\tfrac{k_{11}\alpha_{223}l_3}{k_{33}}{-}k_{11}\beta_{22}{-}k_{23}\beta_{23}\right) \tag{A.22}$$

та

$$k_{23}{=}{-}\tfrac{\alpha_{223}}{\beta_{32}(\alpha_{233}+2)},\quad k_{31}{=}\tfrac{k_{33}\alpha_{233}}{\alpha_{233}+1},\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{\alpha_{233}}$$

у разі $\alpha_{233}\neq-2,-1,0$ переводять оператори (A.9) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}2w^2\partial_{w^2}{+}\alpha_{233}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^2}. \tag{A.23}$$

Якщо $\alpha_{233}=-2$, під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.22) та

$$k_{31}{=}{-}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{33}{=}\tfrac{\alpha_{223}}{\beta_{32}},\quad l_3{=}{-}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{2}$$

оператори (A.9) разом з Q_1 переходять у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^1\partial_{w^1}{+}({-}2w^2{+}æw^3)\partial_{w^2}{-}2w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^2}. \tag{A.24}$$

Якщо $\alpha_{233}{=}{-}1$, то під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.22) та

$$k_{23}{=}{-}\tfrac{\alpha_{223}}{\beta_{32}},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\alpha_{231}\beta_{32}},\quad l_3{=}{-}k_{33}\beta_{23}$$

оператори (A.9) разом з Q_1 набувають наступного вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}2w^2\partial_{w^2}{+}(æw^1{-}w^3)\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^2}. \tag{A.25}$$

Під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.22) та

$$k_{23}{=}{-}\tfrac{\alpha_{223}}{2\beta_{32}},\quad k_{31}{=}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{23}}$$

за умови $\alpha_{233}{=}0$, оператори (A.9) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^1\partial_{w^1}{-}2w^2\partial_{w^2}{+}æ\partial_{w^3},\quad Q_3{=}\partial_{w^2}. \tag{A.26}$$

Об'єднавши оператори (A.23), з операторами (A.24), (A.25), (A.26) у разі $æ=0$ та позначивши $w^a{=}u^a$, $\alpha_{233}{+}2{=}s$, маємо оператори 22–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ_1, æ_2){=}(0,1)$, $\theta{=}1$. Набори операторів (A.24), (A.26) у разі $æ{=}1$ співпадають, відповідно, з операторами 23–го та 24–го рядків цієї ж таблиці за умов $(æ_1, æ_2){=}(0,1)$, $\theta{=}1$. Оператори (A.25) у разі $æ{=}1$ співпадають з операторами 9–го рядка.

Розглянемо оператори (A.10). Перетворення (3.72) зі сталою

$$k_{21}{=}{-}k_{11}\left(\tfrac{k_{23}k_{31}}{k_{11}k_{33}}(\alpha_{211}{-}\alpha_{233}{-}1){-}\tfrac{k_{31}\alpha_{223}}{k_{33}}{+}\alpha_{221}{+}\tfrac{k_{23}\alpha_{231}}{k_{11}}\right) \tag{A.27}$$

та

$$k_{23}{=}{-}\tfrac{k_{11}\alpha_{223}}{\alpha_{233}{-}\alpha_{211}{+}1},\quad k_{31}{=}{-}\tfrac{k_{33}\alpha_{231}}{\alpha_{211}{-}\alpha_{233}},\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{\alpha_{233}}, \tag{A.28}$$

$$l_2{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{211}{-}1}\left(\beta_{22}{-}\tfrac{\alpha_{223}\beta_{23}}{\alpha_{233}{-}\alpha_{211}{+}1}\right) \tag{A.29}$$

у разі $\alpha_{233}\neq\alpha_{211},\alpha_{211}{-}1,0$; $\alpha_{211}{\neq}1$ переводять оператори (A.10) разом з Q_1 у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}w^1\partial_{w^1}{+}(\alpha_{211}{-}1)w^2\partial_{w^2}{+}\alpha_{233}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.30}$$

Якщо $\alpha_{211}{=}1$, $\alpha_{233}{\neq}0,1$, то під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.27), (A.28) та

$$k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{233}}{\alpha_{233}\beta_{22}{-}\alpha_{223}\beta_{23}}$$

оператори (A.10) разом з Q_1 переходять у наступні:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2}{+}\alpha_{233}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.31}$$

Якщо $\alpha_{233}{=}\alpha_{211}{\neq}0,1$, то під дією перетворень (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{23}{=}{-}k_{11}\alpha_{223},\quad k_{33}{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{231}},\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{\alpha_{211}}, \tag{A.32}$$

$$l_2{=}\tfrac{k_{11}}{\alpha_{211}{-}1}\left(\beta_{22}{-}\alpha_{223}\beta_{23}\right) \tag{A.33}$$

оператори (A.10) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{-}w^2\partial_{w^2}{+}æw^1\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.34}$$

Якщо $\alpha_{233}{=}\alpha_{211}{=}1$, то під дією перетворень (3.72) зі сталими (A.27), (A.32) та

$$k_{11}{=}\tfrac{1}{\beta_{22}+\alpha_{223}\beta_{23}}$$

оператори (A.10) разом з Q_1 набувають наступного вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ_1\partial_{w^2}{+}(æ_2w^1{+}w^3)\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.35}$$

За умови $\alpha_{233}{=}\alpha_{211}{=}0$ під дією перетворень (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{11}{=}\tfrac{\alpha_{231}}{\beta_{23}},\quad k_{23}{=}{-}k_{11}\alpha_{223},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{23}},\quad l_2{=}{-}k_{11}\beta_{22}{-}k_{23}\beta_{23}$$

оператори (A.10) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}{-}w^2\partial_{w^2}{+}(æ_1w^1{+}æ_2)\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0,\ æ_1,æ_2\in\{0,1\}. \tag{A.36}$$

Якщо $\alpha_{233}{=}\alpha_{211}{-}1{\neq}0$ (тобто $\alpha_{211}{\neq}1$), то під дією перетворень (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{31}{=}{-}k_{33}\alpha_{231},\quad l_2{=}\tfrac{1}{\alpha_{211}-1}\left(k_{11}\beta_{22}{+}k_{23}\beta_{23}{-}\tfrac{k_{11}}{k_{33}}\alpha_{223}l_3\right),\quad l_3{=}\tfrac{k_{33}\beta_{23}}{\alpha_{211}-1}$$

оператори (A.10) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{+}(æw^3{-}w^2)\partial_{w^2}{-}w^3\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.37}$$

У випадку, коли $\alpha_{233}{=}\alpha_{211}{-}1{=}0$, під дією перетворень (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{11}{=}\tfrac{k_{33}}{\alpha_{223}},\quad k_{31}{=}{-}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{23}},\quad l_3{=}k_{11}\beta_{22}{+}k_{23}\beta_{23},\ \alpha_{223}{\neq}0$$

оператори (A.10) разом з Q_1 набувають вигляду:

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}w^3\partial_{w^2}{+}æ\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.38}$$

Якщо $\alpha_{233}{=}\alpha_{223}{=}0$, $\alpha_{211}{=}1$, ці ж перетворення з константами (A.27) і

$$k_{31}{=}{-}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{23}{=}{-}\tfrac{k_{11}\beta_{22}}{\beta_{23}},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{23}}$$

приводять до набору операторів

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.39}$$

якщо $\beta_{23}{\neq}0$, і перетворення (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{31}{=}{-}k_{33}\alpha_{231},\quad k_{11}{=}\tfrac{1}{\beta_{22}}$$

до набору

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}w^1\partial_{w^1}{+}æ\partial_{w^2},\quad Q_3{=}0, \tag{A.40}$$

якщо $\beta_{23}{=}0$.

Врешті решт у випадку $\alpha_{233}{=}0$, $\alpha_{211}{\neq}0,1$ перетворення (3.72) зі сталою (A.27) та

$$k_{23}{=}\tfrac{k_{11}\alpha_{223}}{\alpha_{211}-1},\quad k_{31}{=}{-}\tfrac{k_{33}\alpha_{231}}{\alpha_{211}},\quad k_{33}{=}\tfrac{1}{\beta_{23}},\quad l_2{=}\tfrac{1}{\alpha_{211}-1}(k_{11}\beta_{22}{+}k_{23}\beta_{23})$$

переводять оператори (A.10) разом з Q_1 у наступні

$$Q_1{=}w^1\partial_{w^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I_{12}{-}w^2\partial_{w^2}{+}æ\partial_{w^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.41}$$

Очевидно, у наборах операторів (A.30), (A.31), (A.34)–(A.41) можна відкинути всі обмеження на константи α_{211}, α_{233}, об'єднавши ці набори з відповідними наборами за умови $æ = 0$. Таким чином, нескладно переконатись, що отримані оператори (A.30), (A.31), (A.34)–(A.41) після перепозначення $w^a = u^a$ співпадають з наступними:

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}{+}(\alpha_{211}{-}1)u^2\partial_{u^2}{+}\alpha_{233}u^3\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.42}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}u^1\partial_{u^1}{+}\partial_{u^2}{+}\alpha_{233}u^3\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.43}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{-}u^2\partial_{u^2}{+}u^1\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.44}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}u^1\partial_{u^1}{+}\partial_{u^2}{+}(u^1{+}u^3)\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.45}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}{-}u^2\partial_{u^2}{+}(u^1{+}1)\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.46}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}I{+}(u^3{-}u^2)\partial_{u^2}{-}u^3\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.47}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}u^1\partial_{u^1}{+}u^3\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0, \tag{A.48}$$

$$Q_1{=}u^1\partial_{u^2},\quad Q_2{=}\alpha_{211}u^1\partial_{u^1}{+}(\alpha_{211}{-}1)u^2\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},\quad Q_3{=}0. \tag{A.49}$$

Отже, позначивши в операторах (A.42) $\alpha_{211}{=}s_1$, $\alpha_{233}{+}1{=}s_2$, бачимо, що вони співпадають з операторами 10–го рядка таблиці 3.2 за умови $s_r{\neq}{-}1$. Випадок $s_1{=}{-}1$ міститься в 22–му рядку цієї ж таблиці за умов $(æ_1, æ_2){=}(0,1)$, $\theta{=}0$, випадок $s_2{=}{-}1$, відповідно, — у 19–му рядку у разі $(æ, \theta){=}(0,0)$. Набори операторів (A.43)–(A.46) співпадають, відповідно, з операторами 11–14 рядків таблиці 3.2 після позначення в операторах (A.43) $\alpha_{233}{=}s$, а в операторах (A.44) $\alpha_{211}{=}s$. Оператори (A.47) після позначення $\alpha_{211}{=}s$ співпадають з операторами 15–го рядка таблиці 3.2, якщо $k{\neq}{-}1$, та є частинним випадком операторів 23–го рядка за умов $(æ_1, æ_2){=}(0,1)$, $\theta{=}0$ (випадок $s{=}{-}1$). Очевидно, оператори (A.48) співпадають з операторами 16–го рядка таблиці 3.2. Позначивши $\alpha_{211}{=}s$ в операторах (A.49), отримуємо оператори 17–го рядка таблиці 3.2 за умов $s{\neq}{-}1, 2$. Випадок $s{=}{-}1$ міститься в операторах 24–го рядка цієї ж таблиці за умов $(æ_1, æ_2){=}(0,1)$, $\theta{=}0$, а $s{=}2$ — у операторах 20–го рядка за умов $(æ, \theta){=}(0,0)$.

Таким чином, нами прокласифіковано нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ для $U \in \mathbb{R}^3$ під час доповнення операторами масштабних і проективних перетворень алгебри Галілея, визначеної зображенням (3.54) оператора Q_1.

Аналогічним чином, доповнюючи алгебру Галілея, визначену іншими зображеннями класифікації (3.53)–(3.62), приходимо до висновку, що комутаційні співвідношення (2.64), (2.119), (2.120) виконуються тільки для зображень (3.55) у разі $æ{=}0$, (3.57), (3.59) у разі $æ{=}0$ та (3.60). У кожному з цих випадків, застосувавши до отриманих операторів перетворення еквівалентності, відносно яких інваріантний оператор Q_1, отримуємо нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея.

Таким чином, під час доповнення алгебри Галілея, визначеної зображенням (3.55), одержуємо оператори 18–20 пунктів таблиці 3.2. Нееквівалентні зображення узагальненої алгебри Галілея, отриманої доповненням алгебри (3.57), містяться у 22–25 та 31–49 рядках цієї ж таблиці. Доповнюючи алгебру (3.59), отримуємо набори операторів 21–25 пунктів таблиці. А зображення алгебри Галілея (3.60), доповнене операторами масштабних і проективних перетворень, описується в 26–30 пунктах таблиці 3.2.

Для решти зображень класифікації (3.53)–(3.62) комутаційні співвідношення (2.64), (2.119), (2.120) не виконуються.

Теорему доведено.

Додаток В

Доведення теореми 3.8

Доведення. Функції F^{ab}, за яких система рівнянь (3.173) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, знайдемо з системи визначальних рівнянь (3.18)–(3.21). Перші два рівняння цієї системи вже розв'язано у теоремі 3.2, тому залишається розв'язати решту рівнянь визначальної системи. Використаємо таблицю 3.2 класифікації нееквівалентних зображень алгебри (2.121) у випадку тривимірного векторного поля.

Розглянемо оператори 19–го пункту таблиці 3.2 за умов $(æ,\theta)=(1,k)$, $k\in\mathbb{R}$. Оператори узагальненої алгебри Галілея, описані в цьому пункті, мають вигляд

$$\begin{gathered}\partial_0,\ \partial_1,\ G_1{=}x_0\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}{+}u^2\partial_{u^3},\ D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{+}sI{-}I_{23}{-}u^3\partial_{u^3},\\ \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(u^1\partial_{u^2}{+}u^2\partial_{u^3}){+}x_0(sI{-}I_{23}{-}u^3\partial_{u^3}){+}ku^1\partial_{u^3}.\end{gathered}\tag{B.1}$$

Тоді координати оператора X наступні:

$$\xi^0=\varsigma x_0^2+2cx_0+q_0,\quad \xi^1=\varsigma x_0x_1+cx_1+rx_0+q_1,\tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}&\eta^a{=}(\varsigma x_0{+}c)su^a{+}\delta_{a2}\left[(\varsigma x_1{+}r)u^1{-}(\varsigma x_0{+}c)u^2\right]+\\ &\quad+\delta_{a3}\left[(\varsigma x_1{+}r)u^2{+}\varsigma ku^1{-}2(\varsigma x_0{+}c)u^3\right],\end{aligned}\tag{B.3}$$

де ς, c, r, q_0, q_1 — довільні сталі.

Підставивши (B.2), (B.3) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_1, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$u^1F^{ab}_{u^2}{+}u^2F^{ab}_{u^3}{-}\delta_{a2}F^{1b}{-}\delta_{a3}F^{2b}{+}\delta_{b1}F^{a2}{+}\delta_{b2}F^{a3}{+}\delta_{ab}{=}0,\tag{B.4}$$

$$k(u^1F^{ab}_{u^3}-\delta_{a3}F^{1b}+\delta_{b1}F^{a3})+2(\delta_{a2}\delta_{b1}+\delta_{a3}\delta_{b2})=0, \qquad (B.5)$$

$$su^a-\delta_{a2}u^2-2\delta_{a3}u^3-u^1F^{a2}-u^2F^{a3}=0, \qquad (B.6)$$

$$\begin{aligned}&su^1F^{ab}_{u^1}+(s-1)u^2F^{ab}_{u^2}+(s-2)u^3F^{ab}_{u^3}-\delta_{a1}sF^{1b}-\delta_{a2}(s-1)F^{2b}-\\&-\delta_{a3}(s-2)F^{3b}+\delta_{b1}sF^{a1}+\delta_{b2}(s-1)F^{a2}+\delta_{b3}(s-2)F^{a3}+F^{ab}=0.\end{aligned} \qquad (B.7)$$

Проінтегрувавши систему (B.4), отримуємо вигляд нелінійностей:

$$\begin{aligned}&F^{11}=\varphi^{11}-(\varphi^{12}+1)\tfrac{u^2}{u^1}+\tfrac{\varphi^{13}}{2}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2,\ F^{12}=\varphi^{12}-\varphi^{13}\tfrac{u^2}{u^1},\ F^{13}=\varphi^{13},\\&F^{21}=\varphi^{21}+(\varphi^{11}-\varphi^{22})\tfrac{u^2}{u^1}+\left(\tfrac{\varphi^{23}}{2}-\varphi^{12}\right)\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2+\tfrac{\varphi^{13}}{2}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^3,\\&F^{22}=\varphi^{22}+(\varphi^{12}-\varphi^{23}-1)\tfrac{u^2}{u^1}-\varphi^{13}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2,\ F^{23}=\varphi^{23}+\varphi^{13}\tfrac{u^2}{u^1},\\&F^{31}=\varphi^{31}+(\varphi^{21}-\varphi^{32})\tfrac{u^2}{u^1}+\left(\tfrac{\varphi^{11}+\varphi^{33}}{2}-\varphi^{22}\right)\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2+\tfrac{\varphi^{23}-\varphi^{12}}{2}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^3+\tfrac{\varphi^{13}}{4}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^4,\\&F^{32}=\varphi^{32}+(\varphi^{22}-\varphi^{33})\tfrac{u^2}{u^1}+\left(\tfrac{\varphi^{12}}{2}-\varphi^{23}\right)\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2-\tfrac{\varphi^{13}}{2}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^3,\\&F^{33}=\varphi^{33}+(\varphi^{23}-1)\tfrac{u^2}{u^1}+\tfrac{\varphi^{13}}{2}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2,\end{aligned} \qquad (B.8)$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega^1,\omega^2)$ — довільні гладкі функції, $\omega^1=u^1$, $\omega^2=2u^3-\frac{(u^2)^2}{u^1}$. Очевидно, система (B.5) має розв'язок у разі $k\neq 0$. Підставивши функції (B.8) у систему (B.5) та проінтегрувавши її, уточнюємо функції φ^{ab}:

$$\begin{aligned}&\varphi^{11}=\psi^{11}-\tfrac{\psi^{13}}{2}\tfrac{\omega^2}{\omega^1},\quad \varphi^{12}=\psi^{12},\quad \varphi^{13}=\psi^{13},\quad \varphi^{21}=\psi^{21}-(\tfrac{\psi^{23}}{2}+\tfrac{1}{k})\tfrac{\omega^2}{\omega^1},\\&\varphi^{22}=\psi^{22},\quad \varphi^{23}=\psi^{23},\quad \varphi^{31}=\psi^{31}+\tfrac{\psi^{11}-\psi^{33}}{2}\tfrac{\omega^2}{\omega^1}-\tfrac{\psi^{13}}{4}\left(\tfrac{\omega^2}{\omega^1}\right)^2,\\&\varphi^{32}=\psi^{32}+(\tfrac{\psi^{12}}{2}-\tfrac{1}{k})\tfrac{\omega^2}{\omega^1},\quad \varphi^{33}=\psi^{33}+\tfrac{\psi^{13}}{2}\tfrac{\omega^2}{\omega^1},\end{aligned} \qquad (B.9)$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(u^1)$ — довільні гладкі функції.

Крім того, розв'язуючи систему (B.6), отримуємо:

$$\psi^{12}=s,\quad \psi^{22}=\psi^{32}=0,\quad k=1. \qquad (B.10)$$

Інтегрування системи (B.7) залежить від значень сталої s. Так, розв'язуючи систему (B.7) для $s\neq 0$, ми отримуємо наступний набір функцій:

$$\begin{aligned}&\psi^{11}=\lambda_{11}(u^1)^{-\frac{1}{s}},\quad \psi^{13}=\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}},\quad \psi^{21}=\lambda_{21}(u^1)^{-\frac{2}{s}},\\&\psi^{23}=\lambda_{23},\quad \psi^{31}=\lambda_{31}(u^1)^{-\frac{3}{s}},\quad \psi^{33}=\lambda_{33}(u^1)^{-\frac{1}{s}},\end{aligned} \qquad (B.11)$$

де λ_{ab} — довільні сталі, а для $s{=}0$:

$$\psi^{11}{=}\psi^{13}{=}\psi^{21}{=}\psi^{31}{=}\psi^{33}{=}0, \quad \psi^{23}{=}\psi^{23}(u^1). \tag{B.12}$$

Таким чином, підставивши (B.9), (B.10) у функції (B.8) та врахувавши (B.11), одержуємо нелінійності, які задовольняють систему (B.4)–(B.7):

$$\begin{aligned}
&F^{11}{=}\lambda_{11}(u^1)^{-\frac{1}{s}}{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\left[\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}\tfrac{u^3}{u^1}\right]{-}(s{+}1)\tfrac{u^2}{u^1},\\
&F^{12}{=}s{-}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^2}{u^1}, \quad F^{13}{=}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}, \quad F^{21}{=}\lambda_{21}(u^1)^{-\frac{2}{s}}{+}\\
&{+}\lambda_{11}(u^1)^{-\frac{1}{s}}\tfrac{u^2}{u^1}{-}(s{+}1)\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{+}\left[\lambda_{23}{+}2{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^2}{u^1}\right]\left[\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}\tfrac{u^3}{u^1}\right],\\
&F^{22}{=}(s{-}1{-}\lambda_{23})\tfrac{u^2}{u^1}{-}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2, \quad F^{23}{=}\lambda_{23}{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^2}{u^1},\\
&F^{31}{=}\lambda_{31}(u^1)^{-\frac{3}{s}}{+}\lambda_{11}(u^1)^{-\frac{1}{s}}\tfrac{u^3}{u^1}{+}\lambda_{21}(u^1)^{-\frac{2}{s}}\tfrac{u^2}{u^1}{-}s\tfrac{u^2u^3}{(u^1)^2}{+}\\
&{+}\left[\lambda_{23}\tfrac{u^2}{u^1}{+}\lambda_{33}(u^1)^{-\frac{1}{s}}{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^3}{u^1}\right]\left[\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}\tfrac{u^3}{u^1}\right],\\
&F^{32}{=}(s{-}2)\tfrac{u^3}{u^1}{+}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}\left[\lambda_{33}(u^1)^{-\frac{1}{s}}{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^3}{u^1}\right]\tfrac{u^2}{u^1}{-}\lambda_{23}\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2,\\
&F^{33}{=}\lambda_{33}(u^1)^{-\frac{1}{s}}{+}\lambda_{13}(u^1)^{\frac{1}{s}}\tfrac{u^3}{u^1}{+}(\lambda_{23}{-}1)\tfrac{u^2}{u^1},
\end{aligned}$$

при $s \neq 0$. Система (3.173) з цими нелінійностями заміною

$$w^1 = \frac{u^2}{u^1}, \quad w^2 = \frac{u^3}{u^1} - \frac{(u^2)^2}{2(u^1)^2}, \quad w^3 = u^1 \tag{B.13}$$

зводиться до системи (3.174), де функції w^a, G^a описані в першому рядку таблиці 3.3, після очевидного перепозначення

$$s{=}{-}\tfrac{1}{l},\ \lambda_{23} \to \lambda_{12},\ \lambda_{21} \to \lambda_{13},\ \lambda_{33} \to \lambda_{22},\ \lambda_{31} \to \lambda_{23},\ \lambda_{13} \to \lambda_{32},\ \lambda_{11} \to \lambda_{33}.$$

При цьому отримана система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (2.121), де оператори Q_a набувають вигляду (3.175).

При $s{=}0$ розв'язком системи (B.4)–(B.7) є наступні функції:

$$F^{11}{=}{-}\tfrac{u^2}{u^1}, \quad F^{12}{=}F^{13}{=}0, \quad F^{21}{=}{-}(\psi^{23}{+}2)\tfrac{u^3}{u^1}{+}(\psi^{23}{+}1)\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2,$$

$$F^{22}{=}-(\psi^{23}{+}1)\tfrac{u^2}{u^1}, \quad F^{23}{=}\psi^{23}, \quad F^{31}{=}\psi^{23}\tfrac{u^2}{u^1}\left[\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}\tfrac{u^3}{u^1}\right],$$
$$F^{32}{=}(1{-}\psi^{23})\left(\tfrac{u^2}{u^1}\right)^2{-}2\tfrac{u^3}{u^1}, \quad F^{33}{=}(\psi^{23}{-}1)\tfrac{u^2}{u^1},$$

де $\psi^{23}{=}\psi^{23}(u^1)$ — довільна гладка функція. Система (3.173) з цими нелінійностями заміною (В.13) зводиться до системи (3.176), де функції w^a, G^a описані в першому рядку таблиці 3.4, за умови $\psi^{23}{=}\psi$. У цьому разі отримана система інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (2.121), де оператори Q_a набувають вигляду (3.177).

Розглянемо оператори 20–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ,\theta)=(1,k)$. Оператори узагальненої алгебри Галілея, описані в цьому пункті, наступні:

$$\begin{aligned}&\partial_0,\ \partial_1,\ G_1{=}x_0\partial_1{+}u^1\partial_{u^2}{+}u^2\partial_{u^3},\ D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{+}2u^1\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},\\&\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(u^1\partial_{u^2}{+}u^2\partial_{u^3}){+}x_0(2u^1\partial_{u^1}{+}u^2\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3}){+}ku^1\partial_{u^3},\end{aligned} \tag{В.14}$$

а координати оператора X мають вигляд:

$$\xi^0 = \varsigma x_0^2 + 2cx_0 + q_0, \quad \xi^1 = \varsigma x_0x_1 + cx_1 + rx_0 + q_1, \tag{В.15}$$

$$\begin{aligned}&\eta^a{=}(\varsigma x_0{+}c)2u^a{+}\delta_{a2}\left[(\varsigma x_1{+}r)u^1{-}(\varsigma x_0{+}c)u^2\right]+\\&\quad+\delta_{a3}\left[(\varsigma x_1{+}r)u^2{+}\varsigma ku^1{+}(\varsigma x_0{+}c)(1{-}2u^3)\right],\end{aligned} \tag{В.16}$$

де ς, c, r, q_0, q_1 — довільні сталі.

Підставивши (В.15), (В.16) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_1, отримуємо систему рівнянь для знаходження нелінійностей F^{ab}, яка складається з рівнянь (В.4), (В.5) та наступної системи:

$$\delta_{a1}2u^1{+}\delta_{a2}u^2{+}\delta_{a3}{-}u^1F^{a2}{-}u^2F^{a3}{=}0, \tag{В.17}$$

$$2u^1F^{ab}_{u^1}{+}u^2F^{ab}_{u^2}{+}F^{ab}_{u^3}{-}\delta_{a1}2F^{1b}{-}\delta_{a2}F^{2b}{+}\delta_{b1}2F^{a1}{+}\delta_{b2}F^{a2}{+}F^{ab}{=}0. \tag{В.18}$$

Враховуючи описане вище, знаємо, що розв'язком системи (В.4), (В.5) є нелінійності (В.8), де функції φ^{ab} описуються формулами (В.9). Підставивши ці нелінійності в систему (В.17), (В.18), проінтегруємо її.

Очевидно, розв'язуючи систему рівнянь (B.17), отримуємо

$$\psi^{12}{=}2,\quad \psi^{22}{=}0,\quad \psi^{32}{=}\tfrac{1}{u^1},\quad k{=}1, \tag{B.19}$$

а інтегруючи систему (B.18), маємо:

$$\begin{aligned}
&\psi^{11}{=}\left[\lambda_{11}{+}\tfrac{\lambda_{13}}{2}\ln u^1\right]\tfrac{1}{\sqrt{u^1}},\quad \psi^{13}{=}\lambda_{13}\sqrt{u^1},\\
&\psi^{21}{=}\left[\lambda_{21}{+}(\tfrac{\lambda_{23}}{2}{+}1)\ln u^1\right]\tfrac{1}{u^1},\quad \psi^{23}{=}\lambda_{23},\\
&\psi^{31}{=}\left[\lambda_{31}{+}\tfrac{\lambda_{33}-\lambda_{11}}{2}\ln u^1{-}\tfrac{\lambda_{13}}{4}\ln^2 u^1\right]\tfrac{1}{u^1\sqrt{u^1}},\quad \psi^{33}{=}\left[\lambda_{33}{-}\tfrac{\lambda_{13}}{2}\ln u^1\right]\tfrac{1}{\sqrt{u^1}},
\end{aligned} \tag{B.20}$$

де λ_{ab} — довільні сталі.

Таким чином, система (3.173) з нелінійностями, що описані формулами (B.8), (B.9), (B.19), (B.20), є інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея (B.14). Перетвореннями

$$w^1=\tfrac{u^2}{u^1},\quad w^2=\tfrac{u^3}{u^1}-\tfrac{(u^2)^2}{2(u^1)^2}{-}\tfrac{1}{2u^1}\ln u^1,\quad w^3=u^1 \tag{B.21}$$

ця система зводиться до системи (3.174) після перепозначення сталих

$$\begin{aligned}
&\lambda_{23}\to\lambda_{12},\quad \lambda_{21}{+}\tfrac{\lambda_{23}}{2}\to\lambda_{13},\quad \lambda_{33}{-}\tfrac{\lambda_{13}}{2}\to\lambda_{22},\\
&\lambda_{31}{+}\tfrac{\lambda_{33}-\lambda_{11}}{2}{-}\tfrac{\lambda_{13}}{4}\to\lambda_{23},\quad \lambda_{13}\to\lambda_{32},\quad \lambda_{11}{+}\tfrac{\lambda_{13}}{2}\to\lambda_{33}.
\end{aligned}$$

При цьому стала l та функції w^a, G^a описані в другому рядку таблиці 3.3, а оператори Q_a набувають вигляду (3.175).

Наступними розглянемо оператори, описані у 22–му рядку таблиці 3.2 за умов $(æ_1, æ_2, \theta_1){=}(1,1,k)$. Базисні оператори узагальненої алгебри Галілея, визначені в цьому пункті, мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\partial_0,\quad \partial_1,\quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2},\quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}I{-}I_{23}{+}su^3\partial_{u^3},\\
&\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1(\partial_{u^1}{+}u^1\partial_{u^2}){-}x_0(I{+}I_{23}{-}su^3\partial_{u^3}){+}k\partial_{u^2},
\end{aligned} \tag{B.22}$$

при цьому координати інфінітезимального оператора X:

$$\begin{aligned}
&\xi^0{=}\varsigma x_0^2{+}2cx_0{+}q_0,\quad \xi^1{=}\varsigma x_0x_1{+}cx_1{+}rx_0{+}q_1,\\
&\eta^a{=}{-}(\varsigma x_0{+}c)u^a{+}\delta_{a1}(\varsigma x_1{+}r){+}\delta_{a2}\left[(\varsigma x_1{+}r)u^1{-}(\varsigma x_0{+}c)u^2{+}k\right]+
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$+\delta_{a3}(s-1)(\varsigma x_0+c)u^3. \tag{B.24}$$

Підставивши (B.23), (B.24) у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_1, отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\left(\delta_{d1}+u^1\delta_{d2}\right) F^{ab}_{u^d}-\delta_{a2}F^{1b}+\delta_{b1}F^{a2}+\delta_{ab}=0, \tag{B.25}$$

$$kF^{ab}_{u^2}+2\delta_{a2}\delta_{b1}=0, \tag{B.26}$$

$$-\delta_{a1}u^1-\delta_{a2}2u^2+\delta_{a3}(s-2)u^3-F^{a1}-F^{a2}u^1=0, \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}&-u^1F^{ab}_{u^1}-2u^2F^{ab}_{u^2}+(s-2)u^3F^{ab}_{u^3}+\delta_{a1}F^{1b}+2\delta_{a2}F^{2b}-\delta_{a3}(s-2)F^{3b}-\\&-\delta_{b1}F^{a1}-2\delta_{b2}F^{a2}+\delta_{b3}(s-2)F^{a3}+F^{ab}=0.\end{aligned} \tag{B.28}$$

Розв'язавши систему (B.25), отримуємо вигляд нелінійностей:

$$\begin{aligned}&F^{ab}=\varphi^{ab}-\delta_{ab}u^1-\delta_{a1}\delta_{b1}\varphi^{12}u^1-\delta_{a3}\delta_{b1}\varphi^{32}u^1+\\&+\delta_{a2}\left[\delta_{b1}\left((\varphi^{11}-\varphi^{22})u^1-\varphi^{12}(u^1)^2\right)+\delta_{b2}\varphi^{12}u^1+\delta_{b3}\varphi^{13}u^1\right],\end{aligned} \tag{B.29}$$

де $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}(\omega^1,\omega^2)$ — довільні гладкі функції, $\omega^1=u^3$, $\omega^2=2u^2-(u^1)^2$.

Розв'язавши систему (B.26), уточнюємо:

$$\varphi^{ab}=\psi^{ab}-\delta_{a2}\delta_{b1}\tfrac{\omega^2}{k}, \quad \psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega^1). \tag{B.30}$$

При розв'язуванні системи (B.27), отримуємо:

$$\psi^{11}=\psi^{21}=0, \quad \psi^{31}=(s-2)u^3, \quad k=1.$$

Інтегрування системи (B.28) залежить від значень сталої s. Після інтегрування у разі $s\neq 2$ нелінійності набувають вигляду

$$\begin{aligned}&F^{11}=-(\lambda_{12}+1)u^1, \quad F^{12}=\lambda_{12}, \quad F^{13}=\lambda_{13}(u^3)^{\frac{s}{2-s}},\\&F^{21}=(u^1)^2-2u^2-\lambda_{22}u^1(u^3)^{\frac{1}{2-s}}-\lambda_{12}(u^1)^2,\\&F^{22}=\lambda_{22}(u^3)^{\frac{1}{2-s}}+(\lambda_{12}-1)u^1, \quad F^{23}=\lambda_{23}(u^3)^{\frac{s+1}{2-s}}+\lambda_{13}u^1(u^3)^{\frac{s}{2-s}},\\&F^{31}=(s-2)u^3-\lambda_{32}u^1(u^3)^{\frac{s-1}{s-2}}, \quad F^{32}=\lambda_{32}(u^3)^{\frac{s-1}{s-2}}, \quad F^{33}=\lambda_{33}(u^3)^{\frac{1}{2-s}}-u^1.\end{aligned}$$

Система (3.173) з цими нелінійностями інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (В.22). Застосувавши перетворення

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = u^2 - \tfrac{(u^1)^2}{2}, \quad w^3 = u^3 \tag{В.31}$$

та позначивши $\frac{1}{2-s}=l$, зводимо її до системи (3.174), де стала l та функції w^a, G^a описані в третьому рядку таблиці 3.3, а оператори Q_a набувають вигляду (3.175).

Проінтегрувавши систему (В.28) у разі $s=2$, приходимо до нелінійностей вигляду:

$$F^{11}=-(\psi^{12}+1)u^1, \quad F^{12}=\psi^{12}, \quad F^{13}=0, \quad F^{21}=(u^1)^2-2u^2-\psi^{12}(u^1)^2,$$
$$F^{22}=(\psi^{12}-1)u^1, \quad F^{23}=F^{31}=F^{32}=0, \quad F^{33}=-u^1.$$

З цими нелінійностями система (3.173) інваріантна відносно алгебри (В.22). Перетворення (В.31) зводять її до системи (3.176), де функції w^a, G^a описані в другому рядку таблиці 3.4, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.177).

Розглянемо оператори 23–го рядка таблиці 3.2 у разі $(æ_1, æ_2, \theta_1)=(1,1,k)$. Базисні оператори узагальненої алгебри Галілея, визначені в цьому рядку, мають вигляд

$$\begin{gathered}\partial_0, \quad \partial_1, \quad G=x_0\partial_1+\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}, \quad D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1-I-I_{23}+u^3\partial_{u^2}, \\ \Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_1\partial_1+x_1(\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2})-x_0(I+I_{23}-u^3\partial_{u^2})+k\partial_{u^2}.\end{gathered} \tag{В.32}$$

Підставивши координати інфінітезимального оператора X у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями змінних x_0, x_1, отримуємо систему рівнянь, в яку входять вже розв'язані рівняння (В.25), (В.26), а також наступні:

$$-\delta_{a1}u^1+\delta_{a2}(u^3-2u^2)-\delta_{a3}2u^3-F^{a1}-F^{a2}u^1=0, \tag{В.33}$$

$$\begin{gathered}-u^1F^{ab}_{u^1}+(u^3-2u^2)F^{ab}_{u^2}-2u^3F^{ab}_{u^3}+\delta_{a1}F^{1b}+\delta_{a2}(2F^{2b}-F^{3b})+2\delta_{a3}F^{3b}- \\ -\delta_{b1}F^{a1}-2\delta_{b2}F^{a2}+\delta_{b3}(F^{a2}-2F^{a3})+F^{ab}=0.\end{gathered} \tag{В.34}$$

Підставивши розв'язок системи (В.25), (В.26) (тобто функції (В.29), (В.30)) у систему рівнянь (В.33) та розв'язавши її, уточнюємо наступні функції та сталі:

$$\psi^{11}{=}0, \quad \psi^{21}{=}u^3, \quad \psi^{31}{=}{-}2u^3, \quad k{=}1.$$

Проінтегрувавши систему (В.34), отримуємо набір нелінійностей

$$\begin{aligned}
&F^{11}{=}{-}(\lambda_{12}{+}1)u^1, \quad F^{12}{=}\lambda_{12}, \quad F^{13}{=}\lambda_{13}{+}\tfrac{\lambda_{12}}{2}\ln u^3,\\
&F^{21}{=}u^3{-}2u^2{+}(u^1)^2{-}\left(\lambda_{22}{-}\tfrac{\lambda_{32}}{2}\ln u^3\right)u^1\sqrt{u^3}{-}\lambda_{12}(u^1)^2,\\
&F^{22}{=}\left(\lambda_{22}{-}\tfrac{\lambda_{32}}{2}\ln u^3\right)\sqrt{u^3}{+}(\lambda_{12}{-}1)u^1,\\
&F^{23}{=}\left(\lambda_{23}{+}\tfrac{\lambda_{22}-\lambda_{33}}{2}\ln u^3{-}\tfrac{\lambda_{32}}{4}\ln^2 u^3\right)\sqrt{u^3}{+}\left(\lambda_{13}{+}\tfrac{\lambda_{12}}{2}\ln u^3\right)u^1,\\
&F^{31}{=}{-}2u^3{-}\lambda_{32}u^1\sqrt{u^3}, \quad F^{32}{=}\lambda_{32}\sqrt{u^3}, \quad F^{33}{=}\left(\lambda_{33}{+}\tfrac{\lambda_{32}}{2}\ln u^3\right)\sqrt{u^3}{-}u^1,
\end{aligned}$$

за яких система (3.173) інваріантна відносно алгебри (В.32). Виконавши заміну

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = u^2{-}\tfrac{(u^1)^2}{2}{+}u^3\ln\sqrt{u^3}, \quad w^3 = u^3 \tag{B.35}$$

та перепозначивши сталі наступним чином:

$$\lambda_{13}{-}\tfrac{\lambda_{12}}{2}\to\lambda_{13},\ \lambda_{22}{+}\tfrac{\lambda_{32}}{2}\to\lambda_{22},\ \lambda_{23}{+}\tfrac{\lambda_{33}-\lambda_{22}}{2}{-}\tfrac{\lambda_{32}}{4}\to\lambda_{23},\ \lambda_{33}{-}\tfrac{\lambda_{32}}{2}\to\lambda_{33},$$

отримуємо систему (3.174), де стала l і функції w^a, G^a описані в четвертому рядку таблиці 3.3, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.175).

Розглянемо оператори 24–го рядка таблиці 3.2 у разі $(æ_1, æ_2, \theta_1){=}(1, 1, k)$. Оскільки оператори Q_1, Q_3 співпадають з відповідними операторами 23–го рядка, то, підставивши координати інфінітезимального оператора у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями x_0, x_1, отримуємо два вже відомі рівняння (В.25), (В.26), розв'язком яких є функції (В.29), (В.30). Крім того, маємо наступну систему:

$$\begin{aligned}
&{-}\delta_{a1}u^1{-}\delta_{a2}2u^2{+}\delta_{a3}{-}F^{a1}{-}F^{a2}u^1{=}0,\\
&{-}u^1F^{ab}_{u^1}{-}2u^2F^{ab}_{u^2}{+}F^{ab}_{u^3}{+}\delta_{a1}F^{1b}{+}\delta_{a2}2F^{2b}{-}\delta_{b1}F^{a1}{-}2\delta_{b2}F^{a2}{+}F^{ab}{=}0.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Підставивши в неї функції (В.29), (В.30) та проінтегрувавши, отримуємо нелінійності

$$F^{11}{=}-(\lambda_{12}{+}1)u^1,\quad F^{12}{=}\lambda_{12},\quad F^{13}{=}\lambda_{13}e^{-2u^3},$$
$$F^{21}{=}-2u^2{+}(u^1)^2{-}\lambda_{22}e^{-u^3}u^1{-}\lambda_{12}(u^1)^2,$$
$$F^{22}{=}\lambda_{22}e^{-u^3}{+}(\lambda_{12}{-}1)u^1,\quad F^{23}{=}\lambda_{23}e^{-3u^3}{+}\lambda_{13}e^{-2u^3}u^1,$$
$$F^{31}{=}1{-}\lambda_{32}e^{u^3}u^1,\quad F^{32}{=}\lambda_{32}e^{u^3},\quad F^{33}{=}\lambda_{33}e^{-u^3}{-}u^1,$$

за яких система (3.173) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, визначеної операторами 24–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ_1, æ_2, \theta_1){=}(1, 1, k)$. Заміною

$$w^1 = u^1,\quad w^2 = u^2{-}\tfrac{(u^1)^2}{2},\quad w^3 = e^{-u^3} \tag{B.37}$$

та перепозначенням сталих наступним чином:

$$-\lambda_{13} \to \lambda_{13},\ -\lambda_{23} \to \lambda_{23},\ -\lambda_{32} \to \lambda_{32} \tag{B.38}$$

ця система зводиться до системи (3.174), де стала l і функції w^a, G^a описані в п'ятому рядку таблиці 3.3, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.175).

Розглянемо оператори 30–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ, \theta){=}(1, k)$. Підставивши координати інфінітезимального оператора у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями x_0, x_1, отримуємо систему:

$$F^{ab}_{u^1}{+}u^1F^{ab}_{u^2}{+}u^2F^{ab}_{u^3}{-}\delta_{a2}F^{1b}{-}\delta_{a3}F^{2b}{+}\delta_{b1}F^{a2}{+}\delta_{b2}F^{a3}{+}\delta_{ab}{=}0, \tag{B.39}$$
$$k\left[F^{ab}_{u^2}{+}u^1F^{ab}_{u^3}{-}\delta_{a3}F^{1b}{+}\delta_{b1}F^{a3}\right]{+}2(\delta_{a2}\delta_{b1}{+}\delta_{a3}\delta_{b2}){=}0, \tag{B.40}$$
$$-\delta_{a1}u^1{-}\delta_{a2}2u^2{-}\delta_{a3}3u^3{-}F^{a1}{-}F^{a2}u^1{-}F^{a3}u^2{=}0, \tag{B.41}$$
$$-u^1F^{ab}_{u^1}{-}2u^2F^{ab}_{u^2}{-}3u^3F^{ab}_{u^3}{+}\delta_{a1}F^{1b}{+}2\delta_{a2}F^{2b}{+}3\delta_{a3}F^{3b}{-}$$
$$-\delta_{b1}F^{a1}{-}2\delta_{b2}F^{a2}{-}3\delta_{b3}F^{a3}{+}F^{ab}{=}0, \tag{B.42}$$

проінтегрувавши яку маємо наступні нелінійності:

$$F^{11}{=}\tfrac{\lambda_{13}}{\sqrt[3]{\omega}}\left((u^1)^2{-}u^2\right){-}(\lambda_{12}{+}1)u^1,\quad F^{12}{=}\lambda_{12}{-}\tfrac{\lambda_{13}u^1}{\sqrt[3]{\omega}},\quad F^{13}{=}\tfrac{\lambda_{13}}{\sqrt[3]{\omega}},$$

$$F^{21}{=}\left(\lambda_{23}{+}\tfrac{\lambda_{13}u^1}{\sqrt[3]{\omega}}\right)\left((u^1)^2{-}u^2\right)-(\lambda_{12}{-}1)(u^1)^2{-}2u^2{-}\lambda_{22}u^1\sqrt[3]{\omega},$$
$$F^{22}{=}\lambda_{22}\sqrt[3]{\omega}{+}(\lambda_{12}{-}\lambda_{23}{-}1)u^1{-}\tfrac{\lambda_{13}(u^1)^2}{\sqrt[3]{\omega}},\quad F^{23}{=}\lambda_{23}{+}\tfrac{\lambda_{13}u^1}{\sqrt[3]{\omega}},$$
$$F^{31}{=}3\omega{+}\left(\lambda_{33}\sqrt[3]{\omega}{+}\tfrac{\lambda_{13}u^2}{\sqrt[3]{\omega}}{+}\lambda_{23}u^1\right)\left((u^1)^2{-}u^2\right)-\lambda_{32}u^1\sqrt[3]{\omega^2}{-}\lambda_{12}u^1u^2{-}$$
$${-}\lambda_{22}(u^1)^2\sqrt[3]{\omega},\quad F^{32}{=}\lambda_{32}\sqrt[3]{\omega^2}{+}(\lambda_{12}{-}2)u^2{-}(\lambda_{23}{-}1)(u^1)^2{+}$$
$${+}(\lambda_{22}{-}\lambda_{33})u^1\sqrt[3]{\omega}{-}\tfrac{\lambda_{13}u^1u^2}{\sqrt[3]{\omega}},\quad F^{33}{=}\lambda_{33}\sqrt[3]{\omega}{+}\tfrac{\lambda_{13}u^2}{\sqrt[3]{\omega}}{+}(\lambda_{23}{-}1)u^1,$$

де $\omega{=}u^1u^2{-}u^3{-}\frac{(u^1)^3}{3}$. Система (3.173) з цими нелінійностями інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, визначеної операторами 30–го рядка таблиці 3.2 за умови $(æ,\theta){=}(1,k)$.

Виконавши заміну

$$w^1=u^1,\quad w^2=u^2{-}\tfrac{(u^1)^2}{2},\quad w^3=\omega=u^1u^2{-}u^3{-}\tfrac{(u^1)^3}{3} \tag{B.43}$$

та перепозначивши сталі згідно (B.38), отримуємо систему (3.174), де стала l і функції w^a, G^a описані в шостому рядку таблиці 3.3, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.175).

Розглянемо оператори 31–го рядка таблиці 3.2. Підставивши координати інфінітезимального оператора у визначальну систему (3.20)–(3.21) і розчепивши її за степенями x_0, x_1, маємо:

$$F^{ab}_{u^1}{+}\delta_{ab}{=}0, \tag{B.44}$$
$$-\delta_{a1}u^1{+}\delta_{a2}(s_1{-}1)u^2{+}\delta_{a3}(s_2{-}1)u^3{-}F^{a1}{=}0, \tag{B.45}$$
$$\begin{gathered}-u^1F^{ab}_{u^1}{+}(s_1{-}1)u^2F^{ab}_{u^2}{+}(s_2{-}1)u^3F^{ab}_{u^3}{+}\delta_{a1}F^{1b}{-}(s_1{-}1)\delta_{a2}F^{2b}{-}\\ -(s_2{-}1)\delta_{a3}F^{3b}{-}\delta_{b1}F^{a1}{+}(s_1{-}1)\delta_{b2}F^{a2}{+}(s_2{-}1)\delta_{b3}F^{a3}{+}F^{ab}{=}0.\end{gathered} \tag{B.46}$$

Інтегруючи систему (B.44), отримуємо наступний вигляд нелінійностей

$$F^{ab}{=}\varphi^{ab}(u^2,u^3){-}\delta_{ab}u^1, \tag{B.47}$$

підставивши які в систему (B.45), (B.46) та розв'язавши її, уточнюємо функції

$$\begin{aligned}
&\varphi^{11}{=}0, && \varphi^{12}{=}\psi^{12}(u^2)^{\frac{s_1+1}{1-s_1}}, && \varphi^{13}{=}\psi^{13}(u^2)^{\frac{s_2+1}{1-s_1}},\\
&\varphi^{21}{=}(s_1{-}1)u^2, && \varphi^{22}{=}\psi^{22}(u^2)^{\frac{1}{1-s_1}}, && \varphi^{23}{=}\psi^{23}(u^2)^{\frac{s_2-s_1+1}{1-s_1}},\\
&\varphi^{31}{=}(s_2{-}1)u^3, && \varphi^{32}{=}\psi^{32}(u^2)^{\frac{s_1-s_2+1}{1-s_1}}, && \varphi^{33}{=}\psi^{33}(u^2)^{\frac{1}{1-s_1}},
\end{aligned} \tag{B.48}$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\omega{=}(u^2)^k u^3$, $\frac{s_2-1}{1-s_1}{=}k$, $s_1{\neq}1$. Після позначення $\frac{1}{1-s_1}{=}l$, система дифузії–конвекції (3.173) з нелінійностями (B.47), (B.48) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&u^1_0{=}u^1_{11}{-}u^1u^1_1{+}\psi^{12}(u^2)^{2l-1}u^2_1{+}\psi^{13}(u^2)^{k+2l}u^3_1,\\
&u^2_0{=}u^2_{11}{-}\tfrac{u^2}{l}u^1_1{+}[\psi^{22}(u^2)^l{-}u^1]u^2_1{+}\psi^{23}(u^2)^{k+l+1}u^3_1,\\
&u^3_0{=}u^3_{11}{+}\tfrac{k}{l}u^3u^1_1{+}\psi^{32}(u^2)^{l-k-1}u^2_1{+}[\psi^{33}(u^2)^l{-}u^1]u^3_1
\end{aligned} \tag{B.49}$$

та інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}, \quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{-}\tfrac{1}{l}u^2\partial_{u^2}{+}\tfrac{k}{l}u^3\partial_{u^3},\\
&\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{-}x_0(u^1\partial_{u^1}{+}\tfrac{1}{l}u^2\partial_{u^2}{-}\tfrac{k}{l}u^3\partial_{u^3}).
\end{aligned} \tag{B.50}$$

Слід зазначити, що обмеження $s_1{\neq}{-}1, s_2{\neq}{-}1$, присутні в 31–му рядку таблиці, можна відкинути, оскільки, розв'язуючи систему визначальних рівнянь для операторів 22–го рядка за умови $(æ_1, æ_2, \theta_1){=}(1,0,0)$, ми отримуємо систему (B.49) за умов $l{=}\frac{1}{2}$, $k{=}\frac{s-2}{2}$. Обмеження $s_1{\neq}1$ також не є суттєвим, оскільки, коли $s_1{=}1$, отримуємо систему, яка є частинним випадком (B.49) за умов $u^1 \to u^1$, $u^2 \to u^3$, $u^3 \to u^2$.

Таким чином, виконавши заміну

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = u^2, \quad w^3 = u^3(u^2)^k \tag{B.51}$$

та перепозначивши функції

$$\begin{aligned}
&\psi^{12}{-}kw^3\psi^{13} \to \psi^{12},\ \psi^{22}{-}kw^3\psi^{23} \to \psi^{22},\\
&\psi^{32}{+}(\psi^{22}{-}\psi^{33})kw^3{-}\psi^{23}(kw^3)^2 \to \psi^{32},\ \psi^{33}{+}kw^3\psi^{23} \to \psi^{33},
\end{aligned}$$

отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в першому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Розглянемо оператори 32–го рядка таблиці 3.2. За ними складемо інфінітезимальний оператор і підставимо його координати у визначальну систему (3.20)–(3.21). Розчепивши отримані рівняння за степенями x_0, x_1, отримуємо вже розв'язане раніше рівняння (B.44), а також систему

$$\begin{aligned}
&-\delta_{a1}u^1+\delta_{a2}\left[(s-1)u^2+u^3\right]+\delta_{a3}(s-1)u^3-F^{a1}=0,\\
&-u^1F^{ab}_{u^1}+\left[(s-1)u^2+u^3\right]F^{ab}_{u^2}+(s-1)u^3F^{ab}_{u^3}+\delta_{a1}F^{1b}-\delta_{a2}[(s-1)F^{2b}+F^{3b}]-\\
&-\delta_{a3}(s-1)F^{3b}-\delta_{b1}F^{a1}+\delta_{b2}(s-1)F^{a2}+\delta_{b3}[(s-1)F^{a3}+F^{a2}]+F^{ab}=0,
\end{aligned}$$

інтегруючи яку, отримуємо наступний вигляд нелінійностей

$$\begin{aligned}
&F^{11}=-u^1,\quad F^{12}=\psi^{12}e^{-(s+1)\frac{u^2}{u^3}},\quad F^{13}=\left[\psi^{13}-\psi^{12}\frac{u^2}{u^3}\right]e^{-(s+1)\frac{u^2}{u^3}},\\
&F^{21}=(s-1)u^2+u^3,\quad F^{22}=\left[\psi^{22}+\psi^{32}\frac{u^2}{u^3}\right]e^{-\frac{u^2}{u^3}}-u^1,\\
&F^{23}=\left[\psi^{23}+(\psi^{33}-\psi^{22})\frac{u^2}{u^3}-\psi^{32}\left(\frac{u^2}{u^3}\right)^2\right]e^{-\frac{u^2}{u^3}},\\
&F^{31}=(s-1)u^3,\quad F^{32}=\psi^{32}e^{-\frac{u^2}{u^3}},\quad F^{33}=\left[\psi^{33}-\psi^{32}\frac{u^2}{u^3}\right]e^{-\frac{u^2}{u^3}}-u^1,
\end{aligned}$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$, $\omega=u^3e^{-(s-1)\frac{u^2}{u^3}}$.

Зазначимо, що обмеження $s\neq-1$, присутнє в 32–му рядку таблиці, можна відкинути, оскільки, розв'язавши систему визначальних рівнянь для операторів 23–го рядка за умови $(æ_1, æ_2, \theta_1)=(1,0,0)$, ми отримуємо ці ж нелінійності у разі $s=-1$.

Виконавши заміну

$$w^1=u^1,\quad w^2=e^{-\frac{u^2}{u^3}},\quad w^3=u^3e^{-(s-1)\frac{u^2}{u^3}}\tag{B.52}$$

та перепозначивши певним чином відповідні функції, отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в другому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Розглянемо оператори 33–го рядка таблиці 3.2. Підставивши координати інфінітезимального оператора у визначальну систему (3.20)–(3.21) та розчепивши її за степенями x_0, x_1, отримуємо рівняння (В.44), розв'язком якого є функції (В.47), а також систему

$$-\delta_{a1}u^1+\delta_{a2}(s-1)u^2+\delta_{a3}-F^{a1}=0,$$
$$-u^1F^{ab}_{u^1}+(s-1)u^2F^{ab}_{u^2}+F^{ab}_{u^3}+\delta_{a1}F^{1b}-\delta_{b1}F^{a1}+(s-1)(\delta_{b2}F^{a2}-\delta_{a2}F^{2b})+F^{ab}=0.$$

Підставивши в неї (В.47) та проінтегрувавши, отримуємо наступний вигляд матриці нелінійностей

$$F(U)=\begin{pmatrix} -u^1 & \psi^{12}e^{-(s+1)u^3} & \psi^{13}e^{-2u^3} \\ (s-1)u^2 & \psi^{22}e^{-u^3}-u^1 & \psi^{23}e^{(s-2)u^3} \\ 1 & \psi^{32}e^{-su^3} & \psi^{33}e^{-u^3}-u^1 \end{pmatrix}, \tag{В.53}$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega=u^2e^{-(s-1)u^3}$.

Зазначимо, що обмеження $s\neq-1$, присутнє в 33–му рядку таблиці, несуттєве, оскільки, розв'язавши систему визначальних рівнянь для операторів 24–го рядка за умов $(æ_1, æ_2, \theta_1)=(1, 0, 0)$, ми отримуємо матрицю нелінійностей (В.53), де $s=-1$. Об'єднавши ці два випадки обмеження $s\neq-1$ можна відкинути.

Виконавши для системи (3.173) з нелінійностями (В.53) заміну

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = e^{-u^3}, \quad w^3 = u^2e^{-ku^3}, \quad k=s-1, \tag{В.54}$$

та перепозначивши функції

$$-\psi^{13}-kw^3\psi^{12}\to\psi^{12}, \quad \psi^{12}\to\psi^{13}, \quad \psi^{33}+kw^3\psi^{32}\to\psi^{22}, \quad -\psi^{32}\to\psi^{23},$$
$$-\psi^{23}+(\psi^{33}-\psi^{22})kw^3+\psi^{32}(kw^3)^2 \to \psi^{32}, \quad \psi^{22}-kw^3\psi^{32} \to \psi^{33},$$

отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в третьому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Розглянемо оператори 34–го рядка таблиці 3.2. За виглядом базисних операторів узагальненої алгебри Галілея, складемо координати інфінітезимального оператора та підставимо їх у визначальну систему (3.20)–(3.21).

Розчепивши її за степенями x_0, x_1, маємо рівняння (В.44), розв'язком якого є функції (В.47), а також систему

$$\begin{aligned}
&\delta_{a1}(-u^1+u^2)-\delta_{a2}u^2+\delta_{a3}(s-1)u^3-F^{a1}=0,\\
&(u^2-u^1)F^{ab}_{u^1}-u^2F^{ab}_{u^2}+(s-1)u^3F^{ab}_{u^3}+\delta_{a1}(F^{1b}-F^{2b})+\delta_{a2}F^{2b}-\delta_{a3}(s-1)F^{3b}-\\
&-\delta_{b1}F^{a1}+\delta_{b2}(F^{a1}-F^{a2})+\delta_{b3}(s-1)F^{a3}+F^{ab}=0.
\end{aligned}$$

Підставивши в неї (В.47) та проінтегрувавши, маємо матрицю нелінійностей

$$F(U)=\begin{pmatrix} u^2-u^1 & \left[\psi^{12}+(1-\psi^{22})\ln u^2+\ln^2 u^2\right]u^2 & \left[\psi^{13}-\psi^{23}\ln u^2\right](u^2)^{s+1}\\ -u^2 & \left[\psi^{22}-2\ln u^2\right]u^2-u^1 & \psi^{23}(u^2)^{s+1}\\ (s-1)u^3 & \left[\psi^{32}-\ln u^3\right]u^3 & \left[\psi^{33}-\ln u^2\right]u^2-u^1 \end{pmatrix},$$

де $\psi^{ab}=\psi^{ab}(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega=u^3(u^2)^{s-1}$. Система (3.173) з цими нелінійностями інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned}
&\partial_0,\quad \partial_1,\quad G=x_0\partial_1+\partial_{u^1},\quad D=2x_0\partial_0+x_1\partial_1+(u^2-u^1)\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}+(s-1)u^3\partial_{u^3},\\
&\Pi=x_0^2\partial_0+x_0x_1\partial_1+x_1\partial_{u^1}+x_0\left((u^2-u^1)\partial_{u^1}-u^2\partial_{u^2}+(s-1)u^3\partial_{u^3}\right).
\end{aligned}$$

Зазначимо, що обмеження $s\neq-1$, присутнє в 34–му рядку таблиці, несуттєве, оскільки, розв'язавши систему визначальних рівнянь для операторів 29–го рядка за умови $(æ,\theta)=(0,0)$, ми отримуємо цю ж саму матрицю нелінійностей у разі $s=-1$. Об'єднавши ці два випадки обмеження $s\neq-1$ можна відкинути.

Система (3.173) з отриманими нелінійностями після підстановки

$$w^1=u^1+u^2\ln u^2,\quad w^2=u^2,\quad w^3=u^3(u^2)^k,\quad k=s-1 \tag{В.55}$$

та перепозначення функцій

$$\begin{aligned}
&\psi^{12}+\psi^{22}-kw^3(\psi^{13}+\psi^{23})\to\psi^{12},\ \psi^{13}+\psi^{23}\to\psi^{13},\ \psi^{22}+1-kw^3\psi^{23}\to\psi^{22},\\
&\left[\psi^{32}-\ln w^3+k(\psi^{22}-\psi^{33})-k^2w^3\psi^{23}\right]w^3\to\psi^{32},\quad \psi^{33}+kw^3\psi^{23}\to\psi^{33}
\end{aligned}$$

переходить в систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в четвертому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Аналогічно розв'язавши систему визначальних рівнянь для алгебри, визначеної операторами 35–го рядка таблиці 3.2, приходимо до системи

$$u^1_0{=}u^1_{11}{+}(u^2{-}u^1)u^1_1{+}\left[\psi^{12}{+}(1{-}\psi^{22})\ln u^2{+}\ln^2 u^2\right]u^2u^2_1{+}\left[\psi^{13}{-}\psi^{23}\ln u^2\right](u^2)^2u^3_1,$$
$$u^2_0{=}u^2_{11}{-}u^2u^1_1{+}\left[(\psi^{22}{-}2\ln u^2)u^2{-}u^1\right]u^2_1{+}\psi^{23}(u^2)^2u^3_1,$$
$$u^3_0{=}u^3_{11}{+}u^1_1{+}\left[\psi^{32}{-}u^3\right]u^2_1{+}\left[(\psi^{33}{-}\ln u^2)u^2{-}u^1\right]u^3_1,$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\omega{=}u^3{+}\ln u^2$. Вона інваріантна відносно алгебри

$$\begin{gathered}\partial_0,\quad \partial_1,\quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1},\quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{+}(u^2{-}u^1)\partial_{u^1}{-}u^2\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},\\ \Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{+}x_0\left((u^2{-}u^1)\partial_{u^1}{-}u^2\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3}\right).\end{gathered}\tag{B.56}$$

Застосувавши до цієї системи перетворення

$$w^1=u^1{+}u^2\ln u^2,\quad w^2=u^2,\quad w^3=u^3{+}\ln u^2\tag{B.57}$$

та перепозначивши функції

$$\psi^{12}{+}\psi^{22}{-}\psi^{13}{-}\psi^{23}{\to}\psi^{12},\quad \psi^{13}{+}\psi^{23}{\to}\psi^{13},\quad \psi^{22}{+}1{-}\psi^{23}{\to}\psi^{22},$$
$$\psi^{32}{+}\psi^{22}{-}\psi^{33}{-}\psi^{23}{-}w^3\to\psi^{32},\quad \psi^{33}{+}\psi^{23}\to\psi^{33},$$

отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в п'ятому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Розглядаючи операторів 36–го рядка таблиці 3.2, розв'яжемо систему визначальних рівнянь і приходимо до системи

$$u^1_0{+}u^1u^1_1{=}u^1_{11}{+}\psi^{12}e^{-2u^3}u^2_1{+}\left[\psi^{13}{-}\psi^{12}u^3\right]e^{-2u^3}u^3_1,$$
$$u^2_0{+}u^1u^2_1{=}u^2_{11}{+}u^3u^1_1{+}(\psi^{22}{+}\psi^{32}u^3)e^{-u^3}u^2_1{+}\left[\psi^{23}{+}(\psi^{33}{-}\psi^{22})u^3{-}\psi^{32}(u^3)^2\right]e^{-u^3}u^3_1,$$
$$u^3_0{+}u^1u^3_1{=}u^3_{11}{+}u^1_1{+}\psi^{32}e^{-u^3}u^2_1{+}(\psi^{33}{-}\psi^{32}u^3)e^{-u^3}u^3_1,$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\omega{=}u^2{-}\frac{(u^3)^2}{2}$. Ця система інваріантна відносно алгебри

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1},\quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{+}u^3\partial_{u^2}{+}\partial_{u^3},$$
$$\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{-}x_0\left(u^1\partial_{u^1}{-}u^3\partial_{u^2}{-}\partial_{u^3}\right).$$

Після застосування до цієї системи перетворень

$$w^1 = u^1, \quad w^2 = e^{-u^3}, \quad w^3 = u^2 - \tfrac{(u^3)^2}{2} \tag{B.58}$$

та перепозначення функцій

$$-\psi^{13} \to \psi^{12},\ \psi^{12} \to \psi^{13},\ \psi^{33} \to \psi^{22},\ -\psi^{32} \to \psi^{23},\ -\psi^{23} \to \psi^{32},\ \psi^{22} \to \psi^{33}$$

одержуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в шостому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

При розв'язуванні системи визначальних рівнянь для операторів 37–го рядка таблиці 3.2 нелінійності набувають наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
&F^{11}{=}u^2{-}u^1, \quad F^{12}{=}\big[\psi^{12}{+}(\omega{-}\psi^{22})\ln u^3{+}\left(\tfrac{1}{2}\psi^{32}{-}1{+}\omega\right)\ln^2 u^3{-}\tfrac{1}{2}\ln^3 u^3\big]u^3,\\
&F^{13}{=}\big[\psi^{13}{+}(\psi^{12}{-}\psi^{23})\ln u^3{+}\left(\tfrac{1}{2}(\omega{+}\psi^{33}){-}\psi^{22}\right)\ln^2 u^3{+}\\
&\ {+}\tfrac{1}{2}\left(\psi^{32}{-}1{+}\omega\right)\ln^3 u^3{-}\tfrac{1}{4}\ln^4 u^3\big]u^3,\\
&F^{21}{=}u^3{-}u^2, \quad F^{22}{=}\left[\psi^{22}{+}(1{-}2\omega{-}\psi^{32})\ln u^3{+}\tfrac{3}{2}\ln^2 u^3\right]u^3{-}u^1,\\
&F^{23}{=}\left[\psi^{23}{+}(\psi^{22}{-}\psi^{33})\ln u^3{+}\left(\tfrac{1}{2}{-}\tfrac{1}{2}\omega{-}\psi^{32}\right)\ln^2 u^3{+}\tfrac{1}{2}\ln^3 u^3\right]u^3,\\
&F^{31}{=}{-}u^3, \quad F^{32}{=}[\psi^{32}{-}\ln u^3]u^3, \quad F^{33}{=}\left[\psi^{33}{+}(\psi^{32}{-}\omega)\ln u^3\right]u^3{-}u^1,
\end{aligned}$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\omega{=}\frac{u^2}{u^3}{+}\ln u^3$. Система (3.173) з цими нелінійностями інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1}, \quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}I{+}u^2\partial_{u^1}{+}u^3\partial_{u^2},\\
&\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{-}x_0\left(I{-}u^2\partial_{u^1}{-}u^3\partial_{u^2}\right).
\end{aligned}$$

Виконавши заміну

$$w^1 = u^1{+}u^2\ln u^3{+}\tfrac{1}{2}u^3\ln^2 u^3, \quad w^2 = u^3, \quad w^3 = \tfrac{u^2}{u^3}{+}\ln u^3 \tag{B.59}$$

та перепозначивши функції

$$\begin{aligned}
&\psi^{13}{-}\psi^{12}{+}(\psi^{33}{-}\psi^{32}{+}\psi^{12})w^3{+}\psi^{32}(w^3)^2 \to \psi^{12}, \quad \psi^{12}{+}\psi^{32}w^3 \to \psi^{13},\\
&\psi^{33}{-}\psi^{32}{+}(\psi^{32}{+}1)w^3 \to \psi^{22}, \quad \psi^{32} \to \psi^{23}, \quad \psi^{22}{+}\psi^{32}{-}\psi^{32}w^3 \to \psi^{33},
\end{aligned}$$

$$\psi^{23}-\psi^{22}+\psi^{33}-\psi^{32}+(\psi^{22}-\psi^{33}+2\psi^{32})w^3-\psi^{32}(w^3)^2 \to \psi^{32},$$

отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в сьомому рядку таблиці 3.5, при цьому оператори Q_a набувають вигляду (3.179).

Аналогічно після розв'язання системи визначальних рівнянь для алгебри, визначеної операторами 38–го рядка таблиці 3.2, приходимо до системи

$$\begin{aligned}
&u^1_0{=}u^1_{11}{+}(u^2{+}u^3{-}u^1)u^1_1{+}\left[\psi^{12}{+}(1{+}\omega{-}\psi^{22}{-}\psi^{32})\ln u^2{+}(1{+}\omega)\ln^2 u^2\right]u^2u^2_1{+}\\
&\quad{+}\left[\psi^{13}{+}(1{+}\omega{-}\psi^{23}{-}\psi^{33})\ln u^2{+}(1{+}\omega)\ln^2 u^2\right]u^2u^3_1,\\
&u^2_0{=}u^2_{11}{-}u^2u^1_1{+}\left[\big(\psi^{22}{-}(\omega{+}2)\ln u^2\big)u^2{-}u^1\right]u^2_1{+}[\psi^{23}{-}\ln u^2]u^2u^3_1,\\
&u^3_0{=}u^3_{11}{-}u^3u^1_1{+}\left[\psi^{32}{-}\ln u^3\right]u^3u^2_1{+}\left[\big(\psi^{33}{-}(2\omega{+}1)\ln u^2\big)u^2{-}u^1\right]u^3_1,
\end{aligned}$$

де $\psi^{ab}{=}\psi^{ab}(\omega)$, $\omega{=}\frac{u^3}{u^2}$. Система інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned}
&\partial_0,\quad \partial_1,\quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1},\quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}I{+}(u^2{+}u^3)\partial_{u^1},\\
&\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{-}x_0\left(I{-}(u^2{+}u^3)\partial_{u^1}\right).
\end{aligned} \tag{B.60}$$

Застосувавши до цієї системи перетворення

$$w^1 = u^1{+}u^2\ln u^2{+}u^3\ln u^3,\quad w^2 = u^2,\quad w^3 = \tfrac{u^3}{u^2} \tag{B.61}$$

та перепозначивши певним чином функції ψ^{ab}, отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані у восьмому рядку таблиці 3.5, а оператори Q_a при цьому набувають вигляду (3.179).

Розв'язавши систему визначальних рівнянь для операторів 39–го рядка таблиці 3.2, отримуємо наступні нелінійності:

$$\begin{aligned}
&F^{11}{=}{-}u^1,\quad F^{12}{=}\left[\tfrac{u^2}{\sqrt{\vec u^2}}\psi^3{+}\tfrac{u^3}{\sqrt{\vec u^2}}\psi^4\right]e^{-\frac{k+2}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},\\
&F^{13}{=}\left[\tfrac{u^3}{\sqrt{\vec u^2}}\psi^3{-}\tfrac{u^2}{\sqrt{\vec u^2}}\psi^4\right]e^{-\frac{k+2}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},\quad F^{21}{=}ku^2{-}su^3,\\
&F^{22}{=}{-}u^1{+}\left[\psi^1{+}\tfrac{(u^2)^2-(u^3)^2}{\vec u^2}\psi^6{-}\tfrac{2u^2u^3}{\vec u^2}\psi^5\right]e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},\\
&F^{23}{=}\left[\psi^2{+}\tfrac{(u^2)^2-(u^3)^2}{\vec u^2}\psi^5{+}\tfrac{2u^2u^3}{\vec u^2}\psi^6\right]e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},
\end{aligned}$$

$$F^{31}{=}su^2{+}ku^3, \quad F^{32}{=}\Big[-\psi^2{+}\tfrac{(u^2)^2-(u^3)^2}{\vec u^2}\psi^5{+}\tfrac{2u^2u^3}{\vec u^2}\psi^6\Big]e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},$$
$$F^{33}{=}-u^1{+}\Big[\psi^1{-}\tfrac{(u^2)^2-(u^3)^2}{\vec u^2}\psi^6{+}\tfrac{2u^2u^3}{\vec u^2}\psi^5\Big]e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},$$

де $\psi^r{=}\psi^r(\omega)$, $\omega{=}\ln\vec u^2{-}\frac{2k}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}$, $\vec u{=}(u^2,u^3)$, $r{=}\overline{1,6}$, $k{=}s_1{-}1$, $s{=}s_2$. Система (3.173) з цими нелінійностями інваріантна відносно алгебри

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad G{=}x_0\partial_1{+}\partial_{u^1},\quad D{=}2x_0\partial_0{+}x_1\partial_1{-}u^1\partial_{u^1}{+}kI_{23}{+}sJ_{32},$$
$$\Pi{=}x_0^2\partial_0{+}x_0x_1\partial_1{+}x_1\partial_{u^1}{-}x_0\left(u^1\partial_{u^1}{-}kI_{23}{-}sJ_{32}\right).$$

Після підстановки

$$w^1=u^1,\quad w^2=e^{-\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{u^3}{u^2}},\quad w^3=\ln\vec u^2{-}\tfrac{2k}{s}\operatorname{arctg}\tfrac{u^3}{u^2} \tag{B.62}$$

та перепозначення функцій

$$(s\psi^4{-}k\psi^3)e^{\frac{w^3}{2}}\to\psi^{12},\quad \tfrac{1}{2}\psi^3e^{\frac{w^3}{2}}\to\psi^{13},\quad \psi^1{-}\psi^6{+}\tfrac{k}{s}(\psi^5{-}\psi^2)\to\psi^{22},$$
$$\tfrac{1}{2s}(\psi^2{-}\psi^5)\to\psi^{23},\quad \tfrac{2k^2}{s}(\psi^5{-}\psi^2){-}4k\psi^6{-}2s(\psi^5{+}\psi^2)\to\psi^{32},$$
$$\psi^1{+}\psi^6{+}\tfrac{k}{s}(\psi^2{-}\psi^5)\to\psi^{33}$$

отримуємо систему (3.178), де стала l і функції w^a, G^a описані в дев'ятому рядку таблиці 3.5, при цьому оператори Q_a набувають вигляду (3.179).

Для операторів із решти пунктів таблиці 3.2 система визначальних рівнянь (3.20)–(3.21) виявляється несумісною.

Теорему доведено.