НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ

Могілевський Вадим Йосипович

УДК 517.984.46: 517.927.25

Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат

**дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук**

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий консультант

доктор фізико-математичних наук
Маламуд Марк Мордкович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу рівнянь в частинних похідних.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Аров Дамір Зямович,
Південноукраїнський національний
педагогічний університет,
професор кафедри прикладної математики і інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Дудкін Микола Євгенович,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»,
в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Холькін Олександр Михайлович,
Приазовський державний технічний університет,
завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

Захист відбудеться 31 травня 2016 р. о 15 годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 Україна, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України

Автореферат розісланий 28 квітня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А.С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРЕКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато проблем математичної фізики та квантової механіки зводиться до дослідження спектральних властивостей деякого симетричного диференціального оператора. Узагальненням такого оператора є симетрична диференціальна система першого порядку, коефіцієнтами якої є $n \times n$-матриці. Зокрема, до системи першого порядку спеціального вигляду зводяться симетричний диференціальний оператор довільного порядку з матричними коефіцієнтами та рівняння струни Крейна-Феллера. Крім того, ряд важливих фізичних задач також призводять до симетричної системи. Тому дослідження симетричних диференціальних операторів та систем привертало та продовжує привертати велику увагу.

Ефективний метод дослідження означених операторів та систем базується на теорії розширень симетричних операторів у гільбертовому просторі. Ця теорія була започаткована Дж. фон Нейманом і потім широко розвинена М.Г. Крейном та його численними послідовниками. В роботах Дж. Келкіна та порівняно недавніх роботах Ф.С. Рофе-Бекетова, В.І. Горбачук, М.Л. Горбачука, А.Н. Кочубея, В.М. Брука, В.А. Михайлеця, Ю.М. Арлінського та інших математиків отримав розвиток метод граничних трійок в теорії розширень. Згідно з цим методом розширення симетричного оператора описуються абстрактними граничними умовами, які в застосуваннях до диференціальних рівнянь приймають вигляд граничних умов на розв'язки цих рівнянь. В.О. Деркач та М.М. Маламуд для кожної граничної трійки записали функцію Вейля, яка для диференціальних операторів збігається з класичною функцією Вейля. Це дозволило описати деякі спектральні та геометричні властивості самоспряжених розширень з виходом в ширший простір в термінах λ-залежних граничних умов та функції Вейля. Слід зазначити, що навіть у простіших випадках сингулярні диференціальні оператори непарного порядку та негамільтонові системи породжують симетричні оператори з нерівними індексами дефекту. Поруч з тим у зазначених дослідженнях теорія граничних трійок та відповідних функцій Вейля розроблена лише для операторів з рівними індексами дефекту, що обмежує її застосування до диференціальних операторів та систем.

Головною проблемою спектральної теорії симетричних диференціальних операторів та систем є характеризація спектра та доведення можливості зображення заданої функції у вигляді ряду за власними функціями або інтегралу за спектральною функцією. Спектральна теорія диференціальних операторів другого порядку розроблена в класичних роботах Ж.Штурма та Ж. Ліувілля для регулярних операторів і Г. Вейля та Е.Ч. Тітчмарша для сингулярних операторів. Існування матричної спектральної функції для диференціального оператора довільного порядку різними методами доведено М.Г. Крейном, К. Кодаірой, Б.М. Левітаном, А.В. Штраусом. Параметризація всіх функцій Вейля квазірегулярного диференціального оператора на півосі безпосередньо в термінах самоспряженої граничної умови на нескінченності отримана в роботах М.Л. Горбачука, Ч. Фултона, О.М. Холькіна; в теорії струни аналогічна параметризація отримана І.С. Кацем та М.Г. Крейном. Фундаментальний внесок в спектральну теорію диференціальних операторів зробили також Ю.М. Березанський, І.М. Гельфанд, І.М. Глазман, Е.А. Коддінгтон, А.Г. Костюченко, Н.Левинсон, В.О. Марченко, М.А.Наймарк, Ф.С. Рофе-Бекетов та багато інших математиків.

Дослідження сингулярних диференціальних операторів непарного порядку викликає певні труднощі. Спроба поширити теорію Вейля-Тітчмарша на такі оператори міститься в роботах У.Н. Еверіта та В. Крішни Кумара, однак результати цих робіт не можна вважати завершеними.

Спектральні властивості симетричних диференціальних систем, особливо з виродженим ваговим коефіцієнтом, є менш дослідженими. Проблема полягає в тому, що такі системи потребують введення до розгляду природно визначеної псевдоспектральної функції замість спектральної, оскільки остання може взагалі не існувати. Крім того, негамільтонові системи не припускають розділених самоспряжених граничних умов, що ускладнює поширення теорії Вейля-Тітчмарша на такі системи.

Характеристика спектра переважно регулярних систем та доведення розкладу функцій спеціального класу за власними функціями граничної задачі міститься в монографіях І.Ц. Гохберга та М.Г. Крейна; Ф. Аткінсона. В роботах В.І. Когана та Ф.С. Рофе-Бекетова; М. Леша та М.М. Маламуда досліджуються індекси дефекту сингулярних систем.

І.С. Кац розробив метод неподільних інтервалів та довів існування скалярних псевдоспектральних функцій для гамільтонових систем з 2×2 - коефіцієнтами. Опис розділених самоспряжених граничних умов для гамільтонової системи на півосі, узагальнення теорії Вейля-Тітчмарша на такі системи та доведення існування “вкороченої” матричної псевдоспектральної функції розміру $n/2$ міститься в роботах Д.Хінтона та Дж.К. Шао; Д. Хінтона та А. Шнайдера; А. Кралла; А.Дайксми, Г. Лангера та Х. де Сну. А. Кралл також узагальнив формулу Тітчмарша для характеристичної матриці оператора Штурма-Ліувілля на осі на випадок гамільтонової системи на осі. В роботі Д. Хінтона та Дж.К. Шао отримано параметризацію всіх функцій Вейля квазірегулярної гамільтонової системи на півосі в термінах самоспряжених граничних умов. Найбільш повні результати стосовно ”вкорочених” псевдоспектральних функцій регулярних гамільтонових систем можна знайти в монографіях Д.З. Арова та Г. Дима; А.Л. Сахновича, Л.А. Сахновича та І.Я. Ройтберг. Тут, зокрема, міститься цілком природне означення таких функцій та їх параметризація в термінах матриці монодромії та неванлинівського параметра.

В роботах Г. Лангера та Б.Тексторіуса отримано параметризацію усіх “повних” $n\times n$-матричних псевдоспектральних функцій загальної (необов’язково гамільтонової) регулярної системи в термінах граничних умов. Негамільтонові системи на півосі з мінімально можливими (нерівними) індексами дефекту розглядалися Д. Хінтоном та А. Шнайдером. В роботі цих авторів введена прямокутна функція Вейля, яка не є неванлинівською функцією. Крім того, в роботі Г. Бенке та Д. Хінтона для негамільтонової системи на осі з нульовими індексами дефекту доведено формулу Тітчмарша.

З огляду на сказане уявляється актуальним подальший розвиток спектральних теорій симетричних операторів у гільбертовому просторі та диференціальних операторів і систем з метою поширення деяких результатів цих теорій на симетричні оператори з нерівними індексами дефекту, довільні (можливо негамільтонові) системи та диференціальні оператори непарного порядку.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана відповідно до плану наукової роботи ІПММ НАН України за темою “Локальні, глобальні та асимптотичні властивості розв'язків сингулярних, спектральних і некласичних задач для еліптичних та еволюційних рівнянь і варіаційних нерівностей " РК №0111U000481, затвердженою постановою Бюро Відділення математики НАН України від 29.04.2010, в рамках наукової теми "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів", № держреєстрації 0115U000556, і в рамках проекту "Spectral analysis of singularly perturbed self-adjoint operators DFG Project 436 UKR 113/85/0-1.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є характеризація деяких спектральних властивостей симетричних операторів у гільбертовому просторі, а також симетричних диференціальних операторів та систем. Для цього необхідно вирішити такі задачі: удосконалити теорію граничних трійок та відповідних функцій Вейля з метою її застосування до симетричних операторів з нерівними індексами дефекту; за допомоги цієї теорії описати спектральні та геометричні властивості різних класів розширень симетричних лінійних відношень (операторів); дослідити спектр самоспряжених розширень симетричного оператора з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності; описати в термінах граничних умов різні класи розширень мінімального оператора (лінійного відношення), породженого симетричним сингулярним диференціальним оператором або системою; описати спектральні та псевдоспектральні функції диференціальних операторів та систем за допомогою граничного параметра; охарактеризувати спектральні функції систем на осі в термінах об'єктів, пов'язаних із звуженням цієї системи на півосі; поширити поняття функції Вейля на диференціальні оператори непарного порядку та описати за її допомогою спектральні функції таких операторів.

Методи дослідження. Доведення результатів роботи засновано на методах теорії розширень симетричних операторів у гільбертовому просторі та спектральної теорії граничних задач для диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) Теорія граничних трійок та відповідних функцій Вейля (Q-функцій) поширена на симетричний оператор A з нерівними індексами дефекту. Описані розширення таких операторів в термінах абстрактних граничних умов.
2) Отримана параметризація та досліджені деякі геометричні властивості самоспряжених розширень оператора A з виходом в ширший простір.
3) Охарактеризовані спектральні властивості самоспряжених розширень симетричного абстрактного та диференціального операторів з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності.
4) У компактному вигляді описані граничні умови різних класів для сингулярних симетричних диференціальних систем та диференціальних операторів. Зокрема, знайдено критерій існування та отримано компактний опис розділених самоспряжених граничних умов.
5) Запропоновано природну конструкцію псевдоспектральної функції для сингулярної симетричної системи. Для системи на півосі отримано параметризацію всіх таких функцій в термінах граничних умов.
6) Теорію Вейля-Тітчмарша поширено на негамільтонові системи на півосі. Отримано параметризацію вкорочених псевдоспектральних функцій системи на півосі в термінах граничних умов.

7) Доведено аналог формули Тітчмарша для характеристичної матриці системи на осі. Отримано параметризацію всіх ортогональних спектральних функцій такої системи, що відповідають розділеним самоспряженим граничним умовам.
8) За допомогою перелічених результатів досліджено деякі спектральні властивості диференціальних операторів довільного порядку з матричними коефіцієнтами. Зокрема, теорію Вейля-Тітчмарша поширено на оператори парного порядку з нерівними індексами дефекту та непарного порядку як з рівними, так і нерівними індексами дефекту.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані при вивчені граничних задач, що виникають в математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. На захист виносяться лише ті результати сумісних робіт, які отримані здобувачем особисто. У сумісних роботах з М.М. Маламудом здобувачу належать такі основні результати: в роботі [1] – твердження 2 та 6, теореми 2 та 4; в роботі [3] – твердження 3.12 , 5.2 та 6.7, теореми 5.5 та 6.2, наслідок 5.7; в роботі [4] – твердження 7, теореми 10 та 12; в роботі [5] – теореми 1 та 3; в роботі [7] – теореми 2 та 4. Внесок співавторів в результати робіт [6], [15], [20] є рівносильним. В роботі [21] здобувачеві належать у рівних долях із співавторами результати розділу 3.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на таких конференціях та семінарах:

International Conference on Functional Analysis and its Applications, Lviv, 2002.

Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 2006.

International Conference "Modern Analysis and Applications (MAA 2007)" dedicated to the centenary of Mark Krein, Odessa, 2007.

International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology", Ivano-Frankivsk, 2009.

Український математичний конгрес, Київ, 2009.

21-th International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 2010, Berlin, Germany, 2010.

Міжнародна конференція з сучасного аналізу, Донецк, 2011.

International Conference" Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012)", Kharkiv, 2012.

International Conference" Spectral Theory and Differential Operators", Graz, Austria, 2012.

The Third Najman Conference on Spectral Problems for Operators and Matrices, Biograd, Croatia, 2013.

International Conference "Spectral Theory and Differential Equations" dedicated to the centenary of B.M. Levitan, Moscow, 2014.

International Conference IWOTA 2014, Amsterdam, Netherlands, 2014.

Семінар відділу рівнянь з частинними похідними ІПММ НАН України, керівник д. ф.-м. н., професор А.Є. Шишков, 2012, 2013.

Семінар з функціонального аналізу ДонНУ, керівник д. ф.-м. н. М.М. Маламуд.

Київський семінар з функціонального аналізу, Інститут математики НАН України, керівники акад. НАН України Ю.М. Березанський, чл.-кор. НАН України М.Л. Горбачук, чл.-кор. НАН України Ю.С. Самойленко, 2014.

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковано в 27 статтях [1 - 27] в наукових фахових журналах та в 12 тезах конференцій [28 – 39]. Серед цих робіт 14 статей опубліковано в журналах, включених до міжнародних наукометричних баз.

Структура роботи. Дисертація складається зі вступу, восьми розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 116 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 267 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми і коротко викладено нові результати, отримані в дисертації.

Розділ 1 містить огляд літератури з теорії розширень симетричних операторів і спектральної теорії диференціальних операторів та систем.

Розділ 2 присвячено дослідженню розширень симетричних операторів з довільними індексами дефекту за допомоги граничних трійок та відповідних функцій Вейля.

Позначення: $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ – сепарабельні гільбертові простори, $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ – множина обмежених лінійних операторів з $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $[\mathcal{H}] := [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, $P_{\mathcal{H}}$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathcal{H}}$ на підпростір $\mathcal{H} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$, $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ($\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$) – множина замкнених лінійних відношень з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ (в $\mathcal{H}$). Для відношення $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ покладемо: $\text{dom}\, T$, $\text{ran}\, T$, $\ker T$ – відповідно область визначення, образ та ядро T; $\text{mul}\, T = \{f' \in \mathcal{H}_1 : \{0, f'\} \in T\} \subset \mathcal{H}_1$ – многозначна частина T; T^{-1}, T^* – відповідно зворотне та спряжене до T відношення. Замкнений лінійний оператор T з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ ототожнюється з його графіком $\text{gr}\, T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ називається симетричним (самоспряженим), якщо $A \subset A^*$ (відп. $A = A^*$). Дефектні підпростори та індекси дефекту відношення $A \subset A^*$ визначаються рівностями $\mathfrak{N}_\lambda(A) = \ker (A^* - \lambda)$ і $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_\lambda(A),\ \lambda \in \mathbb{C}_\pm$.

Надалі $\mathcal{H}_0$ - гільбертів простір, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$, $P_1 \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ та $P_2 \in\ [\mathcal{H}_0]$ – ортопроектори в $\mathcal{H}_0$ відповідно на $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_2$. За допомоги рівності

$$\theta = \{C_0, C_1\} := \{\{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : C_0 h_0 + C_1 h_1 = 0\} \tag{1}$$

кожне відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ототожнюється з парою операторів $C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}]$, $j \in \{0, 1\}$, що діють в допоміжний гільбертів простір $\mathcal{K}$ (свій для кожної пари) і задовольняють умову $\text{ran}\, (C_0, C_1) = \mathcal{K}$. В роботі введено спеціальні класи $Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ і $Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ відношень (операторних пар) $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, які характеризуються в термінах операторів C_j. В роботі також введено клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ голоморфних функцій $\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, таких що $-\tau(\lambda) \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1),\ \ \lambda \in \mathbb{C}_+$. За допомоги рівності

$$\tau = \tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2}$$

функція $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ототожнюється з парою голоморфних оператор-функцій $C_j(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}],\ j \in \{0, 1\}$, таких що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$2\,\text{Im}(C_1(\lambda) P_1 C_0^*(\lambda)) + C_0(\lambda) P_2 C_0^*(\lambda) \geq 0 \ \text{ і } \ (C_0(\lambda) - i C_1(\lambda) P_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0].$$

Якщо $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$, то класи Dis, Ac, Sym та $Self$ збігаються з відомими класами максимальних дисипативних, максимальних акумулятивних, максимальних симетричних і самоспряжених відношень в $\mathcal{H}$ відповідно. Крім того, клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ збігається з відомим класом $\widetilde{R}(\mathcal{H})$ неванлинівських $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$-значних функцій. Підкласами класу $\widetilde{R}(\mathcal{H})$ є множини $R[\mathcal{H}]$ голоморфних оператор-функцій $\Phi(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}]$, таких що $\mathrm{Im}\Phi(\lambda) \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$, і $R_u[\mathcal{H}] = \{\Phi(\cdot) \in R[\mathcal{H}] : (\mathrm{Im}\Phi(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{H}],\ \lambda \in \mathbb{C}_+\}$.

У підрозділі 2.2 за допомоги граничних трійок досліджуються розширення симетричних відношень A з довільними індексами дефекту.

Означення 2.23. Сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в якій $\Gamma_j : A^* \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$, – лінійні оператори, називається граничною трійкою для A^*, якщо $\mathrm{ran}\,(\Gamma_0, \Gamma_1)^\top = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ і виконується абстрактна тотожність Гріна

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}) + i(P_2 \Gamma_0 \widehat{f}, P_2 \Gamma_0 \widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\},\ \widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*$$

Твердження 2.25. *Якщо* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^**, то*

$$\dim \mathcal{H}_1 = n_-(A) \leq n_+(A) = \dim \mathcal{H}_0 \tag{3}$$

і рівність $A_0 = \ker \Gamma_0 = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_0 \widehat{f} = 0\}$*задає максимальне симетричне відношення* $A_0 \supset A$ *з* $n_-(A_0) = 0$*. Навпаки, для кожного відношення* $A \subset A^*$ *з* $n_-(A) \leq n_+(A)$ *існує гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* A^**.*

Твердження 2.24. *Якщо* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^**, то рівність (абстрактні граничні умови)*

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta = \{\widehat{f} \in A^* : C_0 \Gamma_0 \widehat{f} + C_1 \Gamma_1 \widehat{f} = 0\}.$$

задає біективну відповідність між операторними парами $\theta = \{C_0, C_1\}$*, що належать до класу* $Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$*,* $Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$*,* $Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *або* $Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$*, і відповідно максимальними дисипативними, максимальними акумулятивними, максимальним симетричними або самоспряженими розширеннями* $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta \supset A$*.*

У підрозділі 2.3 вводяться та вивчаються γ-поля та функції Вейля граничної трійки. Нехай $A \subset A^*$ і $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^*. Для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ покладемо $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \{\{f, \lambda f\} : f \in \mathfrak{N}_\lambda(A)\}$. Тоді $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) \subset A^*$ і рівності

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1},\ \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \quad \gamma_-(\lambda) = \pi_1(P_1 \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1},\ \ \lambda \in \mathbb{C}_-$$

$$\Gamma_1 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = M_+(\lambda) \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де π_1 – ортопроектор в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H} \oplus \{0\}$, коректно задають оператор-функції $\gamma_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]$, $\gamma_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$ і $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$. Оператор-функції $\gamma_\pm(\cdot)$ називаються γ-полями, а $M_+(\cdot)$ – функцією Вейля граничної трійки Π.

Твердження 2.33. 1)*Функції* $\gamma_\pm(\cdot)$ *є голоморфними і справедлива тотожність*

$$\gamma_+(z) = \gamma_+(\lambda) + (z - \lambda)(A_0 - z)^{-1} \gamma_+(\lambda), \quad z, \lambda \in \mathbb{C}_+$$

2) *Припустимо, що блочним зображенням функції Вейля* $M_+(\lambda)$ *є*

$$M_+(\lambda) = (M(\lambda), N_+(\lambda)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \tag{4}$$

і $\mathcal{M}(\cdot):\mathbb{C}_+\to\mathcal{H}_0$ *– оператор-функція, визначена рівністю*

$$\mathcal{M}(\lambda)=\begin{pmatrix} M(\lambda) & N_+(\lambda)\\ 0 & \frac{i}{2}I_{\mathcal{H}_2}\end{pmatrix}:\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{5}$$

Тоді $\mathcal{M}\in R_u[\mathcal{H}]$, $M(\cdot)\in R_u[\mathcal{H}_1]$ *і справедлива тотожність*

$$\mathcal{M}(z)-\mathcal{M}^*(\lambda)=(z-\overline{\lambda})\,\gamma_+^*(\lambda)\gamma_+(z),\quad z,\lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Теорема 2.49. *Нехай* A *– симетричний оператор в* $\mathfrak{H}$, $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $M_+(\cdot)$ *– її функція Вейля і* $M(\cdot)$ *та* $\mathcal{M}(\cdot)$ *– оператор функції, визначені в* (4), (5)*. За цих умов* A *є щільно визначеним тоді й тільки тоді, коли*

$$s-\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}M(iy)=0 \ \text{ й } \lim_{y\to+\infty}y\,\mathrm{Im}(\mathcal{M}(iy)h_0,h_0)=+\infty,\quad 0\neq h_0\in\mathcal{H}_0.$$

Підрозділ 2.4 є центральним у розділі 2. Тут у різній формі параметризуються розширення $\widetilde{A}=\widetilde{A}^*$ відношення $A\subset A^*$ з виходом у ширший простір і характеризуються деякі їх властивості. Нехай $\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ – множина усіх відношень $\widetilde{A}=\widetilde{A}^*\in\widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$, таких що $\widetilde{\mathfrak{H}}\supset\mathfrak{H}$, $\widetilde{A}\supset A$ і $\overline{\mathrm{span}}\{\mathfrak{H},(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\mathfrak{H}:\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}=\widetilde{\mathfrak{H}}$; $\mathrm{Self}(A)$ – множина усіх розширень $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)\cap\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ (канонічні розширення); $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ ($\mathrm{Self}_0(A)$) – множина всіх $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ (відп. $\widetilde{A}\in\mathrm{Self}(A)$), таких що $\mathrm{mul}\,\widetilde{A}=\mathrm{mul}\,A$. Якщо A є оператором, то $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ є множиною розширень $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, які є операторами. Розширення $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ однозначно визначається узагальненою резольвентою

$$R(\lambda)=P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\restriction\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \tag{6}$$

Якщо $\widetilde{A}\in\mathrm{Self}(A)$, то (6) задає канонічну резольвенту $R(\lambda)=(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Теорема 2.42. *Нехай* $n_-(A)\leq n_+(A)\leq\infty$, $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^* *і* $\gamma_\pm(\cdot)$ *та* $M_+(\cdot)$ *–* γ*-поля та функція Вейля цієї трійки. Тоді:*

(1) *Рівність (формула для узагальнених резольвент)*

$$R_\tau(\lambda)=(A_0-\lambda)^{-1}+\gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)\gamma_-^*(\overline{\lambda}),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{7}$$

задає бієктивну відповідність $R(\lambda)=R_\tau(\lambda)$ *між операторними парами* $\tau\in\widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *вигляду* (2) *і узагальненими резольвентами* $R(\lambda)$ *відношення* A*. Крім того,* $R_\tau(\lambda)$ *є канонічною резольвентою тоді й тільки толі, коли* $\tau=\{C_0,C_1\}\in Self(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$*.*

(2) *Формула А.В. Штрауса*

$$R(\lambda)=(\widetilde{A}(\lambda)-\lambda)^{-1},\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \tag{8}$$

задає бієктивну відповідність між узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ *відношення* A *та функціями* $\widetilde{A}(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$, *такими що* $-\widetilde{A}(\cdot)\in\widetilde{R}(\mathfrak{H})$ *і* $A\subset\widetilde{A}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*. При цьому зв'язок між* (7) *та* (8) *задається рівністю*

$$\widetilde{A}(\lambda)=\widetilde{A}_{-\tau(\lambda)}=\{\widehat{f}\in A^*:C_0(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}-C_1(\lambda)\Gamma_1\widehat{f}=0\},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,$$

де $\tau=\{C_0(\lambda),C_1(\lambda)\}\in\widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *– та ж сама операторна пара, що і в* (7)*.*

(3) *Якщо* $\tau\in\widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$*-пара* (2) *і* $R_\tau(\lambda)$*-узагальнена резольвента* (7)*, то для кожного* $g\in\mathfrak{H}$ *й* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *елемент* $f=R_\tau(\lambda)g$ *є розв'язком абстрактної граничної задачі*

$$\{f,\lambda f+g\}\in A^* \tag{9}$$

$$C_0(\lambda)\Gamma_0\{f,\lambda f+g\}-C_1(\lambda)\Gamma_1\{f,\lambda f+g\}=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{10}$$

Згідно з теоремою 2.42 гранична задача (9), (10) задає параметризації $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ та $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau$ узагальнених резольвент $R(\lambda)$ і розширень $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ за допомоги абстрактного граничного параметра $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. В термінах параметра τ розширення $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ відношення $A \subset A^*$ описуються у такій теоремі.

Теорема 2.53. *Якщо за умов теореми 2.42* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – *операторна пара* (2), *то* $\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ *тоді й тільки тоді, коли виконуються рівності*

$$s - \lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_1(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_1(iy) = 0$$

$$s - \lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_+(iy)(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_0(iy) \restriction \mathcal{H}_1 = 0.$$

Наведені вище результати поширюють на випадок $n_+(A) \neq n_-(A)$ результати робіт М.Г. Крейна та Г. Лангера; Г. Лангера та Б. Тексторіуса; А.Н. Кочубея; В.М. Брука; В.О. Деркача та М.М. Маламуда. Зокрема, формула (7) є узагальненням класичної формули М.Г. Крейна для узагальнених резольвент.

У підрозділі 2.5 розглядаються граничні пари для A^* та відповідні функції Вейля, які є корисними узагальненнями граничної трійки та її функції Вейля. Граничною парою для відношення $A \subset A^*$ називається сукупність $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$, в якій $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – гільбертові простори і $\Gamma : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ – лінійне відношення, таке що $\overline{\mathrm{dom}\,\Gamma} = A^*$, вірною є абстрактна тотожність Гріна

$$(f', g) - (f, g') = (h_1, x_0) - (h_0, x_1) + i(P_2 h_0, P_2 x_0),$$

де $\{\binom{f}{f'}, \binom{h_0}{h_1}\}$, $\{\binom{g}{g'}, \binom{x_0}{x_1}\} \in \Gamma$, і виконана певна умова максимальності. З граничною парою $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ пов'язується функція Вейля $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, визначена рівністю $M_+(\lambda) = \Gamma \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. У роботі найбільша увага приділяється граничним парам з $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$, оскільки саме вони використовуються для дослідження симетричних систем. Якщо для такої пари $\mathrm{mul}\,\Gamma (\in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$ є оператором, то $M_+(\lambda)$ є голоморфною оператор-функцією із значеннями в $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$. Крім того, для граничних пар з $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$ справедливі рівності (пор. з (3))

$$\dim \mathcal{H}_0 = n_+(A) + \dim(\mathrm{mul}\,\Gamma), \qquad \dim \mathcal{H}_1 = n_-(A) + \dim(\mathrm{mul}\,\Gamma).$$

У підрозділі 2.6 досліджуються спектральні властивості самоспряжених розширень симетричних операторів A з дійсними дефектними підпросторами $\mathfrak{N}_\lambda(A)$ максимальної вимірності. Припустимо, що A – простий щільно визначений симетричний оператор в $\mathfrak{H}$ з $n_+(A) = n_-(A) := d < \infty$ і $\widehat{\rho}(A)$ – його поле регулярності. Тоді $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) \leq d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, і $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) = d$, $\lambda \in \widehat{\rho}(A)$. Крім того, якщо $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \widehat{\rho}(A)$, то для кожного самоспряженого розширення $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$ його спектр в інтервалі $\mathcal{I}$ є дискретним. Цікавим уявляється питання, чи є це твердження вірним для більш слабкої умови $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) = d$, $\lambda \in \mathcal{I} = (\alpha, \beta)$. Виявляється, що відповідь є негативною, хоча спектр розширення $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$ є достатньо "малим"в $\mathcal{I}$. Точніше, має місце

Теорема 2.72. *Нехай* $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$ *і* $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) = d$, $\lambda \in \mathcal{I}$. *Якщо* $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$, $\mathrm{spec}(\widetilde{A})$ – *спектр оператора* $\widetilde{A}$ *і* $\mathrm{spec}_c(\widetilde{A})$ – *неперервний спектр* $\widetilde{A}$, *то* $\mathrm{spec}_c(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = \emptyset$ *і множина* $\mathrm{spec}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ *є ніде нещільною в* $\mathcal{I}$.

Нехай $\operatorname{spec}_d(\widetilde{A})$ і $\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) = \mathbb{R}\backslash\operatorname{spec}_d(\widetilde{A})$ – відповідно дискретний та істотний спектри оператора $\widetilde{A}$. Як відомо, $\operatorname{spec}_c(\widetilde{A}) \subset \operatorname{spec}_e(\widetilde{A})$.

Теорема 2.73. *Нехай* $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ $(-\infty \le \alpha < \beta \le \infty)$ *і* $X \subset \mathcal{I}$ *– замкнена ніде нещільна множина в* $\mathcal{I}$. *Тоді для кожного* $d \in \mathbb{N}$ *існує гільбертів простір* $\mathfrak{H}$ *і простий щільно визначений симетричний оператор* A *в* $\mathfrak{H}$, *такі що* $n_+(A) = n_-(A) = d$, $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) = d$, $\lambda \in \mathcal{I}$, *і* $\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = X$ *для кожного розширення* $\widetilde{A} \in \operatorname{Self}(A)$.

З теореми 2.73 випливає, що співвідношення $\operatorname{spec}_c(\widetilde{A}) \cap I = \emptyset$ в твердженні теореми 2.72 не може бути посилено до $\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) \cap I = \emptyset$.

У **розділі 3** вводиться до розгляду основний об'єкт роботи – симетрична диференціальна система. Для такої системи будуються спеціальні граничні трійки та пари, за допомоги яких описуються граничні умови різних класів.

Нехай H та $\widehat{H}$ – унітарні (скінченновимірні гільбертові) простори,

$$\mathbb{H} = H \oplus \widehat{H} \oplus H, \qquad H_0 = H \oplus \widehat{H} \tag{11}$$

і $\nu = \dim H$, $\widehat{\nu} = \dim \widehat{H}$, $n = \dim \mathbb{H} = 2\nu + \widehat{\nu}$. Симетрична диференціальна система на проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$, $-\infty \le a < b \le \infty$, має вигляд

$$Jy' - B(t)y = \lambda \Delta(t) y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

де $B(t) = B^*(t)$ і $\Delta(t) \ge 0$ – $[\mathbb{H}]$-значні функції, інтегровні на кожному відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$, і

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_H \\ 0 & i\delta I_{\widehat{H}} & 0 \\ I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{13}$$

з $\delta \in \{-1, 1\}$. Система (12) називається гамільтоновою, якщо $\widehat{H} = \{0\}$ і, отже,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_H \\ I_H & 0 \end{pmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H.$$

Система (12) називається канонічною, якщо $B(t) \equiv 0$. Канонічна система має вигляд

$$Jy' = \lambda \Delta(t) y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Кінцева точка a (відп. b) проміжку $\mathcal{I}$ називається регулярною, якщо $a > -\infty$ і $a \in \mathcal{I}$ (відп. $b < \infty$ і $b \in \mathcal{I}$). Система (12) називається регулярною, якщо точки a та b регулярні. Кінцева точка (система) називається сингулярною, якщо вона не є регулярною.

Нехай $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ – множина функцій $f : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} (\Delta(t) f(t), f(t))\, dt < \infty$. Рівність $(f, g)_\Delta = \int\limits_{\mathcal{I}} (\Delta(t) f(t), g(t))\, dt$ задає квазіскалярний добуток в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Надалі покладаємо $\mathfrak{H} := L^2_\Delta(\mathcal{I})$ – гільбертів простір класів еквівалентності в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ (фактор-простір), π_Δ – фактор-відображення з $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ на $\mathfrak{H}$. Для унітарного простору $\mathcal{K}$ покладемо $\mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ – множина функцій $F : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$, таких що $F(\cdot)h \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, $h \in \mathcal{K}$.

Нехай $\mathcal{N}_\lambda$ – лінійний простір усіх розв'язків системи (12), що належать до $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Для операторного розв'язку $Y(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ системи (12) рівність $(Y(\lambda)h)(t) = Y(t, \lambda)h$, $h \in \mathcal{K}$, задає лінійний оператор $Y(\lambda) : \mathcal{K} \to \mathcal{N}_\lambda$. Числа $N_\pm := \dim \mathcal{N}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$, називаються формальними індексами дефекту системи. В роботі без обмеження загальності розглядаються лише системи (12) з $N_+ \geq N_-$ (якщо ця умова не виконана, то достатньо перейти до протилежної системи).

Нуль-многовидом системи (12) називається лінійний простір $\mathcal{N}$ її розв'язків $y(\cdot)$, таких що $\Delta(t)y(t) = 0$ (м.в. на $\mathcal{I}$). Система називається визначеною, якщо $\mathcal{N} = \{0\}$.

Система (12) породжує мінімальне відношення $\mathcal{T}_{min}$ та максимальне відношення $\mathcal{T}_{max}$ в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, а також мінімальне відношення $T_{min} = (\pi_\Delta \oplus \pi_\Delta)\mathcal{T}_{min}$ та максимальне відношення $T_{max} = (\pi_\Delta \oplus \pi_\Delta)\mathcal{T}_{max}$ в $\mathfrak{H}$. Виявляється, що T_{min} є замкненим симетричним відношенням в $\mathfrak{H}$ з (можливо нерівними) індексами дефекту $n_\pm(T_{min}) = N_\pm - \dim \mathcal{N} < \infty$ і $T_{max} = T^*_{min}$. Крім того, для кожної пари $y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ існують границі

$$[y,z]_a := \lim\nolimits_{t\to a}(Jy(t), z(t)), \qquad [y,z]_b := \lim\nolimits_{t\to b}(Jy(t), z(t)).$$

Нехай $c \in (a,b)$, $N_{l\pm}$ та $N_{r\pm}$ – формальні індекси дефекту звуження системи (12) відповідно на $\mathcal{I}_l := \langle a, c]$ та $\mathcal{I}_r := [c, b\rangle$,

$$\delta_a := \operatorname{sign}(N_{l-} - N_{l+} + \delta\widehat{\nu}), \qquad \delta_b := \operatorname{sign}(N_{r+} - N_{r-} + \delta\widehat{\nu}) \tag{15}$$

Означення 3.20. Сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\mathbb{H}_a$ та $\mathbb{H}_b$ – унітарні простори і Γ_a, Γ_b – сюр'єктивні лінійні оператори вигляду

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{16}$$

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \widehat{\Gamma}_a, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a \tag{17}$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \tag{18}$$

називається граничним комплексом для системи (12), якщо для всіх $y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$

$$[y,z]_a = (J_a\Gamma_a y, \Gamma_a z)_{\mathbb{H}_a}, \qquad [y,z]_b = (J_b\Gamma_b y, \Gamma_b z)_{\mathbb{H}_b}, \tag{19}$$

де $J_a \in [\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a]$ та $J_b \in [\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b]$ – оператори з блочними зображеннями

$$J_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{\mathcal{H}_a} \\ 0 & i\delta_a I_{\widehat{\mathcal{H}}_a} & 0 \\ I_{\mathcal{H}_a} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{\mathcal{H}_b} \\ 0 & i\delta_b I_{\widehat{\mathcal{H}}_b} & 0 \\ I_{\mathcal{H}_b} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

У випадку регулярної кінцевої точки a (відп. b) можна покласти $\Gamma_a y = y(a)$ (відп. $\Gamma_b y = y(b)$). Якщо ж точка a (відп. b) є сингулярною, то вектор $\Gamma_a y$ ($\Gamma_b y$) є сингулярним граничним значенням функції $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ в точці a (відп. b).

Для визначеної системи за допомоги граничного комплексу будуються простори $\mathcal{H}_j$ та оператори $\Gamma'_j : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, такі що сукупність $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ з

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_0 y, \qquad \Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_1 y, \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}, \tag{21}$$

є граничною трійкою для T_{max}. В (21) $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ – (єдина) функція, така що $\pi_\Delta y = \widetilde{y}$ і $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}$ для кожної функції $f \in \widetilde{f}$.

Системи з регулярною кінцевою точкою a, для яких $N_+ \geq N_-$, вичерпуються такими випадкам а1 – а3:

Випадок а1. $\delta = 1$ і $N_+ \geq N_-$. Випадок а2. $\delta = -1$ і $N_+ - N_- \geq \widehat{\nu}$.

Випадок а3. $\delta = -1$ і $0 \leq N_+ - N_- \leq \widehat{\nu}$

В роботі детально розглядаються випадки а1 та а2. Нехай Γ_b – сюр'єктивний оператор (18), що задовольняє другу тотожність в (19). Для кожного з випадків а1 та а2 будується унітарний простір $\widetilde{\mathcal{H}}_b \supset \mathcal{H}_b$, такий що оператор Γ_b допускає зображення

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \widehat{\Gamma}'_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{22}$$

у випадку a1 та

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{23}$$

у випадку a2; крім того, $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b \Leftrightarrow N_+ = N_-$. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ з оператором Γ_b вигляду (22) або (23) називається b–граничним комплексом.

Згідно з (11) функція $y(\cdot) \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ допускає зображення

$$y(t) = y_0(t) \oplus \widehat{y}(t) \oplus y_1(t) (\in H \oplus \widehat{H} \oplus H), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{24}$$

Надалі покладаємо $\Gamma_{ja} y = y_j(a),\ j \in \{0,1\}$, і $\widehat{\Gamma}_a y = \widehat{y}(a),\ y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.

У випадку a1 покладемо

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b, \quad \mathcal{H}_1 = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{25}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b) y \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y (\in H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \tag{26}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}'_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y)(\in H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{27}$$

У випадку a2 покладемо

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b, \quad \mathcal{H}_1 = H \oplus \mathcal{H}_b \tag{28}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y (\in H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \tag{29}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y)(\in H \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{30}$$

Теорема 3.40. *Нехай кінцева точка a є регулярною для системи* (12) *і має місце один з випадків a1 або a2. Тоді лінійне відношення $\Gamma : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, визначене рівністю*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma'_0 y \\ \Gamma'_1 y \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{31}$$

утворює граничну пару $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ для T_{max}.

Означення 3.41. Розділеною граничною трійкою (парою) для T_{max} називається гранична трійка (пара), визначена рівністю (21) (відп. (31)).

Існування нетривіальної многозначної частини $\operatorname{mul}\Gamma$ у відношення Γ розділеної граничної пари $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ спричинено наявністю нетривіального нуль-многовиду $\mathcal{N}$ (тобто невизначеністю системи), що випливає з рівностей

$$\operatorname{mul}\Gamma = \{\{\Gamma'_0 y, \Gamma'_1 y\} : y \in \mathcal{N}\}, \qquad \dim(\operatorname{mul}\Gamma) = \dim \mathcal{N}.$$

Для визначеної системи розділена гранична пара стає розділеною граничною трійкою.

У підрозділі 3.6 описуються граничні умови різних класів для симетричних систем.

Нехай $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (17), (18), $J_a,\ J_b$ – оператори (20) і $\{C_a, C_b; \mathcal{K}\}$ – сукупність, що складається з унітарного простору $\mathcal{K}$ та операторів $C_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}],\ C_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$, таких що $\operatorname{ran}(C_a, C_b) = \mathcal{K}$. Така сукупність відноситься до класу $\mathcal{S}_+,\ \mathcal{S}_-$ або $\mathcal{S}_0$, якщо відповідно

$$i(C_a J_a C_a^* - C_b J_b C_b^*) \geq 0, \quad i(C_a J_a C_a^* - C_b J_b C_b^*) \leq 0 \ \text{ або } \ C_a J_a C_a^* = C_b J_b C_b^*.$$

Твердження 3.62. *Нехай система* (12) *є визначеною,* $N_+ \geq N_-$ *і* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – *граничний комплекс* (17), (18)*. Тоді рівність (граничні умови)*

$$\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : C_a\Gamma_a y + C_b\Gamma_b y = 0\} \tag{32}$$

задає бієктивну відповідність між максимальними дисипативними (акумулятивними) розширеннями $\widetilde{T} \supset T_{min}$ *і сукупностями* $\{C_a, C_b; \mathcal{K}\} \in \mathcal{S}_-$ *з* $\dim \mathcal{K} = N_-$ *(відп.* $\{C_a, C_b; \mathcal{K}\} \in \mathcal{S}_+$ *з* $\dim \mathcal{K} = N_+$*).*

Якщо $N_+ = N_- =: d$*, то рівність* (32) *задає бієктивну відповідність між розширеннями* $\widetilde{T} = \widetilde{T}^* \supset T_{min}$ *і сукупностями* $\{C_a, C_b; \mathcal{K}\} \in \mathcal{S}_0$ *з* $\dim \mathcal{K} = d$*.*

Критерій існування та параметризація розділених самоспряжених граничних умов для симетричних систем даються у такій теоремі

Теорема 3.66. *Нехай система* (12) *є визначеною. За цієї умови розділені самоспряжені граничні умови для системи існують тоді й тільки тоді, коли*

$$N_{l+} - N_{l-} = N_{r-} - N_{r+} = \delta\widehat{\nu}. \tag{33}$$

Якщо кінцева точка a *або* b *є регулярною, то умова* (33) *рівносильна тому, що система є гамільтоновою і* $N_+ = N_- (\Leftrightarrow n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}))$*.*

Припустимо, далі, що (33) *виконано. Тоді:*

(1) *Граничний комплекс* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ (16) - (18) *має вигляд*

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{34}$$

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \Gamma_{1a})^\top : \mathrm{dom}\,\mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a, \;\; \Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \mathrm{dom}\,\mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b. \tag{35}$$

(2) *Якщо* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – *граничний комплекс* (34), (35)*, то загальним виглядом розділених самоспряжених граничних умов є*

$$\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : N_{a0}\Gamma_{0a}y + N_{a1}\Gamma_{1a}y = 0, \; N_{b0}\Gamma_{0b}y + N_{b1}\Gamma_{1b}y = 0\}, \tag{36}$$

де $N_{aj} \in [\mathcal{H}_a, \mathcal{K}_a]$ *та* $N_{bj} \in [\mathcal{H}_b, \mathcal{K}_b]$, $j \in \{0, 1\}$, – *оператори, що утворюють самоспряжені операторні пари* $\theta_a = \{N_{a0}, N_{a1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_a)$ *та* $\theta_b = \{N_{b0}, N_{b1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_b)$*.*

Внаслідок теореми 3.66 для негамільтонової системи розділені самоспряжені граничні умови можуть існувати лише у випадку, коли її звуження на проміжки $\mathcal{I}_l$ та $\mathcal{I}_r$ мають нерівні індекси дефекту $N_{l\pm}$ та $N_{r\pm}$. Цей факт підтверджує доцільність розгляду систем та диференціальних виразів з нерівними індексами дефекту.

У **розділі 4** в термінах граничних умов параметризуються узагальнені резольвенти та характеристичні матриці симетричних систем. Нехай система (12) є визначеною, $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (16) - (18) і $\mathcal{H}_j$ та Γ_j', $j \in \{0, 1\}$, – простори і оператори, за допомоги яких будується розділена гранична трійка (21). Надалі граничним параметром називається операторна пара $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вигляду (2).

У бієктивній відповідності з граничними параметрами τ знаходиться множина $\mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$ пар $\widetilde{\tau} = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\}$, де $C_a(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}]$ та $C_b(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$ – голоморфні оператор-функції ($\mathcal{K}$-унітарний простір з $\dim \mathcal{K} = N_+$), такі що

$$\mathrm{ran}\,(C_a(\lambda), C_b(\lambda)) = \mathcal{K}, \quad i(C_a(\lambda)J_aC_a^*(\lambda) - C_b(\lambda)J_bC_b^*(\lambda)) \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Нехай τ – граничний параметр (2) і $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Розглянемо граничну задачу

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{37}$$

$$C_0(\lambda)\Gamma'_0 y - C_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{38}$$

Якщо $\widetilde{\tau} = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$ – пара, що відповідає τ, то гранична умова (38) еквівалентна умові

$$C_a(\lambda)\Gamma_a y + C_b(\lambda)\Gamma_b y = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{39}$$

Теорема 4.2. *Нехай система* (12) *є визначеною і* $N_+ \geq N_-$. *Тоді гранична задача* (37), (38) *задає бієктивну відповідність* $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ *між граничними параметрами* τ *і узагальненими резольвентами* $R(\lambda)$ *відношення* T_{min}. *Ця відповідність задається рівністю* $R_\tau(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta y$, $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, *де* y – *єдиний розв'язок задачі* (37), (38) *з* $f(\cdot) \in \widetilde{f}$. *Аналогічне твердження є вірним для граничної задачі* (37), (39) *і операторних пар* $\widetilde{\tau} = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$.

Нехай $c \in \mathcal{I}$ й $Y_c(\cdot, \lambda)$ –$[\mathbb{H}]$-значний операторний розв'язок системи (12) з $Y_c(c, \lambda) = I_{\mathbb{H}}$. Як відомо, узагальнена резольвента $R(\lambda)$ відношення T_{min} допускає зображення

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_c(x, \lambda)(\Omega^c(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t - x)J)Y_c^*(t, \overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\, dt \right), \ \ \widetilde{f} \in \mathfrak{H}, \tag{40}$$

де $f \in \widetilde{f}$ і $\Omega^c(\cdot) \in R[\mathbb{H}]$ – характеристична матриця (х.м.) системи, що відповідає $R(\lambda)$.

Зауваження 4.8. З теореми 4.2 випливає, що гранична задача (37), (38) задає параметризації $\widetilde{T} = \widetilde{T}_\tau$ та $\Omega^c(\cdot) = \Omega^c_\tau(\cdot)$ розширень $\widetilde{T} \in \widetilde{\text{Self}}(T_{min})$ та х.м. $\Omega^c(\cdot)$ за допомоги граничного параметра τ (тут $\widetilde{T}_\tau$ – розширення T_{min}, що породжує $R_\tau(\cdot)$).

Твердження 4.9. *Припустимо, що:* 1) *система* (12) *з регулярною кінцевою точкою* a *є визначеною,* $\delta = 1$ *і* $N_+ \geq N_-$; 2) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-*граничний комплекс* (22). *Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина трійка операторних розв'язків* $\xi_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H}, \mathbb{H}]$ *та* $u(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathbb{H}]$ *системи* (12), *що задовольняють граничні умови*

$$\begin{gathered} \Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_H, \quad \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b\xi_0(\lambda), \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0 \\ \Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \quad i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b)\widehat{\xi}_0(\lambda) = I_{\widehat{H}}, \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0 \\ \Gamma_{1a}u(\lambda) = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a u(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b u(\lambda), \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}u(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} \end{gathered} \tag{41}$$

Крім того, функція Вейля $M_+(\cdot)$ *розділеної граничної трійки задається рівностями*

$$M_+(\lambda) = (M_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^3 : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{42}$$

$$M_{11}(\lambda) = \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda), \quad M_{12}(\lambda) = \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_{13}(\lambda) = \Gamma_{0a}u(\lambda) \tag{43}$$

$$M_{21}(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda), \quad M_{22}(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_0(\lambda) + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}}, \quad M_{23}(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a u(\lambda) \tag{44}$$

$$M_{31}(\lambda) = -\Gamma_{1b}\xi_0(\lambda), \quad M_{32}(\lambda) = -\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_{33}(\lambda) = -\Gamma_{1b}u(\lambda) \tag{45}$$

В явному вигляді параметризація $\Omega^a(\cdot) = \Omega^a_\tau(\cdot)$ усіх х.м. $\Omega^a(\cdot)$ для системи з регулярною кінцевою точкою a, згадана у зауваженні 4.8, подана у такій теоремі.

Теорема 4.16. *Нехай за умов твердження 4.9* $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (42) - (45),

$$\Omega_0(\lambda)=\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_H\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & 0\\ -\frac{1}{2}I_H & 0 & 0\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}$$

$$S_1(\lambda)=\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda)\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & M_{23}(\lambda)\\ -I_H & 0 & 0\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}$$

$$S_2(\lambda)=\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & -I_H\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & 0\\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & 0\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}$$

де $\lambda\in\mathbb{C}_+$. *Тоді рівність*

$$\Omega^a_\tau(\lambda)=\Omega_0(\lambda)+S_1(\lambda)(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{46}$$

задає бієктивну відповідність $\Omega^a(\cdot)=\Omega^a_\tau(\cdot)$ *між граничними параметрами* τ (2) *і х.м.* $\Omega^a(\cdot)$ *системи* (12).

У підрозділі 4.4 досліджуються х.м. симетричних систем з максимальним формальним індексом дефекту $N_+=n$. Частковим випадком такої системи є квазірегулярна система, тобто система з $N_+=N_-=n$. Припустимо, що:

(П1) система (12) з регулярною кінцевою точкою a є визначеною і $N_+=n$;

(П2) $\{\mathbb{H},\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$ – граничний комплекс з $\Gamma_a y=y(a),\ y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$.

Тоді рівність

$$B(\lambda)=\Gamma_b Y_a(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{47}$$

задає голоморфну оператор-функцію $B(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathbb{H},\mathbb{H}_b]$. Для квазірегулярної системи можна покласти $\mathbb{H}_b=\mathbb{H}$ і

$$\Gamma_b y:=\lim_{t\uparrow b}Y_a^{-1}(t,0)y(t),\quad y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}. \tag{48}$$

У цьому випадку $B(\lambda)=\lim\limits_{t\uparrow b}Y_a^{-1}(t,0)Y_a(t,\lambda)$. Крім того, для регулярної системи можна покласти $\Gamma_b y=y(b)$; тоді $B(\lambda)=Y_a(b,\lambda)$, тобто $B(\lambda)$ є матрицею монодромії.

Теорема 4.30. *За припущень (П1) та (П2) рівність*

$$\Omega^a(\lambda)=-\tfrac{1}{2}(C_a(\lambda)+C_b(\lambda)B(\lambda))^{-1}(C_a(\lambda)-C_b(\lambda)B(\lambda))J,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

задає бієктивну відповідність між операторними парами $\widetilde{\tau}=\{C_a(\lambda),C_b(\lambda)\}\in\mathcal{S}(\mathbb{H},\mathbb{H}_b)$ *і х.м.* $\Omega^a(\cdot)$ *системи* (12).

Для регулярної системи теорему 4.30 доведено Г. Лангером та Б. Тексторіусом.

У **розділі 5** вводяться та досліджуються m-функції довільних (можливо негамільтонових) симетричних систем з регулярною кінцевою точкою a. Така система називається U-визначеною, якщо $y\in\mathcal{N},\ \Gamma_{1a}y=0\Rightarrow y=0$. U-визначеність є послабленням умови визначеності: існують U-визначені системи, що не є визначеними.

Надалі $\varphi(\cdot,\lambda)$ та $\chi(\cdot,\lambda)$ – $[H_0,\mathbb{H}]$-значні розв'язки системи (12), такі що

$$\varphi(a,\lambda)=\begin{pmatrix} I_H & 0\\ 0 & I_{\widehat{H}}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \chi(a,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \frac{i}{2}\delta I_{\widehat{H}}\\ I_H & 0\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Якщо кінцева точка a є регулярною для системи (12), то рівність

$$T=\{\{\pi_\Delta y,\pi_\Delta f\}:\{y,f\}\in\mathcal{T}_{max},\ \Gamma_{1a}y=\widehat{\Gamma}_a y=0,\ [y,z]_b=0,\ z\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\}\tag{50}$$

задає замкнене симетричне відношення $T\supset T_{min}$, многозначна частина якого $\operatorname{mul}T$ складається з усіх $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}$ з такою властивістю: для кожного $f\in\widetilde{f}$ існує абсолютно неперервна функція $y(t)(\in\mathbb{H})$, така що $\Delta(t)y(t)=0$ (м.в. на $\mathcal{I}$) і

$$Jy'-B(t)y=\Delta(t)f(t)\ (\text{м.в. на}\ \mathcal{I}),\ \ \Gamma_{1a}y=\widehat{\Gamma}_a y=0,\ \ [y,z]_b=0,\ z\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}.\tag{51}$$

В підрозділі 5.2 розглядаються визначені системи у випадку а1. Нехай за припущень твердження 4.9 $\dot{\mathcal{H}}_0=\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b,\ \dot{\mathcal{H}}_1=\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b$. Вкороченим граничним параметром (у випадку а1) називається операторна пара

$$\dot{\tau}=\{\dot{C}_0(\lambda),\dot{C}_1(\lambda)\}\in\widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0,\dot{\mathcal{H}}_1),\quad\lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{52}$$

з голоморфними оператор-функціями

$$\dot{C}_0(\lambda)=(\dot{\widehat{C}}_0(\lambda),\dot{C}_{0b}(\lambda)):\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b\to\mathcal{K},\quad\dot{C}_1(\lambda)=(\dot{\widehat{C}}_1(\lambda),\dot{C}_{1b}(\lambda)):\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b\to\mathcal{K}.\tag{53}$$

Твердження 5.13. *За припущень твердження 4.9 для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ (52), (53) існує єдина оператор-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H_0]$, така що операторний розв'язок $v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)=\varphi(t,\lambda)m_{\dot{\tau}}(\lambda)-\chi(t,\lambda)$ системи (12) належить до $\mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$ і компоненти блочного зображення $v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)=(\xi_{\dot{\tau}}(t,\lambda),\,\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t,\lambda))$ задовольняють граничні умови*

$$\begin{gathered}[(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda)-\tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a+\dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}-(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda)+\tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b+\dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b}]\xi_{\dot{\tau}}(\lambda)=0\\ ((i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda)-\tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a+\dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}-(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda)+\tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b+\dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b})\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda)=\\ =\dot{\widehat{C}}_0(\lambda)+\tfrac{i}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda)\end{gathered}\tag{54}$$

Крім того, $m_{\dot{\tau}}(\cdot)\in R[H_0]$ і справедлива нерівність

$$(\operatorname{Im}\lambda)^{-1}\cdot\operatorname{Im}m_{\dot{\tau}}(\lambda)\geq\int_{\mathcal{I}}v^*_{\dot{\tau}}(t,\lambda)\Delta(t)v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)\,dt,\quad\lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{55}$$

яка у випадку $N_+=N_-(\Leftrightarrow\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1)$ і самоспряженого параметра $\dot{\tau}$ стає рівністю.

Оператор-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ називається m-функцією, або функцією Вейля - Тітчмарша, системи (12) (у випадку а1).

Наступна теорема є головною у підрозділі. В ній дається параметризація m-функцій $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ у випадку а1 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$.

Теорема 5.16. *Нехай за умов твердження 4.9 $M_+(\cdot)$– оператор-функція (42)-(45) і*

$$m_0(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{11}(\lambda)&M_{12}(\lambda)\\M_{21}(\lambda)&M_{22}(\lambda)\end{pmatrix},\qquad M_{1+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{12}(\lambda)&M_{13}(\lambda)\\M_{22}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}&M_{23}(\lambda)\end{pmatrix}\tag{56}$$

$$M_{2+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{21}(\lambda)&M_{22}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\M_{31}(\lambda)&M_{32}(\lambda)\end{pmatrix},\quad M_{3+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{22}(\lambda)&M_{23}(\lambda)\\M_{32}(\lambda)&M_{33}(\lambda)\end{pmatrix}.\tag{57}$$

Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ (52), (53) відповідна m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ допускає зображення

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_{1+}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{2+}(\lambda),\quad\lambda\in\mathbb{C}_+.\tag{58}$$

Далі у підрозділі розглядаються системи з максимальним формальним індексом дефекту $N_+ = n$. Нехай за припущень (П1) та (П2) перед формулою (47)

$$B(\lambda) = (B_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{3} : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

– блочне зображення оператор-функції $B(\cdot)$ (47) і $\dot{W}(\cdot)$ – голоморфна оператор-функція, визначена рівностями

$$\dot{W}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(\lambda) & \dot{w}_2(\lambda) \\ \dot{w}_3(\lambda) & \dot{w}_4(\lambda) \end{pmatrix} : H_0 \oplus H_0 \to \dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{59}$$

$$\dot{w}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -iB_{21}(\lambda) & -i(B_{22}(\lambda) - I) \\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \dot{w}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -iB_{23}(\lambda) & \frac{1}{2}(B_{22}(\lambda) + I) \\ B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\dot{w}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B_{21}(\lambda) & -\frac{1}{2}(B_{22}(\lambda) + I) \\ B_{31}(\lambda) & B_{32}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \dot{w}_4(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda) - I) \\ B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{61}$$

У випадку квазірегулярної системи $\dot{\mathcal{H}}_0 = \dot{\mathcal{H}}_1 =: \dot{\mathcal{H}} = \widehat{H} \oplus H$ і $\dot{W}(\cdot)$ є цілою оператор-функцією, що задовольняє тотожність

$$\dot{W}^*(\lambda)\dot{J}\dot{W}(\mu) - \dot{J} = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} \dot{Y}^*(t,\lambda)\Delta(t)\dot{Y}(t,\mu)\,dt, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

де $\dot{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\dot{\mathcal{H}}} \\ I_{\dot{\mathcal{H}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{Y}(t,\lambda) = (\varphi(t,\lambda),\, \chi(t,\lambda)) : H_0 \oplus H_0 \to \mathbb{H}.$

Дещо інша (у порівнянні з теоремою 5.16) параметризація m-функцій $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ у випадку максимального індексу дефекту N_+ наведена у такій теоремі.

Теорема 5.20. *Нехай за припущень (П1) та (П2)* $\dot{W}(\cdot)$ *– оператор-функція* (59). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$ (52), (53) *вірною є рівність*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)), \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{62}$$

У підрозділі 5.3 розглядаються m-функції U-визначених систем у випадку a2.

Теорема 5.23. *Припустимо, що:* 1) *система* (12) *з регулярною кінцевою точкою* a *є* U*-визначеною і має місце випадок a2;* 2) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ *–* b*-граничний комплекс* (23). *Тоді для кожної пари (вкороченого граничного параметра у випадку a2)*

$$\dot{\tau} = \{\dot{C}_0(\lambda), \dot{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{63}$$

гранична задача

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

$$\Gamma_{1a}y = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a y = 0, \quad \dot{C}_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}y + \dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

задає узагальнену резольвенту $R(\lambda) =: R\dot{\tau}(\lambda)$ *відношення* T (50).

Твердження 5.29. *За умов теореми 5.23 для кожного граничного параметра* $\dot{\tau}$ (63) *існує єдина оператор-функція* $\widetilde{m_{\dot{\tau}}}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H_0]$*, така що операторний розв'язок* $v_{\dot{\tau}}(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda)\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda) - \chi(t,\lambda)$ *системи* (12) *належить до* $\mathcal{L}^2_{\Delta}[H_0, \mathbb{H}]$ *і компоненти блочного зображення* $v_{\dot{\tau}}(t,\lambda) = (\xi_{\dot{\tau}}(t,\lambda),\, \widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t,\lambda))$ *задовольняють граничні умови*

$$\widehat{\Gamma}_a \xi_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0, \qquad \dot{C}_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0 \tag{64}$$

$$\widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}, \qquad \dot{C}_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0 \tag{65}$$

Крім того, $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot) \in R[H_0]$, *вірною є нерівність* (55) *з* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ *замість* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *і блочне зображення* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda)$ *має трикутний вигляд*

$$\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau}(\lambda) & N_{\dot\tau}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{66}$$

Функція $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ називається m-функцією системи (12) (у випадку a2).

Виявляється, що за умов теореми 5.23 для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ існує єдина трійка операторних розв'язків $\xi_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H}, \mathbb{H}]$ та $u(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathbb{H}]$, що задовольняють граничні умови

$$\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_H, \quad \widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda) = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0, \quad \Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_0(\lambda) = iI_{\widehat{H}} \tag{67}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \quad \Gamma_{1a}u(\lambda) = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a u(\lambda) = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}u(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} \tag{68}$$

Крім того, функція Вейля $M_+(\cdot)$ розділеної граничної пари задається рівностями

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & N_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & N_2(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{69}$$

$$m_0(\lambda) = \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda), \quad N_0(\lambda) = \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_2(\lambda) = \Gamma_{0a}u(\lambda) \tag{70}$$

$$M_3(\lambda) = -\Gamma_{1b}\xi_0(\lambda), \quad N_2(\lambda) = -\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_4(\lambda) = -\Gamma_{1b}u(\lambda). \tag{71}$$

Параметризація усіх "трикутних" m-функцій (66) у випадку a2 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра наведена у такій теоремі.

Теорема 5.30. *Нехай за умов теореми 5.23* $M_+(\cdot)$ – *оператор-функція* (69), *визначена рівностями* (70), (71). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ (63) *відповідна* m-*функція* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ *задається рівністю* (66) *з елементами* $m_{\dot\tau}(\lambda)$ *та* $N_{\dot\tau}(\lambda)$, *що допускають зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{72}$$

$$N_{\dot\tau}(\lambda) = N_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)N_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{73}$$

У підрозділі 5.4 досліджуються m-функції гамільтонових систем. Припустимо, що виконано таку умову (H), яка є частковим випадком умов теореми 5.23:

(H) Гамільтонова система (12) з регулярною кінцевою точкою a є U-визначеною, $N_+ \geq N_-$ і $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс (23).

Тоді згідно із розкладом $\mathbb{H} = H \oplus H$ функція $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ допускає зображення $y(t) = y_0(t) \oplus y_1(t) (\in H \oplus H)$. Покладемо $\Gamma_{ja} y = y_j(a), \ j \in \{0, 1\}, \ y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.

Нехай за умови (H) $\varphi(\cdot, \lambda)$ та $\psi(\cdot, \lambda)$ – $[H, \mathbb{H}]$-значні розв'язки системи (12) з

$$\varphi(a, \lambda) = (I_H, \, 0)^\top : H \to H \oplus H, \quad \psi(a, \lambda) = (0, \, I_H)^\top : H \to H \oplus H$$

і $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (63). Тоді m-функція (функція Вейля-Тітчмарша) системи (12) визначається як єдина оператор-функція $m_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H]$, така що операторний розв'язок $v_{\dot\tau}(t, \lambda) := \varphi(t, \lambda)m_{\dot\tau}(\lambda) - \psi(t, \lambda)$ системи (12) належить до $\mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$ і задовольняє граничну умову

$$\dot{C}_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}v_{\dot\tau}(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}v_{\dot\tau}(\lambda) = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тому у випадку $N_+ = N_-$ і самоспряженого вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ m-функція визначеної гамільтонової системи є функцією Вейля-Тітчмарша в сенсі Д. Хінтона та А. Шнайдера.

Твердження 5.38. *За умови* (H) *для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $v_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ *та* $u(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathbb{H}]$ *системи* (12), *що задовольняють граничні умови*

$$\Gamma_{1a}v_0(\lambda) = -I_H, \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}v_0(\lambda) = 0, \quad \Gamma_{1a}u(\lambda) = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{0b}u(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}.$$

Крім того, функція Вейля $M_+(\cdot)$ *розділеної граничної пари має блочне зображення*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}v_0(\lambda) & \Gamma_{0a}u(\lambda) \\ -\Gamma_{1b}v_0(\lambda) & -\Gamma_{1b}u(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \mathcal{H}_b. \qquad (74)$$

Припустимо, що гамільтонова система (12) з регулярною кінцевою точкою a є квазірегулярною і задано сюр'єктивний оператор

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus H, \qquad (75)$$

що задовольняє тотожність

$$[y,z]_b = (\Gamma_{0b}y, \Gamma_{1b}z) - (\Gamma_{1b}y, \Gamma_{0b}z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \qquad (76)$$

За цих умов мають місце такі твердження: 1) рівність

$$\dot W(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda) \\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0b}\varphi(\lambda) & \Gamma_{0b}\psi(\lambda) \\ \Gamma_{1b}\varphi(\lambda) & \Gamma_{1b}\psi(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C} \qquad (77)$$

задає цілу $[H \oplus H]$- значну функцію $\dot W(\cdot)$, що задовольняє тотожність

$$\dot W^*(\lambda) J \dot W(\mu) - J = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} Y_a^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_a(t,\mu)\,dt, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

2) якщо оператор Γ_b задано рівністю (48), то $\dot W(\lambda) = \lim\limits_{t\uparrow b} Y_a^{-1}(t,0)Y_a(t,\lambda)$ і

$$\dot w_1(\lambda) = I + \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt, \quad \dot w_2(\lambda) = \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0)\Delta(t)\psi(t,\lambda)\,dt$$

$$\dot w_3(\lambda) = -\lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt, \quad \dot w_4(\lambda) = I - \lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,0)\Delta(t)\psi(t,\lambda)\,dt.$$

Якщо система є регулярною і $\Gamma_b y = y(b)$, $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, то $\dot W(\lambda) = Y_a(b,\lambda)$ (тобто $\dot W(\lambda)$ є матрицею монодромії).

Параметризація m-функцій гамільтонової системи безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра наведена у такій теоремі.

Теорема 5.44. *Нехай за умови* (H) $M_+(\cdot)$ – *оператор-функція* (74). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ (63) *m-функція* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot C_0(\lambda) - \dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \qquad (78)$$

Якщо, крім того, система є квазірегулярною і $\dot W(\cdot)$ – *оператор-функція* (77), *то* (78) *можна замінити рівністю* (62).

Наведені результати отримано шляхом застосування результатів розділу 2 роботи до розділеної граничної трійки (пари) для T_{max}.

В **розділі 6** досліджуються псевдоспектральні (зокрема, спектральні) функції симетричних систем. Нехай кінцева точка a є регулярною для системи (12) і $\mathfrak{H}'$ – множина всіх $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, таких що функція $\Delta(t)f(t),\ f(\cdot) \in \widetilde{f}$, має фінітний носій. Кожному $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ відповідає функція $\widehat{f}_0(\cdot) : \mathbb{R} \to H_0$ (перетворення Фур'є), задана рівністю

$$\widehat{f}_0(s) = \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,s)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}.$$

Означення 6.26. Функція розподілу $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [H_0]$ називається вкороченою q-псевдоспектральною функцією системи (12), якщо $\widehat{f}_0(\cdot) \in L^2(\sigma; H_0)$ і оператор $V\widetilde{f} := \widehat{f}_0,\ \widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, допускає продовження до часткової ізометрії $V_\sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\sigma; H_0)]$.

Теорема 6.30. *Якщо $\sigma(\cdot)$ – вкорочена q-псевдоспектральна функція, то $\operatorname{mul} T \subset \ker V_\sigma$, де $\operatorname{mul} T$ - многозначна частина відношення T (див. твердження перед (51)).*

Означення 6.31. Вкорочена q-псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ системи (12) називається вкороченою псевдоспектральною функцією, якщо $\ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$. Функція розподілу $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [H_0]$ називається вкороченою спектральною функцією системи (12), якщо вірною є рівність Парсеваля $||\widehat{f}_0||_{L^2(\sigma;H_0)} = ||\widetilde{f}||_{\mathfrak{H}},\ \widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$.

Згідно з теоремою 6.30 вкорочена псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ є вкороченою q-псевдоспектральною функцією з мінімально можливим ядром $\ker V_\sigma$ і вірним є

Твердження 6.33. *Якщо $\operatorname{mul} T \neq \{0\}$, то множина вкорочених спектральних функцій системи (12) є порожньою. Якщо ж $\operatorname{mul} T = \{0\}$, то множини вкорочених спектральних та псевдоспектральних функцій збігаються.*

У підрозділі 6.3 досліджуються вкорочені псевдоспектральні функції визначених систем у випадку а1. Параметризацію всіх таких функцій безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра наведено в таких двох теоремах.

Теорема 6.40. *За умов теореми 5.16 рівність (58)та формула обернення Стільтьєса*

$$\sigma_{\dot{\tau}}(s) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im} m_{\dot{\tau}}(u + i\varepsilon)\,du, \tag{79}$$

задають бієктивну відповідність $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ між вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot)$ та вкороченими граничними параметрами $\dot{\tau}$ (52), такими що

$$\lim_{y \to +\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\dot{\mathcal{H}}_1} (\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy) M_{3+}(iy))^{-1} \dot{C}_1(iy) = 0 \tag{80}$$

$$\lim_{y \to +\infty} \tfrac{1}{iy} M_{3+}(iy) (\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy) M_{3+}(iy))^{-1} \dot{C}_0(iy) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1 = 0, \tag{81}$$

Крім того, $V_{\sigma_{\dot{\tau}}} \mathfrak{H} = L^2(\sigma_{\dot{\tau}}; H_0)$ тоді й тільки тоді, коли $N_+ = N_-$ і $\dot{\tau}^* = \dot{\tau}$.

Теорема 6.41. *За умов теореми 5.20 рівності (62) та (79) задають бієктивну відповідність $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ між вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot)$ та вкороченими граничними параметрами $\dot{\tau}$ (52), що задовольняють умови*

$$\lim_{y \to +\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\dot{\mathcal{H}}_1} \dot{w}_1(iy) (\dot{C}_0(iy) \dot{w}_1(iy) + \dot{C}_1(iy) \dot{w}_3(iy))^{-1} \dot{C}_1(iy) = 0$$

$$\lim_{y \to +\infty} \tfrac{1}{iy} \dot{w}_3(iy) (\dot{C}_0(iy) \dot{w}_1(iy) + \dot{C}_1(iy) \dot{w}_3(iy))^{-1} \dot{C}_0(iy) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1 = 0.$$

Твердження 6.44. *За умов теореми 5.16 є еквівалентними такі твердження:*

(1) *Твердження теореми 6.40 виконується для довільного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$ *(тобто умови* (80), (81) *можна пропустити).*

(2) $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{iy}M_{3+}(iy)\restriction\dot{\mathcal{H}}_1=0$ *та* $\lim\limits_{y\to+\infty}y\left(\mathrm{Im}(M_{3+}(iy)h_0,h_0)_{\dot{\mathcal{H}}_0}+\frac{1}{2}||P_2h_0||^2\right)=+\infty$, *де* $h_0\in\dot{\mathcal{H}}_0$, $h_0\neq 0$ *і* P_2 *– ортопроектор в* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *на* $\dot{\mathcal{H}}_2=\dot{\mathcal{H}}_0\ominus\dot{\mathcal{H}}_1$.

(3) $\mathrm{mul}\,T=\mathrm{mul}\,T^*$.

Теорема 6.45. *Якщо* $\mathrm{mul}\,T=\{0\}$, *то теореми 6.40, 6.41 та твердження 6.44 виконуються для вкорочених спектральних функцій замість псевдоспектральних.*

У підрозділі 6.4 досліджуються вкорочені псевдоспектральні функції U-визначених систем у випадку a2.

Теорема 6.49. *Нехай виконано умови тереми 5.30. Тоді для вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$ (63), *такого що*

$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}P_{\mathcal{H}_b}(\dot{C}_0(iy)-\dot{C}_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot{C}_1(iy)=0 \tag{82}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}M_4(iy)(\dot{C}_0(iy)-\dot{C}_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot{C}_0(iy)\restriction\mathcal{H}_b=0, \tag{83}$$

рівності (72) *та* (73) *сумісно з формулами*

$$\sigma_1(s)=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{s-\delta}\mathrm{Im}\,m_{\dot{\tau}}(u+i\varepsilon)\,du,\quad \sigma_2(s)=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\delta}^{s-\delta}N_{\dot{\tau}}(u+i\varepsilon)\,du$$

$$\sigma(s)=\begin{pmatrix}\sigma_1(s) & \sigma_2(s)\\ \sigma_2^*(s) & \frac{1}{2\pi}sI_{\widehat{H}}\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H},\quad s\in\mathbb{R}$$

задають вкорочену псевдоспектральну функцію $\sigma(\cdot)$ *системи* (12).

Теорема 6.50. *Нехай за умов теореми 5.23* $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (63), *що задовольняє* (82) *та* (83), $\widetilde{T}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(T)$ *– розширення, що породжує узагальнену резольвенту* $R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *(див. теорему 5.23) і* $\widetilde{T}_0=\widetilde{T}_0^*$ *– операторна частина відношення* $\widetilde{T}$. *Тоді:* (1) *кратність спектра оператора* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* $\nu+\widehat{\nu}$; (2) *абсолютно неперервний спектр оператора* $\widetilde{T}_0$ *збігається з* $\mathbb{R}$ *і кратність сингулярного спектра* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* ν *(тому кратність кожного власного значення* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* ν*).*

Твердження 6.54. *Нехай система* (12) *з регулярною кінцевою точкою* a *є визначеною,* $\delta=-1$ *і формальні індекси дефекту мають мінімально можливі значення* $N_+=\nu+\widehat{\nu}$, $N_-=\nu$. *Тоді:*

(1) *існує єдина* m*-функція* $\widetilde{m}(\lambda)=\mathcal{M}(\lambda)$, *де* $\mathcal{M}(\cdot)$ *– оператор функція* (5) *для розділеної граничної трійки;*

(2) *існує єдина вкорочена псевдоспектральна функція* $\sigma(\cdot)$, *для якої вірними є формули теореми 6.49 з* $M(\lambda)$ *та* $N_+(\lambda)$ *замість* $m_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *та* $N_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *відповідно.*

У підрозділі 6.5 досліджуються вкорочені псевдоспектральні функції $\sigma(s)(\in[H])$ U-визначених гамільтонових систем. Параметризацію усіх таких функцій містить

Теорема 6.59. *За умов теореми 5.44 рівність*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_3(\lambda),\quad\lambda\in\mathbb{C}_+.$$

сумісно з формулою (79) *задає бієктивну відповідність* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *між вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ (63), *що задовольняють умови* (82) *та* (83), *і вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ *гамільтонової системи. Крім того,* $V_{\sigma_{\dot\tau}}\mathfrak{H} = L^2(\sigma_{\dot\tau}; H)$ *тоді й тільки тоді, коли* $N_+ = N_-$ *і* $\dot\tau^* = \dot\tau$.

Твердження 6.62. *За умов теореми 5.44 еквівалентні такі твердження:*

(1) *Твердження теореми 6.59 виконується для довільного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ *(тобто умови* (82) *та* (83) *можна пропустити).*

(2) $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{iy} M_4(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_b = 0$ *й* $\lim\limits_{y\to+\infty} y\left(\operatorname{Im}(M_4(iy)h, h)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} + \frac{1}{2}||P_2 h||^2\right) = +\infty$, *де* $h \in \widetilde{\mathcal{H}}_b$, $h \neq 0$ *і* P_2 *– ортопроектор в* $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ *на* $\mathcal{H}_2 = \widetilde{\mathcal{H}}_b \ominus \mathcal{H}_b$.

(3) $\operatorname{mul} T = \operatorname{mul} T^*$

Далі в роботі розглядаються квазірегулярні гамільтонові системи та гамільтонові системи з мінімальним індексом дефекту.

Твердження 6.65. *Для квазірегулярної гамільтонової системи з регулярною кінцевою точкою* a *виконується рівність* $\operatorname{mul} T = L_0$, *де* $L_0 = \{\widetilde{f} \in \mathfrak{H} : \widehat{f}(s) = 0,\ s \in \mathbb{R}\}$.

Завдяки твердженню 6.65 для канонічної регулярної гамільтонової системи (14) означення 6.31 збігається з означенням псевдоспектральної функції, введеним для таких систем в монографії А.Л. Сахновіча, Л.А. Сахновіча та І.Я. Ройтберг.

Параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій квазірегулярної гамільтонової системи наведена у такій теоремі.

Теорема 6.71. *Нехай гамільтонова квазірегулярна система* (12) *з регулярною кінцевою точкою* a *є* U*-визначеною і* $\dot W(\cdot)$ *– оператор-функція* (77). *Тоді рівності* (62) *та* (79) *задають бієктивну відповідність* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *між вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ *та вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ (63), *що задовольняють умови*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} \dot w_1(iy)(\dot C_0(iy)\dot w_1(iy) + \dot C_1(iy)\dot w_3(iy))^{-1}\dot C_1(iy) = 0 \tag{84}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} \dot w_3(iy)(\dot C_0(iy)\dot w_1(iy) + \dot C_1(iy)\dot w_3(iy))^{-1}\dot C_0(iy) = 0 \tag{85}$$

Теорема 6.72. *Нехай за припущень теореми 6.71*

$$\chi(\lambda) = (i\dot w_3^*(\overline{\lambda}) + \dot w_1^*(\overline{\lambda}))^{-1}(i\dot w_3^*(\overline{\lambda}) - \dot w_1^*(\overline{\lambda})), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тоді такі твердження еквівалентні:

(1) *Твердження теореми 6.71 є вірними для довільного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ *(тобто умови* (84), (85) *можна пропустити).*

(2) $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{iy} \dot w_3(iy)\dot w_1^{-1}(iy) = 0$ *і* $\lim\limits_{y\to+\infty} y \cdot \operatorname{Im}(\dot w_3(iy)\dot w_1^{-1}(iy)h, h) = -\infty, \quad 0 \neq h \in H.$

(3) $\lim\limits_{y\to+\infty} y(||h|| - ||\chi(iy)h||) = +\infty, \quad 0 \neq h \in H.$

Якщо канонічна гамільтонова система (14) є регулярною і $\dot W(\lambda) = Y_a(b, \lambda)$ є матрицею монодромії з блочним зображенням $\dot W(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda) \\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda) \end{pmatrix} \in [H \oplus H]$, то система є U-визначеною тоді й тільки тоді, коли

$$\bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \ker \dot w_1(\lambda) = \{0\}. \tag{86}$$

Наслідок 6.73. *Якщо виконано умову* (86), *то виконується твердження теореми 6.71. Якщо, крім того, існує* $\gamma \in (0,1)$, *таке що*

$$||\chi(iy)|| \leq \gamma, \quad y > 0, \tag{87}$$

то умови (84) *та* (85) *можна пропустити.*

Зауваження 6.74. Перше твердження наслідку 6.73 доведено в монографії А.Л. Сахновіча, Л.А. Сахновіча та І.Я. Ройтберг, а друге твердження – в монографії Д.З. Арова та Г. Дима. В першій з цих монографій умови допустимості параметра $\dot{\tau}$ є складнішими за умов (84), (85). Крім того, умова (3) теореми 6.72 є критерієм вірності твердження теореми 6.71 для довільного параметра $\dot{\tau}$ і ця умова слабкіше за умову (87).

Твердження 6.76. *Нехай гамільтонова система* (12) *з регулярною кінцевою точкою* a *є визначною й індекс дефекту* N_- *має мінімально можливе значення* $N_- = \nu$. *Тоді:*

(1) *існує єдина* m*-функція* $m(\lambda) = M(\lambda)$, *де* $M(\cdot)$ – *оператор функція, що відповідає розділеній граничній трійці згідно твердження 2.33;*

(2) *існує єдина вкорочена псевдоспектральна функція* $\sigma(\cdot)$, *яка визначається через* $M(\lambda)$ *за допомоги формули обернення Стільтьєса.*

Твердження 6.54 та 6.76 показують доцільність запропонованих в роботі означень граничної трійки та відповідної функції Вейля для симетричного відношення з нерівними індексами дефекту.

В **розділі 7** досліджуються х.м. симетричних систем, що відповідають розділеним граничним умовам. Нехай система (12) задовольняє такі умови:

(УР) $\delta = -1$ і виконано (33); $c \in (a,b)$ і система є визначеною на проміжках $\mathcal{I}_l = \langle a, c]$ та $\mathcal{I}_r = [c, b\rangle$; $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (34), (35);

Якщо

$$\tau_a = \{C_{0a}(\lambda), C_{1a}(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_a), \qquad \tau_b = \{C_{0b}(\lambda), C_{1b}(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_b) \tag{88}$$

і $C_j(\lambda) = C_{ja}(\lambda) \oplus C_{jb}(\lambda)$, $j \in \{0,1\}$, то рівність (2) задає граничний параметр τ. Надалі такий параметр τ називається розділеним і позначається $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$. Для розділеного параметра $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ умови (38) є розділеними граничними умовами

$$C_{0a}(\lambda)\Gamma_{1a}y + C_{1a}(\lambda)\Gamma_{0a}y = 0, \quad C_{0b}(\lambda)\Gamma_{0b}y + C_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b}y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{89}$$

Нехай $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ – розділений граничний параметр і

$$\widetilde{m}_{\tau r}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau r}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{90}$$

– m-функція системи (12) на проміжку $\mathcal{I}_r$, що відповідає вкороченому граничному параметру τ_b. Аналогічно $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ в роботі визначається оператор-функція

$$\widetilde{m}_{\tau l}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\tau l}(\lambda) & 0 \\ N_{\tau l}(\lambda) & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{91}$$

що належить до класу $R[H_0]$. Ця функція є m-функцією системи (12) на проміжку $\mathcal{I}_l$, що відповідає вкороченому граничному параметру τ_a. В роботі також отримано параметризацію m-функцій $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ та $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ у вигляді, аналогічному (72) та (73).

Зображення х.м., що відповідає розділеним граничним умовам (89), в термінах m-функцій $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ та $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ наведено в такій теоремі.

Теорема 7.13. *Нехай за умов* (УР) $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ *– розділений граничний параметр і* $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ *та* $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ *–* m*-функції* (90) *та* (91). *Тоді х.м.* $\Omega^c_\tau(\cdot)$, *що відповідає* τ *згідно із зауваженням 4.8, допускає зображення*

$$\Omega^c_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} -m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)m_{\tau r}(\lambda) & -m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)N_{\tau r}(\lambda) & \frac{1}{2}I_H + m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) \\ -N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)m_{\tau r}(\lambda) & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} - N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)N_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) \\ -\frac{1}{2}I_H - \Phi_\tau(\lambda)m_{\tau r}(\lambda) & -\Phi_\tau(\lambda)N_{\tau r}(\lambda) & \Phi_\tau(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{92}$$

де $\Phi_\tau(\lambda) = -(m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda) + iN_{\tau r}(\lambda)N_{\tau l}(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$.

Формула (92) є аналогом відомої формули Тітчмарша для оператора Штурма-Ліувілля на осі. Близьку до (92) формулу отримано в роботі В.І. Храбустовського. Ця формула містить стискуючі функції замість неванлинівських функцій $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ та $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$, що ускладнює її застосування для характеристики спектральних властивостей системи.

У **розділі 8** отримані результати щодо спектральних властивостей систем переносяться на диференціальні оператори. Надалі H – унітарний простір вимірності m, $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$, $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{I})$ – гільбертів простір функцій $f : \mathcal{I} \to H$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} ||f(t)||^2\, dt < \infty$, й $\mathfrak{H}'$ – множина функцій $f(\cdot) \in \mathfrak{H}$ з фінітним носієм. Для унітарного простору $\mathcal{K}$ покладемо $L^2[\mathcal{K}, H]$ – множина функцій $F : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$, таких що $F(\cdot)h \in \mathfrak{H},\ h \in \mathcal{K}$. Нехай

$$l[y] = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j((p_{k-j}y^{(j)})^{(j)} - \tfrac{i}{2}[(q_{k-j}y^{(j-1)})^{(j)} + (q_{k-j}y^{(j)})^{(j-1)}]) + p_k y \tag{93}$$

– диференціальний вираз парного порядку $\eta = 2k$ з достатньо гладкими коефіцієнтами $p_j, q_j : \mathcal{I} \to [H]$, такими що $p_j(t) = p_j^*(t)$, $q_j(t) = q_j^*(t)$ і $p_0^{-1}(t) \in [H],\ t \in \mathcal{I}$. Покладемо

$$\mathbf{H} := H^k, \qquad \mathbb{H} := \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = H^k \oplus H^k$$

$$\mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \dots \oplus y^{[k-1]}(t)(\mathbf{H}), \quad \mathbf{y}_1(t) = y^{[2k-1]}(t) \oplus \dots \oplus y^{[k]}(t)(\in \mathbf{H}) \tag{94}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus \mathbf{y}_1(t)(\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad t \in \mathcal{I} \tag{95}$$

Припустимо, далі, що

$$l[y] = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j(\tfrac{i}{2}[(q_{k-j}y^{(j)})^{(j+1)} + (q_{k-j}y^{(j+1)})^{(j)}] + (p_{k-j}y^{(j)})^{(j)}) \tag{96}$$

– диференціальний вираз непарного порядку $\eta = 2k+1$ з достатньо гладкими коефіцієнтами $p_j, q_j : \mathcal{I} \to [H]$, такими що $p_j(t) = p_j^*(t)$, $q_j(t) = q_j^*(t)$ і $q_0^{-1}(t) \in [H],\ t \in \mathcal{I}$. Для кожного $t \in \mathcal{I}$ має місце розклад $H = H_t^+ \oplus H_t^-$, де H_t^+ (H_t^-) – інваріантний підпростір оператора $q_0(t)$, на якому $q_0(t)$ є строго додатним (відп. від'ємним) оператором. Покладемо

$$\nu_{0+} = \dim H_t^+, \quad \nu_{0-} = \dim H_t^-, \quad \widehat{\nu}_0 = |\nu_{0+} - \nu_{0-}|, \quad \delta = \operatorname{sign}(\nu_{0+} - \nu_{0-}).$$

Тоді існують унітарні простори H', $\widehat{H}$ та абсолютно неперервна оператор-функція

$$Q(t) = (Q_1(t), \widehat{Q}(t), Q_2(t))^\top : H \to H' \oplus \widehat{H} \oplus H', \quad t \in \mathcal{I},$$

такі що $\dim H' = \min\{\nu_{0+}, \nu_{0-}\}$, $\dim \widehat{H} = \widehat{\nu}_0$, оператор $Q(t)$ є оборотним і

$$iq_0(t) = -Q_1^*(t)Q_2(t) + Q_2^*(t)Q_1(t) + i\delta\widehat{Q}^*(t)\widehat{Q}(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Покладемо

$$\mathbf{H} = H^k \oplus H', \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H} \oplus \widehat{H}, \quad \mathbb{H} = \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} = H^k \oplus H' \oplus \widehat{H} \oplus H^k \oplus H'. \quad (97)$$

$$\mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k-1]}(t) \oplus Q_1(t)y^{(k)}(t)(\in H^k \oplus H' = \mathbf{H}) \quad (98)$$

$$\mathbf{y}_1(t) = y^{[2k]}(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k+1]}(t) \oplus Q_2(t)y^{(k)}(t)(\in H^k \oplus H' = \mathbf{H}) \quad (99)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus \widehat{Q}(t)y^{(k)}(t) \oplus \mathbf{y}_1(t)\}(\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (100)$$

В формулах (94) та (98), (99) $y^{[j]}(t)$ – квазіпохідні функції $y(t)(\in H)$ відносно $l[y]$.

Нехай L_{min} та L_{max} – відповідно мінімальний та максимальний оператори, породжені виразом $l[y]$. Як відомо, L_{min} є замкненим щільно визначеним симетричним оператором в $\mathfrak{H}$ з індексами дефекту $n_\pm(L_{min}) \leq \eta m < \infty$ і $L_{min}^* = L_{max}$. Для операторного розв'язку $Y(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathcal{K}, H]$ рівняння $l[y] = \lambda y$ рівність $(Y(\lambda)h)(t) = Y(t, \lambda)h, \ h \in \mathcal{K}$, задає лінійний оператор $Y(\lambda) : \mathcal{K} \to \mathfrak{N}_\lambda(L_{min})$.

Означення 8.4. HD-виразом називається або вираз (93) парного порядку, або вираз (96) непарного порядку за умови $\widehat{\nu}_0 = 0$. SD-виразом називається вираз (96) непарного порядку за умови $\widehat{\nu}_0 \neq 0$.

Вираз $l[y]$ порядку η є еквівалентним деякій симетричній системі

$$J_\eta \mathbf{y}' - B_\eta(t)\mathbf{y} = \lambda\Delta_\eta(t)\mathbf{y}, \quad t \in \mathcal{I}, \quad (101)$$

де $\mathbf{y}$ – функція (95) у випадку $\eta = 2k$ і (100) у випадку $\eta = 2k+1$. Крім того, $l[y]$ є HD-виразом тоді й тільки тоді, коли система (101) є гамільтоновою. Ці факти дозволяють перенести результати щодо симетричних систем на диференціальні оператори.

Надалі покладаємо $\widehat{\nu} = 0$ для HD-виразу і $\widehat{\nu} = \widehat{\nu}_0$ для SD-виразу.

Зауваження 8.5. Скалярний вираз $l[y]$ (тобто вираз із дійснозначними коефіцієнтами) є HD-виразом (SD-виразом) тоді й тільки тоді, коли він має парний (відп. непарний) порядок. Для скалярного виразу непарного порядку $\eta = 2k + 1$

$$\mathbf{H} = \mathbb{C}^k, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^{k+1}, \quad \mathbb{H} = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^{2k+1}(= \mathbb{C}^\eta)$$

$$\mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k-1]}(t)\}(\in \mathbb{C}^k), \quad \mathbf{y}_1(t) = y^{[2k]}(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k+1]}(t)(\in \mathbb{C}^k)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus (-i|q_0(t)|^{\frac{1}{2}}y^{(k)}(t)) \oplus \mathbf{y}_1(t)\}(\in \mathbb{C}^{2k+1}).$$

У підрозділі 8.2 описуються граничні умови різних видів для диференціального виразу. Нехай $[y, z]_t = (J_\eta \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$ – форма Лагранжа для виразу $l[y]$ і

$$[y, z]_a = \lim_{t \to a}[y, z]_t, \quad [y, z]_b = \lim_{t \to b}[y, z]_t, \ \ y, z \in \operatorname{dom} L_{max}.$$

Нехай $c \in (a, b)$, $L_{\min,l}$ та $L_{\min,r}$ – мінмальні оператори, породжені звуженням $l[y]$ відповідно на $\langle a, c]$ та $[c, b\rangle$, $N_{l\pm} = n_\pm(L_{\min,l})$, $N_{r\pm} = n_\pm(L_{\min,r})$ і $\delta_a, \ \delta_b$ – числа (15).

Означення 8.7. Сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, де $\mathbb{H}_a$ та $\mathbb{H}_b$ – унітарні простори (16) і

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \widehat{\Gamma}_a, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a \quad (102)$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \quad (103)$$

– сюр'єктивні оператори, називається граничним комплексом для виразу $l[y]$, якщо для всіх $y, z \in \operatorname{dom} L_{max}$ виконуються тотожності (19) з операторами J_a, J_b вигляду (20).

В роботі за допомоги граничного комплексу описуються максимальні дисипативні (акумулятивні) та самоспряжені граничні умови для виразу $l[y]$ у вигляді, аналогічному твердженню 3.62. Дещо інший опис зазначених умов міститься у такому твердженні.

Твердження 8.17. *Нехай* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$. *Тоді* $\delta_a = \delta_b =: \widetilde{\delta}$ *й існує граничний комплекс* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ (102), (103) *з* $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{\mathcal{H}}_b =: \widehat{\mathcal{H}}$. *Якщо* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– такий комплекс,* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b$ *і для кожного* $y \in \operatorname{dom} L_{max}$

$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\widetilde{\delta}(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b) y \oplus \Gamma_{0b} y (\in \mathcal{H}), \;\; \Gamma_1' y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y)(\in \mathcal{H}),$$

то рівності (граничні умови)

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, C_0 \Gamma_0' y + C_1 \Gamma_1' y = 0\}, \qquad \widetilde{L} = L_{max} \upharpoonright \operatorname{dom} \widetilde{L}$$

задають бієктивну відповідність між максимальними дисипативними (акумулятивними, самоспряженими) розширеннями $\widetilde{L} \supset L_{min}$ і максимальними дисипативними (акумулятивними, самоспряженими) операторними парами $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.

Розділені самоспряжені граничні умови для диференціальних операторів характеризуються такою теоремою.

Теорема 8.18. (1) *Розділені самоспряжені граничні умови для* $l[y]$ *існують тоді й тільки тоді, коли виконується* (33). *Для виразу* $l[y]$ *з регулярною кінцевою точкою* a *або* b *умова* (33) *еквівалентна тому, що* $l[y]$ *є* HD*-виразом і* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$.

(2) *Припустимо, що* (33) *виконано. Тоді:* (a) *граничний комплекс* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *для виразу* $l[y]$ *складається з просторів* $\mathbb{H}_a$ *та* $\mathbb{H}_b$ (34) *і операторів*

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a, \;\; \Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b. \tag{104}$$

(b) *якщо* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (104), *то загальним виглядом розділених самоспряжених граничних умов є*

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, N_{a0} \Gamma_{0a} y + N_{a1} \Gamma_{1a} y = 0, \; N_{b0} \Gamma_{0b} y + N_{b1} \Gamma_{1b} y = 0\},$$

де N_{aj} *та* N_{bj} *– ті ж самі оператори, що і в теоремі 3.66,* (2).

Для регулярного виразу $l[y]$ твердження 8.17 та теорему 8.18 доведено Ф.С. Рофе-Бекетовим. Крім того, твердження 8.17 та твердження (2) теореми 8.18 узагальнюють та зображують у спрощеному вигляді результати Ч. Фултона; Г.А. Мірзоєва; О.М. Холькіна; І.М. Гусейнова та Р.Т. Пашаєва, отримані цими авторами для сингулярних HD-виразів з дійсною точкою регулярного типа у оператора L_{min}.

У підрозділі 8.3 досліджуються m-функції та спектральні функції HD-виразів. Аналогічно гамільтоновій системі m-функція $m(\cdot) \in R[\mathbf{H}]$ HD-виразу відповідає неванлинівським (зокрема, самоспряженим) розділеним граничним умовам. В роботі формулами, аналогічними (78) та (62), параметризуються всі m-функції в термінах граничного параметра. Цей результат поширює результати М.Л. Горбачука, Ч. Фултона, О.М. Холькіна щодо квазірегулярних HD-виразів на довільні HD-вирази.

У підрозділі 8.4 вводяться та досліджуються m-функції та вкорочені спектральні функції SD-виразів (зокрема, скалярних диференціальних виразів непарного порядку). Нехай $l[y]$ – SD-вираз (96) з регулярною кінцевою точкою a. Для функції $y \in \operatorname{dom} L_{max}$ покладемо $\Gamma_{ja} y = \mathbf{y}_j(a),\ j \in \{0,1\}$, і $\widehat{\Gamma}_a y = \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a)$. Тоді рівності

$$\operatorname{dom} L = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \Gamma_{1a} y = \widehat{\Gamma}_a y = 0 \ \text{ та } \ [y,z]_b = 0,\ z \in \operatorname{dom} L_{max}\} \tag{105}$$

та $L = L_{max} \restriction \operatorname{dom} L$ задають симетричний оператор $L \supset L_{min}$.

Для $[\mathcal{K}, H]$-значного операторного розв'язку $Y(\cdot,\lambda)$ рівняння $l[y] = \lambda y$ позначимо через $\mathbf{Y}(\cdot,\lambda)$ $[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$-значну функцію, визначену такою умовою: якщо $h \in \mathcal{K}$ і $y(t) = Y(t,\lambda)h$, то $\mathbf{Y}(t,\lambda)h = \mathbf{y}(t)$. Надалі $\varphi(\cdot,\lambda)$ та $\chi(\cdot,\lambda)$ – $[\mathbf{H}_0, H]$-значні розв'язки рівняння $l[y] = \lambda y$ з початковими умовами

$$\boldsymbol{\varphi}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{H}} & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta I_{\widehat{H}} \\ I_{\mathbf{H}} & 0 \end{pmatrix}.$$

SD-вирази з регулярною кінцевою точкою a і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$ вичерпуються такими випадками :

Випадок ад1 $\delta = 1$ і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$.
Випадок ад2 $\delta = -1$ і $n_+(L_{min}) - n_-(L_{min}) \geq \widehat{\nu}$
Випадок ад3 $\delta = -1$ і $0 \leq n_+(L_{min}) - n_-(L_{min}) \leq \widehat{\nu}$

В роботі розглядаються випадки ад1 та ад2 (такими випадками вичерпуються скалярні вирази непарного порядку). Нехай Γ_b – сюр'єктивний оператор (103), що задовольняє для всіх $y, z \in \operatorname{dom} L_{max}$ другу тотожність в (19). В роботі для кожного з випадків ад1 та ад2 будується унітарний простір $\widetilde{\mathcal{H}}_b \supset \mathcal{H}_b$, такий що оператор Γ_b допускає зображення

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \widehat{\Gamma}'_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{106}$$

у випадку ад1 та

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{107}$$

у випадку ад2. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ з оператором Γ_b вигляду (106) або (107) називається b-граничним комплексом.

Нехай у випадку ад1 $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс (106) і $\dot{\mathcal{H}}_0 = \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b,\ \dot{\mathcal{H}}_1 = \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b$. Вкороченим граничним параметром (у випадку ад1) називається операторна пара $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1)$, визначена рівностями (52), (53).

Твердження 8.55. *Припустимо, що для SD-виразу з регулярною кінцевою точкою a має місце випадок* ад1 *і $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс* (106). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$* (52), (53) *існує єдина оператор-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbf{H}_0]$, така що операторний розв'язок*

$$v_{\dot{\tau}}(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda) m_{\dot{\tau}}(\lambda) - \chi(t,\lambda) \tag{108}$$

рівняння $l[y] = \lambda y$ належить до $L^2[\mathbf{H}_0, H]$ і компоненти блочного зображення

$$v_{\dot{\tau}}(t,\lambda) = (\xi_{\dot{\tau}}(t,\lambda),\ \widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t,\lambda)) : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \to H \tag{109}$$

задовольняють граничні умови (54). *Крім того, $m_{\dot{\tau}}(\cdot) \in R[\mathbf{H}_0]$.*

Оператор-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ називається m-функцією, або функцією Вейля - Тітчмарша, SD-виразу $l[y]$ (у випадку ад1).

Твердження 8.56. *За умов твердження 8.55 для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *існує єдина трійка операторних розв'язків* $\xi_0(\cdot,\lambda)\in L^2[\mathbf{H},H]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)\in L^2[\widehat{H},H]$ *та* $u(\cdot,\lambda)\in L^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b,H]$ *рівняння* $l[y]=\lambda y$, *що задовольняють граничні умови* (41) *з* $I_{\mathbf{H}}$ *замість* I_H. *Крім того, рівності* (43) - (45) *та* (56), (57) *задають голоморфні оператор-функції* $m_0(\cdot)$ *та* $M_{j+}(\cdot)$, $j\in\{1,2,3\}$.

Твердження 8.59. *Припустимо, що* SD*-вираз з регулярною кінцевою точкою* a *є квазірегулярним (тобто* $n_\pm(L_{min})=\eta m$*) і* $\delta=1$. *Нехай* $Y(\cdot,\lambda)(\in[\mathbb{H},H])$ – *операторний розв'язок рівняння* $l[y]=\lambda y$, *такий що* $\mathbf{Y}(a,\lambda)=I_{\mathbb{H}}$. *Тоді:*

(1) *рівність* $B(\lambda)=\lim\limits_{t\to b}\mathbf{Y}^{-1}(t,0)\mathbf{Y}(t,\lambda),\lambda\in\mathbb{C}$, *коректно задає цілу оператор-функцію* $B(\lambda)(\in[\mathbb{H}])$;

(2) *якщо* $B(\lambda)=(B_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{3}(\in[\mathbf{H}\oplus\widehat{H}\oplus\mathbf{H}])$ – *блочне зображення* $B(\lambda)$, *то рівності* (60) *та* (61) *задають цілі оператор-функції* $\dot{w}_j(\lambda)(\in[\mathbf{H}_0,\dot{\mathcal{H}}])$, *де* $\dot{\mathcal{H}}=\widehat{H}\oplus\mathbf{H}$.

Нехай у випадку ад2 $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b,\Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс (107). Вкороченим граничним параметром (у випадку ад2) називається операторна пара $\dot{\tau}\in\widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b)$ (63).

Твердження 8.62. *Нехай для* SD*-виразу з регулярною кінцевою точкою* a *має місце випадок* ад2 *і* $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b,\Gamma_b\}$ – b*-граничний комплекс* (107). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$ (63) *існує єдина оператор-функція* $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathbf{H}_0]$, *така що операторний розв'язок* $v_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$(108) *рівняння* $l[y]=\lambda y$ *належить до* $L^2[\mathbf{H}_0,H]$ *і компоненти блочного зображення* (109) *задовольняють граничні умови* (64), (65). *Крім того,* $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot)\in R[\mathbf{H}_0]$ *і блочне зображення* $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *має трикутний вигляд*

$$\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\dot{\tau}}(\lambda) & N_{\dot{\tau}}(\lambda)\\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}:\mathbf{H}\oplus\widehat{H}\to\mathbf{H}\oplus\widehat{H},\quad\lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{110}$$

Оператор-функція $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot)$ називається m-функцією, або функцією Вейля - Тітчмарша, SD-виразу $l[y]$ (у випадку ад2).

Твердження 8.63. *За умов твердження 8.62 для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *існує єдина трійка операторних розв'язків* $\xi_0(\cdot,\lambda)\in L^2[\mathbf{H},H]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)\in L^2[\widehat{H},H]$ *та* $u(\cdot,\lambda)\in L^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b,H]$ *рівняння* $l[y]=\lambda y$, *що задовольняють умови* (67) *та* (68) *з* $I_{\mathbf{H}}$ *замість* I_H. *Крім того, рівності* (69) - (71) *(з* $\mathbf{H}$ *замість* H*) задають голоморфну оператор-функцію* $M_+(\cdot)$.

Кожній функції $f\in\mathfrak{H}'$ відповідає функція $\widehat{f}_0(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbf{H}_0$ (перетворення Фур'є):

$$\widehat{f}_0(s)=\int\limits_{\mathcal{I}}\varphi^*(t,s)f(t)\,dt.$$

Функція розподілу $\sigma(s)(\in[\mathbf{H}_0])$ називається вкороченою спектральною функцією SD-виразу, якщо вірною є рівність Парсеваля $||\widehat{f}_0||_{L^2(\sigma;\mathbf{H}_0)}=||f||_{\mathfrak{H}}$.

Параметризація m-функцій та вкорочених спектральних функцій SD-виразу у випадку ад1 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ подана у такій теоремі.

Теорема 8.68. *Нехай за умов твердження 8.55* $m_0(\cdot)$ *та* $M_{j+}(\cdot)$, $j\in\{1,2,3\}$, – *оператор функції, визначені в твердженні 8.56. Тоді:*

(1) *для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ (52) *відповідна* m*-функція* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_{1+}(\lambda)(\dot C_0(\lambda)-\dot C_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)M_{2+}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \qquad (111)$$

(2) *рівність* (111) *сумісно з формулою обернення Стільтьєса* (79) *задає бієктивну відповідність* $\sigma(\cdot)=\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *між вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ (52) *і вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ SD*-виразу.*

У випадку квазірегулярного SD*-виразу рівність* (111) *можна замінити рівністю*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=(\dot C_0(\lambda)\dot w_1(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda))^{-1}(\dot C_0(\lambda)\dot w_2(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_4(\lambda)),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

з операторзначними коефіцієнтами $\dot w_j(\lambda)$, *визначеними в твердженні 8.59.*

Формули для обчислення m-функцій та вкорочених спектральних функцій спеціального вигляду для SD-виразу у випадку ад2 містить така

Теорема 8.72. *Нехай за умов твердження 8.62* $M_+(\cdot)$ – *оператор-функція* (69), *визначена в твердженні 8.63, і* $\dot\tau$ – *вкорочений граничний параметр* (63). *Тоді:*

(1) m*-функція* $\widetilde m_{\dot\tau}(\cdot)$ *задається рівністю* (110) *з елементами* $m_{\dot\tau}(\lambda)$ *та* $N_{\dot\tau}(\lambda)$, *що допускають зображення* (72) *та* (73).

(2) *рівності* (72) *та* (73) *сумісно з формулами тереми 6.49 задають вкорочену спектральну функцію* $\sigma(\cdot)$ SD*-варазу.*

Теорема 8.73. *Нехай за умов твердження 8.62* $\dot\tau$ – *вкорочений граничний параметр* (63). *Тоді:* (1) *гранична задача*

$$l[y]-\lambda y=f(t)$$

$$\Gamma_{1a}y=0,\quad \widehat\Gamma_a y=0,\quad \dot C_0(\lambda)\widetilde\Gamma_{0b}y+\dot C_1(\lambda)\Gamma_{1b}y=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

задає узагальнену резольвенту $R(\lambda)$ *оператора* L (105).

(2) *Розширення* $\widetilde L\in\widetilde{\mathrm{Self}}(L)$, *що породжує* $R(\lambda)$, *має такі спектральні властивості:*a) *кратність спектра оператора* $\widetilde L$ *не перевищує* $km+\nu_{0-}$*;* b) *абсолютно неперервний спектр оператора* $\widetilde L$ *збігається з* $\mathbb{R}$ *і кратність сингулярного спектра оператора* $\widetilde L$ *не перевищує* $km+\nu_{0+}$ *(тому кратність кожного власного значення* $\widetilde L$ *не перевищує* $km+\nu_{0+}$*). У випадку скалярного виразу порядку* $2k+1$ *кратність спектра оператора* $\widetilde L$ *не перевищує* $k+1$, *а кратність сингулярного спектра того ж оператора не перевищує* k.

Як один з прикладів, що ілюструє отримані результати,в роботі розглядається оператор диференціювання 3-го порядку

$$l[y]=iy^{(3)}. \qquad (112)$$

Нехай вираз (112) задано на півосі $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. Тоді $n_+(L_{min})=2$, $n_-(L_{min})=1$ (тобто індекси дефекту є мінімальними) і тому існує єдина m-функція $\widetilde m(\cdot)$ та єдина спектральна функція $\sigma(\cdot)$ цього виразу. Ці функції задаються матрицями

$$\widetilde m(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{\frac{5}{6}\pi i}}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & \dfrac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt[3]{\lambda}}\\ 0 & \frac{i}{2}\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+;\qquad \sigma(s)=\frac12\int\limits_0^s\begin{pmatrix}\frac{1}{(\sqrt[3]{u})^2} & -\frac{e^{\frac23\pi i}}{\sqrt[3]{u}}\\ -\frac{e^{-\frac23\pi i}}{\sqrt[3]{u}} & 1\end{pmatrix}du,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Твердження 8.83. *Оператор* L (105) *для виразу* (112) *на півосі є максимальним симетричним і тому існує єдине розширення* $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L)$. *Оператор* $\widetilde{L}$ *має простий спектр і* $\mathrm{spec}_{ac}(\widetilde{L}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{spec}_s(\widetilde{L}) = \emptyset$, *де* $\mathrm{spec}_{ac}(\widetilde{L})$ *та* $\mathrm{spec}_s(\widetilde{L})$ *– абсолютно неперервний та сингулярний спектри оператора* $\widetilde{L}$.

Припустимо, далі, що вираз (112) задано на всій осі $\mathbb{R}$. Тоді оператор $L_{\mathbb{R}} := L_{min}(= L_{max})$ є самоспряженим і (єдина) х.м. $\Omega^0(\cdot)$ цього виразу задається матрицею

$$\Omega^0(\lambda) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} & \frac{1}{2} \\ \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} & \frac{i}{2} & z_1^2\sqrt[3]{\lambda} \\ -\frac{1}{2} & -z_1^2\sqrt[3]{\lambda} & z_1(\sqrt[3]{\lambda})^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $z_1 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_2 = e^{\frac{5}{6}\pi i}$.

Твердження 8.84. *Оператор* $L_{\mathbb{R}}$ *має простий спектр і* $\mathrm{spec}_{ac}(L_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{spec}_s(L_{\mathbb{R}}) = \emptyset$.

ВИСНОВКИ

В роботі отримано такі основні результати:

1. Теорію граничних трійок та їх функцій Вейля (Q-функцій) поширено на симетричні відношення A з нерівними індексами дефекту. В термінах абстрактних граничних умов отримано параметризацію різних класів розширень $\widetilde{A} \supset A$ та самоспряжених розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ з виходом в ширший простір. Охарактеризовано розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ із збереженням многозначної частини відношення A.

2. Досліджено спектральні властивості розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ простого симетричного оператора A з рівними індексами дефекту $d < \infty$ і дефектними підпросторами $\mathfrak{N}_\lambda(A)$, $\lambda \in (a, b)$, вимірності d. Доведено, що кожне таке розширення $\widetilde{A}$ не має неперервного спектра в (a, b), а точковий спектр $\widetilde{A}$ є ніде нещільною множиною в (a, b).

3. Для сингулярних симетричних диференціальних систем у компактному вигляді описано граничні умови різних класів. Знайдено критерій існування та отримано компактний опис самоспряжених розділених граничних умов.

4. Введено та досліджено псевдоспектральні функції для сингулярної системи. Отримано параметризацію характеристичних матриць та псевдоспектральних функцій безпосередньо в термінах граничного параметра (граничних умов).

5. Введено та досліджено m-функції та вкорочені псевдоспектральні функції для сингулярної системи. Отримано параметризацію m-функцій та псевдоспектральних функцій безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра. Описано деякі спектральні властивості самоспряжених розширень мінімального відношення, породженого системою.

6. Для характеристичної матриці симетричної системи доведено аналог відомої формули Тітчмарша для оператора Штурма-Ліувілля на осі.

7. Наведені результати щодо систем перенесено на диференціальні оператори довільного порядку з матричними коефіцієнтами. Це, зокрема, дозволило поширити теорію Вейля - Тітчмарша на диференціальні оператори непарного порядку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Malamud M.M. On Weyl functions and Q-functions of dual pairs of linear relations / Malamud M.M., V.I. Mogilevskii // Доповіді Нац. акад. наук України. – 1999. – № 4. – C. 32-37.

2. Mogilevskii V.I. On nonselfajoint differential operators in a vector-function space / V.I. Mogilevskii //Доповіді Нац. акад. наук України. – 2000 . – № 7. – C. 35-40.

3.Malamud M.M. Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations / M.M. Malamud, V.I. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2002. – V.8, № 4. – P. 72-70.

4. Маламуд М.М. Обобщенные резольвенты изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Матем. заметки. – 2003. – V.73, № 3. – C. 460-465.

5. Маламуд М.М. Резольвентные матрицы и спектральные функции изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Докл. РАН. – 2004. – V.395, № 1. – C. 1-7.

6. Hassi S. Generalized resolvents and boundary triplets for dual pairs of linear relations / S. Hassi, M. Malamud, V. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2005. – V.11, № 2. – P. 170-187.

7. Маламуд М.М. Резольвентные матрицы и характеристические функции расширений изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Докл. РАН. – 2005. – V.405, № 4. – C. 454-461.

8. Mogilevskii V. Nevanlinna type families of linear relations and the dilation theorem / V. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology . – 2006. – V.12, № 1. – P. 38-56.

9. Mogilevskii V. Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers / V. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology . – 2006. – V.12, № 3. – P. 258-280.

10. Могилевский В.И. Описание спектральных функций дифференциального оператора с произвольными индексами дефекта / В.И. Могилевский // Матем. заметки . – 2007. – V.81, № 4. – C. 625-630.

11. Mogilevskii V. Boundary triplets and Titchmarsh - Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices / V. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology . – 2009. – V.15, № 3. – P. 280-300.

12. Mogilevskii V. Fundamental solutions of boundary-value problems and resolvents of differential operators / Vadim Mogilevskii // Ukr. Math. Bull. – 2009. – V.6, № 4. – P. 487 -525.

13. Mogilevskii V. Symmetric operators with real defect subspaces of the maximal dimension. Applications to differential operator / Vadim Mogilevskii // J. of Funct. Anal. – 2011. – V.261. – P. 1955–1968.

14. Могилевский В.И. Описание обобщенных резольвент и характеристических матриц дифференциальных операторов посредством граничного параметра / В.И. Могилевский // Матем. заметки . – 2011. – V.90, № 4. – C. 558-583.

15. Маламуд М.М. Об унитарной эквивалентности собственных расширений эрмитова оператора и функции Вейля / М.М. Маламуд, В. И. Могилевский, С. Хасси // Матем. заметки . – 2012. – V.91, № 2. – С. 316-320.

16. Могилевский В.И. О характеристических матрицах дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / В.И. Могилевский // Доповіді Нац. акад. наук України . – 2012. – № 2. – С. 25-31.

17. Mogilevskii V. Boundary pairs and boundary conditions for general (not necessarily definite) first-order symmetric systems with arbitrary deficiency indices / Vadim Mogilevskii // Math. Nachr. – 2012. – V.285, № 14 - 15. – P. 1895-1931.

18. Mogilevskii V. Minimal spectral functions of an ordinary differential operator / Vadim Mogilevskii // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. – 2012. – V.55. – P. 731—769.

19. Mogilevskii V.I. On exit space extensions of symmetric operators with applications to first order symmetric systems / V.I. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2013. – V.19, № 3. – P. 268-292.

20. Albeverio S. On Titchmarsh-Weyl functions and eigenfunction expansions of first-order symmetric systems / Sergio Albeverio, Mark Malamud and Vadim Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2013. – V.77. – P.303-354 .

21. Hassi S. Unitary equivalence of proper extensions of a symmetric operator and the Weyl function / Seppo Hassi, Mark Malamud and Vadim Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2013. – V.77. – P.449-487 .

22. Mogilevskii V. On generalized resolvents and characteristic matrices of first-order symmetric systems / Vadim Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2014. – V.20, № 4. – P. 328-348 .

23. Mogilevskii V. On characteristic matrices and eigenfunction expansions of two singular point symmetric systems / Vadim Mogilevskii // Math. Nachr. – 2015. – V.288, № 2-3. – P.249-280 .

24. Mogilevskii V. Characteristic matrices and spectral functions of first order symmetric systems with maximal deficiency index of the minimal relation / Vadim Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V.21, № 1. – 76-98.

25. Mogilevskii V. On eigenfunction expansions of first-order symmetric systems and ordinary differential operators of an odd order / Vadim Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2015. – V.82. – P. 301-337.

26. Mogilevskii V.I. On spectral and pseudospectral functions of first-order symmetric systems / V.I. Mogilevskii // Уфимский матем. журн.. – 2015. – V.7, № 2. – P. 123-144.

27. Mogilevskii V. Spectral and pseudospectral functions of Hamiltonian systems: development of the results by Arov-Dym and Sakhnovich / Vadim Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V.21, № 4. – — P. 370-402.

28. Mogilevskii V.I. L-resolvent matrixes and L-resolvents of dual pairs of linear relations/ V.I. Mogilevskii // International Conference on Functional Analysis and its Applications. Book of Abstracts.–Lviv, 2002. – P. 139-140.

29. Mogilevskii V.I. Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal deficiency indeces/ V.I. Mogilevskii // Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конференції.– Київ, 2006. – С. 526.

30. Mogilevskii V. Krein type resolvent formula and spectral functions of differential operators / Vadim Mogilevskii // International Conference "Modern Analysis and Applications (MAA 2007)" dedicated to the centenary of Mark Krein. Book of Abstracts. -– Kyiv, 2007. – P. 96-96.

31. Mogilevskii V. Boundary triplets and Titchmarsh - Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices/ Vadim Mogilevskii // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology".– Івано-Франківськ, 2009. – P. 102.

32. Mogilevskii V. On generalized resolvents and characteristic matric-es of differential opera-tors / Vadim Mogilevskii // Український математич-ний конгрес.– Київ, 2009.

33. Mogilevskii V. Minimal spectral functions of an ordinary differential operator / V. Mogilevskii // 21-th international workshop on operator theory and applications IWOTA 2010. Book of Abstracts. – Berlin, 2010. – P. 134-135.

34. Могилевский В.И. О симметрических операторах с вещественными дефектными подпространствами максимальной размерности / В.И. Могилевский // Международная конференция по современному нализу.–Донецк, 2011. – С. 79.

35. Mogilevskii V.I. Boundary conditions for general symmetric systems with arbitrary defi-ciency indices / V.I. Mogilevskii // International Conference " Spectral Theory and Dif-ferential Equations (STDE-2012)" in honor of Vladimir Marchenko's 90th birthday. Book of Abstracts. -– Kharkiv, 2012. – P. 73 - 74.

36. Mogilevskii V. On Titchmarsh – Weyl functions and eigenfunction expansions of first-order symmetric systems / Vadim Mogilevskii // International Conference " Spectral Theory and Differential Operators". Book of Abstracts . -– Graz, 2012. – P. 27-29.

37. Mogilevskii V. On eigenfunction expansions of first-order symmetric systems and ordinary differential operators of an odd order / Vadim Mogilevskii // 3rd Najman conference on spectral problems for operators and matrices. -– Biograd, 2013.

38. Mogilevskii V.I. On characteristic matrices and spectral functions of two singular point symmetric systems / V.I. Mogilevskii // International conference "Spectral theory and differential equations"dedicated to the centenary of B.M. Levitan. Book of Abstracts.– Moscow, 2014. – P. 21-22.

39. Mogilevskii V. On characteristic matrices and spectral functions of first-order symmetric systems / Vadim Mogilevskii // International conference IWOTA 2014. Book of Abstracts.– Amsterdam, 2014. – P. 40-41.

АНОТАЦІЇ

Могілевський В.Й. Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. – Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

В роботі досліджуються спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем. Теорію граничних трійок та їх функцій Вейля поширено на відношення з нерівними індексами дефекту. Отримано параметризацію самоспряжених розширень з виходом в ширший простір.

Описано спектральні властивості самоспряжених розширень симетричного оператора з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності.

Знайдено критерій існування та отримано компактний опис самоспряжених розділених граничних умов для симетричних систем. Введено та досліджено матричні псевдоспектральні функції для сингулярних систем. Для систем з регулярною кінцевою точкою запропоновано природну конструкцію вкороченої матричної псевдоспектральної функції та отримано параметризацію таких функцій безпосередньо в термінах граничних умов.

Теорію Вейля - Тітчмарша поширено на диференціальні оператори непарного порядку.

Ключові слова: симетричне відношення, функція Вейля, самоспряжене розширення , симетрична система, характеристична матриця, псевдоспектральна функція.

Могилевский В.И. Спектральные свойства симметрических линейных отношений и дифференциальных систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В работе исследуются спектральные свойства симметрических линейных отношений и дифференциальных систем. Теория граничных троек и их функций Вейля распространяется на отношения с неравными индексами дефекта. Получена параметризация самосопряженных расширений с выходом в более широкое пространство.

Описаны спектральные свойства самосопряженных расширений симметрического оператора с вещественными дефектными подпространствами максимальной размерности.

Найден критерий существования и получено компактное описание самосопряженных распадающихся граничных условий для симметрических систем. Введены и исследованы матричные псевдоспектральные функции для сингулярных систем. Для систем с регулярной концевой точкой предложена естественная конструкция укороченной матричной псевдоспектральной функции и получена параметризация таких функций непосредственно в терминах граничных условий.

Теория Вейля - Титчмарша распространена на дифференциальные операторы нечетного порядка.

Ключевые слова: симметрическое отношение, функция Вейля, самосопряженное расширение, симметрическая система, характеристическая матрица, псевдоспектральная функция.

Mogilevskii V.I. Spectral properties of symmetric linear relations and differential systems.– Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.01—mathematical analysis. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2016.

We study spectral properties of symmetric linear relations and differential systems. The theory of boundary triplets and their Weyl functions is extended to relations with unequal deficiency indices. For such relations various classes of extensions are described in terms of abstract boundary conditions. A parametrization of exit space self-adjoint extensions is obtained. A certain geometrical properties of exit space extensions are characterized.

Spectral properties of self-adjoint extensions of symmetric operators with real defect subspaces of the maximal dimension are described.

For singular symmetric systems boundary conditions of various classes are described in a compact form. We derive also a criterium for existence and specify a compact description of self-adjoint separated boundary conditions.

We introduce and investigate matrix pseudospectral functions for singular systems. A parametrization of characteristic matrices and pseudospectral functions immediately in terms of admissible boundary conditions is obtained.

A natural construction of a truncated pseudospectral function is suggested for systems with a regular endpoint and the Titchmarsh - Weyl theory is extended to such systems. We parameterize all m-functions and truncated pseudospectral functions immediately in terms of boundary conditions.

The Titchmarsh formula for the Stourm - Liouville operator on the axis is extended to arbitrary (unnecessarily Hamiltonian) symmetric systems.

The Titchmarsh - Weyl theory is extended to differential operators of an odd order.

Key words: symmetric relation, Weyl function, self-adjoint extension, symmetric system, characteristic matrix, pseudospectral function.