Національна академія наук України
Інститут прикладної математики і механіки

На правах рукопису

Могілевський Вадим Йосипович

УДК 517.984.46: 517.927.25

Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант
доктор фізико-математичних наук
Маламуд Марк Мордкович

Київ 2016

ЗМІСТ

ВСТУП **5**

1 Огляд літератури та постановка задач **10**

1.1. Теорія розширень симетричних лінійних відношень (операторів) 10

1.1.1. Метод граничних трійок 10

1.1.2. Характеристична функція, Q-функція та функція Вейля 12

1.1.3. Розшиерння з виходом у ширший простір та узагальнені резольвенти 13

1.2. Спектральні та псевдоспектральні функції симетричних диференціальних операторів та систем 15

2 Розширення симетричних операторів з довільними індексами дефекту **22**

2.1. Попередні відомості 22

2.1.1. Лінійні відношення 22

2.1.2. Функції розподілу та неванлинівськи функції 23

2.1.3. Симетричні та самоспряжені відношення та оператори 24

2.1.4. Узагальнені резольвенти симетричних відношень 25

2.1.5. Простори $\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})$ та $L^2(\Sigma;\mathcal{H})$ 26

2.1.6. Клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ 28

2.2. Граничні трійки з нерівними масштабними просторами 31

2.3. γ-поле и функция Вейля 36

2.4. Параметризація самоспряжених розширень 41

2.5. Граничні пари та їхні функції Вейля 51

2.6. Симетричні оператори з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності 59

3 Симетричні системи **65**

3.1. Позначення 65

3.2. Означення симетричної системи. Мінімальні та максимальні відношення . 66

3.3. Формальні індекси дефекту та формули Неймана 71

3.4. Граничні пари та граничні трійки для симетричних систем 75

3.4.1. Граничний комплекс 75

3.4.2. Граничні трійки для визначених симетричних систем 78
3.4.3. Граничні пари для систем з регулярною кінцевою точкою 83
3.4.4. Випадок гамільтоновоі системи 89
3.4.5. Граничні трійки для визначених систем з регулярною кінцевою точкою 89
3.5. Індекси дефекту визначених систем 90
3.6. Граничні умови для симетричних систем 92

4 Узагальнені резольвенти та характеристични матриці симетричних систем 98
4.1. Узагальнені резольвенти мінімального відношення 98
4.2. $\mathcal{L}^2_\Delta$-розв'язки граничних задач 101
4.3. Характеристичні матриці 105
4.4. Випадок максимального індексу дефекту 115
4.4.1. Матриця $W(\lambda)$ 115
4.4.2. Квазірегулірні системи 121
4.5. Характеристичні матриці систем з максимальним індексом дефекту 125
4.6. Характеристичні матриці гамільтонових систем 127

5 m-функції симетричних систем з регулярною кінцевою точкою 129
5.1. U-визначені чистеми. Відношення T 129
5.2. m-функцції визначених систем у випадку a1 132
5.2.1. Узагальнені резольвенти відношення T 132
5.2.2. m-функції 134
5.2.3. Випадок максимального індекса дефекту 140
5.3. m-функції у випадку a2 146
5.3.1. Узагальнені резольвенти відношення T 146
5.3.2. $\mathcal{L}^2_\Delta$-розв'язки граничних задач 148
5.3.3. m-функції 153
5.3.4. Функція Гріна 156
5.4. m-функції гамільтонових систем 158
5.4.1. Узагальнені резольвенти відношення T 158
5.4.2. m-функції 159
5.4.3. Квазірегулярні гамільтонові системи 161
5.4.4. Канонични системи 165

6 Псевдоспектральні та спектральні функції симетричних систем 167
6.1. Псевдоспектральні та спектральні функції повної вимірності n 167
6.1.1. q-псевдоспектральні та псевдоспектральні функції 167
6.1.2. Псевдоспектральні та спектральні функції визначених систем 173
6.1.3. Випадок визначеної системи з регулярною кінцевою точкою 178

6.2. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції 179

6.3. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції визначених систем у випадку a1 183

6.3.1. Параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій 183

6.3.2. Випадок рівних мінімальних індексів дефекту 187

6.3.3. Приклад 189

6.4. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції у випадку a2 192

6.4.1. Вкорочені псевдоспектральні функції та спектри самоспряжених розширень . . 192

6.4.2. Випадок мінімальних індексів дефекту 195

6.5. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції гамільтонових систем 197

6.5.1. Параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій гамільтонових систем 197

6.5.2. Випадок квазірегулярної системи 201

6.5.3. Випадок мінімальних індексів дефекту 205

7 Характеристичні матриці граничних задач з розділеними граничними умовами 208

7.1. $\mathcal{L}^2_\Delta$-розв’язки граничних задач з розділеними граничними умовами 208

7.2. m-функції та характеристичні матриці 215

7.3. Частинні випадки 220

7.3.1. Випадок нульових формальних індексів дефекту 220

7.3.2. Випадок гамільтонової системи 221

8 Деякі спектральні властивості диференціальних операторів 223

8.1. Диференціальні вирази та відповідні симетричні системи 223

8.2. Граничні трійки та граничні умови для диференціальних виразів 227

8.3. m-функції та спектральні функції для HD-виразів 233

8.3.1. m-функції для HD-виразів 233

8.3.2. Спектральні функції для HD-виразів 238

8.4. m-функції та спектральні функції для SD-виразів 240

8.4.1. m-функції для SD-виразів 240

8.4.2. Випадок квазірегулярного SD-виразу 245

8.4.3. Спектральні функції для SD-виразів 246

8.4.4. SD-вирази з мінімальними індексами дефекту 249

8.4.5. Приклад: оператор диференціювання 3-го порядку 252

8.5. Диференціальні вирази з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності 254

ВИСНОВКИ 256

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 258

ВСТУП

Актуальність теми. Багато проблем математичної фізики та квантової механіки зводиться до дослідження спектральних властивостей деякого симетричного диференціального оператора. Узагальненням такого оператора є симетрична диференціальна система першого порядку, коефіцієнтами якої є $n \times n$-матриці. Зокрема, до системи першого порядку спеціального вигляду зводяться симетричний диференціальний оператор довільного порядку з матричними коефіцієнтами та рівняння струни Крейна-Феллера. Крім того, ряд важливих фізичних задач також призводять до симетричної системи. Тому дослідження симетричних диференціальних операторів та систем привертало та продовжує привертати велику увагу.

Ефективний метод дослідження означених операторів та систем базується на теорії розширень симетричних операторів у гільбертовому просторі. Ця теорія була започаткована Дж. фон Нейманом і потім широко розвинена М.Г. Крейном та його численними послідовниками. В роботах Дж. Келкіна та порівняно недавніх роботах Ф.С. Рофе-Бекетова, В.І. Горбачук, М.Л. Горбачука, А.Н. Кочубея, В.М. Брука, В.А. Михайлеця, Ю.М. Арлінського та інших математиків отримав розвиток метод граничних трійок в теорії розширень. Згідно з цим методом розширення симетричного оператора описуються абстрактними граничними умовами, які в застосуваннях до диференціальних рівнянь приймають вигляд граничних умов на рішення цих рівнянь. В.О. Деркач та М.М. Маламуд для кожної граничної трійки впровадили функцію Вейля, яка для диференціальних операторів збігається з класичною функцією Вейля. Це дозволило описати деякі спектральні та геометричні властивості самоспряжених розширень з виходом в ширший простір в термінах λ-залежних граничних умов та функції Вейля. Слід зазначити, що навіть у простіших випадках сингулярні диференціальні оператори непарного порядку та негамільтонові системи породжують симетричні оператори з нерівними індексами дефекту. Поруч з тим у перелічених роботах теорія граничних трійок та відповідних функцій Вейля розроблена лише для операторів з рівними індексами дефекту, що обмежує її застосування до диференціальних операторів та систем.

Головною проблемою спектральної теорії симетричних диференціальних операторів та систем є характеризація спектра та доведення можливості зображення заданої функції у вигляді ряду за власними функціями або інтегралу за спектральною функцією. Спектральна теорія диференціальних операторів другого порядку розроблена в класичних роботах Ж.Штурма та Ж. Ліувілля для регулярних операторів і Г. Вейля та Е.Ч. Тітчмарша для сингулярних операторів. Існування матричної спектральної функції для диференціального оператора довільного порядку різними методами доведено М.Г. Крейном, К. Кодаірой, Б.М. Левітаном, А.В. Штраусом. Параметризація всіх функцій Вейля квазірегулярного диференціального оператора на півосі безпосередньо в термінах самоспряженої граничної умови на нескінченності отримана в роботах М.Л. Горбачука, Ч. Фултона, О.М. Холькна; в теорії струни аналогічна параметризація отримана І.С. Кацем та М.Г. Крейном. Фундаментальний внесок в спектральну теорією диференціальних операторів зробили також Ю.М. Березанський, І.М. Гельфанд, І.М. Глазман, Е.А. Коддінгтон, А.Г. Костюченко, Н.Левинсон, В.О. Марченко, М.А.Наймарк, Ф.С. Рофе-Бекетов та багато інших математиків.

Дослідження сингулярних диференціальних операторів непарного порядку викликає певні труднощі. Спроба поширити теорію Вейля-Тітчмарша на такі оператори міститься в роботах У.Н. Еверіта та В. Крішни Кумара, однак результати цих робіт неможна вважати завершеними.

Спектральні властивості симетричних диференціальних систем, особливо з виродженим ваговим коефіцієнтом, є менш дослідженими. Проблема полягає в тому, що такі системи потребують уведення до розгляду природно визначеної псевдоспектральної функції замість спектральної, оскільки остання може взагалі не існувати. Крім того, негамільтонові системи не припускають розділених самоспряжених граничних умов, що ускладнює поширення теорії Вейля-Тітчмарша на такі системи.

Характеристика спектра переважно регулярних систем та доведення розкладу функцій спеціального класу за власними функціями граничної задачі міститься в монографіях І.Ц. Гохберга та М.Г. Крейна; Ф. Аткінсона. В роботах В.І. Когана та Ф.С. Рофе-Бекетова; М. Леша та М.М. Маламуда досліджуються індекси дефекту сингулярних систем.

І.С. Кац розробив метод неподільних інтервалів та довів існування скалярних псевдоспектральних функцій для гамільтонових систем з 2×2 - коефіцієнтами. Опис розділених самоспряжених граничних умов для гамільтонової системи на півосі, узагальнення теорії Вейля-Тітчмарша на такі системи та доведення існування "вкороченої" матричної псевдоспектральної функції розміру $n/2$ міститься в роботах Д.Хінтона та Дж.К. Шао; Д. Хінтона та А. Шнайдера; А. Кралла; А.Дайксми, Г. Лангера та Х. де Сну. А. Кралл також узагальнив формулу Тітчмарша для характеристичної матриці оператора Штурма-Ліувілля на осі на випадок гамільтонової системи на осі. В роботі Д. Хінтона та Дж.К. Шао отримано параметризацію всіх функцій Вейля квазірегулярної гамільтонової системи на півосі в термінах самоспряжених граничних умов. Найбільш повні результати стосовно "вкорочених" псевдоспектральних функцій регулярних гамільтонових систем можна знайти в монографіях Д.З. Арова та Г. Дима; А.Л. Сахновича, Л.А. Сахновича та І.Я. Ройтберг. Тут, зокрема, міститься цілком природне означення таких функцій та їх параметризація в термінах матриці монодромії та неванлинівського параметра.

В роботах Г. Лангера та Б. Тексторіуса отримано параметризацію усіх "повних" $n \times n$-матричних псевдоспектральних функцій загальної (необов'язково гамільтонової) регулярної системи в термінах граничних умов. Негамільтонові системи на півосі з мінімально можливими (нерівними) індексами дефекту розглядалися Д. Хінтоном та А. Шнайдером. В роботі цих авторів уведена прямокутна функція Вейля, яка не є неванлинівською функцією. Крім того, в роботі Г. Бенке та Д. Хінтона для негамільтонової системи на осі з нульовими індексами дефекту доведено формулу Тітчмарша.

З огляду на сказане уявляється актуальним подальший розвиток спектральних теорій симетричних операторів у гільбертовому просторі та диференціальних операторів і систем з метою поширення деяких результатів цих теорій на симетричні оператори з нерівними індексами дефекту, довільні (можливо негамільтонові) системи та диференціальні оператори непарного порядку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана відповідно до плану наукової роботи ІПММ НАН України за темою "Локальні, глобальні та асимптотичні властивості розв'язків сингулярних, спектральних і некласичних задач для еліптичних та еволюційних рівнянь і варіаційних нерівностей " РК №0111U000481, затвердженою постановою Бюро Відділення математики НАН України від 29.04.2010, в рамках наукової теми "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів”, № держреєстрації 0115U000556, і в рамках проекту "Spectral analysis of singularly perturbed self-adjoint operators DFG Project 436 UKR 113/85/0-1.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є характеризація деяких спектральних властивостей симетричних операторів у гільбертовому просторі, а також симетричних диференціальних операторів та систем. Для цього необхідно вирішити наступні задачі: удосконалити теорію граничних трійок та відповідних функцій Вейля з метою її застосування до симетричних операторів з нерівними індексами дефекту; за допомоги цієї теорії описати спектральні та геометричні властивості різних класів розширень симетричних лінійних відношень (операторів); дослідити спектр самоспряжених розширень симетричного оператора з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності; описати в термінах граничних умов різні класи розширень мінімального оператора (лінійного відношення), породженого симетричним сингулярним диференціальним оператором або системою; описати спектральні та псевдоспектральні функції диференціальних операторів та систем за допомоги граничного параметра; охарактеризувати спектральні функції систем на осі в термінах об’єктів, пов’язаних із звуженням цієї системи на півосі; поширити поняття функції Вейля на диференціальні оператори непарного порядку та описати за її допомоги спектральні функції таких операторів.

Методи дослідження. Доведення результатів роботи засновано на методах теорії розширень симетричних операторів у гільбертовому просторі та спектральної теорії граничних задач для диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) Теорія граничних трійок та відповідних функцій Вейля (Q-функцій) поширена на симетричний оператор A з можливо нерівними індексами дефекту. Описані розширення таких операторів в термінах абстрактних граничних умов.

2) Отримана параметризація та досліджені деякі геометричні властивості самоспряжених розширень оператора A з виходом в ширший простір.

3) Охарактеризовані спектральні властивості самоспряжених розширень симетричного абстрактного та диференціального операторів з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності.

4) У компактному вигляді описані граничні умови різних класів для сингулярних симетричних диференціальних систем та диференціальних операторів. Зокрема, знайдено критерій існування та отримано компактний опис розділених самоспряжених граничних умов.

5) Запропоновано природну конструкцію псевдоспектральної функції для сингулярної симетричної системи. Для системи на півосі отримано параметризацію всіх таких функцій в термінах граничних умов.

6) Теорію Вейля-Тітчмарша поширено на негамільтонові системи на півосі. Отримано параметризацію вкорочених псевдоспектральних функцій системи на півосі в термінах граничних умов.

7) Доведено аналог формули Тітчмарша для характеристичної матриці системи на осі. Отримано параметризацію всіх ортогональних спектральних функцій такої системи, що відповідають розділеним самоспряженим граничним умовам.

8) За допомоги перелічених результатів досліджено деякі спектральні властивості диференціальних операторів довільного порядку з матричними коефіцієнтами. Зокрема, теорію Вейля-Тітчмарша поширено на оператори парного порядку з нерівними індексами дефекту та непарного порядку з як рівними, так і нерівними індексами дефекту.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Вони можуть бути використані при вивчені граничних задач, що виникають в математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. На захист виносяться лише ті результати сумісних робіт, які отримані здобувачем особисто. У сумісних роботах з М.М. Маламудом здобувачу належать такі основні результати: в роботі [93] – твердження 2 та 6, теореми 2 та 4; в роботі [94]– твердження 3.12 , 5.2 та 6.7, теореми 5.5 та 6.2, наслідок 5.7; в роботі [95] – твердження 7, теореми 10 та 12; в роботі [31] – теореми 1 та 3; в роботі [32] – теореми 2 та 4. Внесок співавторів в результати робіт [74, 33, 51] є рівносильним. В роботі [75] здобувачеві належать у рівних долях із співавторами результати розділу 3.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на таких конференціях та семінарах:

International Conference on Functional Analysis and its Applications, Lviv, 2002.

Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 2006.

International Conference “Modern Analysis and Applications (MAA 2007)” dedicated to the centenary of Mark Krein, Odessa, 2007.

International Conference “Infinite Dimensional Analysis and Topology”, Ivano-Frankivsk, 2009.

Український математичний конгрес, Київ, 2009.

21-th International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 2010, Berlin, Germany, 2010.

Міжнародна конференція з сучасного аналізу, Донецк, 2011.

International Conference“ Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012)”, Kharkiv, 2012.

International Conference“ Spectral Theory and Differential Operators”, Graz, Austria, 2012.

The Third Najman Conference on Spectral Problems for Operators and Matrices, Biograd, Croatia, 2013.

International Conference “Spectral Theory and Differential Equations” dedicated to the centenary of B.M. Levitan, Moscow, 2014.

International Conference IWOTA 2014, Amsterdam, Netherlands, 2014.

Семінар відділу рівнянь з частинними похідними ІПММ НАН України, керівник д. ф.-м. н., професор А.Є. Шишков, 2012, 2013.

Семінар з функціонального аналізу ДонНУ, керівник д. ф.-м. н. М.М. Маламуд.

Київський семінар з функціонального аналізу, Інститут математики НАН України, керівники акад. НАН України Ю.М. Березанський, чл.-кор. НАН України М.Л. Горбачук, чл.-кор. НАН України Ю.С. Самойленко, 2014.

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковано в 27 статтях в наукових журналах [32] - [33], [36] - [38], [51],[74], [75], [93] - [110].

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури та постановка задач

Література з терії розширень симетричних операторів та спектральної теорії граничних задач є дуже виликою. У цьому огляді висвітлюються лише роботи, які мають безпосереднє відношення до результатів дисертації.

1.1. Теорія розширень симетричних лінійних відношень (операторів)

1.1.1. Метод граничних трійок

Як відомо, природним узагільненням замкненого лінійного оператора з гільбертова простора $\mathfrak{H}_1$ в гільбертів простір $\mathfrak{H}_2$ є лінійне відношення з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, тобто підпростір $\theta \subset \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Множину відношень з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ (в $\mathfrak{H}$) будемо позначати через $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ ($\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$). Ототожнюючи замкнений оператор T з $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ з його графіком, можна вважати, що $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Аналогічно оператору для відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ визначаються його область визначення $\operatorname{dom} \theta$, образ $\operatorname{ran} \theta$, ядро $\ker \theta$, а також спряжене відношення $\theta^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_1)$. Многозначна частина $\operatorname{mul} \theta \subset \mathfrak{H}_2$ відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ визначається рівністю

$$\operatorname{mul} \theta = \{f' \in \mathfrak{H}_2 : \{0, f'\} \in \theta\}.$$

Узагальненням симетричного (самоспряженого) оператора є симетричне (самоспряжене) відношення, тобто відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$, таке що $A \subset A^*$ (відп. $A = A^*$). Відношення $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ називається власним розширенням симетричного відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ і відноситься до класу Ext_A, якщо $A \subset \widetilde{A} \subset A^*$.

Основною задачею теорії розширень симетричних відношень (операторів) є опис розширень $\widetilde{A} \supset A$ відношення $A \subset A^*$ (зокрема, самоспряжених розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$) і дослідження їх властивостей. В рамках класичного підходу за допомоги формул Неймана або їх узагальнень різні класи розширень $\widetilde{A} \in Ext_A$ описуються в термінах їх перетворень Келі V, що діють з дефектного підпростору $\mathfrak{N}_\lambda(A) = \ker(A^* - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, в дефектний підпростір $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}(A)$ (див монографії [2, 14, 40], статті [52, 56, 59, 24, 49] та літературу в них). Параметризацію деяких класів розширень щільно визначеного оператора $A \subset A^*$ в термінах операторів C, що діють в $\ker A^*$, отримано в [9, 4]. У застосуваннях до крайових задач оператор C перетворюється в оператори, що визначають граничні умови.

Порівнянно недавно в теорії розширень отримав розвиток підхід, який можна назвати методом граничних трійок. Перевага цього підходу полягає в тому, що у застосуваннях до диференціальних операторів він дозволяє описувати різні класи розширень мінімального оператора безпосередньо в термінах граничних умов. Метод граничних трійок бере початок з роботи Дж. Келкіна [58], основна ідея якої у спрощеному вигляді полягає в наступному. Із щільно визначеним симетричним оператором A пов'язується допоміжний гільбертів простір $\widetilde{\mathcal{H}}$ і граничний оператор $\Gamma : \operatorname{dom} A^* \to \widetilde{\mathcal{H}}$, головною властивістю якого є тотожність

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (J\Gamma f, \Gamma g), \quad f, g \in \operatorname{dom} A^* \tag{1.1}$$

з оператором J в $\widetilde{\mathcal{H}}$, таким що $J^* = J^{-1} = J$. Для кожного $f \in \operatorname{dom} A^*$ елемент $\Gamma f \in \widetilde{\mathcal{H}}$ є "абстрактним граничним значенням"елемента f. Самоспряжені розширення $\widetilde{A} \in Ext_A$ параметризуються гіпермаксимальними симетиричними (відносно J) підпросторами $\theta \subset \widetilde{\mathcal{H}}$, пов'язаними з $\widetilde{A}$ рівністю $\theta = \Gamma \operatorname{dom} \widetilde{A}$. У випадку оператора A з рівними індексами дефекту $n_+(A) = n_-(A)$ зручним для застосувань до диференціальних операторів виявляється вибір $\widetilde{\mathcal{H}}$, Γ та J у вигляді

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \qquad J = J_{\mathcal{H}} := \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathcal{H}} \\ -I_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

де $\mathcal{H}$ – деякий гільбертів простір. У цьому випадку тотожність (1.1) перетворюється в абстрактну тотожність Гріна

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*, \tag{1.3}$$

а наведена в [58] конструкція стає граничною трійкою в сенсі наступного означення, введеного незалежно від [58] в роботах А.Н. Кочубея [21] та В.М. Брука [6].

Означення 1.1. Нехай $A \subset A^*$ – щільно визначений оператор в $\mathfrak{H}$. Сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, що складається з гільбертового простору $\mathcal{H}$ та лінійних операторів $\Gamma_j : \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{H}, \ j \in \{0, 1\}$, називається граничною трійкою (простором граничних значень) для A^*, якщо оператор $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ є сюр'єктивним і виконується тотожність (1.3).

Наведене означення граничної трійки з'явилось як абстрактне узагальнення результатів з опису самоспряжених граничних умов для диференціальних операторів, отриманих в роботах Ф.С. Рофе-Бекетова [42] та М.Л. Горбачука [12, 13]. Якщо $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^*, то множина усіх гіпермаксимальних симетиричних (відносно $J_{\mathcal{H}}$) підпросторів в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ збігається з множиною самоспряжених відношень в $\mathcal{H}$. Крім того, в [42] було доведено, що кожне відношення $\theta = \theta^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ допускає зображення

$$\theta = \{\{h, h'\} \in \mathcal{H}^2 : (\cos B)h + (\sin B)h' = 0\}$$

з деяким $B = B^* \in [\mathcal{H}]$. Тому внаслідок [58] усі самоспряжені розширення $\widetilde{A} \in Ext_A$ параметризуються операторами $B = B^* \in [\mathcal{H}]$ за допомоги абстрактних самоспряжених граничних умов

$$\operatorname{dom} \widetilde{A} = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \cos B \cdot \Gamma_0 f + \sin B \cdot \Gamma_1 f = 0\}, \qquad \widetilde{A} = A^* \upharpoonright \operatorname{dom} \widetilde{A}, \tag{1.4}$$

аналогічних самоспряженим граничним умовам для оператора Штурма - Ліувілля [28]. Крім того, в [11, 6, 21] описано максимальні дисипативні (акумулятивні), симетричні та інші класи абстрактних граничних умов. За допомоги граничних трійок В.А. Михайлець в [35] описав різні класи власних розширень оператора A (нормально розв'язні, фредгольмові, тощо), а також довів низку теорем про структуру спектра самоспряжених розширень напівобмеженого оператора.

В різний спосіб граничні трійки узагальнювались на нещільно визначені симетричні оператори та симетричні відношення в [7, 27]. Згідно з [7] гранична трійка для відношення $A \subset A^*$ в $\mathfrak{H}$ визначається як сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, що складається з гільбертового простору $\mathcal{H}$ та лінійних операторів Γ_j, які вже діють з A^* в $\mathcal{H}$ і замість (1.3) задовільняють тотожності

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\},\ \widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*.$$

Крім того, оператор $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ є сюр'єктивним. На таку трійку без труднощів узагальнюються результати стосовно опису розширень $\widetilde{A} \in Ext_A$, отримані для щільно визначеного оператора A.

1.1.2. Характеристична функція, Q-функція та функція Вейля

Поняття характеристичної функціє (х.ф.) симетричного оператора було вперше уведено в роботі М.С. Лівшица [29] для щільно визначеного оператора $A \subset A^*$ зі скінченними індексами дефекту і потім узагальнено в роботі А.В. Штрауса [49] на нещільно визначені оператори. В перелічених роботах х.ф. визначається на базі класичної теорії розширень. Узагальнюючи це означення, А.Н. Кочубей в [23] визначив для довільної граничної трійки $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ щільно визначеного оператора A х.ф. $C(\lambda)$ співвідношенням

$$C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_0) f_\lambda = (\Gamma_1 - i\Gamma_0) f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda(A),\ \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

В [23] доведено, що $C(\lambda)$ є голомофною стискуючою оператор-функцією. Крім того, $C(\lambda)$ є унітарним інваріантом простого симетричного оператора. В [22] описано різні види спектра розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$ в термінах х.ф. $C(\lambda)$ та абстрактних граничних умов (1.4).

Іншим важливим об'єктом теорії розширень є уведена М.Г. Крейном Q-функція. Нехай A – симетричне відношення з $n_+(A) = n_-(A)$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$ і $\mathcal{H}$ – допоможний гільбертів простір. Згідно з [26, 88] Q-функцією пари $\{A, \widetilde{A}\}$ є оператор-функція $Q(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to [\mathcal{H}]$, що задовільняє тотожності

$$Q(\mu) - Q^*(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda}) \gamma^*(\lambda) \gamma(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Тут $\gamma(\lambda)$ – γ-поле, що визначається співвідношенням

$$\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \gamma(\lambda_0),$$

де $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ і $\gamma(\lambda_0)$ – ізоморфізм з $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. В роботах [85, 88] дається повний внутрішній опис Q-функцій і доводиться, що Q-функція є унітарним інваріантом простого симетричного оператора.

В роботах В.О. Деркача та М.М. Маламуда [60, 30] уведено новий об'єкт – функцію Вейля граничної трійки $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для відношення $A \subset A^*$. Ця функція визначається як оператор-функція $M(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to [\mathcal{H}]$, що задовільняє співвідношенню

$$\Gamma_1 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = M(\lambda) \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

де $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \{\{f, \lambda f\} : f \in \mathfrak{N}_\lambda(A)\}$. Згідно з [60, 30] функція Вейля є Q-функцією пари $\{A, A_0\}$ з $A_0 = \ker \Gamma_0$ і, отже, володіє усіма властивостями Q-функції; зворотно, кожна Q-функція пари $\{A, \widetilde{A}\}$ є функцією Вейля деякої граничної трійки для A^*. Звідси випливає, що функція Вейля $M(\cdot)$ є рівномірно строгою неванлинівською оператор функцією (це означає, що $M(\cdot)$ є голоморфною, $\mathrm{Im} M(\lambda) \gg 0,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$, і $M^*(\lambda) = M(\overline{\lambda}),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Крім того, функція Вейля $M(\lambda)$ граничної трійки пов'язана з х.ф. $C(\lambda)$ тієї ж трійки рівністю [30]

$$C(\lambda) = (M(\lambda) - i)(M(\lambda) + i)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Як показано в [30, 15], за вдалого вибору граничної трійки функція Вейля $M(\lambda)$ збігається з класичними об'єктами. Зокрема, для оператора Штурма - Ліувілля на півосі у випадку граничної точки функція Вейля довільної граничної трійки для максимального оператора є класичною функцією Вейля - Тітчмарша [28, 40].

1.1.3. Розшиерння з виходом у ширший простір та узагальнені резольвенти

Нехай A – симетричне відношення в $\mathfrak{H}$, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ – гільбертів простір, $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ і $A \subset \widetilde{A}$. За цих умов відношення $\widetilde{A}$ називається самоспряженим розширенням A з вихідом в ширший простір. Множину таких розширень позначимо через $\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, а множину каноничних розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ – через $\mathrm{Self}(A)$. Ясно, що $\mathrm{mul}\, A \subset \mathrm{mul}\, \widetilde{A}$ для кожного $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$. Покладемо $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ $(\mathrm{Self}_0(A))$ – множина всіх $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ (відп. $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$), таких що $\mathrm{mul}\, A = \mathrm{mul}\, \widetilde{A}$. У випадку оператора A (тобто коли $\mathrm{mul}\, A = \{0\}$) $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ є множиною усіх розширень $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, які є операторами. Якщо, крім того, A є щільно визначеним, то $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A) = \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$. Класичний результат М.А. Наймарка полягає в тому, що $\widetilde{\mathrm{Self}}(A) \neq \emptyset$ для довільного симетричного оператора A. Кожне розширення $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ однозначно визначається узагальненою резольвентою $R(\lambda)$ та спектральною функцією $F(t)$ відношення A, які задаються рівностями

$$R(\lambda) = P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$F(t) = P_{\mathfrak{H}} E(t) \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

де $P_{\mathfrak{H}}$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$ і $E(t)$ – ортогональна спектральна функція відношення $\widetilde{A}$. Зв'язок між $R(\lambda)$ та $F(t)$ дається формулою обернення Стільтьєса

$$F(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^t \mathrm{Im} R(u + i\varepsilon)\, du. \tag{1.7}$$

У застосуваннях до класичних проблем (проблема моментів, розклад за власними функціями крайових задач) спектральні функції відповідних симетричних операторів породжують розв'язки цих проблем. Так, наприклад, для вкороченої степеневої проблеми моментів спектральні функції пов'язаного з цією проблемою нещільно визначеного симетричного оператора A є її розв'язками, а спектральні функції, породжені розширеннями $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$, є розв'язками деякого екстремального типу [61]. Тому важливою проблемою теорії розширень є зручна параметризація узагальнених резольвент, спектральних функцій та розширень $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ відношення A (внаслідок (1.5) - (1.7) достатньо параметризувати лише один з цих об'єктів).

В роботі А.В. Штрауса [50] отримано параметризацію узагальнених резольвент $R(\lambda)$ нещільно визначеного оператора $A \subset A^*$, породжених операторами $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$. Саме, в цій роботі доведено, що рівність

$$R(\lambda) = (\widetilde{A}(\lambda) - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{1.8}$$

задає бієктивну відповідність між зазначеними резольвентами $R(\lambda)$ і голоморфними функціями $\widetilde{A}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to Ext_A$, такими що $\widetilde{A}(\lambda)$ є максимальним акумулятивним оператором і перетворення Келі $K(\lambda) = (\widetilde{A}(\lambda) + i)(\widetilde{A}(\lambda) - i)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, задовільняє деякій граничній умові на нескінченності. В [67] результати [50] поширено на довільні узагальнені резольвенти $R(\lambda)$. Точніше, в [67] доведено, що (1.8) задає бієктивну відповідність між узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ відношення $A \subset A^*$ і голоморфними функціями $\widetilde{A}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to Ext_A$, такими що $\widetilde{A}(\lambda)$ є максимальним акумулятивним відношенням. У випадку $n_+(A) = n_-(A)$ інша параметризація узагальнених резольвент відношення $A \subset A^*$ дається формулою М.Г. Крейна [25, 26, 88]

$$R_\tau(\lambda) = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma(\lambda)(\tau(\lambda) + M(\lambda))^{-1}\gamma^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

де $A_0 \in \mathrm{Self}(A)$ – фіксоване розширення, $\gamma(\lambda)$ – γ-поле і $M(\lambda)$ – Q-функція пари $\{A, A_0\}$. Формула (1.9) задає бієктивну відповідність $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ між узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ та функціями $\tau = \tau(\lambda)$, що належать до класу $\widetilde{R}(\mathcal{H})$ неванлинівських $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$-значних функцій. Цей клас складається з голоморфних функцій $\tau(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, таких що $\tau(\lambda)$ є максимальним дисипативним відношенням в $\mathcal{H}$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ і $\tau^*(\lambda) = \tau(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Крім того, в [88] показано, що розширення $\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, яке породжує узагальнену резольвенту $R_\tau(\lambda)$, належить до класу $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ тоді й тільки тоді, коли

$$s - \lim_{y \to \infty} \tfrac{1}{y}[M(iy) - (M(iy) - M^*(z_0))(M(iy) + \tau(iy))^{-1}(M(iy) - M(z_0))] = 0. \tag{1.10}$$

В роботах В.О. Деркача та М.М. Маламуда [60, 61, 30] знайдено зв'язок між формулою М.Г. Крейна (1.9) та граничними трійками. Саме, в цих роботах показано, що кожна гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* призводить до формули (1.9), в якій $A_0 = \ker \Gamma_0$, $\gamma(\lambda) = (\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}$, $M(\lambda)$ –функція Вейля трійки Π і

$$\tau(\lambda) = \Gamma(R_\tau^{-1}(\lambda) + \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

З (1.11) випливає, що узагальнена резольвента $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ допускає зображення (1.8) з

$$\widetilde{A}(\lambda) = \{\widehat{f} \in A^* : \{\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{f}\} \in -\tau(\lambda)\}. \tag{1.12}$$

Це твердження встановлює простий зв'язок між формулами М.Г. Крейна (1.9) та А.В. Штрауса (1.8). Крім того, з (1.8) та (1.12) випливає, що для кожного $g \in \mathfrak{H}$ елемент $f = R_\tau(\lambda)g$ є розв'язком абстрактної граничної задачі

$$\{f, \lambda f + g\} \in A^* \tag{1.13}$$

$$C_0(\lambda)\Gamma_0\{f, \lambda f + g\} - C_1(\lambda)\Gamma_1\{f, \lambda f + g\} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

де $C_j(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to[\mathcal{H}]$, $j\in\{0,1\}$, – пара голоморфних оператор-функції, таких що

$$\tau(\lambda)=\{C_0(\lambda),C_1(\lambda)\}:=\{\{h,h'\}\in\mathcal{H}^2:C_0(\lambda)h+C_1(\lambda)h'=0\},\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

(неванлинівська пара). Тому задача (1.13), (1.14) задає параметризацію

$$R_\tau(\lambda)=P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A}_\tau-\lambda)^{-1}\upharpoonright\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

узагальнених резольвент $R(\lambda)=R_\tau(\lambda)$ і розширень $\widetilde{A}=\widetilde{A}_\tau\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ в термінах абстрактного граничного параметра $\tau\in\widetilde{R}(\mathcal{H})$. Це твердження у випадку щільно визначеного оператора A доведено в [6]. В роботах [63, 64] знайдено простіший у порівнянні з (1.10) критерій, що дозволяє параметризувати клас $\mathrm{Self}(A)$. Саме в цих роботах показано, що $\widetilde{A}_\tau\in\widetilde{\mathrm{Self}_0}(A)$ тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$s-\lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{y}(\tau(iy)+M(iy))^{-1}=0,\qquad s-\lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{y}(\tau^{-1}(iy)+M^{-1}(iy))^{-1}=0.$$

Для доведення цього твердження в [63, 64] уведено нові об'єкти – граничну пару та її функцію Вейля. Гранична пара $\{\mathcal{H},\Gamma\}$ для A^* складається з гільбертового простору $\mathcal{H}$ та (можливо многозначного) лінійного відношення $\Gamma:A^*\to\mathcal{H}^2$, а її функція Вейля $M(\lambda)$ є $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$-значною функцією. Якщо Γ є оператором з $\operatorname{dom}\Gamma=A^*$, то гранична пара є граничною трійкою в сенсі означення 1.1, а функція $M(\lambda)$ є $[\mathcal{H}]$-значною функцією Вейля цієї трійки.

Гранична трійка $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ для A^* задовільняє рівності $\dim\mathcal{H}=n_\pm(A)$, що унеможливлює її застосування до відношень $A\subset A^*$ з нерівними індексами дефекту. Поруч з тим навіть у простіших випадках сингулярні диференціальні оператори непарного порядку та негамільтонові симетричні системи породжують симетричні відношення з нерівними індексами дефекту. В [44, 87] побудовано граничні трійки $\Pi'=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ для оператора A з довільними (можливо нерівними) індексами дефекту, в яких максимальні дисипативні розширення $\widetilde{A}\supset A$ параметризуються стисками з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$. Аналогом функції Вейля для такої трійки є стискуюча функція $C(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$ (згадана вище х.ф. А.Н. Кочубея), для якої, на відміну від функції Вейля $M(\cdot)$, не існує інтегрального зображення зі спектральною мірою. Цей факт ускладнює застосування трійки Π' та відповідної х.ф. $C(\cdot)$ в теорії розкладів за власними функціями диференціальних операторів. У зв'язку з цим уявляється цикавою така задача: розвити метод граничних трійок в напрямку його застосування до симетричних відношень A з $n_+(A)\neq n_-(A)$ із збереженням необхідних для застосувань властивостей об'єктів, пов'язаних з такими трійками. Ця задача розв'язувалась в статтях автора [97, 98, 104], результати яких увійшли в розділ 2 дисертаційної роботи.

1.2. Спектральні та псевдоспектральні функції симетричних диференціальних операторів та систем

Спектральна теорія симетричних диференціальних операторів є великою галуззю сучасної математики (див. монографії [28, 20, 40, 14] та літературу в них). Її важливою складовою є теорія розкладів за власними функціями, яка вирішує проблему зображення функцій у вигляді ряду за власними функціями або інтегралу за спектральною функцією. Припустимо, що на скінченному відрізку $\mathcal{I}=[a,b]$

задано граничну задачу

$$l[y] = -y'' + q(t)y = \lambda y, \quad q(t) = \overline{q(t)}, \ \ t \in \mathcal{I} \tag{1.15}$$

$$y'(a) = 0, \quad \cos\beta \cdot y(b) + \sin\beta \cdot y'(b) = 0, \tag{1.16}$$

яка складається з рівняння (1.15) для симетричного виразу $l[y]$ 2-го порядку та розділених самоспряжених граничних умов (1.16). Класичний результат теорії Штурма - Ліувілля полягає в тому, що власні значення задачі (1.15), (1.16) є дійсними, їх множина $\{\lambda_k\}$ є зчисленою і кожна функція $f \in L^2(\mathcal{I})$ допускає розклад в ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u(t, \lambda_k) \tag{1.17}$$

за ортонормовними власними функціями $u(t, \lambda_k)$ задачі (1.15), (1.16) з коефіцієнтами Фур'є c_k, що визначаються рівностями $c_k = \int\limits_{\mathcal{I}} f(t)u(t, \lambda_k)$. Якщо ж вираз $l[y]$ визначено на півосі $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ і $\varphi(t, \lambda)$ – розв'язок рівняння (1.15) з початковою умовою $\varphi(0, \lambda) = 1, \ \varphi'(0, \lambda) = 0$, то згідно з класичною теорією Вейля-Тітчмарша існує функція розподілу $\sigma(\cdot)$ (спектральна функція), така що кожна функція $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ допускає зображення

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, s)\widehat{f}(s)\, d\sigma(s), \tag{1.18}$$

Тут

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t, s) f(t)\, dt$$

– пертворення Фур'є функції f, що задовільняє рівності Парсеваля $||\widehat{f}||_{L^2(\sigma)} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. На практиці спектральна функція $\sigma(\cdot)$ знаходиться за допомоги формули обернення Стільтьєса

$$\sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^s \operatorname{Im} m(u + i\varepsilon) du, \tag{1.19}$$

де $m(\cdot)$ – неванлинівська функція, яка називається функцією Вейля – Тітчмарша. У простішому випадку граничної точки ця функція визначається співвідношенням

$$\varphi(t, \lambda)m(\lambda) - \psi(t, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

де $\psi(t, \lambda)$ – розв'язок рівняння (1.15) з початковою умовою $\psi(0, \lambda) = 0, \ \psi'(0, \lambda) = 1$.

Більш складною є теорія розкладів за власними функціями диференціальних виразів порядку $\eta = 2k$ вигляду (8.1) або $\eta = 2k+1$ вигляду (8.12). Припустимо, що такий вираз задано на проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle, \ -\infty \leq a < b \leq \infty$, і $c \in \mathcal{I}$. Крім того, нехай $m \leq \eta, \ B$ – матриця розміру $\eta \times m$ рангу m і

$$Y(t, \lambda) = (y_1(t, \lambda), \, \ldots, \, y_m(t, \lambda)) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C},$$

де $y_j(t, \lambda)$ – розв'язки рівняння $l[y] = \lambda y$, такі що квазіпохідні $y_j^{[k-1]}(\cdot, \lambda)$ задовільняють умові $(y_j^{[k-1]}(c, \lambda)$
B. Кожній фінітній функції $f \in L^2(\mathcal{I})$ відповідає перетворення Фур'є

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathcal{I}} Y^*(t, s) f(t) dt.$$

Матрична функція розподілу $\Sigma(s)$ розміру $m \times m$ називається спектральною функцією виразу $l[y]$, якщо справедливою є рівність Парсеваля $||\widehat{f}||_{L^2(\Sigma;\mathbb{C}^m)} = ||f||_{L^2(\mathcal{I})}$ і, отже, оператор $Vf = \widehat{f}$, визначений на фінітних функціях $f \in L^2(\mathcal{I})$, допускає продовження до ізометрії $V_\Sigma : L^2(\mathcal{I}) \to L^2(\Sigma;\mathbb{C}^m)$. Спектральна функція $\Sigma(\cdot)$ називається ортогональною, якщо V_Σ є унітарним оператором. Якщо $\Sigma(\cdot)$ – спектральна функція, то зворотне перетворення Фур'є функції $f(\cdot) \in L^2(\mathcal{I})$ задається рівністю

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(t,s)d\Sigma(s)\widehat{f}(s).$$

Згідно з [3, 20, 40, 14, 48] для кожного виразу $l[y]$ порядку η існує спектральна функція розміру $m = \eta$. Існує декілька способів доведення цього твердження, але найбільш прозорий підхід базується на теорії розширень симетричних операторів. Згідно з цим підходом виразу $l[y]$ ставиться у відповідність щільно визначений симетричний оператор L_{min} (мінімальний оператор), узагальнена резольвента якого $R(\lambda)$ допускає зображення [48]

$$(R(\lambda)f)(x) = \int_{\mathcal{I}} Y(x,\lambda)(\Omega(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J)Y^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt, \quad f(\cdot) \in L^2(\mathcal{I}). \tag{1.20}$$

Тут $\Omega(\lambda)$ – матрична неванлинівська функція розміру $\eta \times \eta$, яка називається характеристичною матрицею (х.м.). Кожній узагальненій резольвенті (1.20) (і, отже, кожному розширенню $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L_{min})$) відповідає спектральна функція $\Sigma(\cdot)$, яка задається формулою обернення Стільтьєса

$$\Sigma(s) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^s \mathrm{Im}\Omega(u + i\varepsilon)du. \tag{1.21}$$

Крім того, $\Sigma(\cdot)$ є ортогональною спектральною функцією тоді й тальки тоді, коли $\widetilde{L} \in \mathrm{Self}(L_{min})$.

Як відзначено в монографії Данфорда та Шварца [14, гл. 13.21], важливою задачею є знаходження спектральних $m \times m$-матричних функцій $\Sigma(\cdot)$ якомога меншого розміру. Це пояснюється тим, що складність обчислення функції $\Sigma(\cdot)$ швидко зростає з ростом m. Для розв'язання зазначеної задачі у випадку виразу $l[y]$ парного порядку $\eta = 2k$ на півосі $\mathbb{R}_+$ з $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ розглядаються розширення $\widetilde{L} \in \mathrm{Self}(L_{min})$, що визначаються самоспряженими розділеними граничними умовами. Виявляється [40], що з кожним таким розширенням пов'язана $k \times k$-матрична неванлинівська функція $m(\cdot)$, яка називається зарактеристичною функцією, або функцією Вейля-Тітчмарша. За допомоги формули (1.19) функція $m(\cdot)$ визначає ортогональну матричну спектральну функцію $\sigma(\cdot)$ розміру k. Ці результати є поширенням теорії Вейля - Тітчмарша на диференціальні вирази парного порядку.

У випадку максимально можливих індексів дефекту $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min}) = 2k$ (квазірегулярний вираз) параметризацію всіх функцій Вейля - Тітчмарша безпосередньо в термінах граничної умови на нескінченності отримано в роботах [12, 71] для виразів 2-го порядку і в [45] для виразів довільного парного порядку (в [12] та [45] розглядаються вирази з операторними коефіцієнтами). Така параметризація дається рівністю

$$m(\lambda) = (w_1(\lambda) \cdot \cos C + w_2(\lambda) \cdot \sin C)(w_3(\lambda) \cdot \cos C + w_4(\lambda) \cdot \sin C)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{1.22}$$

де $w_j(\lambda)$ –деякі матричні коефіцієнти і $C = C^*$ – матричний граничний параметр. Формула (1.22) задає бієктивну відповідність між параметрами C і функціями Вейля - Тітчмарша $m(\lambda)$, що відповідають фіксованій самоспряженій граничній умові в 0.

У випадку диференціального виразу непарного порядку на півосі $\mathbb{R}_+$ ситуація є більш складною; зокрема, з результатів [102] випливає, що для таких виразів не існує самоспряжених розділених граничних умов. Спробу поширити теорію Вейля - Тітчмарша на вирази $l[y]$ порядку $\eta = 2k+1$ здійснено в роботах У.Н. Еверітта та В. Крішни Кумара [68, 69, 70, 86]. В роботах цих авторів матрична функція Вейля - Тітчмарша $m(\lambda)$ розміру $k+1$ будується за допомоги громіздкої конструкції, що спирається на метод розтягнення скінченного відрізку $[0, b] \subset \mathbb{R}_+$. Слід відзначити, що результати цих робіт неможна вважати закінченими. Так, наприклад, самоспряжені граничні умови, що відповідають функції $m(\lambda)$, визначаються в [70] за важко перевіряємих умов навіть у простішому випадку мініальних рівних індексів дефекту $n_\pm(L_{min}) = k+1$. Крім того, неясно, як методами зазначених робіт можна поширити теорію Вейля - Тітчмарша на вирази з матричними коефіцієнтами.

Біль загальним об'єктом, ніж диференціальний оператор, є симетрична диференціальна система

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y, \quad t \in \mathcal{I} = \langle a, b\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.23}$$

де $B(t),\ \Delta(t)(\in [\mathbb{C}^n])$ – визначені на $\mathcal{I}$ операторні ($n \times n$-матричні) функції, такі що $B(t) = B^*(t)$ і $\Delta(t) \geq 0$ (тобто $\Delta(t)$ є матричною вагою), і

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_\nu \\ 0 & iI_{\widehat{\nu}} & 0 \\ I_\nu & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}} \oplus \mathbb{C}^\nu}_{\mathbb{C}^n} \to \underbrace{\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}} \oplus \mathbb{C}^\nu}_{\mathbb{C}^n}.$$

Частковим випадком симетричної системи є гамільтонова система, тобто ситема (1.23) з

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_\nu \\ I_\nu & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^\nu}_{\mathbb{C}^n} \to \underbrace{\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^\nu}_{\mathbb{C}^n}.$$

Надалі позначаємо через $\mathfrak{H} := L^2_\Delta(\mathcal{I})$ гільбертів простір вектор-функцій $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}^n$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} (\Delta(t)f(t), f(t))\, dt < \infty$. Згідно з [82] для всіх λ з верхньої (нижньої) напівплощини комплекснної площини система (1.23) має теж саме чісло лінійно незалежних розв'язків $y \in \mathfrak{H}$, яке позначається N_+ (відп. N_-). Числа $N_\pm$ називаються формальними індексами дефекту системи. Ситема (1.23) називається регулярною, якщо вона визначена на скінченому відрізку $\mathcal{I} = [a, b]$, і квазірегулярною, якщо $N_+ = N_- = n$.

Дослідження симетричної системи мотивується тим, що до такої системи зводиться диференціальний вираз довільного порядку з матричними коефіцієнтами [82]. Доцільність вивчення з системи (1.23) з $\widehat{\nu} \neq 0$ пояснюється тим фактом, що саме до такої системи зводиться скалярний диференціальний вираз непарного порядку (в той час як скалярний вираз парного порядку зводиться до гамільтонової ситеми). Відзначимо також, що до гамільтонової системи зводиться рівняння струни Крейна - Феллера [10, гл. 6].

Методами теорії функцій симетричні системи вивчались в монографівях [1, 10, 114, 53] та в роботах [79, 80, 82, 83, 84]. В [1, 10] розглядаються в основному регулярні системи. Для таких систем отримано характеристику спектра та доведено розклад в ряд функцій спеціального вигляду за власними функціями самоспряженої граничної задачі.

Характерна відміна симетричної системи від диференціального оператора полягає в тому, що для системи з матричною вагою $\Delta(t)$, що вироджується на множині ненульової міри, може не існувати спектральних функцій. Тому означення спектральної функції для системи потребує певної модифікації у порівнянні з диференціальним оператором. В монографіях Д.З. Арова та Г. Дима [53] і А.Л. Сахновича, Л.А. Сахновича та І.Я. Ройтберг [114] досліджуються (вкорочені) псевдоспектральні функції регулярної гамільтонової системи. Нехай $\varphi(\cdot, \lambda)$ – $[\mathbb{C}^\nu, \mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^\nu]$-значний операторний (матричний) розв'язок такої системи з $\varphi(a, \lambda) = (0, I_\nu)^\top$. Тоді перетворення Фур'є функції $f \in \mathfrak{H}$ задається рівністю

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t, s)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

і згідно з [53, 43, 114] $[\mathbb{C}^\nu]$-значна операторна ($\nu \times \nu$-матрична) функція розподілу $\sigma(\cdot)$ називається псевдоспектральною функцією, якщо рівність $V_\sigma f = \widehat{f}, \ f \in \mathfrak{H}$, задає часткову ізометрію $V_\sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\sigma, \mathbb{C}^\nu)]$ з ядром $\ker V_\sigma = L_0$, де

$$L_0 = \{f \in \mathfrak{H} : \widehat{f}(s) = 0, \ s \in \mathbb{R}\}.$$

Крім того, $\sigma(\cdot)$ називається спектральною функцією, якщо V_σ є ізометрією. У випадку $L_0 \neq \{0\}$ множина спектральних функцій є пустою; у протилежному випадку множини псевдоспектральних та спектральних функцій збігаються.

Нехай $Y(t, \lambda)$ – $[\mathbb{C}^n]$-значний операторний розв'язок системи з $Y(a, \lambda) = J$, $W(\lambda) := Y(b, \lambda)$ – матриця монодромії і

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda) \\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu \oplus \mathbb{C}^\nu, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

– блочне зображення цієї матриці. В роботах [53, 43, 114] отримано параметризацію псевдоспектральних функцій за допомоги неванлинівського параметра. Саме, в цих роботах доведено, що рівність

$$m(\lambda) = (C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1}(C_0(\lambda)w_2(\lambda) + C_1(\lambda)w_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{1.24}$$

сумісно з формулою обернення Стільтьєса (1.19) задає бієктивну відповідність між неванлинівськими парами $\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$, $C_j(\lambda) \in [\mathbb{C}^\nu], \ j \in \{0, 1\}$, що задавільняють певним умовам допустимості, і псевдоспектральними функціями системи $\sigma(\cdot)$. В (1.24) $m(\lambda)$ є (неванлинівською) функцією Вейля - Тітчмарша регулярної гамільтонової системи.

В [53] також знайдено достатні умови для того, щоб умову допустимості параметра $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda$ в (1.24) можна було пропустити. Крім того, в [53] міститься спроба поширити поняття псевдоспектральної функції на сингулярні гамільтонові системи (детальніше див. зауваження 6.70 в дисертації).

Системи на півосі $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ розглядалися в роботах [79, 83]. В цих роботах за допомоги метода розтягнення скінченного відрізку отримано узагальнення функції Вейля $m(\lambda)$ на гамільтонові системи, визначені на $\mathbb{R}_+$. Крім того, в [80] отримано параметризацію всіх функцій $m(\cdot)$ квазірегулярної гамільтонової системи у вигляді (1.22). В [82] поняття характеристичної матриці $\Omega(\cdot)$ для диференціального оператора поширюється на симетричні системи.

Плідний підхід до вивичення симетричних систем базується на методах теорії розширень симетричних лінійних відношень. Згідно з [111, 81, 92] система (1.23) породжує мінімальне (симетричне) відношення T_{min} та максимальне відношення T_{max} в $\mathfrak{H}$. У випадку невиріджености матриці

$\Delta(t),\ t\in\mathcal{I}$, відношення T_{min} є оператором; у протилежному випадку T_{min} може бути відношенням з нетрівіальною многозначною частиною $\operatorname{mul}T_{min}$. Крім того, справедлива рівність $T_{max}=T_{min}^*$.

Нехай система (1.23) визначена на проміжку $\mathcal{I}=[a,b\rangle,\ -\infty<a<b\le\infty$, і $Y(\cdot,l)$ –$[\mathbb{C}^n]$-значний операторний розв'язок цієї системи з початковою умовою $Y(a,\lambda)=I_n$. В роботах [89, 90, 91, 65, 66] псевдоспектральна функція такої системи визначається як $[\mathbb{C}^n]$ - значна операторна ($n\times n$-матрична) функція розподілу $\Sigma(\cdot)$, така що перетворення Фур'є

$$\widehat{f}(s)=(V_\Sigma f)(s)=\int_{\mathcal{I}}Y^*(t,s)\Delta(t)f(t)\,dt,\quad f\in\mathfrak{H}\tag{1.25}$$

задає часткову ізометрію $V_\Sigma\in[\mathfrak{H},L^2(\Sigma;\mathbb{C}^n)]$ з ядром $\ker V_\Sigma=\operatorname{mul}T_{min}$ (інтеграл в (1.25) збігається за нормою в $L^2(\Sigma;\mathbb{C}^n)$). В [65, 66] доведено існування псевдоспектральних функцій для гамільтонової системи на півосі з мінімальними індексами дефекту $N_+=N_-=\nu$. Крім того, в роботах [89, 90, 91] отримано параметризацю характеристичних матриць та псевдоспектральних функцій регулярних симетричних систем безпосередньо в термінах граниних умов (детальніше див. наслідок 4.31 та зауваження 4.32 в дисертації). Відзначимо, що доведення такої параметризації в [89, 90, 91] базується на теоремі 1 з роботи [90], яка не доведена повністю в цій роботі (детальніше див. [107, зауваження 4.20]).

Означення функції Вейля-Тітчмарша для гамільтонової системи в термінах граничних умов дається в роботі Д. Хінтона та А. Шнайдера [76]. Припустимо, що гамільтонова система (1.23) визначена на півосі й $n_+(T_{min})=n_-(T_{min})=:d$. Нехай $y(t)=\{y_0(t),y_1(t)\}(\in\mathbb{C}^\nu\oplus\mathbb{C}^\nu)$ – зображення функції $y\in\operatorname{dom}T_{max}$. Тоді згідно з [76] загальна форма самоспряжених роділених граничних умов має вигляд

$$\cos B\cdot y_0(0)+\sin B\cdot y_1(0)=0,\quad [y,\chi_j]_\infty=0,\quad j\in\{1,\,\dots,\,\nu_\infty\},\quad y\in\operatorname{dom}T_{max},\tag{1.26}$$

де $B=B^*\in[\mathbb{C}^\nu]$, $\{\chi_j\}_1^{\nu_\infty},\nu_\infty=d-\nu$, – деяка сиситема функцій з $\operatorname{dom}T_{max}$ і $[y,\chi_j]_b=\lim\limits_{t\to\infty}(Jy(t),z(t))$. Вектор $y_\infty:=\{[y,\chi_j]_\infty\}_1^{\nu_\infty}\in\mathbb{C}^{\nu_\infty}$ є сингулярним граничним значенням функції $y\in\operatorname{dom}T_{max}$ на нескінченності. Згідно з [76] граничній задачі,що складається з рівняння

$$Jy'(t)-B(t)y(t)=\lambda\Delta(t)y+\Delta(t)f(t),\quad f\in\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

та граничних умов (1.26), відповідає $\nu\times\nu$-матрична функція Вейля $m(\cdot)$, яка визначається співвідношеннями

$$(\varphi(t,\lambda)m(\lambda)+\psi(t,\lambda))h\in\mathfrak{H},\quad [(\varphi(\cdot,\lambda)m(\lambda)+\psi(\cdot,\lambda))h,\chi_j]_b=0,\quad h\in\mathbb{C}^\nu,\quad j\in\{1,\,\dots,\,\nu_\infty\}.$$

Тут $\varphi(\cdot,\lambda)$ та $\psi(\cdot,\lambda)$ –$[\mathbb{C}^\nu,\mathbb{C}^\nu\oplus\mathbb{C}^\nu]$-значні розв'язки системи (1.23) з початковими умовами

$$\varphi(a,\lambda)=(\sin B,\,-\cos B)^\top,\quad \psi(a,\lambda)=(-\cos B,\,\sin B)^\top.$$

В роботі І.С. Каца [81] розглядаються гамільтонові системи на іпівосі у випадку $\nu=1$. Для таких систем в [81] розроблено метод неподільних інтервалів, за допомогою якого описано падпростір $\operatorname{mul}T_{min}$. Крім того, в [81] методом напрямних функціоналів доведено існування скалярних псевдоспектральних функцій.

Слід відзначити, що для негамільтонових систем (1.23) на півосі ситуація є більш складною, оскільки такі системи не допускають самоспряжених розділених граничних умов [102]. Крім того, для таких систем типовою є ситуація, коли $n_+(T_{min}) \neq n_-(T_{min})$ і тому система не допускає жодних самоспряжених граничних умов (простішим прикладом є система з постійними коефіцієнтами).

Негамільтонові системи на півосі розглядалися в роботі [78] за мінімальних індексів дефекту

$$n_+(T_{min}) = \nu, \qquad n_-(T_{min}) = \nu + \widehat{\nu}. \tag{1.27}$$

Для таких систем в [78] уведено прямокутну функцію Вейля - Тітчмарша $m(\cdot)$ розміру $(\nu+\widehat{\nu})\times\nu$. Така функція не є неванлинівською і тому не визначає псевдоспектральну функцію. Крім того, випадок (1.27) є найпростішим, оскільки він не потребує означення граничних умов на нескінченності.

З огліду на сказане уявляються природними такі ще мало досліджені проблеми:

1. Поширити поняття псевдоспектральної функції на загальні симетричні сингулярні системи (1.23). Описати в термінах граничних умов усі псевдоспектральні та спектральні матричні функції $\Sigma(\cdot)$ розміру $n \times n$.

2. Знайти (можливо λ-залежні) аналоги самоспряжених розділених граничних умов для загальної сингулярної системи (1.23) на півосі і описати умови такого типу.

3. Описати в термінах граничних умов вкорочені псевдоспектральні та спектральні матричні функції $\sigma(\cdot)$ розміру $\nu + \widehat{\nu}$ і дослидити властивості відповідних перетворень Фур'є. Можна припустити, що розмір $\nu + \widehat{\nu}$ є мінімально можливим для спектральних функцій.

4. Перенести отримані результати на диференціальні оператори з матричними коефіцієнтами довільного порядку з довільними індексами дефекту.

Перелічені проблеми досліджувались в статтях [36, 37, 51, 99, 103], [105] - [110], результати яких увійшли в розділи 3 - 8 дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

Розширення симетричних операторів з довільними індексами дефекту

2.1. Попередні відомості

2.1.1. Лінійні відношення

Надалі використовуються такі позначення:$\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ – гільбертові простори, $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ – множина обмежених лінійних операторів, визначених на $\mathcal{H}_1$ із знааченнями в $\mathcal{H}_2$, $[\mathcal{H}] := [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, $\mathbb{C}_+ \, (\mathbb{C}_-)$ – нижня (верхня) напівплощина комплексної площини.

Надалі усі гільбертові простори вважаються сепарабельними.

Нехай $\widetilde{\mathcal{H}}$ – гільбертів простір і $\mathcal{H}$ – підпростір в $\widetilde{\mathcal{H}}$. Надалі позначатимемо через $P_{\mathcal{H}} (\in [\widetilde{\mathcal{H}}])$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ і через $P_{\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}} (\in [\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}])$ – той самий ортопроектор, що розглядається як оператор з $\widetilde{\mathcal{H}}$ в $\mathcal{H}$. Крім того, позначатимемо через $I_{\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}} (\in [\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}])$ оператор вкладення підпростору $\mathcal{H}$ в $\widetilde{\mathcal{H}}$. Ясно, що $(P_{\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{H}})^* = I_{\mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}}$.

Як відомо, лінійний многовид T в просторі $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ називається лініним відношенням з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$. В подальшому пишемо $T : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$, розглядаючи відношення T як багатозначний лінійний оператор з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$.

Для відношення $T : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ позначимо:

(1) $\operatorname{dom} T$, $\operatorname{ran} T$, $\ker T$ – відповідно область визначення, образ та ядро ідношення T;

(2) $\operatorname{mul} T = \{f' \in \mathcal{H}_1 : \{0, f'\} \in T\}, \quad \operatorname{mul} T \subset \mathcal{H}_1$ – многозначна частина відношення T;

(3) $T^{-1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ и $T^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ – відповідно зворотнє та спряжене до T відношення.

Крім того, для відношення T в $\mathcal{H}$ позначимо:

(1) $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda)^{-1} \in [\mathcal{H}]\}$ – резольвентна множина;

(2) $\widehat{\rho}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker (T - \lambda) = \{0\}$ и $\overline{\operatorname{ran} (T - \lambda)} = \operatorname{ran} (T - \lambda)\}$ – множина усіх точок регулярного типу;

(3) $\operatorname{spec}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ – спектр відношення T.

(4) $\operatorname{spec}_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker (T - \lambda) \neq 0\}$ – множина власних значень (точковий спектр).

Множину замкнених лінійних відношень з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ (в $\mathcal{H}$) будемо позначати через $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ $(\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}))$. Замкнений лінійный оператор T з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ ототожнюється з його графіком $\operatorname{gr} T = \{\{f, Tf\} : f \in \operatorname{dom} T\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

2.1.2. Функції розподілу та неванлинівськи функції

Нехай $\mathcal{H}$ – сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ-алгебра борелівських множин в $\mathbb{R}$ і $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ – кільце усіх обмежених борелівських множин. Нагадаємо, що функція $\Sigma(\cdot):\mathcal{B}_b(\mathbb{R})\to[\mathcal{H}]$ називається операторною мірою, якщо $\Sigma(\emptyset)=0,\ \Sigma(\delta)=\Sigma^*(\delta)\geq 0,\ \delta\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, і функція $\Sigma(\cdot)$ є сильно зчисленно-адитивною. Нагадаємо також наступне означення.

Означення 2.1. Оператор-функція $\Sigma(\cdot):\mathbb{R}\to[\mathcal{H}]$ називається функцією розподілу, якщо: (1) $\Sigma(t)=\Sigma^*(t),\ t\in\mathbb{R}$, (2) $\Sigma(t_1)\leq\Sigma(t_2),\ t_1<t_2$; (3) функція $\Sigma(\cdot)$ сильно неперервна зліва; (4) $\Sigma(0)=0$.

Як відомо, рівності $\widetilde{\Sigma}(t)=\Sigma([0,t)),\ t>0;\quad \widetilde{\Sigma}(0)=0;\quad \widetilde{\Sigma}(t)=-\Sigma([t,0)),\ t<0$, задають біекцію між усіма операторними мірами $\Sigma(\cdot)$ та усіма функціями розподілу $\widetilde{\Sigma}(\cdot)$. Надалі використовується те ж саме позначення $\Sigma(\cdot)$ як для операторної міри, так і для відповідної їй функції розподілу.

Нагадаємо, далі, що голоморфна оператор-функція $\Phi(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to[\mathcal{H}]$ називається неванлинівською, якщо $\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\Phi(\lambda)\geq 0$ й $\Phi^*(\lambda)=\Phi(\overline{\lambda}),\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Клас $[\mathcal{H}]$-значних неванлинівських функцій будемо позначати через $R[\mathcal{H}]$. Крім того, позначатимемо через $R_u[\mathcal{H}]$ множину функцій $\Phi(\cdot)\in R[\mathcal{H}]$, таких що $0\in\rho(\operatorname{Im}\Phi(\lambda)),\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Згідно з [5, 17] функція $\Phi(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to[\mathcal{H}]$ належить до класу $R[\mathcal{H}]$ тоді й тільки тоді, коли вона допускає інтегральне зображення

$$\Phi(\lambda)=D_0+\lambda\,D+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\Sigma(t),\tag{2.1}$$

де $D_0,D\in[\mathcal{H}],\ D_0=D_0^*,\ D\geq 0$ та $\Sigma(\cdot)$ – $[\mathcal{H}]$-значна функція розподілу (операторна міра), така що

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d(\Sigma(t)h,h)}{t^2+1}<\infty,\quad h\in\mathcal{H}.\tag{2.2}$$

Оператори $D_0,\ D$ та функція розподілу $\Sigma(\cdot)$ в (2.1) визначаються функцією $\Phi(\cdot)$ однозначно за допомогою рівностей $D_0=\operatorname{Re}\Phi(i)$,

$$D=s-\lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{iy}\Phi(iy)$$

та формули обернення Стільтьєса

$$\Sigma(t)=s-\lim_{\delta\to+0}\left(w-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{t-\delta}\operatorname{Im}\Phi(u+i\,\varepsilon)\,du\right).\tag{2.3}$$

Щоб підкреслити цей факт, надалі будемо писати $D=D_\Phi$ та $\Sigma(\cdot)=\Sigma_\Phi(\cdot)$. Операторна функція розподілу (операторна міра) $\Sigma_\Phi(\cdot)$ називається спектральною функцією (мірою) неванлинівської функції $\Phi(\cdot)$.

Наступна лема є добре відомою (див., наприклад, [30]).

Лема 2.2. *Нехай $\Phi(\cdot)\in R[\mathcal{H}]$ і $\Sigma(\cdot)=\Sigma_\Phi(\cdot)$ – відповідна спектральна функція. Тоді для кожного $x\in\mathbb{R}$ наступні співвідношення еквівалентні:*

$$(1)\quad \lim_{y\to 0}1/y\operatorname{Im}(\Phi(x+iy)h,h)<\infty,\quad h\in\mathcal{H};$$

$$(2)\quad \int_{\mathbb{R}}\frac{d(\Sigma(t)h,h)}{(t-x)^2}<\infty,\quad h\in\mathcal{H}.$$

Якщо виконано (1) *(або* (2)*), то існує сильна границя* $\Phi(x+i0):=\lim\limits_{y\to 0}\Phi(x+iy)$ *й* $\operatorname{Im}\Phi(x+i0)=0$.

Твердження 2.3. *Нехай* $\mathcal{H}'$ *й* $\mathcal{H}''$ *– гільбертові простори й*

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\lambda) & \Phi_{12}(\lambda) \\ \Phi_{21}(\lambda) & \Phi_{22}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' \to \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'', \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

– блочне зображення функції $\Phi(\cdot) \in R[\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'']$. *Тоді:* (i) $\Phi_{11}(\cdot) \in R[\mathcal{H}']$ *й* $\Phi_{22}(\cdot) \in R[\mathcal{H}'']$; (ii) $D_\Phi = 0$ *тоді й тільки тоді, коли* $D_{\Phi_{11}} = 0$ *й* $D_{\Phi_{22}} = 0$.

Це твердження випливає зі співвідношення $D_\Phi = \begin{pmatrix} D_{\Phi_{11}} & C \\ C^* & D_{\Phi_{22}} \end{pmatrix} \geq 0$.

Зауваження 2.4. Очевидно, що для кожної голоморфної функції $\widehat{\Phi}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}]$ з $\mathrm{Im}\widehat{\Phi}(\lambda) \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{C}_+$, існує єдина функція $\Phi(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$, така що $\Phi(\lambda) = \widehat{\Phi}(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C}_+$. Тому надалі функцію $\widehat{\Phi}(\cdot)$ також відносимо до класу $R[\mathcal{H}]$.

2.1.3. Симетричні та самоспряжені відношення та оператори

Нагадаємо, що відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ називається симетричним (самоспряженим), якщо $A \subset A^*$ (відп. $A = A^*$). Як відомо, для кожного симетричного (самоспряженого) відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ справедливі розклади

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \oplus \mathrm{mul}\, A, \qquad A = \mathrm{gr}\, A' \oplus \widehat{\mathrm{mul}}\, A, \tag{2.4}$$

де $\widehat{\mathrm{mul}}\, A = \{0\} \oplus \mathrm{mul}\, A$ й A' – симетричний (самоспряжений) оператор в $\mathfrak{H}'$, який називається операторною частиною відношення A.

Нехай $A = A^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ й нехай $E'(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [\mathfrak{H}']$ – ортогональна спектральна міра оператора A'. Тоді спектральна міра $E(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [\mathfrak{H}]$ відношення A задается рівностю $E(\delta) = E'(\delta) P_{\mathfrak{H}'}, \ \delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Як відомо [18, 41] для кожного оператора $A = A^*$ в $\mathfrak{H}$ справедливі розклади

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p \oplus \mathfrak{H}_{ac} \oplus \mathfrak{H}_{sc}, \qquad A = A_p \oplus A_{ac} \oplus A_{sc},$$

де $\mathfrak{H}_p$, $\mathfrak{H}_{ac}$, $\mathfrak{H}_{sc}$ – підпростори в $\mathfrak{H}$ і A_p, A_{ac} та A_{sc} – самоспряжені оператори відповідно в $\mathfrak{H}_p$, $\mathfrak{H}_{ac}$ та $\mathfrak{H}_{sc}$ з такими властивостями:

1) $\mathfrak{H}_p = \overline{\mathrm{span}}\{\ker(A - \lambda) : \lambda \in \mathrm{spec}_p(A)\}$ і $\mathrm{spec}(A_p) = \overline{\mathrm{spec}_p(A)}$;

2) ортогональна спектральна міра оператора A_{ac} є абсолютно неперервною відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$;

3) ортогональна спектральна міра оператора A_{sc} є сингулярною відносно міри Лебега на $\mathbb{R}$ і $\mathrm{spec}_p(A_{sc}) = \emptyset$

Нехай $E(\cdot)$ – ортогональна спектральна міра оператора A. Ортогональна спектральна міра оператора $A_p \oplus A_{sc}$ називається сингулярною частиною міри $E(\cdot)$ і позначається $E_s(\cdot)$.

Надалі позначатимемо через $\mathrm{spec}_{ac}(A)$, $\mathrm{spec}_{sc}(A)$, $\mathrm{spec}_c(A)$ та $\mathrm{spec}_s(A)$ відповідно абсолютно неперервний, сингулярний неперервний, неперервний та сингулярний спектри оператора $A = A^*$. Ці спектри визначаються рівностями [18, 41]

$$\mathrm{spec}_{ac}(A) = \mathrm{spec}(A_{ac}), \qquad \mathrm{spec}_{sc}(A) = \mathrm{spec}(A_{sc})$$
$$\mathrm{spec}_c(A) = \mathrm{spec}_{ac}(A) \cup \mathrm{spec}_{sc}(A), \qquad \mathrm{spec}_s(A) = \overline{\mathrm{spec}_p(A)} \cup \mathrm{spec}_{sc}(A).$$

Очевидно, що

$$\operatorname{spec}(A) = \overline{\operatorname{spec}_p(A)} \cup \operatorname{spec}_{ac}(A) \cup \operatorname{spec}_{sc}(A) = \overline{\operatorname{spec}_p(A)} \cup \operatorname{spec}_c(A) = \operatorname{spec}_{ac}(A) \cup \operatorname{spec}_s(A).$$

Інша характеристика спектра $\operatorname{spec}(A)$ оператора $A = A^*$ дається в термінах дискретного спектра $\operatorname{spec}_d(A)$ та істотного спектра $\operatorname{spec}_e(A)$. Саме, $\operatorname{spec}_d(A)$ є множиною усіх ізольованих власних значень оператора A скінченної кратности й $\operatorname{spec}_e(A) = \operatorname{spec}(A) \setminus \operatorname{spec}_d(A)$. Ясно, що множина $\operatorname{spec}_e(A)$ замкнена і $\operatorname{spec}_c(A) \subset \operatorname{spec}_e(A)$.

2.1.4. Узагальнені резольвенти симетричних відношень

Означення 2.5. Нехай $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ й $\mathfrak{H}$ – підпростір в $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Відношення $\widetilde{A}$ називається $\mathfrak{H}$-мінімальним, якщо виконуються хоча б одна з наступних еквівалентних умов:

(1) $\overline{\operatorname{span}}\{\mathfrak{H}, (\widetilde{A} - \lambda)^{-1}\mathfrak{H} : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = \widetilde{\mathfrak{H}}$;

(2) не існує нетрівіального підпростору $\mathfrak{H}' \subset \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$, такого що $E([\alpha, \beta))\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}'$ для кожного обмеженого інтервалу $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ (тут $E(\cdot)$ – спектральна міра відношення $\widetilde{A}$).

Означення 2.6. Відношення $T_j \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H}_j)$, $j \in \{1, 2\}$, називаються унітарно еквівалентними (за допомоги унітарного оператора $U \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$), якщо $T_2 = \widetilde{U}T_1$ з оператором $\widetilde{U} = U \oplus U \in [\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{H}_2^2]$.

Нехай $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ – симетричне відношення. Нагадаємо далі деякі добре відомі означення та результати.

Означення 2.7. Відношення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ в гільбертовому просторі $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, таке що $A \subset \widetilde{A}$, називається самоспряженим розширенням відношення A (з виходом в ширший простір $\widetilde{\mathfrak{H}}$). Крім того, таке розширення $\widetilde{A}$ називається мінімальним, якщо воно є $\mathfrak{H}$-мінімальним.

В подальшому ми позначаємемо через $\widetilde{\operatorname{Self}}(A)$ множину усіх мінімальних самоспряжених розширень відношення A з виходом в ширший простір. Крім того, ми позначаємо через $\operatorname{Self}(A)$ множину усіх розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ відношення A (такі розширення називаються каноничними). Як відомо, $\widetilde{\operatorname{Self}}(A) \neq \emptyset$ для кожного A. Крім того, $\operatorname{Self}(A) \neq \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли A має рівні індекси дефекту, і в цьому випадку $\operatorname{Self}(A) \subset \widetilde{\operatorname{Self}}(A)$.

Означення 2.8. Розширення $\widetilde{A}_j = \widetilde{A}_j^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}}_j)$, $j \in \{1, 2\}$, відношення A називаються еквівалентними (відносно $\mathfrak{H}$), якщо існує унітарний оператор $V \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_1 \ominus \mathfrak{H}, \widetilde{\mathfrak{H}}_2 \ominus \mathfrak{H}]$, такий що $\widetilde{A}_1$ та $\widetilde{A}_2$ унітарно еквівалентні за допомоги оператора $U = I_{\mathfrak{H}} \oplus V$.

Означення 2.9. Оператор-функції $R(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to [\mathfrak{H}]$ та $F(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathfrak{H}]$ називаються відповідно узагальненою резольвентою та спектральною функцією відношення A, якщо існує розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \supset A$ з виходом в ширший простір $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, таке що

$$R(\lambda) = P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{2.5}$$

$$F(t) = P_{\mathfrak{H}}E((-\infty, t)) \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Тут $P_{\mathfrak{H}}$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$ й $E(\cdot)$ – спектральна міра відношення $\widetilde{A}$.

Якщо $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$, то (2.5) задає канонічну резольвенту $R(\lambda) = (\widetilde{A} - \lambda)^{-1}$ відношення A.

Твердження 2.10. *[88] Кожна узагальнена резольвента $R(\lambda)$ відношення A породжується деяким (мінімальним) відношенням $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$. Крім того, розширення $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2 \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, що породжують ту ж саму узагальнену резольвенту $R(\lambda)$, є еквівалентними.*

В подальшому ми припускаємо, що узагальнена резольвента $R(\cdot)$ й спектральна функція $F(\cdot)$ відношення A породжені розширенням $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$. Крім того, ми ототожнюємо еквівалентні розширення. Тоді в силу твердження 2.10 рівність (2.5) задає бієктину відповідність між узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ й розширеннями $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, так що кожне розширенння $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ однозначно визначається відповідною узагальненою резольвентою (2.5) (спектральною функцією (2.6)).

З (2.5) та (2.6) випливає, що узагальнена резольвента $R(\cdot)$ й спектральна функція $F(\cdot)$, породжені розширенням $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$, пов'язані між собою рівностями

$$R(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dF(t)}{t-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

$$(F(t)f, f) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{t-\delta} \mathrm{Im}(R(u+i\varepsilon)f, f)\, du, \quad f \in \mathfrak{H} \tag{2.8}$$

Крім того, покладаючи $\widetilde{\mathfrak{H}}_0 = \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathrm{mul}\, \widetilde{A}$, з (2.6) отримуємо

$$F(\infty)(:= s - \lim_{t \to +\infty} F(t)) = P_{\mathfrak{H}} P_{\widetilde{\mathfrak{H}}_0} \upharpoonright \mathfrak{H}. \tag{2.9}$$

Означення 2.11. Розширення $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ ($\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$) належить до класу $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ (відп. $\mathrm{Self}_0(A)$), якщо $\mathrm{mul}\, \widetilde{A} = \mathrm{mul}\, A$. Очевидно, що $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A) \neq \emptyset$. Крім того, якщо $\mathrm{mul}\, A = \{0\}$, то $\widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$ ($\mathrm{Self}_0(A)$) є множиною всіх розширень $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ (відп. $\widetilde{A} \in \mathrm{Self}(A)$), що є операторами.

З формули (2.4) випливає наступне твердження.

Твердження 2.12. *Нехай $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ – симетричне відношення й A' – його операторна частина. Тоді:*

(1) *Наступні твердження еквівалентні:* (i) *A' є щільно визначеним оператором;* (ii) $\mathrm{mul}\, A = \mathrm{mul}\, A^*$*;* (iii) $\widetilde{\mathrm{Self}}(A) = \widetilde{\mathrm{Self}}_0(A)$.

(2) *Якщо A – максимальне симетричне (самоспряжене) відношення, то* $\mathrm{mul}\, A = \mathrm{mul}\, A^*$ *й A' – максимальний симетричній (відп. самоспряжений) оператор в $\mathfrak{H}'$.*

2.1.5. Простори $\mathcal{L}^2(\Sigma; \mathcal{H})$ та $L^2(\Sigma; \mathcal{H})$

Для кожної функції розподілу $\Sigma(\cdot)$ існує єдина пара функцій розподілу $\Sigma_{ac}(\cdot)$ та $\Sigma_s(\cdot)$, таких що функція $\Sigma_{ac}(\cdot)$ є абсолютно неперервною, функція $\Sigma_s(\cdot)$ є сінгулярною й $\Sigma(t) = \Sigma_{ac}(t) + \Sigma_s(t)$ (розклад Лебега функції Σ). Для функції розподілу $\Sigma(\cdot)$ позначаємо через $S(\Sigma)$ множину всіх $t \in \mathbb{R}$, таких що $\Sigma(t-\delta) \neq \Sigma(t+\delta)$ для кожного $\delta > 0$. Крім того, покладаємо

$$S_{ac}(\Sigma) = S(\Sigma_{ac}), \qquad S_s(\Sigma) = S(\Sigma_s) \tag{2.10}$$

Нагадаємо наступну теорему [14, гл. 3.15], [16].

Теорема 2.13. *Нехай $\mathcal{H}$ – скінченновимірний простір і $\Sigma(\cdot)$ – $[\mathcal{H}]$-значна функція розподілу. Тоді:*

(1) *Існують скалярна борелівська міра $\mu(\cdot)$ і функція $\Psi : \mathbb{R} \to [\mathcal{H}]$, такі що $\Psi(s) \geq 0 \ (\mathrm{mod}\mu)$, $\mu([\alpha,\beta)) < \infty$ і $\Sigma(\beta) - \Sigma(\alpha) = \int\limits_{[\alpha,\beta)} \Psi(s)\, d\mu$ для кожного скінченного напівінтервалу $[\alpha,\beta)$.*

(2) *Множина $\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})$ усіх борелівських функцій $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$, таких що*

$$||f||^2_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})} = \int_{\mathbb{R}} (d\Sigma(s)f(s), f(s)) := \int_{\mathbb{R}} (\Psi(s)f(s), f(s))_{\mathcal{H}}\, d\mu < \infty,$$

є лінійним простором з квазіскалярним добутком

$$(f,g)_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})} = \int_{\mathbb{R}} (d\Sigma(s)f(s), g(s)) := \int_{\mathbb{R}} (\Psi(s)f(s), g(s))_{\mathcal{H}}\, d\mu, \quad f,g \in \mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H}).$$

(3) *Множина $L^2(\Sigma;\mathcal{H})$ усіх класів еквівалентності в $\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})$ відносно півнорми $||\cdot||_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})}$ є гільбертовим простором зі скалірним добутком*

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{L^2(\Sigma;\mathcal{H})} = (f,g)_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})}, \quad \widetilde{f},\widetilde{g} \in L^2(\Sigma;\mathcal{H}), \ \ f \in \widetilde{f}, \ g \in \widetilde{g}.$$

Надалі позначатимемо через π_Σ фактор-відображення з $\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})$ на $L^2(\Sigma;\mathcal{H})$. Крім того, будемо позначати через $\mathcal{L}^2_{loc}(\Sigma;\mathcal{H})$ множину всіх функцій $g \in \mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H})$ з компактним носієм. Покладемо також $L^2_{loc}(\Sigma;\mathcal{H}) := \pi_\Sigma \mathcal{L}^2_{loc}(\Sigma;\mathcal{H})$.

Наступна теорема є добре відомою.

Теорема 2.14. *Нехай виконано умови теореми 2.13. Тоді рівності*

$$\mathrm{dom}\,\Lambda_\Sigma = \{\widetilde{f} \in L^2(\Sigma;\mathcal{H}) : sf(s) \in \mathcal{L}^2(\Sigma;\mathcal{H}) \ \ \text{для деякого (й, отже, для кожного)} \ \ f(\cdot) \in \widetilde{f}\}$$

$$\Lambda_\Sigma \widetilde{f} = \pi_\Sigma(sf(s)), \ \ \widetilde{f} \in \mathrm{dom}\,\Lambda_\Sigma, \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}. \tag{2.11}$$

задають самоспряжений оператор $\Lambda = \Lambda_\Sigma$ в $L^2(\Sigma;\mathcal{H})$ (оператор множення). Спектральна міра E_Σ оператора Λ_Σ має вигляд

$$E_\Sigma(B)\widetilde{f} = \pi_\Sigma(\chi_B(\cdot)f(\cdot)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \ \widetilde{f} \in L^2(\Sigma;\mathcal{H}), \ \ f(\cdot) \in \widetilde{f}, \tag{2.12}$$

де $\chi_B(\cdot)$ – індікатор борелівської множини B, і справедливі рівності

$$\mathrm{spec}(\Lambda_\Sigma) = S(\Sigma), \qquad \mathrm{spec}_{ac}(\Lambda_\Sigma) = S_{ac}(\Sigma), \qquad \mathrm{spec}_s(\Lambda_\Sigma) = S_s(\Sigma).$$

Нехай $\mathcal{K}$ і $\mathcal{H}$ – скінченновимірні гільбертові простори, $\Sigma(s)(\in [\mathcal{H}])$ – функція розподілу. Для борелівських функцій $Y(s)(\in [\mathcal{H},\mathcal{K}])$ та $g(s)(\in \mathcal{H})$ покладаємо

$$\int_{\mathbb{R}} Y(s)d\Sigma(s)g(s) := \int_{\mathbb{R}} Y(s)\Psi(s)g(s)\, d\mu\, (\in \mathcal{K}) \tag{2.13}$$

де μ та Ψ визначені теоремою 2.13.

2.1.6. Клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$

Припустимо, що Λ – відкрита множина в $\mathbb{C}$ і $\mathcal{K}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ – гильбертові простори. Пара голоморфних оператор-функцій (коротко – голоморфна операторна пара) $C_j(\cdot) : \Lambda \to [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}],\ j \in \{0,1\}$, называється допустимою, якщо для кожного $\lambda \in \Lambda$ образ оператора

$$(C_0(\lambda),\, C_1(\lambda)) : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{K} \tag{2.14}$$

збігається з $\mathcal{K}$. Надалі усі пари (2.14) вважаються допустимими.

Дві голоморфні операторні пари $(C_0^{(j)}(\cdot),\, C_1^{(j)}(\cdot)) : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{K}_j,\ j \in \{1,2\}$, называються эквівиалентними, якщо існує голоморфна оператор-функція $\varphi(\cdot) : \Lambda \to [\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$, така що $\varphi^{-1}(\lambda) \in [\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1]$ і $C_j^{(2)}(\lambda) = \varphi(\lambda) C_j^{(1)}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda,\ j \in \{1,2\}$. Очевидно, множина операторних пар розпадається на еквівалентні класи; при цьому рівніть

$$\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\} := \{\{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : C_0(\lambda)h_0 + C_1(\lambda)h_1 = 0\}, \quad \lambda \in \Lambda \tag{2.15}$$

доозволяє ототожнювати такий клас з $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$-значною функцією $\tau(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$. У випадку $\Lambda = \overline{\mathbb{C}}$ маємо $C_j(\lambda) \equiv C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}]$ і рівність (2.15) задає лінійне відношення

$$\theta = \{C_0, C_1\} := \{\{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : C_0 h_0 + C_1 h_1 = 0\}, \quad \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1). \tag{2.16}$$

Зворотно, кожне лінійне відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ допускає зображення (2.16) за допомоги єдиної (з точністю до еквівалентності) операторної пари $C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}],\ j \in \{0,1\}$. З огляду на цей факт надалі ототожнюємо (за допомоги (2.16)) відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ і відповідну (допустиму) операторну пару C_0, C_1 (точніше, клас эквивалентності, породжений цією парою).

Надалі, якщо не сказано інше, $\mathcal{H}_0$ - гильбертів простір, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$. Крім того, будемо позначати через $P_1 := P_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ та $P_2 := P_{\mathcal{H}_2} \in [\mathcal{H}_0]$ ортопроектори в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_2$ відповідно.

З кожним відношенням $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ пов'язується $\times$-спряжене відношення:

$$\theta^\times = \{\{k_0, k_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 : (k_1, h_0) - (k_0, h_1) + i(P_2 k_0, P_2 h_0) = 0 \ \text{для всіх}\ \{h_0, h_1\} \in \theta\}. \tag{2.17}$$

Для лінійного відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ покладемо

$$S_\theta(\widehat{h}) = 2\mathrm{Im}(h_1, h_0) + ||P_2 h_0||^2, \quad \widehat{h} = \{h_0, h_1\} \in \theta.$$

Оскільки $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$, можна розглядати відношення $\theta + \lambda I_{\mathcal{H}_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0)$ і $\theta + \lambda P_1 \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Означення 2.15. Лінійне відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ належить до класу:

(1) $Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, якщо $S_\theta(\widehat{h}) \geq 0,\ \widehat{h} \in \theta$, й існує $\lambda \in \mathbb{C}_+$, таке що $(\theta + \lambda I_{\mathcal{H}_0})^{-1} \in [\mathcal{H}_0]$;

(2) $Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, якщо $S_\theta(\widehat{h}) \leq 0,\ \widehat{h} \in \theta$, й існує $\lambda \in \mathbb{C}_-$, таке що $(\theta + \lambda P_1)^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$;

(3) $Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, если $\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \cup Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ и $S_\theta(\widehat{h}) = 0$ для всех $\widehat{h} \in \theta$;

(4) $Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, якщо $\theta = \theta^\times$.

У наступному твердженні дається опис калсів Dis, Ac, Sym і $Self$ в термінах операторних пар.

Твердження 2.16. *[97] Нехай відношення $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ задане рвіністю* (2.16)*, в якому $C_0 = (C_{01}, C_{02}) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}$ і $C_1 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{K}]$. Крім того, покладемо*

$$\widetilde{S}_\theta := 2\mathrm{Im}(C_1 C_{01}^*) - C_{02}C_{02}^*, \quad \widetilde{S}_\theta \in [\mathcal{K}].$$

Тоді: (1) *$\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ якщо й тільки якщо $\widetilde{S}_\theta \geq 0$ й існує $\lambda \in \mathbb{C}_+$, таке що*

$$(C_{01} - \lambda C_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_1]; \tag{2.18}$$

(2) *$\theta \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ якщо й тільки якщо $\widetilde{S}_\theta \leq 0$ й існує $\lambda \in \mathbb{C}_-$, таке що*

$$(C_0 - \lambda C_1 P_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0]; \tag{2.19}$$

(3) *$\theta \in Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ $(\theta \in Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$ якщо й тільки якщо $\widetilde{S}_\theta = 0$ і виконано хоча б одну з умов (відп. обидві умови)* (2.18), (2.19)*. Звідси випливає, що $Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)) = Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \cap Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.*

Якщо $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$, то (2.18) *можна замінити рівністю $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}_1$, а* (2.19) *– рівністю $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}_0$.*

Якщо $\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ $(\theta \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1))$, то співвідношення $(\theta + \lambda I_{\mathcal{H}_0})^{-1} \in [\mathcal{H}_0]$ і (2.18) *(відп. $(\theta + \lambda P_1)^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ і* (2.19)*) справедливі для всіх $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (відп. $\lambda \in \mathbb{C}_-$).*

Якщо $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$, то $\theta^\times = \theta^*$ і класи Dis, Ac, Sym та $Self$ збігаються з відомими класами максимальних дисипативных, максимальних акумулятивних, максимальних симетричних і самоспряженных лінійных відношень в $\mathcal{H}$ відповідно. Звідси та з твердження 2.16 випливає наступне добре відоме твердження.

Твердження 2.17. *Якщо $\dim \mathcal{H} < \infty$, то допустима операторна пара $\theta = \{C_0, C_1\}$ з операторами $C_j \in [\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, $j \in \{0, 1\}$, є максимальною диспативною, максимальною акумулятивною або самоспряженою тоді й тільки тоді, коли $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}$ і $\mathrm{Im}(C_1 C_0^*) \geq 0$, $\mathrm{Im}(C_1 C_0^*) \leq 0$ або $\mathrm{Im}(C_1 C_0^*) = 0$ відповідно.*

Означення 2.18. Функція $\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ належить до класу $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, якщо $-\tau(\lambda) \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, і оператор-функція $(\tau(\lambda) + iP_1)^{-1} (\in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0])$ є голоморфною в $\mathbb{C}_+$. Функція $\tau(\cdot)$ належить до класу $\widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, якщо $-\tau(\lambda) \equiv \theta$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, з деяким $\theta \in Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

У наступному твердженні, доведеному в [97], клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ описано в термінах голоморфних операторних пар.

Твердження 2.19. *Функція $\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ належить до класу $\widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ тоді й тільки тоді, коли вона допускає зображення у вигляді допустимої операторної пари (точніше, класу еквівалентності таких пар, див.* (2.15)*)*

$$\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.20}$$

з голоморфними операторними функціями

$$C_0(\lambda) = (C_{01}(\lambda), C_{02}(\lambda)) : \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \to \mathcal{K}, \quad C_1(\lambda) (\in [\mathcal{H}_1, \mathcal{K}]), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{2.21}$$

такими що

$$2\,\mathrm{Im}(C_1(\lambda)C_{01}^*(\lambda)) + C_{02}(\lambda)C_{02}^*(\lambda) \geq 0, \quad (C_0(\lambda) - iC_1(\lambda)P_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0], \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.22}$$

(тут $\mathcal{K}$ – допоможний гільбертів простір). У випадку $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$ друге співвідношення в (2.22) *можна замінити рівністю $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}_0$.*

Крім того, $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ тоді й тільки тоді, коли

$$\tau(\lambda) \equiv \{C_0, C_1\} = \theta, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad -\theta \in Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \tag{2.23}$$

з операторами $C_0 = (C_{01}, C_{01}) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{K}$ та $C_1 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{K}]$, що задовольняють умовам

$$2\,\mathrm{Im}(C_1C_{01}^*) + C_{02}C_{02}^* = 0, \quad (C_0 - iC_1P_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0], \quad (C_{01} + iC_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_1].$$

Виходячі з твердження 2.19, в подальшому ототожнюємо функцію $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ з класом еквівалентності голоморфних операторних пар (2.20), що задовольняють умовам (2.22).

Зауваження 2.20. Множина $\widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ є непустою тоді й тільки тоді, коли $\dim \mathcal{H}_0 = \dim \mathcal{H}_1$. Тому у випадку $\dim \mathcal{H}_1 < \infty$ ця множина є непустою тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$.

Теорема 2.21. *[97] Нехай $\mathcal{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$ – гільбертові простори, $\mathcal{H}_1$ – підпостір в $\mathcal{H}_0$ та $\widetilde{P}_1$ – ортопроектор в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$ на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$. Тоді для кожного $\widetilde{\theta} \in Self(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$ справедливими є такі твердження:*

(1) *існує єдина функція $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, така що*

$$-(\tau(\lambda) + \lambda P_1)^{-1} = P_{\mathcal{H}_0}(\widetilde{\theta} - \lambda \widetilde{P}_1)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \tag{2.24}$$

(2) *існують оператори*

$$\widetilde{K}_0 = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \quad \widetilde{K}_1 = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1, \tag{2.25}$$

такі що $\ker \widetilde{K}_0 \cap \ker \widetilde{K}_1 = \{0\}$, $0 \in \rho(N_4 - \lambda K_4)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, й

$$\widetilde{\theta} = \{\{\widetilde{K}_0\widetilde{h}, \widetilde{K}_1\widetilde{h}\} : \widetilde{h} \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1\}, \quad \tau(\lambda) = \{\{K_0(\lambda)h, K_1(\lambda)h\} : h \in \mathcal{H}_1\}, \ \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{2.26}$$

де $K_0(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ та $K_1(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_1]$ – оператор-функції вигляду

$$K_0(\lambda) = -K_1 + K_2(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.27}$$

$$K_1(\lambda) = N_1 - N_2(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.28}$$

Зворотно, для кожної функції $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ існує гільбертів простір $\mathfrak{H}_1$ й відношенння $\widetilde{\theta} \in Self(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$, таке що має місце (2.24) *(і, отже, твердження* (2)*).*

Зауваження 2.22. (1) Нагадаємо, що функція $\tau(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ належить до класу неванлінівських функцій $\widetilde{R}(\mathcal{H})$, якщо: 1) відношення $\tau(\lambda)$ є максимальним дисипативним для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ і максимальним акумулятивним для $\lambda \in \mathbb{C}_-$; 2) оператор функція $(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1}$ є голоморфною в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

3) $\tau^*(\lambda) = \tau(\overline{\lambda}),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ясно, що клас $R[\mathcal{H}]$ є підкласом класу $\widetilde{R}(\mathcal{H})$. З результатів [62] випливає, що функція $\tau(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ належить до класу $\widetilde{R}(\mathcal{H})$ тоді й тільки тоді, коли вона допускає зображення у вигляді (допустимої) операторної пари

$$\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{2.29}$$

з голоморфними операторними функціями $C_j(\cdot) : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \to [\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, що задовільняють співвідношенням

$$\mathrm{Im}\lambda \cdot \mathrm{Im}(C_1(\lambda)C_0^*(\lambda) \geq 0, \qquad C_1(\lambda)C_0^*(\overline{\lambda}) - C_0(\lambda)C_1^*(\overline{\lambda}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{2.30}$$

$$(C_0(\lambda) - iC_1(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}], \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad (C_0(\lambda) + iC_1(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}], \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.31}$$

Крім того, у випадку $\dim \mathcal{H} < \infty$ умову (2.31) можна замінити на $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}$ [66, 19].

Очевидно, що у випадку $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 =: \mathcal{H}$ клас $\widetilde{R}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (у сенсі означення 2.18) збігається з множиною звужень усіх функцій $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$ на $\mathbb{C}_+$. Виходячи з цього, надалі покладаємо $\widetilde{R}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \widetilde{R}(\mathcal{H})$. За цієї домовленності $\tau(\cdot)$ належить до класу классу $\widetilde{R}^0(\mathcal{H}) := \widetilde{R}^0(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ тоді й тільки тоді, коли

$$\tau(\lambda) \equiv \{C_0, C_1\} = \theta(= \theta^*), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{2.32}$$

де $C_j \in [\mathcal{H}, \mathcal{K}],\ j \in \{0, 1\}$, – оператори, такі що $\mathrm{Im}(C_1C_0^*) = 0$ й $(C_0 \pm iC_1)^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}]$ (у випадку $\dim \mathcal{H} < \infty$ останню умову можна замінити на $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}$).

(2) Якщо $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 =: \mathcal{H}$, то формула (2.24) приймає вигляд

$$-(\tau(\lambda) + \lambda)^{-1} = P_{\mathcal{H}}(\widetilde{\theta} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

де $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$ й $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H} \oplus \mathfrak{H}_1)$. Для цього випадку твердження (1) теореми 2.21 та зворотнє твердження цієї ж теореми отримано в [67, 47].

2.2. Граничні трійки з нерівними масштабними просторами

Нехай $\mathfrak{H}$ – гільбертів простір, A – замкнене симетричне відношення в $\mathfrak{H}$. Позначимо $\mathfrak{N}_\lambda(A) = \ker(A^* - \lambda)$ – дефектний підпростір відношення A, $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \{\{f, \lambda f\} :\ f \in \mathfrak{N}_\lambda(A)\}$, $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ – індекси дефекту відношення A. Легко бачити, що $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) \subset A^*$. Позначимо також Ext_A – множина власних розширень відношення A, тобто множина усіх відношень $\widetilde{A}$ в $\mathfrak{H}$, таких що $A \subset \widetilde{A} \subset A^*$.

Нехай як і раніше $\mathcal{H}_0$ – гильбертів простір, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$, $P_1 = P_{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1} \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ та $P_2 = P_{\mathcal{H}_2} \in [\mathcal{H}_0]$.

Означення 2.23. Сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в якій Γ_j – лінійні відображення з A^* в $\mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$, называется граничною трійкою для A^*, якщо відображення $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top : A^* \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ є сюр'ективним і справедлива абстрактна тотожність Гріна

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}) + i(P_2 \Gamma_0 \widehat{f}, P_2 \Gamma_0 \widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\},\ \widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*. \tag{2.33}$$

Нехай A – щільно визначений оператор і $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^*. Тоді можна вважати, що оператори $\Gamma_j,\ j \in \{0, 1\}$, визначені на $\mathrm{dom}\, A^*$ і, отже, тотожність (2.33) має вигляд

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g) + i(P_2 \Gamma_0 f, P_2 \Gamma_0 g), \quad f, g \in \mathrm{dom}\, A^*. \tag{2.34}$$

У наступному твердженні перелічені деякі властивості граничних трійок.

Твердження 2.24. *[98, 104] Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*. *Тоді:*

(1) $\ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = A$ *и* Γ_j *– обмежений оператор з* A^* *в* $\mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$.

(2) *Множина* Ext_A *параметризуется лінійними відношеннями* $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. *Точніше, формула*

$$\theta \to \widetilde{A}_\theta := \{\widehat{f} \in A^* : \{\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{f}\} \in \theta\}$$

задає биєктивну відповідність між усіма відношеннями $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *і усіма розширеннями*$\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta \in Ext_A$. *Якщо* θ *задане у вигляді операторної́ї пари* $\theta = \{C_0, C_1\}$ *(див.* (2.16)*), то* $\widetilde{A}_\theta$ *можна зобразити за допомоги абстрактних граничних умов:*

$$\widetilde{A}_\theta = \{\widehat{f} \in A^* : C_0 \Gamma_0 \widehat{f} + C_1 \Gamma_1 \widehat{f} = 0\}. \tag{2.35}$$

При цьому рівність $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta$ *означає, що* $\theta = \Gamma \widetilde{A} = \{\{\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{f}\} : \widehat{f} \in \widetilde{A}\}$.

(3) $\widetilde{A}_{\theta'} \subset \widetilde{A}_{\theta''}$ *тоді й тільки тоді, коли* $\theta' \subset \theta''$. *У цьому випадку* $\dim \widetilde{A}_{\theta''} / \widetilde{A}_{\theta'} = \dim \theta'' / \theta'$.

(4) $(\widetilde{A}_\theta)^* = \widetilde{A}_{\theta^\times}$.

(5) *Розширення* $\widetilde{A}_\theta \in Ext_A$ *є максимальним дисипативним, максимальним акумулятивним, максимальним симетричним або самоспряженим тоді й тільки тоді, коли* θ *принадлежит класу* $Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *або* $Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *відповідно.*

З кожною граничною трійкою $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ пов'язані власні розширення

$$A_0 := \ker \Gamma_0 = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_0 \widehat{f} = 0\}, \quad A_1 := \{\widehat{f} \in A^* : P_2 \Gamma_0 \widehat{f} = \Gamma_1 \widehat{f} = 0\}, \tag{2.36}$$

Очевидно, що $A_0 = \widetilde{A}_{\theta_0}$ и $A_1 = \widetilde{A}_{\theta_1}$, де

$$\theta_0 = \{0\} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \theta_1 = \mathcal{H}_1 \oplus \{0\} = \{\{h_0, 0\} : h_0 \in \mathcal{H}_1\}. \tag{2.37}$$

У випадку щільно визначеного оператора A розшипення A_0 та A_1 задаються рівностями

$$\operatorname{dom} A_0 = \ker \Gamma_0 = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_0 f = 0\}, \quad A_0 = A^* \restriction \operatorname{dom} A_0 \tag{2.38}$$

$$\operatorname{dom} A_1 = \ker \Gamma_1 = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = 0\}, \quad A_1 = A^* \restriction \operatorname{dom} A_1. \tag{2.39}$$

Твердження 2.25. *Якщо* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, *то* A_0 *– максимальне симметричне розширення відношення* A *и справедливі співвідношення*

$$\dim \mathcal{H}_1 = n_-(A) \leq n_+(A) = \dim \mathcal{H}_0, \quad n_-(A_0) = 0, \quad n_+(A_0) = \dim \mathcal{H}_2. \tag{2.40}$$

Зворотно, припустимо, що A *– симетричне відношення в* $\mathfrak{H}$, $n_-(A) \leq n_+(A)$ *й нехай* A_0 *– максимальне симетричне розширення* A, *таке що* $n_-(A_0) = 0$. *Тоді існує гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* A^*, *така що* $A_0 = \ker \Gamma_0$.

Доведення. Легко бачити, що $\theta_0 \in Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \cap Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Тому в силу твердження 2.24, (5) A_0 – максимальне симметричне розширення і $n_-(A_0) = 0$. Крім того, $\theta_0^\times = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$ і згідно з твердженням 2.24, (4)

$$A_0^* = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_0 \widehat{f} \in \mathcal{H}_2\} = \ker P_1 \Gamma_0. \tag{2.41}$$

Використовуючи тепер твердження 2.24, (3), отримуємо

$$n_-(A) = \dim A_0/A = \dim \theta_0 = \dim \mathcal{H}_1, \qquad n_+(A) = \dim A_0^*/A = \dim \theta_0^\times = \dim \mathcal{H}_0$$
$$n_+(A_0) = \dim A_0^*/A_0 = \dim \theta_0^\times/\theta_0 = \dim \mathcal{H}_2$$

Доведемо зворотне твердження. Нехай $U = \{\{f_0' - i\, f_0, f_0' + i\, f_0\} : \{f_0, f_0'\} \in A_0\}$ – перетворення Келли відношення A_0. Ясно, що U – ізометричний оператор, $\operatorname{dom} U = \mathfrak{H}$ і $U\mathfrak{N}_{-i}(A) \subset \mathfrak{N}_i(A)$. Для побудови потрібної граничної трійки Π для A^* покладемо $\mathcal{H}_0 = \mathfrak{N}_i(A)$, $\mathcal{H}_1 = U\mathfrak{N}_{-i}(A)$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1 = \mathfrak{N}_i(A_0)$ и скористуємось формулою Неймана

$$A^* = A \oplus \widehat{\mathfrak{N}}_i(A) \oplus \widehat{\mathfrak{N}}_{-i}(A). \tag{2.42}$$

з огляду на (2.42) для кожного $\widehat{f} \in A^*$ справедливе зображення

$$\widehat{f} = \{f_A, f_A'\} + \{f_i, i f_i\} + \{f_{-i}, -i f_{-i}\} = \{f_A + f_i + f_{-i}, f_A' + i f_i - i f_{-i}\}, \quad \{f_A, f_A'\} \in A, \quad f_{\pm i} \in \mathfrak{N}_{\pm i}(A).$$

Визначимо оператори $\Gamma_j : A^* \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$, покладаючи

$$\Gamma_0 \widehat{f} = -i(P_1 f_i + \sqrt{2} P_2 f_i - U f_{-i}), \quad \Gamma_1 \widehat{f} = P_1 f_i + U f_{-i}. \tag{2.43}$$

Тоді для будь-яких $\widehat{f}, \widehat{g} \in A^*$ маємо

$$(\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}) + i(P_2 \Gamma_0 \widehat{f}, P_2 \Gamma_0 \widehat{g}) = 2i[(P_1 f_i, P_1 g_i) - (f_{-i}, g_{-i}) + (P_2 f_i, P_2 g_i)] =$$
$$2i[(f_i, g_i) - (f_{-i}, g_{-i})] = (f', g) - (f, g').$$

Звідси випливає тотожність (2.33) для операторів (2.43). Оскільки сюр'єктивність оператора Γ є очевидною, то сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ з операторами Γ_0 и Γ_1 вигляду (2.43) є граничною трійкою для A^*. Крім того, рівність $\ker \Gamma_0 = A_0$ випливає з першої рівності в (2.43). ☐

Наслідок 2.26. *Для будь-якого симметричного відношення $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ з індексами дефекту $n_-(A) \leq n_+(A)$ існує гранична трійка Π для A^*.*

У наступному твердженні міститься опис усіх граничних трійок для заданого симметричного відношення A.

Твердження 2.27. *Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^*, $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ – гільбертів простір і $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ –підпростір в $\widetilde{\mathcal{H}}_0$, такі що $\dim \widetilde{\mathcal{H}}_j = \dim \mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$. Нехай*

$$J = \begin{pmatrix} -iP_2 & -I_{\mathcal{H}_1} \\ P_1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} -i\widetilde{P}_2 & -I_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} \\ \widetilde{P}_1 & 0 \end{pmatrix} : \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1 \to \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1, \tag{2.44}$$

де P_j $(\widetilde{P}_j)$ *– ортопроектор в* $\mathcal{H}_0$ $(\widetilde{\mathcal{H}}_0)$ *на* $\mathcal{H}_j$ $(\widetilde{\mathcal{H}}_j)$, $j \in \{1,2\}$. *Тоді рівність*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma}_0 \\ \widetilde{\Gamma}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

задає бієктивну відповідність між усіма граничними трійками $\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ *для* A^* *й усіма оборотними операторами* $X = (X_{ij})_{i,j=0}^{1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1]$, *такими що*

$$X^* \widetilde{J} X = J. \tag{2.46}$$

Доведення. За допомоги оператора J зобразимо тотожність Гріна (2.33) у вигляді

$$(f', g) - (f, g') = -(J\Gamma\widehat{f}, \Gamma\widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\}, \quad \widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*, \tag{2.47}$$

де $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$. Нехай $\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка для A^* и $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1)^\top$. Оскільки $\Gamma \in [A^*, \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$, $\widetilde{\Gamma} \in [A^*, \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1]$, $\ker \Gamma = \ker \widetilde{\Gamma} = A$, $\operatorname{ran} \Gamma = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, $\operatorname{ran} \widetilde{\Gamma} = \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1$, то існує изоморфізм $X = (X_{ij})_{i,j=0}^{1} \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1]$, такий що вірним є (2.45). Крім того, в силу (2.47) маємо

$$(J\Gamma\widehat{f}, \Gamma\widehat{g}) = (\widetilde{J}\widetilde{\Gamma}\widehat{f}, \widetilde{\Gamma}\widehat{g}), \quad \widehat{f}, \widehat{g} \in A^*. \tag{2.48}$$

Звідси та із сюр'ективности Γ випливає (2.46).

Зворотно, нехай X – оборотний оператор, що задовільняє (2.46), й нехай оператор $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1)^\top$ задан рівністю (2.45). Тоді справедливим є (2.48) і тотожність Гріна для трійки $\widetilde{\Pi}$ випливає з (2.47). Крім того, оператор $\widetilde{\Gamma}$ є сюр'єктивним, оскільки оператори Γ і X є сюр'єктивними. □

Нагадаємо, що розширення $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2 \in Ext_A$ називаються трансверсальними, якщо

$$\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 = A \quad \text{й} \quad \widetilde{A}_1 \widehat{+} \widetilde{A}_2 (= \{\{\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2\} : \widehat{f}_1 \in \widetilde{A}_1, \widehat{f}_2 \in \widetilde{A}_2\}) = A^*.$$

У наступному твердженні доповнюються результати твердження 2.25.

Твердження 2.28. (1) *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^* *і* $A_j \in Ext_A$, $j \in \{0,1\}$, *– розширення* (2.36). *Тоді:*

(i) A_0 *і* A_1 *є максимальними симетричними відношеннями, такими що*

$$n_-(A_0) = n_-(A_1) = 0. \tag{2.49}$$

(ii) *Розширення* A_0 *і* A_1^* *є трансверсальними.*

(2) *Припустимо, що* $A \subset A^*$ *і* $A_j \in Ext_A$, $j \in \{0,1\}$, *– пара розширень, що задовільняють умовам* (i) *та* (ii). *Тоді існує гранична трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* A^*, *для якої справедливі рівності* (2.36).

Доведення. (1) Згідно з твердженням 2.25 відношення A_0 симетричне й $n_-(A_0) = 0$. Крім того, в силу (2.37) $\theta_1 \in Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1) \cap Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ і з огляду на твердження 2.24, (5) відношення $A_1 (= \widetilde{A}_{\theta_1})$ симетричне й $n_-(A_1) = 0$. Далі, легко бачити що $\theta_1^\times = \mathcal{H}_0 \oplus \{0\}$. З цього факту та з рівності $A_1^* = \widetilde{A}_{\theta_1^\times}$ випливає, що

$$A_1^* = \ker \Gamma_1 = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_1 \widehat{f} = 0\}. \tag{2.50}$$

Тепер трансверсальність A_0 і A_1^* випливає з рівності $\theta_0 \oplus \theta_1^\times = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

(2) В силу твердження 2.25існує гранична трійка $\Pi' = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0', \Gamma_1'\}$ для A^*, така що $A_0 = \ker \Gamma_0'$. Нехай $\theta = \Gamma' A_1^*$, так що $A_1^* = \widetilde{A}_\theta$ в трійці Π'. Тоді в силу трансверсальності A_0 и A_1^* маємо $\theta \dotplus \theta_0 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ і, отже, $\theta \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$. Нехай

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \tag{2.51}$$

– блочне зображення оператора θ. Тоді в силу [97, (3.7)] $\theta^\times = \{\{h_1 - i\theta_2^* h_1, \theta_1^* h_1\} : h_1 \in \mathcal{H}_1\}$. Крім того, $A_1 = \widetilde{A}_{\theta^\times}$, так що $\theta^\times \in Sym(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Звідси випливає, що

$$2\mathrm{Im}\theta_1 - \theta_2 \theta_2^* = 0 \tag{2.52}$$

Нехай тепер $X_1 \in [\mathcal{H}_0]$ та $X \in [\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1]$ – оператори, визначені ріностями

$$X_1 = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ i\theta_2^* & I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ -\theta & I_{\mathcal{H}_1} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1. \tag{2.53}$$

Очевидно, що оператор X допускає зображення

$$X = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & 0 & 0 \\ i\theta_2^* & I_{\mathcal{H}_2} & 0 \\ -\theta_1 & -\theta_2 & I_{\mathcal{H}_1} \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_1 \to \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_1. \tag{2.54}$$

В силу (2.44) також маємо

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{\mathcal{H}_1} \\ 0 & -iI_{\mathcal{H}_2} & 0 \\ I_{\mathcal{H}_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_1 \to \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_1, \tag{2.55}$$

і безпосередній підрахунок з огляду на (2.52) дає $X^* J X = J$. Крім того, з (2.54) видно, що оператор X є оборотним. Тому в силу твердження 2.27 сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в якій $\Gamma_0 = X_1 \Gamma_0'$ і $\Gamma_1 = -\theta \Gamma_0' + \Gamma_1'$, є граничною трійкою для A^*. Легко бачити, що для цієї трійки $\ker \Gamma_0 = A_0$, $\ker \Gamma_1 = A_1^*$ й, отже, справедливими є рівності (2.36). ☐

Зауваження 2.29. (1) Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граннична трійка для A^*. Тоді за аналогією з останньою рівністю в (2.40) неважко довести, що $n_+(A_1) = \dim \mathcal{H}_2$. Звідси та з формул (2.40), (2.49) випливають эквівалентності

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \iff A_0 = A_0^* \iff A_1 = A_1^*. \tag{2.56}$$

Якщо виконана хочі б одна з умов (2.56), то $n_-(A) = n_+(A)$ і тотожність тождество Гріна (2.33) приймає вигляд

$$(f', g) - (f, g') = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}) - (\Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}), \quad \widehat{f} = \{f, f'\}, \widehat{g} = \{g, g'\} \in A^*. \tag{2.57}$$

У цьому випадку сукупність $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ $(\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1)$ є граничною трійкою (простором граничних значень) для A^* у сенсі [11, 7]. Надалі для уникнення плутанини таку трійку будемо часом називати звичайною граничною трійкою. Відзначимо також, що з (2.40) випливає таке твердження: якщо $n_+(A) < \infty$, то вірною є еквівалентність $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \iff n_-(A) = n_+(A)$. Тому у випадку $n_-(A) = n_+(A) < \infty$ не існує інших граничних трійок, окрім звичайних. Поруч з тим якщо $n_-(A) = n_+(A) = \infty$, то підпростір $\mathcal{H}_1$ може як збігатися, так і не збігатися з $\mathcal{H}_0$.

(2) Якщо A – щільно визначений оператор і $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – звичайна гранична трійка для A^*, то оператори $\Gamma_j,\ j \in \{0,1\}$, визначені на $\operatorname{dom} A^*$ і тотожність (2.57) приймає вигляд

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*.$$

(3) Для відношення $A \subset A^*$ з рівними індексами дефекту $n_+(A) = n_-(A)$ і звичайної граничної трійки $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* результати даного параграфа отримано в [11, 30].

2.3. γ-поле и функция Вейля

Спочатку нагадаємо деякі результати з [60, 30]. Припустимо, що $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – звичайна гранична трійка для A^*, $A_0 (= A_0^*) = \ker \Gamma_0$, π_1 – ортопроектор в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H} \oplus \{0\}$. Тоді для усіх $\lambda \in \rho(A_0)$ оператор $\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ ізоморфно відображає $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ на $\mathcal{H}$, так що рівності

$$\gamma(\lambda) = \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \quad \Gamma_1 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = M(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \quad \lambda \in \rho(A_0) \tag{2.58}$$

коректно задають оператор-функції $\gamma(\cdot) : \rho(A_0) \to [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ і $M(\cdot) : \rho(A_0) \to [\mathcal{H}]$, які называются відповідно γ-полем и функцією Вейля граничної трійки Π. Згідно з [60, 30] функції $\gamma(\cdot)$ і $M(\cdot)$ голоморфни і задавільняють тотожностям

$$\gamma(z) = \gamma(\lambda) + (z - \lambda)(A_0 - z)^{-1}\gamma(\lambda), \qquad M(z) - M^*(\lambda) = (z - \overline{\lambda})\, \gamma^*(\lambda)\gamma(z), \quad z, \lambda \in \rho(A_0), \tag{2.59}$$

внаслідок яких $M(\cdot) \in R_u[\mathcal{H}]$. Крім того, з (2.59) випливає, що функція Вейля $M(\cdot)$ є Q-функцією пари $\{A, A_0\}$ в сенсі [26, 88].

Далі в цьому параграфі результати робіт [60, 30] узагальнюються на граничні трійки $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ с нерівними масштабними просторами $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$.

Лема 2.30. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^* *і* $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $z \in \mathbb{C}_-$. *Тоді оператори* $\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ *й* $P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_z(A)$ *є ізоморфізмами* $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ *на* $\mathcal{H}_0$ *і* $\widehat{\mathfrak{N}}_z(A)$ *на* $\mathcal{H}_1$ *відповідно.*

Доведення. Нехай $A_0 = \ker \Gamma_0$. Тоді в силу (2.41) $A_0^* = \ker P_1\Gamma_0$.

Оскільки $\lambda \in \rho(A_0)$ і $z \in \rho(A_0^*)$, то згідно з [30] справедливі розклади $A^* = A_0 \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ і $A^* = A_0^* \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_z(A)$. Крім того,$\operatorname{ran} \Gamma_0 = \mathcal{H}_0$ і $\operatorname{ran} P_1\Gamma_0 = \mathcal{H}_1$, оскільки $\operatorname{ran}(\Gamma_0, \Gamma_1)^\top = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Звідси випливає потрібне твердження. □ Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^*. Оскільки в силу леми 2.30 оператори $\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, і $P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$, є ізоморфізмами, то рівності

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \quad \gamma_-(\lambda) = \pi_1(P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.60}$$

$$\Gamma_1 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = M_+(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.61}$$

$$(\Gamma_1 + iP_2\Gamma_0) \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = M_-(\lambda)P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.62}$$

коректно задають оператор-функції $\gamma_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]$, $\gamma_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$ і $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$, $M_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$. Крім того, з (2.60), (2.61) випливає, що

$$M_+(\lambda)h_0 = \Gamma_1\{\gamma_+(\lambda)h_0, \lambda\gamma_+(\lambda)h_0\}, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \ \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.63}$$

$$M_-(\lambda)h_1 = (\Gamma_1 + iP_2\Gamma_0)\{\gamma_-(\lambda)h_1, \lambda\gamma_-(\lambda)h_1\}, \quad h_1 \in \mathcal{H}_1, \ \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{2.64}$$

У випадку щільно визначеного оператора A рівності (2.60) – (2.62) приймають вигляд

$$\gamma_+(\lambda) = (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A))^{-1}, \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \quad \gamma_-(\lambda) = (P_1\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A))^{-1}, \ \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.65}$$

$$\Gamma_1 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A) = M_+(\lambda)\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.66}$$

$$(\Gamma_1 + iP_2\Gamma_0) \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A) = M_-(\lambda)P_1\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{2.67}$$

Означення 2.31. Оператор-функції $\gamma_\pm(\cdot)$ називаються γ-полями, а $M_\pm(\cdot)$ – функціями Вейля граничної трійки Π.

Нехай

$$\gamma_+(\lambda) = (\gamma(\lambda), \delta_+(\lambda)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.68}$$

$$M_+(\lambda) = (M(\lambda), N_+(\lambda)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.69}$$

$$M_-(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) \\ N_-(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.70}$$

– блочні зображення γ-поля і функцій Вейля. Задамо оператор-функцію $\mathcal{M}(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to [\mathcal{H}_0]$, покладаючи

$$\mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & N_+(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2], \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \quad \mathcal{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 \\ N_-(\lambda) & -\frac{i}{2}I_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix} \in [\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2], \ \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{2.71}$$

Твердження 2.32. *Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ –гранична трійка для A^*, $\gamma_\pm(\cdot)$ і $M_\pm(\cdot)$ – γ-поля и функції Вейля трійки Π відповідно. Крім того, нехай $\mathfrak{H}_r$ – гільбертів простір, A_r – максимальний симетричний оператор в $\mathfrak{H}_r$ з індексами дефекту $n_+(A_r) = 0$, $n_-(A_r) = \dim \mathcal{H}_2$ і $\Gamma_r : A_r^* \to \mathcal{H}_2$ – сюр'єктивне лінійне зображення, таке що*

$$(f_r', g_r) - (f_r, g_r') = -i(\Gamma_r\widehat{f}_r, \Gamma_r\widehat{g}_r), \quad \widehat{f}_r = \{f_r, f_r'\}, \ \widehat{g}_r = \{g_r, g_r'\} \in A_r^* \tag{2.72}$$

(таке зображення існує в силу наслідку 2.26 та пропозиції 2.25). Припустимо також, що $\mathfrak{H}_e := \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_r$ і $A_e := A \oplus A_r$. Тоді:

(1) *A_e – симетричне відношення в $\mathfrak{H}_e$, $A_e^* := A^* \oplus A_r^*$ і оператори*

$$\Gamma_0^e = \begin{pmatrix} P_1\Gamma_0 & 0 \\ P_2\Gamma_0 & \Gamma_r \end{pmatrix} : \underbrace{A^* \oplus A_r^*}_{A_e^*} \to \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \tag{2.73}$$

$$\Gamma_1^e = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ \frac{i}{2}P_2\Gamma_0 & -\frac{i}{2}\Gamma_r \end{pmatrix} : \underbrace{A^* \oplus A_r^*}_{A_e^*} \to \underbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}_{\mathcal{H}_0} \tag{2.74}$$

утворюють звичайну граничну трійку $\Pi^e = \{\mathcal{H}_0, \Gamma_0^e, \Gamma_1^e\}$ *для* A_e^*.

(2) *Функція Вейля* $M_e(\cdot)$ *трійки* Π^e *збігається з оператор-функцією* $\mathcal{M}(\cdot)$, *заданою в* (2.71). *Крім того,* γ*-поле* $\gamma_e(\cdot)$ *трійки* Π^e *має вигляд*

$$\gamma_e(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma(\lambda) & \delta_+(\lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \gamma_e(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma_-(\lambda) & 0 \\ i\gamma_r(\lambda)N_-(\lambda) & \gamma_r(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \tag{2.75}$$

де $\gamma_r(\lambda) = \pi_1(\Gamma_r \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_r))^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$.

Доведення. Безпосередній підрахунок з огляду на (2.33) і (2.72) дає тотожність (2.57) для операторів Γ_0^e та Γ_1^e. Крім того, відображення $\Gamma^e = (\Gamma_0^e, \Gamma_1^e)^\top$ є сюр'єктивним, оскільки сюр'єктивними є відображення $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ і Γ_r. Звідси випливає твердження (1).

Доведемо далі твердження (2). Для цього необхідно показати, що оператор-функції $\mathcal{M}(\lambda)$ та $\gamma_e(\lambda)$, визначені в (2.71) і (2.75), задовільняють для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ і $\widehat{f}_{\lambda,e} = \{f_{\lambda,e}, \lambda f_{\lambda,e}\} \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_e)$ рівностям

$$\gamma_e(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = f_{\lambda,e}, \qquad \mathcal{M}(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = \Gamma_1^e\widehat{f}_{\lambda,e}. \tag{2.76}$$

Оскільки $A_e = A \oplus A_r$ і $\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_r) = \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то справедливі розклади

$$\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_e) = \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) \oplus \{0\}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_e) = \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) \oplus \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_r), \;\; \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{2.77}$$

Нехай $\lambda \in \mathbb{C}_+$, так що в силу (2.77) $\widehat{f}_{\lambda,e} = \widehat{f}_\lambda \oplus 0$, де $\widehat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$. Тоді $\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda$, звідки з огляду на (2.60) і (2.61) випливає, що

$$\gamma_e(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = \gamma_+(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus 0 = f_\lambda \oplus 0 = f_{\lambda,e}$$
$$\mathcal{M}(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = M_+(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus \tfrac{i}{2}P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda = \Gamma_1\widehat{f}_\lambda \oplus \tfrac{i}{2}P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda = \Gamma_1^e\widehat{f}_{\lambda,e}.$$

Таким чином, рівності (2.76) справедливі для $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Нехай тепер $\lambda \in \mathbb{C}_-$. Тоді в силу (2.77) $\widehat{f}_{\lambda,e} = \widehat{f}_\lambda \oplus \widehat{f}_{\lambda,r}$, де $\widehat{f}_\lambda = \{f_\lambda, \lambda f_\lambda\} \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$, $\widehat{f}_{\lambda,r} = \{f_{\lambda,r}, \lambda f_{\lambda,r}\} \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_r)$. Оскільки оператори $\Gamma_0^e \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_e)$ та $P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$ є оборотними, то з (2.73) випливає, що оператор $\Gamma_r \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_r)$ є оборотним і $\gamma_r(\lambda)\Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r} = f_{\lambda,r}$. Крім того, в силу (2.62) і (2.70) маємо $\Gamma_1\widehat{f}_\lambda = M(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda$, $P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda = -iN_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda$. Звідси знаходимо

$$\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus (P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda + \Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r}) = P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus (-iN_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda + \Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r})$$
$$\gamma_e(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = \gamma_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus (i\gamma_r(\lambda)N_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda + \gamma_r(\lambda)(-iN_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda + \Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r})) = f_\lambda \oplus f_{\lambda,r} = f_{\lambda,e}$$
$$\mathcal{M}(\lambda)\Gamma_0^e\widehat{f}_{\lambda,e} = M(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda \oplus (\tfrac{1}{2}N_-(\lambda)P_1\Gamma_0\widehat{f}_\lambda - \tfrac{i}{2}\Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r}) = \Gamma_1\widehat{f}_\lambda \oplus (\tfrac{i}{2}P_2\Gamma_0\widehat{f}_\lambda - \tfrac{i}{2}\Gamma_r\widehat{f}_{\lambda,r}) = \Gamma_1^e\widehat{f}_{\lambda,e}.$$

Це доводить рівності (2.76) для $\lambda \in \mathbb{C}_-$. □

Твердження 2.33. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $A_0 = \ker\Gamma_0$, $\gamma_\pm(\cdot)$ *і* $M_\pm(\cdot)$ *–* γ*-поля и функції Вейля трійки* Π, $\mathcal{M}(\cdot)$ *– оператор-функція* (2.71). *Тоді:*

(1) *Функції* $\gamma_\pm(\cdot)$ *є голоморфними і справедливі тотожності*

$$\gamma_+(z) = \gamma_+(\lambda) + (z-\lambda)(A_0 - z)^{-1}\gamma_+(\lambda), \quad z, \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.78}$$

$$\gamma_-(z) = \gamma_-(\lambda) + (z-\lambda)(A_0^* - z)^{-1}\gamma_-(\lambda), \quad z, \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.79}$$

$$\gamma_-(z)P_1 = \gamma_+(\lambda) + (z-\lambda)(A_0^* - z)^{-1}\gamma_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \; z \in \mathbb{C}_-. \tag{2.80}$$

Крім того, для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *оператор* $\sqrt{2\mathrm{Im}\lambda}\,\delta_+(\lambda)$ *є ізометрією з* $\mathcal{H}_2$ *на* $\mathfrak{N}_\lambda(A_0)$ *і*

$$(z-\overline{\lambda})\delta_+^*(\lambda)\delta_+(z)=iI_{\mathcal{H}_2},\quad \lambda,z\in\mathbb{C}_+. \tag{2.81}$$

(2) *Функції* $M_\pm(\cdot)$ *є голоморфними и справедливі тотожності*

$$\mathcal{M}(z)-\mathcal{M}^*(\lambda)=(z-\overline{\lambda})\,\gamma_+^*(\lambda)\gamma_+(z),\quad z,\lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{2.82}$$

$$M(z)-M^*(\lambda)+iN_-^*(\lambda)N_-(z)=(z-\overline{\lambda})\,\gamma_-^*(\lambda)\gamma_-(z),\quad z,\lambda\in\mathbb{C}_- \tag{2.83}$$

$$M_+(z)-M_-^*(\lambda)=(z-\overline{\lambda})\,\gamma_-^*(\lambda)\gamma_+(z),\quad z\in\mathbb{C}_+,\ \lambda\in\mathbb{C}_- \tag{2.84}$$

Крім того,

$$M_+^*(\lambda)=M_-(\overline{\lambda}),\qquad M^*(\lambda)=M(\overline{\lambda}),\qquad N_+^*(\lambda)=N_-(\overline{\lambda}),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{2.85}$$

Доведення. Нехай $\Pi^e=\{\mathcal{H}_0,\Gamma_0^e,\Gamma_1^e\}$ – звичайна гранична трійка (2.73), (2.74) для A_e^* (див. побудови в твердженні 2.32) й нехай $A_{0,e}(=A_{0,e}^*)=\ker\Gamma_0^e$. Тоді $A_0\subset A_{0,e}$ і, отже,

$$(A_{0,e}-\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}(A_0-\lambda)^{-1} & x_{1+}(\lambda)\\ 0 & x_{2+}(\lambda)\end{pmatrix}:\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_r\to\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_r,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{2.86}$$

$$(A_{0,e}-\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}(A_0^*-\lambda)^{-1} & 0\\ x_{1-}(\lambda) & x_{2-}(\lambda)\end{pmatrix}:\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_r\to\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_r,\quad \lambda\in\mathbb{C}_- \tag{2.87}$$

з деякими $x_{1\pm}(\lambda)$ і $x_{2\pm}(\lambda)$. Застосовуючи тепер 1-у тотожність в (2.59) до γ-поля $\gamma_e(\cdot)$ трійки Π^e та зважаючи при цьому на (2.75) і (2.86), (2.87), отримуємо тотожності (2.78) – (2.80).

Ділі, згідно з твердженням 2.32 $\mathcal{M}(\cdot)$ є функцією Вейля для трійки Π^e. Застосовуючи до $\mathcal{M}(\cdot)$ 2-у тотожність в (2.59) для $z,\lambda\in\mathbb{C}_+$ та приймаючи до уваги (2.75) для γ-поля $\gamma_e(\cdot)$, отримуємо (2.81) і (2.82). Оскільки $P_1\Gamma_0\{\gamma_+(\lambda)h,\lambda\gamma_+(\lambda)h\}=P_1h$, то в силу (2.41) для кожного $h\in\mathcal{H}_0$ й $\lambda\in\mathbb{C}_+$ вірними є еквівалентності $h\in\mathcal{H}_2\Leftrightarrow\{\gamma_+(\lambda)h,\lambda\gamma_+(\lambda)h\}\in\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)\cap A_0^*(=\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A_0))\Leftrightarrow\gamma_+(\lambda)h\in\mathfrak{N}_\lambda(A_0)$. Тому $\delta_+(\lambda)\mathcal{H}_2=\mathfrak{N}_\lambda(A_0),\ \lambda\in\mathbb{C}_+$, і внаслідок (2.81) $\sqrt{2\mathrm{Im}\lambda}\,\delta_+(\lambda)$ є ізометрією $\mathcal{H}_2$ на $\mathfrak{N}_\lambda(A_0)$.

Застосовуючи до $\mathcal{M}(\cdot)$ 2-у тотожність в (2.59) для $z,\lambda\in\mathbb{C}_-$, з огляду на (2.75) будемо мати

$$M(z)-M^*(\lambda)=(z-\overline{\lambda})(\gamma_-^*(\lambda)\gamma_-(z)+N_-^*(\lambda)\gamma_r^*(\lambda)\gamma_r(z)N_-(z)),\quad -iI_{\mathcal{H}_r}=(z-\overline{\lambda})\gamma_r^*(\lambda)\gamma_r(z).$$

Звідси випливає (2.83). Аналогічно, формула (2.84) є наслідком 2-ї тотожності в (2.59), застосованого до $\mathcal{M}(\cdot)$ для $z\in\mathbb{C}_+,\lambda\in\mathbb{C}_-$. Насамкінець, (2.85) випливає з (2.84). □

Наслідок 2.34. *Нехай* $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $M_\pm(\cdot)$ *– функції Вейля трійки* Π. *Тоді рівності* (2.69), (2.70) *і* (2.71) *задають оператор-функції* $M(\cdot)\in R_u[\mathcal{H}_1]$ *і* $\mathcal{M}(\cdot)\in R_u[\mathcal{H}_0]$.

Зауваження 2.35. Безпосередня перевірка показує, що тотожність (2.82) можна зобразити у вигляді

$$M_+(z)-M_+^*(\lambda)P_1+iP_2=(z-\overline{\lambda})\,\gamma_+^*(\lambda)\gamma_+(z),\quad z,\lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{2.88}$$

де $M_+(z)$ розглядається як оператор в $\mathcal{H}_0$.

Зауваження 2.36. Важливість співвідношень (2.78) – (2.84) полягає в тому, що за їх допомоги можна довести таке твердження: якщо оператор A є простим, то функції Вейля $M_\pm(\cdot)$ граничної трійки $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* визначають цю трійку (і, отже, оператор A та його розширення $A_0 = \ker \Gamma_0$) однозначно з точністю до унитарної еквівалентності. Для звичайних граничних трійок це твердження доведено в [60, 61].

Наступне твердження доводиться аналогічно [62, Proposition 4.1].

Твердження 2.37. *Нехай* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^**,* $A_0 = \ker \Gamma_0$ *й* $\gamma_\pm(\cdot)$ *та* $M_\pm(\cdot)$ *– відповідні* γ*-поля та функції Вейля. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_0$ *та* $\mathcal{H}_1$ *розкладено за формулами* $\mathcal{H}_1 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_1$*,* $\mathcal{H}_0 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_0$ *(так що* $\dot{\mathcal{H}}_0 = \dot{\mathcal{H}}_1 \oplus \mathcal{H}_2$*) й блочні забраження операторів* Γ_0 *та* Γ_1 *є*

$$\Gamma_0 = (\widehat{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_0)^\top : A^* \to \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_0, \qquad \Gamma_1 = (\widehat{\Gamma}_1, \dot{\Gamma}_1)^\top : A^* \to \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_1.$$

Тоді вірними є наступні твердження:

(1) *Рівності*

$$\widetilde{A} = \{\widehat{f} \in A^* : \widehat{\Gamma}_0 \widehat{f} = \dot{\Gamma}_0 \widehat{f} = \dot{\Gamma}_1 \widehat{f} = 0\} = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_0 \widehat{f} = 0, \ \Gamma_1 \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{H}}\}$$

та $\widetilde{A}^* = \{\widehat{f} \in A^* : \widehat{\Gamma}_0 \widehat{f} = 0\}$ *задають симетричне розширення* $\widetilde{A} \in Ext_A$ *й відношення* $\widetilde{A}^*$*, спряжене до* $\widetilde{A}$*.*

(2) *Сукупність* $\dot{\Pi} = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \dot{\Gamma}_0 \upharpoonright \widetilde{A}^*, \dot{\Gamma}_1 \upharpoonright \widetilde{A}^*\}$ *є граничною трійкою для* $\widetilde{A}^*$*; при цьому* $\dot{A}_0 (= \ker \dot{\Gamma}_0 \upharpoonright \widetilde{A}^*) = A_0$*.*

(3) γ*-поля та функції Вейля трійки* $\dot{\Pi}$ *задаються рівностями*

$$\dot{\gamma}_+(\lambda) = \gamma_+(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_0, \qquad \dot{M}_+(\lambda) = P_{\mathcal{H}_1, \dot{\mathcal{H}}_1} M_+(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$
$$\dot{\gamma}_-(\lambda) = \gamma_-(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1, \qquad \dot{M}_-(\lambda) = P_{\mathcal{H}_0, \dot{\mathcal{H}}_0} M_-(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

У наступному твердженні дається зв'язок між функціями Вейля різних граничних трійок.

Твердження 2.38. *Нехай згідно з твердженням 2.27 граничні трійки* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *і* $\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ *пов'язані співвідношенням (2.45) й нехай* $M_+(\cdot)$ *та* $\widetilde{M_+}(\cdot)$ *– функції Вейля трійок* Π *та* $\widetilde{\Pi}$ *відповідно. Тоді*

$$\widetilde{M_+}(\lambda) = (X_{10} + X_{11} M_+(\lambda))(X_{00} + X_{01} M_+(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.89}$$

Доведення. З (2.45) і (2.61) випливає, що

$$\widetilde{\Gamma}_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = (X_{00} + X_{01} M_+(\lambda)) \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \tag{2.90}$$
$$\widetilde{M_+}(\lambda) \widetilde{\Gamma}_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = (X_{10} + X_{11} M_+(\lambda)) \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.91}$$

Крім того, згідно з лемою 2.30

$$\Gamma_0 \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \mathcal{H}_0, \qquad \widetilde{\Gamma}_0 \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \widetilde{\mathcal{H}}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.92}$$

В силу (2.90) і 2-ї рівності в (2.92) маємо $(X_{00}+X_{01}M_+(\lambda))\mathcal{H}_0=\widetilde{\mathcal{H}}_0$. Нехай далі $h\in\mathcal{H}_0$ й $(X_{00}+X_{01}M_+(\lambda))h=0$. Тоді в силу (2.90), (2.91) та 1-ї рівності в (2.92) $(X_{10}+X_{11}M_+(\lambda))h=0$, звідки випливає, що $X\{h,M(\lambda)h\}=0$. Оскільки $\ker X=\{0\}$, то $h=0$ й, отже, $\ker(X_{00}+X_{01}M_+(\lambda))=\{0\}$. Тому оператор $X_{00}+X_{01}M_+(\lambda)$ є оборотним і (2.89) випливає з (2.90), (2.91) і (2.92). □

Зауваження 2.39. Для звичайних граничних трійок $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ і $\widetilde{\Pi}=\{\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\Gamma}_0,\widetilde{\Gamma}_1\}$ твердження 2.38 доведено в [61, 30].

2.4. Параметризація самоспряжених розширень

У цьому підрозділі в термінах граничної трійки дається параметризація усіх самоспряжених розширень $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ симетричного відношення A.

Теорема 2.40. *Нехай* $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $M_+(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π, $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1)$ *і* $\widetilde{A}_\theta\in Ext_A$ *– відповідне розширення відношення* A. *Тоді для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *має місце еквівалентність*

$$\lambda\in\rho(\widetilde{A}_\theta)\iff(\theta-M_+(\lambda))^{-1}\in[\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0]\tag{2.93}$$

і справедливою є наступна формула для канонічних резольвент:

$$(\widetilde{A}_\theta-\lambda)^{-1}=(A_0-\lambda)^{-1}+\gamma_+(\lambda)(\theta-M_+(\lambda))^{-1}\gamma_-^*(\overline{\lambda}),\quad\lambda\in\rho(\widetilde{A}_\theta)\cap\mathbb{C}_+.\tag{2.94}$$

Доведення. Еквівалентність (2.93) доводиться так само, як аналогічна еквівалентність для звичайної граничної трійки в [30]. Далі, для $g\in\mathfrak{H}$ і $\lambda\in\rho(\widetilde{A}_\theta)\cap\mathbb{C}_+$ покладемо

$$f_\lambda:=(\widetilde{A}_\theta-\lambda)^{-1}g-(A_0-\lambda)^{-1}g,\qquad\widehat{f}_\lambda:=\{f_\lambda,\lambda f_\lambda\}\tag{2.95}$$
$$\widehat{g}_\theta:=\{(\widetilde{A}_\theta-\lambda)^{-1}g,g+\lambda(\widetilde{A}_\theta-\lambda)^{-1}g\},\quad\widehat{g}_0:=\{(A_0-\lambda)^{-1}g,g+\lambda(A_0-\lambda)^{-1}g\},$$

так що $\widehat{g}_\theta\in\widetilde{A}_\theta$, $\widehat{g}_0\in A_0$ і $\widehat{f}_\lambda=\widehat{g}_\theta-\widehat{g}_0\in\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A)$. Тоді

$$\Gamma_0\widehat{f}_\lambda=\Gamma_0\widehat{g}_\theta,\qquad M_+(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}_\lambda=\Gamma_1\widehat{g}_\theta-\Gamma_1\widehat{g}_0.\tag{2.96}$$

Застосовуючи тотожність Гріна (2.33) до $\widehat{g}_0$ й $\{\gamma_-(\overline{\lambda})h,\overline{\lambda}\gamma_-(\overline{\lambda})h\}$ та приймаючи до уваги рівність $P_1\Gamma_0\{\gamma_-(\overline{\lambda})h,\overline{\lambda}\gamma_-(\overline{\lambda})h\}=h$, отримуємо $(\gamma_-(\overline{\lambda})h,g)=(h,\Gamma_1\widehat{g}_0)$, $h\in\mathcal{H}_1$. Тому $\Gamma_1\widehat{g}_0=\gamma_-^*(\overline{\lambda})g$ і (2.96) дає

$$\{\Gamma_0\widehat{f}_\lambda,M_+(\lambda)\Gamma_0\widehat{f}_\lambda+\gamma_-^*(\overline{\lambda})g\}=\{\Gamma_0\widehat{g}_\theta,\Gamma_1\widehat{g}_\theta\}\in\theta.$$

Звідси випливає, що $\{\Gamma_0\widehat{f}_\lambda,\gamma_-^*(\overline{\lambda})g\}\in\theta-M_+(\lambda)$ і, отже, $\Gamma_0\widehat{f}_\lambda=(\theta-M_+(\lambda))^{-1}\gamma_-^*(\overline{\lambda})g$. Таким чином, $f_\lambda=\gamma_+(\lambda)(\theta-M_+(\lambda))^{-1}\gamma_-^*(\overline{\lambda})g$, що сумісно з (2.95) дає (2.94). □

Теорема 2.41. *Нехай* $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $M_+(\cdot)$ *та* $\gamma_\pm(\cdot)$ *– функція Вейля та* γ*-поля трійки* Π. *Припустимо, що* $\mathfrak{H}_1$ *– гільбертів простір,* $\widetilde{\mathfrak{H}}:=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}_1$ *й* G_0, $G_1\in[\mathfrak{H}_1^2,\mathfrak{H}_1]$ *– оператори, задані рівностями* $G_0\widehat{h}_1=h_1$, $\quad G_1\widehat{h}_1=h_1'$, $\quad\widehat{h}_1=\{h_1,h_1'\}\in\mathfrak{H}_1^2$. *Тоді:*

(1) *відношення* $A_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^*$, *спряжене до* A *в просторі* $\widetilde{\mathfrak{H}}$, *має вигляд* $A_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^*=A^*\oplus\mathfrak{H}_1^2$;

(2) *сукупність* $\widetilde{\Pi} = \{(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1), \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ *з операторами*

$$\widetilde{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{pmatrix} \in [A^* \oplus \mathfrak{H}_1^2, \mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1], \quad \widetilde{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & G_1 \end{pmatrix} \in [A^* \oplus \mathfrak{H}_1^2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1] \tag{2.97}$$

є граничною трійкою для $A^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$*; при цьому*

$$\widetilde{A}_0 (= \ker \widetilde{\Gamma}_0) = A_0 \oplus (\{0\} \oplus \mathfrak{H}_1) \tag{2.98}$$

і γ*-поля та функція Вейля трійки* $\widetilde{\Pi}$ *мають вигляд*

$$\widetilde{\gamma}_{\pm}(\lambda) = \mathrm{diag}(\gamma_{\pm}(\lambda), I_{\mathfrak{H}_1}), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_{\pm}; \qquad \widetilde{M}_+(\lambda) = \mathrm{diag}(M_+(\lambda), \lambda I_{\mathfrak{H}_1}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \tag{2.99}$$

(3) *якщо розширення* $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ *відношення* A *параметризується в трійці* $\widetilde{\Pi}$ *відношенням* $\widetilde{\theta} \in Self(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$ *(тобто* $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\widetilde{\theta}}$*) й функція* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *задана рівністю* (2.24), *то* $(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ *й*

$$P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma_+(\lambda)(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}\gamma_-^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.100}$$

Доведення. Твердження (1) є очевидним. Безпосередня перевірка дає твердження (2).

(3) Застосовуючи формулу (2.94) для трійки $\widetilde{\Pi}$ до розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\widetilde{\theta}}$ й приймаючи до уваги (2.99), отримуємо рівності

$$P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H} = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_+(\lambda) P_{\mathcal{H}_0}(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}_1 \, \gamma_-^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.101}$$

$$P_{\mathfrak{H}_1}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}_1 = P_{\mathfrak{H}_1}(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.102}$$

Згідно з теоремою 2.21 відношення $\widetilde{\theta}$ допускає зображення (2.25), (2.26). З (2.26) випливає, що

$$(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} = \widetilde{K}_0 \big(\widetilde{K}_1 - \widetilde{M}_+(\lambda)\widetilde{K}_0\big)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.103}$$

Внаслідок (2.25) та 2-ї рівності в (2.99) маємо

$$\widetilde{K}_1 - \widetilde{M}_+(\lambda)\widetilde{K}_0 = \begin{pmatrix} N_1 - M_+(\lambda)K_1 & N_2 - M_+(\lambda)K_2 \\ N_3 - \lambda K_3 & N_4 - \lambda K_4 \end{pmatrix}. \tag{2.104}$$

Покладемо

$$F(\lambda) := (N_1 - M_+(\lambda)K_1) - (N_2 - M_+(\lambda)K_2)(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3) = K_1(\lambda) + M_+(\lambda)K_0(\lambda),$$

де $K_0(\lambda)$ та $K_1(\lambda)$ – оператор-функції (2.27) та (2.28). Застосовуючи формулу Фробеніуса до матриці (2.104), отримуємо

$$(\widetilde{K}_1 - \widetilde{M}_+(\lambda)\widetilde{K}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1}(\lambda) & * \\ -(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3)F^{-1}(\lambda) & * \end{pmatrix}.$$

Звідси та з першої рівності в (2.25) випливає, що

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}_0}\widetilde{K}_0\big(\widetilde{K}_1 - \widetilde{M}_+(\lambda)\widetilde{K}_0\big)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}_1 &= K_1 F^{-1}(\lambda) + K_2[-(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3)F^{-1}(\lambda)] = \\ &[K_1 - K_2(N_4 - \lambda K_4)^{-1}(N_3 - \lambda K_3)](K_1(\lambda) + M_+(\lambda)K_0(\lambda))^{-1} = -K_0(\lambda)(K_1(\lambda) + M_+(\lambda)K_0(\lambda))^{-1}. \end{aligned}$$

Комбінуючи цю формулу з (2.103)та (2.26), виводимо

$$P_{\mathcal{H}_0}(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}_1 = -(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.105}$$

Звідси та з (2.101) випливає (2.100). ☐ У наступній теоремі доводиться аналог формули М.Г. Крейна для узагальнених резольвент симетричного відношення з довільними (можливо нерівними) індексами дефекту.

Теорема 2.42. *Нехай* $\mathfrak{H}$ *– гільбертів простір й* A *– симетричне відношення в* $\mathfrak{H}$ *з індексами дефекту* $n_-(A) \le n_+(A) \le \infty$. *Припустимо також, що* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $A_0 = \ker \Gamma_0$ *й* $\gamma_\pm(\cdot)$ *та* $M_+(\cdot)$ *–* γ*-поля та функція Вейля трійки* Π. *Тоді рівність (формула для узагальнених резольвент)*

$$R(\lambda) = R_\tau(\lambda) = (A_0 - \lambda)^{-1} - \gamma_+(\lambda)(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1}\gamma_-^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.106}$$

встановлює біективну відповідність $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ *між функціями* $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *та узагальненими резольвентами* $R(\lambda)$ *відношення* A. *Крім того,* $R_\tau(\lambda)$ *є канонічною резольвентою тоді й тільки толі, коли* $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Доведення. Нехай $R(\lambda) = P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, – узагальнена резольвента відношення A, породжена розширенням $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \supset A$ в гільбертовому просторі $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$. Тоді за теоремою 2.41 існує функція $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, така що має місце (2.106). Єдність такої функції $\tau(\cdot)$ випливає з (2.106) та оборотності операторів $\gamma_+(\lambda) \in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_\lambda(A)]$ та $\gamma_-^*(\overline{\lambda}) \in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}(A)]$.

Звоортно, нехай $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Тоді за теоремою 2.21 існує гілбертів простір $\mathfrak{H}_1$ та відношенння $\widetilde{\theta} \in Self(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$, таке що має місце (2.24). Покладемо $\widetilde{\mathfrak{H}} := \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$ та нехай $\widetilde{\Pi} = \{(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1), \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка (2.97) для $\widetilde{A}^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$. Тоді рівність $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\widetilde{\theta}}$ (для трійки $\widetilde{\Pi}$) задає розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ відношення A і за теоремою 2.41, (3) права частина в (2.106) дорівнює $P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A} - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}$. Таким чином, рівність (2.106) задає узагальнену резольвенту відношення A. Нарешті, останнє твреження теореми випливає з тверджения 2.24, (5) та формули (2.94). ☐

Наслідок 2.43. *Якщо* $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *задано операторною парою* (2.20), (2.21), *то* $(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0]$ *і формулу* (2.106) *можна зобразити у вигляді*

$$R(\lambda) = R_\tau(\lambda) = (A_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)\gamma_-^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.107}$$

Доведення. Оскільки $(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$, то згідно з [94, лема 2.1] $(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{K}, \mathcal{H}_0]$ і

$$-(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} = (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.108}$$

Звідси та з (2.106) випливає (2.107). ☐

В наступній теоремі, доведення якої базується на формулах (2.94) та (2.106) , дається опис узагальнених резольвент у формі А.В. Штрауса [47, 50, 67].

Теорема 2.44. *За умов теореми 2.42 формула*

$$R(\lambda) = (\widetilde{A}(\lambda) - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{2.109}$$

задає бієктивну відповідність між узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ відношення A та функціями $\widetilde{A}(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to Ext_A$, такими що $-\widetilde{A}(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathfrak{H})$. При цьому зв'язок між формулами (2.106) *та* (2.109) *задається рівністю $\tau(\lambda) = -\Gamma\widetilde{A}(\lambda) = \{\{\Gamma_0\widehat{f}, -\Gamma_1\widehat{f}\} : \widehat{f} \in \widetilde{A}(\lambda)\}$, так що $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{A}_{-\tau(\lambda)}$ з $\tau(\lambda) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$.*

Доведення. Позначимо $F := A^* \ominus A$, так що $A^* = A \oplus F$. Для кожної функції $\widetilde{A}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to Ext_A$ маємо $\widetilde{A}(\lambda) = A \oplus \widehat{A}(\lambda)$, де $\widehat{A}(\lambda) = \widetilde{A}(\lambda) \cap F$. Тому фунцкія $\widetilde{A}(\cdot)$ є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ тоді й тільки тоді, коли такою ж є функція $\widehat{A}(\cdot)$. Нехай $\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – функція, задана рівністю $\tau(\lambda) = -\Gamma\widetilde{A}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Оскільки $\tau(\lambda) = -(\Gamma \upharpoonright F)\widehat{A}(\lambda)$ і оператор $\Gamma \upharpoonright F$ є ізоморфізмом F на $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, функція $\tau(\cdot)$ є голоморфною тоді й тільки тоді, коли такою ж є функція $\widehat{A}(\cdot)$ і, отже, $\widetilde{A}(\cdot)$. Тому в силу твердження 2.24, (5) рівності $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{A}_{-\tau(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, й $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{A}^*(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$, задають бієктивну відповідність між функціями $\widetilde{A}(\cdot)$, що задовольняють умовам теореми, та функціями $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Тепер твердження теореми випливає з формули для канонічних резольвент (2.94), застосованої до $\widetilde{A}_{-\tau(\lambda)}$, та теореми 2.42. □

Наступний наслідок випливає беспосередньо з теореми 2.44.

Наслідок 2.45. *Нехай виконано умови теореми 2.42. Якщо $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ є голоморфною парою* (2.20)*, то для кожного $g \in \mathfrak{H}$ й $\lambda \in \mathbb{C}_+$ абстрактна гранична задача*

$$\{f, \lambda f + g\} \in A^* \tag{2.110}$$

$$C_0(\lambda)\Gamma_0\{f, \lambda f + g\} - C_1(\lambda)\Gamma_1\{f, \lambda f + g\} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.111}$$

має єдиний розв'язок $f = f(g, \lambda)$ й рівність $R(\lambda)g := f(g, \lambda)$ задає узагальнену резольвенту $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ відношення A, яка допускає також зображення (2.107)*. Зворотно, для кожної узагальненої резольвенти $R(\lambda)$ відношення A існує єдина пара $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вигляду* (2.20)*, така що $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ (тобто, $R(\lambda)$ задається як розв'язок задачі* (2.110), (2.111)*). Крім того, $R_\tau(\lambda)$ є канонічною резольвентою тоді й тільки тоді, коли $\tau(\lambda) \equiv \theta \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ є операторною парою* (2.23)*. У цьому випадку $R_\tau(\lambda) = (\widetilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, де $\widetilde{A}_\theta$ – самоспряжене розширення відношення A, задане граничною умовою*

$$\widetilde{A}_\theta = \{\widehat{f} \in A^* : C_0\Gamma_0\widehat{f} - C_1\Gamma_1\widehat{f} = 0\}.$$

Зауваження 2.46. З наслідків 2.43 та 2.45 випливає, що формула для резольвент (2.107), а також гранична задача (2.110), (2.111), задають параметризацію

$$R(\lambda) = R_\tau(\lambda) = P_{\mathfrak{H}}(\widetilde{A}_\tau - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{2.112}$$

усіх узагальнених резольвент $R(\lambda)$ і, отже, усіх ($\mathfrak{H}$-мінімальних) розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ відношення A за допомоги абстрактного граничного параметра $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

Нашею наступною метою є характеризація в термінах парметра τ розширень $\widetilde{A}_\tau \in \mathrm{Self}_0(A)$.

Твердження 2.47. *Припустимо, що* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^* *й* $M_+(\lambda) = (M(\lambda), N_+(\lambda))$ *– функція Вейля трійки* Π. *Тоді:*

(1) *Трійка* $\widehat{\Pi} = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_1\}$, *в якій*

$$\widehat{\Gamma}_0 \widehat{f} = -\Gamma_1 \widehat{f} + P_2 \Gamma_0 \widehat{f}, \qquad \widehat{\Gamma}_1 \widehat{f} = P_1 \Gamma_0 \widehat{f}, \quad \widehat{f} \in A^*, \tag{2.113}$$

є граничною трійкою для A^*, *такою що* $\widehat{A}_0 (= \ker \widehat{\Gamma}_0) = A_1$.

(2) *Якщо функція* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *задана у вигляді* (2.20), (2.21) *й* $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}(A)$ *(див. зауваження 2.46), то для трійки* $\widehat{\Pi}$ $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\widehat{\tau}}$, *де* $\widehat{\tau}(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *задано рівностями*

$$\widehat{\tau}(\lambda) = \{\widehat{C}_0(\lambda), \widehat{C}_1(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.114}$$

$$\widehat{C}_0(\lambda) = (C_1(\lambda), C_{02}(\lambda)) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_0, \qquad \widehat{C}_1(\lambda) = -C_{01}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.115}$$

(3) *Функція Вейля* $\widehat{M}_+(\cdot)$ *трійки* $\widehat{\Pi}$ *має вигляд*

$$\widehat{M}_+(\lambda) = P_1(P_2 - M_+(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{2.116}$$

де $M_+(\lambda)$ *розглядається як оператор в* $\mathcal{H}_0$.

Доведення. (1) Нехай

$$X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & -I_{\mathcal{H}_1} \\ P_1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1. \tag{2.117}$$

Тоді $X^* J X = J$, $X J X^* = J$ і справедлива рівність (2.45) з операторами $\widetilde{\Gamma}_j = \widehat{\Gamma}_j$. Тому в силу твердження 2.27 $\widehat{\Pi}$ є граничною трійкою для A^*. Крім того, рівність $\widehat{A}_0 = A_1$ випливає з (2.113) та (2.36).

(2) Безпосередня перевірка показує, що

$$\widehat{C}_0(\lambda)\widehat{\Gamma}_0 - \widehat{C}_1(\lambda)\widehat{\Gamma}_1 = C_0(\lambda)\Gamma_0 - C_1(\lambda)\Gamma_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси та з наслідку 2.45 випливає твердження (2).

(3) Застосовуючи твердження 2.38 до трійок Π та $\widehat{\Pi}$, отримуємо (2.116). ☐

Наступна теорема безпосередньо випливає з [85, 88, 30].

Теорема 2.48. *Нехай* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ *– симетричне відношення з рівними індексами дефекту* $n_+(A) = n_-(A)$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– звичайна гранична трійка для* A^*, $A_0 (= A_0^*) = \ker \Gamma_0$ *й* $M(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π. *Тоді:*

(1) *Рівність* $\mathrm{mul}\, A_0 = \mathrm{mul}\, A$ *є вірною тоді й тільки тоді, коли*

$$D_M (= s - \lim_{y \to \infty} \tfrac{1}{iy} M(iy)) = 0. \tag{2.118}$$

(2) *Рівність* $\mathrm{mul}\, A = \mathrm{mul}\, A^*$ *виконується тоді й тільки тоді, коли має місце* (2.118) *й*

$$\lim_{y \to \infty} y \, \mathrm{Im}(M(iy)h, h) = +\infty, \quad h \in \mathcal{H}, \quad h \neq 0. \tag{2.119}$$

В наступній теоремі дається узагальнення теореми 2.48 на випадок $n_-(A) \le n_+(A)$.

Теорема 2.49. *Нехай* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ *– симетричне відношення з індексами дефекту* $n_-(A) \le n_+(A)$, $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, A_0 *– максимальне симетричне відношення* (2.36) *й* $M_+(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π. *Припустимо також, що* $M(\cdot)(\in R[\mathcal{H}_1])$ *й* $\mathcal{M}(\cdot)(\in R[\mathcal{H}_0])$ *– оператор функції, задані рівностями* (2.69), (2.70) *та* (2.71). *Тоді:*

(1) *Рівність* $\operatorname{mul} A_0 = \operatorname{mul} A$ *є вірною тоді й тільки тоді, коли виконується* (2.118).

(2) *Рівність* $\operatorname{mul} A = \operatorname{mul} A^*$ *має місце тоді й тільки тоді, коли виконується* (2.118) *й*

$$\lim_{y\to\infty} y \operatorname{Im}(\mathcal{M}(iy)h_0, h_0) = +\infty, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \quad h_0 \ne 0. \tag{2.120}$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_e$, A_r, A_e – ті ж самі об'єкти, що і в твердженні 2.32, й нехай $\Pi^e = \{\mathcal{H}_0, \Gamma_0^e, \Gamma_1^e\}$ – гранична трійка (2.73), (2.74) для A_e^*. Тоді $\operatorname{mul} A_r = \operatorname{mul} A_r^* = \{0\}$ і згідно з твердженням 2.12, (2) $\operatorname{mul} A_0 = \operatorname{mul} A_0^*$. Звідси випливають рівності

$$\operatorname{mul} A_e = \operatorname{mul} A, \qquad \operatorname{mul} A_e^* = \operatorname{mul} A^*, \qquad \operatorname{mul}(A_0 \oplus A_r) = \operatorname{mul}(A_0 \oplus A_r)^* (= \operatorname{mul} A_0). \tag{2.121}$$

Нехай $A_{0,e} = \ker \Gamma_0^e$. Тоді $A_0 \oplus A_r \subset A_{0,e}$ і внаслідок останньої рівності в (2.121) та твердження 2.12, (1) $\operatorname{mul} A_{0,e} = \operatorname{mul}(A_0 \oplus A_r) = \operatorname{mul} A_0$. Звідси та з першої рівності в (2.121) випливає еквівалентність

$$\operatorname{mul} A = \operatorname{mul} A_0 \iff \operatorname{mul} A_e = \operatorname{mul} A_{0,e}. \tag{2.122}$$

Оскільки згідно з твердженням 2.32, (2) функція Вейля трійки Π^e збігається з $\mathcal{M}(\cdot)$, то застосування теореми 2.48, (1) до Π^e дає

$$\operatorname{mul} A_e = \operatorname{mul} A_{0,e} \iff D_{\mathcal{M}} = 0. \tag{2.123}$$

Крім того, в силу твердження 2.3 маємо $D_{\mathcal{M}} = 0 \iff D_M = 0$. Комбінуючи цю еквівалентність з (2.122) та (2.123), приходимо до твердження (1).

Далі, з огляду на (2.121) $\operatorname{mul} A = \operatorname{mul} A^* \iff mul A_e = \operatorname{mul} A_e^*$. Звідси та з теореми 2.48, (2), застосованої до трійки Π^e, випливає твердження (2). ☐

Зауваження 2.50. (1) Якщо за умов теореми 2.49 A є оператором (тобто $\operatorname{mul} A = \{0\}$), то твердження цієї теореми можна зформулювати в наступному вигляді: (a) A_0 є оператором тоді й тільки тоді, коли виконується (2.118); (b) A є щільно визначеним оператором тоді й тільки тоді, коли виконуються (2.118) та (2.120).

(2) З огляду на (2.71) умову (2.120) можна зобразити у вигляді

$$\lim_{y\to+\infty} y \left(\operatorname{Im}(M_+(iy)h_0, h_0)_{\mathcal{H}_0} + \tfrac{1}{2}||P_2 h_0||^2\right) = +\infty, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \quad h_0 \ne 0.$$

Теорема 2.51. *Припустимо, що* $n_+(A) = n_-(A)$, $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $M_+(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π *та* $A_0 \in Ext_A$ *– розширення* (2.36). *Крім того, нехай* $\theta \in Self(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, $\widetilde{A}_\theta \in \operatorname{Self}(A)$ *– відповідне розширення відношення* A *й*

$$\Phi_\theta(\lambda) := P_1(\theta - M_+(\lambda))^{-1}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тоді $\Phi_\theta(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$ *і справедлива еквівалентність*

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}_\theta \subset \operatorname{mul} A_0 \iff D_{\Phi_\theta} (= s - \lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_1(\theta - M_+(iy))^{-1}) = 0. \tag{2.124}$$

Доведення. Згідно з [97, Proposition 3.6] відношення θ допускає зображення $\theta = \{C_0, C_1\}$ з операторами $C_0 = (C_{01}, C_{02}) : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ й $C_1 \in [\mathcal{H}_1]$, що задовільняють рівностям

$$-C_1 C_{01}^* + C_{01} C_1^* + iC_{02} C_{02}^* = 0, \qquad C_1 C_1^* + C_{01} C_{01}^* + C_{02} C_{02}^* = I_{\mathcal{H}_1}, \tag{2.125}$$

$$C_1^* C_{01} - C_{01}^* C_1 = 0, \qquad C_1^* C_1 + C_{01}^* C_{01} = I_{\mathcal{H}_1}, \quad 2C_{02}^* C_{02} = I_{\mathcal{H}_2}, \qquad (C_{01}^* - iC_1^*) C_{02} = 0. \tag{2.126}$$

Використовуючи таке зображення θ, введемо оператор

$$X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cc|c} C_{01} & C_{02} & C_1 \\ \hline -C_1 & iC_{02} & C_{01} \end{array}\right) : (\overbrace{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_0}) \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1. \tag{2.127}$$

Нехай $\widetilde{\Gamma}_j : A^* \to \mathcal{H}_1,\ j \in \{0, 1\},$ – відображення (2.45), тобто

$$\widetilde{\Gamma}_0 = C_0 \Gamma_0 + C_1 \Gamma_1, \quad \widetilde{\Gamma}_1 = (-C_1 P_1 + iC_{02} P_2) \Gamma_0 + C_{01} \Gamma_1. \tag{2.128}$$

Тоді $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ – звичайна гранична трійка для A^*. Дійсно, за цих умов оператори (2.44) допускають зображення (2.55) та

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}_1} \\ I_{\mathcal{H}_1} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$$

і безпосередня перевірка з урахуванням (2.125), (2.126) дає рівності $X^* \widetilde{J} X = J$ та $XJX^* = \widetilde{J}$ для оператора (2.127). Звідси та з твердження 2.27 випливає потрібне твердження про трійку $\widetilde{\Pi}$.

Згідно з (2.35) та (2.128) маємо $\widetilde{A}_0 (= \ker \widetilde{\Gamma}_0) = \widetilde{A}_\theta$. Крім того, в силу (2.127) та твердження 2.38 функцією Вейля трійки $\widetilde{\Pi}$ є

$$\widetilde{M}(\lambda) = (-C_1 P_1 + iC_{02} P_2 + C_{01} M_+(\lambda))(C_0 + C_1 M_+(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.129}$$

Оскільки $\theta = \theta^\times$, то в силу [97, Proposition 3.1]

$$\theta = \{\{-(C_1^* + iC_{02}^*) h_1, C_{01}^* h_1\} : h_1 \in \mathcal{H}_1\}.$$

й згідно з [94, Lemma 2.1]

$$(\theta - M_+(\lambda))^{-1} = -(C_0 + C_1 M_+(\lambda))^{-1} C_1 = -(C_1^* + iC_{02}^*)(C_{01}^* + M_+(\lambda)(C_1^* + iC_{02}^*))^{-1}. \tag{2.130}$$

Зважаючи на (2.129), (2.130) та (2.125) безпосереднім підрахунком отримуємо рівність

$$B + C_1^* \widetilde{M}(\lambda) C_1 = \Phi_\theta(\lambda) (= P_1 (\theta - M_+(\lambda))^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{2.131}$$

В (2.131) $B = -C_1^* C_{01}$, так що внаслідок 1-ї рівності в (2.126) $B = B^*$.

Припустимо, далі, що $\widetilde{A}$ – симетричне розширення A, задане ріністю

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_\theta \cap A_0 = \{\widehat{f} \in A^* : \Gamma_0 \widehat{f} = 0 \ \text{ і } \ C_1 \Gamma_1 \widehat{f} = 0\}. \tag{2.132}$$

Нехай $\dot{\mathcal{H}} = \overline{\operatorname{ran} C_1}$ й $\widehat{\mathcal{H}} = \ker C_1^*$, так що $\mathcal{H}_1 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}$. Доведемо рівність

$$\widetilde{A} = \{\widehat{f} \in A^* : \widetilde{\Gamma}_0 \widehat{f} = 0 \ \text{ і } \ \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{H}}\}. \tag{2.133}$$

Нехай $\widehat{f} \in \widetilde{A}$, так що $\Gamma_0\widehat{f} = 0$ й $C_1\Gamma_1\widehat{f} = 0$. Тоді з огляду на (2.128) $\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f} = 0$, $\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = C_{01}\Gamma_1\widehat{f}$ і в силу 1-ї рівності в (2.126)

$$C_1^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = C_1^*C_{01}\Gamma_1\widehat{f} = C_{01}^*C_1\Gamma_1\widehat{f} = 0.$$

Цьому $\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{H}}$. Зворотно, нехай $\widehat{f} \in A^*$ і $\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f} = 0$, $\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{H}}$. Тоді $C_1^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = 0$ і перша рівність в (2.125) дає $C_{02}^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = 0$. Цьому в силу (2.125)

$$C_1C_{01}^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = 0, \qquad C_{01}C_{01}^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = \widetilde{\Gamma}_1\widehat{f}. \tag{2.134}$$

Оскільки відображення $(\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ сюр'єктивне, існує $\widehat{g} \in A^*$, таке що $\Gamma_0\widehat{g} = 0$ й $\Gamma_1\widehat{g} = C_{01}^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f}$. З 1-ї рівності в (2.134) випливає, що $C_1\Gamma_1\widehat{g} = 0$ і, отже, $\widehat{g} \in \widetilde{A}$. Крім того, внаслідок (2.128) та 2-ї рівності в (2.134) маємо $\widetilde{\Gamma}_0\widehat{g} = 0 = \widetilde{\Gamma}_0\widehat{f}$ та $\widetilde{\Gamma}_1\widehat{g} = C_{01}\Gamma_1\widehat{g} = C_{01}C_{01}^*\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = \widetilde{\Gamma}_1\widehat{f}$. Тому $\widehat{f} = \widehat{g} + \widehat{\varphi}$ з деяким $\widehat{\varphi} \in A \subset \widetilde{A}$ і, отже, $\widehat{f} \in \widetilde{A}$. Це завершує доведення (2.133).

Застосовуючи тепер твердження 2.37 до граничної трійки $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ для A^* та розкладу $\mathcal{H}_1 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}$, отримуємо таке твердженняі: існує звичайна гранична трійка $\dot{\Pi} = \{\dot{\mathcal{H}}, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ для $\widetilde{A}^*$, така що $\ker\dot{\Gamma}_0 = \ker\widetilde{\Gamma}_0 = \widetilde{A}_\theta$ й відповідна функція Вейля $\dot{M}(\cdot)$ є

$$\dot{M}(\lambda) = P_{\dot{\mathcal{H}}}\widetilde{M}(\lambda) \restriction \dot{\mathcal{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{2.135}$$

Крім того, застосування теореми 2.48 до симетричного відношення $\widetilde{A}$ та граничної трійки $\dot{\Pi}$ для $\widetilde{A}^*$ дає еквівалентність

$$\operatorname{mul}\widetilde{A}_\theta = \operatorname{mul}\widetilde{A} \iff D_{\dot{M}}(= s - \lim_{y\to\infty} \tfrac{1}{iy}\dot{M}(iy)) = 0. \tag{2.136}$$

З огляду на (2.135) та рівність $\overline{\operatorname{ran} C_1} = \dot{\mathcal{H}}$ формулу (2.131) можна записати як $\Phi_\theta(\lambda) = B + C_1^*\dot{M}(\lambda)C_1$. Звідси випливає, що $\Phi_\theta(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$ й

$$D_{\dot{M}} = 0 \iff D_{\Phi_\theta} = 0 \tag{2.137}$$

Відзначимо також, що в силу (2.132) $\operatorname{mul}\widetilde{A} = \operatorname{mul}\widetilde{A}_\theta \cap \operatorname{mul} A_0$ і, отже, рівність $\operatorname{mul}\widetilde{A}_\theta = \operatorname{mul}\widetilde{A}$ еквівалентна включенню $\operatorname{mul}\widetilde{A}_\theta \subset \operatorname{mul} A_0$. Комбінуючи це твердження з (2.136) та (2.137), отримуємо потрібну еквівалентність (2.124). ☐

В наступній теоремі твердження теореми 2.51 поширюється на розширення з виходом у ширший простір.

Теорема 2.52. *Нехай* $A \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ *– симетричне відношення з індексами дефекту* $n_-(A) \le n_+(A)$, $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $A_0 \in Ext_A$ *– максимальне симетричне розширення* (2.36) *та* $M_+(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π. *Припустимо також, що* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *– операторна пара* (2.20) *й* $\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ *– відповідне самоспряжене розширення відношення* A *з виходом в ширший простір* $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ *(див. зауваження 2.46). Тоді:*

(1) *Рівність*

$$\Phi_\tau(\lambda) := -P_1(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} = P_1(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.138}$$

задають оператор-функцію $\Phi_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$. *Тому існує сильна границя*

$$D_\tau := D_{\Phi_\tau} = s - \lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}P_1(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_1(iy) \tag{2.139}$$

(2) *Якщо простір* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *розкладено як* $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$ *(з* $\mathfrak{H}_1 := \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$*), то вірною є еквівалентність*

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau \subset \operatorname{mul} A_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \iff D_\tau = 0 \tag{2.140}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{\Pi} = \{(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1), \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка для $A^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$ з теореми 2.41 і $\widetilde{M}_+(\lambda)$ – функція Вейля трійки $\widetilde{\Pi}$. Припустимо, що розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau$ параметризується в трійці $\widetilde{\Pi}$ як $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\widetilde{\theta}}$ з деяким $\widetilde{\theta} \in Self(\mathcal{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1)$. Тоді внаслідок (2.105) та (2.138) маємо $P_{\mathcal{H}_1}(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}_1 = \Phi_\tau(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}_+$. Звідси та з (2.102) випливає, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$\Phi_{\widetilde{\theta}}(\lambda) := P_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1}(\widetilde{\theta} - \widetilde{M}_+(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_\tau(\lambda) & * \\ * & P_{\mathfrak{H}_1}(\widetilde{A}_\tau - \lambda)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}_1 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1. \tag{2.141}$$

(елементи * не мають значення). Оскільки $\Phi_{\widetilde{\theta}}(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1]$, то внаслідок (2.141) $\Phi_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$. Крім того, комбінуючи (2.141) з відомою рівністю $s - \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{iy} P_{\mathfrak{H}_1}(\widetilde{A}^\tau - iy)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{H}_1 = 0$ та приймаючи до уваги твердження 2.3, отримуємо еквівалентність

$$D_{\Phi_{\widetilde{\theta}}} = 0 \iff D_\tau (= D_{\Phi_\tau}) = 0. \tag{2.142}$$

Крім того, в силу (2.98) $\operatorname{mul} \widetilde{A}_0 = \operatorname{mul} A_0 \oplus \mathfrak{H}_1$ і застосування теореми 2.51 до граничної трійки $\widetilde{\Pi}$ та розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau = A_{\widetilde{\theta}}$ дає

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau \subset \operatorname{mul} A_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \iff D_{\Phi_{\widetilde{\theta}}} = 0. \tag{2.143}$$

Порівнюючи тепер (2.142) з (2.143), отримуємо еквівалентність (2.140). □

В наступній теоремі в термінах абстрактного граничного параметра τ описуються самоспряжені розширення $\widetilde{A}_\tau$ відношення A, що належать до класу $\widetilde{\operatorname{Self}}_0(A)$.

Теорема 2.53. *Нехай виконані умови теореми 2.52. Тоді:*

(1) *Рівність*

$$\widehat{\Phi}_\tau(\lambda) = M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.144}$$

задає оператор-функцію $\widehat{\Phi}_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$. *Тому існує сильна границя*

$$\widehat{D}_\tau := D_{\widehat{\Phi}_\tau} = s - \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{iy} M_+(iy)(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_0(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_1 \tag{2.145}$$

(2) *Розширення* $\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\operatorname{Self}}(A)$ *належить до класу* $\widetilde{\operatorname{Self}}_0(A)$ *тоді й тільки тоді, коли* $D_\tau = \widehat{D}_\tau = 0$ *(тут* D_τ *– границя* (2.139)*).*

(3) *Якщо, крім того,* $\operatorname{mul} A_0 = \operatorname{mul} A$, *то*

$$\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\operatorname{Self}}_0(A) \iff D_\tau = 0 \tag{2.146}$$

(4) *Якщо* $\operatorname{mul} A_1 = \operatorname{mul} A$, *то*

$$\widetilde{A}_\tau \in \widetilde{\operatorname{Self}}_0(A) \iff \widehat{D}_\tau = 0 \tag{2.147}$$

Доведення. Нехай $\widehat{\Pi} = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка (2.113) для A^*. Застосовуючи до цієї трійки теорему 2.52 та приймаючи до уваги твердження 2.47, отримуємо наступні твердження:

(T1) Рівність

$$\widehat{\Phi}_\tau(\lambda) := P_1(\widehat{C}_0(\lambda) - \widehat{C}_1(\lambda)\widehat{M}_+(\lambda))^{-1}\widehat{C}_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{2.148}$$

в якій $\widehat{C}_j(\lambda),\ j \in \{0,1\}$, та $\widehat{M_+}(\lambda)$ – оператор-функції (2.115) та (2.116), задає оператор-функцію $\widehat{\Phi}_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$. Тому існує сильна границя $\widehat{D}_\tau := s - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{iy}\widehat{\Phi}_\tau(iy)$.

(T2) Якщо простір $\widetilde{\mathfrak{H}}$ розкладено як $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$, то

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}^\tau \subset \operatorname{mul} A_1 \oplus \mathfrak{H}_1 \iff \widehat{D}_\tau = 0. \tag{2.149}$$

З (2.148) випливає, що

$$\widehat{\Phi}_\tau(\lambda) = -P_1\left(C_1(\lambda)P_1 + C_{02}(\lambda)P_2 + C_{01}(\lambda)P_1(P_2 - M_+(\lambda))^{-1}\right)^{-1} C_{01}(\lambda) =$$
$$-P_1(P_2 - M_+(\lambda))\big((C_1(\lambda)P_1 + C_{02}(\lambda)P_2)(P_2 - M_+(\lambda)) + C_{01}(\lambda)P_1\big)^{-1}C_{01}(\lambda) =$$
$$M_+(\lambda)(C_{02}(\lambda)P_2 - C_1(\lambda)M_+(\lambda) + C_{01}(\lambda)P_1)^{-1}C_{01}(\lambda) = M_+(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) \restriction \mathcal{H}_1.$$

Тому $\widehat{\Phi}_\tau(\lambda)$ допускає зображаення (2.144) й твердження (T1) дає твердження (1) теореми. Далі, внаслідок (2.140) та (2.149) вірною є еквівалентність

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau \subset (\operatorname{mul} A_0 \oplus \mathfrak{H}_1) \cap (\operatorname{mul} A_1 \oplus \mathfrak{H}_1) \iff D_\tau = \widehat{D}_\tau = 0. \tag{2.150}$$

Оскільки $\operatorname{mul} A_0 \subset \mathfrak{H}$ й $\operatorname{mul} A_1 \subset \mathfrak{H}$, то

$$(\operatorname{mul} A_0 \oplus \mathfrak{H}_1) \cap (\operatorname{mul} A_1 \oplus \mathfrak{H}_1) = (\operatorname{mul} A_0 \cap \operatorname{mul} A_1) \oplus \mathfrak{H}_1 = \operatorname{mul}(A_0 \cap A_1) \oplus \mathfrak{H}_1.$$

Крім того, згідно з твердженням 2.28, (1) $A_0 \cap A_1^* = A$ й, отже, $A_0 \cap A_1 = A$. Тому еквівалентність (2.150) можна записати у вигляді

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau \subset \operatorname{mul} A \oplus \mathfrak{H}_1 \iff D\tau = \widehat{D}_\tau = 0. \tag{2.151}$$

Оскільки розширення $\widetilde{A}_\tau$ мінімально, то $\operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau \cap \mathfrak{H}_1 = \{0\}$. Звідси та з включення $\operatorname{mul} A \subset \operatorname{mul} \widetilde{A}_\tau$ випливає еквівалентність

$$\operatorname{mul} \widetilde{A}^\tau \subset \operatorname{mul} A \oplus \mathfrak{H}_1 \iff \operatorname{mul} \widetilde{A}^\tau = \operatorname{mul} A. \tag{2.152}$$

Порівнюючи тепер (2.151) з (2.152), приходимо до твердження (2) теореми.

Твердження (3) випливає з (2.140) та (2.152). Нарешті, твердження (4) є твердженням (3) для трійки $\widehat{\Pi}$. ☐

Наслідок 2.54. *Нехай на додаток до припущень теореми 2.53 відношення A є оператором (тобто* $\operatorname{mul} A = \{0\}$*) й D_τ та $\widehat{D}_\tau$ – границі* (2.139) *та* (2.145)*. Тоді:*

(1) *Розширення $\widetilde{A}_\tau$ є оператором тоді й тільки тоді, коли $D_\tau = \widehat{D}_\tau = 0$.*

(2) *Якщо, крім того, A_0 є оператором, то $\widetilde{A}^\tau$ є оператором тоді й тільки тоді, коли $D_\tau = 0$.*

(3) *Якщо A_1 є оператором, то $\widetilde{A}^\tau$ є оператором тоді й тільки тоді, коли $\widehat{D}_\tau = 0$.*

Зауваження 2.55. Якщо $n_+(A) = n_-(A)$ й $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – звичайна гранична трійка для A^*, то граничний параметр $\tau(\cdot) \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$ є неванлинівською парою (2.29), $\widehat{\tau}(\lambda) = -\tau^{-1}(\lambda)$, $\widehat{M}(\lambda) = -M^{-1}(\lambda)$ й рівності (2.139) та (2.145) приймають вигляд

$$D_\tau = s - \lim_{y\to\infty}(-\tfrac{1}{iy}(\tau(iy)+M(iy))^{-1}) = s - \lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{iy}(C_0(iy) - C_1(iy)M(iy))^{-1}C_1(iy)$$

$$\widehat{D}_\tau = s - \lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{iy}(\tau^{-1}(iy)+M^{-1}(iy))^{-1} = s - \lim_{y\to\infty}\tfrac{1}{iy}M(iy)(C_0(iy) - C_1(iy)M(iy))^{-1}C_0(iy),$$

де $M(\cdot)$ – функція Вейля трійки Π. Зазначимо, що для цього випадку теорему 2.53 в іншій спосіб доведено в [62, 64].

2.5. Граничні пари та їхні функції Вейля

Припустимо, що $\mathfrak{H}$ та $\mathcal{H}_0$ - гільбертові простори, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ – відповідний ортогональний розклад простору $\mathcal{H}_0$ з $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$ й P_j – ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_j$, $j \in \{0,1\}$. В подальшему ми будемо розглядати лінійні відношення з $\mathfrak{H}^2$ в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Якщо Γ – таке відношенння, то елемент $\widehat{\varphi} \in \Gamma$ має вигляд $\widehat{\varphi} = \{\widehat{f}, \widehat{h}\}$, де $\widehat{f} = \{f, f'\} \in \mathfrak{H}^2$ $(f,\ f' \in \mathfrak{H})$ і $\widehat{h} = \{h_0, h_1\} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ $(h_0 \in \mathcal{H}_0,\ h_1 \in \mathcal{H}_1)$. У цьому випадку зручно писати

$$\widehat{\varphi} = \{\widehat{f}, \widehat{h}\} = \left\{\widehat{f}, \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{2.153}$$

Якщо, крім того, $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{j1} \oplus \mathcal{H}_{j2} \oplus \dots \mathcal{H}_{j,n_j}$, $j \in \{0,1\}$, то ріність (2.153) записується також у вигляді

$$\widehat{\varphi} = \left\{\widehat{f}, \begin{pmatrix} \{h_{01} \oplus h_{02} \oplus \cdots \oplus h_{0,n_0}\} \\ \{h_{11} \oplus h_{12} \oplus \cdots \oplus h_{1,n_1}\} \end{pmatrix}\right\},$$

де $h_{0k} = P_{\mathcal{H}_{0k}} h_0$ і $h_{1k} = P_{\mathcal{H}_{1k}} h_1$ – компоненти h_0 та h_1 відповідно.

Використовуючи багатозначну частину $\operatorname{mul}\Gamma$ відношення Γ, визначимо лінійні многовиди $\mathcal{K}'_\Gamma$ та $\mathcal{K}''_\Gamma$ в $\mathcal{H}_1$ рівностями

$$\mathcal{K}'_\Gamma = P_1 \operatorname{dom}(\operatorname{mul}\Gamma) = \left\{k' \in \mathcal{H}_1 : \left\{0, \begin{pmatrix} k' \oplus h_2 \\ h_1 \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma \text{ з деякими } h_2 \in \mathcal{H}_2 \text{ і } h_1 \in \mathcal{H}_1\right\}, \tag{2.154}$$

$$\mathcal{K}''_\Gamma = \operatorname{mul}(\operatorname{mul}\Gamma) = \left\{k'' \in \mathcal{H}_1 : \left\{0, \begin{pmatrix} 0 \\ k'' \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma\right\}. \tag{2.155}$$

Нехай, далі, $J_{\mathfrak{H}}$ та J_{01} – сигнатурні оператори, визначені рівностями

$$J_{\mathfrak{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathfrak{H}} \\ iI_{\mathfrak{H}} & 0 \end{pmatrix} : \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}, \quad J_{01} = \begin{pmatrix} P_2 & -iI_{\mathcal{H}_1} \\ iP_1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \tag{2.156}$$

й $(\mathfrak{H}^2, J_{\mathfrak{H}})$, $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, J_{01})$ – відповідні простори Крейна. Нагадаємо [46], що лінійне відношення $\Gamma : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ називається ізометричним відношення з $(\mathfrak{H}^2, J_{\mathfrak{H}})$ в $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, J_{01})$, якщо

$$(J_{\mathfrak{H}}\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathfrak{H}^2} = (J_{01}\widehat{h}, \widehat{x})_{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1}, \quad \{\widehat{f}, \widehat{h}\},\ \{\widehat{g}, \widehat{x}\} \in \Gamma \tag{2.157}$$

або, рівносильно, якщо тотожність

$$(f', g)_{\mathfrak{H}} - (f, g')_{\mathfrak{H}} = (h_1, x_0)_{\mathcal{H}_0} - (h_0, x_1)_{\mathcal{H}_0} + i(P_2 h_0, P_2 x_0)_{\mathcal{H}_2} \tag{2.158}$$

є вірною для всіх $\{\binom{f}{f'}, \binom{h_0}{h_1}\}$, $\{\binom{g}{g'}, \binom{x_0}{x_1}\} \in \Gamma$.

Означення 2.56. Нехай A – замкнене симетричне відношення в $\mathfrak{H}$. Сукупність $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$, в якій $\mathcal{H}_0$ – гільбертів простір, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$ та $\Gamma:\mathfrak{H}^2\to\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ – лінійне відношення, називається граничною парою для A^* якщо:

(1) $\operatorname{dom}\Gamma$ щільно в A^* й Γ – ізомеитричне відношення з $(\mathfrak{H}^2,J_{\mathfrak{H}})$ в $(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,J_{01})$, тобто виконується абстрактна тотожність Гріна (2.158);

(2) якщо $\widehat{\varphi}=\{\binom{g}{g'},\binom{x_0}{x_1}\}\in\mathfrak{H}^2\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1)$ задовільняє (2.158) для кожного $\{\binom{f}{f'},\binom{h_0}{h_1}\}\in\Gamma$, то $\widehat{\varphi}\in\Gamma$.

Умови (1) та (2) означають, що Γ є унітарним відношенням з $(\mathfrak{H}^2,J_{\mathfrak{H}})$ в $(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,J_{01})$ [46]. Тому відношення Γ граничної пари $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$ замкнене й $\ker\Gamma=A$.

З кожною граничною парою $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$ пов'язані відношення $\Gamma_j:\mathfrak{H}^2\to\mathcal{H}_j,\ j\in\{0,1\}$, вигляду

$$\Gamma_0=P_{\mathcal{H}_0\oplus\{0\}}\Gamma=\left\{\{\widehat{f},h_0\}\in\mathfrak{H}^2\oplus\mathcal{H}_0:\left\{\widehat{f},\begin{pmatrix}h_0\\h_1\end{pmatrix}\right\}\in\Gamma\ \text{ з деяким }\ h_1\in\mathcal{H}_1\right\}\tag{2.159}$$

$$\Gamma_1=P_{\{0\}\oplus\mathcal{H}_1}\Gamma=\left\{\{\widehat{f},h_1\}\in\mathfrak{H}^2\oplus\mathcal{H}_1:\left\{\widehat{f},\begin{pmatrix}h_0\\h_1\end{pmatrix}\right\}\in\Gamma\ \text{ з деяким }\ h_0\in\mathcal{H}_0\right\}.\tag{2.160}$$

Якщо $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$ – гранична пара для A^*, то рівності

$$M_+(\lambda)=\left\{\{h_0,h_1\}\in\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1:\left\{\begin{pmatrix}f\\\lambda f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_0\\h_1\end{pmatrix}\right\}\in\Gamma\ \text{ з деяким }\ f\in\mathfrak{H}\right\},\quad\lambda\in\mathbb{C}_+;\tag{2.161}$$

$$M_-(\lambda)=\left\{\{P_1h_0,h_1+iP_2h_0\}:\left\{\begin{pmatrix}f\\\lambda f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}h_0\\h_1\end{pmatrix}\right\}\in\Gamma\ \text{ з деяким }\ f\in\mathfrak{H}\right\},\quad\lambda\in\mathbb{C}_-\tag{2.162}$$

задають функції $M_+(\cdot)$ $(M_-(\cdot))$, визначені на $\mathbb{C}_+$ (відп. $\mathbb{C}_-$) зі значеннями в множині лінійних відношень з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_1$ (відп. з $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_0$).

Означення 2.57. Функції $M_+(\cdot)$ та $M_-(\cdot)$ називаються функціями Вейля пари $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$.

Зауваження 2.58. У випадку $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}_1=:\mathcal{H}$ гранична пара в сенсі означення 2.56 є граничною парою $\{\mathcal{H},\Gamma\}$ в сенсі роботи [63]; при цьому функція $M(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, задана рвністю $M(\lambda)=M_\pm(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}_\pm$, є фнукцією Вейля пари $\{\mathcal{H},\Gamma\}$, запровадженою в [63].

В наступному твердженні вводяться граничні пари спеціального вигляду.

Твердження 2.59. *Припустимо, що* $\Pi=\{\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}_1,G_0,G_1\}$ *– гранична трійка для* A^*, $\mathcal{K}_2:=\mathcal{K}_0\ominus\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}'$ *і* $\mathcal{K}''$ *– гільбертові простори й*

$$\mathcal{H}_1:=\mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}'\oplus\mathcal{K}'',\qquad\mathcal{H}_0:=\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}'\oplus\mathcal{K}''(=\mathcal{K}_2\oplus\mathcal{H}_1).\tag{2.163}$$

Крім того, нехай $F_0\in[\mathcal{K}',\mathcal{K}_0],\ F'\in[\mathcal{K}']$ *– оператори,*

$$F_0=\begin{pmatrix}F_2\\F_1\end{pmatrix}:\mathcal{K}'\to\mathcal{K}_2\oplus\mathcal{K}_1\tag{2.164}$$

– блочне зображення оператора F_0 *й виконується рівність*

$$F'-(F')^*+iF_2^*F_2=0.\tag{2.165}$$

Припустимо також, що $\Gamma:\mathfrak{H}^2\to\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ *– лінійне відношення, задане рівностю*

$$\Gamma=\left\{\left\{\widehat{f},\begin{pmatrix}(G_0\widehat{f}-iF_2k')\oplus k'\oplus 0\\(G_1\widehat{f}+F_1k')\oplus(F_0^*G_0\widehat{f}+F'k')\oplus k''\end{pmatrix}\right\}:\widehat{f}\in A^*,\ k'\in\mathcal{K}',\ k''\in\mathcal{K}''\right\}.\tag{2.166}$$

Тоді $\mathcal{K}'_\Gamma=\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''_\Gamma=\mathcal{K}''$ *й* $\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma\}$ *– гранична пара для* A^*.

Доведення. Легко бачити, що вірним є наступне твердження:

(a) елемент $\widehat\varphi=\{\widehat g,\binom{x_0}{x_1}\}\in\mathfrak{H}^2\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1)$ з

$$\widehat g=\{g,g'\}\in\mathfrak{H}^2,\quad x_0=m_0\oplus x_0'\oplus x_0''\in\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}'\oplus\mathcal{K}'',\quad x_1=m_1\oplus x_1'\oplus x_1''\in\mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}'\oplus\mathcal{K}'' \tag{2.167}$$

задовільняє тотожності (2.158) для кожного $\{\binom{f}{f'},\binom{h_0}{h_1}\}\in\Gamma$ тоді й тільки тоді, коли $x_0''=0$ і

$$(f',g)-(f,g')= \tag{2.168}$$
$$=(G_1\widehat f,m_0)_{\mathcal{K}_0}+(F_0^*G_0\widehat f,x_0')_{\mathcal{K}'}-(G_0\widehat f,m_1)_{\mathcal{K}_0}+i(P_{\mathcal{K}_2}G_0\widehat f,P_{\mathcal{K}_2}m_0)_{\mathcal{K}_2},\quad \widehat f=\{f,f'\}\in A^*$$
$$(F_0k',m_0)_{\mathcal{K}_0}+(F'k',x_0')_{\mathcal{K}'}-(k',x_1')_{\mathcal{K}'}=0,\quad k'\in\mathcal{K}'. \tag{2.169}$$

Нехай $\{\widehat g,\binom{x_0}{x_1}\}\in\Gamma$, так що $\widehat g\in A^*$ і x_0,x_1 задані рівностями (2.167) з

$$m_0=G_0\widehat g-iF_2x_0',\quad x_0''=0,\quad m_1=G_1\widehat g+F_1x_0',\quad x_1'=F_0^*G_0\widehat g+F'x_0'.$$

Тоді підстановка таких m_0, m_1 та x_1' в (2.168), (2.169) й беспосередні обчислення з урахуванням (2.165) та (2.33) показують виконнання рівностей (2.168) та (2.169). Тому в силу твердження (a) для усіх $\{\binom{f}{f'},\binom{h_0}{h_1}\}$, $\{\binom{g}{g'},\binom{x_0}{x_1}\}\in\Gamma$ справедлива тотожність (2.158).

Тепер припустимо, що елемент $\{\widehat g,\binom{x_0}{x_1}\}\in\mathfrak{H}^2\oplus(\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1)$, заданий рівностю (2.167), задовільняє тотожності (2.158) для кожного $\{\binom{f}{f'},\binom{h_0}{h_1}\}\in\Gamma$. Тоді в силу твердження (a) $x_0''=0$ і справедливі рівності (2.168), (2.169). Якщо $\widehat f=\{f,f'\}\in A$, то $G_0\widehat f=G_1\widehat f=0$ і внаслідок (2.168) $(f',g)-(f,g')=0$. Звідси $\widehat g\in A^*$. Далі, з огляду на (2.164) $F_0^*G_0\widehat f=F_2^*P_{\mathcal{K}_2}G_0\widehat f+F_1^*P_{\mathcal{K}_1}G_0\widehat f$ і рівність (2.168) можна записати як

$$(f',g)-(f,g')= \tag{2.170}$$
$$=(G_1\widehat f,P_{\mathcal{K}_1}m_0)-(P_{\mathcal{K}_1}G_0\widehat f,m_1-F_1x_0')+i(P_{\mathcal{K}_2}G_0\widehat f,P_{\mathcal{K}_2}m_0+iF_2x_0'),\quad \widehat f=\{f,f'\}\in A^*.$$

Оскільки зображення $(G_0,G_1)^\top$ сюр'єктивне, то внаслідок (2.170) та (2.33)

$$P_{\mathcal{K}_1}m_0=P_{\mathcal{K}_1}G_0\widehat g,\quad m_1-F_1x_0'=G_1\widehat g,\quad P_{\mathcal{K}_2}m_0+iF_2x_0'=P_{\mathcal{K}_2}G_0\widehat g$$

й, отже,

$$m_0=G_0\widehat g-iF_2x_0',\quad m_1=G_1\widehat g+F_1x_0'.$$

Крім того, використовуючи спочатку (2.169), а потім (2.164) та (2.165), отримуємо

$$x_1'=F_0^*m_0+(F')^*x_0'=F_0^*G_0\widehat g+((F')^*-iF_0^*F_2)x_0'=F_0^*G_0\widehat g+F'x_0'.$$

Таким чином, $\{\widehat g,\binom{x_0}{x_1}\}\in\Gamma$ і лінійне відношення (2.166) задовільняє всім умовам означення 2.56. Нарешті, рівності $\mathcal{K}_\Gamma'=\mathcal{K}'$ та $\mathcal{K}_\Gamma''=\mathcal{K}''$ безпосередньо випливають з (2.166). ☐

Твердження 2.60. *Нехай за умов твердження 2.59* $\gamma_{\Pi\pm}(\cdot)$ *та* $M_{\Pi\pm}(\cdot)$ *–* γ*-поля та функції Вейля граничної трійки* Π. *Якщо* $\mathcal{K}''=\{0\}$, *то вірними є наступні твердження:*

(1) $\mathcal{H}_1=\mathcal{K}_1\oplus\mathcal{K}'$, $\mathcal{H}_0=\mathcal{K}_0\oplus\mathcal{K}'$, *відношення* $\Gamma:\mathfrak{H}^2\to\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$ *має вигляд*

$$\Gamma=\left\{\left\{\widehat f,\begin{pmatrix}(G_0\widehat f-iF_2k')\oplus k'\\(G_1\widehat f+F_1k')\oplus(F_0^*G_0\widehat f+F'k')\end{pmatrix}\right\}:\widehat f\in A^*,\ k'\in\mathcal{K}'\right\}. \tag{2.171}$$

і сукупність $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *є граничною парою для* A^**;*

(2) *Рівність*

$$A_0 := \ker \Gamma_0 = \{\widehat{f} \in A^* : \{\widehat{f}, 0\} \in \Gamma_0\} \tag{2.172}$$

задає максимальне симетричне розширення $A_0 \in Ext_A$ *з* $n_-(A_0) = 0$*. Крім того,* $A_0 = \ker G_0$*.*

(3) $(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1} \in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_\lambda(A)]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, *та* $(P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_\lambda(A)]$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$, *так що рівності*

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \gamma_-(\lambda) = \pi_1(P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.173}$$

коректно задать оператор функції (γ*-поля)* $\gamma_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]$ *й* $\gamma_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$*. Крім того,* $\gamma_\pm(\cdot)$ *– голоморфні оператор-функції,*

$$\gamma_+(\lambda) = (\gamma_{\Pi+}(\lambda),\, i\gamma_{\Pi+}F_2) : \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}' \to \mathfrak{H}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \quad \gamma_-(\lambda) = (\gamma_{\Pi-}(\lambda),\, 0) : \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}' \to \mathfrak{H}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{2.174}$$

і справедливі тотожності (2.78) – (2.80)*.*

(4) *Функції Вейля граничної пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *є голоморфними оператор-функціями* $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ *та* $M_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ *з наступними властивостями:*

(a) $M_\pm(\cdot)$ *пов'язані з* $M_{\Pi\pm}(\cdot)$ *рівностями*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{\Pi+}(\lambda) & F_1 + i\, M_{\Pi+}(\lambda) F_2 \\ F_0^* & (F')^* \end{pmatrix} : \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}' \to \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}', \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{2.175}$$

$$M_-(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{\Pi-}(\lambda) & F_0 \\ F_1^* - iF_2^* P_{\mathcal{K}_2} M_{\Pi-}(\lambda) & F' \end{pmatrix} : \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}' \to \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}', \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{2.176}$$

Тому $M_+^*(\lambda) = M_-(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$*;*

(b) *блочні зображення* (2.69) – (2.71) *(з* $\mathcal{H}_2 = \mathcal{K}_2$*) породжують оператор-функції* $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$ *та* $\mathcal{M}(\cdot) \in R[\mathcal{H}_0]$*, які задовільняють тотожностям* (2.82) – (2.84)*. Крім того, справедливою є тотожність* (2.88)*.*

Доведення. Твердження (1) безпосередньо випливає з твердження 2.59. Крім того, внаслідок (2.171) маємо $\ker \Gamma_0 = \ker G_0$, що з огляду на твердження 2.25 дає твердження (2).

(3) З (2.171) та (2.159) випливає, що

$$\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \{\{\widehat{f}_\lambda, (G_0\widehat{f}_\lambda - i\, F_2 k') \oplus k'\} : \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A),\ k' \in \mathcal{K}'\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A) = \{\{\widehat{f}_\lambda, P_{\mathcal{K}_1} G_0 \widehat{f}_\lambda \oplus k'\} : \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A),\ k' \in \mathcal{K}'\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-,$$

і рівності (2.60) (для трійки $\{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$) дають (2.174). Крім того, з тотожностей (2.78)–(2.80) для $\gamma_{\Pi\pm}(\lambda)$ та рівностей (2.174) випливають тотожності (2.78)–(2.80) для $\gamma_\pm(\lambda)$.

(4) Внаслідок (2.161), (2.162) та (2.171) маємо рівності

$$M_+(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} (G_0\widehat{f}_\lambda - iF_2k') \oplus k' \\ (M_{\Pi+}(\lambda) G_0 \widehat{f}_\lambda + F_1 k') \oplus (F_0^* G_0 \widehat{f}_\lambda + F'k') \end{pmatrix} : \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A),\ k' \in \mathcal{K}' \right\}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$M_-(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} P_{\mathcal{K}_1} G_0 \widehat{f}_\lambda \oplus k' \\ (M_{\Pi-}(\lambda) P_{\mathcal{K}_1} G_0 \widehat{f}_\lambda + F_0 k') \oplus (F_0^* G_0 \widehat{f}_\lambda + F'k') \end{pmatrix} : \widehat{f}_\lambda \in \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A),\ k' \in \mathcal{K}' \right\}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_-$$

Покладаючи в першій з цих рівностей $h_0 = G_0\widehat{f}_\lambda - iF_2k'$, а в другій $h_1 = P_{\mathcal{K}_1}G_0\widehat{f}_\lambda$, з урахуванням (2.165) отримуємо

$$M_+(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 \oplus k' \\ (M_{\Pi+}(\lambda)h_0 + (F_1 + iM_{\Pi+}(\lambda)F_2)k') \oplus (F_0^*h_0 + (F')^*k') \end{pmatrix} : h_0 \in \mathcal{H}_0,\ k' \in \mathcal{K}' \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$
$$M_-(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \oplus k' \\ (M_{\Pi-}(\lambda)h_1 + F_0k') \oplus ((F_1^* - iF_2^*P_{\mathcal{K}_2}M_{\Pi-}(\lambda))h_1 + F'k') \end{pmatrix} : h_1 \in \mathcal{H}_1,\ k' \in \mathcal{K}' \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-$$

Ці рівності еквівалентні (2.175) та (2.176). Далі, використовуючи тотожності (2.82) – (2.84) для граничної трійки $\{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ та рівності (2.175), (2.176), (2.174), (2.165), беспосереднім підрахунком отримуємо тотожності (2.82) – (2.84) для функцій $M(\lambda)$ та $\mathcal{M}(\lambda)$. З цих тотожностей випливає, що $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$ і $\mathcal{M}(\cdot) \in R[\mathcal{H}_0]$. $\square$

В наступній теоремі показано, що за умови $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$ усяка гранична пара $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ для A^* задається формулою (2.166).

Теорема 2.61. *Припустимо, що A – замкнене симетричне лінійне відношення в $\mathfrak{H}$ і $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ – гранична пара для A^*, така що $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$. Тоді:*

(1) *$n_-(A) \leq n_+(A) < \infty$ й*

$$\dim \mathcal{H}_0 = n_+(A) + n_\Gamma, \qquad \dim \mathcal{H}_1 = n_-(A) + n_\Gamma, \tag{2.177}$$

де $n_\Gamma = \dim(\operatorname{mul}\Gamma)$.

(2) *Підпростори $\mathcal{K}'_\Gamma$ та $\mathcal{K}''_\Gamma$ взаємно ортогональні і, отже,*

$$\mathcal{H}_1 := \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma, \qquad \mathcal{H}_0 := \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma, \tag{2.178}$$

де $\mathcal{K}_1 := \mathcal{H}_1 \ominus (\mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma)$ і $\mathcal{K}_0 := \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{K}_1$.

(3) *Існують оператори $F_2 \in [\mathcal{K}'_\Gamma, \mathcal{H}_2]$, $F_1 \in [\mathcal{K}'_\Gamma, \mathcal{K}_1]$, $F' \in [\mathcal{K}'_\Gamma]$ та гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ для A^*, такі що вірною є рівність* (2.165) *і відношення Γ допускає зображення* (2.166) *з $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_\Gamma$, $\mathcal{K}'' = \mathcal{K}''_\Gamma$ та оператором F_0 вигляду* (2.164).

Доведення. Спочатку доведемо твердження (2) та (3), а потім твердження (1).

(2) Покажемо, що вірним є наступне твердження:

(A) для кожного $\{\widehat{f}, \binom{h_0}{h_1}\} \in \Gamma$ є вірним включення $h_0 \in \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{K}''_\Gamma$.

Дійсно, нехай $\{\widehat{f}, \binom{h_0}{h_1}\} \in \Gamma$ і $k'' \in \mathcal{K}''_\Gamma$, так що $\{0, \binom{0}{k''}\} \in \Gamma$. Тоді згідно з (2.158)$(h_0, k'') = 0$ і тому $h_0 \in \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{K}''_\Gamma$. Це дає твердження (A).

Далі, нехай $k' \in \mathcal{K}'_\Gamma$, так що $\{0, \binom{k'+h_2}{h_1}\} \in \Gamma$ з деякими $h_2 \in \mathcal{H}_2(\subset \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{K}''_\Gamma)$ та $h_1 \in \mathcal{H}_1$. Тоді згідно з твердженням (A) $k' + h_2 \in \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{K}''_\Gamma$ й, отже, $k' \in \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{K}''_\Gamma$. Тому $\mathcal{K}'_\Gamma \perp \mathcal{K}''_\Gamma$ і вірними є розклади (2.178).

(3) Нехай $k' \in \mathcal{K}'_\Gamma$. Тоді згідно з (2.154) та першої рівності в (2.178) $\{0, \binom{k'-ih_2}{k_1+m'+k''}\} \in \Gamma$ з деякими $h_2 \in \mathcal{H}_2,\ k_1 \in \mathcal{K}_1,\ m' \in \mathcal{K}'_\Gamma$ та $k'' \in \mathcal{K}''_\Gamma$. Звідси з огляду на (2.155) випливає, що $\left\{0, \binom{k'-ih_2}{k_1+m'}\right\} \in \Gamma$. Покажемо, що такі $h_2,\ k_1$ й m' є єдиними для заданого k'. Дійсно, якщо $\left\{0, \binom{k'-i\widetilde{h}_2}{\widetilde{k}_1+\widetilde{m}'}\right\} \in \Gamma$ з деякими $\widetilde{h}_2 \in \mathcal{H}_2,\ \widetilde{k}_1 \in \mathcal{K}_1$ і $\widetilde{m}' \in \mathcal{K}'_\Gamma$, то $\left\{0, \binom{i(h_2-\widetilde{h}_2)}{(\widetilde{k}_1-k_1)+(\widetilde{m}'-m')}\right\} \in \Gamma$ і в силу (2.158) $0 = i||h_2 - \widetilde{h}_2||^2$. Тому $h_2 - \widetilde{h}_2 = 0$ і, отже, $(\widetilde{k}_1 - k_1) + (\widetilde{m}' - m') \in \mathcal{K}''_\Gamma$. Тепер розклад (2.178) дає $\widetilde{k}_1 - k_1 = 0,\ \widetilde{m}' - m' = 0,$

так що $\widetilde{h}_2 = h_2,\ \widetilde{k}_1 = k_1$ і $\widetilde{m}' = m'$. Таким чином, для кожного $k' \in \mathcal{K}'_\Gamma$ існує єдина трійка елементів $h_2 \in \mathcal{H}_2,\ k_1 \in \mathcal{K}_1,\ m' \in \mathcal{K}'_\Gamma$, така що

$$\left\{0, \begin{pmatrix} -ih_2 + k' \\ k_1 + m' \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma. \tag{2.179}$$

Тому співвідношення (2.179) задає оператори $F_2 \in [\mathcal{K}'_\Gamma, \mathcal{H}_2],\ F_1 \in [\mathcal{K}'_\Gamma, \mathcal{K}_1]$ та $F' \in [\mathcal{K}'_\Gamma]$ за допомоги рівностей

$$F_2 k' = h_2, \qquad F_1 k' = k_1, \qquad F' k' = m', \quad k' \in \mathcal{K}'_\Gamma. \tag{2.180}$$

Рівність (2.165) для операторів F_2 та F' є наслідком тотожності (2.158), застосованої до $\left\{0, \binom{-iF_2k'+k'}{F_1k'+F'k'}\right\}$ при кожномоу $k' \in \mathcal{K}'_\Gamma$.

Комбінуючи, далі. (2.179) та (2.180) з (2.154) та (2.155), отримуємо

$$\Gamma_\infty := \{0\} \oplus \operatorname{mul}\Gamma = \left\{\left\{0, \begin{pmatrix} (-iF_2k') \oplus k' \oplus 0 \\ F_1k' \oplus F'k' \oplus k'' \end{pmatrix}\right\} : k' \in \mathcal{K}'_\Gamma,\ k'' \in \mathcal{K}''_\Gamma\right\}. \tag{2.181}$$

Нехай $T \subset \Gamma$ – лінійне відношення з $\mathfrak{H}^2$ в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, задане рівністю

$$T = \left\{\left\{\widehat{f}, \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma : h_0 \in \mathcal{K}_0,\ h_1 \in \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}'_\Gamma\right\}. \tag{2.182}$$

Тоді з огляду на (2.181) та твердження (A) $T \cap \Gamma_\infty = \{0\}$ і вірним є розклад

$$\Gamma = T \dotplus \Gamma_\infty \tag{2.183}$$

Оскільки $A = \ker\Gamma$ та $\dim(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) < \infty$, то $\dim(\operatorname{dom}\Gamma/A) < \infty$ і тому $\operatorname{dom}\Gamma = \overline{\operatorname{dom}\Gamma} = A^*$. Звідси та з рівності (2.183) випливає, що T є оператором з областю визначення $\operatorname{dom} T = A^*$. Крім того, застосування тотожності (2.158) до елементів $\left\{0, \binom{(-iF_2k)\oplus k'\oplus 0}{F_1k'\oplus F'k'\oplus 0}\right\} \in \Gamma_\infty$ та $\left\{\widehat{f}, \binom{k_0\oplus 0\oplus 0}{k_1\oplus m'\oplus 0}\right\} \in T$ дає

$$0 = (m', k')_{\mathcal{K}'} - (k_0, F_1k')_{\mathcal{K}_0} - (k_0, F_2k')_{\mathcal{K}_0} = (m', k')_{\mathcal{K}'} - (k_0, F_0k')_{\mathcal{K}_0}, \quad k' \in \mathcal{K}'_\Gamma.$$

Тому $m' = F_0^* k_0$ і формулу (2.182) можна записати як

$$T = \left\{\left\{\widehat{f}, \begin{pmatrix} G_0\widehat{f} \oplus 0 \oplus 0 \\ G_1\widehat{f} \oplus F_0^* G_0\widehat{f} \oplus 0 \end{pmatrix}\right\} : \widehat{f} \in A^*\right\}, \tag{2.184}$$

де $G_0 := P_{\mathcal{K}_0 \oplus \{0\}} T$ та $G_1 := P_{\{0\} \oplus \mathcal{K}_1} T$ – лінійні відображення з A^* в $\mathcal{K}_0$ та $\mathcal{K}_1$ відповідно. Комбінуючи (2.183) з (2.181) та (2.184), приходимо до зображення (2.166) відношення Γ.

Тепер залишається довести, що оператори G_0 та G_1 утворюють граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ для A^*. Застосовуючи тотожність (2.158) до елементів лінійного відношення T (див. (2.184)), отримуємо тотожність Гріна (2.33) для операторів G_0 and G_1. Для доведення сюр'єктивності відображення $G = (G_0, G_1)^\top$ припустимо,що $k_0 \oplus k_1 \in \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ і $(G_0\widehat{f}, k_0) + (G_1\widehat{f}, k_1) = 0$ для кожного $\widehat{f} \in A^*$. Тоді елемент

$$\widehat{\varphi} = \left\{0, \begin{pmatrix} (k_1 + i\,P_2k_0) \oplus 0 \oplus 0 \\ (-P_1k_0) \oplus F_0^*(k_1 + i\,P_2k_0) \oplus 0 \end{pmatrix}\right\} \in \mathfrak{H}^2 \oplus (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) \tag{2.185}$$

задовільняє (2.168) та (2.169) і внаслідок твердження (a) в даведенні твердження 2.59 $\widehat{\varphi}$ задовільняє тотожності (2.158) для усіх $\{\binom{f}{f'}, \binom{h_0}{h_1}\} \in \Gamma$. Тому в силу означення 2.56 $\widehat{\varphi} \in \Gamma_\infty$, що з огляду на (2.181) дає $k_0 = 0$ та $k_1 = 0$. Звідси випливає, що $\operatorname{ran} G = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

(1) Застосовуючи твердження 2.25 до граничної трійки $\{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ для A^*, отримуємо рівності $\dim \mathcal{K}_0 = n_+(A)$ і $\dim \mathcal{K}_1 = n_-(A)$. Крім того, в силу (2.181) маємо $\dim(\mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma) = n_\Gamma$. Звідси та з роскладів (2.178) випливає (2.177). ☐

Наступний наслідок випливає безпосередньо з теореми 2.61 та твердження 2.60.

Наслідок 2.62. *Нехай за умов теореми 2.61* $\mathcal{K}''_\Gamma = \{0\}$. *Тоді:*

(1) $(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1} \in [\mathcal{H}_0, \mathfrak{N}_\lambda(A)]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, *та* $(P_1\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathfrak{N}_\lambda(A)]$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$, *так що рівності* (2.173) *коректно задать оператор-функції (*γ*-поля)* $\gamma_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathfrak{H}]$ *й* $\gamma_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathfrak{H}]$. *Ці функції є голоморфними і задовільняють тотожностям* (2.78) - (2.80).

(2) *Функції Вейля граничної пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *є голоморфними оператор-функціями* $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ *та* $M_-(\cdot) : \mathbb{C}_- \to [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$ *і справедлива рівність* $M_+^*(\lambda) = M_-(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. *Крім того, блочні зображення* (2.69) – (2.71) *породжують оператор-функції* $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}_1]$ *та* $\mathcal{M}(\cdot) \in R[\mathcal{H}_0]$, *які задовільняють тотожностям* (2.82) – (2.84) *та* (2.88).

Наслідок 2.63. *Якщо за умов теореми 2.61 лінійні відношення* $\Gamma_0 \upharpoonright A^*$ *та* $\Gamma_1 \upharpoonright A^*$ *є операторами, то гранична пара* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *стає граничною тройкою для* A^* *і функції Вейля* $M_\pm(\cdot)$ *пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *перетворюються в функції Вейля цієї трійки. Точніше кажучи, у цьому випадку сукупність* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0 \upharpoonright A^*, \Gamma_1 \upharpoonright A^*\}$ *є граничною трійкою для* A^* *і функції Вейля* $M_\pm(\cdot)$ *цієї трійки збігаються з функціями Вейля пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *в сенсі означення 2.57.*

Доведення. Якщо $\operatorname{mul}(\Gamma_j \upharpoonright A^*) = \{0\}$, $j \in \{0, 1\}$, то $\operatorname{mul}\Gamma = \{0\}$ і в силу (2.181) $\mathcal{K}'_\Gamma = \mathcal{K}''_\Gamma = \{0\}$. Тому з огляду на (2.178) та (2.166) гранична трійка $\{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ задовільняє рівностям $\mathcal{K}_j = \mathcal{H}_j$ та $G_j = \Gamma_j \upharpoonright A^*$, $j \in \{0, 1\}$. ☐

Наслідок 2.64. *Припустимо, що* A *– замкнене симетричне відношення в* $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}_0$ *– скінченновимірний гільбертів простір,* $\mathcal{H}_1$ *– падпростір в* $\mathcal{H}_0$ *і* $\Gamma : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ *– лінійне відношення, таке що* $\operatorname{dom}\Gamma = A^*$ *і* $\ker\Gamma = A$. *Якщо відношення* Γ *задовільняє тотожності* (2.158) *і*

$$\dim(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) = n_+(A) + n_-(A) + 2\, n_\Gamma, \tag{2.186}$$

то $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *є граничною парою для* A^*.

Доведення. Застосовуючи ті ж самі міркування, що і при доведенні теореми 2.61, отримуємо розклади (2.178) та рівність (2.166), в якій $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_\Gamma$, $\mathcal{K}'' = \mathcal{K}''_\Gamma$, F_2, F_1 та F' – оператори, що задовільняють (2.165), F_0 – оператор (2.164) і $G_j : A^* \to \mathcal{K}_j$, $j \in \{0, 1\}$, – оператори, що задовільняють тотожності Гріна (2.33). Крім того, в силу (2.181) $\dim(\mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma) = n_\Gamma$, і рівності (2.178), (2.186) дають $\dim(\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1) = n_+(A) + n_-(A)$. Відзначимо також, що внаслідок (2.166) $\ker G = \ker\Gamma = A$ й тому

$$\dim(\operatorname{dom} G / \ker G) = \dim(A^*/A) = n_+(A) + n_-(A) = \dim(\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1).$$

Звідси випливає, що $\operatorname{ran} G = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ і, отже, оператори G_0 та G_1 утворюють граничну трійку $\{\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, G_0, G_1\}$ для A^*. Тому в силу твердження 2.59 $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ є граничною парою для A^*. ☐

У випадку $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ наведені вище результати про граничні пари можуть бути дещо зпрощені. Саме, безпосередньо з тверджень 2.59, 2.60 та тереми 2.61 випливає така теорема.

Теорема 2.65. *Припустимо, що* $\Pi = \{\mathcal{K}, G_0, G_1\}$ *– звичайна гранична трійка для* A^*, $\mathcal{K}'$ *та* $\mathcal{K}''$ *– гільбертові простори та*

$$\mathcal{H} := \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}''.$$

Крім того, нехай $F \in [\mathcal{K}', \mathcal{K}]$, $F' = (F')^* \in [\mathcal{K}']$ *– лінійні опретаори й* $\Gamma : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ *– лінійне відношення, задане рівностю*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \widehat{f}, \begin{pmatrix} G_0\widehat{f} \oplus k' \oplus 0\} \\ (G_1\widehat{f} + Fk') \oplus (F^*G_0\widehat{f} + F'k') \oplus k'' \end{pmatrix} \right\} : \widehat{f} \in A^*,\ k' \in \mathcal{K}',\ k'' \in \mathcal{K}'' \right\}. \tag{2.187}$$

Тоді $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ *є граничною парою для* A^*.

Якщо, крім того, $\mathcal{K}'' = \{0\}$, *то вірними є наступні твердження:*

(1) *рівність* (2.172) *задає самоспряжене розширення* A_0 *відношення* A *і* $A_0 = \ker G_0$*;*

(2) *співвідношення*

$$\gamma(\lambda) = \pi_1(\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(A))^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A_0) \tag{2.188}$$

$$\mathrm{gr} M(\lambda) = \left\{ \{h, h'\} \in \mathcal{H}^2 : \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma \ \text{ з деяким } \ f \in \mathfrak{H} \right\}, \quad \lambda \in \rho(A_0), \tag{2.189}$$

коректно задають γ*-поле* $\gamma(\cdot) : \rho(A_0) \to [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ *та функцію Вейля* $M(\cdot) : \rho(A_0) \to [\mathcal{H}]$ *пари* $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$*;*

(3) *справедливі тотожності*

$$\gamma(z) = \gamma(\lambda) + (z - \lambda)(A_0 - z)^{-1}\gamma(\lambda), \quad z, \lambda \in \rho(A_0) \tag{2.190}$$

$$M(z) - M^*(\lambda) = (z - \overline{\lambda})\gamma^*(\lambda)\gamma(z), \quad z, \lambda \in \rho(A_0). \tag{2.191}$$

внаслідок яких $\gamma(\cdot)$ *та* $M(\cdot)$ *є голоморфними оператор-функціями та* $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$*;*

(4) *оператор-функції* $\gamma(\lambda)$ *та* $M(\lambda)$ *пов'язані з* γ*-полем* $\gamma_\Pi(\lambda)$ *та функцією Вейля* $M_\Pi(\lambda)$ *трійки* Π *рівностями*

$$\gamma(\lambda) = (\gamma_\Pi(\lambda),\, 0) : \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \to \mathfrak{H}, \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_\Pi(\lambda) & F \\ F^* & F' \end{pmatrix} : \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}' \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}', \quad \lambda \in \rho(A_0).$$

Зворотно, нехай $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ *– гранична пара для* A^*, $\dim \mathcal{H} < \infty$ *й* $\mathcal{K}'_\Gamma = \mathrm{dom}\,(\mathrm{mul}\,\Gamma)$, $\mathcal{K}''_\Gamma = \mathrm{mul}\,(\mathrm{mul}\,\Gamma)$. *Тоді*

$$n_+(A) = n_-(A) = \dim \mathcal{H} - n_\Gamma,$$

де $n_\Gamma = \dim(\mathrm{mul}\,\Gamma)$, *і вірними є наступні твердження:*

(З1) $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma$, *де* $\mathcal{K} = \mathcal{H} \ominus (\mathcal{K}'_\Gamma \oplus \mathcal{K}''_\Gamma)$*;*

(З2) *відношення* Γ *допускає зображення* (2.187) *з деякою граничною трійкою* $\Pi = \{\mathcal{K}, G_0, G_1\}$ *для* A^* *, просторами* $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_\Gamma$, $\mathcal{K}'' = \mathcal{K}''_\Gamma$ *і операторами* $F \in [\mathcal{K}'_\Gamma, \mathcal{K}]$ *та* $F' = (F')^* \in [\mathcal{K}'_\Gamma]$.

(З3) *якщо* $\mathcal{K}''_\Gamma = \{0\}$, *то вірними є твердження* (1) - (3).

Зауваження 2.66. Твердження (2) та (3) тереми 2.65 випливають також з результатів робіт [63, 64].

Наступне твердження є узагальненням твердження 2.37 на граничні пари.

Твердження 2.67. *Нехай* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *– гранична пара для* A^*, $\dim \mathcal{H}_0 < \infty$, $\mathcal{K}''_\Gamma = \{0\}$ *і* $M_+(\cdot)$ *– відповідна функція Вейля. Крім того, нехай простори* $\mathcal{H}_0$ *та* $\mathcal{H}_1$ *розкладено за формулами*

$$\mathcal{H}_1 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \qquad \mathcal{H}_0 = \widehat{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}_0, \tag{2.192}$$

так що $\dot{\mathcal{H}}_1 \subset \dot{\mathcal{H}}_0$. *Тоді:*

(1) *Рівності*

$$\widetilde{A} = \left\{ \widehat{f} \in A^* : \left\{ \widehat{f}, \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma,\ h_1 \in \widehat{\mathcal{H}} \right\} \tag{2.193}$$

$$\widetilde{A}^* = \left\{ \widehat{f} \in A^* : \left\{ \widehat{f}, \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma,\ h_0 \in \dot{\mathcal{H}}_0 \right\} \tag{2.194}$$

задають симетричне відношення $\widetilde{A} \in Ext_A$ *і спряжене до нього відношення* $\widetilde{A}^*$.

(2) *Сукупність* $\{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \dot{\Gamma}\}$ *з лінійним відношенням* $\dot{\Gamma} : \mathfrak{H}^2 \to \dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1$ *вигляду*

$$\dot{\Gamma} = \left\{ \left\{ \widehat{f}, \begin{pmatrix} h_0 \\ P_{\mathcal{H}_1, \dot{\mathcal{H}}_1} h_1 \end{pmatrix} \right\} : h_0 \in \dot{\mathcal{H}}_0,\ \left\{ \widehat{f}, \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma \right\}$$

є граничною парою для $\widetilde{A}^*$. *Крім того, для цієї пари* $\mathcal{K}''_{\dot{\Gamma}} = \{0\}$ *і відповідна функція Вейля* $\dot{M}_+(\cdot)$ *задається рівністю* $\dot{M}_+(\lambda) = P_{\mathcal{H}_1, \dot{\mathcal{H}}_1} M_+(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Твердження 2.67 доводиться агналогічно твердженню 4.1 в [64].

2.6. Симетричні оператори з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності

Нагадаємо, що симетиричниий оператор A в $\mathfrak{H}$ називається простим, якщо не існує ортогонального розкладу $A = A_1 \oplus A_2$ з самоспряженим оператором A_1, що діє в нетрівіальномоу підпросторі $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$. Якщо A – простий щільно визначений оператор в $\mathfrak{H}$ з рівними індексами дефекту $d = n_\pm(A) < \infty$, то $\ker(A - x) = \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$. Тому згідно з [2] $\dim \mathfrak{N}_x(A) \le d$ для кожного дійсного x. Надалі будемо позначати через $\widetilde{\rho}(A)$ множину усіх $x \in \mathbb{R}$, таких що відповідний дефектний підпростір $\mathfrak{N}_x(A)$ має максимально можливу вимірність $\dim \mathfrak{N}_x(A) = d$.

Твердження 2.68. *Припустимо, що* A *– простий щільно визначений симетритчний оператор в* $\mathfrak{H}$ *з рівними індексами дефекту* $d = n_\pm(A) < \infty$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– (звичайна) грагична трійка для* A^*, $A_0 \in Ext_A$ *– самоспряжене розширення* (2.38) *і* $M(\cdot)$ *– функція Вейля трійки* Π. *Тоді точка* $x \in \mathbb{R}$ *належить до* $\widetilde{\rho}(A)$ *й* $\ker(A_0 - x) = \{0\}$, *якщо й тільки якщо*

$$\lim_{y \to 0} 1/y \, \mathrm{Im}(M(x+iy)h, h) < \infty, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{2.195}$$

Доведення. Для точки $x \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mathcal{H}_x$ підпростір в $\mathcal{H}$, заданий рівністю $\mathcal{H}_x = \Gamma_0 \mathfrak{N}_x(A)$. З (2.38) випливає, що

$$\ker(\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_x(A)) = \operatorname{dom} A_0 \cap \mathfrak{N}_x(A) = \ker(A_0 - x)$$

і, отже,

$$\dim \mathfrak{N}_x(A) = \dim \ker (A_0 - x) + \dim \mathcal{H}_x. \tag{2.196}$$

Оскільки $\dim \mathfrak{N}_x(A) \le d$, то в силу (2.196) маємо

$$(\ker (A_0 - x) = \{0\} \ \text{ й } \ \dim \mathfrak{N}_x(A) = d) \iff \dim \mathcal{H}_x = d \iff \mathcal{H}_x = \mathcal{H}. \tag{2.197}$$

Крім того, згідно з [30, твердження 5] для кожного $h \in \mathcal{H}$ має місце еквівалентність

$$h \in \mathcal{H}_x \iff \lim_{y \to 0} 1/y \operatorname{Im}(M(x+iy)h, h) < \infty. \tag{2.198}$$

Внаслідок (2.198) рівність $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}$ еквівалентна умові (2.195). Звідси та з (2.197) випливає твердження теореми. ☐

Зауваження 2.69. Оскільки за умов твердження 2.68 $\ker (A - x) = 0$, то для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує розширення $A_0 = A_0^* \in Ext_A$, таке що $\ker (A_0 - x) = \{0\}$. Крім того, згідно з твердженням 2.25 існує гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^*, така що A_0 має вигляд (2.38). Тому насправді твердження 2.68 дає критерій (в термінах функції Вейля) належності точки $x \in \mathbb{R}$ до множини $\widetilde{\rho}(A)$.

Лема 2.70. *Нехай $\mu(\cdot)$ – скалярна міра на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(\delta) < \infty$ для кожного $\delta \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, $\mu(\mathbb{R}) = \infty$ і*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{t^2 + 1} < \infty.$$

Припустимо також, що $\Lambda = \Lambda_\mu$ – оператор множення в гільбертовому просторі $L^2(\mu; \mathbb{R})$. Тоді:
(1) *Рівності*

$$\operatorname{dom} A = \left\{ f \in \operatorname{dom} \Lambda : \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu = 0 \right\}, \quad Af = \Lambda f, \quad f \in \operatorname{dom} A \tag{2.199}$$

задають простий щільно визначений симетричний оператор A в $L^2(\mu; \mathbb{R})$, такий що $n_\pm(A) = 1$.

(2) *Для кожного $x \in \mathbb{R}$, такого що $\mu(\{x\}) = 0 (\Leftrightarrow \ker (\Lambda - x) = \{0\})$, включення $x \in \widetilde{\rho}(A)$ рівносильно співвідношенню*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_t}{(t - x)^2} < \infty. \tag{2.200}$$

Доведення. Твердження (1) безпосередньо випливає з [61, твердження 5.2].

(2) Нехай $M(\cdot)$ – скалярна неванлинівська функція, задана рівністю

$$M(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - \lambda} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\mu, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Тоді з [61, твердження 5.2] випливає, що існує гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^*, така що $A_0 (= A^* \restriction \ker \Gamma_0) = \Lambda$ і функція Вейля трійки Π збігається з $M(\cdot)$. Застосовуючи тепер твердження 2.68 до трійки Π та приймаючи до уваги лему 2.2, отримуємо потрібне твердження. ☐

Для простого щільно визначеного симетричного оператора A з індексами дефекту $d = n_\pm(A) < \infty$ та інтервалу $\mathcal{I} = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, позначимо через $\widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ множину усіх $x \in \mathcal{I}$, таких що $\dim \mathfrak{N}_x(A) = d$ (це означає, що $\widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A) = \widetilde{\rho}(A) \cap \mathcal{I}$). Крім того, покладемо $\widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A) = \widehat{\rho}(A) \cap \mathcal{I}$, так що $\widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ є множиною усіх точок регулярного типа опреатора A, що належать до інтервалу $\mathcal{I}$. Оскільки $\dim \mathfrak{N}_x(A) = d$ для кожного $x \in \widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$, то $\widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A) \subset \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$. Очевидно також, що множина $\widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A) \setminus \widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ складається з усіх точок $x \in \mathcal{I}$, таких що $\dim \mathfrak{N}_x(A) = d$ і образ оператора $A - x$ незамкнений.

Наступна лема є добре відомою (див., наприклад, [2]).

Лема 2.71. *Нехай A – простий щільно визначений симетричний оператор з індексами дефекту $d = n_{\pm}(A) < \infty$. Тоді усі розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$ мають той самий істотний спектр*

$$\mathrm{spec}_e(\widetilde{A}) = \mathbb{R} \setminus \widehat{\rho}(A). \tag{2.201}$$

Нагадаємо також, що множина $X \subset (a, b)$ називається ніде нещільною в (a, b), якщо для кожного інтервалу $(a', b') \subset (a, b)$ існує інтервал $(a'', b'') \subset (\alpha', b')$, такий що $X \cap (a'', b'') = \emptyset$.

Теорема 2.72. *Нехай A – простий щільно визначений симетричний оператор в $\mathfrak{H}$ з рівними індексами дефекту $d = n_{\pm}(A) < \infty$ й $\mathcal{I} = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, – інтервал, такий що множина $\mathcal{I} \setminus \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ не більш ніж злічена. Тоді:*

(1) *Для кожного самоспряженного розширення $\widetilde{A} \in Ext_A$ перетин $\mathrm{spec}_c(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ є пустим і множина $\mathrm{spec}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ є ніде нещільною в $\mathcal{I}$.*

(2) *Множина $\mathcal{I} \setminus \widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ є ніде нещільною в $\mathcal{I}$.*

Доведення. (1) Нехай $\widetilde{A}$ – самоспряжене розширення оператора A і $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – гранична трійка для A^* з $A_0 = \widetilde{A}$ (така трійка існує внаслідок твердження 2.25). Крім того, нехай $M(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$ – функція Вейля трійки Π. Припустимо, далі, що

$$X_p = \{x_k\}(= \mathrm{spec}_p(\widetilde{A}) \cap I)$$

– (не більш ніж злічена) множина власних значень опратора $\widetilde{A}$, що належать $\mathcal{I}$, й нехай $X_1 := \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A) \setminus X_p$, $X_2 := (\mathcal{I} \setminus \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)) \setminus X_p$, так що

$$\mathcal{I} = X_p \cup X_1 \cup X_2, \quad X_p \cap X_1 = X_p \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = \emptyset. \tag{2.202}$$

Тоді $X_p \cup X_2$ – не більш ніж злічена множина в $\mathcal{I}$ і згідно з твердженням 2.68 функція Вейля $M(\cdot)$ задовільняє (2.195) для кожного $x \in X_1$. Звідси та з леми 2.2 випливає таке твердження:

(T1) Існує підмножина $X_1 \subset \mathcal{I}$, така що: (a) множина $\mathcal{I} \setminus X_1$ не більш ніж злічена; (b) для кожного $x \in X_1$ існує границя $M(x + i0) := \lim\limits_{y \to 0} M(x + iy)$ і $\mathrm{Im}\, M(x + i0) = 0$.

В силу [57, теорема 4.3] з твердженння (T1) випливає, що $\mathrm{spec}_c(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = \emptyset$, тобто

$$\mathrm{spec}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = \overline{X}_p. \tag{2.203}$$

Припустимо, що $E(\cdot)$ та $\Sigma(\cdot) = \Sigma_M(\cdot)$ – спектральні міри оператора $\widetilde{A}(= A_0)$ і функції Вейля $M(\cdot)$ відповідно. Внаслідок (2.203) маємо $E(\mathcal{I} \setminus X_p) = 0$. Крім того, згідно з [57, лема 3.2] міри $E(\cdot)$ й $\Sigma(\cdot)$ еквівалентні. Тому $\Sigma(\mathcal{I} \setminus X_p) = 0$, тобто $\Sigma(\cdot)$ є дискретною мірою, зосередженою на множині X_p. Комбінуючи це твердження з твердженням 2.68 та лемою 2.2, отримуємо

$$\sum_k \frac{(\Sigma_k h, h)}{(x_k - x)^2} = \int_{\mathcal{I}} \frac{d(\Sigma(t)h, h)}{(t - x)^2} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d(\Sigma(t)h, h)}{(t - x)^2} < \infty, \quad x \in X_1, \ \ h \in \mathcal{H}, \tag{2.204}$$

де $\Sigma_k = \Sigma(\{x_k\}) \in [\mathcal{H}]$. Нехай $\{e_j\}_1^d$ – ортонормований базіс в $\mathcal{H}$ і $c_k = \sum\limits_j (\Sigma_k e_j, e_j)$. Оскільки $\Sigma_k \neq 0$ і $\Sigma_k \geq 0$, то $c_k > 0$ і співвідношення (2.204) дає

$$\sum_k \frac{c_k}{(x_k - x)^2} < \infty, \quad x \in X_1. \tag{2.205}$$

Таким чином, доведено наступне твердження:

(T2) Існують розклад (2.202) інтервалу $\mathcal{I}$ й послідовність додатних чисел $\{c_k\}$, такі що $X_p = \{x_k\}$ та X_2 – не більш ніж счисленні множини і для кожного $x \in X_1$ має місце співвідношення (2.205).

Використовуючи твердження (T2), в той же спосіб як і в [116, теорема 11.7] можна довести, що множина X_p є ніде нещільною в $\mathcal{I}$. Звідси та з рівності (2.203) випливає, що множина $\operatorname{spec}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ також є ніде нещільною в $\mathcal{I}$.

Твердження (2) теореми є наслідком очевидного включення $(\mathcal{I} \setminus \widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A)) \subset \operatorname{spec}(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ та твердження (1). $\square$

Теорема 2.73. *Припустимо, що виконані умови Теореми 2.72. Тоді для кожного розширення* $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$ *множина* $\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I}$ *є замкненою і ніде нещільною в* $\mathcal{I}$.

Зворотно, нехай $\mathcal{I} = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, *– відкритий інтервал і* $X \subset \mathcal{I}$ *– замкнена ніде нещільна множина в* $\mathcal{I}$. *Тоді для кожного* $d \in \mathbb{N}$ *існує гільбертів простір* $\mathfrak{H}$ *і простий симетричний оператор* A *в* $\mathfrak{H}$, *такі що* $n_\pm(A) = d$, $\widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A) = \mathcal{I}$ *і для кожного розширення* $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$ *вірною є рівність* $\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = X$.

*Д*оведення. Перше твердження теореми є безпосереднім наслідком теореми 2.72. Для того, щоб довести друге твердження, ми спочатку доведемо наступне допоміжне твердження:

(ДТ) Для кожного інтервалу $\mathcal{I}$ та для кожної замкненої ніде нещільної множини $X \subset \mathcal{I}$ існують зліченна множина $Y = \{x_j\}$ ізольованих точок $x_j \in \mathcal{I}$ й скалярна борелівська міра μ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, такі що

$$Y' = X \tag{2.206}$$

$$\mu(\{x_j\}) \ne 0 \ \ (x_j \in Y), \qquad \mu(\mathcal{I} \setminus Y) = 0 \tag{2.207}$$

$$\mu(B) < \infty, \quad B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}); \qquad \mu(\mathbb{R}) = \infty \tag{2.208}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\mu}{t^2+1} < \infty \tag{2.209}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\mu_t}{(t-x)^2} < \infty, \quad x \in X \tag{2.210}$$

(тут Y' – множина всіх точок накопичення множини Y).

Згідно з [112] вірним є наступне твердження:

(РТ) Для кожного обмеженого інтервалу $\mathcal{I}$ та для кожної замкненої ніде нещільної множини $X \subset \mathcal{I}$ існує зліченна множина $Y = \{x_j\}$ ізольованих точок $x_j \in \mathcal{I}$ і скінченна міра μ на борелівских множинах $B \subset \mathcal{I}$, такі що вірними є співвідношення (2.206), (2.207) і

$$\int_{\mathcal{I}} \frac{d\,\mu_t}{(t-x)^2} < \infty, \quad x \in X. \tag{2.211}$$

Спочатку припустимо, що $\mathcal{I}$ – обмежений інтервал. Нехай $X \subset \mathcal{I}$ – замкнена ніде нещільна множина. Тоді згідно з твердженням (РТ) існує зліченна множина $Y = \{x_j\}$ ізольованих точок

$x_j \in \mathcal{I}$ і скінченна міра μ_1 на борелівских множинах $B \subset \mathcal{I}$, такі що вірними є співвідношення (2.206), (2.207) і (2.211) (з μ_1 замість μ). Покладаючи

$$\mu(B) = \mu_1(B \cap \mathcal{I}) + \mu_2(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{I})), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

де μ_2 – міра Лебега, отримуємо міру μ, що задовільняє (2.207)– (2.210).

Припустимо тепер, що $\mathcal{I}$ – необмежений інтервал (без обмеження загальності можемо вважати $\mathcal{I} = \mathbb{R}$). Оскільки X – ніде нещільна множина, то існує послідовність $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, така що $a_n \in [n, n{+}1) \setminus X$ і

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n, a_{n+1}), \qquad X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} X_n,$$

де $X_n := X \cap (a_n, a_{n+1})$ – замкнена ніде нещільна підмножина інтервалу $\mathcal{I}_n := (a_n, a_{n+1})$. Згідно з твердженням (РТ) для кожного $n \in \mathbb{Z}$ існує зліченна множина $Y_n = \{x_{jn}\}$ ізольованих точок $x_{jn} \in \mathcal{I}_n$ і скінченна міра $\mu_n(B)$ на борелівських множинах $B \subset \mathcal{I}_n$, такі що $Y_n' = X_n$, $\mu_n(\{x_{jn}\}) \neq 0$, $\mu_n(\mathcal{I}_n \setminus Y_n) = 0$ і

$$\int_{\mathcal{I}_n} \frac{d\mu_n}{(t-x)^2} < \infty, \quad x \in X_n. \tag{2.212}$$

Нехай $\widetilde{Y} = \{\widetilde{x}_n\}$ – довільна зліченна множина ізольованих точок $\widetilde{x}_n \in \mathcal{I}_n \setminus X_n$, $n \in \mathbb{Z}$, і $\widetilde{\mu}(B)$ – дискретна міра на борелівських множинах $B \subset \mathbb{R}$, задана рівністю

$$\widetilde{\mu}(\{\widetilde{x}_n\}) = 1, \qquad \widetilde{\mu}(B) = \sum_{\widetilde{x}_n \in B} \widetilde{\mu}(\{\widetilde{x}_n\}) = |B \cap \widetilde{Y}|.$$

Розглянемо множину $Y := \widetilde{Y} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Y_n)$ і впровадимо міру

$$\mu(B) = \widetilde{\mu}(B) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mu_n(B \cap \mathcal{I}_n)}{n^2 J_n}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{2.213}$$

де $J_n = \int\limits_{\mathcal{I}_n} (t^2+1)^{-1}\, d\mu_n$. Ясно, що Y та $\mu(B)$ задовільняють (2.206) та (2.207). Крім того, $\widetilde{\mu}(\mathbb{R}) = \infty$ і, отже, $\mu(\mathbb{R}) = \infty$. Використовуючи, далі, (2.213) та нерівність $\widetilde{x}_n \geq a_n \geq n$, отримуємо

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\mu}{t^2+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathcal{I}_n} \frac{d\,\mu}{t^2+1} =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n^2 J_n} \int_{\mathcal{I}_n} \frac{d\,\mu_n}{t^2+1} + \frac{1}{(\widetilde{x}_n)^2+1} \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Звідси та з нерівності (2.212) випливає, що міра μ задовільняє співвідношенням (2.208)–(2.210). Таким чином, твердження (ДТ) доведено.

Припустимо тепер, що $X \subset \mathcal{I}$ – ніде нещільна множина і μ – міра, визначена в твердженні (ДТ). Оскільки μ задовільняє (2.208) та (2.209), то за лемою 2.70 рівність (2.199) задає простий симетричний щільно визначений оператор A в $L_2(\mu;\mathbb{R})$ з індексами дефекту $d = n_\pm(A) = 1$, розширенням якого є оператор множення Λ. В силу (2.206) та (2.207) $\operatorname{spec}_e(\Lambda) \cap \mathcal{I} = X$, що з огляду на лему 2.71 дає рівність

$$\operatorname{spec}_e(\widetilde{A}) \cap \mathcal{I} = X$$

для кожного розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in Ext_A$. Крім того, в силу (2.210) та леми 2.70, (2) $X \subset \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$ і внаслідок рівності (2.201) маємо

$$\mathcal{I} \setminus X = \widehat{\rho}_{\mathcal{I}}(A) \subset \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A).$$

Звідси випливає, що $\mathcal{I} = \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}}(A)$. Таким чином, потрібне твердження доведено для $d = 1$.

У випадку довільного $d \in \mathbb{N}$ покладемо $A_d = \bigoplus_{k=1}^{d} A$, де A – побудований вище симетричний оператор з індексами дефекту $n_{\pm}(A) = 1$. Ясно, що оператор A_d має потрібні властивості. □

Зауваження 2.74. З теореми 2.73 випливає, що співвідношення $\mathrm{spec}_c(\widetilde{A}) \cap I = \emptyset$ в твердженні (1) теореми 2.72 не може бути посилено до $\mathrm{spec}_e(\widetilde{A}) \cap I = \emptyset$.

РОЗДІЛ 3

Симетричні системи

3.1. Позначення

Нехай $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ – проміжок на дійсній осі (скінченна кінцева точка може належати або не належати $\mathcal{I}$) і $\mathbb{H}$ – скінченновимірний гільбертів простір. Позначимо через $AC(\mathcal{I};\mathbb{H})$ множину усіх функцій $f(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, абсолютно неперервних на кожному відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$. Крім того, нехай $AC_0(\mathcal{I};\mathbb{H})$ – множина усіх функцій $f \in AC(\mathcal{I};\mathbb{H})$ з наступною властивостю: якщо $a \in \mathcal{I}$ (відповідно $b \in \mathcal{I}$), то $f(a) = 0$ (відп. $f(b) = 0$); в протилежному випадку $f(t) = 0$ на деякому інтервалі $(a, \alpha) \subset \mathcal{I}$ (відп. $(\beta, b) \subset \mathcal{I}$). Ясно, що у випадку відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ множина $AC_0(\mathcal{I})$ є множиною усіх функцій $f \in AC(\mathcal{I};\mathbb{H})$, таких що $f(a) = f(b) = 0$.

Припустимо, що $\Delta(\cdot)$ – визначена майже всюди на $\mathcal{I}$ борелівська $[\mathbb{H}]$-значна функція, інтегровна на кожному скінченному відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$ і така, що $\Delta(t) \ge 0$ м.в. на $\mathcal{I}$. Позначимо через $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ множину усіх борелівських функцій $f(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} (\Delta(t)f(t), f(t))_{\mathbb{H}}\, dt < \infty$. Як відомо (див., наприклад, [14, глава 13.5]) $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ є лінійним простором з квазіскалярним добутком

$$(f, g)_\Delta = \int_{\mathcal{I}} (\Delta(t)f(t), g(t))_{\mathbb{H}}\, dt, \quad f, g \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}),$$

що породжує півнорму $||f||_\Delta = (f, f)_\Delta^{\frac{1}{2}}$. Функції $f, g \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ вважаються еквівалентними, якщо $||f - g||_\Delta = 0$, що рівносильно рівності $\Delta(t)(f(t) - g(t)) = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$. Множина усіх відповідних класів еквівалентності позначается $L^2_\Delta(\mathcal{I})$. Згідно з [14] $L^2_\Delta(\mathcal{I})$ є гілбертовим простором зі скалярним добутком $(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = (f, g)_\Delta$, $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in L^2_\Delta(\mathcal{I})$, де $f \in \widetilde{f}$ $(g \in \widetilde{g})$ – довільний пред ставник класу $\widetilde{f}$ (відп. $\widetilde{g}$).

Надалі будемо позначати через π_Δ фактор-відображення з $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ на $L^2_\Delta(\mathcal{I})$, яке задається рівністю $\pi_\Delta f = \widetilde{f} (\ni f)$, $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Крім того, покладемо $\widetilde{\pi}_\Delta = \pi_\Delta \oplus \pi_\Delta : (\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}))^2 \to (L^2_\Delta(\mathcal{I}))^2$, так що $\widetilde{\pi}_\Delta\{f, g\} = \{\widetilde{f}, \widetilde{g}\}$, $f, g \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Ясно, що $\ker \pi_\Delta = \{f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : \Delta(t)f(t) = 0 \text{ м.в. на } \mathcal{I}\}$.

Для заданого скінченновимірного гільбертового простору $\mathcal{K}$ позначимо через $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}; [\mathcal{K}, \mathbb{H}])$ або просто $\mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ множину всіх борелівських оператор-функцій $F(\cdot) : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$, таких що $F(\cdot)h \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ для кожного $h \in \mathcal{K}$. Покладемо також $\mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}] := \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}, \mathbb{H}]$. Очевидною є еквівалентність

$$F(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{K}, \mathbb{H}] \iff \int_{\mathcal{I}} ||\Delta^{\frac{1}{2}}(t)F(t)||^2\, dt < \infty. \tag{3.1}$$

3.2. Означення симетричної системи. Мінімальні та максимальні відношення

Нехай H, $\widehat{H}$ – скінченновимірні гільбертові простори і

$$H_0 = H \oplus \widehat{H}, \qquad \mathbb{H} = H_0 \oplus H = H \oplus \widehat{H} \oplus H. \tag{3.2}$$

Позначимо

$$\nu = \dim H, \qquad \widehat{\nu} = \dim \widehat{H}, \qquad n = \dim \mathbb{H} = 2\nu + \widehat{\nu}.$$

Припустимо, що $\delta \in \{-1, 1\}$ і $J \in [\mathbb{H}]$ – оператор, заданий рівностю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_H \\ 0 & i\delta I_{\widehat{H}} & 0 \\ I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{3.3}$$

Відзначимо, що J – сігнатурний оператор, тобто $J^* = J^{-1} = -J$. Зворотно, якщо $\mathbb{H}$ – скінченновимірний гільбертів простір і $J \in [\mathbb{H}]$ – сігнатурний оператор, то існують підпростори H і $\widehat{H}$ в $\mathbb{H}$, такі що $\mathbb{H} = H \oplus \widehat{H} \oplus H$ і оператор J допускає блочне зображення (3.3). Тому формула (3.3) дає загальний вигляд сігнатурного оператора.

Покладемо

$$\nu_+ = \dim \ker (J - iI), \qquad \nu_- = \dim \ker (J + iI)$$

З (3.3) випливає що

$$\nu_+ = \begin{cases} \nu + \widehat{\nu}, & \text{якщо } \delta = 1 \\ \nu, & \text{якщо } \delta = -1 \end{cases} \qquad \nu_- = \begin{cases} \nu, & \text{якщо } \delta = 1 \\ \nu + \widehat{\nu}, & \text{якщо } \delta = -1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Нехай $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ – проміжок в $\mathbb{R}$. Крім того, нехай $J \in [\mathbb{H}]$ – оператор (3.3) і $B(\cdot)$ та $\Delta(\cdot)$ – визначені майже всюди на $\mathcal{I}$ борелівські $[\mathbb{H}]$-значні функції, інтегровні на кожному відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$ й такі що $B(t) = B^*(t)$ і $\Delta(t) \ge 0$ м.в. на $\mathcal{I}$. Нагадаємо, що симетрична система диференційних рівнянь першого порядку (на проміжку $\mathcal{I}$) має вигляд [1, 10]

$$Jy' - B(t)y = \lambda \Delta(t) y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Означення 3.1. Система (3.5) назавається гамільтоновою, якщо $\mathbb{H} = H \oplus H (\Leftrightarrow \widehat{\nu} = 0)$ і, отже, оператор J має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_H \\ I_H & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{3.6}$$

Функція $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H})$ є розв'язком системи (3.5), якщо рівність (3.5) є вірною м.в. на $\mathcal{I}$. Оператор-функція $Y(\cdot, \lambda) : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ є розв'язком системи (3.5), якщо для кожного $h \in \mathcal{K}$ функція $y(\cdot) = Y(\cdot, \lambda)h$ є розв'язком цієї системи (тут $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір). У наступному для кожного $c \in \mathcal{I}$ та $\lambda \in \mathbb{C}$ позначаємо через $Y_c(\cdot, \lambda)$ операторний $[\mathbb{H}]$-значний розв'язок системи (3.5), такий що $Y_c(c, \lambda) = I_{\mathbb{H}}$

Надалі корисною буде наступна лема.

Лема 3.2. *Припустимо, що* $c \in \mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ *– скінченновимірний гільбертів простір,* $Y(\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \times \mathbb{R} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ *– оператор-функція, така що* $Y(\cdot, s)$ *є розв'язком системи* (3.5) *та* $Y(c,\cdot)$ *є неперервною функцією на* $\mathbb{R}$, *і* $\Sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathcal{K}]$ *– функція розподілу. Тоді для кожної функції* $g \in \mathcal{L}^2_{loc}(\Sigma; \mathcal{K})$ *рівність*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(t,s)\, d\Sigma(s) g(s), \quad t \in \mathcal{I} \tag{3.7}$$

задає функцію $f(\cdot) \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H})$, *таку що*

$$f'(t) = -J \int_{\mathbb{R}} (B(t) + s\Delta(t)) Y(t,s)\, d\Sigma(s) g(s) \quad (\text{м.в. на } \mathcal{I}). \tag{3.8}$$

Доведення. Згідно з (2.13) рівність (3.7) означає, що

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(t,s) \Psi(s) g(s)\, d\mu(s), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{3.9}$$

з Ψ та μ, визначеними в теоремі 2.13, (1). Оскільки

$$Y(t,s) = Y(c,s) - J \int_c^t (B(u) + s\Delta(u)) Y(u,s) du, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{3.10}$$

то $Y(\cdot,\cdot)$ є неперервною функцією на $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$. Неважко також перевірити, що $\int\limits_{\mathbb{R}} ||\Psi(s) g(s)||\, d\mu(s) < \infty$. Тому існує інтеграл в (3.9) і, крім того,

$$\int\limits_a^t \int\limits_{\mathbb{R}} ||(B(u) + s\Delta(u)) Y(u,s) \Psi(s) g(s)||\, du\, d\mu(s) < \infty. \tag{3.11}$$

З (3.11) та теореми Фубіні випливає, що

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_c^t (B(u) + s\Delta(u)) Y(u,s) \Psi(s) g(s)\, du \right) d\mu(s) = \\ \int_c^t \left(\int_{\mathbb{R}} (B(u) + s\Delta(u)) Y(u,s) \Psi(s) g(s)\, d\mu(s) \right) du. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Комбінуючи тепер (3.9) з (3.10) та приймаючи до уваги (3.12), отримуємо

$$f(t) = C - J \int_c^t \left(\int_{\mathbb{R}} (B(u) + s\Delta(u)) Y(u,s) \Psi(s) g(s)\, d\mu(s) \right) du,$$

де покладено $C = \int\limits_{\mathbb{R}} Y(a,s) \Psi(s) g(s)\, d\mu(s)$. Тому вірною є рівність (3.8). ☐

Надалі позначатимемо через $\mathcal{N}_\lambda$ лінійний простір усіх розв'язків системи (3.5), що належать до $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$:

$$\mathcal{N}_\lambda = \{ y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : Jy'(t) - B(t) y(t) = \lambda \Delta(t) y(t) \ \text{ м.в. на } \mathcal{I} \}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.13}$$

З (3.13) випливає, що $\dim \mathcal{N}_\lambda \leq n < \infty$.

Як доведено в [82], множина усіх розв'язків $y(\cdot)$ системи (3.5), таких що $\Delta(t) y(t) = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$, не залежить від λ. Цей факт дає можливість увести наступне означення.

Означення 3.3. [82] Нуль-многовидом системи (3.5) називається підпростір $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, заданий рівністю

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_\lambda \cap \ker \pi_\Delta = \{ y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H}) : Jy'(t) - B(t) y(t) = \lambda \Delta(t) y(t) \ \text{ і } \ \Delta(t) y(t) = 0 \ \text{ м.в. на } \mathcal{I} \}. \tag{3.14}$$

Покладемо

$$k_{\mathcal{N}} := \dim \mathcal{N}. \tag{3.15}$$

Ясно, що для кожного $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\lambda_0} \cap \mathcal{N}_{\overline{\lambda}_0}. \tag{3.16}$$

Лема 3.4. (1) *Для кожного операторного розв'язку* $Y(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I};[\mathcal{K},\mathbb{H}])$ *системи* (3.5) *співвідношення*

$$\mathcal{K} \ni h \to (Y(\lambda)h)(t) = Y(t,\lambda)h \in \mathcal{N}_\lambda. \tag{3.17}$$

задає лінійне відображення $Y(\lambda) : \mathcal{K} \to \mathcal{N}_\lambda$ *і, зворотно, для кожного такого відображення* $Y(\lambda)$ *існує єдине операторний розв'язок* $Y(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I};[\mathcal{K},\mathbb{H}])$ *системи* (3.5), *такий що вірним є* (3.17).

(2) *Якщо* $F(\lambda) = \pi_\Delta Y(\lambda)(\in [\mathcal{K}, L^2_\Delta(\mathcal{I})])$, *то для кожного* $\widetilde{f} \in L^2_\Delta(\mathcal{I})$

$$F^*(\lambda)\widetilde{f} = \int_{\mathcal{I}} Y^*(t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad f \in \widetilde{f}. \tag{3.18}$$

Доведення. Твердження (1) є очевидним. Твердження (2) доводиться аналогічно [99, (3.70)] $\square$

Згідно з [111, 81, 92] симетрична система (3.5) породжує максимальні лінійні відношення $\mathcal{T}_{max}$ в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та T_{max} в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$, які задаються рівностями

$$\mathcal{T}_{max} = \{\{y,f\} \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) \times \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : y \in AC(\mathcal{I};\mathbb{H}) \text{ і } Jy'(t) - B(t)y(t) = \Delta(t)f(t) \text{ м.в. на } \mathcal{I}\}, \tag{3.19}$$

$$T_{max} = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{max} = \{\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} \in L^2_\Delta(\mathcal{I}) \oplus L^2_\Delta(\mathcal{I}) : \widetilde{y} = \pi_\Delta y \text{ і } \widetilde{f} = \pi_\Delta f \text{ для деякої пари } \{y,f\} \in \mathcal{T}_{max}\}. \tag{3.20}$$

Для пар $\{y,f\},\ \{z,g\} \in \mathcal{T}_{max}$ і відрізку $[\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}$ інтегрування частинами дає

$$\int_{[\alpha,\beta]} (\Delta(t)f(t), z(t))\,dt - \int_{[\alpha,\beta]} (\Delta(t)y(t), g(t))\,dt = (Jy(\beta), z(\beta)) - (Jy(\alpha), z(\alpha)).$$

Тому існують границі

$$[y,z]_a := \lim_{\alpha \downarrow a}(Jy(\alpha), z(\alpha)), \qquad [y,z]_b := \lim_{\beta \uparrow b}(Jy(\beta), z(\beta)), \quad y,z \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \tag{3.21}$$

і справедливою є тотожність Лагранжа

$$(f,z)_\Delta - (y,g)_\Delta = [y,z]_b - [y,z]_a, \quad \{y,f\},\ \{z,g\} \in \mathcal{T}_{max}. \tag{3.22}$$

Формула (3.21) задає білінійні форми $[\cdot,\cdot]_a$ і $[\cdot,\cdot]_b$ на $\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$. Використовуючи ці форми, визначимо мінімальні відношення $\mathcal{T}_{min}$ в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та T_{min} в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$ рівностями

$$\mathcal{T}_{min} = \{\{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} : [y,z]_a = 0 \text{ і } [y,z]_b = 0 \text{ для кожного } z \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\}, \tag{3.23}$$

$$T_{min} = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{min} = \{\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} \in L^2_\Delta(\mathcal{I}) \oplus L^2_\Delta(\mathcal{I}) : \widetilde{y} = \pi_\Delta y \text{ та } \widetilde{f} = \pi_\Delta f \text{ для деякої пари } \{y,f\} \in \mathcal{T}_{min}\}. \tag{3.24}$$

Крім того, введемо лінійні відношення $\mathcal{T}_0$ в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та T_0 в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$, покладаючи

$$\mathcal{T}_0 = \{\{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} : y \in AC_0(\mathcal{I};\mathbb{H})\}, \quad T_0 = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_0. \tag{3.25}$$

Ясно, що $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_{min} \subset \mathcal{T}_{max}$.

Означення 3.5. Кінцева точка a (відп. b) проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ називається регулярною, якщо $a > -\infty$ і $a \in \mathcal{I}$ (відп. $b < \infty$ і $b \in \mathcal{I}$). Система (3.5) називається регулярною, якщо обидві точки a та b регулярні. Система, що не є регулярною, називається сингулярною.

Очевидно, що у випадку регулярної точки a (відп. b) інтеграли $\int\limits_{[a,c]} ||B(t)||\,dt$ і $\int\limits_{[a,c]} ||\Delta(t)||\,dt$ (відп. $\int\limits_{[c,b]} ||B(t)||\,dt$ і $\int\limits_{[c,b]} ||\Delta(t)||\,dt$)скінченні для кожного $c \in (a, b)$.

Для регулярної системи тотожність (3.22) має вигляд

$$(f, z)_\Delta - (y, g)_\Delta = (Jy(b), z(b)) - (Jy(a), z(a)), \quad \{y, f\},\ \{z, g\} \in \mathcal{T}_{max}. \tag{3.26}$$

У випадку регулярної точки a позначимо через $\mathcal{T}_a$ та T_a лінійні відношення відповідно в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та $L^2_\Delta(\mathcal{I})$, задані рівностями

$$\mathcal{T}_a = \{\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} : y(a) = 0 \text{ і } [y, z]_b = 0 \text{ для кожного } z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\}, \quad T_a = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_a. \tag{3.27}$$

Аналогічно у випадку регулярної точки b позначимо через $\mathcal{T}_b$ та T_b лінійні відношення відповідно в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та $L^2_\Delta(\mathcal{I})$, задані рівностями

$$\mathcal{T}_b = \{\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} : y(b) = 0 \text{ і } [y, z]_a = 0 \text{ для кожного } z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\}, \quad T_b = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_b. \tag{3.28}$$

Ясно, що $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_{min}$ і аналогічно $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_b \subset \mathcal{T}_{min}$.

Наступна теорема, доведена в [102], грає фундаментальну роль в нашому дослідженні симетричних систем.

Теорема 3.6. *Нехай T_{max} і T_{min} – максимальне і мінімальне відношення* (3.20) *і* (3.24)*, породжені системою* (3.5) *на інтервалі $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$. Крім того, нехай T_0 – відношення* (3.25)*. Тоді T_{min} – замкнене симетричне лінійне відношення в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$ і*

$$\overline{T}_0 = T_{min}, \qquad T^*_{min} = T_{max}. \tag{3.29}$$

Якщо, крім того, точка a (відп. b) є регулярною і T_a (відп. T_b) – відношення (3.27) *(відп.* (3.28)*), то $T_{min} = T_a$ (відп. $T_{min} = T_b$).*

Якщо система (3.5) *регулярна, то $T_{min} = T_0$ і кожне $\lambda \in \mathbb{C}$ є точкою регулярного типу відношення T_{min}, тобто $\widehat{\rho}(T_{min}) = \mathbb{C}$.*

Наступне твердження є безпосереднім наслідком означень T_{min} та T_{max}.

Твердження 3.7. (1) *Многозначна частина* $\operatorname{mul} T_{min}$ *мінімального відношення T_{min} збігається з множиною усіх $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, таких що для деякого (і тому для кожного) $f \in \widetilde{f}$ існує розв'язок рівняння*

$$Jy' - B(t)y = \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{3.30}$$

що задовільняє співвідношенням $\Delta(t)y(t) = 0$ (м.в. на $\mathcal{I}$) та $[y, z]_a = [y, z]_b = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.

Якщо кінцева точка a є регулярною, то $\operatorname{mul} T_{min}$ *є множиною усіх $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, таких що для деякого (і тому для кожного) $f \in \widetilde{f}$ розв'язок рівняння* (3.30) *з $y(a) = 0$ задовільняє рівностям $\Delta(t)y(t) = 0$ (м.в. на $\mathcal{I}$) та $[y, z]_b = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.*

(2) *Рівності* $\operatorname{mul} T_{min} = 0$, $\operatorname{mul} T_{min} = \operatorname{mul} T_{max}$ *або* $\operatorname{mul} T_{max} = \{0\}$ *рівносильні відповідно виконанню наступних умов* (У1), (У2) *або* (У3)*:*

(У1) *якщо* $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й існує розв'язок* $y(\cdot)$ *рівняння* (3.30)*, такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*) та* $[y,z]_a = [y,z]_b = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$*, то* $\Delta(t)f(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*);*

(У2) *якщо* $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й* $y(\cdot)$ *– розв'язок рівняння* (3.30)*, такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*), то* $[y,z]_a = [y,z]_b = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$*;*

(У3) *якщо* $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й існує розв'язок* $y(\cdot)$ *рівняння* (3.30)*, такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*), то* $\Delta(t)f(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*).*

Припустимо, що $\mathcal{N}$ – нуль-многовид (3.14) системи (3.5). Тоді $\{y, 0\} \in \mathcal{T}_{max}$ для кожного $y \in \mathcal{N}$ і внаслідок тотожності Лагранжа (3.22)

$$[y,z]_a = [y,z]_b, \qquad y \in \mathcal{N}, \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.31}$$

Це дозволяє ввести підпростір $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ за допомоги рівності

$$\mathcal{N}' = \{y \in \mathcal{N} : \ [y,z]_a = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\} = \{y \in \mathcal{N} : \ [y,z]_b = 0, \ \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\}. \tag{3.32}$$

Далі, співвідношення $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}$ і $\widetilde{\pi}_\Delta\{y, f\} = 0$ означають, що $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H})$, $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і

$$Jy'(t) - B(t)y(t) = \Delta(t)f(t), \quad \Delta(t)y(t) = 0, \quad \Delta(t)f(t) = 0 \quad \text{м.в. на } \mathcal{I}.$$

Тому справедливі рівності

$$\ker(\widetilde{\pi}_\Delta \upharpoonright \mathcal{T}_{max}) = \{\{y, f\} \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) \times \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : \ y \in \mathcal{N} \ \text{ і } \ \Delta(t)f(t) = 0 \ \text{ м.в.на } \ \mathcal{I}\}, \tag{3.33}$$

$$\ker(\widetilde{\pi}_\Delta \upharpoonright \mathcal{T}_{min}) = \{\{y, f\} \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) \times \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : \ y \in \mathcal{N}' \ \text{ і } \ \Delta(t)f(t) = 0 \ \text{ м.в. на } \ \mathcal{I}\}. \tag{3.34}$$

Твердження 3.8. *Нехай* a *– регулярна точка для системи* (3.5)*,* $\mathcal{T}_a$ *– лінійне відношення* (3.27) *і* $\widehat{\mathcal{N}}' := \{\{y, 0\} : \ y \in \mathcal{N}'\}$*. Тоді*

$$\mathcal{T}_{min} = \mathcal{T}_a \dotplus \widehat{\mathcal{N}}', \tag{3.35}$$

звідки випливає, що рвіність $\mathcal{T}_{min} = \mathcal{T}_a$ *має місце тоді й тільки тоді, коли* $\mathcal{N}' = \{0\}$*.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_{min}$ і внаслідок теореми 3.6 $\widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{min} = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_a (= T_{min})$, то

$$\mathcal{T}_{min} = \mathcal{T}_a + \ker(\widetilde{\pi}_\Delta \upharpoonright \mathcal{T}_{min}). \tag{3.36}$$

Ясно, що $\{0, f\} \in \mathcal{T}_a$ для кожного $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, такого що $\Delta(t)f(t) = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$. Комбінуючи це твердження з (3.36) та (3.34), отримуємо $\mathcal{T}_{min} = \mathcal{T}_a + \widehat{\mathcal{N}}'$. Крім того, для кожного $y \in \mathcal{N} \cap \operatorname{dom} \mathcal{T}_a$ маємо $y(a) = 0$ й отже $y = 0$. Звідси $\mathcal{T}_a \cap \widehat{\mathcal{N}}' = \{0\}$, що дає прямий розклад (3.35). ☐

Приклад 3.9. *Розглянемо систему* (3.5) *з* $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ *і операторними коефіцієнтами* J*,* $B(t)$ *і* $\Delta(t)$*, заданими в стандартному базисі матрицями*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = 0, \quad \Delta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty).$$

Безпосередня перевірка показує, що для цієї системи $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N} = \{y(t) \equiv \{0, C\} : \ C \in \mathbb{C}\}$ *і кожна функція* $z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ *має вигляд* $z(t) = \{0, \ z_2(t)\} (\in \mathbb{C}^2)$*. Тому* $(Jy(t), z(t)) \equiv 0 \ \ (y \in \mathcal{N}, \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max})$ *і, отже,* $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \neq \{0\}$*. Цей приклад показує що існують симетричні системи з регулярною кінцевою точкою* a*, такі що* $\mathcal{T}_{min} \neq \mathcal{T}_a$*.*

3.3. Формальні індекси дефекту та формули Неймана

Нехай $\mathcal{T}_{max}$ – максимальне відношення (3.19), породжене симетричною системою (3.5), і $\mathcal{N}_\lambda$ – підпростір (3.13). З (3.19) випливає, що

$$\mathcal{N}_\lambda = \ker(\mathcal{T}_{max} - \lambda) = \{y \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}) : \ \{y, \lambda y\} \in \mathcal{T}_{max}\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.37}$$

Припустимо також, що $\widehat{\mathcal{N}}_\lambda$ – підпостір в $\mathcal{T}_{max}$, заданий рівністю $\widehat{\mathcal{N}}_\lambda = \{\{y, \lambda y\} : y \in \mathcal{N}_\lambda\}, \ \lambda \in \mathbb{C}$.

Означення 3.10. [82] Числа $N_+ = \dim \mathcal{N}_i$ і $N_- = \dim \mathcal{N}_{-i}$ називаються формальними індексами дефекту системи (3.5).

Ясно, що $N_\pm \leq n$. Крім того, для регулярної системи $N_+ = N_- = n$.

Далі припустимо, що $\mathfrak{N}_\lambda(T_{min}) = \ker(T_{max} - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$, – дефектні підпростори і $n_\pm(T_{min}) = \dim \mathfrak{N}_\lambda(T_{min}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm$, – індекси дефекту симетричного відношення T_{min}. Легко бачити, що $\pi_\Delta \mathcal{N}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda(T_{min})$ і $\ker(\pi_\Delta \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda) = \mathcal{N}$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$. Тому

$$\dim \mathcal{N}_\lambda = \dim \mathfrak{N}_\lambda(T_{min}) + k_\mathcal{N}, \tag{3.38}$$

де $k_\mathcal{N}$ визначено в (3.15). Звідси випливає

Твердження 3.11. *[82, 92] Для симетричної системи вірними є рівності* $N_\pm = \dim \mathcal{N}_\lambda, \ \lambda \in \mathbb{C}_\pm$, *(тобто* $\dim \mathcal{N}_\lambda$ *не залежить від* λ *в кожній з півплощин* $\mathbb{C}_+$ *та* $\mathbb{C}_-$*) і*

$$N_+ = n_+(T_{min}) + k_\mathcal{N}, \quad N_- = n_-(T_{min}) + k_\mathcal{N}, \tag{3.39}$$

де $k_\mathcal{N}$ *визначено в* (3.15).

Як відомо, для кожного замненого симетричного відношення A в $\mathfrak{H}$ справедливою є вормула Неймана (див. наприклад [56]). У випадку мінімального відношення T_{min} в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$ ця формула має вигляд

$$T_{max} = T_{min} \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min}) \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_{\overline{\lambda}}(T_{min}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

В наступному твердженні показано, що аналогічна формула має місце для відношень $\mathcal{T}_{min}$ та $\mathcal{T}_{max}$.

Твердження 3.12. *Нехай* $\mathcal{T}_{min}$ *та* $\mathcal{T}_{max}$ *– мінімальне і максимальне відношення в* $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, *породжені системою* (3.5). *Припустимо також, що* $\mathcal{N}$ *– нуль-многовид* (3.14), $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ *– підпостір* (3.32) *й нехай* $k_{\mathcal{N}'} = \dim \mathcal{N}'$. *Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *справедливі наступні формули Неймана:*

$$\mathcal{T}_{max} = \mathcal{T}_{min} + (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}), \qquad \mathcal{T}_{min} \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}) = \mathcal{N}' \oplus \mathcal{N} = \{\{y, f\} : \ y \in \mathcal{N}', \ f \in \mathcal{N}\}. \tag{3.41}$$

(2) *Вірною є рівність*

$$\dim(\mathcal{T}_{max}/\mathcal{T}_{min}) = \dim(\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}/\operatorname{dom} \mathcal{T}_{min}) = N_+ + N_- - k_\mathcal{N} - k_{\mathcal{N}'}. \tag{3.42}$$

Доведення. Оскільки $\widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{max} = T_{max}$, $\widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{min} = T_{min}$ і $\widetilde{\pi}_\Delta \widehat{\mathcal{N}}_\lambda = \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min})$, то з формули (3.40) випливає, що

$$\mathcal{T}_{max} = \mathcal{T}_{min} + (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}) + \ker(\widetilde{\pi}_\Delta \upharpoonright \mathcal{T}_{max}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{3.43}$$

(ясно, що $\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ й, отже, сума $\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$ в (3.43) є прямою). Далі, з включення $y \in \mathcal{N}$ випливає $y \in \mathcal{N}_\lambda \cap \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ і зображення

$$\{y, 0\} = \left\{-\tfrac{\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} y, -\lambda \tfrac{\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} y\right\} + \left\{\tfrac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y, \overline{\lambda} \tfrac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y\right\}.$$

дає

$$\{y, 0\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}} \quad (y \in \mathcal{N}, \ \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}). \tag{3.44}$$

Крім того, для кожного $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, такого що $\Delta(t) f(t) = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$, маємо $\{0, f\} \in \mathcal{T}_{min}$. Звідси та з (3.33), (3.44) випливає включення $\ker(\widetilde{\pi}_\Delta \upharpoonright \mathcal{T}_{max}) \subset \mathcal{T}_{min} + (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$, яке сумісно з (3.43) дає першу рівність в (3.41).

Доведемо далі друге співвідношення в (3.41). Якщо $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{min} \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$, то $\widetilde{\pi}_\Delta \{y, f\} \in T_{min} \cap (\widehat{\mathfrak{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_{\overline{\lambda}})$ й, отже, $\widetilde{\pi}_\Delta \{y, f\} = 0$. Тому в силу (3.34) $y \in \mathcal{N}'$ і через (3.44) $\{y, 0\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$. Крім того, оскільки також $\{y, f\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$, то $\{0, f\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$. Звідси випливає існуванння $u \in \mathcal{N}_\lambda$ і $z \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$, таких що $u + z = 0$ і $\lambda u + \overline{\lambda} z = f$. Отже $f = (\overline{\lambda} - \lambda) z = (\lambda - \overline{\lambda}) u$, так що $f \in \mathcal{N}_\lambda \cap \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ і в силу (3.16) $f \in \mathcal{N}$. Таким чином $\{y, f\} \in \mathcal{N}' \oplus \mathcal{N}$.

Зворотно, нехай $\{y, f\} \in \mathcal{N}' \oplus \mathcal{N}$, де $y \in \mathcal{N}'$ і $f \in \mathcal{N}$. Тоді згідно з (3.32) $\{y, 0\} \in \mathcal{T}_{min}$ і (3.44) дає $\{y, 0\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$. Тому вірним є включення $\{y, 0\} \in \mathcal{T}_{min} \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$. Далі, $\{0, f\} \in \mathcal{T}_{min}$ і зображення

$$\{0, f\} = \tfrac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} (\{f, \lambda f\} - \{f, \overline{\lambda} f\})$$

разом з (3.16) показує, що $\{0, f\} \in \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$. Таким чином, $\{0, f\} \in \mathcal{T}_{min} \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$ й тому $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{min} \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$. Це доводить друге співвідношення в (3.41).

Щоб довести (3.42) спочатку відзначимо, що безпосередньо з (3.41) виплиає рівність $r := \dim(\mathcal{T}_{max}/\mathcal{T}_{min}) = N_+ + N_- - k_{\mathcal{N}} - k_{\mathcal{N}'}$. Далі припустимо, що $\{\{y_j, f_j\}\}_1^r$ – базіс простору $\mathcal{T}_{max}$ відносно підпротору $\mathcal{T}_{min} \subset \mathcal{T}_{max}$. Тоді безпосередня перевірка показує, що $\{y_j\}_1^r$ є базісом простору $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ відносно підпростору $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{min} \subset \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$. Тому $\dim(\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} / \operatorname{dom} \mathcal{T}_{min}) = r (= \dim(\mathcal{T}_{max}/\mathcal{T}_{min}))$, що повністю доводить (3.42). □

В наступному твердженні показано, що у випадку регулярної кінцевої точки формула Неймана може бути зображена у дещо іншому вигляді.

Твердження 3.13. *Нехай $\mathcal{T}_a$ – лнійне відношення* (3.27), *породжене системою* (3.5) *з регулярною кінцевю точкою a. Тоді*

$$\mathcal{T}_{max} = \mathcal{T}_a + (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}), \qquad \mathcal{T}_a \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}) = \{0\} \oplus \mathcal{N} = \{\{0, f\} : f \in \mathcal{N}\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{3.45}$$

і вірною є наступна рівність

$$\dim(\mathcal{T}_{max}/\mathcal{T}_a) = \dim(\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} / \operatorname{dom} \mathcal{T}_a) = N_+ + N_- - k_{\mathcal{N}}. \tag{3.46}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ – підпростір (3.32). Тоді в силу (3.44) $\widehat{\mathcal{N}}' \subset \widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$ і перша рівність в (3.41) сумісно з (3.35) дає першу рівність в (3.45). Далі припустимо, що $\{y, f\} \in \mathcal{T}_a \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$. Оскільки $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{T}_{min}$, то з формули (3.41) випливає, що $y \in \mathcal{N}'$ і $f \in \mathcal{N}$. Крім того, через (3.27) $y(a) = 0$ і, отже, $y = 0$. Тому $\{y, f\} \in \{0\} \oplus \mathcal{N}$. Зворотно, з огляду на другу рівність в (3.41) кожна пара $\{0, f\}$ з $f \in \mathcal{N}$ належить до $\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}}$ й, крім того, $\{0, f\} \in \mathcal{T}_a$. Тому $\{0, f\} \in \mathcal{T}_a \cap (\widehat{\mathcal{N}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}})$, звідки випливає друга рівність в (3.45). Накінець, формула (3.46) доводиться так само, як і (3.42). □

Надалі для системи (3.5) будемо позначати через $\mathcal{D}_{0a}$ та $\mathcal{D}_{0b}$ лінійні многовиди в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, визначені рівностями

$$\mathcal{D}_{0a} = \{y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} : \; [y, z]_a = 0 \;\text{ для кожного }\; z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\} \tag{3.47}$$

$$\mathcal{D}_{0b} = \{y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} : \; [y, z]_b = 0 \;\text{ для кожного }\; z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}\} \tag{3.48}$$

Твердження 3.14. *Припустимо, що a є регулярною кінцевою точкою системи* (3.5) *і $\mathbb{H}_a$ та $\mathbb{H}_1$ – підпростори в $\mathbb{H}$, визначені рівностями*

$$\mathbb{H}_a = \{y(a) : y(\cdot) \in \mathcal{N}\}, \qquad \mathbb{H}_1 = \{y(a) : \; y(\cdot) \in \mathcal{D}_{0b}\}.$$

Тоді $\operatorname{dom} \mathcal{T}_a \subset \mathcal{D}_{0b}$ *і мають місце рівності*

$$\mathbb{H}_1 = (J\mathbb{H}_a)^\perp, \qquad \dim(\mathcal{D}_{0b}/\operatorname{dom} \mathcal{T}_a) = n - k_{\mathcal{N}}. \tag{3.49}$$

Якщо, крім того, система регулярна і $\mathbb{H}_1' := \{y(a) : \; y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \;\text{ і }\; y(b) = 0\}$, *то*

$$\mathbb{H}_1' = \mathbb{H}_1 = (J\mathbb{H}_a)^\perp. \tag{3.50}$$

Доведення. З (3.31) випливає, що $(Jy(a), z(a)) = 0$ для всіх $y \in \mathcal{D}_{0b}$ і $z \in \mathcal{N}$. Тому $\mathbb{H}_1 \subset (J\mathbb{H}_a)^\perp$ і для доведення першої рівності в (3.49) залишається показати, що $(J\mathbb{H}_a)^\perp \subset \mathbb{H}_1$.

Припустимо спочатку, що система регулярна. Позначимо через $\mathcal{N}_0'$ підпростір в $\mathcal{N}_0 (= \ker \mathcal{T}_{max})$, заданий рівностю $\mathcal{N}_0' = \{y \in \mathcal{N}_0 \; : \; y(a) \in \mathbb{H}_a^\perp\}$. Оскільки $\mathcal{N}_0' \cap \mathcal{N} = \{0\}$, то з рівності $(y, y)_\Delta = 0$ $(y \in \mathcal{N}_0')$ випливає, що $y = 0$. Тому $\mathcal{N}_0'$ є скінченновимірним гільбертовим простором зі скалярним добутком $(y, z)_\Delta$.

Нехай $h \in (J\mathbb{H}_a)^\perp$, так що $Jh \in \mathbb{H}_a^\perp$. Тоді $\varphi(z) = -(Jh, z(a)), \;\; z \in \mathcal{N}_0'$, є антілінійним функціоналом на $\mathcal{N}_0'$ і тому існує $f_h \in \mathcal{N}_0'$, таке що

$$(f_h, z)_\Delta = -(Jh, z(a)), \quad z \in \mathcal{N}_0'. \tag{3.51}$$

Нехай далі $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H})$ – розв'язок рівняння $Jy' - B(t)y = \Delta(t) f_h(t)$, такий що $y(b) = 0$. Тоді $\{y, f_h\} \in \mathcal{T}_{max}$ і, отже, $y(a) \in \mathbb{H}_1'$. Тому $y(a) \in (J\mathbb{H}_a)^\perp$, звідки випливає включення $Jy(a) \in \mathbb{H}_a^\perp$. Застосовуючи тепер тотожність Лагранжа (3.26) до $\{y, f_h\}$ і $\{z, 0\}$ $(z \in \mathcal{N}_0')$ та приймаючи до уваги рівність (3.51), отримуємо

$$-(Jh, z(a)) = (f_h, z)_\Delta = -(Jy(a), z(a)), \quad z \in \mathcal{N}_0'.$$

У цій рівності $Jh \in \mathbb{H}_a^\perp$, $Jy(a) \in \mathbb{H}_a^\perp$ і $z(a)$ приймає всі значення з $\mathbb{H}_a^\perp$, коли z пробігає $\mathcal{N}_0'$. Тому $y(a) = h$ і, отже, $h \in \mathbb{H}_1'$, що сумісно з очевидним включенням $\mathbb{H}_1' \subset \mathbb{H}_1 (\subset (J\mathbb{H}_a)^\perp)$ дає (3.50).

Припустимо тепер, що система сингулярна. Для кожного відрізку $\mathcal{I}'=[a,\beta]\subset\mathcal{I}$ покладемо

$$\mathcal{N}^{\mathcal{I}'}=\{y\in AC(\mathcal{I}'):\ Jy'(t)-B(t)y(t)=0\ \text{ і }\ \Delta(t)y(t)=0\ \text{ м.в. на }\ \mathcal{I}'\}$$

і $\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}'}=\{y(a):\ y\in\mathcal{N}^{\mathcal{I}'}\}$. Очевидно, що з включення $\mathcal{I}_1'\subset\mathcal{I}_2'$ випливає $\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}_2'}\subset\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}_1'}$. Тому в силу скінченновимірності простору $\mathbb{H}$ існує відрізок $\mathcal{I}_0'=[a,\beta_0]\subset\mathcal{I}$, такий що $\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}'}=\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}_0'}$ для всіх $\mathcal{I}'\supset\mathcal{I}_0'$. Крім того, $\mathbb{H}_a=\bigcap\limits_{\mathcal{I}'\subset\mathcal{I}}\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}'}$, звідки випливає, що $\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}_0'}=\mathbb{H}_a$.

Нехай $\mathcal{T}_{max}^{\mathcal{I}_0'}$ – максимальне відношення в $\mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I}_0')$, породжене звуженням системи (3.5) на $\mathcal{I}_0'$. Оскільки це звуження регулярне, то внаслідок (3.50) для кожного $h\in(J\mathbb{H}_a)^\perp(=(J\mathbb{H}_a^{\mathcal{I}_0'})^\perp)$ існує $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}^{\mathcal{I}_0'}$, таке що $y(0)=h$ і $y(\beta_0)=0$. Продовжуючи функцію y нулем на все $\mathcal{I}$, отримуємо функцію $y\in\mathcal{D}_{0b}$, таку що $y(0)=h$. Звідси випливає потрібне включення $(J\mathbb{H}_a)^\perp\subset\mathbb{H}_1$.

Доведемо другу рівність в (3.49). З першої рівності в (3.49) випливає, що $r_1:=\dim\mathbb{H}_1=n-k_{\mathcal{N}}$. Нехай $\{y_j\}_1^{r_1}$ – система функцій $y_j\in\mathcal{D}_{0b}$, така що $\{y_j(0)\}_1^{r_1}$ – базис в $\mathbb{H}_1$. Тоді безпосередня перевірка показує, що ця система утворює базис простору $\mathcal{D}_{0b}$ відносно підпростору $\operatorname{dom}\mathcal{T}_a\subset\mathcal{D}_{0b}$. Звідси випливає потрібна рівність. ☐

Нагадаємо, далі, наступне означення.

Означення 3.15. Симетрична система (3.5) називається визначеною, якщо $\mathcal{N}=\{0\}$. Рівносильно, система (3.5) є визначеною, якщо для деякого (й тому для кожного) $\lambda\in\mathbb{C}$ існує лише трівіальний розв'язок $y=0$ цієї системи, що зідовільняє рівності $\Delta(t)y(t)=0$ м.в. на $\mathcal{I}$.

Відзначимо, що в [10] визначена система називається системою з вагою $\Delta(\cdot)$ додатного типу.

Наступні наслідки випливають з наведених вище результатів для довільних (не обов'язково визначених) симетричних систем.

Наслідок 3.16. *Якщо система* (3.5) *є визначеною, то*

$$N_+=n_+(T_{min}),\qquad N_-=n_-(T_{min})\tag{3.52}$$

і справедливою є наступна формула Неймана:

$$\mathcal{T}_{max}=\mathcal{T}_{min}\dotplus\widehat{\mathcal{N}}_\lambda\dotplus\widehat{\mathcal{N}}_{\overline{\lambda}},\qquad\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.\tag{3.53}$$

Доведення. Потрібне твердження безпосередньо випливає з тверджень 3.11 і 3.12. ☐

Наслідок 3.17. *Нехай система* (3.5) *з регулярною кінцевою точкою a є визначеною. Тоді $\mathcal{T}_a=\mathcal{T}_{min}$ і для кожного $h\in\mathbb{H}$ існує $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ (і навіть $y\in\mathcal{D}_{0b}$), таке що $y(a)=h$. Якщо крім того система регулярна (тобто $\mathcal{I}=[a,b]$), то для будь-яких $h_1,\ h_2\in\mathbb{H}$ існує $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$, таке що $y(a)=h_1$ і $y(b)=h_2$.*

Доведення. Перше твердження випливає з тверджень 3.8 і 3.14. Далі припустимо, що система визначена і регулярна й нехай $h_1,h_2\in\mathbb{H}$. Тоді через (3.50) існує $y_1\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ з $y_1(a)=h_1$ і $y_1(b)=0$. Крім того, за симетрією існує $y_2\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ з $y_2(a)=0$ і $y_2(b)=h_2$. Ясно, що сума $y=y_1+y_2$ має потрібні властивості. ☐

Зауваження 3.18. Для визначених систем теорема 3.6 і наслідок 3.17 доведені Оркутом [111]; формулу Неймана (3.53) отримано в [92].

Загальні (не обов'язково визначені) симетричні системи першого порядку розглядалися, зокрема, в роботі [92]. В цій роботі мінімальне відношення T_{min} визначається першою рівністю в (3.29), а потім доводиться друга рівність в (3.29). В той же час рівності (3.23), (3.24) відсутні в [92]. У цьому зв'язку вадзначимо, що наше означення (3.23), (3.24) мінімального відношення T_{min} здається більш природним і зручним для застосувань; у випадку диференціальних операторів та визначених систем зображення (3.23), (3.24) відношення (зокрема, оператора) T_{min} міститься, наприклад, в [40, 111] (див. також [55]).

3.4. Граничні пари та граничні трійки для симетричних систем

3.4.1. Граничний комплекс

Нехай L – лінійний простір над $\mathbb{C}$ і $[\cdot,\cdot] : L \times L \to \mathbb{C}$ – косоермітова білінійна форма на L. Припустимо також, що $L_0 = \{y \in L : [y,z] = 0,\ z \in L\}$ – ядро форми $[\cdot,\cdot]$. Нагадаємо, що така форма має скінченні індекси інерції $k_+,\ k_-$, якщо існує прямий розклад

$$L = L_0 \dotplus L_+ \dotplus L_-, \tag{3.54}$$

такий що $\dim L_+ = k_+,\ \dim L_- = k_-$ і виконані співвідношення

$$[y,z] = 0,\ \ y \in L_+,\ \ z \in L_-; \qquad \operatorname{Im}[y,y] > 0,\ \ 0 \neq y \in L_+; \qquad \operatorname{Im}[y,y] < 0,\ \ 0 \neq y \in L_-. \tag{3.55}$$

Як відомо, числа $k_\pm$ однозначно визначаються формою $[\cdot,\cdot]$ і не залежать від вибору підпросторів L_+ та L_-, що задовільняють (3.54), (3.55).

Лема 3.19. (1) *Косоермітові білінійні форми* $[\cdot,\cdot]_a$ *і* $[\cdot,\cdot]_b$ *(див.* (3.21)*) мають скінченні індекси інерції* $\nu_{a+},\ \nu_{a-}$ *та* $\nu_{b+},\ \nu_{b-}$ *відповідно.*

(2) *Якщо кінцева точка* a *(відп.* b*) є регулярною, то* $\nu_{a\pm} = \nu_\pm$ *(відп.* $\nu_{b\pm} = \nu_\pm$*).*

(3) *Нехай* $\mathcal{H}_a,\ \widehat{\mathcal{H}}_a$ *і* $\mathcal{H}_b,\ \widehat{\mathcal{H}}_b$ *– скінченновимірні гільбертові простори, такі що*

$$\dim \mathcal{H}_a = \min\{\nu_{a+}, \nu_{a-}\}, \qquad \dim \widehat{\mathcal{H}}_a = |\nu_{a+} - \nu_{a-}| \tag{3.56}$$

$$\dim \mathcal{H}_b = \min\{\nu_{b+}, \nu_{b-}\}, \qquad \dim \widehat{\mathcal{H}}_b = |\nu_{b+} - \nu_{b-}|. \tag{3.57}$$

Тоді існують сюр'єктивні лінійні відображення

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a, \quad \Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \tag{3.58}$$

такі що виконуються тотожності

$$[y,z]_a = i\delta_a(\widehat{\Gamma}_a y, \widehat{\Gamma}_a z) - (\Gamma_{1a} y, \Gamma_{0a} z) + (\Gamma_{0a} y, \Gamma_{1a} z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \tag{3.59}$$

$$[y,z]_b = i\delta_b(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z) - (\Gamma_{1b} y, \Gamma_{0b} z) + (\Gamma_{0b} y, \Gamma_{1b} z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}, \tag{3.60}$$

в яких

$$\delta_a = \operatorname{sign}(\nu_{a+} - \nu_{a-}), \qquad \delta_b = \operatorname{sign}(\nu_{b+} - \nu_{b-}). \tag{3.61}$$

Зворотно, якщо $\mathcal{H}_a$, $\widehat{\mathcal{H}}_a$ *та* $\mathcal{H}_b$, $\widehat{\mathcal{H}}_b$ *– скінченновимірні гільбертові простори і* Γ_a *та* Γ_b *– сюр'єктивні оператори* (3.58), *що задовільняють* (3.59), (3.60), *то вірними є рівності* (3.56) *та* (3.57).

Доведення. Доведемо лему для форми $[\cdot,\cdot]_b$ (для форми $[\cdot,\cdot]_a$ доведення аналогічне).

(1) Нехай $\mathcal{D}_{0b}$ – лінійний многовид (3.48), тобто $\mathcal{D}_{0b}$ – ядро форми $[\cdot,\cdot]_b$. Оскільки $\operatorname{dom}\mathcal{T}_{min} \subset \mathcal{D}_{0b} \subset \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ і згідно з (3.42) $\dim(\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}/\operatorname{dom}\mathcal{T}_{min}) < \infty$, то існує розклад

$$\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} = \mathcal{D}_{0b} \dotplus \mathcal{D}_{b+} \dotplus \mathcal{D}_{b-} \tag{3.62}$$

зі скінченновимірними просторами $\mathcal{D}_{b+}$ та $\mathcal{D}_{b-}$, такими що

$$[y,z]_b = 0,\ \ y \in \mathcal{D}_{b+},\ z \in \mathcal{D}_{b-}; \quad \operatorname{Im}[y,y]_b > 0,\ \ 0 \neq y \in \mathcal{D}_{b+}; \quad \operatorname{Im}[z,z]_b < 0,\ \ 0 \neq z \in \mathcal{D}_{b-}. \tag{3.63}$$

Звідси випливає, що форма $[\cdot,\cdot]_b$ має скінченні індекси інерції

$$\nu_{b+} := \dim \mathcal{D}_{b+}, \qquad \nu_{b-} := \dim \mathcal{D}_{b-}. \tag{3.64}$$

(2) У випадку регулярної точки b маємо $[y,z]_b = (Jy(b), z(b)),\ y,z \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$. Звідси та з (3.3) випливають рівності $\nu_{b\pm} = \nu_{\pm}$.

(3) Припустимо для визначеності, що $\nu_{b+} \geq \nu_{b-}$. З (3.63) випливає, що $\mathcal{D}_{b+}$ та $\mathcal{D}_{b-}$ є скінченновимірними гільбертовими просторами зі скалярними добутками $(y_1,y_2)_+ = -i[y_1,y_2]_b,\ y_1,y_2 \in \mathcal{D}_{b+}$ і $(z_1,z_2)_- = i[z_1,z_2]_b,\ z_1,z_2 \in \mathcal{D}_{b-}$ відповідно. Нехай $\mathcal{H}_b'$ – підпостір в $\mathcal{D}_{b+}$ з $\dim \mathcal{H}_b' = \nu_{b-} (= \dim \mathcal{D}_{b-})$ і $\widehat{\mathcal{H}}_b' = \mathcal{D}_{b+} \ominus \mathcal{H}_b'$. Тоді розклад (3.62) можна зобразити у вигляді

$$\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} = \operatorname{dom}\mathcal{D}_{0b} \dotplus (\mathcal{H}_b' \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b') \dotplus \mathcal{D}_{b-}. \tag{3.65}$$

Припустимо, що $\mathcal{H}_b$ і $\widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори з $\dim \mathcal{H}_b = \nu_{b-}$, $\dim \widehat{\mathcal{H}}_b = \nu_{b+} - \nu_{b-}$. Крім того, нехай U – унітарний оператор з $\mathcal{H}_b'$ на $\mathcal{H}_b$, $\widehat{U}$ – унітарний опретаор з $\widehat{\mathcal{H}}_b'$ на $\widehat{\mathcal{H}}_b$, V – унітарний опреатор з $\mathcal{D}_{b-}$ на $\mathcal{H}_b'$ і

$$\widehat{\Gamma}_b = \widehat{U}\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{H}}_b'}, \qquad \Gamma_{0b} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}U(\mathcal{P}_{\mathcal{H}_b'} + V\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{b-}}), \qquad \Gamma_{1b} = -\tfrac{i}{\sqrt{2}}U(\mathcal{P}_{\mathcal{H}_b'} - V\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{b-}}), \tag{3.66}$$

де $\mathcal{P}_{\widehat{\mathcal{H}}_b'}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_b'}$ і $\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{b-}}$ – косі проектори в $\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ на $\widehat{\mathcal{H}}_b'$, $\mathcal{H}_b'$ і $\mathcal{D}_{b-}$, що відповідають розкладу (3.65). Безпосередня перевірка з урахуванням (3.63) та (3.65) показує, що відображення Γ_b, задане (3.66) і другою рівністю в (3.58), є сюр'єктивним і задовільняє (3.60). Аналогічно існування оператора Γ_b доводиться у випадку $\nu_{b+} < \nu_{b-}$. ☐

Означення 3.20. Нехай $\mathcal{H}_a, \widehat{\mathcal{H}}_a$ та $\mathcal{H}_b, \widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори. Сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\mathbb{H}_a$ та $\mathbb{H}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори вигляду

$$\mathbb{H}_a := \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b := \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.67}$$

та $\Gamma_a,\ \Gamma_b$ – лінійні оператори (3.58), називається граничним комплексом для симетричної системи (3.5), якщо оператори Γ_a та Γ_b сюр'єктивні і справедливі тотожності (3.59), (3.60).

Згідно з лемою 3.19 граничний комлекс $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ існує для кожної симетричної системи; при цьому вимірність просторів $\mathcal{H}_a, \widehat{\mathcal{H}}_a$ та $\mathcal{H}_b, \widehat{\mathcal{H}}_b$ визначається рівностями (3.56), (3.57).

З кожним граничним комплексом $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ пов'язані сігнатурні оператори

$$J_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{\mathcal{H}_a} \\ 0 & i\delta_a I_{\widehat{\mathcal{H}}_a} & 0 \\ I_{\mathcal{H}_a} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a} \to \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a} \tag{3.68}$$

$$J_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{\mathcal{H}_b} \\ 0 & i\delta_b I_{\widehat{\mathcal{H}}_b} & 0 \\ I_{\mathcal{H}_b} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b} \to \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b}. \tag{3.69}$$

За допомоги цих операторів тотожності (3.59), (3.60) можна зобразити у вигляді

$$[y,z]_a = (J_a \Gamma_a y, \Gamma_a z)_{\mathbb{H}_a}, \qquad [y,z]_b = (J_b \Gamma_b y, \Gamma_b z)_{\mathbb{H}_b}, \quad y,z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.70}$$

Лема 3.21. *Нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс для визначеної системи* (3.5) *і* $\mathcal{D}_{0a}$ *та* $\mathcal{D}_{0b}$ *– лінійні многовиди* (3.47), (3.48). *Тоді*

$$\ker \Gamma_a = \mathcal{D}_{0a}, \qquad \ker \Gamma_b = \mathcal{D}_{0b} \tag{3.71}$$

$$\Gamma_a \mathcal{D}_{0b} = \mathbb{H}_a, \qquad \Gamma_b \mathcal{D}_{0a} = \mathbb{H}_b \tag{3.72}$$

Доведення. Перша (друга) рівність в (3.71) випливає з першої (відп. другої) рівності в (3.70) і сюр'єктивності оператора Γ_a (відп. Γ_b). Далі, припустимо, що $h_a \in \mathbb{H}_a$. Тоді внаслідок сюр'єктивності оператора Γ_a існіує функція $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, така що $\Gamma_a y = h_a$. Оскільки система є визначеною, то згідно з [82, 55] існує відрізок $[c_1, c_2]$, на якому система є визначеною. Нехай $\mathcal{T}'_{max}$ – максимальне відношення в $\mathcal{L}^2_\Delta([c_1, c_2])$, породжене звуженням системи на $[c_1, c_2]$. Згідно з наслідком 3.17 існує функція $\overline{y} \in \operatorname{dom} \mathcal{T}'_{max}$, така що $\overline{y}(c_1) = y(c_1)$ та $\overline{y}(c_2) = 0$. Нехай $y_1, y_2 \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ – функції, визначені рівностями

$$y_1(t) = \begin{cases} y(t), \;\; t \in (a, c_1] \\ \overline{y}(t), \;\; t \in [c_1, c_2] \\ 0, \;\; t \in [c_2, b) \end{cases}$$

та $y_2(t) = y(t) - y_1(t)$, $t \in \mathcal{I}$. Очевидно, що $y_1 \in \mathcal{D}_{0b}$, $y_2 \in \mathcal{D}_{0a}$ і $y = y_1 + y_2$. Тому внаслідок першої рівності в (3.71) $\Gamma_a y_2 = 0$ і, отже, $\Gamma_a y_1 = \Gamma_a y = h_a$. Таким чином, доведено першу рівність в (3.72). Друга рівність в (3.72) доводиться аналогічно. □

Зауваження 3.22. Якщо має місце один з випадків $\nu_{a+} = \nu_{a-}$ або $\nu_{b+} = \nu_{b-}$ і $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс, то внаслідок (3.56) та (3.57) відповідно для кожного з цих випадків справедливі рівності

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a, \quad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.73}$$

$$\dim \mathcal{H}_a = \nu_{a+} (= \nu_{a-}), \qquad \dim \mathcal{H}_b = \nu_{b+} (= \nu_{b-}) \tag{3.74}$$

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a \tag{3.75}$$

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b. \tag{3.76}$$

Крім того, відповідні тотожності (3.59), (3.60) приймають вигляд

$$[y,z]_a = (\Gamma_{0a}y, \Gamma_{1a}z) - (\Gamma_{1a}y, \Gamma_{0a}z), \quad [y,z]_b = (\Gamma_{0b}y, \Gamma_{1b}z) - (\Gamma_{1b}y, \Gamma_{0b}z), \quad y,z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.77}$$

Зауваження 3.23. Аналогічно [99, твердження 3.10] неважко довести наступне твердження, яке дає можливу конструкцію граничного коплекса:

Якщо $\nu_a = \min\{\nu_{a+}, \nu_{a-}\}$, $\widehat{\nu}_a := |\nu_{a+} - \nu_{a-}|$ і $\nu_b := \min\{\nu_{b+}, \nu_{b-}\}$, $\widehat{\nu}_b := |\nu_{b+} - \nu_{b-}|$, то існують системи функцій $\{\psi_{ja}\}_1^{\nu_a}$, $\{\varphi_{ja}\}_1^{\widehat{\nu}_a}$, $\{\theta_{ja}\}_1^{\nu_a}$ та $\{\psi_{jb}\}_1^{\nu_b}$, $\{\varphi_{jb}\}_1^{\widehat{\nu}_b}$, $\{\theta_{jb}\}_1^{\nu_b}$ в $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, такі що простори

$$\mathbb{H}_a = \mathbb{C}^{\nu_a} \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}_a} \oplus \mathbb{C}^{\nu_a}, \qquad \mathbb{H}_b = \mathbb{C}^{\nu_b} \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}_b} \oplus \mathbb{C}^{\nu_b}$$

та оператори

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a},\, \widehat{\Gamma}_a,\, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathbb{C}^{\nu_a} \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}_a} \oplus \mathbb{C}^{\nu_a}$$
$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b},\, \widehat{\Gamma}_b,\, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathbb{C}^{\nu_b} \oplus \mathbb{C}^{\widehat{\nu}_b} \oplus \mathbb{C}^{\nu_b},$$

задані рівностями

$$\Gamma_{0a}y = \{[y, \psi_{ja}]_a\}_1^{\nu_a}, \quad \widehat{\Gamma}_b y = \{[y, \varphi_{ja}]_a\}_1^{\widehat{\nu}_a}, \quad \Gamma_{1a}y = \{[y, \theta_{ja}]_a\}_1^{\nu_a}, \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$$
$$\Gamma_{0b}y = \{[y, \psi_{jb}]_b\}_1^{\nu_b}, \quad \widehat{\Gamma}_b y = \{[y, \varphi_{jb}]_b\}_1^{\widehat{\nu}_b}, \quad \Gamma_{1b}y = \{[y, \theta_{jb}]_b\}_1^{\nu_b}, \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$$

утворюють граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ для системи (3.5). Це твердження показує, що у випадку сингулярної кінцевої точки a (відп. b) вектор $\Gamma_a y$ (відп. $\Gamma_b y$) можна розглядати як сингулярне граничні значення функції $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ в точці a (відп. b) в сенсі [14, Гл. 13.2].

3.4.2. Граничні трійки для визначених симетричних систем

Нехай $\nu_{a\pm}$ та $\nu_{b\pm}$ – індекси інерції білінійних форм $[\cdot,\cdot]_a$ та $[\cdot,\cdot]_b$ відповідно. Розглянемо наступні три випадки:

Випадок 1. $\nu_{b+} - \nu_{b-} \geq \nu_{a+} - \nu_{a-} \geq 0$

Випадок 2. $\nu_{b+} - \nu_{b-} \geq 0 \geq \nu_{a+} - \nu_{a-}$

Випадок 3. $0 \geq \nu_{b+} - \nu_{b-} \geq \nu_{a+} - \nu_{a-}$.

Нехай $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (3.67), (3.58) для системи (3.5). Тоді внаслідок (3.56), (3.57) $\dim \widehat{\mathcal{H}}_a \leq \dim \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку 1 і $\dim \widehat{\mathcal{H}}_a \geq \dim \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку 3. Тому надалі без обмеження загальності вважаємо, що $\widehat{\mathcal{H}}_a \subset \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку 1 і $\widehat{\mathcal{H}}_b \subset \widehat{\mathcal{H}}_a$ у випадку 3.

У *випадку 1* нехай $\mathcal{H}_{b\perp} := \widehat{\mathcal{H}}_b \ominus \widehat{\mathcal{H}}_a$, так що $\widehat{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a$. Тоді

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a}_{\widehat{\mathcal{H}}_b} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.78}$$

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \widehat{\Gamma}_a, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a \tag{3.79}$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \underbrace{\Gamma_{b\perp}, \widehat{\Gamma}'_b}_{\widehat{\Gamma}_b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a}_{\widehat{\mathcal{H}}_b} \oplus \mathcal{H}_b, \tag{3.80}$$

де $\Gamma_{b\perp} = P_{\widehat{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_{b\perp}} \widehat{\Gamma}_b$, $\widehat{\Gamma}'_b = P_{\widehat{\mathcal{H}}_b, \widehat{\mathcal{H}}_a} \widehat{\Gamma}_b$. Покладемо

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp}, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.81}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b) y \oplus \Gamma_{0b} y \oplus \Gamma_{b\perp} y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp}) \tag{3.82}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}'_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.83}$$

У *випадку 2* покладемо

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.84}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widehat{\Gamma}_b y \oplus \Gamma_{0b} y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.85}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.86}$$

У *випадку 3* нехай $\mathcal{H}_{a\perp} := \widehat{\mathcal{H}}_a \ominus \widehat{\mathcal{H}}_b$, так що $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp}$. Тоді

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \underbrace{\widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp}}_{\widehat{\mathcal{H}}_a} \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.87}$$

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \underbrace{\widehat{\Gamma}'_a, \Gamma_{a\perp}}_{\widehat{\Gamma}_a}, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_a \oplus \underbrace{\widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp}}_{\widehat{\mathcal{H}}_a} \oplus \mathcal{H}_a \tag{3.88}$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \tag{3.89}$$

де $\widehat{\Gamma}'_a = P_{\widehat{\mathcal{H}}_a, \widehat{\mathcal{H}}_b} \widehat{\Gamma}_a$, $\Gamma_{a\perp} = P_{\widehat{\mathcal{H}}_a, \mathcal{H}_{a\perp}} \widehat{\Gamma}_a$. Покладемо

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp} \oplus \mathcal{H}_b, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.90}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus (-i(\widehat{\Gamma}'_a - \widehat{\Gamma}_b) y) \oplus (-i\Gamma_{a\perp}) y \oplus \Gamma_{0b} y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp} \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.91}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}'_a + \widehat{\Gamma}_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.92}$$

Відзначимо, що в усіх випадках 1–3 $\mathcal{H}_0$ – скінченновимірний гільбертів простір, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$ і Γ'_j – лінійний оператор з $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ в $\mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$. Крім того, безпосередній підрахунок з огляду на (3.56), (3.57) показує, що в усіх трьох випадках

$$\dim \mathcal{H}_0 = \nu_{a-} + \nu_{b+}, \qquad \dim \mathcal{H}_1 = \nu_{a+} + \nu_{b-}. \tag{3.93}$$

Нехай $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гілбертів простір і $\widetilde{\tau}(\lambda) = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\}$ – пара голоморфних оператор-функцій $C_a(\lambda) (\in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}])$ та $C_b(\lambda) (\in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}])$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Кожній такій парі поставимо у відповідність голоморфну операторну пару $\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$, $C_j(\lambda) \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}]$, $j \in \{0, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, побудовану наступним чином.

Нехай блочними зображеннями операторів $C_a(\lambda)$ та $C_b(\lambda)$ є

$$C_a(\lambda) = (C_{a0}(\lambda),\, \widehat{C}_a(\lambda),\, C_{a1}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a \to \mathcal{K} \tag{3.94}$$

$$C_b(\lambda) = (C_{b0}(\lambda), \widehat{C}_b(\lambda),\, C_{b1}(\lambda)) : \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K} \tag{3.95}$$

У випадку 1 справедливим є розклад $\mathbb{H}_b$ у вигляді (3.78). Тому (3.95) можна зобразити як

$$C_b(\lambda) = (C_{b0}(\lambda), C_{b\perp}(\lambda),\, \widehat{C}'_b(\lambda),\, C_{b1}(\lambda)) : \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}. \tag{3.96}$$

Покладемо

$$C_0(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), -\tfrac{i}{2}(\widehat{C}_a(\lambda) - \widehat{C}'_b(\lambda)), C_{b0}(\lambda), C_{b\perp}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp} \to \mathcal{K} \tag{3.97}$$

$$C_1(\lambda) = (C_{a0}(\lambda), \widehat{C}_a(\lambda) + \widehat{C}'_b(\lambda), -C_{b1}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}. \tag{3.98}$$

У випадку 2 покладемо

$$C_0(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), i\widehat{C}_a(\lambda), \widehat{C}_b(\lambda), C_{b0}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K} \tag{3.99}$$

$$C_1(\lambda) = (C_{a0}(\lambda), -C_{b1}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}. \tag{3.100}$$

У випадку 3 справедливим є розклад $\mathbb{H}_a$ у вигляді (3.87). Тому (3.94) можна зобразити як

$$C_a(\lambda) = (C_{a0}(\lambda), \widehat{C}'_a(\lambda), C_{a\perp}(\lambda),\; C_{a1}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp} \oplus \mathcal{H}_a \to \mathcal{K}.$$

Покладемо

$$C_0(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), \tfrac{i}{2}(\widehat{C}'_a(\lambda) - \widehat{C}_b(\lambda)), iC_{a\perp}(\lambda),\, C_{b0}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_{a\perp} \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K} \tag{3.101}$$

$$C_1(\lambda) = (C_{a0}(\lambda), \widehat{C}'_a(\lambda) + \widehat{C}_b(\lambda), -C_{b1}(\lambda)) : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}. \tag{3.102}$$

Лема 3.24. *Нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (3.67), (3.58) *для системи* (3.5) *і* J_a, J_b *– оператори* (3.68), (3.69). *Тоді рівності* (3.97) *–* (3.102) *задають бієктивну відповідність між допустимими голоморфними операторними парами* $\widetilde{\tau}(\lambda) = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\}$ *і допустимими голоморфними операторними парами* $\tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$. *Крім того, для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *справедливі рівності*

$$C_a(\lambda)\Gamma_a + C_b(\lambda)\Gamma_b = C_0(\lambda)\Gamma'_0 + C_1(\lambda)\Gamma'_1 \tag{3.103}$$

$$2\mathrm{Im}(C_1(\lambda)C^*_{01}(\lambda)) - C_{02}(\lambda)C^*_{02}(\lambda) = -i(C_a(\lambda)J_aC^*_a(\lambda) - C_b(\lambda)J_bC^*_b(\lambda)), \tag{3.104}$$

де $C_{01}(\lambda) = C_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_1$ *та* $C_{02}(\lambda) := C_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_2$ *(*$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$*).*

Доведення. Доведемо лему лише для випадку 1 (у випадках 2 та 3 доведення аналогічне). Очевидно, що $\mathrm{ran}\,(C_0(\lambda), C_1(\lambda)) = \mathrm{ran}\,(C_a(\lambda), C_b(\lambda))$; тому пара $\widetilde{\tau}(\lambda)$ є допустимою тоді й тільки тоді, коли такою ж є пара $\tau(\lambda)$. Далі, з (3.97) випливає, що

$$C_{01}(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), -\tfrac{i}{2}(\widehat{C}_a(\lambda) - \widehat{C}'_b(\lambda)), C_{b0}(\lambda)), \quad C_{02}(\lambda) = C_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_{b\perp} = C_{b\perp}(\lambda), \tag{3.105}$$

і безпосередній підрахунок дає рівності (3.103), (3.104). □

Зауваження 3.25. Припустимо, що жоден з випадків 1-3 не має місця для системи (3.5). Розглянемо протилежну систему

$$-Jy' + B(t)y = \lambda\Delta(t)y.$$

Легко бачити, що для цієї системи вже має місце один з випадків 1-3. Таким чином, кожна система (3.5) або задовільняє одному з випадків 1-3, або зводиться до системи з такою властивостю. Тому надалі без обмеження загальності розглядаються лише системи (3.5), для яких має місце один з випадків 1-3.

Наступне твердження є добре відомим [55, 111, 92].

Твердження 3.26. *Якщо ситема* (3.5) *є визначеною, то для кожної пари* $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}$ *існує єдина функція* $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, *така що* $\pi_\Delta y = \widetilde{y}$ *і* $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}$ *для кожного* $f \in \widetilde{f}$.

Надалі у випадку визначеної системи з кожною парою $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}$ асоціюється (єдина) функція $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ з твердження 3.26.

Теорема 3.27. *Припустимо, що* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (3.67), (3.58) *для визначеної системи* (3.5) *і має місце один з випадків 1 – 3. Нехай* $\mathcal{H}_j$ *– скінченновимірні гільбертові простори і* $\Gamma'_j : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$, *– лінійні відображення* (3.81)–(3.83) *у випадку 1,* (3.84)–(3.86) *у випадку 2 та* (3.90)–(3.92) *у випадку 3. Тоді оператори* $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0, 1\}$, *задані рівностями*

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_0 y, \qquad \Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_1 y, \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} \tag{3.106}$$

утворюють граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* T_{max}.

Доведення. Безпосередній підрахунок з огляду на тотожності (3.59), (3.60) показує, що в усіх випадках 1-3

$$[y, z]_b - [y, z]_a = (\Gamma'_1 y, \Gamma'_0 z) - (\Gamma'_0 y, \Gamma'_1 z) + i(P_2\Gamma'_0 y, P_2\Gamma'_0 z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.107}$$

Тому в силу тотожності Лагранжа (3.22) оператори (3.106) задовільняють тотожності (2.33) для T_{max}. Далі, нехай

$$\widetilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathbb{H}_a \oplus \mathbb{H}_b, \qquad \Gamma' = \begin{pmatrix} \Gamma'_0 \\ \Gamma'_1 \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1.$$

Оскільки внаслідок (3.71) та (3.72) $\widetilde{\Gamma}\mathcal{D}_{0a} = \{0\} \oplus \mathbb{H}_b$ і $\widetilde{\Gamma}\mathcal{D}_{0b} = \mathbb{H}_a \oplus \{0\}$, то $\widetilde{\Gamma}\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} = \mathbb{H}_a \oplus \mathbb{H}_b$. Тому в усіх випадках 1-3 $\Gamma'\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ і внаслідок (3.106) оператор $(\Gamma_0, \Gamma_1)^\top$ є сюр'єктивним. □

Твердження 3.28. *Якщо система* (3.5) *є визначеною, то її індекси дефекту можна обчислити за формулами*

$$N_+ (= n_+(T_{min})) = \nu_{a-} + \nu_{b+}, \qquad N_- (= n_-(T_{min})) = \nu_{a+} + \nu_{b-}, \tag{3.108}$$

де $\nu_{a\pm}$ *та* $\nu_{b\pm}$ *– індекси інерції білінійних форм* $[\cdot, \cdot]_a$ *та* $[\cdot, \cdot]_b$ *відповідно.*

Доведення. Потрібне твердження випливає з (3.52),(3.93) та рівності (2.40) для граничної трійки $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, побудованої в теоремі 3.27. □

Зауваження 3.29. З (3.108) випливає, що для визначеної системи $N_+ \geq N_-$ тоді й тільки тоді, коли має місце один з випадків 1-3.

Зауваження 3.30. Рівності (3.108) іншими методами отримані в роботі [55]. Відзначимо, що в цій роботі числа $\nu_{a\pm}$ та $\nu_{b\pm}$ визначені в менш прозорий спосіб у порівнянні з твердженням 3.28.

У випадку рівних індексів дефекту відношення T_{min} наведена в теоремі 3.27 конструкція граничної трійки для T_{max} істотно спрощується. Саме, справедлива наступна

Теорема 3.31. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною й* $N_+ = N_-(\Leftrightarrow n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}))$. *Тоді:*

(1) *Справедлива рівність*

$$\delta_a = \delta_b =: \widetilde{\delta}, \tag{3.109}$$

де δ_a *та* δ_b *визначені в* (3.61).

(2) *Існує граничний комплекс* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, *такий що*

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.110}$$

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a}, \quad \Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b}. \tag{3.111}$$

(3) *Якщо* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (3.110), (3.111), *то гільбертів простір* $\mathcal{H}$ *і оператори* $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H},\ j \in \{0, 1\}$, *задані рівностями*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.112}$$

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = (-\Gamma_{1a}y) \oplus i\widetilde{\delta}(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)y \oplus \Gamma_{0b}y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.113}$$

$$\Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma_{0a}y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b)y \oplus (-\Gamma_{1b}y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b), \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}, \tag{3.114}$$

утворюють звичайну граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* T_{max}.

Доведення. З (3.108) випливеє, що $N_+ = N_-$ тоді й тільки тоді, коли

$$\nu_{b+} - \nu_{b-} = \nu_{a+} - \nu_{a-} =: \widetilde{\nu}. \tag{3.115}$$

Тому справедливим є твердження (1). Твердження (2) є наслідком (3.115) та леми 3.19.

(3) Нехай $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (3.110), (3.111). Тоді за умови $\widetilde{\nu} \geq 0$ має місце випадок 1, а за умови $\widetilde{\nu} < 0$ – випадок 3. В обох цих випадках $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{\mathcal{H}}_b = \widehat{\mathcal{H}}$ і, отже, рівності (3.81)–(3.83) у випадку 1 та (3.90)–(3.92) у випадку 3 можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{H} (= \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.116}$$

$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a}y) \oplus i\widetilde{\delta}(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)y \oplus \Gamma_{0b}y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.117}$$

$$\Gamma_1' y = \Gamma_{0a}y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b)y \oplus (-\Gamma_{1b}y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.118}$$

Звідси та з теореми 3.27 випливає потрібне твердження. □

3.4.3. Граничні пари для систем з регулярною кінцевою точкою

Згідно з (3.2) кожна функція $y(\cdot) \in AC(\mathcal{I};\mathbb{H})$ допускає зображення

$$y(t) = y_0(t) \oplus \widehat{y}(t) \oplus y_1(t)(\in H \oplus \widehat{H} \oplus H), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{3.119}$$

Лема 3.32. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи* (3.5). *Нехай*

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} u_7 & u_8 & u_9 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{3.120}$$

– оператор в $\mathbb{H}$, що задовільняє рівності $\widetilde{U}^* J \widetilde{U} = J$ (це означає, що $\widetilde{U}$ є J-унітарним оператором). Крім того, нехай $\Gamma_{ja} : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to H$, $j \in \{0,1\}$, і $\widehat{\Gamma}_a : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \widehat{H}$ – оператори, задані рівностями

$$\Gamma_{0a} y = u_7 y_0(a) + u_8 \widehat{y}(a) + u_9 y_1(a), \quad y \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \tag{3.121}$$

$$\widehat{\Gamma}_a y = u_1 y_0(a) + u_2 \widehat{y}(a) + u_3 y_1(a), \quad \Gamma_{1a} y = u_4 y_0(a) + u_5 \widehat{y}(a) + u_6 y_1(a). \tag{3.122}$$

Покладемо також

$$\Gamma_a := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{3.123}$$

Тоді: (1) оператор Γ_a задовільняє тотожності

$$(Jy(a), z(a)) = i\delta(\widehat{\Gamma}_a y, \widehat{\Gamma}_a z) - (\Gamma_{1a} y, \Gamma_{0a} z) + (\Gamma_{0a} y, \Gamma_{1a} z), \quad y, z \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \tag{3.124}$$

(2) у випадку визначеної системи $\Gamma_a \mathcal{D}_{0b} = \mathbb{H}$ і, отже, оператор Γ_a сюр'єктивний.

Доведення. Твердження (1) є наслідком очевидної рівності

$$\Gamma_a y = \widetilde{U} y(a), \quad y \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \tag{3.125}$$

і J-унітарності оператора $\widetilde{U}$. Твердження (2) випливає з (3.125) і наслідку 3.17. □

Нехай кінцева точка a є регулярною для системи (3.5). Тоді згідно з (3.4) та леми 3.19, (2) випадки 1-3 еквівалентні відповідно наступним трьом випадкам:

Випадок a1. $\delta = 1$, $\nu_{b+} - \nu_{b-} \geq \widehat{\nu}$.

Випадок a2. $\delta = -1$, $\nu_{b-} - \nu_{b+} \leq 0$.

Випадок a3. $\delta = -1$, $0 \leq \nu_{b-} - \nu_{b+} \leq \widehat{\nu}$.

Нехай виконані наступні припущення:

(П1) $\widetilde{U} \in [\mathbb{H}]$ – J-унітарний оператор (3.120) і Γ_a – оператор (3.123), заданий рівностями (3.121), (3.122).

(П2) $\mathcal{H}_b$, $\widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори, $\mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b$ і

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b}, \tag{3.126}$$

– сюр'єктивний оператор, що задовільняє тотожності (3.60).

Оскільки $\dim \widehat{H} \le \dim \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку a1 і $\dim \widehat{H} \ge \dim \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку a3, то надалі без обмеження загальності вважаємо, що $\widehat{H} \subset \widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку a1 і $\widehat{\mathcal{H}}_b \subset \widehat{H}$ у випадку a3.

У *випадку a1* нехай $\mathcal{H}_{b\perp} := \widehat{\mathcal{H}}_b \ominus \widehat{H}$, так що $\widehat{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{H}$. Тоді

$$\mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{H}}_{\widehat{\mathcal{H}}_b} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.127}$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \underbrace{\Gamma_{b\perp}, \widehat{\Gamma}'_b}_{\widehat{\Gamma}_b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \underbrace{\mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{H}}_{\widehat{\mathcal{H}}_b} \oplus \mathcal{H}_b. \tag{3.128}$$

Нехай $\widetilde{\mathcal{H}}_b \supset \mathcal{H}_b$ – гільбертів простір і $\widetilde{\Gamma}_{0b} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b$ – оператор, задані рівностями

$$\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{b\perp})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp}. \tag{3.129}$$

Тоді рівності (3.127) та (3.128) можна зобразити як

$$\mathbb{H}_b = \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.130}$$

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \widehat{\Gamma}'_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b. \tag{3.131}$$

Означення 3.33. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій Γ_b – оператор (3.131), називається b-граничним комплексом типу 1.

Очевидною є наступна лема, що містить назележне від припущення (П2) означення b-граничного комплексу типу 1.

Лема 3.34. *Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимиірний гільбертів простір, $\mathcal{H}_b$ – підпростір в $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ і Γ_b – оператор* (3.131), *є b-граничним комплексом типу 1 тоді й тільки тоді, коли оператор Γ_b сюр'єктивний і виконується тотожність*

$$[y,z]_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}y, \Gamma_{1b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} - (\Gamma_{1b}y, \widetilde{\Gamma}_{0b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} + i(P_{\mathcal{H}_{b\perp}}\widetilde{\Gamma}_{0b}y, P_{\mathcal{H}_{b\perp}}\widetilde{\Gamma}_{0b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} + i(\widehat{\Gamma}'_b y, \widehat{\Gamma}'_b z)_{\widehat{H}}, \quad y,z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max},$$

де $P_{\mathcal{H}_{b\perp}}$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ на підпростір $\mathcal{H}_{b\perp} := \widetilde{\mathcal{H}}_b \ominus \mathcal{H}_b$.

Використовуючи (3.123) та (3.130), (3.131), покладемо

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \tag{3.132}$$

$$\mathcal{H}_1 = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.133}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a}y) \oplus i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b)y \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b}y (\in H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \tag{3.134}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a}y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}'_b)y \oplus (-\Gamma_{1b}y) (\in H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.135}$$

Очевидно, що (3.132)–(3.135) можна зобразити у вигляді рівностей (3.81)–(3.83) з $\mathcal{H}_a = H$ та $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{H}$.

У *випадку a2* нехай $\widetilde{\mathcal{H}}_b \supset \mathcal{H}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір і $\widetilde{\Gamma}_{0b} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b$ – лінійний оператор, задані рівностями

$$\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b)^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b. \tag{3.136}$$

Тоді

$$\mathbb{H}_b = \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.137}$$

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma}_{0b} \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b. \tag{3.138}$$

Означення 3.35. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій Γ_b – оператор (3.138), називається b-граничним комплексом типу 2.

Наступна очевидна лема містить незалежне від припущення (П2) означення b-граничного комплексу типу 2.

Лема 3.36. *Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір, $\mathcal{H}_b$ – підпростір в $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ і Γ_b – оператор* (3.138), *є b-граничним комплексом типу 2 тоді й тільки тоді, коли оператор Γ_b сюр'єктивний і виконується тотожність*

$$[y,z]_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}y, \Gamma_{1b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} - (\Gamma_{1b}y, \widetilde{\Gamma}_{0b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} + i(P_{\widehat{\mathcal{H}}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b}y, P_{\widehat{\mathcal{H}}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b}z)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}, \quad y,z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max},$$

де $P_{\widehat{\mathcal{H}}_b}$ – ортопроектор в $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ на підпростір $\widehat{\mathcal{H}}_b := \widetilde{\mathcal{H}}_b \ominus \mathcal{H}_b$.

Використовуючи (3.123) та (3.137), (3.138) покладемо

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b, \quad \mathcal{H}_1 = H \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.139}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a}y) \oplus (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b}y (\in H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \tag{3.140}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a}y \oplus (-\Gamma_{1b}y)(\in H \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.141}$$

Очевидно, що (3.139)–(3.141) можна зобразити у вигляді рівностей (3.84)–(3.86) з $\mathcal{H}_a = H$ і $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{H}$.

Зауваження 3.37. Якщо $\nu_{b+} = \nu_{b-}$, то в формулах (3.136)–(3.138) $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b$ та $\widetilde{\Gamma}_{0b} = \Gamma_{0b}$. Тому у випадку $\nu_{b+} = \nu_{b-}$ b-граничним комплексом типу 2 є сукупність $\{\mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\mathcal{H}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір і Γ_b – сюр'єктивний оператор (3.76), що задовільняє другій тотожності в (3.77).

У *випадку а3* нехай $\widehat{H}_\perp := \widehat{H} \ominus \widehat{\mathcal{H}}_b$, так що $\widehat{H} = \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H}_\perp$. Тоді справедливі рівності (3.87)–(3.89) з $\mathbb{H}_a = \mathbb{H}$, $\mathcal{H}_a = H$, $\widehat{\mathcal{H}}_a = \widehat{H}$ і $\mathcal{H}_{a\perp} = \widehat{H}_\perp$. Аналогічно (3.90)–(3.92) покладемо

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H}_\perp \oplus \mathcal{H}_b, \quad \mathcal{H}_1 = H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.142}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a}y) \oplus (-i(\widehat{\Gamma}'_a - \widehat{\Gamma}_b)y) \oplus (-i\Gamma_{a\perp})y \oplus \Gamma_{0b}y (\in H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H}_\perp \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.143}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a}y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}'_a + \widehat{\Gamma}_b)y \oplus (-\Gamma_{1b}y)(\in H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.144}$$

Легко бачити, що в усіх трьох випадках

$$\dim \mathcal{H}_0 = \nu_- + \nu_{b+}, \qquad \dim \mathcal{H}_1 = \nu_+ + \nu_{b-}. \tag{3.145}$$

В кожному з випадків а1-а3 покладемо $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1)^\top$. Із сюр'єтивності оператора Γ_b і тотожності (3.60) випливає, що $\ker \Gamma_b = \mathcal{D}_{0b}.$. Крім того, через (3.125) маємо $\ker \Gamma_a = \{y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} : y(a) = 0\}$. Тому в усіх випадках а1-а3

$$\ker \Gamma' = \ker \Gamma_a \cap \ker \Gamma_b = \operatorname{dom} \mathcal{T}_a. \tag{3.146}$$

Зауваження 3.38. Якщо додатково до припущень (П1), (П2) система є визначеною, то відображення Γ_a є сюр'єктивним і сукупність $\{\mathbb{H}, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ є граничним комплексом. Тому для визначеної системи простори $\mathcal{H}_j$ та оператори Γ'_j в цьому пункті є частковими випадками просторів $\mathcal{H}_j$ та операторів Γ'_j з пункту 3.4.2.. У випадку ж невизначеної системи таке твердження, взагалі кажучі, не є вірним. Ці міркування обгрунтовують необхідність розгляду випадків a1-a3 замість випадків 1-3 для систем з регулярною точкою a.

Зауваження 3.39. Ті ж самі міркування, що і в зауваженні 3.25, показують, що серед систем (3.5) з регулярною точкою a можна без обмеження загальності розглядати лише системи, для яких має місце один з випадків a1-a3.

Теорема 3.40. *Нехай для системи* (3.5) *з регулярною кінцевою точкою a виконані припущення (П1), (П2) і має місце один з випадків a1-a3. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_j$ *– скінченновимірні гільбертові простори і* $\Gamma'_j : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_j, \ j \in \{0,1\}$, *– оператори* (3.132)*–*(3.135) *у випадку a1,* (3.139)*–*(3.141) *у випадку a2 та* (3.142)*–*(3.144) *у випадку a3. Тоді лінійне відношення* $\Gamma : (L^2_\Delta(\mathcal{I}))^2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, *задане рівністю*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma'_0 y \\ \Gamma'_1 y \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{3.147}$$

утворює граничну пару $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *для* T_{max}. *Крім того, справедливі рівності*

$$\dim \mathcal{H}_0 = N_+, \qquad \dim \mathcal{H}_1 = N_-, \tag{3.148}$$

де $N_\pm$ *– формальні індекси дефекту системи* (3.5).

Доведення. Покажемо, що відношення (3.147) задовільняє припущенням наслідку 2.64 для $A := T_{min}$. З (3.147) та (3.146) випливає, що $\ker \Gamma = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_a = T_{min}$. Крім того, внаслідок (3.147) маємо $\operatorname{dom} \Gamma = \widetilde{\pi}_\Delta \mathcal{T}_{max} = T_{max}$.

Далі, безпосередній підрахунок з огляду на (3.124) та (3.60) показує, що в усіх випадках a1-a3 має місце (3.107). Звідси та з тотожності Лагранжа (3.22) випливає тотожність (2.158) для Γ.

Тепер залишається довести рівність (2.186). З (3.62) та (3.64) випливає, що

$$\nu_{b+} + \nu_{b-} = \dim(\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} / \mathcal{D}_{0b}) = \dim(\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} / \operatorname{dom} \mathcal{T}_a) - \dim(\mathcal{D}_{0b} / \operatorname{dom} \mathcal{T}_a).$$

Комбінуючи цю рівність з (3.46) і другою рівністю в (3.49), отримуємо

$$\nu_{b+} + \nu_{b-} = (N_+ + N_- - k_{\mathcal{N}}) - (n - k_{\mathcal{N}}) = N_+ + N_- - n.$$

Звідси та з (3.145) випливає, що

$$\dim(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) = (\nu_+ + \nu_-) + (\nu_{b+} + \nu_{b-}) = n + (N_+ + N_- - n) = N_+ + N_-. \tag{3.149}$$

Далі, з огляду на (3.147) маємо $\operatorname{mul} \Gamma = \{\Gamma' y : \ \{y, f\} \in \ker (\widetilde{\pi}_\Delta \restriction \mathcal{T}_{max})\}$ і (3.33) дає

$$\operatorname{mul} \Gamma = \Gamma' \mathcal{N} = \{\{\Gamma'_0 y, \Gamma'_1 y\} : \ y \in \mathcal{N}\}. \tag{3.150}$$

Оскільки очевидно $\ker(\Gamma' \upharpoonright \mathcal{N}) = \{0\}$, то внаслідок (3.150)

$$n_\Gamma (= \dim(\operatorname{mul}\Gamma)) = \dim \mathcal{N} = k_\mathcal{N}. \tag{3.151}$$

Звідси та з (3.39) випливає, що

$$n_+(T_{min}) + n_-(T_{min}) + 2n_\Gamma = (N_+ - k_\mathcal{N}) + (N_- - k_\mathcal{N}) + 2k_\mathcal{N} = N_+ + N_-. \tag{3.152}$$

Порівнюючи тепер (3.149) з (3.152), приходимо до потрібної рівності

$$\dim(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) = n_+(T_{min}) + n_-(T_{min}) + 2n_\Gamma.$$

Таким чином, згідно з наслідком 2.64 $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ є граничною парою для T_{max}. Крім того, комбінуючи (2.177) з (3.151) та (3.39), отримуємо рівності (3.148). ☐

Означення 3.41. Гранична пара $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$, побудована в теремі 3.40, називається розділеною граничною парою для T_{max}.

Твердження 3.42. *Формальні індекси дефекту симетричної системи* (3.5) *з регулярною кінцевою точкою a можна обчислити за формулою*

$$N_+ = \nu_- + \nu_{b+}, \qquad N_- = \nu_+ + \nu_{b-}, \tag{3.153}$$

де $\nu_\pm$ *– числа* (3.4) *та* ν_{b+}, ν_{b-} *– індекси інерції білінійної форми* $[\cdot,\cdot]_b$.

Доведення. Рівності (3.153) випливають з (3.148) та (3.145). ☐

Наслідок 3.43. *Нехай точка a є регулярною для системи* (3.5)*. Тоді:* (1) *мінімально можливими формальними індексами дефекту такої системи є*

$$N_+ = \nu_-, \qquad N_- = \nu_+; \tag{3.154}$$

(2) *рівність* $[y,z]_b = 0,\ y,z \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$, *має місце тоді й тільки тоді, коли виконується* (3.154).

Зауваження 3.44. З (3.153) та (3.4) випливає, що для системи з регулярною кінцевою точкою a випадки a1 - a3 можна переформулюати в термінах формальних індексів дефекту $N_\pm$. Саме, справедливі такі твердження:

(1) випадок a1 має місце тоді й тільки тоді, коли $\delta = 1$ і $N_+ \geq N_-$;

(2) випадок a2 має місце тоді й тільки тоді, коли $\delta = -1$ і $N_+ - N_- \geq \widehat{\nu}$;

(2) випадок a3 має місце тоді й тільки тоді, коли $\delta = -1$ і $0 \leq N_+ - N_- \leq \widehat{\nu}$.

Таким чином, для системи з регулярною кінцевою точкою a нерівність $N_+ \geq N_-$ виконується тоді й тільки тоді, коли має місце хоча б один з випадків a1 - a3.

Зауваження 3.45. З (3.153) випливають нерівності $\nu_\mp \leq N_\pm \leq n$, доведені аналітичними методами в [1, 82]. Для гамільтонової системи ці нерівності мають вигляд $\nu \leq N_\pm \leq n$.

У випадку $N_+ = N_-$ конструкція розділеної гранчної пари дещо спрощується. Саме, справедливою є наступна

Теорема 3.46. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи* (3.5) *і* $N_+ = N_-$. *Тоді:*

(1) *Існує скінченновимірний гільбертів простір $\mathcal{H}_b$ і сюр'єктивний лінійний оператор*

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \tag{3.155}$$

що задовільняє тотожності

$$[y,z]_b = i\delta(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z) - (\Gamma_{1b} y, \Gamma_{0b} z) + (\Gamma_{0b} y, \Gamma_{1b} z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.156}$$

(2) *Нехай виконане припущення (П1) і, крім того, нехай $\mathcal{H}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір і Γ_b – сюр'єктивний оператор* (3.155), *що задовільняє* (3.156). *Тоді скінченновимірний гільбертів простір*

$$\mathcal{H} = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b$$

та лінійне відношення $\Gamma : (L^2_\Delta(\mathcal{I}))^2 \to \mathcal{H}^2$, визначене рівністю

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\delta(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b) y \oplus \Gamma_{0b} y \\ \Gamma_{0a} y \oplus \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y) \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{3.157}$$

утворюють (розділену) граничну пару $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ для T_{max}.

Доведення. (1) З (3.153) та (3.4) випливає, що

$$\nu_{b+} - \nu_{b-} = \delta \widehat{\nu}. \tag{3.158}$$

Тому $|\nu_{b+} - \nu_{b-}| = \widehat{\nu} = \dim \widehat{H}$, $\delta_b (= \operatorname{sign}(\nu_{b+} - \nu_{b-})) = \delta$ і потрібне твердження випливає з леми 3.19.

(2) З (3.158) випливає, що за умови $\delta = 1$ має місце випадок a1, а за умови $\delta = -1$ – випадок a3. Крім того, внаслідок (3.148) маємо $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$. Тому рівності (3.132) - (3.135) у випадку a1 та (3.142) - (3.144) у випадку a3 можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{H} (= \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1) = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b$$
$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\delta(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b) y \oplus \Gamma_{0b} y$$
$$\Gamma_1' y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y), \quad y \in \dim \mathcal{T}_{max}.$$

Звідси та з теореми 3.40 випливає потрібне твердження. □

Зауваження 3.47. У випадку регулярної системи в (3.155) можна покласти $\mathcal{H}_b = H$ і $\Gamma_b y = \widetilde{U}_b y(b)$, де $\widetilde{U}_b$ – J-унітарний оператор в $\mathbb{H}$.

3.4.4. Випадок гамільтонової системи

Для гамільтонової системи (3.5) з регулярною кінцевою точкою a наведені у попередньому пункті конструкції граничних пар суттєво спрощуються. Саме, у випадку такої системи функцію $y \in AC(\mathcal{I}; \mathbb{H})$ можна записати як

$$y(t) = y_0(t) \oplus y_1(t) (\in H \oplus H), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{3.159}$$

а блочне зображення (3.120) J-унітарного оператора $\widetilde{U}$ і відповідні оператори $\Gamma_{ja} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H$, $j \in \{0, 1\}$, та Γ_a приймають вигляд

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{3.160}$$

$$\Gamma_{0a} y = u_3 y_0(a) + u_4 y_1(a) \tag{3.161}$$

$$\Gamma_{1a} y = u_1 y_0(a) + u_2 y_1(a), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \tag{3.162}$$

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{3.163}$$

Крім того, тотожність (3.124) приймає вигляд

$$(Jy(a), z(a)) = (\Gamma_{0a} y, \Gamma_{1a} z) - (\Gamma_{1a} y, \Gamma_{0a} z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{3.164}$$

Відзначимо також, що для гамільтонової системи з $N_+ \geq N_-$ b-граничний комплекс типу 1 (3.131) перетворюється в b-граничний комплекс типу 2 (3.138).

Означення 3.48. b-граничним комплексом для гамільтонової системи називається b-граничний комплекс $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ типу 2 в сенсі означення 3.35.

Наступна теорема випливає з теореми 3.40.

Теорема 3.49. *Припустимо, що система* (3.5) *є гамільтоновою з регулярною кінцевою точкою* a *і* $N_+ \geq N_-$. *Нехай* $\widetilde{U} \in [\mathbb{H}]$ *–* J*-унітарний оператор* (3.160), Γ_{ja}, $j \in \{0, 1\}$, *– оператори* (3.161), (3.162) *і* $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ *–* b*-граничний комплекс* (3.138). *Тоді лінійне відношення* $\Gamma : (L^2_\Delta(\mathcal{I}))^2 \to (H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \oplus (H \oplus \mathcal{H}_b)$, *задане рівністю*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-\Gamma_{1a} y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y \\ \Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y) \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{3.165}$$

утворює (розділену) граничну пару $\{(H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \oplus (H \oplus \mathcal{H}_b), \Gamma\}$ *для* T_{max}.

3.4.5. Граничні трійки для визначених систем з регулярною кінцевою точкою

Наступні дві теореми є наслідком теорем 3.27, 3.31 та зауваження 3.38.

Теорема 3.50. *Нехай за умов теореми 3.40 система* (3.5) *є визначеною. Тоді оператори* $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, *задані рівностями* (3.106), *утворюють граничну трійку* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *для* T_{max}.

Теорема 3.51. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для визначеної системи* (3.5) *і $N_+ = N_-(\Leftrightarrow n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}))$. Нехай виконане припущення (П1) і, крім того, нехай $\mathcal{H}_b$ – скінченновимірний гілбертів простір і Γ_b – сюр'єктивний оператор* (3.155), *що задовільняє* (3.156). *Тоді гільбертів простір*

$$\mathcal{H} = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.166}$$

і оператори $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H},\ j \in \{0,1\}$, задані рівностями

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = (-\Gamma_{1a}y) \oplus i\delta(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)y \oplus \Gamma_{0b}y(\in H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b) \tag{3.167}$$

$$\Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma_{0a}y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b)y \oplus (-\Gamma_{1b}y)(\in H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b), \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} \tag{3.168}$$

утворюють звичайну граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для T_{max}.

Означення 3.52. Граничні трійки, побудовані в теоремах 3.27, 3.31, 3.50 та 3.51, називаються розділеними граничними трійками для T_{max}.

Для гамільтонової визначеної системи конструкція розділеної граничної трійки істотно спрощується. Саме, наступна теорема випливає з теорем 3.50 та 3.51.

Теорема 3.53. *Нехай за умов теореми 3.49 система* (3.5) *є визначеною. Тоді гілбертові простори $\mathcal{H}_j$ і оператори $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0,1\}$, задані рівностями*

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b, \qquad \mathcal{H}_1 = H \oplus \mathcal{H}_b \tag{3.169}$$

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = (-\Gamma_{1a}y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b}y, \quad \Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma_{0a}y \oplus (-\Gamma_{1b}y), \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}, \tag{3.170}$$

утворюють (розділену) граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для T_{max}. У випадку мінімальних індексів дефекту $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}) = \nu$ ця гранична трійка стає звичайною граничною трійкою $\Pi = \{H, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, де

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = -\Gamma_{1a}y, \quad \Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma_{0a}y, \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}. \tag{3.171}$$

3.5. Індекси дефекту визначених систем

Надалі для проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ та точки $c \in (a,b)$ будемо вживати такі позначення: $\mathcal{I}_l := \langle a, c]$, $\mathcal{I}_r := [c, b\rangle$, $\mathcal{T}_{\min,l}$ і $\mathcal{T}_{\max,l}$ ($T_{\min,l}$ і $T_{\max,l}$) – мінімальне і максимальне відношення в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l)$ (відповідно $L^2_\Delta(\mathcal{I}_l)$), породжене звуженням системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$, $\mathcal{T}_{\min,r}$ і $\mathcal{T}_{\max,r}$ ($T_{\min,r}$ і $T_{\max,r}$) – мінімальне і максимальне відношення в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r)$ (відповідно $L^2_\Delta(\mathcal{I}_r)$), породжене звуженням системи (3.5) на $\mathcal{I}_r$.

Означення 3.54. Точка $c \in (a,b)$ відноситься до класу Def_{I_l} (Def_{I_r}), якщо система, отримана звуженням системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$ (відп. $\mathcal{I}_r$), є визначеною.

Точка $c \in (a,b)$ відноситься до класу Def_I, якщо $c \in Def_{\mathcal{I}_l} \cap Def_{I_r}$, тобто якщо звуження системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$ та $\mathcal{I}_r$ є визначеними системами.

Лема 3.55. *Система* (3.5) *є визначеною тоді й тільки тоді, коли $Def_{\mathcal{I}_l} \neq \emptyset$ та $Def_{\mathcal{I}_r} \neq \emptyset$.*

Доведення. Якщо система є визначеною, то згідно з [82, 55] існує відрізок $[c_1, c_2] \subset (a, b)$, на якому система є визначеною. Тому $c_1 \in Def_{\mathcal{I}_r}$, $c_2 \in Def_{\mathcal{I}_l}$ і, отже, для визначеної системи $Def_{\mathcal{I}_l} \neq \emptyset$ та $Def_{\mathcal{I}_r} \neq \emptyset$. Зворотнє твердження очевидне. □

Лема 3.56. *Нехай $c \in (a, b)$ і $\nu_{a,l+}$ та $\nu_{a,l-}$ ($\nu_{b,r+}$ та $\nu_{b,r-}$) – індекси інерції першої (відп. другої) білінійної форми в* (3.21), *визначеної на* $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l}$ *(відп.* $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}$*). Якщо $c \in Def_{\mathcal{I}_r}$ ($c \in Def_{\mathcal{I}_l}$), то*

$$\nu_{a,l+} = \nu_{a+}, \quad \nu_{a,l-} = \nu_{a-}, \qquad (\text{відп.} \quad \nu_{b,r+} = \nu_{b+}, \quad \nu_{b,r-} = \nu_{b-}) \tag{3.172}$$

Доведення. Припустимо, що $c \in Def_{\mathcal{I}_r}$. Нехай $\mathcal{P}_l : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l}$ – лінійне відображення, задане рівністю $\mathcal{P}_l y = y \restriction \mathcal{I}_l$, $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$. Згідно з наслідком 3.17 для кожного $y_l \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l}$ існує $y_r \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}$, таке що $y_r(c) = y_l(c)$. Покладаючи $y(t) = y_l(t),\ t \in \mathcal{I}_l$, і $y(t) = y_r(t),\ t \in \mathcal{I}_r$, отримуємо функцію $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, таку що $y_l = y \restriction \mathcal{I}_l = \mathcal{P}_l y$. Тому відображення $\mathcal{P}_l$ є сюр'єктивним. Звідси та з очевидної рівності $[\mathcal{P}_l y, \mathcal{P}_l z]_a = [y, z]_a,\ y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, випливають перша та друга рівності в (3.172). Випадок $c \in Def_{\mathcal{I}_l}$ розглядається аналогічно. □

Нехай $c \in (a, b)$ і $N^c_{l\pm}$ та $N^c_{r\pm}$ – формальні індекси дефекту звуження системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$ та $\mathcal{I}_r$ відповідно. Очевидно, що числа $N^c_{l\pm}$ та $N^c_{r\pm}$ ті ж самі для всіх точок $c \in (a, b)$.

Означення 3.57. Числа $N_{l\pm} = N^c_{l\pm}$ та $N_{r\pm} = N^c_{r\pm}$, $c \in (a, b)$, називаються відповідно лівими та правими формальними індексами дефекту системи (3.5).

Твердження 3.58. *Якщо система* (3.5) *є визначеною, то*

$$N_\pm (= n_\pm(T_{min})) = N_{l\pm} + N_{r\pm} - n. \tag{3.173}$$

Доведення. Згідно з лемою 3.55 існують точки $c_1 \in Def_{\mathcal{I}_r}$ та $c_2 \in Def_{\mathcal{I}_l}$. Застосовуючи твердження 3.42 до звужень системи на $\langle a, c_1]$ та $[c_2, b\rangle$, з огдяду на (3.172) отримуємо

$$N_{l\pm} = \nu_{a\mp} + \nu_\pm, \qquad N_{r\pm} = \nu_\mp + \nu_{b\pm}. \tag{3.174}$$

Звідси та з (3.108) випливає (3.173). □

Зауваження 3.59. Припустимо, що $c \in Def_{\mathcal{I}}$ і $n_\pm(T_{\min,l})$ та $n_\pm(T_{\min,r})$ – індекси дефекту відношень $T_{\min,l}$ та $T_{\min,r}$ відповідно. Тоді внаслідок твердження 3.58

$$n_\pm(T_{min})) = n_\pm(T_{\min,l}) + n_\pm(T_{\min,r}) - n. \tag{3.175}$$

Відзначимо, що твердження 3.58 аналітичними методами доведено в [82]; крім того, рівність (3.175) (у випадку $c \in Def_{\mathcal{I}}$) за домомоги теорії розширень симетричних відношень доведено в [92].

Зауваження 3.60. Припустимо, що система (3.5) є визначеною. Тоді внаслідок (3.174) та (3.4) маємо

$$\nu_{a+} - \nu_{a-} = N_{l-} - N_{l+} + \delta\widehat{\nu}, \qquad \nu_{b+} - \nu_{b-} = N_{r+} - N_{r-} + \delta\widehat{\nu}. \tag{3.176}$$

Тому в формулах (3.59), (3.60), (3.68),(3.69) та (3.109) можна покласти

$$\delta_a = \operatorname{sign}(N_{l-} - N_{l+} + \delta\widehat{\nu}), \qquad \delta_b = \operatorname{sign}(N_{r+} - N_{r-} + \delta\widehat{\nu}). \tag{3.177}$$

Крім того, внаслідок (3.176) справедливі еквівалентності

$$\nu_{a+} = \nu_{a-} \iff N_{l+} - N_{l-} = \delta\widehat{\nu}, \qquad \nu_{b+} = \nu_{b-} \iff N_{r-} - N_{r+} = \delta\widehat{\nu}. \tag{3.178}$$

З (3.176) також випливає, що для визначеної системи (3.5) випадки 1 - 3 пункту 3.4.2. можна наступним чином переформулювати в термінах лівих та правих формальних індексів дефекту $N_{l\pm}$ та $N_{r\pm}$:

(1) випадок 1 має місце тоді й тільки тоді, коли

$$N_{r-} - N_{r+} \leq N_{l+} - N_{l-} \leq \delta\widehat{\nu}$$

(2) випадок 2 має місце тоді й тільки тоді, коли

$$N_{r-} - N_{r+} \leq \delta\widehat{\nu} \leq N_{l+} - N_{l-}$$

(3) випадок 3 має місце тоді й тільки тоді, коли

$$\delta\widehat{\nu} \leq N_{r-} - N_{r+} \leq N_{l+} - N_{l-}$$

Якщо, крім того, система є гамільтоновою, то $\widehat{\nu} = 0$ і тому співвідношення (3.177) та (3.178) приймають вигляд

$$\delta_a = \operatorname{sign}(N_{l-} - N_{l+}), \qquad \delta_b = \operatorname{sign}(N_{r+} - N_{r-}) \tag{3.179}$$

$$\nu_{a+} = \nu_{a-} \iff N_{l+} = N_{l-}, \qquad \nu_{b+} = \nu_{b-} \iff N_{r+} = N_{r-}. \tag{3.180}$$

Крім того, для гамільтонової системи випадки 1,2 або 3 пункту 3.4.2. еквівалентні відповідно умовам

$$N_{r-} - N_{r+} \leq N_{l+} - N_{l-} \leq 0, \quad N_{r-} - N_{r+} \leq 0 \leq N_{l+} - N_{l-} \text{ або } 0 \leq N_{r-} - N_{r+} \leq N_{l+} - N_{l-}.$$

3.6. Граничні умови для симетричних систем

Твердження 3.61. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною і* $n_+(T_{min}) \geq n_-(T_{min})$ *(тобто має місце один з випадків 1–3). Нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс для цієї системи,* $\mathcal{H}_j$ *– скінченновимірні гільбертові простори і* $\Gamma_j' : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0,1\}$,*– оператори, побудовані для кожного з випадків 1–3 в п. 3.4.2.. Тоді:*

(1) *Для кожної операторної пари (лінійного відношення)* $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *з операторами* $C_0 \in [\mathcal{H}_0, \mathcal{K}]$ *та* $C_1 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{K}]$ *($\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір) граничні умови*

$$\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : C_0\Gamma_0' y + C_1\Gamma_1' y = 0\}. \tag{3.181}$$

задають власне розширення $\widetilde{T} \in Ext_{T_{min}}$ *і, зворотно, для кожного розширення* $\widetilde{T} \in Ext_{T_{min}}$ *існує єдина операторна пара* $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, *така що має місце* (3.181).

(2) *Розширення* (3.181) *є максимальним дисипативним (акумулятивним) тоді й тільки тоді, коли* $\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *(відп.* $\theta \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$*).*

Якщо, крім того, $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$*, то* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ *і* $\Gamma_0'y$ *та* $\Gamma_1'y$ *мають вигляд* (3.116)-(3.118)*. У цьому випадку* $C_0, C_1 \in [\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ *і розширення* (3.181) *є максимальним дисипативним, максимальним акумулятивним або самоспряженим тоді й тільки тоді, коли операторна пара* $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *є максимальною дисипативною, максимальною акумулятивною або самоспряженою відпоідно.*

Доведення. Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка (3.106) для T_{max}. Застосовуючи до цієї трійки твердження 2.24, (2), отримуємо потрібне твердження. □

В наступному твердженні дається дещо інше зображення граничних умов.

Твердження 3.62. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною і* $n_+(T_{min}) \geq n_-(T_{min})$*. Крім того, нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (3.67), (3.58) *для цієї системи і* J_a, J_b *– оператори* (3.68), (3.69)*. Тоді:*

(1) *Для кожної допустимої операторної пари* $\widetilde{\theta} = \{C_a, C_b\}$ *з операторами*

$$C_a = (C_{a0},\, \widehat{C}_a,\, C_{a1}) : \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a} \to \mathcal{K}, \quad C_b = (C_{b0},\, \widehat{C}_b,\, C_{b1}) : \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b} \to \mathcal{K}, \tag{3.182}$$

де $\mathcal{K}$ *– скінченновимірний гільбертів простір, граничні умови*

$$\begin{aligned}\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} :\ C_a\Gamma_a y + C_b\Gamma_b y = 0\} = \\ = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} :\ C_{a0}\Gamma_{0a}y + \widehat{C}_a\widehat{\Gamma}_a y + C_{a1}\Gamma_{1a}y + C_{b0}\Gamma_{0b}y + \widehat{C}_b\widehat{\Gamma}_b y + C_{b1}\Gamma_{1b}y = 0\}\end{aligned} \tag{3.183}$$

задають власне розширення $\widetilde{T} \in Ext_{T_{min}}$ *і, зворотно, для кожного розширення* $\widetilde{T} \in Ext_{T_{min}}$ *існує єдина (з точністю до еквівалентності) допустима операторна пара* $\widetilde{\theta} = \{C_a, C_b\}$ *з операторами* (3.182)*, така що має місце* (3.183)*.*

(2) *Розширення* (3.183) *є максимальним дисипативним (акумулятивним) тоді й тільки тоді, коли* $\dim \mathcal{K} = n_-(T_{min})$ *(відп.* $\dim \mathcal{K} = n_+(T_{min})$*) і*

$$i(C_aJ_aC_a^* - C_bJ_bC_b^*) \leq 0 \quad (\textit{відп.} \quad i(C_aJ_aC_a^* - C_bJ_bC_b^*) \geq 0) \tag{3.184}$$

Крім того, якщо $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}) =: d$*, то розширення* (3.183) *є самоспряженим тоді й тільки тоді, коли* $\dim \mathcal{K} = d$ *і*

$$C_aJ_aC_a^* = C_bJ_bC_b^*. \tag{3.185}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ – простори (3.81), (3.84) або (3.90) залежно від випадку a1–a3. Тоді згідно з лемою 3.24 кожній допустимій парі $\widetilde{\theta} = \{C_a, C_b\}$ відповідає допустима пара $\theta = \{C_0, C_1\}$ операторів $C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}]$ і вірними є рівності (3.103), (3.104) з $C_j(\lambda) \equiv C_j,\ j \in \{0, 1\}$. Крім того, внаслідок рівностей $n_+(T_{min}) = \dim \mathcal{H}_0$ та $n_-(T_{min}) = \dim \mathcal{H}_1$ вірними є еквівалентності

$$\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}_0 \iff \dim \mathcal{K} = n_+(T_{min}), \qquad \dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H}_1 \iff \dim \mathcal{K} = n_-(T_{min}). \tag{3.186}$$

Звідси та з твердження 2.16 випливає наступне твердження:

(T) $\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ ($\theta \in Ac(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$) тоді й тільки тоді, коли $\dim \mathcal{K} = n_-(T_{min})$ (відп. $\dim \mathcal{K} = n_+(T_{min})$) і пара $\widetilde{\theta}$ задовільняє (3.184).

Тепер потрібні твердження (1) та (2) випливають з (3.103) та твердження 3.61. □

Означення 3.63. Граничні умови (3.181) та (3.183) називаються максимальними дисипативними (акумулятивними) або самоспряженими, якщо вони задають розширення $\widetilde{T}$ відповідного класу.

Очевидно, що твердження 3.61 та 3.62 містять опис максимальних дисипативних (акумулятивних) та самоспряжених граничних умов.

Зауваження 3.64. Якщо за умов твердження 3.62 точка a (відп. b) є регулярною, то можна покласти $\mathbb{H}_a = \mathbb{H}$, $\Gamma_a y = y(a)$ (відп. $\mathbb{H}_b = \mathbb{H}$, $\Gamma_b y = y(b)$). У цьому випадку $J_a = J$ (відп. $J_b = J$) і з твердження 3.62 випливає наступне добре відоме твердження [1, 10]: якщо система (3.5) є регулярною та визначеною, то гранична умова $C_a y(a) + C_b y(b) = 0$ з операторами $C_a, C_b \in [\mathbb{H}]$ є самоспряженою тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{ran}(C_a,\ C_b) = \mathbb{H}$ і $C_a J C_a^* = C_b J C_b^*$. Відзначимо також, що у випадку гамільтонової системи з регулярною кінцевою точкою a за умови, що T_{min} є щільно визначеним оператором, аналог твердження 3.62 стосовно самоспряжених граничних умов отримано в [83].

Нехай за умов твердження 3.62 $\mathcal{K}_a$ та $\mathcal{K}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори і

$$N_a = (N_{a0},\ \widehat{N}_a,\ N_{a1}) : \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a} \to \mathcal{K}_a, \quad N_b = (N_{b0},\ \widehat{N}_b,\ N_{b1}) : \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b} \to \mathcal{K}_b \tag{3.187}$$

–сюр'єктивні оператори. Тоді розширення $\widetilde{T} \in Ext_{T_{min}}$ задається розділеними граничним умовами, якщо

$$\begin{aligned}\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} :\ & N_a \Gamma_a y = 0,\ N_b \Gamma_b y = 0\} = \\ = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} :\ & N_{a0}\Gamma_{0a} y + \widehat{N}_a \widehat{\Gamma}_a y + N_{a1}\Gamma_{1a} y = 0,\ N_{b0}\Gamma_{0b} y + \widehat{N}_b \widehat{\Gamma}_b y + N_{b1}\Gamma_{1b} y = 0\}.\end{aligned} \tag{3.188}$$

Якщо, крім того, $N_{l+} - N_{l-} = N_{r-} - N_{r+} = \delta\widehat{\nu}$, то в силу (3.178) $\nu_{a+} = \nu_{a-}$ та $\nu_{b+} = \nu_{b-}$. Тому внаслідок зауваження 3.22 розділені граничні умови (3.187), (3.188) приймають вигляд

$$N_a = (N_{a0}, N_{a1}) : \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a \to \mathcal{K}_a, \quad N_b = (N_{b0},\ N_{b1}) : \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_b \tag{3.189}$$

$$\widetilde{T} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} :\ N_{a0}\Gamma_{0a} y + N_{a1}\Gamma_{1a} y = 0,\ N_{b0}\Gamma_{0b} y + N_{b1}\Gamma_{1b} y = 0\}. \tag{3.190}$$

Очевидно, що розділені умови (3.188) є спеціальним видом граничних умов (3.183) з операторами

$$C_a = C_{N_a} := \begin{pmatrix} N_{a0} & \widehat{N}_a & N_{a1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_a \to \underbrace{\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b}_{\mathcal{K}} \tag{3.191}$$

$$C_b = C_{N_b} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N_{b0} & \widehat{N}_b & N_{b1} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \underbrace{\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b}_{\mathcal{K}}. \tag{3.192}$$

Теорема 3.65. *Припустимо, що виконані умови твердження 3.62. Тоді для того, щоб розділені граничні умови* (3.187), (3.188) *були максимальними дасипативними, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$S_a \leq 0, \quad S_b \geq 0 \quad \text{та} \quad \dim \mathcal{K}_a = N_{l-} - \nu_-(=\nu_{a+}), \quad \dim \mathcal{K}_b = N_{r-} - \nu_+(=\nu_{b-}), \tag{3.193}$$

де

$$S_a = iN_aJ_aN_a^* = -2\mathrm{Im}(N_{a1}N_{a0}^*) - \delta_a\widehat{N}_a\widehat{N}_a^* \tag{3.194}$$

$$S_b = iN_bJ_bN_b^* = -2\mathrm{Im}(N_{b1}N_{b0}^*) - \delta_b\widehat{N}_b\widehat{N}_b^* \tag{3.195}$$

(тут δ_a та δ_b визначені в (3.177)*).*

Для того, щоб ті ж самі умови були максимальними акумулятивними, необхідно і достатньо, щоб

$$S_a \geq 0, \quad S_b \leq 0 \quad \text{та} \quad \dim \mathcal{K}_a = N_{l+} - \nu_+(=\nu_{a-}), \quad \dim \mathcal{K}_b = N_{r+} - \nu_-(=\nu_{b+}). \tag{3.196}$$

Доведення. Очевидно, що розділені граничні умови (3.187), (3.188) максимальні дасипативні (акумулятивні) тоді й тільки тоді, коли граничні умови (3.183) з операторами $C_a = C_{N_a}$ та $C_b = C_{N_b}$ максимальні дасипативні (відп. акумулятивні). Оскільки

$$i(C_{N_a}J_aC_{N_a}^* - C_{N_b}J_bC_{N_b}^*) = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & -S_b \end{pmatrix} : \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b \to \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b,$$

то справедлива еквівалентність

$$i(C_{N_a}J_aC_{N_a}^* - C_{N_b}J_bC_{N_b}^*) \leq 0 \iff S_a \leq 0 \quad \text{та} \qquad S_b \geq 0. \tag{3.197}$$

Нехай граничні умови (3.187), (3.188) максимальні дисипативні. Тоді граничні умови (3.183) з оператарами $C_a = C_{N_a}$ та $C_b = C_{N_b}$ також максимальні дисипативні. Тому згідно з твердженням 3.62 $\dim(\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b) = n_-(T_{min})$ і вірною є перша нерівність в (3.184). Звідси та з (3.197) випливає, що $S_a \leq 0$ та $S_b \geq 0$.

Припустимо далі, що має місце випадок 1. Нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – простори (3.81), $\theta = \{C_0, C_1\}$, $C_j \in [\mathcal{H}_j, \mathcal{K}]$ – операторна пара (3.97), (3.98), що відповідає парі $\widetilde{\theta} = \{C_{N_a}, C_{N_b}\}$ згідно з лемою 3.24, і $C_{01} = C_0 \upharpoonright \mathcal{H}_1$. Очевидно, що блочне зображення (3.96) оператра C_{N_b} має вигляд

$$C_{N_b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{b0} & N_{b\perp} & \widehat{N}_b' & N_{b1} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_{b\perp} \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b.$$

Звідси та з (3.191) випливає, що

$$C_{01} = \begin{pmatrix} -N_{a1} & -\frac{i}{2}\widehat{N}_a & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\widehat{N}_b' & N_{b0} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b \tag{3.198}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} N_{a0} & \widehat{N}_a & 0 \\ 0 & \widehat{N}_b' & -N_{b1} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b. \tag{3.199}$$

Згідно з твердженням (Т) в доведенні твердження 3.62 $\theta \in Dis(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. Тому згідно з твердженням 2.16 оператор $C_{01} - \frac{i}{2}C_1$ оборотний і з (3.198), (3.199) випливає рівність

$$C_{01} - \tfrac{i}{2}C_1 = \begin{pmatrix} -N_{a1} - \frac{i}{2}N_{a0} & -i\widehat{N}_a & 0 \\ 0 & 0 & N_{b0} + \frac{i}{2}N_{b1} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}}_a \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b.$$

Тому

$$\dim \mathcal{K}_a = \dim \mathcal{H}_a + \dim \widehat{\mathcal{H}}_a, \qquad \dim \mathcal{K}_b = \dim \mathcal{H}_b. \tag{3.200}$$

Оскільки згідно з (3.56) та (3.57) $\dim \mathcal{H}_a = \nu_{a-}$, $\dim \widehat{\mathcal{H}}_a = \nu_{a+} - \nu_{a-}$, $\dim \mathcal{H}_b = \nu_{b-}$, то в силу (3.200) $\dim \mathcal{K}_a = \nu_{a+}$, $\dim \mathcal{K}_b = \nu_{b-}$. Тому внаслідок (3.174) справедливі дві останні рівності в (3.193). У випадках 2 та 3 ці рівності доводяться аналогично.

Зворотно, нехай виконані умови (3.193). Тоді через (3.197) оператори $C_a = C_{N_a}$ та $C_b = C_{N_b}$ задовільняють першій нерівності в (3.184) і з огляду на (3.108) та (3.174) маємо $\dim(\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b) = \nu_{a+} + \nu_{b-} = n_-(T_{min})$. Тому згідно з твердженням 3.62 граничні умови (3.183) максималні дисипативні і, отже, такими ж є розділені граничні умови (3.187), (3.188). Таким чином, твердження доведене для максимальних дисипативних умов. Доведення твердження для максимальних акумулятивних умов аналогічне. ☐

В наступній теоремі характеризуються розділені самоспряжені граничні умови для симетричних систем.

Теорема 3.66. *Нехай система* (3.5) *є визначеною. Тоді:*

(1) *для існування розділених самоспряжених граничних умов необхідньо та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$N_{l+} - N_{l-} = N_{r-} - N_{r+} = \delta\widehat{\nu}. \tag{3.201}$$

Якщо система є гамільтоновою, то умова (3.201) *еквівалентна рівностям*

$$N_{l+} = N_{l-}, \qquad N_{r+} = N_{r-}. \tag{3.202}$$

Якщо $N_{l+} = N_{l-}$ *або* $N_{r+} = N_{r-}$ *(зокрема, якщо кінцева точка a або b є регулярною), то умова* (3.201) *рівносильна тому, що система є гамільтоновою і* $N_+ = N_- (\Leftrightarrow n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}))$.

(2) *Якщо* (3.201) *виконано, то розділені граничні умови* (3.189), (3.190) *є самоспряженими тоді й тільки тоді, коли операторні пари* $\{N_{a0}, N_{a1}\}$ *та* $\{N_{b0}, N_{b1}\}$ *є самоспряженими.*

Доведення. (1) Очевидно, що розділені граничні умови є самоспряженими тоді й тільки тоді, коли вони є максимальними дисипативними та акумулятивними одночасно. Тому внаслідок теореми 3.65 для існування розділених самоспряжених граничних умов необхідне виконання рівностей

$$N_{l+} - \nu_+ = N_{l-} - \nu_-, \qquad N_{r-} - \nu_+ = N_{r+} - \nu_- \tag{3.203}$$

які внаслідок (3.4) еквівалентні умовам (3.201). Звідси випливає необхідність цих умов.

Якщо система є гамільтоновою, то $\widehat{\nu} = 0$. Звідси випливає екквівалентність умов (3.201) та (3.202). Припустимо, далі, що $N_{l+} = N_{l-}$. Тоді умова (3.201) еквівалентна гамільтоновості системи й рівності $N_{r+} = N_{r-}$, яка внаслідок (3.173) еквівалентна рівності $N_{+} = N_{-}$. Випадок $N_{r+} = N_{r-}$ розглядається аналогічно.

(2) Якщо виконана умова (3.201), то внаслідок теореми 3.65 і (3.74) розділені граничні умови (3.189), (3.190) є самоспряженими тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Im}(N_{a1}N_{a0}^{*}) = 0, \ \dim \mathcal{K}_a = \dim \mathcal{H}_a$ та $\operatorname{Im}(N_{b1}N_{b0}^{*}) = 0, \ \dim \mathcal{K}_b = \dim \mathcal{H}_b$. Звідси та з твердження 2.17 випливає твердженння (2) теореми. $\square$

РОЗДІЛ 4

Узагальнені резольвенти та характеристичні матриці симетричних систем

4.1. Узагальнені резольвенти мінімального відношення

Нехай система (3.5) є визначеною, $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс і $\mathcal{H}_j$ та Γ'_j, $j \in \{0, 1\}$, – відповідні гільбертові простори і оператори, побудовані для кожного з випадків 1-3 в п. 3.4.2..

Означення 4.1. Граничним параметром для системи (3.5) називається операторна пара $\tau = \tau(\lambda) \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, задана рівностями (2.20), (2.21).

Якщо $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$, то $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, де $\mathcal{H}$ визначено в (3.112), Γ'_0 та Γ'_1 задані в (3.117), (3.118) і граничний параметр $\tau = \tau(\lambda) \in \widetilde{R}(\mathcal{H})$ є операторною парою (2.29). Якщо, крім того, $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H})$ є самоспряженою операторною парою (2.32), то граничний параметр τ називається самоспряженим.

Нехай τ – граничний параметр (2.20). Для заданої функції $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ розглянемо граничну задачу

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{4.1}$$

$$C_0(\lambda)\Gamma'_0 y - C_1(\lambda)\Gamma'_1 y = 0, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.2}$$

Функція $y(\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \times \mathbb{C}_+ \to \mathbb{H}$ називається розв'язком цієї задачі, якщо для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функція $y(\cdot, \lambda)$ належить до $AC(\mathcal{I}; \mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і задовільняє рівнянню (4.1) (так що $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$) і граничній умові (4.2).

В наступній теоремі дається опис усіх узагальнених резольвент відношення T_{min} (і, отже, всіх розширень $\widetilde{T} \in \widetilde{\text{Self}}(T_{min})$) в термінах λ-залежних граничних умов.

Теорема 4.2. *Нехай виконано умови твердження 3.61. Якщо τ – граничний параметр* (2.20), *то для кожного $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ гранична задача* (4.1), (4.2) *має єдиний розв'язок $y(t, \lambda) = y_f(t, \lambda)$ і рівність*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta(y_f(\cdot, \lambda)), \quad \widetilde{f} \in L^2_\Delta(\mathcal{I}), \quad f \in \widetilde{f}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.3}$$

задає узагальнену резольвенту $R(\lambda) =: R_\tau(\lambda)$ відношення T_{min}. Зворотно, для кожної узагальненої резольвенти $R(\lambda)$ існує єдиний граничний параметр τ, такий що $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$.

Якщо, крім того, $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$, то $R_\tau(\lambda)$ є канонічною резольвентою тоді й тільки тоді, коли τ є самоспряженим граничним параметром (2.32). *У цьому випадку $R_\tau(\lambda) = (\widetilde{T}_\tau - \lambda)^{-1}$, де*

$$\widetilde{T}_\tau = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : C_0\Gamma'_0 y - C_1\Gamma'_1 y = 0\}. \tag{4.4}$$

Доведення. Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка (3.106) для T_{max}. Тоді гранична задача (4.1), (4.2) еквівалентна абстрактній граничній задачі (2.110), (2.111) з $A^* = T_{max}$. Звідси та з наслідку 2.45 випливають потрібні твердження. □

Нехай $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс для сиситеми (3.5), J_a, J_b - оператори (3.68), (3.69) і $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір.

Означення 4.3. Допустима пара

$$\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(\lambda) = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.5}$$

голоморфних оператор-функцій $C_a(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}]$ та $C_b(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$ (точніше, клас еквівалентності таких пар) належить до класу $\mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$, якщо $\dim \mathcal{K} = n_+(T_{min})$ і

$$i(C_a(\lambda)J_aC_a^*(\lambda) - C_b(\lambda)J_bC_b^*(\lambda)) \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.6}$$

У випадку $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}) =: d$ допустима операторна пара

$$\widetilde{\tau} = \{C_a, C_b\} \tag{4.7}$$

з операторами $C_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}],\ C_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$ відноситься до класу $\mathcal{S}^0(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$, якщо $\dim \mathcal{K} = d$ і

$$C_aJ_aC_a^* = C_bJ_bC_b^*. \tag{4.8}$$

Наступна лема є наслідком леми 3.24.

Лема 4.4. *Нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – гільбертові простори і Γ_0' та Γ_1' – оператори, побудовані для кожного з випадків 1-3 в п. 3.4.2.. Тоді рівності* (3.97)–(3.102) *задають біективну відповідність між усіма парами $\widetilde{\tau} = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$ та усіма граничними параметрами $\tau = \{C_0(\lambda), -C_1(\lambda)\}$ і справедлива рівність* (3.103). *Якщо, крім того, $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$, то $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ і $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$ тоді й тільки тоді, коли $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$*

Нехай $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$ – операторна пара (4.5). Для заданої вункції $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ розглянемо граничну задачу

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{4.9}$$

$$C_a(\lambda)\Gamma_a y + C_b(\lambda)\Gamma_b y = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.10}$$

Розв'язок $y(\cdot,\cdot)$ цієї задачі визнасається аналогічно розв'язку задачі (4.1), (4.2).

Наступна теорема є наслідком теореми 4.2 і леми 4.4.

Теорема 4.5. *Припустимо, що виконані умови твердження 3.62. Тоді вірними є твердження теореми 4.2 с заміною граничної задачі* (4.1), (4.2) *задачею* (4.9), (4.10) *та граничного параметра τ операторною парою $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$. Крім того, у випадку $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$ самоспряжений граничний параметр τ замінюється парою $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{H}_a, \mathbb{H}_b)$.*

Надалі покладаємо $\mathfrak{H} := L^2_\Delta(\mathcal{I})$ і позначаємо через $\mathfrak{H}'$ множину всіх $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$ з наступною властивостю: існує відрізок $\mathcal{I}_{\widetilde{f}} = [\alpha_{\widetilde{f}}, \beta_{\widetilde{f}}] \subset \mathcal{I}$, такий що для деякої (і тому для кожної) функції $f \in \widetilde{f}$ рівність $\Delta(t)f(t) = 0$ має місце м.в. на $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{\widetilde{f}}$.

Теорема 4.6. *Припустимо, що система (3.5) є визначеною і $c \in \mathcal{I}$. Тоді для кожної узагальненої резольвенти $R(\lambda)$ відношення T_{min} існує єдина оператор функція $\Omega^c(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}]$, така що для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$ та $\lambda \in \mathbb{C}_+$*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_c(x,\lambda)(\Omega^c(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J)Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt \right), \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}. \tag{4.11}$$

Крім того, $\Omega^c(\cdot)$ є неванлинівською оператор-функцією.

Доведення. У випадку довільної (необов'язково визначеної) системи існування оператор-функції $\Omega^c(\cdot)$ та включення $\Omega^c(\cdot) \in R[\mathbb{H}]$ доведено в [8]. Тому для доведення теореми необхідно показати, що у випадку визначеної системи для заданої узагальненої резольвенти $R(\lambda)$ існує єдина оператор-функція $\Omega(\cdot)$, що задовільняє (4.11). Припустимо, що $\Omega_1^c(\cdot)$ та $\Omega_2^c(\cdot)$ – дві такі функції й $\Phi(\lambda) = \Omega_1^c(\lambda) - \Omega_2^c(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Тоді для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ та $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$\pi_\Delta \int_{\mathcal{I}} Y_c(\cdot,\lambda)\Phi(\lambda)Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt = 0, \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}. \tag{4.12}$$

Нехай $h \in \mathbb{H}$ і $\mathcal{I}' = [\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}$. Припустимо, що $f(t) = \chi_{\mathcal{I}'}(t)h(\in \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I}))$, де $\chi_{\mathcal{I}'}(\cdot)$ – індікатор відрізку $\mathcal{I}'$, й $\widetilde{f} = \pi_\Delta f(\cdot) \in \mathfrak{H}'$. Тоді внаслідок (4.12) маємо

$$\Delta(x)Y_c(x,\lambda)\Phi(\lambda) \int_{\mathcal{I}'} Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)h\,dt = 0 \ \text{(м.в. на } \mathcal{I}). \tag{4.13}$$

Оскільки система є визначеною, то з (4.13) випливає рівність

$$\Phi(\lambda) \int_{\mathcal{I}'} Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)h\,dt = 0, \quad h \in \mathbb{H}, \ \mathcal{I}' = [\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}.$$

Тому

$$\left(h, \int_{\mathcal{I}'} \Delta(t)Y_c(t,\overline{\lambda})\Phi^*(\lambda)h'\,dt \right)_{\mathbb{H}} = 0, \quad h, h' \in \mathbb{H}, \ \mathcal{I}' = [\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}$$

і, отже,

$$\Delta(t)Y_c(t,\overline{\lambda})\Phi^*(\lambda)h' = 0 \ \text{(м.в. на } \mathcal{I}), \quad h' \in \mathbb{H}. \tag{4.14}$$

Оскільки система є визначеною, то внаслідок (4.14) $\Phi^*(\lambda) = 0$. Звідси випливає потрібна рівніть $\Omega_1^c(\lambda) = \Omega_2^c(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. □

Означення 4.7. ([8, 48]) Оператор-функція $\Omega^c(\cdot)$ називається характеристичною матрицею системи (3.5), що відповідає узагальненій резольвенті $R(\lambda)$ та розв'язку $Y_c(\cdot,\lambda)$. Характеричтична матриця $\Omega^c(\cdot)$ називається каноничною, якщо вона відповідає каноничній резольвенті.

Зауваження 4.8. Надалі за умов теореми 4.2 будемо використовувати такі позначення: $\widetilde{T}_\tau(\in \widetilde{\mathrm{Self}}(T_{min}))$ – розширення відношення T_{min}, що породжує узагальнену резольвенту $R_\tau(\cdot)$; $F_\tau(\cdot)$ – спектральна функція відношення T_{min}, породжена розширенням $\widetilde{T}_\tau$; $\Omega_\tau^c(\cdot)$ – характеристична матриця, що відповідає $R_\tau(\lambda)$ (за фіксованого $c \in \mathcal{I}$). З теореми 4.2 випливає, що гранична задача (4.1), (4.2) задає параметризації $R(\cdot) = R_\tau(\cdot)$, $\widetilde{T} = \widetilde{T}_\tau$, $F(\cdot) = F_\tau(\cdot)$ та $\Omega^c(\cdot) = \Omega_\tau^c(\cdot)$ відповідно усіх узагальнених резольвент $R(\cdot)$ відношення T_{min}, розширень $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T_{min})$, спектральних функцій $F(\cdot)$ відношення T_{min} та характеристичних матриць $\Omega^c(\cdot)$ системи (3.5) за допомоги граничного параметра τ. Надалі характеристичну матрицю $\Omega_\tau^c(\cdot)$ будемо також називати характеристичною матрицею задачі (4.1), (4.2).

4.2. $\mathcal{L}^2_\Delta$-розв'язки граничних задач

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи (3.5). У цьому випадку з кожним J-унітарним оператором $\widetilde{U} \in [\mathbb{H}]$ пов'язується операторний розв'язок $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda) = Y_{a,\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)(\in [\mathbb{H}])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, цієї системи, заданий початковою умовою $Y_{\widetilde{U}}(a,\lambda) = \widetilde{U}^{-1}$ або, еквівалентно, $\widetilde{U}Y_{\widetilde{U}}(a,\lambda) = I_{\mathbb{H}}$. Нехай

$$Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = (\varphi_0(t,\lambda), \widehat{\varphi}(t,\lambda), \psi(t,\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \mathbb{H} \tag{4.15}$$

– блочне зображення $Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)$ і $\varphi(\cdot,\lambda)(\in [H_0, H])$ – операторний розв'язок системи (3.5), заданий рівностю

$$\varphi(t,\lambda) = (\varphi_0(t,\lambda), \widehat{\varphi}(t,\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \to \mathbb{H}. \tag{4.16}$$

Очевидно, що

$$\widetilde{U}\varphi(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{4.17}$$

Твердження 4.9. *Припустимо, що:*

1) *система* (3.5) *є визначеною, кінцева точка a є регулярною і $\delta = 1$, $N_+ \geq N_-$ (тобто має місце випадок a1);*

2) $\widetilde{U}$ *– J-унітарний оператор* (3.120) *і* Γ_{0a}, $\widehat{\Gamma}_a$ *та* Γ_{1a} *– оператори* (3.121), (3.122)*;*

3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ *– b-граничний комплекс типпу 1* (3.131).

Тоді:

(1) *Для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ існує єдиний операторний розв'язок $\xi_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b\xi_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{4.18}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.19}$$

(2) *Для кожного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ існує єдиний операторний розв'язок $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \qquad i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b)\widehat{\xi}_0(\lambda) = I_{\widehat{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{4.20}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.21}$$

(3) *Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ ($\lambda \in \mathbb{C}_-$) існує єдиний операторний розв'язок $u_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathbb{H}]$ (відп. $u_-(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_b,\mathbb{H}]$) системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}u_\pm(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_a u_\pm(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b u_\pm(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm \tag{4.22}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}u_+(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}\Gamma_{0b}u_-(\lambda) = I_{\mathcal{H}_b}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.23}$$

В формулах (4.18) *–* (4.23) $\xi_0(\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\lambda)$ *та* $u_\pm(\lambda)$ *– лінійні відображення* (3.17) *для розв'язків* $\xi_0(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ *та* $u_\pm(\cdot,\lambda)$ *відповідно.*

Доведення. Нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – скінченновимірні гільбертові простори (3.132), (3.133) , Γ_0' та Γ_1' – оператори (3.134), (3.135) і $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка (3.106) для T_{max}. Тоді для кожного $y \in \mathcal{N}_\lambda$

$$\Gamma_0\{\pi_\Delta y, \lambda \pi_\Delta y\} = \Gamma_0' y, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_1\Gamma_0\{\pi_\Delta y, \lambda \pi_\Delta y\} = P_1\Gamma_0' y, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_-, \tag{4.24}$$

де $P_1 = P_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1}$ – ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_1$. Оскільки фактор-відображення π_Δ ізоморфно відображає $\mathcal{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_\lambda(T_{min})$, то в силу (4.24) та леми 2.30 оператори $\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda, \; \lambda \in \mathbb{C}_+$, та $P_1\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda, \; \lambda \in \mathbb{C}_-$, є ізоморфізмами $\mathcal{N}_\lambda$ на $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ відповідно. Тому рівності

$$Z_+(\lambda) = (\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda)^{-1}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad Z_-(\lambda) = (P_1\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda)^{-1}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{4.25}$$

коректно задають ізоморфізми $Z_+(\lambda) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{N}_\lambda$ та $Z_-(\lambda) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{N}_\lambda$, такі що

$$\Gamma_0' Z_+(\lambda) = I_{\mathcal{H}_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_1\Gamma_0' Z_-(\lambda) = I_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.26}$$

Очевидно, що оператори Γ_0' та $P_1\Gamma_0'$ допускають блочні зображення

$$\Gamma_0' = (-\Gamma_{1a}, \, i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b'), \, \widetilde{\Gamma}_{0b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \tag{4.27}$$

$$P_1\Gamma_0' = (-\Gamma_{1a}, \, i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b'), \, P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b. \tag{4.28}$$

Крім того, нехай

$$Z_+(\lambda) = (\xi_0(\lambda), \, \widehat{\xi}_0(\lambda), \, u_+(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathcal{N}_\lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.29}$$

$$Z_-(\lambda) = (\xi_0(\lambda), \, \widehat{\xi}_0(\lambda), \, u_-(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{N}_\lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{4.30}$$

– блочні зображення операторів $Z_\pm(\lambda)$ і $\xi_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$, $u_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathbb{H}]$ та $u_-(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_b,\mathbb{H}]$ – опараторні розв'язки системи (3.5), породжені згідно з лемою 3.4 операторами $\xi_0(\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\lambda)$, $u_+(\lambda)$ та $u_-(\lambda)$ відповідно.Тоді в силу (4.26)

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} \\ i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b') \\ \widetilde{\Gamma}_{0b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \, \widehat{\xi}_0(\lambda), \, u_+(\lambda)) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} \end{pmatrix}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} \\ i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b') \\ P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}\widetilde{\Gamma}_{0b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \, \widehat{\xi}_0(\lambda), \, u_-(\lambda)) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{H}_b} \end{pmatrix}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Звідси випливають рівності (4.18)–(4.23).

Доведемо, далі, єдиність розв'язку $\xi_0(\cdot,\lambda)$ (для інших розв'язків доведення аналогічне). Нехай $\widetilde{\xi}_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ – інший розв'язок системи (3.5), що задовільняє (4.18),(4.19). Тоді $\Gamma_0'(\xi_0(\lambda) - \widetilde{\xi}_0(\lambda)) = 0, \; \lambda \in \mathbb{C}_+$, та $P_1\Gamma_0'(\xi_0(\lambda) - \widetilde{\xi}_0(\lambda)) = 0, \; \lambda \in \mathbb{C}_-$. Звідси в силу оборотності операторів $\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda, \; \lambda \in \mathbb{C}_+$, та $P_1\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda, \; \lambda \in \mathbb{C}_-$, випливає рівність $\xi_0(\cdot,\lambda) = \widetilde{\xi}_0(\cdot,\lambda), \; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\square$

Твердження 4.10. *Нехай за припущень твердження 4.9* $\xi_0(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ *та* $u_\pm(\cdot,\lambda)$ *– операторні розв'язки, визначені в цьому твердженні, і* $Z_+(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_0,\mathbb{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, *та* $Z_-(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_1,\mathbb{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}_-$, *– операторні розв'язки системи* (3.5), *задані блочними зображеннями*

$$Z_+(t,\lambda)=(\xi_0(t,\lambda),\,\widehat{\xi}_0(t,\lambda),\,u_+(t,\lambda)):H\oplus\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b\to\mathbb{H},\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.31}$$

$$Z_-(t,\lambda)=(\xi_0(t,\lambda),\,\widehat{\xi}_0(t,\lambda),\,u_-(t,\lambda)):H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b\to\mathbb{H},\ \ \lambda\in\mathbb{C}_-. \tag{4.32}$$

Крім того, нехай $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– розділена гранична трійка для* T_{max}, *визначена рівностями* (3.132)–(3.135) *та* (3.106). *Тоді:*

(1) γ*-поля* $\gamma_\pm(\cdot)$ *трійки* Π *допускають зображення*

$$\gamma_+(\lambda)=\pi_\Delta Z_+(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}_+;\qquad \gamma_-(\lambda)=\pi_\Delta Z_-(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}_-. \tag{4.33}$$

(2) *Функція Вейля* $M_+(\cdot)$ *трійки* Π *допускає блочне зображення*

$$M_+(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda)\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda)\\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1},\quad\lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.34}$$

з елементами $M_{ij}(\lambda)$, *заданими рівностями*

$$M_{11}(\lambda)=\Gamma_{0a}\xi_0(\lambda),\quad M_{12}(\lambda)=\Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda),\quad M_{13}(\lambda)=\Gamma_{0a}u_+(\lambda) \tag{4.35}$$

$$M_{21}(\lambda)=\widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda),\quad M_{22}(\lambda)=\widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_0(\lambda)+\tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}},\quad M_{23}(\lambda)=\widehat{\Gamma}_a u_+(\lambda) \tag{4.36}$$

$$M_{31}(\lambda)=-\Gamma_{1b}\xi_0(\lambda),\quad M_{32}(\lambda)=-\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_0(\lambda),\quad M_{33}(\lambda)=-\Gamma_{1b}u_+(\lambda). \tag{4.37}$$

Крім того, для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_-$ *справедливі рівності*

$$M_{11}^*(\overline{\lambda})=\Gamma_{0a}\xi_0(\lambda),\quad M_{21}^*(\overline{\lambda})=\Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda),\quad M_{12}^*(\overline{\lambda})=\widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda),\qquad M_{22}^*(\overline{\lambda})=\widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_0(\lambda)+\tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}} \tag{4.38}$$

$$M_{31}^*(\overline{\lambda})=\Gamma_{0a}u_-(\lambda),\quad M_{32}^*(\overline{\lambda})=\widehat{\Gamma}_a u_-(\lambda). \tag{4.39}$$

Доведення. (1) В процесі доведення твердження 4.9 було доведено рівності (4.26) для $Z_\pm(\cdot,\lambda)$. З цих рівностей та з (4.24)випливає, що

$$\Gamma_0\{\pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0,\lambda\pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0\}=h_0,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\quad h_0\in\mathcal{H}_0;$$

$$P_1\Gamma_0\{\pi_\Delta Z_-(\lambda)h_1,\lambda\pi_\Delta Z_-(\lambda)h_1\}=h_1,\quad \lambda\in\mathbb{C}_-,\quad h_1\in\mathcal{H}_1.$$

Тому згідно з означенням (2.60) операторів $\gamma_\pm(\lambda)$ вірними є рівності (4.33).

(2) Очевидно, що оператор Γ_1' допускає блочне зображення

$$\Gamma_1'=(\Gamma_{0a},\,\tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a+\widehat{\Gamma}_b'),\,-\Gamma_{1b})^\top:\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\to H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b. \tag{4.40}$$

Крім того, нехай функція $M_+(\cdot)$ має блочне зображення (4.34). Тоді внаслідок (2.85) $M_-(\lambda)=M_+^*(\overline{\lambda})$ і, отже,

$$M_-(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{11}^*(\overline{\lambda}) & M_{21}^*(\overline{\lambda}) & M_{31}^*(\overline{\lambda})\\ M_{12}^*(\overline{\lambda}) & M_{22}^*(\overline{\lambda}) & M_{32}^*(\overline{\lambda})\\ * & * & *\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0},\quad\lambda\in\mathbb{C}_-. \tag{4.41}$$

З (4.33) та (2.63), (2.64) випливає, що

$$\Gamma_1' Z_+(\lambda) = M_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad (\Gamma_1' + iP_2\Gamma_0')Z_-(\lambda) = M_-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.42}$$

Тому в силу (4.40) та (4.27)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b') \\ -\Gamma_{1b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \widehat{\xi}_0(\lambda), u_+(\lambda)) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda) \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.43}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b') \\ -\Gamma_{1b} + iP_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b^\perp} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \widehat{\xi}_0(\lambda), u_-(\lambda)) = \begin{pmatrix} M_{11}^*(\overline{\lambda}) & M_{21}^*(\overline{\lambda}) & M_{31}^*(\overline{\lambda}) \\ M_{12}^*(\overline{\lambda}) & M_{22}^*(\overline{\lambda}) & M_{32}^*(\overline{\lambda}) \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \tag{4.44}$$

і, отже,

$$M_{21}(\lambda) = \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_b' \xi_0(\lambda), \quad M_{22}(\lambda) = \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_b' \widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_{23}(\lambda) = \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_a u_+(\lambda) + \tfrac{1}{2}\widehat{\Gamma}_b' u_+(\lambda).$$

Крім того, внаслідок (4.18), (4.20) та (4.22) маємо

$$\widehat{\Gamma}_b' \xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda), \quad \widehat{\Gamma}_b' \widehat{\xi}_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_0(\lambda) + iI_{\widehat{H}}, \quad \widehat{\Gamma}_b' u_+(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a u_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси випливають рівності (4.36). Рівності (4.35) та (4.37) є наслідком (4.43). Аналогічно з (4.44) виводяться рівності (4.38), (4.39). ☐

Зауваження 4.11. З тверджень 4.9 та 4.10 випливає, що оператор-функції $Z_+(\cdot, \lambda)$ та $Z_-(\cdot, \lambda)$ є розв'язками системи (3.5) з початковими умовами

$$\widetilde{U} Z_+(a, \lambda) = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \widehat{\xi}_0(\lambda), u_+(\lambda)) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) - \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & M_{23}(\lambda) \\ -I_H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.45}$$

$$\widetilde{U} Z_-(a, \lambda) = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \widehat{\xi}_0(\lambda), u_-(\lambda)) = \begin{pmatrix} M_{11}^*(\overline{\lambda}) & M_{21}^*(\overline{\lambda}) & M_{31}^*(\overline{\lambda}) \\ M_{12}^*(\overline{\lambda}) & M_{22}^*(\overline{\lambda}) - \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & M_{32}^*(\overline{\lambda}) \\ -I_H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{4.46}$$

Лема 4.12. *Нехай за припущень твердження 4.9* $v_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[H_0, \mathbb{H}]$ *– операторний розв'язок системи* (3.5), *заданий рівностю*

$$v_0(t, \lambda) = (\xi_0(t, \lambda), \widehat{\xi}_0(t, \lambda)) : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{4.47}$$

Тоді справедлива тотожність

$$\varphi(x, \lambda) v_0^*(x, \overline{\lambda}) - v_0(x, \lambda) \varphi^*(x, \overline{\lambda}) = J, \quad x \in \mathcal{I}, \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{4.48}$$

Доведення. Внаслідок тотожності Лагранжа маємо

$$Y_{\widetilde{U}}^*(x, \overline{\lambda}) J Y_{\widetilde{U}}(x, \lambda) = Y_{\widetilde{U}}^*(a, \overline{\lambda}) J Y_{\widetilde{U}}(a, \lambda) = \widetilde{U}^{-1*} J \widetilde{U}^{-1} = J \tag{4.49}$$

і, отже,

$$Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)JY^*_{\widetilde{U}}(x,\overline{\lambda}) = J, \quad x\in\mathcal{I}, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.50}$$

З рівностей (4.45) та (4.46) випливає, що

$$\widetilde{U}v_0(a,\lambda) = \begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}(\xi_0(\lambda),\, \widehat{\xi}_0(\lambda)) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda)\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\ -I_H & 0\end{pmatrix} : H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H, \quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.51}$$

$$\widetilde{U}v_0(a,\lambda) = \begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}(\xi_0(\lambda),\, \widehat{\xi}_0(\lambda)) = \begin{pmatrix} M^*_{11}(\overline{\lambda}) & M^*_{21}(\overline{\lambda})\\ M^*_{12}(\overline{\lambda}) & M^*_{22}(\overline{\lambda})-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\ -I_H & 0\end{pmatrix} : H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H, \quad \lambda\in\mathbb{C}_- \tag{4.52}$$

і безпосередній підрахунок з огляду на (4.17) дає

$$(\widetilde{U}\varphi(a,\lambda))(\widetilde{U}v_0(a,\overline{\lambda}))^* - (\widetilde{U}v_0(a,\lambda))(\widetilde{U}\varphi(a,\overline{\lambda}))^* = J, \quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Тепер з огляду на (4.50) маємо

$$\varphi(x,\lambda)v_0^*(x,\overline{\lambda}) - v_0(x,\lambda)\varphi^*(x,\overline{\lambda}) =$$

$$(Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)\widetilde{U}\varphi(a,\lambda))(Y_{\widetilde{U}}(x,\overline{\lambda})\widetilde{U}v_0(a,\overline{\lambda}))^* - (Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)\widetilde{U}v_0(a,\lambda))(Y_{\widetilde{U}}(x,\overline{\lambda})\widetilde{U}\varphi(a,\overline{\lambda}))^* =$$

$$Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)[(\widetilde{U}\varphi(a,\lambda))(\widetilde{U}v_0(a,\overline{\lambda}))^* - (\widetilde{U}v_0(a,\lambda))(\widetilde{U}\varphi(a,\overline{\lambda}))^*]Y^*_{\widetilde{U}}(x,\overline{\lambda}) = Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)JY^*_{\widetilde{U}}(x,\overline{\lambda}) = J$$

□

4.3. Характеристичні матриці

Лема 4.13. *Нехай за умов твердження 4.9* $v_0(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$ – *розв'язок* (4.47) *системи* (3.5) *і* $G_0(\cdot,\cdot,\lambda):\mathcal{I}\times\mathcal{I}\to[\mathbb{H}]$ – *оператор-функція, задана рівністю*

$$G_0(x,t,\lambda) = \begin{cases} v_0(x,\lambda)\,\varphi^*(t,\overline{\lambda}), & x>t\\ \varphi(x,\lambda)\,v_0^*(t,\overline{\lambda}), & x<t\end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.53}$$

(функція Гріна). Тоді граничні умови

$$T_0 = \{\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in T_{max} : \Gamma_{1a}y = 0,\ \widehat{\Gamma}_a y = \widehat{\Gamma}'_b y,\ \widetilde{\Gamma}_{0b}y = 0\} \tag{4.54}$$

задають максимальне симетричне розширення $T_0\in Ext_{T_{min}}$*, таке що* $\mathbb{C}_+\in\rho(T_0)$ *і справедлива рівність*

$$(T_0-\lambda)^{-1}\widetilde{f} = \pi_\Delta\left(\int_{\mathcal{I}} G_0(\cdot,t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt\right), \quad \widetilde{f}\in\mathfrak{H}, \quad f\in\widetilde{f}, \quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.55}$$

Доведення. Нехай $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – ролзділена гранична трійка для T_{max}, визначена рівностями (3.132)-(3.135) та (3.106). Тоді $T_0 = \ker \Gamma_0$ і згідно з твердженням 2.25 $T_0 \subset T_0^*$ та $\mathbb{C}_+ \subset \rho(T_0)$. Ясно, що рівність

$$y_f = y_f(x,\lambda) := \int_{\mathcal{I}} G_0(x,t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.56}$$

коректно задає функцію $y_f(\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \times \mathbb{C}_+ \to \mathbb{H}$. Звідси випливає, що (4.55) еквівалентно такому твердженню:

(T) якщо $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, то для кожного $f \in \widetilde{f}$ і $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функція $y_f(\cdot,\lambda)$ належить до $AC(\mathcal{I};\mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і задовільняє рівнянню (4.1) та граничним умовам

$$\Gamma_{1a} y_f = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_a y_f = \widehat{\Gamma}'_b y_f, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} y_f = 0. \tag{4.57}$$

Спочатку припустимо, що $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, так що $\Delta(t)f(t) = 0$ (м.в. на $(\beta_{\widetilde{f}}, b)$) з деяким $\beta_{\widetilde{f}} \in \mathcal{I}$. Тоді

$$y_f = y_f(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)C_1(x,\lambda) + v_0(x,\lambda)C_2(x,\lambda) = Y(x,\lambda)C(x,\lambda), \tag{4.58}$$

де

$$C_1(x,\lambda) = \int_x^b v_0^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt, \qquad C_2(x,\lambda) = \int_a^x \varphi^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt,$$
$$Y(x,\lambda) = (\varphi(x,\lambda),\, v_0(x,\lambda)), \quad C(x,\lambda) = \{C_1(x,\lambda), C_2(x,\lambda)\} (\in H_0 \oplus H_0).$$

Крім того, в силу (4.58) і рівності $\Delta(t)f(t) = 0$ (м.в. на $(\beta_{\widetilde{f}}, b)$) маємо

$$y_f(x,\lambda) = v_0(x,\lambda) \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt, \quad x \in (\beta_{\widetilde{f}}, b). \tag{4.59}$$

Тому $y_f \in AC(\mathcal{I};\mathbb{H}) \cap \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Далі, з огляду на (4.48) маємо

$$Y(x,\lambda)C'(x,\lambda) = (-\varphi(x,\lambda)v_0^*(x,\overline{\lambda}) + v_0(x,\lambda)\varphi^*(x,\overline{\lambda}))\Delta(x)f(x) = -J\Delta(x)f(x).$$

Використовуючи цю рівність, отримуємо

$$Jy_f'(x,\lambda) - B(x)y_f(x,\lambda) = (JY'(x,\lambda) - B(x)Y(x,\lambda))C(x,\lambda) + JY(x,\lambda)C'(x,\lambda) =$$
$$\lambda\Delta(x)Y(x,\lambda)C(x,\lambda) - J^2\Delta(x)f(x) = \lambda\Delta(x)y_f(x,\lambda) + \Delta(x)f(x).$$

Отже, функція $y_f(\cdot,\lambda)$ задовільняє (4.1) і для доведення твердження (T) залишається довести, що $y_f(\cdot,\lambda)$ задовільняє граничним умовам (4.57). Оскільки в силу (4.58)

$$\Gamma_a y_f = \widetilde{U} y_f(a,\lambda) = \widetilde{U}\varphi(a,\lambda) \int_{\mathcal{I}} v_0^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt,$$

то з (4.17) та (4.47) випливає, що

$$\Gamma_a y_f = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} y_f = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \int_{\mathcal{I}} (\xi_0(t,\overline{\lambda}))^* \Delta(t)f(t)dt, \ \int_{\mathcal{I}} \left(\widehat{\xi}_0(t,\overline{\lambda})\right)^* \Delta(t)f(t)dt \right\}$$

Тому справедливі рівності

$$\widehat{\Gamma}_a y_f = \int_{\mathcal{I}} \left(\widehat{\xi}_0(t,\overline{\lambda})\right)^* \Delta(t) f(t) dt \tag{4.60}$$

$$\Gamma_{1a} y_f = 0. \tag{4.61}$$

Далі, внаслідок других рівностей в (4.18) та (4.20), а також перших двох рівностей в (4.36) маємо

$$\widehat{\Gamma}'_b \xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda) = M_{21}(\lambda), \qquad \widehat{\Gamma}'_b \widehat{\xi}_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_0(\lambda) + iI_{\widehat{H}} = M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}.$$

Звідси та з перших рівностей в (4.19) та (4.21) вопливає, що

$$\widehat{\Gamma}'_b v_0(\lambda) = (\widehat{\Gamma}'_b \xi_0(\lambda),\, \widehat{\Gamma}'_b \widehat{\xi}_0(\lambda)) = (M_{21}(\lambda),\, M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}), \quad \widetilde{\Gamma}_{0b} v_0(\lambda) = 0.$$

Комбінуючи ці рівності з (4.59), отримуємо

$$\widehat{\Gamma}'_b y_f = (M_{21}(\lambda),\, M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}) \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,\overline{\lambda}) \Delta(t) f(t) dt \tag{4.62}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0b} y_f = 0 \tag{4.63}$$

З огляду на (4.61) та (4.63) функція y_f задовільняє першій та третій умові в (4.57). Крім того, в силу (4.52)

$$\widehat{\xi}_0(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda) \begin{pmatrix} M_{21}^*(\overline{\lambda}) \\ M_{22}^*(\overline{\lambda}) - \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-,$$

і тому (4.60) можна зобразити у вигляді

$$\widehat{\Gamma}_a y_f = (M_{21}(\lambda),\, M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}) \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,\overline{\lambda}) \Delta(t) f(t) dt \tag{4.64}$$

Порівняння (4.62) з (4.64) показує, що функція y_f задовільняє другій умові в (4.57). Таким чином, твердження (Т) і, отже, рівність (4.55) доведено для $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$. У випадку $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$ формула (4.55) доводиться граничним переходом із використанням зрізок $f_n = f\chi_{[a,b_n)}$, $b_n \in \mathcal{I}$, $b_n \to b$. ☐

Наступний наслідок випливає безпосередньо з теореми 4.6.

Наслідок 4.14. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною і кінцева точка a є регулярною. Крім того, нехай $\widetilde{U} \in [\mathbb{H}]$ – J-унітарний оператор. Тоді для кожної узагальненої резольвенти $R(\lambda)$ відношення T_{min} існує єдина (неванлинівська) оператор функція $\Omega(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}]$, така що для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$ та $\lambda \in \mathbb{C}_+$*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)(\Omega(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J) Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda}) \Delta(t) f(t)\, dt \right), \quad f \in \widetilde{f}. \tag{4.65}$$

Означення 4.15. Оператор-функція $\Omega(\cdot)$ називається характеристичною матрицею системи (3.5), що відповідає узагальненій резольвенті $R(\lambda)$ та розв'язку $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)$. Характеричтична матриця $\Omega(\cdot)$ називається каноничною, якщо вона відповідає каноничній резольвенті.

Нехай за припущень твердженння 4.9 Γ_a – оператор (3.123) і $\mathbb{H}_b$ – простір (3.130). Тоді сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ є граничним комплексом, має місце випадок 1 (див. п. 3.4.2.) і простори $\mathcal{H}_j$

та оператори Γ_j', $j \in \{0,1\}$, визначені в (3.81) - (3.83), допускакють зображення (3.132) - (3.135). Нехай $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – граничний параметр, $R_\tau(\lambda)$ – узагальнена резольвента, що відповідає τ згідно з теоремою 4.2 (із зазначеним граничним комплексом $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$) і $\Omega_\tau(\cdot)$ – характеристична матриця системи, що відповідає $R_\tau(\lambda)$ та розв'язку $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)$ (за фіксованого оператора $\widetilde{U}$). З теореми 4.2 випливає, що гранична задача (4.1), (4.2) задає параметризацію $\Omega(\cdot) = \Omega_\tau(\cdot)$ усіх характеристичних матриць $\Omega(\cdot)$ системи (3.5) за допомоги граничного параметра τ. В наступній теоремі ця параметризація дається в явному вигляді.

Теорема 4.16. *Нехай виконані припущення твердження 4.9. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_0$ *та* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ *– скінченновимірні гільбертові простори* (3.132), (3.133) , $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.34)-(4.37) *і*

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_H \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & 0 \\ -\frac{1}{2}I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.66}$$

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) - \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & M_{23}(\lambda) \\ -I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.67}$$

$$S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & -I_H \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) + \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & 0 \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.68}$$

Тоді: (1) $\Omega_0(\cdot)$ *є характеристичною матрицею системи* (3.5), *що відповідає узагальненій резольвенті* $R_0(\lambda) = (T_0 - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *(тут* $T_0 \in Ext_{T_{min}}$ *– максимальне симетричне розширення* (4.54)*).*

(2) *Для кожного граничного параметра* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *вигляду* (2.20) *відповідна характеристичними матриця* $\Omega_\tau(\cdot)$ *системи* (3.5) *допускає зображення*

$$\Omega_\tau(\lambda) = \Omega_0(\lambda) + S_1(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.69}$$

і рівність $\Omega(\cdot) = \Omega_\tau(\cdot)$ *задає бієктивну відповідність між усіма граничними параметрами* τ *і усіма характеристичними матрицями* $\Omega(\cdot)$ *системи, що відповідають розв'язку* $Y_{\widetilde{U}}(\cdot)$. *Крім того, у випадку* $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$ *характеристична матриця* $\Omega_\tau(\cdot)$ *є канонічною тоді й тільки тоді, коли граничний параметр* τ *самоспряжений.*

Доведення. Для доведення твердження (1) потрібно показати, що рівність (4.55) можна зобразити у вигляді

$$(T_0 - \lambda)^{-1}\widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)(\Omega_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J)Y^*_{\widetilde{U}}(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt \right), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H},\ f \in \widetilde{f},\ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.70}$$

Припустимо, що

$$Y_+(t,\lambda) := (\varphi(t,\lambda),\, 0) : H_0 \oplus \mathcal{H}_b \to \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.71}$$

$$Y_-(t,\lambda) := (\varphi(t,\lambda),\, 0) : H_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{4.72}$$

і $Z_\pm(t,\lambda)$ – розв'язки (4.31), (4.32). Тоді рівність (4.53) можна записати як

$$G_0(x,t,\lambda) = \begin{cases} Z_+(x,\lambda)\,Y_-^*(t,\overline{\lambda}), & x > t \\ Y_+(x,\lambda)\,Z_-^*(t,\overline{\lambda}), & x < t \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.73}$$

З рівностей (4.45) та (4.46) випливає, що

$$\widetilde{U}Z_+(a,\lambda) = S_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \widetilde{U}Z_-(a,\lambda) = S_2^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{4.74}$$

і, отже,

$$Z_+(t,\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)S_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad Z_-(t,\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)S_2^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{4.75}$$

Крім того, $Y_\pm(t,\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\widetilde{U}Y_\pm(a,\lambda)$ і згідно з (4.71), (4.72) та (4.17)

$$\widetilde{U}Y_+(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to H \oplus \widehat{H} \oplus H,$$

$$\widetilde{U}Y_-(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \widehat{H} \oplus H$$

Звідси та з (4.73) випливає, що

$$G_0(x,t,\lambda) = \begin{cases} Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)\left(S_1(\lambda)(\widetilde{U}Y_-(a,\overline{\lambda}))^*\right)Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda}), & x > t \\ Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)(\widetilde{U}Y_+(a,\lambda)S_2(\lambda))Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda}), & x < t \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.76}$$

і безпосередній підрахунок дає

$$S_1(\lambda)(\widetilde{U}Y_-(a,\overline{\lambda}))^* = \Omega_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}J, \quad \widetilde{U}Y_+(a,\lambda)S_2(\lambda) = \Omega_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}J, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Підставляючи ці рівності в (4.76), отримуємо

$$G_0(x,t,\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)(\Omega_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J)Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda}).$$

Тому рівність (4.55) можна зобразити у вигляді (4.70).

(2) Припустимо, що $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка для T_{max}. Тоді згідно з твердженням 4.10 $M_+(\cdot)$ є функцією Вейля трійки Π. Нехай τ – граничний параметр (2.20) і $R_\tau(\lambda)$ – відповідна узагальнена резольвента відношення T_{min}, породжена граничною задачею (4.1), (4.2). Як відзначалося при доведенні теореми 4.2, ця задача еквівалентна абстрактній граничній задачи (2.110), (2.111) для трійки Π. Тому згідно з наслідком 2.45 справедлива формула

$$R_\tau(\lambda) = (T_0 - \lambda)^{-1} + \gamma_+(\lambda)T_\tau(\lambda)\gamma_-^*(\overline{\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.77}$$

в якій $T_0 = \ker \Gamma_0$ – симетричне відношення (4.54), $\gamma_\pm(\cdot)$ – γ-поля (4.33) і

$$T_\tau(\lambda) := -(\tau(\lambda) + M_+(\lambda))^{-1} = (C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.78}$$

(див. (2.108)). Згідно з лемою 3.4, (2) маємо

$$\gamma_-^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}=\int_{\mathcal{I}}Z_-^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt=\int_{\mathcal{I}}S_2(\lambda)Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt,\quad \widetilde{f}\in\mathfrak{H},\ \ f\in\widetilde{f},\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Звідси та з перших рівностей в (4.33) та (4.75) випливає, що для кожного $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}$ та $\lambda\in\mathbb{C}_+$

$$\gamma_+(\lambda)T_\tau(\lambda)\gamma_-^*(\overline{\lambda})\widetilde{f}=\pi_\Delta\left(\int_{\mathcal{I}}Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)S_1(\lambda)T_\tau(\lambda)S_2(\lambda)Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt\right),\ \ f\in\widetilde{f}. \tag{4.79}$$

Комбінуючи тепер (4.77) з (4.70) та (4.79), отримуємо рівність

$$R_\tau(\lambda)\widetilde{f}=\pi_\Delta\left(\int_{\mathcal{I}}Y_{\widetilde{U}}(x,\lambda)(\Omega_\tau(\lambda)+\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-x)J)Y_{\widetilde{U}}^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt\right),\quad \widetilde{f}\in\mathfrak{H},\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+,$$

де $\Omega_\tau(\cdot)$ – оператор-функція (4.69). Таким чином, $\Omega_\tau(\cdot)$ є характеристичною матрицею узагальненої резольвенти $R_\tau(\lambda)$, звідки внаслідок теореми 4.2 випливає потрібне твердження (2). ☐

За умов теореми 4.16 з кожним граничним параметром $\tau=\tau(\lambda)$ вигляду (2.20) пов'язана голоморфна оператор-функція $\widetilde{\Omega}_\tau(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_0]$, задана рівністю

$$\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda)=\begin{pmatrix}\widetilde{\omega}_1(\lambda) & \widetilde{\omega}_2(\lambda)\\ \widetilde{\omega}_3(\lambda) & \widetilde{\omega}_4(\lambda)\end{pmatrix}:=$$

$$=\begin{pmatrix}M_+(\lambda)-M_+(\lambda)(\tau(\lambda)+M_+(\lambda))^{-1}M_+(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1}+M_+(\lambda)(\tau(\lambda)+M_+(\lambda))^{-1}\\ -\frac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0}+(\tau(\lambda)+M_+(\lambda))^{-1}M_+(\lambda) & -(\tau(\lambda)+M_+(\lambda))^{-1}\end{pmatrix},\qquad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.80}$$

Згідно з (2.108) елементи матриці $\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda)$ допускають зображення

$$\widetilde{\omega}_1(\lambda)=M_+(\lambda)(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) \tag{4.81}$$

$$\widetilde{\omega}_2(\lambda)=-\tfrac{1}{2}I_{\mathcal{H}_1}-M_+(\lambda)(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda) \tag{4.82}$$

$$\widetilde{\omega}_3(\lambda)=\tfrac{1}{2}I_{\mathcal{H}_0}-(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_0(\lambda) \tag{4.83}$$

$$\widetilde{\omega}_4(\lambda)=(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda) \tag{4.84}$$

У наступному твердженні параметризація (4.69) харктеристичних матриць дається у дещо іншому вигляді.

Твердження 4.17. *Нехай*

$$X_1=\begin{pmatrix}I_{H,\mathcal{H}_1} & I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1} & 0\\ 0 & -\frac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_0} & I_{H,\mathcal{H}_0}\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_0$$

$$X_2=\begin{pmatrix}I_{H,\mathcal{H}_0} & I_{\widehat{H},\mathcal{H}_0} & 0\\ 0 & -\frac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1} & I_{H,\mathcal{H}_1}\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$$

Тоді для кожного граничного параметра τ відповідна характеристична матриця $\Omega_\tau(\cdot)$ системи (3.5) *допускає зображення*

$$\Omega_\tau(\lambda)=X_1^*\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda)X_2,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.85}$$

Якщо, крім того, $n_+(T_{min})=n_-(T_{min})$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_b=\mathcal{H}_b$, $\widetilde{\Omega}_\tau(\cdot)\in R[\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}]$, де $\mathcal{H}=H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b$, і справедлива рівність

$$\Omega_\tau(\lambda)=X^*\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda)X,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{4.86}$$

де $X=\begin{pmatrix}I_{H,\mathcal{H}} & I_{\widehat{H},\mathcal{H}} & 0\\ 0 & -\frac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}} & I_{H,\mathcal{H}}\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}.$

Доведення. З огляду на (4.34) оператор-функції $S_1(\lambda)$ та $S_2(\lambda)$ можна зобразити як

$$S_1(\lambda) = (P_{\mathcal{H}_1,H}M_+(\lambda),\ P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}}M_+(\lambda) - \tfrac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}},\ -P_{\mathcal{H}_0,H})^\top : \mathcal{H}_0 \to H \oplus \widehat{H} \oplus H$$
$$S_2(\lambda) = (M_+(\lambda) \upharpoonright H,\ M_+(\lambda) \upharpoonright \widehat{H} + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1},\ -I_{H,\mathcal{H}_1}) : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \mathcal{H}_1.$$

Нехай $T_\tau(\lambda)$ – оператор (4.78). Тоді внаслідок (4.69)

$$\Omega_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_H \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & 0 \\ -\frac{1}{2}I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{\mathcal{H}_1,H}M_+(\lambda) \\ P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}}M_+(\lambda) - \frac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}} \\ -P_{\mathcal{H}_0,H} \end{pmatrix} \times$$
$$\times\, T_\tau(\lambda)(M_+(\lambda) \upharpoonright H,\ M_+(\lambda) \upharpoonright \widehat{H} + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1},\ -I_{H,\mathcal{H}_1}) = \begin{pmatrix} \omega_1(\lambda) & \omega_2(\lambda) & \omega_3(\lambda) \\ \omega_4(\lambda) & \omega_5(\lambda) & \omega_6(\lambda) \\ \omega_7(\lambda) & \omega_8(\lambda) & \omega_9(\lambda) \end{pmatrix},$$

де покладено

$$\omega_1(\lambda) = M_{11}(\lambda) + P_{\mathcal{H}_1,H}M_+(\lambda)T_\tau(\lambda)M_+(\lambda) \upharpoonright H$$
$$\omega_2(\lambda) = M_{12}(\lambda) + P_{\mathcal{H}_1,H}M_+(\lambda)T_\tau(\lambda)(M_+(\lambda) \upharpoonright \widehat{H} + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1}),\quad \omega_3(\lambda) = -\tfrac{1}{2}I_H - P_{\mathcal{H}_1,H}M_+(\lambda)T_\tau(\lambda) \upharpoonright H$$
$$\omega_4(\lambda) = M_{21}(\lambda) + (P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}}M_+(\lambda) - \tfrac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}})T_\tau(\lambda)M_+(\lambda) \upharpoonright H$$
$$\omega_5(\lambda) = M_{22}(\lambda) + (P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}}M_+(\lambda) - \tfrac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}})T_\tau(\lambda)(M_+(\lambda) \upharpoonright \widehat{H} + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1})$$
$$\omega_6(\lambda) = -(P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}}M_+(\lambda) - \tfrac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}})T_\tau(\lambda) \upharpoonright H,\quad \omega_7(\lambda) = -\tfrac{1}{2}I_H - P_{\mathcal{H}_0,H}T_\tau(\lambda)M_+(\lambda) \upharpoonright H$$
$$\omega_8(\lambda) = -P_{\mathcal{H}_0,H}T_\tau(\lambda)(M_+(\lambda) \upharpoonright \widehat{H} + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H},\mathcal{H}_1}),\quad \omega_9(\lambda) = P_{\mathcal{H}_0,H}T_\tau(\lambda) \upharpoonright H$$

З іншого боку,

$$X_1^* = \begin{pmatrix} P_{\mathcal{H}_1,H} & 0 \\ P_{\mathcal{H}_1,\widehat{H}} & \frac{i}{2}P_{\mathcal{H}_0,\widehat{H}} \\ 0 & P_{\mathcal{H}_0,H} \end{pmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0 \to H \oplus \widehat{H} \oplus H,$$

і безпосередній підрахунок показує, що

$$X_1^*\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda)X_2 = \begin{pmatrix} \omega_1(\lambda) & \omega_2(\lambda) & \omega_3(\lambda) \\ \omega_4(\lambda) & \omega_5(\lambda) & \omega_6(\lambda) \\ \omega_7(\lambda) & \omega_8(\lambda) & \omega_9(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає (4.85). □

Наступна лема безпосередньо випливає з [37, Лема 21].

Лема 4.18. *Нехай $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ – гільбертові простори, $\mathcal{H}_1$ – підпростір в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$ і*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \\ a_3(\lambda) & a_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$
$$\widetilde{\gamma}(\lambda) = (\widetilde{\gamma}_1(\lambda), \widetilde{\gamma}_2(\lambda)) : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

– *оператор-функції, що задовільняють для всіх* $\mu, \lambda \in \mathbb{C}_+$ *тотожностям*

$$a_1(\mu) - a_1^*(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_1(\mu), \quad a_2(\mu) - a_3^*(\lambda)P_1 = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu), \tag{4.87}$$

$$a_4(\mu) - a_4^*(\lambda)P_1 + iP_2 = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu) \tag{4.88}$$

(в (4.88) $a_4(\mu)$ *розглядається як оператор, що діє в* $\mathcal{H}_0$ *). Припустимо, що* $\tau = \tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), -C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *і*

$$\varphi_\tau(\lambda) = a_1(\lambda) - a_2(\lambda)(C_0(\lambda) + C_1(\lambda)a_4(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)a_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$\gamma_\tau(\lambda) = \widetilde{\gamma}_1(\lambda) - \widetilde{\gamma}_2(\lambda)(C_0(\lambda) + C_1(\lambda)a_4(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)a_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

Тоді справедлива нерівність

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1} \cdot \mathrm{Im}\varphi_\tau(\lambda) \geq \gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.89}$$

внаслідок якої $\varphi_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$. *Якщо, крім того,* $\tau \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, *то*

$$\varphi_\tau(\mu) - \varphi_\tau^*(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda})\gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\mu), \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+$$

і нерівність (4.89) *стає рівнісотю.*

Теорема 4.19. *Нехай виконані припущення* 1) та 2) *твердження 4.9. Крім того, нехай* $\{\mathbb{H}, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – *граничний комплекс* (3.123), (3.126), $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ – *операторна пара* (4.5) *і* $R(\lambda)$ – *узагальнена резольвента відношення* T_{min}, *породжена згідно з теоремою 4.5 граничною задачею* (4.9), (4.10). *Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдиний операторний розв'язок* $Y_{\widetilde{\tau}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[\mathbb{H}]$ *системи* (3.5), *що задовільняє граничній умові*

$$C_a(\lambda)(\Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) + J) + C_b(\lambda)\Gamma_b Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.90}$$

і характеристична матриця $\Omega(\cdot)$, *що відповідає* $R(\lambda)$ *та розв'язку* $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda)$, *задається рівностю*

$$\Omega(\lambda) = \Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) + \tfrac{1}{2}J, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.91}$$

(2) *Справедлива нерівність*

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1} \cdot \mathrm{Im}\Omega(\lambda) \geq \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{\tau}}^*(t, \lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{\tau}}(t, \lambda)\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.92}$$

Якщо, крім того, $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$ *і* $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ *(тобто* $\Omega(\cdot)$ *є канонічною характеристичною матрицею), то справедлива тотожність*

$$\Omega(\mu) - \Omega^*(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{\tau}}^*(t, \lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{\tau}}(t, \mu)\, dt, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.93}$$

і нерівність (4.92) *переходить в рівність.*

Доведення. (1) Нехай блочними зображеннями $C_a(\lambda)$ та $C_b(\lambda)$ відносно розкладів (3.2) та (3.130) є

$$C_a(\lambda) = (C_{a0}(\lambda),\, \widehat{C}_a(\lambda),\, C_{a1}(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \mathcal{K} \tag{4.94}$$

$$C_b(\lambda) = (\widetilde{C}_{b0}(\lambda), \widehat{C}'_b(\lambda),\, C_{b1}(\lambda)) : \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to .\mathcal{K} \tag{4.95}$$

Крім того, нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ – простори (3.132), (3.133) і Γ'_j – оператори (3.134), (3.135). Тоді граничний параметр $\tau = \{C_0(\lambda), -C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, що відповідає $\widetilde{\tau}$ згідно з лемою 4.4, задається рівностями

$$C_0(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), -\tfrac{i}{2}(\widehat{C}_a(\lambda) - \widehat{C}'_b(\lambda)), \widetilde{C}_{b0}(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathcal{K} \tag{4.96}$$

$$C_1(\lambda) = (C_{a0}(\lambda), \widehat{C}_a(\lambda) + \widehat{C}'_b(\lambda), -C_{b1}(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}. \tag{4.97}$$

і справедлива формула (3.103). Розглянемо граничну задачу (4.1), (4.2), що відповідає граничному параметру τ. В силу (3.103) ця задача еквівалентна задачи (4.9), (4.10) і, отже, $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$ та $\Omega(\lambda) = \Omega_\tau(\lambda)$. Нехай $Z_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_0, \mathbb{H}]$ та $Z_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ – операторні розв'язки системи (3.5), задані рівностями (4.31) і

$$Z_0(t,\lambda) = (\xi_0(t,\lambda), \widehat{\xi}_0(t,\lambda), 0) : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.98}$$

відвовідно. Тоді рівність

$$Y_{\widetilde{\tau}}(t,\lambda) = Z_0(t,\lambda) - Z_+(t,\lambda)(C_0(\lambda) + C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.99}$$

задає операторне рішення $Y_{\widetilde{\tau}}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ тієї ж системи. Покажемо, що це рішення задовільняє (4.90). Внаслідок (3.103) та (4.26), (4.42) маємо

$$C_a(\lambda)\Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) + C_b(\lambda)\Gamma_b Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) = (C_0(\lambda)\Gamma'_0 Z_0(\lambda) + C_1(\lambda)\Gamma'_1 Z_0(\lambda)) -$$
$$(C_0(\lambda)\Gamma'_0 Z_+(\lambda) + C_1(\lambda)\Gamma'_1 Z_+(\lambda))(C_0(\lambda) + C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda) =$$
$$C_0(\lambda)\Gamma'_0 Z_0(\lambda) + C_1(\lambda)(\Gamma'_1 Z_0(\lambda) - S_2(\lambda)).$$

Крім того, в силу (4.98) та (4.26),(4.42)

$$\Gamma'_0 Z_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma'_1 Z_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & 0 \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & 0 \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

і, отже, $\Gamma'_1 Z_0(\lambda) - S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_H \\ 0 & -\frac{i}{2} I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Звідси та з (4.96), (4.97) випливає, що

$$C_a(\lambda)\Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) + C_b(\lambda)\Gamma_b Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) = (-C_{a1}(\lambda), -\tfrac{i}{2}(\widehat{C}_a(\lambda) - \widehat{C}'_b(\lambda)), \widetilde{C}_{b0}(\lambda)) \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+(C_{a0}(\lambda), \widehat{C}_a(\lambda) + \widehat{C}'_b(\lambda), -C_{b1}(\lambda)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_H \\ 0 & -\frac{i}{2} I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-C_{a1}(\lambda),\, -i\widehat{C}_a(\lambda), C_{a0}(\lambda)) = -C_a(\lambda)J.$$

Тому вірною є рівність (4.90).

Припустимо, далі, що $\widetilde{Y}_{\widetilde{\tau}}(\cdot,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}_+,$ – інший операторний розв'язок системи (3.5), що належить до $\mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ і задовільняє (4.90). Тоді для кожного $h\in\mathbb{H}$ і $\lambda\in\mathbb{C}_+$ функція $y=(Y_{\widetilde{\tau}}(t,\lambda)-\widetilde{Y}_{\widetilde{\tau}}(t,\lambda))h$ є рішенням однородної граничної задачі (4.9), (4.10) (з $f=0$). Оскільки в силу теореми 4.5 така задача має єдине рішення $y=0$, то $Y_{\widetilde{\tau}}(t,\lambda)=\widetilde{Y}_{\widetilde{\tau}}(t,\lambda)$ і, отже, існує єдине рішення $Y_{\widetilde{\tau}}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$, що задавільняє (4.90).

Внаслідок (4.51) маємо

$$\Gamma_a Z_0(\lambda)=\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & 0\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & 0\\ -I_H & 0 & 0\end{pmatrix}=\Omega_0(\lambda)-\tfrac{1}{2}J \tag{4.100}$$

і застосування оператора Γ_a до (4.99) з огляду на (4.100) та першу рівність в (4.74) дає

$$\Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda)=\Omega_0(\lambda)-\tfrac{1}{2}J-S_1(\lambda)(C_0(\lambda)+C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Тому внаслідок (4.69) $\Gamma_a Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda)=\Omega_\tau(\lambda)-\frac{1}{2}J$ і, отже, характеристична матриця $\Omega(\lambda)(=\Omega_\tau(\lambda))$ задовільняє (4.91).

(2) Нехай $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка (3.106) для T_{max},

$$\gamma_+(\lambda)=(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\gamma_3(\lambda)):H\oplus\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b\to\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

– блочне зображення γ-поля $\gamma_+(\cdot)$ трійки Π і $M_+(\cdot)$ – відповідна функція Вейля (4.34). Тоді внаслідок (2.88) для всіх $\mu,\lambda\in\mathbb{C}_+$ справедливі тотожності

$$M_{11}(\mu)-M_{11}^*(\lambda)=(\mu-\overline{\lambda})\gamma_1^*(\lambda)\gamma_1(\mu),\quad M_{12}(\mu)-M_{21}^*(\lambda)=(\mu-\overline{\lambda})\gamma_1^*(\lambda)\gamma_2(\mu) \tag{4.101}$$

$$M_{13}(\mu)-M_{31}^*(\lambda)P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}=(\mu-\overline{\lambda})\gamma_1^*(\lambda)\gamma_3(\mu),\quad M_{22}(\mu)-M_{22}^*(\lambda)=(\mu-\overline{\lambda})\gamma_2^*(\lambda)\gamma_2(\mu) \tag{4.102}$$

$$M_{23}(\mu)-M_{32}^*(\lambda)P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}=(\mu-\overline{\lambda})\gamma_2^*(\lambda)\gamma_3(\mu). \tag{4.103}$$

Нехай

$$\widetilde{\gamma}_1(\lambda)=(\gamma_1(\lambda),\ \gamma_2(\lambda),\ 0):H\oplus\widehat{H}\oplus H\to\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.104}$$

Тоді безпосередній підрахунок з огляду на (4.101)-(4.103) показує, що

$$\Omega_0(\mu)-\Omega_0^*(\lambda)=(\mu-\overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_1(\mu),\ \ S_1(\mu)-S_2^*(\lambda)P_{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1}=(\mu-\overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\gamma_+(\mu),\ \ \mu,\lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.105}$$

Звідси та з (2.88) випливає, що оператор-функції

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\Omega_0(\lambda) & S_1(\lambda)\\ S_2(\lambda) & M_+(\lambda)\end{pmatrix}:\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_0\to\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.106}$$

$$\widetilde{\gamma}(\lambda)=(\widetilde{\gamma}_1(\lambda),\ \gamma_+(\lambda)):\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_0\to\mathfrak{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{4.107}$$

задовільняють умовам леми 4.18.

Як вже відзначалося в доведенні твердження (1) $\Omega(\lambda)=\Omega_\tau(\lambda)$, де $\tau=\{C_0(\lambda),-C_1(\lambda)\}$ – граничний параметр (4.96), (4.97). Тому в силу теореми 4.16

$$\Omega(\lambda)=\Omega_0(\lambda)-S_1(\lambda)(C_0(\lambda)+C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

і згідно з лемою 4.18 справедлива нерівність

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\cdot \mathrm{Im}\Omega(\lambda) \geq \gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{4.108}$$

в якій

$$\gamma_\tau(\lambda) = \widetilde{\gamma}_1(\lambda) - \gamma_+(\lambda)(C_0(\lambda)+C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.109}$$

З (4.33) та (4.31) випливає, що $\gamma_+(\lambda) = \pi_\Delta Z_+(\lambda)$, $\gamma_1(\lambda) = \pi_\Delta \xi_0(\lambda)$ та $\gamma_2(\lambda) = \pi_\Delta \widehat{\xi}_0(\lambda)$. Тому через (4.98) та (4.104) $\widetilde{\gamma}_1(\lambda) = \pi_\Delta Z_0(\lambda)$ і внаслідок (4.109) та (4.99) маємо

$$\gamma_\tau(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda), \tag{4.110}$$

де $Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda)$ – відображення (3.17) для $Y_{\widetilde{\tau}}(\cdot,\lambda)$. Тому за лемою 3.4, (2)

$$\gamma_\tau^*(\lambda)\widetilde{f} = \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{\tau}}^*(t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad \widetilde{f}\in\mathfrak{H}, \ \ f\in\widetilde{f}, \tag{4.111}$$

і поєднання (4.108) з (4.110) та (4.111) дає потрібну нерівність (4.92).

Якщо $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$ і $\widetilde{\tau}\in\mathcal{S}^0(\mathbb{H},\mathbb{H}_b)$, то $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 =: \mathcal{H}$ і $\tau\in\widetilde{R}^0(\mathcal{H})$. Тому згідно з лемою 4.18

$$\Omega(\mu) - \Omega^*(\lambda) = (\mu-\overline{\lambda})\gamma_\tau^*(\lambda)\gamma_\tau(\mu), \quad \mu,\lambda\in\mathbb{C}_+,$$

що внаслідок (4.110) та (4.111) дає тотожність (4.93) □

Зауваження 4.20. Рівність (4.91) можна розглядати як нове означення характеристичної матриці $\Omega(\cdot)$ симетричної системи з регулярною кінцевою точкою, що відповідає розв'язку $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)$.

4.4. Випадок максимального індексу дефекту

4.4.1. Матриця $W(\lambda)$

Лема 4.21. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною, $\delta = 1$ й формальний індекс дефекту N_+ системи (3.5) набуває максимально можливого значення $N_+ = n$. Тоді має місто випадок a1 й існує підпростір $\mathcal{H}_b\subset H$ та оператор*

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b},\ \widehat{\Gamma}'_b,\ \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\to H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b, \tag{4.112}$$

такі що сукупність $\{H,\mathcal{H}_b,\Gamma_b\}$ є b-граничним комплексом типу 1. Якщо, крім того, система є квазірегулярною (тобто $N_+ = N_- = n$), то $\mathcal{H}_b = H$ і, отже, існує b-граничний комплекс типу 1 $\{H,H,\Gamma_b\}$ з оператором

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b},\ \widehat{\Gamma}_b,\ \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H. \tag{4.113}$$

Інакше кажучи, у цьому випадку існує сюр'єктивний оператор (4.113) *що задовільняє тотожності*

$$[y,z]_b = (J\Gamma_b y,\Gamma_b z) = i(\widehat{\Gamma}_b y,\widehat{\Gamma}_b z) - (\Gamma_{1b}y,\Gamma_{0b}z) + (\Gamma_{0b}y,\Gamma_{1b}z), \quad y,z\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}. \tag{4.114}$$

Доведення. Оскільки $N_- \leq n = N_+$, то згідно зауваження 3.44 має місце випадок a1. Нехай $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 1 (3.131) і $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ – простори (3.132) та (3.133). Тоді внаслідок (3.145) та (3.153) $\dim \mathcal{H}_0 = N_+$, $\dim \mathcal{H}_1 = N_-$ і, отже,

$$\dim \widetilde{\mathcal{H}}_b = N_+ - (\nu + \widehat{\nu}), \qquad \dim \mathcal{H}_b = N_- - (\nu + \widehat{\nu}). \tag{4.115}$$

Оскільки $N_+ = n = 2\nu + \widehat{\nu}$, то згідно з (4.115) $\dim \widetilde{\mathcal{H}}_b = \nu (= \dim H)$. Тому без обмеження загальності можна вважати $\widetilde{\mathcal{H}}_b = H$, так що формула (3.131) приймає вигляд (4.112). Якщо ж, крім того, $N_+ = N_- = n$, то внаслідок (4.115) $\dim \mathcal{H}_b = \nu (= \dim H)$. Тому $\mathcal{H}_b = H$ і рівність (4.112) приймає вигляд (4.113). ☐

Надалі в межах цього пункту припускаємо, що:

(П1) система (3.5) є визначеною, кінцева точка a є регулярною і $\delta = 1$, $N_+ = n$ (так що має місце випадок a1).

(П2) $\widetilde{U}$ – J-унітарний оператор (3.120) і Γ_{0a}, $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.121), (3.122).

(П3) $\{H, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 1 (4.112).

У цьому випадку

$$\mathcal{H}_0 = H \oplus \widehat{H} \oplus H = \mathbb{H}, \qquad \mathcal{H}_1 = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b (\subset \mathbb{H}) \tag{4.116}$$

і розділена гранична трійка Π для T_{max} приймає вигляд $\Pi = \{\mathbb{H} \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, де Γ_j – оператори, задані рівностями (3.106) та (3.134), (3.135) з $\widetilde{\mathcal{H}}_b = H$. Крім того, функція Вейля $M_+(\cdot)$ цієї трійки має блочне зображення

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda) \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.117}$$

з елементами $M_{ij}(\lambda)$, що задаються рівностями (4.35)-(4.37). Відзначимо також, що рівність (4.67) приймає вигляд

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) - \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} & M_{23}(\lambda) \\ -I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.118}$$

Оскільки $n_+(T_{min}) = n$, то $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Тому рівність

$$B(\lambda) = \Gamma_b Y_{\widetilde{U}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.119}$$

коректно визначає голоморфну оператор-функцію $B(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}, \mathcal{H}_1]$, яка з урахуванням (4.15) може бути зображена як

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma}_{0b} \\ \widehat{\Gamma}'_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} (\varphi_0(\lambda), \widehat{\varphi}(\lambda), \psi(\lambda)) = \tag{4.120}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) & B_{13}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) & B_{23}(\lambda) \\ B_{31}(\lambda) & B_{32}(\lambda) & B_{33}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Покладемо

$$W(\lambda)=\begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda)\\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda)\end{pmatrix}:\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\to\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1, \tag{4.121}$$

де

$$w_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_H\\ -iB_{21}(\lambda) & -i(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat H}) & -iB_{23}(\lambda)\\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) & B_{13}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{4.122}$$

$$w_2(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac12 I_H & 0 & 0\\ -\frac{i}{2}B_{23}(\lambda) & \frac12(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat H}) & \frac{i}{2}B_{21}(\lambda)\\ \frac12 B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda) & -\frac12 B_{11}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{4.123}$$

$$w_3(\lambda)=\begin{pmatrix} -I_H & 0 & 0\\ -\frac12 B_{21}(\lambda) & -\frac12(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat H}) & -\frac12 B_{23}(\lambda)\\ B_{31}(\lambda) & B_{32}(\lambda) & B_{33}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1} \tag{4.124}$$

$$w_4(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac12 I_H\\ -\frac14 B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat H}) & \frac14 B_{21}(\lambda)\\ \frac12 B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda) & -\frac12 B_{31}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus H}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{H\oplus\widehat H\oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1} \tag{4.125}$$

Ясно, що рівності (4.121)-(4.125) задають голоморфну оператор-функцію $W(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathbb{H}\oplus\mathbb{H},\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1]$.

Твердження 4.22. *Нехай* $M_+(\lambda)$ *– функція Вейля* (4.117) *і* $\Omega_0(\lambda)$, $S_1(\lambda)$ *та* $S_2(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, *– голоморфні оператор-функції* (4.66), (4.118) *та* (4.68). *Тоді для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *оператор* $S_1(\lambda)$ *оборотній і оператор-функція* $W(\lambda)$ *допускає блочне зображення*

$$W(\lambda)=\begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda)\\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1^{-1}(\lambda) & S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda)\\ -M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) & S_2(\lambda)-M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda)\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.126}$$

Доведення. Нехай $Z_+(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ – операторне рішення (4.31) системи (3.5) і Γ_0' та Γ_1' – оператори (3.134), (3.135). Тоді внаслідок перших рівностей в (4.26), (4.42) та (4.75) маємо $(\Gamma_0' Y_{\widetilde U}(\lambda))S_1(\lambda)=I_{\mathbb{H}}$ і $(\Gamma_1' Y_{\widetilde U}(\lambda))S_1(\lambda)=M_+(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$. Тому оператор $S_1(\lambda)$ оборотний і

$$\Gamma_0' Y_0(\lambda)=S_1^{-1}(\lambda),\qquad \Gamma_1' Y_0(\lambda)=M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.127}$$

Крім того, безпосередній підрахунок з огляду на (4.120) дає $\Gamma_0' Y_0(\lambda)=w_1(\lambda)$ і $\Gamma_1' Y_0(\lambda)=-w_3(\lambda)$, де $w_1(\lambda)$ та $w_3(\lambda)$ визначені в (4.122) та (4.124) відповідно. Тому в силу (4.127)

$$w_1(\lambda)=S_1^{-1}(\lambda),\qquad w_3(\lambda)=-M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{4.128}$$

Далі, згідно з (4.128) маємо

$$S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda)=w_1(\lambda)\Omega_0(\lambda),\quad S_2(\lambda)-M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda)=S_2(\lambda)+w_3(\lambda)\Omega_0(\lambda). \tag{4.129}$$

Оскільки $w_1(\lambda)$ є оборотним, то з (4.122) випливає, що оператор $\begin{pmatrix} -iB_{21}(\lambda) & -i(B_{22}(\lambda)-I) \\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}$ також є оборотним. Нехай $\begin{pmatrix} x_1(\lambda) & x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) & x_4(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -iB_{21}(\lambda) & -i(B_{22}(\lambda)-I) \\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}^{-1}$, так що

$$-iB_{21}(\lambda)x_1(\lambda) - i(B_{22}(\lambda) - I_{\widehat{H}})x_3(\lambda) = I_{\widehat{H}}, \qquad B_{11}(\lambda)x_1(\lambda) + B_{12}(\lambda)x_3(\lambda) = 0 \tag{4.130}$$

$$-iB_{21}(\lambda)x_2(\lambda) - i(B_{22}(\lambda) - I_{\widehat{H}})x_4(\lambda) = 0, \qquad B_{11}(\lambda)x_2(\lambda) + B_{12}(\lambda)x_4(\lambda) = I_H. \tag{4.131}$$

Оскільки $S_1(\lambda) = w_1^{-1}(\lambda)$, то з (4.122) випливає, що

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -ix_1(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_2(\lambda)B_{13}(\lambda) & x_1(\lambda) & x_2(\lambda) \\ -ix_3(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_4(\lambda)B_{13}(\lambda) & x_3(\lambda) & x_4(\lambda) \\ -I_H & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.132}$$

Порівнюючи (4.132) з (4.118), отримуємо

$$M_{11}(\lambda) = -ix_1(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_2(\lambda)B_{13}(\lambda), \qquad M_{12}(\lambda) = x_1(\lambda) \tag{4.133}$$

$$M_{21}(\lambda) = -ix_3(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_4(\lambda)B_{13}(\lambda), \qquad M_{22}(\lambda) = x_3(\lambda) + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}}. \tag{4.134}$$

Крім того, в силу (4.128) маємо $M_+(\lambda) = -w_3(\lambda)S_1(\lambda)$. Ця рівність сумісно з (4.124) та (4.132) дає

$$\begin{aligned} M_{31}(\lambda) = -B_{31}(\lambda)(-ix_1(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_2(\lambda)B_{13}(\lambda)) - \\ -B_{32}(\lambda)(-ix_3(\lambda)B_{23}(\lambda) + x_4(\lambda)B_{13}(\lambda)) + B_{33}(\lambda), \end{aligned} \tag{4.135}$$

$$M_{32}(\lambda) = -B_{31}(\lambda)x_1(\lambda) - B_{32}(\lambda)x_3(\lambda). \tag{4.136}$$

Підставляючи (4.133)-(4.136) в праву частину рівностей (4.66) та (4.68), отримуємо зображення $\Omega_0(\lambda)$ та $S_2(\lambda)$ за допомоги $B_{ij}(\lambda)$ та $x_j(\lambda)$. Крім того, (4.122) та (4.124) дають аналогичне зображення для $w_1(\lambda)$ та $w_3(\lambda)$. Тепер бозпосередній підрахунок з огляду на (4.130) та (4.131) показує, що $w_1(\lambda)\Omega_0(\lambda) = w_2(\lambda)$ і $S_2(\lambda) + w_3(\lambda)\Omega_0(\lambda) = w_4(\lambda)$, де $w_2(\lambda)$ та $w_4(\lambda)$ визначені в (4.123) та (4.125) відповідно. Звідси та з (4.129) випливає, що

$$w_2(\lambda) = S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda), \qquad w_4(\lambda) = S_2(\lambda) - M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.137}$$

Підставляючи (4.128) та (4.137) в (4.121), отримуємо зображення (4.126) для $W(\lambda)$. □

Лема 4.23. *Нехай за умов леми 4.18 оператор $a_2(\lambda)$ є оборотним і*

$$\begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda) \\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2^{-1}(\lambda) & a_2^{-1}(\lambda)a_1(\lambda) \\ -a_4(\lambda)a_2^{-1}(\lambda) & a_3(\lambda) - a_4(\lambda)a_2^{-1}(\lambda)a_1(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,$$

$$Q_0(\lambda) := \widetilde{\gamma}_2(\lambda)a_2^{-1}(\lambda)(\in [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]), \quad Q_1(\lambda) := -\widetilde{\gamma}_1(\lambda) + \widetilde{\gamma}_2(\lambda)a_2^{-1}(\lambda)a_1(\lambda)(\in [\mathcal{H}, \mathfrak{H}]), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тоді для всіх $\mu, \lambda \in \mathbb{C}_+$ вірними є тотожності

$$iw_1^*(\lambda)P_2w_1(\mu) - w_1^*(\lambda)w_3(\mu) + w_3^*(\lambda)P_1w_1(\mu) = (\mu - \overline{\lambda})Q_0^*(\lambda)Q_0(\mu) \tag{4.138}$$

$$iw_2^*(\lambda)P_2w_1(\mu) - w_2^*(\lambda)w_3(\mu) + w_4^*(\lambda)P_1w_1(\mu) - I_{\mathcal{K}} = (\mu - \overline{\lambda})Q_1^*(\lambda)Q_0(\mu) \tag{4.139}$$

$$iw_2^*(\lambda)P_2w_2(\mu) - w_2^*(\lambda)w_4(\mu) + w_4^*(\lambda)P_1w_2(\mu) = (\mu - \overline{\lambda})Q_1^*(\lambda)Q_1(\mu). \tag{4.140}$$

Доведення. Використовуючи (4.87) та (4.88), отримуємо

$$
\begin{gathered}
iw_1^*(\lambda)P_2w_1(\mu)-w_1^*(\lambda)w_3(\mu)+w_3^*(\lambda)P_1w_1(\mu)=ia_2^{-1*}(\lambda)P_2a_2^{-1}(\mu)+\\
+a_2^{-1*}(\lambda)a_4(\mu)a_2^{-1}(\mu)-a_2^{-1*}(\lambda)a_4^*(\lambda)P_1a_2^{-1}(\mu)=a_2^{-1*}(\lambda)(iP_2+a_4(\mu)-a_4^*(\lambda)P_1)a_2^{-1}(\mu)=\\
=(\mu-\overline{\lambda})a_2^{-1*}(\lambda)\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)a_2^{-1}(\mu)=(\mu-\overline{\lambda})Q_0^*(\lambda)Q_0(\mu);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
iw_2^*(\lambda)P_2w_1(\mu)-w_2^*(\lambda)w_3(\mu)+w_4^*(\lambda)P_1w_1(\mu)-I_{\mathcal{K}}=\\
=a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)(a_4(\mu)-a_4^*(\lambda)P_1+iP_2)a_2^{-1}(\mu)-(a_2(\mu)-a_3^*(\lambda)P_1)a_2^{-1}(\mu)=\\
=(\mu-\overline{\lambda})[a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)a_2^{-1}(\mu)-\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)a_2^{-1}(\mu)]=(\mu-\overline{\lambda})Q_1^*(\lambda)Q_0(\mu);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
iw_2^*(\lambda)P_2w_2(\mu)-w_2^*(\lambda)w_4(\mu)+w_4^*(\lambda)P_1w_2(\mu)=\\
=ia_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)P_2a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)a_3(\mu)+a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)a_4(\mu)a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)+\\
+a_3^*(\lambda)P_1a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)a_4^*(\lambda)P_1a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)=\\
=a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)(iP_2+a_4(\mu)-a_4^*(\lambda)P_1)a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-(a_2(\mu)-a_3^*(\lambda)P_1)a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-\\
-a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)(a_3(\mu)-a_2^*(\lambda))+(a_1(\mu)-a_1^*(\lambda))=\\
(\mu-\overline{\lambda})[a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)a_2^{-1}(\mu)a_1(\mu)-\\
-a_1^*(\lambda)a_2^{-1*}(\lambda)\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_1(\mu)+\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_1(\mu)]=(\mu-\overline{\lambda})Q_1^*(\lambda)Q_1(\mu)
\end{gathered}
$$

Звідси випливає (4.138)-(4.140). ☐

Лема 4.23 використовується для доведення наступної пропозиції.

Твердження 4.24. *Припустимо, що* $\mathcal{H}_1\subset\mathbb{H}$ *– підпростір* (4.116), $\mathcal{H}_2=\mathbb{H}\ominus\mathcal{H}_1(=H\ominus\mathcal{H}_b)$, $P_1=P_{\mathbb{H},\mathcal{H}_1}(\in[\mathbb{H},\mathcal{H}_1])$ *– ортопроектор в* $\mathbb{H}$ *на* $\mathcal{H}_1$ *і* $P_2=P_{\mathcal{H}_2}(\in[\mathbb{H}])$ *– ортопроектор в* $\mathbb{H}$ *на* $\mathcal{H}_2$*. Крім того, нехай* $W(\cdot)$ *– оператор-функція, задана рівностями* (4.121)-(4.125) *і* $Y_1(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}_\Delta^2[\mathbb{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, *– операторний розв'язок системи* (3.5), *такий що* $\widetilde{U}Y_1(a,\lambda)=\frac{1}{2}J$*. Тоді для всіх* $\lambda,\mu\in\mathbb{C}_+$

$$iw_1^*(\lambda)P_2w_1(\mu)-w_1^*(\lambda)w_3(\mu)+w_3^*(\lambda)P_1w_1(\mu)=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_{\widetilde{U}}^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt, \tag{4.141}$$

$$iw_2^*(\lambda)P_2w_1(\mu)-w_2^*(\lambda)w_3(\mu)+w_4^*(\lambda)P_1w_1(\mu)-I_{\mathbb{H}}=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt, \tag{4.142}$$

$$iw_2^*(\lambda)P_2w_2(\mu)-w_2^*(\lambda)w_4(\mu)+w_4^*(\lambda)P_1w_2(\mu)=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_1(t,\mu)\,dt. \tag{4.143}$$

Тотожності (4.141)-(4.143) *означають, що*

$$W^*(\lambda)J_2W(\mu)-J_1=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}\widetilde{Y}^*(t,\lambda)\Delta(t)\widetilde{Y}(t,\mu)\,dt,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C}_+,$$

де $\widetilde{Y}(t,\lambda)=(Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda),\,Y_1(t,\lambda)):\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, *і*

$$J_1=\begin{pmatrix}0 & -I_{\mathbb{H}}\\ I_{\mathbb{H}} & 0\end{pmatrix}:\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\to\mathbb{H}\oplus\mathbb{H},\quad J_2=\begin{pmatrix}iP_2 & -I_{\mathcal{H}_1}\\ P_1 & 0\end{pmatrix}:\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1\to\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1. \tag{4.144}$$

Доведення. Нехай $A(\lambda)$ – матриця (4.106) і $\widetilde{\gamma}(\lambda)$ – оператор-функція (4.107). Тоді справедливі рівності (2.88) та (4.105) і оператор-функція $W(\lambda)$ допускає зображення (4.126). Тому згідно з лемою 4.23 справедливі тотожності (4.138)-(4.140), в яких

$$Q_0(\lambda) = \gamma_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda), \qquad Q_1(\lambda) = -\widetilde{\gamma}_1(\lambda) + \gamma_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.145}$$

Покажемо, що

$$Q_0(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{U}}(\lambda), \quad Q_1(\lambda) = \pi_\Delta Y_1(\lambda), \tag{4.146}$$

де $Y_{\widetilde{U}}(\lambda)$ та $Y_1(\lambda)$ – лінійні відображення (3.17) для операторних розв'язків $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)$ та $Y_1(\cdot,\lambda)$.

З (4.33) та (4.75) виплиdає, що

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{U}}(\lambda)S_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.147}$$

Крім того, в силу (4.104) $\widetilde{\gamma}_1(\lambda) = \gamma_+(\lambda)X$, де

$$X = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to H \oplus \widehat{H} \oplus H.$$

Тому внаслідок (4.147) маємо

$$\widetilde{\gamma}_1(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{U}}(\lambda)S_1(\lambda)X, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.148}$$

Комбінуючи першу рівність в (4.145) з (4.147), отримуємо першу рівність в (4.146). Крім того, внаслідок (4.147), (4.148) та другої рівності в (4.145)

$$Q_1(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{U}}(\lambda)(\Omega_0(\lambda) - S_1(\lambda)X)$$

і безпосередній підрахунок дає $\Omega_0(\lambda) - S_1(\lambda)X = \frac{1}{2}J$. Відзначимо також, що $Y_1(\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(\lambda)(\frac{1}{2}J)$. Тому $Q_1(\lambda) = \pi_\Delta Y_{\widetilde{U}}(\lambda)(\frac{1}{2}J) = \pi_\Delta Y_1(\lambda)$, що доводить другу рівність в (4.146).

Далі. застосування леми 3.4, (2) до відображень (4.146) дає

$$Q_0^*(\lambda)\widetilde{f} = \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{U}}^*(t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad Q_1^*(\lambda)\widetilde{f} = \int_{\mathcal{I}} Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}, \quad f \in \widetilde{f},$$

звідки випливають рівності

$$Q_0^*(\lambda)Q_0(\mu) = \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{U}}^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt, \quad Q_1^*(\lambda)Q_0(\mu) = \int_{\mathcal{I}} Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt$$

$$Q_1^*(\lambda)Q_1(\mu) = \int_{\mathcal{I}} Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_1(t,\mu)\,dt, \quad \mu,\lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тепер тотожності (4.141)-(4.143) випливають з (4.138)-(4.140). □

4.4.2. Квазірегулірні системи

Теорема 4.25. *Припустимо, що (довільна) система* (3.5) *задана на проміжку* $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) *Система має максимальні формальні індекси дефекту* $N_+ = N_- = n$

(2) $\dim \mathcal{N}_\lambda = n$ *для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}$

(3) *Існує* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, *таке що* $\dim \mathcal{N}_{\lambda_0} = \dim \mathcal{N}_{\overline{\lambda}_0} = n$.

Доведення. 1) Спочатку доведемо теорему для визначеної системи (3.5) з регулярною кінцевою точкою a.

(1)⇒ (2). Нехай $G_0(\cdot,\cdot,\lambda)$ – функція Гріна (4.53). Оскільки $\varphi(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$, то внаслідок (3.1) маємо

$$\int\int_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \left|\left|\Delta^{\frac{1}{2}}(x)G_0(x,t,\lambda)\Delta^{\frac{1}{2}}(t)\right|\right|^2 dx\,dt \le \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.149}$$

Нехай $L^2(\mathcal{I})$ – гільбертів простір борелівских функцій $g(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} ||g(t)||^2\,dt < \infty$. З (4.149) випливає, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ рівність

$$(Sg)(x) = \int_{\mathcal{I}} \Delta^{\frac{1}{2}}(x)G_0(x,t,\lambda)\Delta^{\frac{1}{2}}(t)g(t)\,dt, \quad g = g(\cdot) \in L^2(\mathcal{I})$$

задає компактний оператор $S \in [L^2(\mathcal{I})]$. Крім того, внаслідок (4.55) резольвента $(T_0-\lambda)^{-1}$ відношення T_0 (див. (4.54)) задовільняє співвідношенню

$$V(T_0-\lambda)^{-1} = SV, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $V \in [\mathfrak{H}, L^2(\mathcal{I})]$ – унітарний оператор, заданий рівністю $(V\widetilde{f})(t) = \Delta^{\frac{1}{2}}(t)f(t),\ \widetilde{f} \in \mathfrak{H},\ f(\cdot) \in \widetilde{f}$. Звідси випливає, що відношення T_0 має компактну резольвенту і тому множина $\operatorname{ran}(T_0-\lambda)$ є замкненою для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки $T_0 \in Ext_{T_{min}}$ і $n_\pm(T_{min}) < \infty$, то для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ множина $\operatorname{ran}(T_{min}-\lambda)$ також є замкненою. Крім того, очевидною є рівність $\ker(T_{min}-\lambda) = \{0\},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Тому $\widehat{\rho}(T_{min}) = \mathbb{C}$ і, отже, $\dim \mathcal{N}_\lambda = \dim \mathfrak{N}_\lambda(T_{min}) = n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Імплікація (2)⇒ (3) є очевидною.

(3)⇒ (1) Якщо $\lambda_0 \ne \overline{\lambda}_0$, то твердження (1) є очевидним. Тому припустимо, що $\lambda_0 = \overline{\lambda}_0$. Тоді внаслідок рівності $\ker(T_{min}-\lambda_0) = \{0\}$ маємо (див., наприклад, [40])

$$n = \dim N_{\lambda_0} = \dim \mathfrak{N}_{\lambda_0}(T_{min}) \le n_\pm(T_{min}) = N_\pm \le n.$$

Звідси випливає, що $N_+ = N_- = n$.

2) Припустимо, що система (3.5) на проміжку $\mathcal{I} = [a,b\rangle$ з регулярною кінцевою точкою a є невизначеною. Нехай $a' \in \mathbb{R},\ a' < a$ й $\mathcal{I}' := [a', b\rangle$. Розглянемо систему

$$Jy' - B'(t)y = \lambda\Delta'(t)y, \quad t \in \mathcal{I}' \tag{4.150}$$

з коефіцієнтами $B'(t)$ та $\Delta'(t),\ t \in \mathcal{I}'$, заданими рівностями

$$B'(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a', a) \\ B(t), & t \in \mathcal{I} \end{cases}, \qquad \Delta'(t) = \begin{cases} I_{\mathbb{H}}, & t \in [a', a) \\ \Delta(t), & t \in \mathcal{I} \end{cases}.$$

Очевидно, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедлива рівність $\dim \mathcal{N}'_\lambda = \dim \mathcal{N}_\lambda$, де $\mathcal{N}'_\lambda$ – простір (3.13) для системи (4.150). Крім того, система (4.150) з регулярною кінцевою точкою a' є визначеною і тому для неї еквівалентними є твердження (1) - (3). Звідси випливає справедливість теореми для системи (3.5) з регулярною кінцевою точкою.

3) Припустимо, що обидві кінцеві точки a та b є сингулярними. Нехай $c \in (a, b)$ і $\mathcal{N}_{l\lambda}$ ($\mathcal{N}_{r\lambda}$) – простір (3.13) для звуження системи на $(a, c]$ (відп. $[c, b)$). Очевидно, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедлива еквівалентність $\dim \mathcal{N}_\lambda = n \iff \dim \mathcal{N}_{l\lambda} = \dim \mathcal{N}_{r\lambda} = n$. Звідси та зі вже доведеної еквівалентності тверджень (1) - (3) для системи (3.5) з регулярною кінцевою точкою випливає твердження теореми для довільної системи. □

Означення 4.26. Симетрична система (3.5) називається квазірегулярною, якщо виконана хоча б одна з умов (1)–(3) (і тому всі ці умови).

Очевидно, що регулярна система є квазірегулярною.

Нехай виконані такі припущення:

(ПК1) система (3.5) з регулярною кінцевою точкою a є визначеною та квазірегулярною і $\delta = 1$.

(ПК2) $\widetilde{U}$ – J-унітарний оператор (3.120) і Γ_{0a}, $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.121), (3.122).

(ПК3) $\Gamma_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathbb{H}$ – сюр'єктивний оператор (4.113), що задовільняє тотожності (4.114) (існування такого оператора випливає з леми 4.21).

Ясно, що з цих припущень випливають припущення (П1)-(П3) попереднього пункту з $\mathcal{H}_b = H$.

Очевидно, що $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ і рівність $B(\lambda) = \Gamma_b Y_{\widetilde{U}}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}$, задає цілу функцію $B(\cdot) : \mathbb{C} \to [\mathbb{H}]$, яка з огляду на (4.15) допускає блочне зображення

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} (\varphi_0(\lambda), \widehat{\varphi}(\lambda), \psi(\lambda)) = \tag{4.151}$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) & B_{13}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) & B_{23}(\lambda) \\ B_{31}(\lambda) & B_{32}(\lambda) & B_{33}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Якщо система є регулярною і $\Gamma_b y = y(b),\ y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, то $B(\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(b, \lambda)$ є матрицею монодромії.

Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ покладемо

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda) \\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \tag{4.152}$$

де елементи $w_j(\lambda),\ j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, визначені рівностями (4.122)-(4.125) з $\mathcal{H}_b = H$. Ясно, що $W(\cdot)$ є цілою $[\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}]$-значною функцією.

Наступне твердження випливає з твердження 4.24.

Твердження 4.27. *Нехай за припущень* (ПК1)-(ПК3) $W(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.152) *і* $Y_1(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}],\ \lambda \in \mathbb{C}$, *– розв'язок системи* (3.5) *з початковою умовою* $\widetilde{U} Y_1(a, \lambda) = \frac{1}{2} J$. *Тоді для всіх* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

справедливі тотожності

$$-w_1^*(\lambda)w_3(\mu)+w_3^*(\lambda)w_1(\mu)=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_{\widetilde{U}}^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt, \tag{4.153}$$

$$-w_2^*(\lambda)w_3(\mu)+w_4^*(\lambda)w_1(\mu)-I_{\mathbb{H}}=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt, \tag{4.154}$$

$$-w_2^*(\lambda)w_4(\mu)+w_4^*(\lambda)w_2(\mu)=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}Y_1^*(t,\lambda)\Delta(t)Y_1(t,\mu)\,dt. \tag{4.155}$$

Це означає, що

$$W^*(\lambda)J_1W(\mu)-J_1=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}}\widetilde{Y}^*(t,\lambda)\Delta(t)\widetilde{Y}(t,\mu)\,dt,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C}, \tag{4.156}$$

де J_1 *задано першою рівністю в* (4.144) *і*

$$\widetilde{Y}(t,\lambda)=(Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda),\,Y_1(t,\lambda)):\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\to\mathbb{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.157}$$

Дещо інше зображення оператор-функції $W(\lambda)$ дається в наступному твердженні.

Твердження 4.28. *Нехай виконані припущення* (ПК1) *та* (ПК2). *Крім того, нехай* $Y_j(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}_\Delta^2[\mathbb{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $j\in\{1,2,3\}$ *– операторні розв'язки системи* (3.5) *з початковими умовами*

$$\widetilde{U}Y_1(a,\lambda)=\tfrac{1}{2}J,\qquad \widetilde{U}Y_2(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I_{\widehat{H}}&0\\0&0&-I_H\end{pmatrix},\qquad \widetilde{U}Y_3(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&I_H\\0&\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{4.158}$$

Тоді: (1) *для кожного* $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ *існує границя*

$$\Gamma_b y:=\lim_{t\uparrow b}Y_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)y(t)=\lim_{t\uparrow b}(-JY_{\widetilde{U}}^*(t,0)Jy(t)),\quad y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}, \tag{4.159}$$

і рівність (4.159) *задає сюр'єктивний оператор* $\Gamma_b:\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}\to\mathbb{H}$, *що задовільняє тотожності* (4.114). *Крім того, відповідну оператор-функцію* $B(\lambda)(=\Gamma_bY_{\widetilde{U}}(\lambda))$ *можна зобразити у вигляді*

$$B(\lambda)=\lim_{t\uparrow b}Y_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)=\lim_{t\uparrow b}(-JY_{\widetilde{U}}^*(t,0)JY_{\widetilde{U}}(t,\lambda)),\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.160}$$

(2) *Якщо оператор* Γ_b *задано рівностю* (4.159), *то елементи відповідної оператор-функції* $W(\lambda)$ *(див.* (4.152)*) допускають зображення*

$$w_1(\lambda)=C_1-\lambda\int_{\mathcal{I}}Y_2^*(t,0)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\,dt,\quad w_2(\lambda)=C_2-\lambda\int_{\mathcal{I}}Y_2^*(t,0)\Delta(t)Y_1(t,\lambda)\,dt \tag{4.161}$$

$$w_3(\lambda)=C_3-\lambda\int_{\mathcal{I}}Y_3^*(t,0)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\,dt,\quad w_4(\lambda)=C_4-\lambda\int_{\mathcal{I}}Y_3^*(t,0)\Delta(t)Y_1(t,\lambda)\,dt \tag{4.162}$$

з операторами $C_j\in[H\oplus\widehat{H}\oplus H]$, *заданими рівностями*

$$C_1=\begin{pmatrix}0&0&-I_H\\0&0&0\\I_H&0&0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_H&0&0\\0&I_{\widehat{H}}&0\\0&0&-\frac{1}{2}I_H\end{pmatrix}, \tag{4.163}$$

$$C_3=\begin{pmatrix}-I_H&0&0\\0&-I_{\widehat{H}}&0\\0&0&I_H\end{pmatrix},\qquad C_4=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}I_H\\0&0&0\\\frac{1}{2}I_H&0&0\end{pmatrix}. \tag{4.164}$$

Доведення. (1) З (4.49) випливає, що $Y_{\widetilde{U}}^*(t,0)JY_{\widetilde{U}}(t,0)=J$ і, отже, $Y_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)=-JY_{\widetilde{U}}^*(t,0)J,\ t\in\mathcal{I}$. Для кожної функції $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ покладемо

$$F_y(t)=Y_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)y(t)=-JY_{\widetilde{U}}^*(t,0)Jy(t). \tag{4.165}$$

Нехай $\widetilde{h}\in\mathbb{H}$ і $z(t)=Y_{\widetilde{U}}(t,0)\widetilde{h}$. Тоді

$$[y,z]_b=\lim_{t\uparrow b}(Jy(t),Y_{\widetilde{U}}(t,0)\widetilde{h})=\lim_{t\uparrow b}(JY_{\widetilde{U}}(t,0)F_y(t),Y_{\widetilde{U}}(t,0)\widetilde{h})=-\lim_{t\uparrow b}(F_y(t),J\widetilde{h}).$$

Звідси та з (4.165) випливає існування границі (4.159). Далі, для кожного $\widetilde{h}\in\mathbb{H}$ маємо $\Gamma_b(Y_{\widetilde{U}}(\cdot,0)\widetilde{h})=\widetilde{h}$; тому оператор Γ_b сюр'єктивний. Крім того, для всіх $y,z\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ маємо

$$[y,z]_b=\lim_{t\uparrow b}(JY_{\widetilde{U}}(t,0)F_y(t),Y_{\widetilde{U}}(t,0)F_z(t))=\lim_{t\uparrow b}(JF_y(t),F_z(t))=(J\Gamma_b y,\Gamma_b z),$$

що доводить (4.114). Накінець, (4.160) прямо випливає з (4.159).

(2) Оскільки згідно з (4.156) $W^*(0)J_1W(0)=J_1$, то $(W^*(0)J_1)^{-1}=-W(0)J_1$. Звідси та з (4.156) випливає, що

$$W(\lambda)=W(0)-\lambda W(0)J_1\int_{\mathcal{I}}\widetilde{Y}^*(t,0)\Delta(t)\widetilde{Y}(t,\lambda)\,dt,\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.166}$$

В силу (4.160) $B(0)=I_{\mathbb{H}}$ і формули (4.152) та (4.122)-(4.125) дають рівність

$$W(0)=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}:\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}\to\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}, \tag{4.167}$$

де C_j визначені в (4.163) та (4.164). Крім того, безпосередній підрахунок з огляду на (4.157) та (4.167) дає

$$W(0)J_1\int_{\mathcal{I}}\widetilde{Y}^*(t,0)\Delta(t)\widetilde{Y}(t,\lambda)\,dt=\begin{pmatrix}\int_{\mathcal{I}}Y_2^*(t,0)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\,dt & \int_{\mathcal{I}}Y_2^*(t,0)\Delta(t)Y_1(t,\lambda)\,dt\\ \int_{\mathcal{I}}Y_3^*(t,0)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\,dt & \int_{\mathcal{I}}Y_3^*(t,0)\Delta(t)Y_1(t,\lambda)\,dt\end{pmatrix}, \tag{4.168}$$

де

$$Y_2(t,\lambda)=Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)C_2^*-Y_1(t,\lambda)C_1^*=Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)(C_2^*-\tfrac{1}{2}JC_1^*),$$
$$Y_3(t,\lambda)=Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)C_4^*-Y_1(t,\lambda)C_3^*=Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)(C_4^*-\tfrac{1}{2}JC_3^*).$$

Тому $Y_2(\cdot,\lambda)$ та $Y_3(\cdot,\lambda)$ є операторними розв'язками системи (3.5) з початковими умовами

$$\widetilde{U}Y_2(a,\lambda)=C_2^*-\tfrac{1}{2}JC_1^*,\qquad \widetilde{U}Y_3(a,\lambda)=C_4^*-\tfrac{1}{2}JC_3^*$$

і безпосередній підрахунок дає рівності (4.158). Комбінуючи тепер (4.166) з (4.167) та (4.168), приходимо до твердження (2). □

4.5. Характеристичні матриці систем з максимальним індексом дефекту

Нехай виконані припущення (П1)-(П3) пункту 4.4.1.. Тоді простори $\mathcal{H}_0$ і $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ мають вигляд (4.116) і тому граничний параметр τ належить до класу $\widetilde{R}(\mathbb{H}, \mathcal{H}_1)$. Якщо, крім того, система (3.5) є квазірегулярною, то $\mathcal{H}_1 = \mathbb{H}$ і граничний параметр τ належить до класу $\widetilde{R}(\mathbb{H})$.

В наступних двох теоремах характеристичні матриці систем з максимальним індексом дефекту $n_+(T_{min}) = n$ параметризуються у вигляді, що дещо відрізняється від (4.69).

Теорема 4.29. *Нехай за припущень (П1)-(П3) пункту 4.4.1.* $\mathcal{H}_1 \subset \mathbb{H}$ – *простір* (4.116), $B(\cdot)$ – *оператор-функція* (4.120) *і* $W(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \mathbb{H} \oplus \mathcal{H}_1]$ – *оператор-функція* (4.121)-(4.125). *Тоді для кожного граничного параметра* $\tau = \tau(\lambda) \in \widetilde{R}(\mathbb{H}, \mathcal{H}_1)$ *вигляду* (2.20) *відповідна характерстична матриця* $\Omega_\tau(\cdot)$ *допускає зображення*

$$\Omega_\tau(\lambda) = (C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1}(C_0(\lambda)w_2(\lambda) + C_1(\lambda)w_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.169}$$

і рівність $\Omega(\cdot) = \Omega_\tau(\cdot)$ *задає бієктивну відповідність між усіма граничними параметрами* τ *і усіма характеристичними матрицями* $\Omega(\cdot)$ *системи* (3.5), *що відовідають розв'язку* $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda)$. *Крім того, у випадку квазірегулярної системи характеристична матриця* $\Omega_\tau(\cdot)$ *є каноничною тоді й тільки тоді, коли граничний параметр* τ *самоспряжений.*

Доведення. Згідно з твердженням 4.22 оператор $S_1(\lambda)$ є оборотним і в силу (4.69) для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ маємо

$$\begin{gathered}\Omega_\tau(\lambda) = \Omega_0(\lambda) + (C_0(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda) = \\ = (C_0(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda))^{-1}[(C_0(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda))\Omega_0(\lambda) + \\ +C_1(\lambda)S_2(\lambda)] = (C_0(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda))^{-1}[C_0(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda) + \\ +C_1(\lambda)(S_2(\lambda) - M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda))].\end{gathered}$$

Звідси внаслідок (4.126) та теореми 4.16 випливають потрібні твердження. □

Теорема 4.30. *Нехай виконані припущення (П1) та (П2). Крім того, нехай* $\{\mathbb{H}, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – *граничний комплекс* (3.123), (3.126) *і* $B(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbb{H}, \mathbb{H}_b]$ – *оператор-функція, задана рівністю* $B(\lambda) = \Gamma_b Y_{\widetilde{U}}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. *Тоді рівність*

$$\Omega(\lambda) = \Omega_{\widetilde{\tau}}(\lambda) = -\tfrac{1}{2}(C_a(\lambda) + C_b(\lambda)B(\lambda))^{-1}(C_a(\lambda) - C_b(\lambda)B(\lambda))J, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.170}$$

задає бієктивну відповідність між усіма операторними парами $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ *вигляду* (4.5) *і усіма характеристичними матрицями* $\Omega(\cdot)$ *системи* (3.5), *що відовідають розв'язку* $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda)$. *Крім того, у випадку квазірегулярної системи характеристична матриця* $\Omega_{\widetilde{\tau}}(\cdot)$ *є каноничною тоді й тільки тоді, коли* $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}^0(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$.

Доведення. Нехай $\mathbb{H}_b$ та Γ_b зображені у вигляді (3.130) та (3.131) відповідно. Тоді $\dim \widetilde{\mathcal{H}}_b = \dim H$ і без обмеження загальності можна вважати, що $\widetilde{\mathcal{H}}_b = H$. У цьому випадку формули (3.130) та (3.131) приймають вигляд

$$\mathbb{H}_b = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \qquad \Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \, \widehat{\Gamma}'_b, \, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \tag{4.171}$$

і сукупність $\{H, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ є b-граничним комплексом типу 1 (тобто виконується припущення (П3)). Нехай $\widetilde{\tau} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ – операторна пара (4.5) і блочні зображення операторів $C_a(\lambda)$ та $C_b(\lambda)$ мають вигляд (4.94) та (4.95) (з $\widetilde{\mathcal{H}}_b = H$). Крім того, нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – простори (3.132), (3.133) і $\tau = \{C_0(\lambda), -C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – граничний параметр, що відповідає $\widetilde{\tau}$ згідно з лемою 4.4. Тоді $\mathcal{H}_0 = \mathbb{H}, \ \mathcal{H}_1 = \mathbb{H}_b$ і $C_0(\lambda)$ та $C_1(\lambda)$ задаються рівностями (4.96) та (4.97) (з $\widetilde{\mathcal{H}}_b = H$). Тому

$$C_0(\lambda) = C_a(\lambda) X_1 + C_b(\lambda) X_3, \qquad C_1(\lambda) = C_a(\lambda) X_2 + C_b(\lambda) X_4,$$

де

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} I & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & \frac{i}{2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $B(\lambda)$ має блочне зображення (4.120) і $W(\lambda)$ задано рівностями (4.121)-(4.125). Тоді

$$C_0(\lambda) w_1(\lambda) - C_1(\lambda) w_3(\lambda) = C_a(\lambda)(X_1 w_1(\lambda) - X_2 w_3(\lambda)) + C_b(\lambda)(X_3 w_1(\lambda) - X_4 w_3(\lambda))$$
$$C_0(\lambda) w_2(\lambda) - C_1(\lambda) w_4(\lambda) = C_a(\lambda)(X_1 w_2(\lambda) - X_2 w_4(\lambda)) + C_b(\lambda)(X_3 w_2(\lambda) - X_4 w_4(\lambda))$$

і безпосередній підрахунок дає

$$X_1 w_1(\lambda) - X_2 w_3(\lambda) = I, \qquad X_3 w_1(\lambda) - X_4 w_3(\lambda) = B(\lambda),$$
$$X_1 w_2(\lambda) - X_2 w_4(\lambda) = -\tfrac{1}{2} J, \qquad X_3 w_2(\lambda) - X_4 w_4(\lambda) = \tfrac{1}{2} B(\lambda) J.$$

Тому справедлива рівність

$$(C_0(\lambda) w_1(\lambda) - C_1(\lambda) w_3(\lambda))^{-1} (C_0(\lambda) w_2(\lambda) - C_1(\lambda) w_4(\lambda)) =$$
$$= -\tfrac{1}{2} (C_a(\lambda) + C_b(\lambda) B(\lambda))^{-1} (C_a(\lambda) - C_b(\lambda) B(\lambda)) J.$$

Ця рівність сумісно з лемою 4.4 та теоремою 4.29 дає потрібні твердження. □

Наслідок 4.31. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною та регулярною. Нехай* $Y_0(\cdot, \lambda)$ – $[\mathbb{H}]$*-значний розв'язок цієї системи, такий що* $Y_0(a, \lambda) = I_{\mathbb{H}}$*. Тоді рівності*

$$\Omega(\lambda) = -\tfrac{1}{2} (C_a(\lambda) + C_b(\lambda) Y_0(b, \lambda))^{-1} (C_a(\lambda) - C_b(\lambda) Y_0(b, \lambda)) J$$
$$R(\lambda) \widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_0(x, \lambda)(\Omega(\lambda) + \tfrac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - x) J) Y_0^*(t, \overline{\lambda}) \Delta(t) f(t) \, dt \right), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}, \quad f \in \widetilde{f}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

задають бієктивну відповідність між усіма голоморфними оператор-функціями $(C_a(\lambda), C_b(\lambda)) : \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \ \lambda \in \mathbb{C}_+$*, що задовільняють умовам*

$$i(C_a(\lambda) J C_a^*(\lambda) - C_b(\lambda) J C_b^*(\lambda)) \geq 0, \quad \operatorname{ran}(C_a(\lambda), \ C_b(\lambda)) = \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

і усіма узагальненими резольвентами $R(\lambda)$ *відношення* T_{min}*.*

Доведення. Покладемо в припущеннях (ПК2) та (ПК3) $\widetilde{U} = I_{\mathbb{H}}$ і $\Gamma_b y = y(b)$, $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$. Тоді $Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = Y_0(t,\lambda)$, $B(\lambda) = Y_0(b,\lambda)$ і потрібне твердження випливає з теореми 4.30 та наслідку 4.14. □

Зауваження 4.32. В інший спосіб наслідок 4.31 доведено в [89].

4.6. Характеристичні матриці гамільтонових систем

Надалі в цьому пункті вважаємо, що система (3.5) є гамільтоновою та визначеною, кінцева точка a є регулярною і $N_+ \geq N_-$. Для таких систем результати даного розділу істотно спрощуються. Перш за все, з тверджень 4.9 та 4.10 випливає таке

Твердження 4.33. *Припустимо, що:*

1) $\widetilde{U}$ *– J-унітарний оператор* (3.160) *і* Γ_{0a} *та* Γ_{1a} *– оператори* (3.161), (3.162)*;*

2) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ *– b-граничний комплекс* (3.138) *(див. означення 3.48).*

Тоді:

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *існує единий операторний розв'язок* $v_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ *системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a} v_0(\lambda) = -I_H, \;\; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} v_0(\lambda) = 0, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \Gamma_{0b} v_0(\lambda) = 0, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Крім того, для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ $(\lambda \in \mathbb{C}_-)$ *існує единий операторний розв'язок* $u_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathbb{H}]$ *(відп.* $u_-(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_b,\mathbb{H}]$*) системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a} u_\pm(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\pm; \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} u_+(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad \Gamma_{0b} u_-(\lambda) = I_{\mathcal{H}_b}, \;\; \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

(2) *Якщо* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– розділена гранична трійка* (3.169), (3.170) *для* T_{max}*, то функція Вейля* $M_+(\cdot)$ *трійки* Π *допускає длочне зображення*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{4.172}$$

з елементами $M_{ij}(\lambda)$*, заданими рівностями*

$$M_{11}(\lambda) = \Gamma_{0a} v_0(\lambda), \quad M_{12}(\lambda) = \Gamma_{0a} u_+(\lambda), \quad M_{21}(\lambda) = -\Gamma_{1b} v_0(\lambda), \quad M_{22}(\lambda) = -\Gamma_{1b} u_+(\lambda) \tag{4.173}$$

Наступний наслідок випливає з теореми 4.16 та твердження 4.17.

Наслідок 4.34. *Нехай виконані припущення 1), 2) твердження 4.33. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_0 = H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b$ *та* $\mathcal{H}_1 = H \oplus \mathcal{H}_b$*. Тоді:*

(1) *Справедливі твердження теореми 4.16 з* $M_+(\lambda)$ *вигляду* (4.172), (4.173) *та оператор-функціями*

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & -\frac{1}{2} I_H \\ -\frac{1}{2} I_H & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}}, \quad S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ -I_H & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}},$$

$$S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & -I_H \\ M_{21}(\lambda) & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

При цьому розширення T_0 в твердженні (1) цієї теореми задається рівністю

$$T_0 = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a} y = 0,\ \widetilde{\Gamma}_{0b} y = 0\}.$$

(2) *Для кожного граничного параметра τ відповідна характеристична матриця $\Omega_\tau(\cdot)$ допускає зображення* (4.85) *з оператор-функцією $\widetilde{\Omega}_\tau(\cdot)$ вигляду* (4.80) *і операторами*

$$X_1 = \begin{pmatrix} I_{H,\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & I_{H,\mathcal{H}_0} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0, \quad X_2 = \begin{pmatrix} I_{H,\mathcal{H}_0} & 0 \\ 0 & I_{H,\mathcal{H}_1} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

Якщо $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b$, $\widetilde{\Omega}_\tau(\cdot) \in R[\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}]$, де $\mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_b$, і справедлива рівність

$$\Omega_\tau(\lambda) = P\widetilde{\Omega}_\tau(\lambda) \upharpoonright H \oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{4.174}$$

де $P \in [\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, H \oplus H]$ – ортопректор в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ на підпростір $H \oplus H$ (оскільки $H \subset \mathcal{H}$, то $H \oplus H \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$).

Якщо, крім того, відношення T_{min} має мінімальні індекси дефекту $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}) = \nu$, то $\mathcal{H} = H$ і

$$\Omega_\tau(\lambda) = \widetilde{\Omega}_\tau(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{4.175}$$

Зауваження 4.35. У випадку $N_+ = N_- = \nu$ параметризація (4.175) усіх характеристичних матриць визначеної гамільтонової системи отримана в [65, 66].

Якщо індекс дефекту N_+ гамільтонової системи набуває максимального значення $N_+ = n(= 2\dim H)$, то без обмеження загальності можна вважати, що b-граничний комплекс має вигляд $\{H, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ з оператором

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \mathcal{H}_b. \tag{4.176}$$

Припустимо, що $N_+ = n$, виконано припущенння 1) твердження 4.33 і $\{H, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс (4.176). Тоді оператор-функція (4.119) допускає блочне зображення

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

а рівності (4.122)-(4.125) приймають вигляд

$$w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I_H \\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{4.177}$$

$$w_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_H & 0 \\ \frac{1}{2} B_{12}(\lambda) & -\frac{1}{2} B_{11}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \tag{4.178}$$

$$w_3(\lambda) = \begin{pmatrix} -I_H & 0 \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1} \tag{4.179}$$

$$w_4(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} I_H \\ \frac{1}{2} B_{22}(\lambda) & -\frac{1}{2} B_{21}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus H}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1} \tag{4.180}$$

Крім того, справедливе твердження теорми 4.29 з оператор-функціями $w_j(\lambda)$ вигляду (4.177)-(4.180).

РОЗДІЛ 5

m-функції симетричних систем з регулярною кінцевою точкою

5.1. U-визначені чистеми. Відношення T

Неважко довести наступну лему.

Лема 5.1. *Оператор*

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \widehat{H} \oplus H \tag{5.1}$$

допускає розширення до J-унітарного оператора $\widetilde{U}$ вигляду (3.120) *тоді й тільки тоді, коли вокогнуються співвідношення*

$$\operatorname{ran} U = \widehat{H} \oplus H, \tag{5.2}$$

$$i\delta u_2 u_2^* - u_1 u_3^* + u_3 u_1^* = i\delta I_{\widehat{H}}, \qquad i\delta u_5 u_2^* - u_4 u_3^* + u_6 u_1^* = 0, \tag{5.3}$$

$$i\delta u_5 u_5^* + u_6 u_4^* - u_4 u_6^* = 0. \tag{5.4}$$

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи (3.5) і U – оператор (5.1), що задовільняє (5.2) - (5.4). Надалі з таким оператором пов'язуються оператори $\widehat{\Gamma}_a : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widehat{H}$, $\Gamma_{1a} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H$ вигляду (3.122) та операторний розв'язок $\varphi_U(\cdot, \lambda) (\in [H_0, \mathbb{H}])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, системи (3.5) з початковою умовою

$$\varphi_U(a, \lambda) = \begin{pmatrix} u_6^* & i\delta u_3^* \\ -i\delta u_5^* & u_2^* \\ -u_4^* & -i\delta u_1^* \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{5.5}$$

Легко перевірити, що для кожного J-унітарного розширення $\widetilde{U} \supset U$ справедлива рівність

$$\widetilde{U} \varphi_U(a, \lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}. \tag{5.6}$$

Тому блочне зображення (4.15) операторного розв'язку $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda)$ можна записати як

$$Y_{\widetilde{U}}(t, \lambda) = (\varphi_U(t, \lambda), \psi(t, \lambda)) : H_0 \oplus H \to \mathbb{H}. \tag{5.7}$$

Надалі з J-унітарним оператором $\widetilde{U}\in[\mathbb{H}]$ пов'язується операторний розв'язок $\chi(\cdot,\lambda)(\in[H_0,\mathbb{H}])$, $\lambda\in\mathbb{C}$, системи (3.5) з початковою умовою

$$\widetilde{U}\chi(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{i}{2}\delta I_{\widehat{H}}\\ I_H & 0\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H. \tag{5.8}$$

Частинним випадком оператора U і його J-унітарного рознирення $\widetilde{U}$ є (пор. [78])

$$U=\begin{pmatrix}0 & I_{\widehat{H}} & 0\\ \cos B & 0 & \sin B\end{pmatrix},\quad \widetilde{U}=\begin{pmatrix}\sin B & 0 & -\cos B\\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0\\ \cos B & 0 & \sin B\end{pmatrix},$$

де $B=B^*\in[H]$. Для таких U та $\widetilde{U}$ розв'язки $\varphi_U(\cdot,\lambda)$ та $\chi(\cdot,\lambda)$ задаються початковими умовами

$$\varphi_U(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin B & 0\\ 0 & I_{\widehat{H}}\\ -\cos B & 0\end{pmatrix},\qquad \chi(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\cos B & 0\\ 0 & \frac{i}{2}\delta I_{\widehat{H}}\\ -\sin B & 0\end{pmatrix}.$$

Припустимо, далі, що система (3.5) є гамільтоновою (тобто $\widehat{H}=\{0\}$). У цьому випадку оператор U і умови (5.2) - (5.4) приймають вигляд

$$U=(u_1,\,u_2):H\oplus H\to H \tag{5.9}$$

$$\operatorname{ran}U=H,\qquad u_1u_2^*-u_2u_1^*=0. \tag{5.10}$$

Крім того, операторний розв'язок $\varphi_U(\cdot,\lambda)(\in[H,H\oplus H])$, $\lambda\in\mathbb{C}$, системи задається початковою умовою

$$\varphi_U(a,\lambda)=\begin{pmatrix}u_2^*\\ -u_1^*\end{pmatrix}:H\to H\oplus H. \tag{5.11}$$

Якщо $\widetilde{U}\in[H\oplus H]$ – J-унітарне розширення (3.160) оператора U, то

$$\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda)=\begin{pmatrix}I_H\\ 0\end{pmatrix}:H\to H\oplus H. \tag{5.12}$$

Позначимо також через $\psi(\cdot,\lambda)(\in[H,H\oplus H])$, $\lambda\in\mathbb{C}$, операторний розв'зок системи з початковою умовою

$$\widetilde{U}\psi(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\ I_H\end{pmatrix}:H\to H\oplus H. \tag{5.13}$$

Очевидно, що для гамільтонової системи $\psi(\cdot,\lambda)=\chi(\cdot,\lambda)$ і рівність (4.15) приймає вигляд

$$Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)=(\varphi_U(t,\lambda),\,\psi(t,\lambda)):H\oplus H\to\mathbb{H}. \tag{5.14}$$

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи (3.5), U – оператор (5.1) і Γ_{1a} – оператор (3.122).

Означення 5.2. Система (3.5) називається U-визначеною, якщо для кожної функції $y \in \mathcal{N}$, такої що $\Gamma_{1a} y = 0$, справедлива рівність $y = 0$.

Зауваження 5.3. Очевидно, що визначена система є U-визначеною для кожного U. В той же час існують невизначені системи, які є визначеними для деякого U. Розглянемо, наприклад, систему

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y' = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad t \in [0, \infty). \tag{5.15}$$

Очевидно, що нуль-многовид $\mathcal{N}$ цієї системи є множиною усіх констант $y \equiv \{0, h\}$, $h \in \mathbb{C}$. Тому система (5.15) є невизначеною. Поруч з тим для оператора $U = (0, 1)$ ця система є U-визначеною. Таким чином, U-визначеність системи є послабленням умови визначеності.

Твердження 5.4. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи* (3.5)*. Крім того, нехай U – оператор* (5.1)*, що задовільняє* (5.2) – (5.4)*, $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори* (3.122) *і $\mathcal{D}_{0b} \subset \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ – лінійний многовид* (3.48)*. Тоді:*

(1) *Рівності*

$$T = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max},\ y \in \mathcal{D}_{0b} \ \text{та}\ \Gamma_{1a} y = 0,\ \widehat{\Gamma}_a y = 0\} \tag{5.16}$$

$$T_* = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}, \Gamma_{1a} y = 0\} \tag{5.17}$$

задають (замкнене) симетричне відношення $T \in Ext_{T_{min}}$ і лінійне відношення T_* в $\mathfrak{H}$, таке що $T_* \subset T^*$.

Якщо, крім того, система є визначеною, то $T_* = T^*$ і рівності (5.16) *та* (5.17) *можна зобразити у вигляді*

$$T = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : y \in \mathcal{D}_{0b} \ \text{та}\ \Gamma_{1a} y = 0,\ \widehat{\Gamma}_a y = 0\} \tag{5.18}$$

$$T^* = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a} y = 0\} \tag{5.19}$$

У формулах (5.18) *та* (5.19) *$y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ – єдина функція, що відповідає парі $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}$ згідно з твердженням 3.26.*

(2) *Многозначна частина $\operatorname{mul} T$ відношення T збігається з множиною усіх $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, таких що для деякого (і тому для кожного) $f \in \widetilde{f}$ існує розв'язок $y(\cdot)$ рівняння* (3.30)*, що задовільняє співвідношенням*

$$\Delta(t) y(t) = 0 \ \text{(м.в. на } \mathcal{I}), \quad \Gamma_{1a} y = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a y = 0 \quad \text{та} \quad [y, z]_b = 0, \ z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \tag{5.20}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U, Γ_{0a} – оператор (3.121) і Γ_a – оператор (3.123). Очевидно, що $T_{min} \subset T \subset T_*$ і внаслідок тотожності Лагранжа (3.22) та (3.124) $T_* \subset T^*$. Це доводить першу частину твердження (1). Припустимо тепер, що система є визначеною. Тоді згідно зауваження після твердження 3.26 рівності (5.16) та (5.17) можна зобразити відповідно у вигляді (5.18) та

$$T_* = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a} y = 0\}. \tag{5.21}$$

Оскільки $T_{min}\subset T$, то $T^*\subset T^*_{min}=T_{max}$. Тому внаслілок тотожності Лагранжа та (3.124)

$$T^*=\{\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in T_{max}:\ (\Gamma_{1a}y,\Gamma_{0a}z)=0\ \text{ для кожного }\ \{\widetilde{z},\widetilde{g}\}\in T\}\tag{5.22}$$

Оскільки згідно з лемою 3.32, (2) $\Gamma_a\mathcal{D}_{0b}=\mathbb{H}$, то внаслідок (5.18) для кожного $h\in H$ існує пара $\{\widetilde{z},\widetilde{g}\}\in T$, така що $\Gamma_{0a}z=h$. Тому з рівності (5.22) випливає (5.19) і внаслідок (5.21) маємо $T^*=T_*$.

Твердження (2) є безпосереднім наслідком (5.16). □

5.2. m-функкції визначених систем у випадку a1

5.2.1. Узагальнені резольвенти відношення T

Твердження 5.5. *Припустимо, що:*

1) *Система* (3.5) *є визначеною, кінцева точка a є регулярною і $\delta=1$, $N_+\geq N_-$ (тобто має місце випадок* a1*);*

2) U *– оператор* (5.1)*, що задавільняє* (5.2) - (5.4)*, і $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори* (3.122)*;*

3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b,\Gamma_b\}$ *– b-граничний комплекс типу 1* (3.131)*.*

Тоді:

(1) *Скінченновимірні гільбертові простори $\dot{\mathcal{H}}_0$ та $\dot{\mathcal{H}}_1\subset\dot{\mathcal{H}}_0$ і оператори $\dot{\Gamma}_j:T^*\to\dot{\mathcal{H}}_j,\ j\in\{0,1\}$, задані рівностями*

$$\dot{\mathcal{H}}_0=\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b,\qquad \dot{\mathcal{H}}_1=\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b\tag{5.23}$$

$$\dot{\Gamma}_0\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}=i(\widehat{\Gamma}_a-\widehat{\Gamma}'_b)y\oplus\widetilde{\Gamma}_{0b}y\,(\in\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b)\tag{5.24}$$

$$\dot{\Gamma}_1\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}=\tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a+\widehat{\Gamma}'_b)y\oplus(-\Gamma_{1b}y)\,(\in\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b),\quad \{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in T^*\tag{5.25}$$

утворюють граничну трійку $\dot{\Pi}=\{\dot{\mathcal{H}}_0\oplus\dot{\mathcal{H}}_1,\dot{\Gamma}_0,\dot{\Gamma}_1\}$ для T^* (тут T^* задано в (5.19)*).*

(2) Функція вейля $\dot{M}_+(\cdot)$ трійки $\dot{\Pi}$ має блочне зображення

$$\dot{M}_+(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda)\\ M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda)\end{pmatrix}\underbrace{\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_0}\to\underbrace{\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_1},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\tag{5.26}$$

з елементами $M_{ij}(\lambda),\ i,j\in\{2,3\}$, визначеними в (4.36) та (4.37).

Доведення. Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Тоді внаслідок теореми 3.50 розділену граничну трійку $\Pi=\{\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ для T_{max} можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{H}_0=H\oplus\dot{\mathcal{H}}_0,\qquad \mathcal{H}_1=H\oplus\dot{\mathcal{H}}_1\tag{5.27}$$

$$\Gamma_0=(\widehat{\Gamma}_0,\,\dot{\Gamma}_0)^\top:T_{max}\to H\oplus\dot{\mathcal{H}}_0,\qquad \Gamma_1=(\widehat{\Gamma}_1,\,\dot{\Gamma}_1)^\top:T_{max}\to H\oplus\dot{\mathcal{H}}_1,\tag{5.28}$$

де $\dot{\mathcal{H}}_j$ та $\dot{\Gamma}_j$ визначені в (5.23)-(5.25) і $\widehat{\Gamma}_j:T_{max}\to H,\ j\in\{0,1\}$, – оператори, задані рівністями

$$\widehat{\Gamma}_0\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}=-\Gamma_{1a}y,\qquad \widehat{\Gamma}_1\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}=\Gamma_{0a}y,\quad \{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in T_{max}.\tag{5.29}$$

Крім того, з другої рівності в (3.70) та сюр'єктівності оператора Γ_b випливає, що для кожного $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ рівність $\Gamma_b y = 0$ рівносильна включенню $y \in \mathcal{D}_{0b}$. Тому рівність (5.18) можна зобразити у вигляді

$$T = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a} y = 0,\ \widehat{\Gamma}_a y = 0,\ \Gamma_b y = 0\} \tag{5.30}$$

Відзначимо також, що внаслідок (4.34) - (4.37) функцію $\dot{M}_+(\cdot)$, визначену рівністю (5.26), можна зобразити як $\dot{M}_+(\lambda) = P_{\dot{\mathcal{H}}_1} M_+(\lambda) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_0,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$, де $M_+(\cdot)$ – функція Вейля трійки Π. Застосовуючи тепер твердження 2.37 до розділеної трійки Π, отримуємо потрібні твердження. ☐

Нехай за умов твердження 5.5 $\dot{\mathcal{H}}_0$ та $\dot{\mathcal{H}}_1$ – простори (5.23).

Означення 5.6. Вкороченим граничним параметром для системи (3.5) (у випадку a1) називається операторна пара

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}(\lambda) = \{\dot{C}_0(\lambda), \dot{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.31}$$

з голоморфними оператор-функціями

$$\dot{C}_0(\lambda) = (\dot{\widehat{C}}_0(\lambda), \dot{C}_{0b}(\lambda)) : \underbrace{\widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_0} \to \mathcal{K}, \quad \dot{C}_1(\lambda) = (\dot{\widehat{C}}_1(\lambda), \dot{C}_{1b}(\lambda)) : \underbrace{\widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_1} \to \mathcal{K}. \tag{5.32}$$

(тут $\mathcal{K}$ – допоміжний скінченновимірний гільбертів простір).

Якщо $N_+ = N_-$ ($\Leftrightarrow n_+(T) = n_-(T)$), то $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b,\ \dot{\mathcal{H}}_0 = \dot{\mathcal{H}}_1 =: \dot{\mathcal{H}}$, де $\dot{\mathcal{H}} = \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b$, і граничний параметр $\dot{\tau}$ належить до класу $\widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}})$. Якщо, крім того,

$$\dot{\tau} = \{\dot{C}_0, \dot{C}_1\} \in \widetilde{R}^0(\dot{\mathcal{H}}), \tag{5.33}$$

тобто $\dot{\tau}$ є самоспряженою парою операторів

$$\dot{C}_0 = (\dot{\widehat{C}}_0, \dot{C}_{0b}) : \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}, \quad \dot{C}_1 = (\dot{\widehat{C}}_1, \dot{C}_{1b}) : \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}, \tag{5.34}$$

то вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ називається самоспряженим.

Лема 5.7. *Якщо* $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32)*, то голоморфна операторна пара* $\tau = \tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ *з оператор-функціями*

$$C_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & \dot{C}_0(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \dot{\mathcal{H}}_0 \to H \oplus \mathcal{K}, \quad C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{C}_1(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \dot{\mathcal{H}}_1 \to H \oplus \mathcal{K}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.35}$$

є граничним параметром у сенсі означення 4.1.

Доведення. Безпосередня перевірка з огляду на твердження 2.19 дає потрібне твердження. ☐

Нехай $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.31), (5.32). Для заданої функції $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ розглянемо граничну задачу

$$Jy' - B(t)y = \lambda \Delta(t) y + \Delta(t) f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{5.36}$$

$$\Gamma_{1a} y = 0 \tag{5.37}$$

$$(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a y + \dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b} y - (i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b y + \dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b} y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.38}$$

Розв'язок $y(\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \times \mathbb{C}_+ \to \mathbb{H}$ цієї задачи визначається аналогічно розв'язку задачі (4.1), (4.2).

Теорема 5.8. *Нехай за умов твердження 5.5* $T \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ *– симетричне відношення* (5.18) *і* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\mathcal{H}}_1$ *– простори* (5.23)*. Якщо* $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32), *то для кожного* $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *гранична задача* (5.36) - (5.38) *має єдиний розв'язок* $y(t,\lambda) = y_f(t,\lambda)$ *і рівність*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta(y_f(\cdot,\lambda)), \quad \widetilde{f} \in L^2_\Delta(\mathcal{I}), \quad f \in \widetilde{f}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

задає узагальнену резольвенту $R(\lambda) =: R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *відношення* T*. Зворотно, для кожної узагальненої резольвенти* $R(\lambda)$ *існує єдиний вкорочений граничний параметр* $\dot{\tau}$*, такий що* $R(\lambda) = R_{\dot{\tau}}(\lambda)$*.*

Якщо, крім того, $N_+ = N_-$*, то* $R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ *є канонічною резольвентою тоді й тільки тоді, коли* $\dot{\tau}$ *є самоспряженим граничним параметром* (5.33), (5.34)*. У цьому випадку* $R_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\widetilde{T}_{\dot{\tau}} - \lambda)^{-1}$*, де*

$$\widetilde{T}_{\dot{\tau}} =$$

$$\{\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a}y = 0, \ \ (i\dot{\widehat{C}}_0 - \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1)\widehat{\Gamma}_a y + \dot{C}_{0b}\Gamma_{0b}y - (i\dot{\widehat{C}}_0 + \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1)\widehat{\Gamma}_b y + \dot{C}_{1b}\Gamma_{1b}y = 0\}. \quad (5.39)$$

Доведення. Нехай $\dot{\Pi} = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка для T^*, побудована в твердженні 5.5. Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ вигляду (5.31), (5.32) гранична задача (5.36)-(5.38) еквівалентна граничній задачі

$$\{\widetilde{y}, \lambda\widetilde{y} + \widetilde{f}\} \in T^*, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H} \quad (5.40)$$

$$\dot{C}_0(\lambda)\dot{\Gamma}_0\{\widetilde{y}, \lambda\widetilde{y} + \widetilde{f}\} - \dot{C}_1(\lambda)\dot{\Gamma}_1\{\widetilde{y}, \lambda\widetilde{y} + \widetilde{f}\} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \quad (5.41)$$

і застосування наслідку 2.45 до трійки $\dot{\Pi}$ дає потрібні твердження.

Зауваження 5.9. Надалі будемо позначати через $\widetilde{T}_{\dot{\tau}} (\in \widetilde{\mathrm{Self}(T)})$ та $F_{\dot{\tau}}(\cdot)$ відповідно розширення відношення T, що породжує узагальнену резольвеннту $R_{\dot{\tau}}(\cdot)$, та спектральну функцію того ж відношення, породжену розширенням $\widetilde{T}_{\dot{\tau}}$. Згідно з теоремою 5.8 гранична задача (5.36) - (5.38) задає параметризації $R(\lambda) = R_{\dot{\tau}}(\lambda)$, $\widetilde{T} = \widetilde{T}_{\dot{\tau}}$ та $F(\cdot) = F_{\dot{\tau}}(\cdot)$ відповіно усіх узагальнених резольвент $R(\lambda)$ відношення T, розширень $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T)$ та спектральних функцій $F(\cdot)$ відношення T в термінах вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$.

□

5.2.2. m-функції

Твердження 5.10. *Нехай за умов твердження 5.5* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\mathcal{H}}_1$ *– простори* (5.23) *та* $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32)*. Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ *системи* (3.5)*, що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) = -I_H \quad (5.42)$$

$$\left[(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a + \dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b} - (i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b + \dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b}\right]\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0 \quad (5.43)$$

$$\Gamma_{1a}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0 \quad (5.44)$$

$$\left[(i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a + \dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b} - (i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b + \dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b}\right]\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) = \dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \tfrac{i}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda) \quad (5.45)$$

Доведення. Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U, Γ_{0a} – оператор (3.121) і Γ_a – оператор (3.123). Тоді сукупність $\{\mathbb{H}, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, де $\mathbb{H}_b$ задано в (3.130), є граничним комплексом. Припустимо також, що $\tau = \tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ – граничний параметр (5.35). Тоді внаслідок (5.32)

$$C_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\widehat{C}}_0(\lambda) & \dot{C}_{0b}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \mathcal{K} \tag{5.46}$$

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\widehat{C}}_1(\lambda) & \dot{C}_{1b}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to H \oplus \mathcal{K}. \tag{5.47}$$

Згідно з лемою 4.4 τ відповідає деякій парі $\widetilde{\tau} = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ і зі співвідношень (4.94)-(4.97) випливає, що

$$C_a(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_H \\ 0 & i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \frac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to H \oplus \mathcal{K} \tag{5.48}$$

$$C_b(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{C}_{0b}(\lambda) & -i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \frac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda) & \dot{C}_{1b}(\lambda) \end{pmatrix} : \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to H \oplus \mathcal{K}. \tag{5.49}$$

Нехай $Y_{\widetilde{\tau}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ – операторний розв'зок системи (3.5), що відповідає парі $\widetilde{\tau}$ згідно з теоремою 4.19. Тоді блочне зображення

$$Y_{\widetilde{\tau}}(t, \lambda) = (\xi_{\dot{\tau}}(t, \lambda), \widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t, \lambda), \omega(t, \lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus H \to \mathbb{H} \tag{5.50}$$

породжує операторні розв'язки $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$ та $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H}, \mathbb{H}]$. Покажемо, що ці розв'язки задовільняють граничним умовам (5.42)-(5.45). З (4.90) випливає, що

$$(C_a(\lambda)\Gamma_a + C_b(\lambda)\Gamma_b) Y_{\widetilde{\tau}}(\lambda) = -C_a(\lambda) J, \tag{5.51}$$

і безпосередній підрахунок з огляду на (5.48), (5.49) та (3.123), (3.131) дає рівності

$$C_a(\lambda)\Gamma_a + C_b(\lambda)\Gamma_b = \begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} \\ (i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) - \frac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a + \dot{C}_{0b}(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b} - (i\dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \frac{1}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}'_b + \dot{C}_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b} \end{pmatrix}$$

$$-C_a(\lambda) J = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\widehat{C}}_0(\lambda) + \frac{i}{2}\dot{\widehat{C}}_1(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

Комбінуючи ці рівності з (5.51) та (5.50), отримуємо (5.42)-(5.45).

Припустимо далі, що $\widetilde{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda), \lambda \in \mathbb{C}_+,$ – інший опреаторний розв'язок системи (3.5), що належить до $\mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$ і задовільняє (5.42), (5.43). Тоді для кожного $h \in H$ та $\lambda \in \mathbb{C}_+$ функція $y = (\xi_{\dot{\tau}}(t, \lambda) - \widetilde{\xi}_{\dot{\tau}}(t, \lambda))h$ є розв'язком однорідної граничної задачі (5.36), (5.38) (з $f = 0$). Оскільки за теоремою 5.8 така задача має єдиний розв'язок $y = 0$, то $\xi_{\dot{\tau}}(t, \lambda) = \widetilde{\xi}_{\dot{\tau}}(t, \lambda)$ і, отже, існує лише єдиний розв'язок $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, \mathbb{H}]$, що задовільняє (5.42), (5.43). Єдиність розв'язку $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda)$ доводиться аналогічно. □

Припустимо, що за умов твердження 5.5 $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Нехай $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр і $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda)$ – відповідні розв'язки системи (3.5), визначені в твердженні 5.10.

Означення 5.11. Оператор-функція $m_{\dot\tau}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H_0]$, визначена рівністю

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}(\lambda)\\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)\\ \widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{5.52}$$

називається m-функцією системи (3.5) (у випадку a1), що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot\tau$ або, екевівалентно, граничній задачи (5.36)-(5.38).

У випадку $n_+(T_{min})=n_-(T_{min})$ m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ називається каноничною, якщо вкорочений граничний параметр $\dot\tau$ є самоспряженим.

Виявляється, що для заданого оператора U та вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ визначається однозначно з точністю до деякої самоспряженої константи. Точніше кажучи, справедливим є наступне

Твердження 5.12. *Нехай за умов твердження 5.5*

$$\widetilde{U}_j=\left(\begin{array}{ccc} u_7^{(j)} & u_8^{(j)} & u_9^{(j)}\\ \hline u_1 & u_2 & u_3\\ u_4 & u_5 & u_6\end{array}\right):H\oplus\widehat{H}\oplus H\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\quad j\in\{1,2\}\tag{5.53}$$

– два J- унітарних розширення оператора U і $\Gamma_{0a}^{(j)}$ – відповідні оператори (3.121). *Припустимо також, що $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр і*

$$m_{\dot\tau}^{(j)}(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}^{(j)}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}^{(j)}(\lambda)\\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}^{(j)}\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \Gamma_{0a}^{(j)}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)\\ \widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\ \ j\in\{1,2\}$$

– відповідні m-функції. Тоді

$$m_{\dot\tau 1}^{(2)}(\lambda)=m_{\dot\tau 1}^{(1)}(\lambda)+B,\qquad m_{\dot\tau 2}^{(2)}(\lambda)=m_{\dot\tau 2}^{(1)}(\lambda)\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

з деяким оператором $B=B^*\in[H]$.

Доведення. За допомоги рівності $\widetilde{U}_j^*J\widetilde{U}_j=J,\ j\in\{1,2\}$, неважко довести існування оператора $B=B^*\in[H]$, такого що має місце рівність $\widetilde{U}_2=X\widetilde{U}_1$ з оператором

$$X=\begin{pmatrix} I & 0 & -B\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\oplus H\to H\oplus\widehat{H}\oplus H.$$

Звідси випливає, що $\Gamma_{0a}^{(2)}=\Gamma_{0a}^{(1)}-B\Gamma_{1a}$ і з огляду на (5.42) та (5.44)

$$m_{\dot\tau}^{(2)}(\lambda)=\begin{pmatrix}(\Gamma_{0a}^{(1)}-B\Gamma_{1a})\xi_{\dot\tau}(\lambda) & (\Gamma_{0a}^{(1)}-B\Gamma_{1a})\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)\\ \widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}^{(1)}(\lambda)+B & m_{\dot\tau 2}^{(1)}(\lambda)\\ m_{\dot\tau 3}^{(1)}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}^{(1)}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає потрібне твердження. ☐

В наступному твердженні наведене вище означення m-функції формулюється у дещо інших термінах.

Твердження 5.13. *Припустимо, що за умов твердження 5.5* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U*,* Γ_{0a} *– оператор* (3.121) *і* $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32)*. Тоді* m*-функція* $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *є единою* $[H_0]$*-значною функцією, визначеною в* $\mathbb{C}_+$ *і такою, що для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *операторний розв'язок* $v_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ *системи* (3.5)*, заданий рівностю*

$$v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)=\varphi_U(t,\lambda)m_{\dot{\tau}}(\lambda)-\chi(t,\lambda) \tag{5.54}$$

має наступні властивості: (1) $v_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_{\Delta}[H_0,\mathbb{H}]$*;* (2) *компоненти* $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ *блочного зображення*

$$v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)=(\xi_{\dot{\tau}}(t,\lambda),\,\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t,\lambda)):H\oplus\widehat{H}\to\mathbb{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.55}$$

задовільняють граничним умовам (5.43) *та* (5.45).

Доведення. Нехай $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ – розв'зки системи (3.5), визначені в твердженні 5.10, і $v_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_{\Delta}[H_0,\mathbb{H}]$ – розв'язок тієї ж системи, заданий рівністю (5.55). Крім того, нехай $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ – m-функція (5.52). Тоді внаслідок (5.42) та (5.44) маємо

$$\widetilde{U}v_{\dot{\tau}}(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}(\xi_{\dot{\tau}}(\lambda),\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda))=\begin{pmatrix}m_{\dot{\tau}1}(\lambda) & m_{\dot{\tau}2}(\lambda)\\ m_{\dot{\tau}3}(\lambda) & m_{\dot{\tau}4}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\ -I_H & 0\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{5.56}$$

і в силу (5.6) та (5.8)

$$\widetilde{U}v_{\dot{\tau}}(a,\lambda)=(\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda))m_{\dot{\tau}}(\lambda)-\widetilde{U}\chi(a,\lambda). \tag{5.57}$$

Тому $v_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ допускає зображення (5.54) і згідно з твердженням 5.10 виконуються граничні умови (5.43) та (5.45). Таким чином, функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ має потрібні властивості.

Припустимо тепер, що

$$m(\lambda)=\begin{pmatrix}m_1(\lambda) & m_2(\lambda)\\ m_3(\lambda) & m_4(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

– оператор-функція, така що операторний розв'язок $v(t,\lambda)=\varphi_U(t,\lambda)m(\lambda)-\chi(t,\lambda)$ системи (3.5) належить до $\mathcal{L}^2_{\Delta}[H_0,\mathbb{H}]$ і має блочне зображення $v(t,\lambda)=(\xi(t,\lambda),\widehat{\xi}(t,\lambda))$, що задовільняє (5.43) та (5.45). Тоді з огляду на (5.6) та (5.8)

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}(\xi(\lambda),\widehat{\xi}(\lambda))=\widetilde{U}v(a,\lambda)=(\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda))m(\lambda)-\widetilde{U}\chi(a,\lambda)=\begin{pmatrix}m_1(\lambda) & m_2(\lambda)\\ m_3(\lambda) & m_4(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\ -I_H & 0\end{pmatrix} \tag{5.58}$$

і, отже, $\Gamma_{1a}\xi(\lambda)=-I_H$, $\Gamma_{1a}\widehat{\xi}(\lambda)=0$. Тому згідно з твердженням 5.10 $\xi(t,\lambda)=\xi_{\dot{\tau}}(t,\lambda)$, $\widehat{\xi}(t,\lambda)=\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(t,\lambda)$ і внаслідок (5.58)

$$m(\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda)\\ \widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}=m_{\dot{\tau}}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Таким чином, доведено єдиність функції $m_{\dot\tau}(\lambda)$, що задовільняє умовам твердження. □

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між характеристичними матрицями та m-функціями симетричних систем.

Теорема 5.14. *Припустимо, що за умов твердження 5.5* $\widetilde U$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} *–оператор* (3.121). *Нехай* $\dot{\mathcal H}_0$ *та* $\dot{\mathcal H}_1$ *– простори* (5.23), $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32) *і* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *– відповідна* m*-функція* (5.52) *системи* (3.5). *Крім того, нехай* $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ *– граничний параметр* (5.35) *і* $\Omega_\tau(\cdot)$ *– характеристична матриця тієї ж системи, що відповідає* τ *та розв'язку* $Y_{\widetilde U}(\cdot,\lambda)$. *Тоді*

$$\Omega_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_H \\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda) & 0 \\ -\frac{1}{2}I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \widehat H \oplus H \to H \oplus \widehat H \oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.59}$$

Доведення. Нехай, як і в доведенні твердження 5.10, $\mathbb{H}_b$ – простір (3.130), $\widetilde\tau = \{C_a(\lambda), C_b(\lambda)\} \in \mathcal{S}(\mathbb{H}, \mathbb{H}_b)$ – операторна пара (5.48), (5.49) і $Y_{\widetilde\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathbb{H}]$ – розв'язок системи (3.5), що відповідає $\widetilde\tau$ згідно з теоремою 4.19. Тоді справедливе зображення (5.50), в якому $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ – розв'язки, визначені в твердженні 5.10. Припустимо, далі, що $R(\lambda)$ – узагальнена резольвента відношення T_{min}, породжена граничною задачею (4.9), (4.10), і $\Omega(\cdot)$ – характеристична матриця, що відповідає $R(\lambda)$. Тоді, як показано в доведенні теореми 4.19, $\Omega(\lambda) = \Omega_\tau(\lambda)$ і згідно з тією ж теоремою справедлива рівність (4.91). Комбінуючи цю рівність з (5.50) та (5.56), отримуємо рівність

$$\Omega_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}(\lambda) & \Omega_1(\lambda) \\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda) & \Omega_2(\lambda) \\ -\frac{1}{2}I_H & 0 & \Omega_3(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat H}_{H_0} \oplus H \to \underbrace{H \oplus \widehat H}_{H_0} \oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.60}$$

яку внаслідок (5.52) можна записати як

$$\Omega_\tau(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau}(\lambda) & \widetilde\Omega_1(\lambda) \\ -\frac{1}{2}P_{H_0,H} & \Omega_3(\lambda) \end{pmatrix} : H_0 \oplus H \to H_0 \oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.61}$$

З іншого боку, $\Omega_\tau(\lambda)$ допускає зображення (4.69) і згідно з (4.34) та (4.66)-(4.68) оператор-функції $M_+(\lambda)$, $\Omega_0(\lambda)$, $S_1(\lambda)$ та $S_2(\lambda)$ в (4.69) можна записати у вигляді

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & N_1(\lambda) \\ N_2(\lambda) & M_{3+}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \dot{\mathcal H}_0 \to H \oplus \dot{\mathcal H}_1 \tag{5.62}$$

$$\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{H,H_0} \\ -\frac{1}{2}P_{H_0,H} & 0 \end{pmatrix} : H_0 \oplus H \to H_0 \oplus H \tag{5.63}$$

$$S_1(\lambda) = \begin{pmatrix} N_3(\lambda) & M_{1+}(\lambda) \\ -I_H & 0 \end{pmatrix} : H \oplus \dot{\mathcal H}_0 \to H_0 \oplus H \tag{5.64}$$

$$S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} N_4(\lambda) & -I_H \\ M_{2+}(\lambda) & 0 \end{pmatrix} : H_0 \oplus H \to H \oplus \dot{\mathcal H}_1, \tag{5.65}$$

де покладено

$$m_0(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda)\\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.66}$$

$$M_{1+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda)\\ M_{22}(\lambda)-\frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & M_{23}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.67}$$

$$M_{2+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda)+\frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to\underbrace{\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_1},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.68}$$

$$M_{3+}(\lambda)=\begin{pmatrix}M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda)\\ M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_0}\to\underbrace{\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b}_{\dot{\mathcal{H}}_1},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{5.69}$$

З (5.62) та (5.35) випливає, що

$$(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}=\begin{pmatrix}I_H & 0\\ -\dot{C}_1(\lambda)N_2(\lambda) & \dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}I_H & 0\\ * & (\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\end{pmatrix},$$

$$(C_0(\lambda)-C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)=\begin{pmatrix}I_H & 0\\ * & (\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \dot{C}_1(\lambda)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)\end{pmatrix},$$

і безпосередній підрахунок з огляду на (4.69) та (5.63) - (5.65) дає

$$\Omega_\tau(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix}m_0(\lambda)+M_{1+}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{2+}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{H,H_0}\\ -\frac{1}{2}P_{H_0,H} & 0\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H_0\oplus H. \tag{5.70}$$

Порівняння цієї рівності з (5.61) дає рівність

$$\Omega_\tau(\lambda)=\begin{pmatrix}m_{\dot\tau}(\lambda) & -\frac{1}{2}I_{H,H_0}\\ -\frac{1}{2}P_{H_0,H} & 0\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H_0\oplus H,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{5.71}$$

яка еквівалентна (5.59). □

Наслідок 5.15. *m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ належить до класу $R[H_0]$ і справедлива нерівність*

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\cdot\mathrm{Im}\,m_{\dot\tau}(\lambda)\ge\int_{\mathcal{I}}v_{\dot\tau}^*(t,\lambda)\Delta(t)v_{\dot\tau}(t,\lambda)\,dt,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{5.72}$$

де $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$ *– операторний розв'язок системи* (3.5), *заданий блочним зображенням* (5.55), *в якому* $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *визначені в твердженні 5.10. Якщо, крім того,* $n_+(T_{min}) = n_-(T_{min})$ *і* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *– канонічна m-функція, то справедлива тотожність*

$$m_{\dot\tau}(\mu) - m^*_{\dot\tau}(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} v^*_{\dot\tau}(t,\lambda)\Delta(t)v_{\dot\tau}(t,\mu)\,dt, \quad \mu,\lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.73}$$

і тому нерівність (5.72) *переходить в рівність.*

Доведення. Потрібні твердження випливають з (5.71), (5.50) і теореми 4.19, (2). ☐

У наступній теоремі дається опис усіх m-функцій симетричних систем у випадку a1 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра $\dot\tau$.

Теорема 5.16. *Припустимо, що за умов твердження 5.5* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (3.121). *Крім того, нехай* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\mathcal{H}}_1 \subset \dot{\mathcal{H}}_0$ *– скінченновимірні гільбертові простори* (5.23), $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.34)-(4.37) *і* $m_0(\cdot)$, $M_{1+}(\cdot)$, $M_{2+}(\cdot)$ *та* $M_{3+}(\cdot)$ *– оператор-функції, задані рівностями* (5.66)-(5.69). *Тоді:*

(1) $m_0(\cdot)$ *є m-функцією, що відповідає вкороченому граничному параметру* $\dot\tau_0 = \{I_{\dot{\mathcal{H}}_0}, 0_{\dot{\mathcal{H}}_1,\dot{\mathcal{H}}_0}\}$.

(2) *для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$*, заданого рівностями* (5.31) *та* (5.32), *відповідна m-функція* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_{1+}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{2+}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.74}$$

Доведення. Нехай $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.31), (5.32) і $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ – граничний параметр (5.35). Тоді характеричтична матриця $\Omega_\tau(\cdot)$ задовільняє рівностям (5.70) та (5.71), з яких випливає (5.74). Твердження (1) є безпосереднім наслідком формули (5.74). ☐

5.2.3. Випадок максимального індекса дефекту

Надалі в межах цього пункту вважаємо, що система (3.5) є визначеною і кінцева точка a є регулярною.

Нехай виконані припущення (П1)-(П3) пункту 4.4.1.. Тоді внаслідок припущення (П3) рівності (5.23) приймають вигляд

$$\dot{\mathcal{H}}_0 = \widehat{H} \oplus H, \qquad \dot{\mathcal{H}}_1 = \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b. \tag{5.75}$$

Нехай $B(\cdot)$ – оператор-функція (4.119) з блочним зображенням (4.120). Покладемо

$$\dot{W}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(\lambda) & \dot{w}_2(\lambda) \\ \dot{w}_3(\lambda) & \dot{w}_4(\lambda) \end{pmatrix} : H_0 \oplus H_0 \to \dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.76}$$

де

$$\dot{w}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -iB_{21}(\lambda) & -i(B_{22}(\lambda) - I_{\widehat{H}}) \\ B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{\widehat{H} \oplus H}_{\dot{\mathcal{H}}_0} \tag{5.77}$$

$$\dot{w}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -iB_{23}(\lambda) & \frac{1}{2}(B_{22}(\lambda) + I_{\widehat{H}}) \\ B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{\widehat{H} \oplus H}_{\dot{\mathcal{H}}_0} \tag{5.78}$$

$$\dot w_3(\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{21}(\lambda) & -\frac{1}{2}(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat H})\\ B_{31}(\lambda) & B_{32}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H}_{H_0}\to\underbrace{\widehat H\oplus\mathcal H_b}_{\dot{\mathcal H}_1} \tag{5.79}$$

$$\dot w_4(\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat H})\\ B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat H}_{H_0}\to\underbrace{\widehat H\oplus\mathcal H_b}_{\dot{\mathcal H}_1} \tag{5.80}$$

Очевидно, що рівності (5.76)-(5.80) задають голоморфну оператор-функцію $\dot W(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H_0\oplus H_0,\dot{\mathcal H}_0\oplus\dot{\mathcal H}_1]$.

Якщо система (3.5) є квазірегулярною, то $\mathcal H_b=H$ і оператор Γ_b вигляду (4.112) перетворюється в оператор (4.113). У цьому випадку $\dot{\mathcal H}_0=\dot{\mathcal H}_1=:\dot{\mathcal H}$, де

$$\dot{\mathcal H}=\widehat H\oplus H,$$

$B(\lambda)$ приймає вигляд (4.151) і

$$\dot W(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda)\\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda)\end{pmatrix}:H_0\oplus H_0\to\dot{\mathcal H}\oplus\dot{\mathcal H},\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{5.81}$$

де $\dot w_j(\lambda)$ визначені рівностями (5.77)-(5.80) з $\mathcal H_b=H$ і $\dot{\mathcal H}_0=\dot{\mathcal H}_1=\dot{\mathcal H}$. Ясно, що рівність (5.81) задає цілу $[H_0\oplus H_0,\dot{\mathcal H}\oplus\dot{\mathcal H}]$-значну функцію $\dot W(\cdot)$.

Твердження 5.17. *Нехай за припущень* (П1) - (П3) *пункту 4.4.1. $M_+(\cdot)$ – оператор-функція, визначена рівностями* (4.117) *та* (4.35) - (4.37), *й $m_0(\cdot)$, $M_{1+}(\cdot)$, $M_{2+}(\cdot)$ та $M_{3+}(\cdot)$ – оператор-функції* (5.66) - (5.69). *Тоді для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+$ оператор $M_{1+}(\lambda)$ є оборотним і оператор-функція $\dot W(\cdot)$ допускає зображення*

$$\dot W(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda)\\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{1+}^{-1}(\lambda) & M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda)\\ -M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda) & M_{2+}(\lambda)-M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda)\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{5.82}$$

Доведення. Нехай $W(\lambda)$ – оператор-функція, задана рівностями (4.121) - (4.125). Тоді

$$w_1(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & -I_H\\ \dot w_1(\lambda) & \widetilde w_1(\lambda)\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal H}_0 \tag{5.83}$$

$$w_2(\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}P_{H_0,H} & 0\\ \dot w_2(\lambda)D & \widetilde w_2(\lambda)\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal H}_0 \tag{5.84}$$

$$w_3(\lambda)=\begin{pmatrix}-P_{H_0,H} & 0\\ \dot w_3(\lambda) & \widetilde w_3(\lambda)\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal H}_1 \tag{5.85}$$

$$w_4(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}I_H\\ \dot w_4(\lambda)D & \widetilde w_4(\lambda)\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal H}_1, \tag{5.86}$$

де

$$\widetilde w_1(\lambda)=\begin{pmatrix}-iB_{23}(\lambda)\\ B_{13}(\lambda)\end{pmatrix}:H\to\underbrace{\widehat H\oplus H}_{\dot{\mathcal H}_0},\quad \widetilde w_3(\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{23}(\lambda)\\ B_{33}(\lambda)\end{pmatrix}:H\to\underbrace{\widehat H\oplus\mathcal H_b}_{\dot{\mathcal H}_1} \tag{5.87}$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_H & 0\\ 0 & I_{\widehat H}\end{pmatrix}:H\oplus\widehat H\to H\oplus\widehat H. \tag{5.88}$$

Нехай $\Omega_0(\cdot)$, $S_1(\cdot)$ та $S_2(\cdot)$ – оператор-функції (4.66), (4.118) та (4.68). Припустимо, що ці функції зображені у вигляді (5.63) - (5.65), а оператор-функція $M_+(\cdot)$ – у вигляді (5.62), де

$$N_2(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{21}(\lambda) \\ M_{31}(\lambda) \end{pmatrix} : H \to \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \quad N_3(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) \end{pmatrix} : H \to H \oplus \widehat{H}. \tag{5.89}$$

Оскільки згідно з твердженням 4.22 оператор $S_1(\lambda)$ є оборотним, то внаслідок (5.64) оператор $M_{1+}(\lambda)$ також є обротним і справедлива рівність

$$S_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I_H \\ M_{1+}^{-1}(\lambda) & M_{1+}^{-1}(\lambda)N_3(\lambda) \end{pmatrix} : H_0 \oplus H \to H \oplus \dot{\mathcal{H}}_0. \tag{5.90}$$

З (4.126) та (5.62), (5.90) випливає, що

$$w_1(\lambda) = S_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ M_{1+}^{-1}(\lambda) & * \end{pmatrix}, \quad w_3(\lambda) = -M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ -M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda) & * \end{pmatrix}.$$

Порівняння цих рівностей з (5.83) та (5.85) дає

$$\dot{w}_1(\lambda) = M_{1+}^{-1}(\lambda), \qquad \dot{w}_3(\lambda) = -M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.91}$$

Далі, внаслідок (4.126) та (5.62), (5.63), (5.65), (5.90) маємо

$$w_2(\lambda) = S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ M_{1+}^{-1}(\lambda)(m_0(\lambda) - \frac{1}{2}N_3(\lambda)P_{H_0,H}) & * \end{pmatrix}$$

$$w_4(\lambda) = S_2(\lambda) - M_+(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ M_{2+}(\lambda) - \frac{1}{2}N_2(\lambda)P_{H_0,H} - M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda)D & * \end{pmatrix}.$$

Звідси та з (5.84), (5.86) випливає, що

$$\dot{w}_2(\lambda) = M_{1+}^{-1}(\lambda)(m_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}N_3(\lambda)P_{H_0,H})D^{-1}$$
$$\dot{w}_4(\lambda) = (M_{2+}(\lambda) - \tfrac{1}{2}N_2(\lambda)P_{H_0,H})D^{-1} - M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda).$$

З огляду на (5.89) та (5.88) маємо

$$(m_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}N_3(\lambda)P_{H_0,H})D^{-1} =$$
$$\left(\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) \end{pmatrix}(I_H,\, 0)\right)\begin{pmatrix} 2I_H & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = m_0(\lambda)$$

$$(M_{2+}(\lambda) - \tfrac{1}{2}N_2(\lambda)P_{H_0,H})D^{-1} =$$
$$\left(\begin{pmatrix} M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) + \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_{21}(\lambda) \\ M_{31}(\lambda) \end{pmatrix}(I_H,\, 0)\right)\begin{pmatrix} 2I_H & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) + \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) \end{pmatrix} = M_{2+}(\lambda).$$

Звідси випливає, що

$$\dot w_2(\lambda) = M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda), \qquad \dot w_4(\lambda) = M_{2+}(\lambda) - M_{3+}(\lambda)M_{1+}^{-1}(\lambda)m_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.92}$$

і рівність (5.82) є наслідком (5.91) та (5.92). □

Твердження 5.18. *Нехай виконані припущення (ПК1) - (ПК3) пункту 4.4.2.. Крім того, нехай* $\dot W(\cdot)$ *– оператор-функція* (5.81) *і* $\varphi(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H_0, \mathbb{H}]$ *та* $\chi(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H_0, \mathbb{H}]$ *– операторні розв'язки системи* (3.5) *з початковими умовами* (4.17) *та* (5.8) *відповідно. Тоді для всіх* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *справедливі тотожності*

$$-\dot w_1^*(\lambda)\dot w_3(\mu) + \dot w_3^*(\lambda)\dot w_1(\mu) = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} \varphi^*(t,\lambda)\Delta(t)\varphi(t,\mu)\,dt, \tag{5.93}$$

$$-\dot w_2^*(\lambda)\dot w_3(\mu) + \dot w_4^*(\lambda)\dot w_1(\mu) - I_{H_0} = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} \chi^*(t,\lambda)\Delta(t)\varphi(t,\mu)\,dt, \tag{5.94}$$

$$-\dot w_2^*(\lambda)\dot w_4(\mu) + \dot w_4^*(\lambda)\dot w_2(\mu) = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} \chi^*(t,\lambda)\Delta(t)\chi(t,\mu)\,dt. \tag{5.95}$$

Ці тотожності означають, що

$$\dot W^*(\lambda)\dot J \dot W(\mu) - \dot J = (\mu - \overline{\lambda}) \int_{\mathcal{I}} \dot Y^*(t,\lambda)\Delta(t)\dot Y(t,\mu)\,dt, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \tag{5.96}$$

де $\dot J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\dot{\mathcal{H}}} \\ I_{\dot{\mathcal{H}}} & 0 \end{pmatrix} : \dot{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}} \to \dot{\mathcal{H}} \oplus \dot{\mathcal{H}}, \quad \dot Y(t,\lambda) = (\varphi(t,\lambda),\, \chi(t,\lambda)) : H_0 \oplus H_0 \to \mathbb{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$

Доведення. Нехай $W(\lambda)$ – оператор-функція, задана рівностями (4.152) та (4.122)-(4.125). Для доведення (5.93)-(5.95) скористаємося тотожностями (4.153)-(4.155), в яких

$$Y_1(t,\lambda) = \tfrac{1}{2} Y_{\widetilde U}(t,\lambda) J = (\tfrac{1}{2}\psi(t,\lambda), \tfrac{i}{2}\widehat\varphi(t,\lambda), -\tfrac{1}{2}\varphi_0(t,\lambda)) : H \oplus \widehat H \oplus H \to \mathbb{H} \tag{5.97}$$

(тут φ_0, $\widehat\varphi$ та ψ ті ж самі, що і в (4.15)). Безпосередній підрахунок з огляду на (5.83)-(5.86) дає

$$-w_1^*(\lambda)w_3(\mu) + w_3^*(\lambda)w_1(\mu) = \begin{pmatrix} -\dot w_1^*(\lambda)\dot w_3(\mu) + \dot w_3^*(\lambda)\dot w_1(\mu) & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.98}$$

$$-w_2^*(\lambda)w_3(\mu) + w_4^*(\lambda)w_1(\mu) - I_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} D(-\dot w_2^*(\lambda)\dot w_3(\mu) + \dot w_4^*(\lambda)\dot w_1(\mu) - I_{H_0}) & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.99}$$

$$-w_2^*(\lambda)w_4(\mu) + w_4^*(\lambda)w_2(\mu) = \begin{pmatrix} D(-\dot w_2^*(\lambda)\dot w_4(\mu) + \dot w_4^*(\lambda)\dot w_2(\mu))D & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.100}$$

З іншого боку, внаслідок (4.15) та (5.97)

$$Y_{\widetilde U}(t,\lambda) = (\varphi(t,\lambda),\, \psi(t,\lambda)) : H_0 \oplus H \to \mathbb{H}, \quad Y_1(t,\lambda) = (\chi(t,\lambda)D,\, -\tfrac{1}{2}\varphi_0(t,\lambda)) : H_0 \oplus H \to \mathbb{H}, \tag{5.101}$$

звідки випливають рівності

$$(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}} Y^*_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt = \begin{pmatrix} (\mu-\overline{\lambda})\int\limits_{\mathcal{I}}\varphi^*(t,\lambda)\Delta(t)\varphi(t,\mu)\,dt & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.102}$$

$$(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}} Y^*_1(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde{U}}(t,\mu)\,dt = \begin{pmatrix} (\mu-\overline{\lambda})D\int\limits_{\mathcal{I}}\chi^*(t,\lambda)\Delta(t)\varphi(t,\mu)\,dt & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.103}$$

$$(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal{I}} Y^*_1(t,\lambda)\Delta(t)Y_1(t,\mu)\,dt = \begin{pmatrix} (\mu-\overline{\lambda})D\left(\int\limits_{\mathcal{I}}\chi^*(t,\lambda)\Delta(t)\chi(t,\mu)\,dt\right)D & * \\ * & * \end{pmatrix} \tag{5.104}$$

Порівнюючи тепер (5.98)-(5.100) та (5.102)-(5.104) з (4.153)-(4.155), отримуємо потрібні тотожності (5.93)-(5.95). □

Твердження 5.19. *Нехай виконані припущення (ПК1) - (ПК3) пункту 4.4.2. з оператором* Γ_b, *заданим рівністю* (4.159) *(у цьому випадку оператор-функція* $B(\cdot)$ *допускає зображення* (4.160)*). Крім того, нехай* $\dot{W}(\cdot)$ *– відповідна оператор-функція* (5.81) *і* $\varphi_1(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\dot{\mathcal{H}},\mathbb{H}]$ *та* $\varphi_2(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[\dot{\mathcal{H}},\mathbb{H}]$ *– операторні розв'язки системи* (3.5) *з початковими умовами*

$$\widetilde{U}\varphi_1(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ I_{\widehat{H}} & 0\\ 0 & -I_H\end{pmatrix}:\underbrace{\widehat{H}\oplus H}_{\dot{\mathcal{H}}}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\qquad \widetilde{U}\varphi_2(a,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & I_H\\ \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\underbrace{\widehat{H}\oplus H}_{\dot{\mathcal{H}}}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H$$

Тоді для всіх $\lambda\in\mathbb{C}$ *справедливі зображення*

$$\dot{w}_1(\lambda)=\dot{C}_1-\lambda\int_{\mathcal{I}}\varphi_1^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt,\qquad \dot{w}_2(\lambda)=\dot{C}_2-\lambda\int_{\mathcal{I}}\varphi_1^*(t,0)\Delta(t)\chi(t,\lambda)\,dt \tag{5.105}$$

$$\dot{w}_3(\lambda)=-\dot{C}_2-\lambda\int_{\mathcal{I}}\varphi_2^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt,\qquad \dot{w}_4(\lambda)=\dot{C}_1-\lambda\int_{\mathcal{I}}\varphi_2^*(t,0)\Delta(t)\chi(t,\lambda)\,dt \tag{5.106}$$

з операторами $\dot{C}_1,\dot{C}_2\in[H_0,\dot{\mathcal{H}}]$, *заданими рівностями*

$$\dot{C}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ I_H & 0\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to\widehat{H}\oplus H,\qquad \dot{C}_2=\begin{pmatrix}0 & I_{\widehat{H}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to\widehat{H}\oplus H.$$

Доведення. Нехай $Y_2(\cdot,\lambda)$ та $Y_3(\cdot,\lambda)$ – операторні розв'язки системи (3.5) з початковими умовами (4.158) і C_j – оператори (4.163), (4.164). Тоді

$$Y_2(t,\lambda)=(0,\varphi_1(t,\lambda)):H\oplus\dot{\mathcal{H}}\to\mathbb{H},\quad Y_3(t,\lambda)=(0,\varphi_2(t,\lambda)):H\oplus\dot{\mathcal{H}}\to\mathbb{H}$$

$$C_1=\begin{pmatrix}* & *\\ \dot{C}_1 & *\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal{H}},\qquad C_2=\begin{pmatrix}* & *\\ \dot{C}_2D & *\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal{H}}$$

$$C_3=\begin{pmatrix}* & *\\ -\dot{C}_2 & *\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal{H}},\qquad C_4=\begin{pmatrix}* & *\\ \dot{C}_1D & *\end{pmatrix}:H_0\oplus H\to H\oplus\dot{\mathcal{H}},$$

де D – оператор (5.88). Крім того, $Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)$ та $Y_1(t,\lambda)$ мають блочні зображення (5.101). Тому внаслідок (4.161) та (4.162) маємо

$$w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ \dot{C}_1 - \lambda \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi_1^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt & * \end{pmatrix}, \quad w_2(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ (\dot{C}_2 - \lambda \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi_1^*(t,0)\Delta(t)\chi(t,\lambda)\,dt)D & * \end{pmatrix}$$

$$w_3(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ -\dot{C}_2 - \lambda \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi_2^*(t,0)\Delta(t)\varphi(t,\lambda)\,dt & * \end{pmatrix}, \quad w_4(\lambda) = \begin{pmatrix} * & * \\ (\dot{C}_1 - \lambda \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi_2^*(t,0)\Delta(t)\chi(t,\lambda)\,dt)D & * \end{pmatrix}$$

Порівнюючи ці рівності з (5.83)-(5.86), отримуємо (5.105) та (5.106). ☐

В наступній теоремі дається параметризація всіх m-функцій визначених систем у випадку максимального індексу дефекту $n_+(T_{min}) = n$.

Теорема 5.20. *Нехай за припущень (П1) та (П3) пункту 4.4.1.* U *- оператор* (5.1)*, що задовільняє* (5.2)-(5.4)*,* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (3.121)*. Припустимо також, що* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\mathcal{H}}_1 \subset \mathcal{H}_0$ *– простори* (5.75)*,* $B(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.120) *та* $\dot{W}(\cdot)$ *– оператор-функція* (5.76)-(5.80)*. Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1)$*, заданого рівностями* (5.31) *та* (5.32)*, відповідна* m*-функція* $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.107}$$

Доведення. Нехай $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.31), $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ – граничний параметр (5.35) і $\Omega_\tau(\cdot)$ – відповідна характеристична матриця. Крім того, нехай $W(\lambda)$ – оператор-функція (4.121)-(4.125). Тоді справедливі рівності (5.83)-(5.86) і безпосередній підрахунок дає

$$C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I_H \\ \dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda) & \dot{C}_0(\lambda)\widetilde{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\widetilde{w}_3(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$C_0(\lambda)w_2(\lambda) + C_1(\lambda)w_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_{H_0,H} & 0 \\ (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda))D & \dot{C}_0(\lambda)\widetilde{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\widetilde{w}_4(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Тому

$$(C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\widetilde{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\widetilde{w}_3(\lambda)) & (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1} \\ -I_H & 0 \end{pmatrix}$$

і внаслідок (4.169)

$$\Omega_\tau(\lambda) = (C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1}(C_0(\lambda)w_2(\lambda) + C_1(\lambda)w_4(\lambda)) = \begin{pmatrix} \Omega_{\tau,1}(\lambda) & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

де

$$\Omega_{\tau,1}(\lambda) = (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}\times$$
$$\times\,[\tfrac{1}{2}(\dot{C}_0(\lambda)\widetilde{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\widetilde{w}_3(\lambda))P_{H_0,H} + (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda))D] =$$
$$= (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)(\tfrac{1}{2}\widetilde{w}_1(\lambda)P_{H_0,H} + \dot{w}_2(\lambda)D) + \dot{C}_1(\lambda)(\tfrac{1}{2}\widetilde{w}_3(\lambda)P_{H_0,H} + \dot{w}_4(\lambda)D)).$$

Крім того, з огляду на (5.87) та (5.88) маємо

$$\tfrac{1}{2}\widetilde{w}_1(\lambda)P_{H_0,H}+\dot{w}_2(\lambda)D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-iB_{23}(\lambda)\\ B_{13}(\lambda)\end{pmatrix}(I_H,\,0)+\begin{pmatrix}-iB_{23}(\lambda) & \frac{1}{2}(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat{H}})\\ B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_H & 0\\ 0 & I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}B_{23}(\lambda) & 0\\ \frac{1}{2}B_{13}(\lambda) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}B_{23}(\lambda) & \frac{1}{2}(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat{H}})\\ \frac{1}{2}B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-iB_{23}(\lambda) & \frac{1}{2}(B_{22}(\lambda)+I_{\widehat{H}})\\ B_{13}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{12}(\lambda)\end{pmatrix}=\dot{w}_2(\lambda)$$

$$\tfrac{1}{2}\widetilde{w}_3(\lambda)P_{H_0,H}+\dot{w}_4(\lambda)D=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{23}(\lambda)\\ B_{33}(\lambda)\end{pmatrix}(I_H,\,0)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat{H}})\\ B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_H & 0\\ 0 & I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}B_{23}(\lambda) & 0\\ \frac{1}{2}B_{33}(\lambda) & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat{H}})\\ \frac{1}{2}B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}B_{23}(\lambda) & -\frac{i}{4}(B_{22}(\lambda)-I_{\widehat{H}})\\ B_{33}(\lambda) & \frac{i}{2}B_{32}(\lambda)\end{pmatrix}=\dot{w}_4(\lambda)$$

і, отже,

$$\Omega_{\tau,1}(\lambda)=(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda)+\dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda)+\dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)).$$

Таким чином,

$$\Omega_\tau(\lambda)=\begin{pmatrix}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda)+\dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda)+\dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)) & *\\ * & *\end{pmatrix}$$

і порівняння цієї рівності з (5.71) дає (5.107). ☐

5.3. m-функції у випадку a2

5.3.1. Узагальнені резольвенти відношення T

Твердження 5.21. *Припустимо, що:*

1) кінцева точка a є регулярною для системи (3.5) *і* $\delta=-1$, $N_+-N_-\geq\widehat{\nu}$ *(тобто має місце випадок a2);*

2) U *– оператор* (5.1), *що задовільняє* (5.2)-(5.4), *і* $\widehat{\Gamma}_a$ *та* Γ_{1a} *– оператори* (3.122)*;*

3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b,\Gamma_b\}$ *– b-граничний комплекс типу 2* (3.138)*;*

4) система є U-визначеною.

Тоді:

(1) *Рівність* (5.16) *задіє симетричне відношення* $T\in Ext_{T_{min}}$ *і спряжене до* T *відношення* T^* *має вигляд*

$$T^*(=T_*)=\{\{\pi_\Delta y,\pi_\Delta f\}:\{y,f\}\in\mathcal{T}_{max},\ \Gamma_{1a}y=0\}. \tag{5.108}$$

(2) *Для кожної пари* $\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}\in T^*$ *існує єдине* $y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$, *таке що* $\Gamma_{1a}y=0$, $\pi_\Delta y=\widetilde{y}$ *і* $\{y,f\}\in\mathcal{T}_{max}$ *для кожного* $f\in\widetilde{f}$.

(3) *Гільбертові простори*

$$\dot{\mathcal{H}}_0:=\widehat{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b \tag{5.109}$$

та $\mathcal{H}_b$ *сумісно з операторами* $\dot{\Gamma}_0 : T^* \to \dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\Gamma}_1 : T^* \to \mathcal{H}_b$*, визначеними рівностями*

$$\dot{\Gamma}_0\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} = (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y \,(\in \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b), \quad \dot{\Gamma}_1\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} = -\Gamma_{1b} y \,(\in \mathcal{H}_b), \quad \{\widetilde{y},\widetilde{f}\} \in T^*, \tag{5.110}$$

утворюють граничну трійку $\dot{\Pi} = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \mathcal{H}_b, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ *для* T^**. В формулі* (5.110) $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ *однозначно визначається парою* $\{\widetilde{y},\widetilde{f}\}$ *згідно з твердженням* (2).

Доведення. (1) Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Крім того, нехай $\mathcal{H}_j$ – гільбертові простори (3.139), Γ_j', $j \in \{0,1\}$, – оператори (3.140), (3.141) і $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ – розділена гранична пара (3.147) для T_{max}. Тоді внаслідок (3.33)

$$\mathcal{K}_\Gamma'' = \{\Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y) : y \in \mathcal{N} \text{ та } \Gamma_{1a} y = 0, \ \widehat{\Gamma}_a y = 0, \ \widetilde{\Gamma}_{0b} y = 0\} \tag{5.111}$$

і з U-визначеності системи випливає, що $\mathcal{K}_\Gamma'' = \{0\}$. Крім того, простори $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ можна зобразити у вигляді (2.192) з $\widehat{\mathcal{H}} = H \ \dot{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_b$. Тому згідно з твердженням 2.67, (1) рівності

$$T = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} \text{ та } \Gamma_{1a} y = 0, \widehat{\Gamma}_a y = 0, \ \widetilde{\Gamma}_{0b} y = \Gamma_{1b} y = 0 \ \} \tag{5.112}$$

та (5.108) задають симетричне відношення $T \in Ext_{T_{min}}$ і спряжене до нього відношення T^*. Далі, з тотожності (3.60) та сюр'єктивності оператора Γ_b випливає, що $\mathcal{D}_{0b} = \{y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} : \widetilde{\Gamma}_{0b} y = \Gamma_{1b} y = 0\}$. Тому рівність (5.112) можна зобразити у вигляді (5.16).

(2) Якщо $\{\widetilde{y},\widetilde{f}\} \in T^*$, то існує пара $\{y,f\} \in \mathcal{T}_{max}$, така що $\pi_\Delta y = \widetilde{y}$, $\pi_\Delta f = \widetilde{f}$ і $\Gamma_{1a} y = 0$. Тому y має потрібні властивості. Для доведення єдиності такого y припустимо, що $y_1 \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, $\Gamma_{1a} y_1 = 0$, $\pi_\Delta y_1 = \widetilde{y}$ і $\{y_1, f_1\} \in \mathcal{T}_{max}$ з деяким $f_1 \in \widetilde{f}$. Тоді $\widetilde{\pi}_\Delta\{y_1, f_1\} = \{\widetilde{y},\widetilde{f}\}$ і, отже, $\widetilde{\pi}_\Delta\{y_1 - y, f_1 - f\} = 0$. Тому внаслідок (3.33) $y_1 - y \in \mathcal{N}$. Крім того, $\Gamma_{1a}(y - y_1) = 0$, звідки з огляду на припущення 4) випливає рівність $y_1 = y$.

(3) Застосування твердження 2.67, (2) до розділеною граничної пари $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ дає граничну пару $\{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \mathcal{H}_b, \dot{\Gamma}\}$ для T^* з відношенням $\dot{\Gamma} : \mathfrak{H}^2 \to \dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \mathcal{H}_b$, заданим рівністю

$$\dot{\Gamma} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y \\ -\Gamma_{1b} y \end{pmatrix} \right\} : \{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} \text{ та } \Gamma_{1a} y = 0 \right\}.$$

Очевидно, що відношення $\dot{\Gamma}_0 = P_{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \{0\}} \dot{\Gamma} \upharpoonright T^*$ та $\dot{\Gamma}_1 = P_{\{0\} \oplus \mathcal{H}_b} \dot{\Gamma} \upharpoonright T^*$ мають вигляд

$$\dot{\Gamma}_0 = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, (-i\widehat{\Gamma}_a y) \oplus \widetilde{\Gamma}_{0b} y \right\} : \{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} \text{ та } \Gamma_{1a} y = 0 \right\}$$

$$\dot{\Gamma}_1 = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, -\Gamma_{1b} y \right\} : \{y,f\} \in \mathcal{T}_{max} \text{ та } \Gamma_{1a} y = 0 \right\}$$

і внаслідок твердження (2) ці відношення є операторами (5.110). Тому згідно з наслідком 2.63 справедливим є твердження (3). □

Означення 5.22. За припущень твердження 5.21 вкороченим граничним параметром для системи (3.5) називається операторна пара

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}(\lambda) = \{\dot{C}_0(\lambda), \dot{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.113}$$

з голоморфними оператор-функціями $\dot{C}_0(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{K}]$ та $\dot{C}_1(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_b, \mathcal{K}]$ (тут $\mathcal{K}$ – допоміжний скінченновимірний гільбертів простір).

Безпосередня перевірка показує, що для кожного граничного параметра $\dot\tau$ вигляду (5.113) рівності

$$\widetilde{C}_0(\lambda)=\begin{pmatrix} I_{\widehat H} & 0\\ 0 & \dot C_0(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{\widehat H\oplus\widetilde{\mathcal H}_b}_{\dot{\mathcal H}_0}\to \widehat H\oplus\mathcal K,\quad \widetilde C_1(\lambda)=\begin{pmatrix}0\\ \dot C_1(\lambda)\end{pmatrix}:\mathcal H_b\to\widehat H\oplus\mathcal K,\quad l\in\mathbb C_+ \tag{5.114}$$

коректно задають голоморфну операторну пару $\widetilde\tau=\widetilde\tau(\lambda)=\{\widetilde C_0(\lambda),\widetilde C_1(\lambda)\}\in\widetilde R(\dot{\mathcal H}_0,\mathcal H_b)$.

Нехай $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.113). Для заданої функції $f(\cdot)\in\mathcal L^2_\Delta(\mathcal I)$ розглянемо граничну задачу

$$Jy'-B(t)y=\lambda\Delta(t)y+\Delta(t)f(t),\quad t\in\mathcal I, \tag{5.115}$$

$$\Gamma_{1a}y=0,\qquad \widehat\Gamma_a y=0 \tag{5.116}$$

$$\dot C_0(\lambda)\widetilde\Gamma_{0b}y+\dot C_1(\lambda)\Gamma_{1b}y=0\quad \lambda\in\mathbb C_+. \tag{5.117}$$

Теорема 5.23. *Нехай за умов твердження 5.21* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113)*. Тоді для кожного* $f\in\mathcal L^2_\Delta(\mathcal I)$ *гранична задача* (5.115)-(5.117) *має єдиний розв'язок* $y(t,\lambda)=y_f(t,\lambda)$ *і рівність* (4.3) *задає узагальнену резольвенту* $R(\lambda)=:R_{\dot\tau}(\lambda)$ *відношення* T.

Доведення. Нехай $\dot\Pi=\{\dot{\mathcal H}_0\oplus\mathcal H_b,\dot\Gamma_0,\dot\Gamma_1\}$ – гранична трійка для T^*, побудована в твердженні 5.21, і $\widetilde\tau=\{\widetilde C_0(\lambda),\widetilde C_1(\lambda)\}\in\widetilde R(\dot{\mathcal H}_0,\mathcal H_b)$ – операторна пара (5.114). Тоді гранична задача (5.115)-(5.117) еквівалентна граничній задачі

$$\{\widetilde y,\lambda\widetilde y+\widetilde f\}\in T^*,\quad \widetilde f\in\mathfrak H \tag{5.118}$$

$$\widetilde C_0(\lambda)\dot\Gamma_0\{\widetilde y,\lambda\widetilde y+\widetilde f\}-\widetilde C_1(\lambda)\dot\Gamma_1\{\widetilde y,\lambda\widetilde y+\widetilde f\}=0,\quad \lambda\in\mathbb C_+ \tag{5.119}$$

і потрібне твердження випливає з наслідку 2.45, застосованого до трійки $\dot\Pi$. ☐

5.3.2. $\mathcal L^2_\Delta$-розв'язки граничних задач

Твердження 5.24. *Нехай виконано умови твердження 5.21. Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda\in\mathbb C\setminus\mathbb R$ *існує єдиний операторний розв'язок* $\xi_0(\cdot,\lambda)\in\mathcal L^2_\Delta[H,\mathbb H]$ *системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda)=-I_H,\quad \lambda\in\mathbb C\setminus\mathbb R \tag{5.120}$$

$$\widehat\Gamma_a\xi_0(\lambda)=0,\quad \widetilde\Gamma_{0b}\xi_0(\lambda)=0,\ \ \lambda\in\mathbb C_+;\qquad P_{\widetilde{\mathcal H}_b,\mathcal H_b}\widetilde\Gamma_{0b}\xi_0(\lambda)=0,\ \ \lambda\in\mathbb C_-. \tag{5.121}$$

(2) *Для кожного* $\lambda\in\mathbb C_+$ *існує єдиний операторний розв'язок* $\widehat\xi_0(\cdot,\lambda)\in\mathcal L^2_\Delta[\widehat H,\mathbb H]$ *системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\widehat\xi_0(\lambda)=0,\quad \widehat\Gamma_a\widehat\xi_0(\lambda)=iI_{\widehat H},\quad \widetilde\Gamma_{0b}\widehat\xi_0(\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathbb C_+. \tag{5.122}$$

(3) *Для кожного* $\lambda\in\mathbb C_+$ ($\lambda\in\mathbb C_-$) *існує єдиний операторний розв'язок* $u_+(\cdot,\lambda)\in\mathcal L^2_\Delta[\widetilde{\mathcal H}_b,\mathbb H]$ *(відп.* $u_-(\cdot,\lambda)\in\mathcal L^2_\Delta[\mathcal H_b,\mathbb H]$*) системи* (3.5)*, що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}u_\pm(\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathbb C_\pm \tag{5.123}$$

$$\widehat\Gamma_a u_+(\lambda)=0,\quad \widetilde\Gamma_{0b}u_+(\lambda)=I_{\widetilde{\mathcal H}_b},\ \ \lambda\in\mathbb C_+;\qquad P_{\widetilde{\mathcal H}_b,\mathcal H_b}\Gamma_{0b}u_-(\lambda)=I_{\mathcal H_b},\ \ \lambda\in\mathbb C_-. \tag{5.124}$$

Доведення. Припустимо, що $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Крім того, нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ – скінченновимірні гільбертові простори (3.139), Γ_0' та Γ_1' – оператори (3.140) та (3.141), $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ – розділена гранична пара (3.147) для T_{max} і $\Gamma_0 : \mathfrak{H}^2 \to \mathcal{H}_0$ – лінійне відношення (2.159), що відповідає Γ. Очевидно, що відношення Γ_0 допускає зображення

$$\Gamma_0 = \{\{\widetilde{\pi}_\Delta\{y, f\}, \Gamma_0' y\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}\}. \tag{5.125}$$

Спочатку покажемо, що

$$\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min}) = \{\{\widetilde{\pi}_\Delta\{y, \lambda y\}, \Gamma_0' y\} : \ y \in \mathcal{N}_\lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{5.126}$$

Оскільки $\pi_\Delta \mathcal{N}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda(T_{min})$, то з (5.125) випливає, що $\{\widetilde{\pi}_\Delta\{y, \lambda y\}, \Gamma_0' y\} \in \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min})$ для кожного $y \in \mathcal{N}_\lambda$. Зворотно, нехай $\{\{\widetilde{y}, \lambda\widetilde{y}\}, \widetilde{h}\} \in \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min})$ з деякими $\widetilde{y} \in \mathfrak{N}_\lambda(T_{min})$ та $\widetilde{h} \in \mathcal{H}_0$. Тоді згідно з (5.125) існує пара $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}$, така що $\pi_\Delta y = \widetilde{y}$, $\pi_\Delta f = \lambda \widetilde{y}$ і $\Gamma_0' y = \widetilde{h}$. Тому $\pi_\Delta(f - \lambda y) = 0$ і, отже, $\Delta(t) f(t) = \Delta(t)(\lambda y(t))$ м.в. на $\mathcal{I}$. Таким чином, $J y'(t) - B(t) y(t) = \Delta(t) f(t) = \lambda \Delta(t) y(t)$ (м.в. на $\mathcal{I}$), так що $y \in \mathcal{N}_\lambda$. Тому $\{\{\widetilde{y}, \lambda\widetilde{y}\}, \widetilde{h}\} = \{\widetilde{\pi}_\Delta\{y, \lambda y\}, \Gamma_0' y\}$ з деяким $y \in \mathcal{N}_\lambda$, що дає (5.126).

В процесі доведення твердження 5.21 було отримано рівність $\mathcal{K}_\Gamma'' = \{0\}$. Тому з наслідку 2.62, (1) випливає, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$\ker \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min}) = \{0\}, \qquad \operatorname{ran} \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min}) = H \oplus \mathcal{H}_b. \tag{5.127}$$

Якщо $y \in \mathcal{N}_\lambda$ і $\Gamma_0' y = 0$, то в силу (5.126) і першої рівності в (5.127) $\pi_\Delta y = 0$. Тому $y \in \mathcal{N}$ і внаслідок (3.140) $\Gamma_{1a} y = 0$. Звідси з огляду на припущення 4) твердження 5.21 випливає рівність $y = 0$ і, отже, $\ker \Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda = \{0\}$. Крім того, внаслідок (5.126) і другої рівності в (5.127) маємо $\Gamma_0' \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H}_0$. Таким чином, для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ оператор $\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda$ ізоморфно відображає $\mathcal{N}_\lambda$ на $\mathcal{H}_0$. Аналогічно з використанням теореми 2.61, (4) доводиться, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_-$ оператор $P_1 \Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda$ ізоморфно відображає $\mathcal{N}_\lambda$ на $\mathcal{H}_1$. Звідси випливає, що рівності $Z_+(\lambda) = (\Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, та $Z_-(\lambda) = (P_1 \Gamma_0' \upharpoonright \mathcal{N}_\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$, задають ізоморфізми $Z_+(\lambda) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{N}_\lambda$ та $Z_-(\lambda) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{N}_\lambda$, такі що

$$\Gamma_0' Z_+(\lambda) = I_{\mathcal{H}_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad P_1 \Gamma_0' Z_-(\lambda) = I_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{5.128}$$

Припустимо, що оператори $Z_\pm(\lambda)$ мають блочні зображення

$$Z_+(\lambda) = (\xi_0(\lambda), \widehat{\xi}_0(\lambda), u_+(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.129}$$

$$Z_-(\lambda) = (\xi_0(\lambda), u_-(\lambda)) : H \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{5.130}$$

й нехай $\xi_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[H, \mathbb{H}]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[\widehat{H}, \mathbb{H}]$, $u_+(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathbb{H}]$ та $u_-(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2[\mathcal{H}_b, \mathbb{H}]$ – опараторні розв'язки системи (3.5), породжені згідно з лемою 3.4 операторами $\xi_0(\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\lambda)$, $u_+(\lambda)$ та $u_-(\lambda)$ відповідно. Оскільки внаслідок (3.140)

$$\Gamma_0' = (-\Gamma_{1a}, -i\widehat{\Gamma}_a, \widetilde{\Gamma}_{0b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \tag{5.131}$$

$$P_1 \Gamma_0' = (-\Gamma_{1a}, P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b} \widetilde{\Gamma}_{0b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \mathcal{H}_b., \tag{5.132}$$

то рівності (5.128) можна зобразити як

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} \\ -i\widehat{\Gamma}_a \\ \widetilde{\Gamma}_{0b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda),\, \widehat{\xi}_0(\lambda),\, u_+(\lambda)) = \begin{pmatrix} I_H & 0 & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} \\ P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b} \widetilde{\Gamma}_{0b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda),\, u_-(\lambda)) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_b} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Звідси випливають рівності (5.120)–(5.124).

Єдиність розв'язків $\xi_0(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ та $u_\pm(\cdot,\lambda)$ є наслідком оборотності операторів $\Gamma_0' \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, та $P_1\Gamma_0' \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$ (див. доведення твердження 4.9). □

Твердження 5.25. *Нехай за припущень твердження 5.21* $\widetilde{U}$ – *J-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U, Γ_{0a} – *оператор* (3.121) *і* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ – *розділена гранична пара для* T_{max}, *визначена рівностями* (3.139)–(3.141) *та* (3.147). *Крім того, нехай* $\xi_0(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ *та* $u_\pm(\cdot,\lambda)$ – *операторні розв'язки, визначені в твердженні 5.24, і* $Z_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{H}_0, \mathbb{H}]$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, – *операторний розв'язок системи* (3.5), *заданий блочним зображенням* (4.31). *Тоді:*

(1) γ*-поле* $\gamma_+(\cdot)$ *пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *допускає зображення*

$$\gamma_+(\lambda) = \pi_\Delta Z_+(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.133}$$

(2) *Функція Вейля* $M_+(\cdot)$ *пари* $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ *є голоморфною оператор-функцією* $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$ *з блочним зображенням*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & N_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & N_2(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.134}$$

елементи якого задаються рівностями

$$m_0(\lambda) = \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda), \quad N_0(\lambda) = \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_2(\lambda) = \Gamma_{0a}u_+(\lambda) \tag{5.135}$$

$$M_3(\lambda) = -\Gamma_{1b}\xi_0(\lambda), \quad N_2(\lambda) = -\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_0(\lambda), \quad M_4(\lambda) = -\Gamma_{1b}u_+(\lambda). \tag{5.136}$$

Крім того, для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_-$ *справедливі рівності*

$$m_0^*(\overline{\lambda}) = \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda), \quad M_3^*(\overline{\lambda}) = \Gamma_{0a}u_-(\lambda), \quad N_0^*(\overline{\lambda}) = \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda), \quad N_2^*(\overline{\lambda}) = \widehat{\Gamma}_a u_-(\lambda). \tag{5.137}$$

(3) *Функція Вейля* $\dot{M}_+(\cdot)$ *граничної трійки* $\dot{\Pi}$ *для* T^* *має вигляд*

$$\dot{M}_+(\lambda) = (N_2(\lambda), M_4(\lambda)) : \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.138}$$

Доведення. (1) Нехай $h_0 \in \mathcal{H}_0$ і $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Тоді $Z_+(\lambda)h_0 \in \mathcal{N}_\lambda$ і згідно з (5.128) $\Gamma_0' Z_+(\lambda)h_0 = h_0$. Тому в силу (5.126)

$$\{\widetilde{\pi}_\Delta\{Z_+(\lambda)h_0, \lambda Z_+(\lambda)h_0\}, h_0\} \in \Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min})$$

і, отже,

$$\left\{h_0, \begin{pmatrix} \pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0 \\ \lambda\pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0 \end{pmatrix}\right\} \in (\Gamma_0 \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda(T_{min}))^{-1}, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси згідно з означенням (2.173) γ-поля $\gamma_+(\lambda)$ випливає рівність (5.133).

(2) В процесі доведення твердження 5.21 було отримано рівність $\mathcal{K}_\Gamma'' = \{0\}$. Тому згідно з наслідком 2.62, (2) функція Вейля $M_+(\cdot)$ ($M_-(\cdot)$) граничної пари $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ є $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$-значною (відп. $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0]$-значною) оператор-функцією. Нехай функція Вейля $M_+(\cdot)$ має блочне зображення (5.134). Тоді внаслідок рівності $M_-(\lambda) = M_+^*(\overline{\lambda})$ маємо

$$M_-(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0^*(\overline{\lambda}) & M_3^*(\overline{\lambda}) \\ N_0^*(\overline{\lambda}) & N_2^*(\overline{\lambda}) \\ * & * \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}_1} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b}_{\mathcal{H}_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{5.139}$$

З (3.147) випливає, що

$$\left\{\begin{pmatrix} \pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0 \\ \lambda\pi_\Delta Z_+(\lambda)h_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0' Z_+(\lambda)h_0 \\ \Gamma_1' Z_+(\lambda)h_0 \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma, \quad h_0 \in \mathcal{H}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$
$$\left\{\begin{pmatrix} \pi_\Delta Z_-(\lambda)h_1 \\ \lambda\pi_\Delta Z_-(\lambda)h_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_0' Z_-(\lambda)h_1 \\ \Gamma_1' Z_-(\lambda)h_1 \end{pmatrix}\right\} \in \Gamma, \quad h_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-$$

і внаслідок (2.161) та (2.162) маємо

$$\Gamma_1' Z_+(\lambda) = M_+(\lambda)\Gamma_0' Z_+(\lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad (\Gamma_1' + iP_2\Gamma_0')Z_-(\lambda) = M_-(\lambda)P_1\Gamma_0' Z_-(\lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_-$$

Тому з огляду на (5.128) справедливі рівності

$$\Gamma_1' Z_+(\lambda) = M_+(\lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+; \qquad (\Gamma_1' + iP_2\Gamma_0')Z_-(\lambda) = M_-(\lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{C}_-. \tag{5.140}$$

З (3.141) та (5.131) випливає, що

$$\Gamma_1' = (\Gamma_{0a}, \, -\Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \mathcal{H}_b$$
$$\Gamma_1' + iP_2\Gamma_0' = (\Gamma_{0a}, \, \widehat{\Gamma}_a, \, -\Gamma_{1b} + iP_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b^\perp} \widetilde{\Gamma}_{0b})^\top : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b.$$

Тому внаслідок (5.129) та (5.130) рівності (5.140) можна зобразити у вигляді

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ -\Gamma_{1b} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \, \widehat{\xi}_0(\lambda), \, u_+(\lambda)) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & N_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & N_2(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+$$
$$\begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ -\Gamma_{1b} + iP_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b^\perp} \end{pmatrix} (\xi_0(\lambda), \, u_-(\lambda)) = \begin{pmatrix} m_0^*(\overline{\lambda}) & M_3^*(\overline{\lambda}) \\ N_0^*(\overline{\lambda}) & N_2^*(\overline{\lambda}) \\ * & * \end{pmatrix}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_-.$$

Звідси випливають рівності (5.135)-(5.137).

Твердження (3) є наслідком твердження 2.67, (2) та (5.134). □

Теорема 5.26. *Нехай за умов твердження 5.21* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді:*

(1) *для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ *системи* (3.5), *що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = -I_H \tag{5.141}$$

$$\widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda) = 0, \qquad \dot C_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_{\dot\tau}(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\Gamma_{1b}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = 0 \tag{5.142}$$

$$\Gamma_{1a}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) = 0 \tag{5.143}$$

$$\widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}, \qquad \dot C_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) = 0 \tag{5.144}$$

(2) *розв'язки* $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *пов'язані з розв'язками* $\xi_0(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ *та* $u_\pm(\cdot,\lambda)$ *рівностями*

$$\xi_{\dot\tau}(t,\lambda) = \xi_0(t,\lambda) - u_+(t,\lambda)(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1}M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.145}$$

$$\widehat{\xi}_{\dot\tau}(t,\lambda) = \widehat{\xi}_0(t,\lambda) - u_+(t,\lambda)(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1}N_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.146}$$

де $M_3(\lambda)$, $N_2(\lambda)$ *та* $M_4(\lambda)$ *визначені рівностями* (5.136).

Доведення. Нехай $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{C}_0(\lambda), \widetilde{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \mathcal{H}_b)$ – операторна пара (5.114) і $\dot M_+(\cdot)$ – функція Вейля граничної трійки $\dot\Pi$ для T^*. Тоді згідно з наслідком 2.43 оператор $\widetilde{C}_0(\lambda) - \widetilde{C}_1(\lambda)\dot M_+(\lambda)$ є оборотним і через (5.138) маємо

$$\widetilde{C}_0(\lambda) - \widetilde{C}_1(\lambda)\dot M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{\widehat{H}} & 0 \\ -\dot C_1(\lambda)N_2(\lambda) & \dot C_0(\lambda) - \dot C_1(\lambda)M_4(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.147}$$

Звідси випливає, що $(\dot C_0(\lambda) - \dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{K}, \widetilde{\mathcal{H}}_b]$. Тому згідно з [94, лема 2.1] $(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1} \in [\mathcal{H}_b, \widetilde{\mathcal{H}}_b]$ і

$$-(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1} = (\dot C_0(\lambda) - \dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.148}$$

Таким чином, рівності (5.145) та (5.146) коректно задають розв'язки $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ та $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ ситеми (3.5) і для доведення теореми достатньо показати, що такі $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ є єдиними розв'язками системи, що задовільняють умовам (5.141) - (5.144).

Комбінуючи (5.145) та (5.146) з (5.120)-(5.124), отримуємо (5.141), (5.143), перші рівності в (5.142) та (5.144), а також рівності

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = -(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1}M_3(\lambda), \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) = -(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1}N_2(\lambda) \tag{5.149}$$

Крім того, внаслідок (5.136) та (5.145),(5.146) маємо

$$\Gamma_{1b}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = -(I_{\mathcal{H}_b} - M_4(\lambda)(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1})M_3(\lambda) \tag{5.150}$$

$$\Gamma_{1b}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) = -(I_{\mathcal{H}_b} - M_4(\lambda)(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1})N_2(\lambda). \tag{5.151}$$

Оскільки

$$\dot\tau(\lambda) = \{\{(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1}h_b, (I_{\mathcal{H}_b} - M_4(\lambda)(\dot\tau(\lambda) + M_4(\lambda))^{-1})h_b\} : h_b \in \mathcal{H}_b\},$$

то з (5.149) та (5.150), (5.151) випливають рівності

$$\{\widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda)h, \Gamma_{1b}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda)h\} \in \dot{\tau}(\lambda), \quad h \in H; \qquad \{\widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda)\widehat{h}, \Gamma_{1b}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda)\widehat{h}\} \in \dot{\tau}(\lambda), \quad \widehat{h} \in \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тому внаслідок (5.113) справедливі другі рівності в (5.142) та (5.144).

Єдиність розв'язків $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ (для заданого $\dot{\tau}$) випливає з теореми 5.23 (див. доведення аналогічного факта в твердженні 5.10). □

5.3.3. m-функції

Нехай за припущень твердження 5.21 $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Припустимо також, що $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр у сенсі означення 5.22 і $\xi_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\cdot,\lambda)$ – відповідні операторні розв'язки системи (3.5), визначені в теоремі 5.26.

Означення 5.27. Оператор-функція $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H_0]$, визначена рівністю

$$\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot{\tau}}(\lambda) & N_{\dot{\tau}}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi_{\dot{\tau}}(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_{\dot{\tau}}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.152}$$

називається m-функцією системи (3.5) (у випадку a2), що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot{\tau}$ або, екевівалентно, граничній задачи (5.115)-(5.117).

Аналогічно випадку a1 m-функція $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot)$ у випадку a2 визначається для заданого оператора U та вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ однозначно з точністю до самоспряженої константи. Точніше, справедливим є наступне твердження, що доводиться так само, як і твердження 5.12.

Твердження 5.28. *Нехай за умов твердження 5.21 $\widetilde{U}_j$ – два J- унітарних розширення* (5.53) *оператора U і $\Gamma_{0a}^{(j)}$ – відповідні оператори* (3.121). *Припустимо також, що $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр і*

$$\widetilde{m}_{\dot{\tau}}^{(j)}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot{\tau}}^{(j)}(\lambda) & N_{\dot{\tau}}^{(j)}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \ \ j \in \{1,2\}$$

– відповідні m-функції. Тоді

$$m_{\dot{\tau}}^{(2)}(\lambda) = m_{\dot{\tau}}^{(1)}(\lambda) + B, \qquad N_{\dot{\tau}}^{(2)}(\lambda) = N_{\dot{\tau}}^{(1)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

з деяким оператором $B = B^* \in [H]$.

В наступному твердженні дається дещо інше означення m-функцці у випадку a2.

Твердження 5.29. *Нехай за умов твердження 5.21 $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення* (3.120) *оператора U, Γ_{0a} – оператор* (3.121) *і $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді справедливим є твердження 5.13 із заміною $m_{\dot{\tau}}(\lambda)$ на $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda)$ і граничних умов* (5.43) *та* (5.45) *граничними умовами* (5.142) *та* (5.144).

Доведення. Нехай $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$ – операторний розв'язок системи (3.5), заданий рівністю

$$v_{\dot\tau}(t,\lambda)=(\xi_{\dot\tau}(t,\lambda),\,\widehat{\xi}_{\dot\tau}(t,\lambda)):H\oplus\widehat{H}\to\mathbb{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{5.153}$$

і $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ – m-функція (5.152). Тоді внаслідок (5.141) - (5.144)

$$\widetilde{U}v_{\dot\tau}(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}(\xi_{\dot\tau}(\lambda),\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda))=\begin{pmatrix}m_{\dot\tau}(\lambda) & N_{\dot\tau}(\lambda)\\ 0 & iI_{\widehat{H}}\\ -I_H & 0\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{5.154}$$

і тому вірною є рівність (5.57). Подальше доведення аналогічне доведенню твердження 5.13. ☐

В наступній теоремі дається опис усіх m-функцій симетричних систем у випадку а2 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра $\dot\tau$.

Теорема 5.30. *Припустимо, що за умов твердження 5.21* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (3.121)*. Крім того, нехай* $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (5.134)-(5.136)*. Тоді:*

(1) *Оператор-функція*

$$\widetilde{m}_0(\lambda)=\begin{pmatrix}m_0(\lambda) & N_0(\lambda)\\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}}\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{5.155}$$

є m*-функцією, що відповідає вкороченому граничному параметру* $\dot\tau_0=\{I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b},0_{\mathcal{H}_b,\widetilde{\mathcal{H}}_b}\}$.

(2) *Для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ *вигляду* (5.113) *відповідна* m*-функція* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ *задається рівністю* (5.152) *з елементами* $m_{\dot\tau}(\lambda)$ *та* $N_{\dot\tau}(\lambda)$*, що допускають зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_2(\lambda)(\dot C_0(\lambda)-\dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)M_3(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\tag{5.156}$$

$$N_{\dot\tau}(\lambda)=N_0(\lambda)+M_2(\lambda)(\dot C_0(\lambda)-\dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)N_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\tag{5.157}$$

Доведення. Застосування оператора Γ_{0a} до рівностей (5.145) та (5.146) з огляду на (5.152) та (5.135) дає

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=m_0(\lambda)-M_2(\lambda)(\dot\tau(\lambda)+M_4(\lambda))^{-1}M_3(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\tag{5.158}$$

$$N_{\dot\tau}(\lambda)=N_0(\lambda)-M_2(\lambda)(\dot\tau(\lambda)+M_4(\lambda))^{-1}N_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+\tag{5.159}$$

Тому внаслідок (5.148) справедливе твердження (2). Твердження (1) є безпосереднім наслідком твердження (2). ☐

Твердження 5.31. *Нехай* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113)*. Тоді відповідна* m*-функція* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ *належить до класу* $R_u[H_0]$ *і для* $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda)$ *справедлива нерівність* (5.72)*, в якій* $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta[H_0,\mathbb{H}]$ *– операторний розв'язок* (5.153) *системи* (3.5).

Доведення. Оскільки внаслідок (5.152) та (5.156), (5.157) $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ є голоморфною оператор-функцією і,крім того, $\ker v_{\dot\tau}(\lambda)=\{0\}$, то для доведення твердження достатньо довести нерівність (5.72).

Нехай $\{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma\}$ – розділена гранична пара для T_{max},

$$\gamma_+(\lambda) = (\widetilde{\gamma}_1(\lambda), \widetilde{\gamma}_2(\lambda)) : H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

– блочне зображення γ-поля $\gamma_+(\cdot)$ цієї пари, $M_+(\cdot)$ – відповідна функція Вейля (5.134) і $\widetilde{m}_0(\cdot)$ – оператор-функція (5.155). Покладемо також

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} M_2(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} : \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \qquad \Psi(\lambda) = (M_3(\lambda),\, N_2(\lambda)) : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тоді внаслідок (2.88) для всіх $\mu, \lambda \in \mathbb{C}_+$ справедливі тотожності

$$\widetilde{m}_0(\mu) - \widetilde{m}_0^*(\lambda) = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_1(\mu), \quad \Phi(\mu) - \Psi^*(\lambda)P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b} = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_1^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)$$
$$M_4(\mu) - M_4^*(\lambda)P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b} + iP_{\mathcal{H}_b} = (\mu - \overline{\lambda})\widetilde{\gamma}_2^*(\lambda)\widetilde{\gamma}_2(\mu)$$

і в силу теореми 5.30

$$\widetilde{m}_{\dotplus}(\lambda) = \widetilde{m}_0(\lambda) + \Phi(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)\Psi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тому згідно з лемою 4.18

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1} \cdot \mathrm{Im}\, \widetilde{m}_{\dotplus}(\lambda) \geq \gamma_{\dotplus}^*(\lambda)\gamma_{\dotplus}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.160}$$

де

$$\gamma_{\dotplus}(\lambda) = \widetilde{\gamma}_1(\lambda) + \widetilde{\gamma}_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)\Psi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.161}$$

Далі, внаслідок (5.145), (5.146) та (5.148)

$$v_{\dotplus}(t, \lambda) = v_0(t, \lambda) + u_+(t, \lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)\Psi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.162}$$

де покладено

$$v_0(t, \lambda) = (\xi_0(t, \lambda),\, \widehat{\xi}_0(t, \lambda)) : H \oplus \widehat{H} \to \mathbb{H}.$$

З (5.133) та (4.31) випливає, що $\widetilde{\gamma}_1(\lambda) = \pi_\Delta v_0(\lambda)$ та $\widetilde{\gamma}_2(\lambda) = \pi_\Delta u_+(\lambda)$. Тому внаслідок (5.161) та (5.162)

$$\gamma_{\dotplus}(\lambda) = \pi_\Delta v_{\dotplus}(\lambda) \tag{5.163}$$

і за лемою 3.4, (2) маємо

$$\gamma_{\dotplus}^*(\lambda)\widetilde{f} = \int_{\mathcal{I}} v_{\dotplus}^*(t, \lambda)\Delta(t)f(t)\, dt, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}, \;\; f \in \widetilde{f}. \tag{5.164}$$

Комбінуючи тепер (5.160) з (5.163) та (5.164), приходимо до потрібної нерівності (5.72). □

5.3.4. Функція Гріна

Лема 5.32. *Нехай за умов твердження 5.29* $v_{\dot\tau}(t,\lambda)(\in[H_0,\mathbb{H}])$ *– операторний розв'язок системи* (3.5), *визначений для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_-$ *початковою умовою*

$$\widetilde{U}v_{\dot\tau}(a,\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda}) & 0\\ N_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda}) & 0\\ -I_H & 0\end{pmatrix}:\underbrace{H\oplus\widehat{H}}_{H_0}\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\quad \lambda\in\mathbb{C}_-. \tag{5.165}$$

Тоді $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}_\Delta^2[H_0,\mathbb{H}]$.

Доведення. Нехай $M_+(\cdot)$ – оператор-функкція (5.134) - (5.136) і $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}_\Delta^2[H,\mathbb{H}]$ – операторний розв'язок системи (3.5), заданий рівністю

$$\xi_{\dot\tau}(t,\lambda)=\xi_0(t,\lambda)-u_-(t,\lambda)(\dot\tau^*(\overline{\lambda})+M_4^*(\overline{\lambda}))^{-1}M_2^*(\overline{\lambda}),\quad \lambda\in\mathbb{C}_-$$

Тоді внаслідок (5.120), (5.123) та (5.137)

$$\Gamma_{0a}\xi_{\dot\tau}(\lambda)=m_0^*(\overline{\lambda})-M_3^*(\overline{\lambda})(\dot\tau^*(\overline{\lambda})+M_4^*(\overline{\lambda}))^{-1}M_2^*(\overline{\lambda})$$
$$\widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda)=N_0^*(\overline{\lambda})-N_2^*(\overline{\lambda})(\dot\tau^*(\overline{\lambda})+M_4^*(\overline{\lambda}))^{-1}M_2^*(\overline{\lambda}),\qquad \widehat{\Gamma}_{1a}\xi_{\dot\tau}(\lambda)=-I_H$$

і з рівностей (5.158) та (5.159) випливає, що $\Gamma_{0a}\xi_{\dot\tau}(\lambda)=m_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda})$, $\widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda)=N_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda})$. Тому

$$\widetilde{U}\xi_{\dot\tau}(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}\xi_{\dot\tau}(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda})\\ N_{\dot\tau}^*(\overline{\lambda})\\ -I_H\end{pmatrix}:H\to H\oplus\widehat{H}\oplus H,\quad \lambda\in\mathbb{C}_-$$

і, отже,

$$v_{\dot\tau}(t,\lambda)=(\xi_{\dot\tau}(t,\lambda),\,0):H\oplus\widehat{H}\to\mathbb{H},\quad \lambda\in\mathbb{C}_-. \tag{5.166}$$

Звідси випливає, що $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}_\Delta^2[H_0,\mathbb{H}]$, $\lambda\in\mathbb{C}_-$. ☐

Зауваження 5.33. Використовуючи твердження 5.28, неважко довести, що насправді розв'язок $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_-$, з леми 5.32 однозначно визначається операторм U і вкороченим граничним параметром $\dot\tau$, тобто $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ не залежить від вибору J-унітарного розширення $\widetilde{U}\supset U$.

Надалі будемо позначати через $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)(\in\mathcal{L}_\Delta^2[H_0,\mathbb{H}])$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, операторний розв'язок системи (3.5), заданий рівністю (5.153) у випадку $\lambda\in\mathbb{C}_+$, і початковою умовою (5.165) у випадку $\lambda\in\mathbb{C}_-$.

Лема 5.34. *Для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *справедлива тотожність*

$$\varphi_U(x,\lambda)v_{\dot\tau}^*(x,\overline{\lambda})-v_{\dot\tau}(x,\lambda)\varphi_U^*(x,\overline{\lambda})=J,\quad x\in\mathcal{I}. \tag{5.167}$$

Доведення. Безпосередній підрахунок з огляду на (5.6), (5.154) та (5.165) дає рівність

$$(\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda))(\widetilde{U}v_{\dot\tau}(a,\overline{\lambda}))^*-(\widetilde{U}v_{\dot\tau}(a,\lambda))(\widetilde{U}\varphi_U(a,\overline{\lambda}))^*=J,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Подальше доведення аналогічне доведенню леми 4.12. ☐

Теорема 5.35. *Нехай за умов твердження 5.21* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113), $R_{\dot\tau}(\cdot)$ *– узагальнена резольвента відношення* T*, породжена згідно з теоремою 5.23 граничною задачею* (5.115) - (5.117)*, і* $G_{\dot\tau}(\cdot,\cdot,\lambda):\mathcal{I}\times\mathcal{I}\to[\mathbb{H}]$ *– оператор-функція, задана рівністю*

$$G_{\dot\tau}(x,t,\lambda)=\begin{cases} v_{\dot\tau}(x,\lambda)\,\varphi_U^*(t,\overline{\lambda}), & x>t\\ \varphi_U(x,\lambda)\,v_{\dot\tau}^*(t,\overline{\lambda}), & x<t\end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.168}$$

(функція Гріна). Тоді

$$R_{\dot\tau}(\lambda)\widetilde{f}=\pi_\Delta\left(\int_{\mathcal{I}}G_{\dot\tau}(\cdot,t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt\right),\quad \widetilde{f}\in\mathfrak{H},\quad f\in\widetilde{f},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{5.169}$$

Доведення. Оскільки рівність

$$y_f=y_f(x,\lambda):=\int_{\mathcal{I}}G_{\dot\tau}(x,t,\lambda)\Delta(t)f(t)\,dt,\quad f\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{5.170}$$

коректно задає функцію $y_f(\cdot,\cdot):\mathcal{I}\times\mathbb{C}_+\to\mathbb{H}$, то внаслідок теореми 5.23 достатньо довести таке твердження:

(T) якщо $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}$, то для кожного $f\in\widetilde{f}$ і $\lambda\in\mathbb{C}_+$ функція $y_f(\cdot,\lambda)$ належить до $AC(\mathcal{I};\mathbb{H})\cap\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і задовільняє рівнянню (5.115) (м.в. на $\mathcal{I}$) та граничним умовам

$$\Gamma_{1a}y_f=0,\qquad \widehat{\Gamma}_a y_f=0 \tag{5.171}$$

$$\dot{C}_0(\lambda)\widetilde{\Gamma}_{0b}y_f+\dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}y_f=0 \tag{5.172}$$

Припустимо спочатку, що $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}'$, так що $\Delta(t)f(t)=0$ (м.в. на $(\beta_{\widetilde{f}},b)$) з деяким $\beta_{\widetilde{f}}\in\mathcal{I}$. Тоді внаслідок (5.170) та (5.168)

$$y_f(a,\lambda)=\varphi_U(a,\lambda)\int_{\mathcal{I}}v_{\dot\tau}^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt \tag{5.173}$$

$$y_f(x,\lambda)=v_{\dot\tau}(x,\lambda)\int_{\mathcal{I}}\varphi_U^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt,\quad x\in(\beta_{\widetilde{f}},b) \tag{5.174}$$

Включення $y_f(\cdot,\lambda)\in AC(\mathcal{I};\mathbb{H})$ та співвідношення (5.115) для $y_f(\cdot,\lambda)$ доводяться із застосуванням тотожності (5.167) так само, як і в лемі 4.13. Крім того, з (5.174) випливає, що $y_f(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$.

Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U, Γ_{0a} – оператор (3.121) і Γ_a – оператор (3.123). Тоді згідно з (3.125) та (5.173)

$$\Gamma_a y_f=\widetilde{U}y_f(a,\lambda)=(\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda))h_0, \tag{5.175}$$

де $h_0:=\int\limits_{\mathcal{I}}v_{\dot\tau}^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\in H\oplus\widehat{H}$. З (5.166) випливає, що $h_0=h\oplus 0\in H\oplus\widehat{H}$ з деяким $h\in H$. Тому внаслідок (5.175) та (5.6) вірними є рівності (5.171). Далі, з (5.174) випливає, що

$$\widetilde{\Gamma}_{0b}y_f=\widetilde{\Gamma}_{0b}v_{\dot\tau}(\lambda)\int_{\mathcal{I}}\varphi_U^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt,\qquad \Gamma_{1b}y_f=\Gamma_{1b}v_{\dot\tau}(\lambda)\int_{\mathcal{I}}\varphi_U^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt.$$

Комбінуючи ці рівності з (5.153) та другими рівностями в (5.142) та (5.144), отримуємо (5.172). Таким чином, твердження (T) і, отже, рівність (5.169) доведено для $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}'$. Нарешті, перехід до довільного $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}$ у формулі (5.169) здійснюється так само, як і в лемі 4.13. ☐

5.4. m-функції гамільтонових систем

5.4.1. Узагальнені резольвенти відношення T

Надалі в межах цього підрозділу вважаємо, що надодаток до припущень твердження 5.21 система (3.5) є гамільтоновою. Інакше кажучи, вважаються виконаними такі припущення:

(Г1) Система (3.5) є гамільтоновою, кінцева точка a є регулярною і $N_+ \geq N_-$.

(Г2) U – оператор (5.9), що задовільняє (5.10), і $\Gamma_{1a} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H$ – оператор (3.162).

(Г3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 2 (3.138).

(Г4) Система є U-визначеною.

Згідно з твердженням 5.21 за цих припущень рівності

$$T = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max},\ y \in \mathcal{D}_{0b},\ \Gamma_{1a} y = 0\} \tag{5.176}$$

$$T^* = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max},\ \Gamma_{1a} y = 0\} \tag{5.177}$$

задають симетричне відношення $T \in Ext_{T_{min}}$ і спряжене до нього відношення T^*. Крім того, сукупність $\dot{\Pi} = \{\widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$, в якій

$$\dot{\Gamma}_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \widetilde{\Gamma}_{0b} y, \quad \dot{\Gamma}_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = -\Gamma_{1b} y, \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T^* \tag{5.178}$$

є граничною трійкою для T^*.

Наступне твердження випливає безпосередньо з (5.176) та (5.177).

Твердження 5.36. *Рівності* $\operatorname{mul} T = \{0\}$, $\operatorname{mul} T = \operatorname{mul} T^*$ *або* $\operatorname{mul} T^* = \{0\}$ *рівносільні відповідно виконанню таких умов (У1), (У2) або (У3):*

(У1) Якщо $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й існує розв'язок* $y(\cdot)$ *рівняння* (3.30), *такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*) та* $\Gamma_{1a} y = 0$, $[y, z]_b = 0$, $z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, *то* $\Delta(t)f(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*).*

(У2) Якщо $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й* $y(\cdot)$ *– розв'язок рівняння* (3.30), *такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*) та* $\Gamma_{1a} y = 0$, *то* $[y, z]_b = 0$, $z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.

(У3) Якщо $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ *й існує розв'язок* $y(\cdot)$ *рівняння* (3.30), *такий що* $\Delta(t)y(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*) та* $\Gamma_{1a} y = 0$, *то* $\Delta(t)f(t) = 0$ *(м.в. на* $\mathcal{I}$*).*

Далі, згідно з означенням 5.22 вкороченим граничним параметром є операторна пара $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b)$ вигляду (5.113). Якщо $N_+ = N_-$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b$ і вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ належить до класу $\widetilde{R}(\mathcal{H}_b)$. Якщо, крім того,

$$\dot{\tau} = \{\dot{C}_0, \dot{C}_1\} \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_b), \tag{5.179}$$

тобто $\dot{\tau}$ є самоспряженою парою операторів $\dot{C}_j \in [\mathcal{H}_b, \mathcal{K}],\ j \in \{0, 1\}$, то вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ називається самоспряженим.

Нехай за умов (Г1) - (Г4) $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.113). Тоді гранична задача (5.115) - (5.117) приймає вигляд

$$Jy' - B(t)y = \lambda \Delta(t) y + \Delta(t) f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{5.180}$$

$$\Gamma_{1a} y = 0, \quad \dot{C}_0(\lambda) \widetilde{\Gamma}_{0b} y + \dot{C}_1(\lambda) \Gamma_{1b} y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.181}$$

де рівності (5.181) є розділеними граничними умовами. Якщо $N_+ = N_-(\iff \nu_{b+} = \nu_{b-})$, то згідно зауваження 3.37 b-граничний комплекс типу 2 має вигляд $\{\mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, де Γ_b – оператор (3.76). У цьму випадку граничні умови (5.181) приймають вигляд

$$\Gamma_{1a}y = 0, \quad \dot{C}_0(\lambda)\Gamma_{0b}y + \dot{C}_1(\lambda)\Gamma_{1b}y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.182}$$

Якщо, крім того, $\dot{\tau}$ є самоспряженим вкороченим граничним параметром (5.179), то граничні умови (5.182) перетворюється в розділені самоспряжені граничні умови

$$\Gamma_{1a}y = 0, \quad \dot{C}_0\Gamma_{0b}y + \dot{C}_1\Gamma_{1b}y = 0. \tag{5.183}$$

Теорема 5.37. *Нехай за припущень (Г1) - (Г4) T – симетричне відношення* (5.176). *Якщо $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр* (5.113), *то для кожного $f \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ гранична задача* (5.180), (5.181) *має єдиний розв'язок $y(t,\lambda) = y_f(t,\lambda)$ і рівність*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta(y_f(\cdot,\lambda)), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}, \quad f \in \widetilde{f}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{5.184}$$

задає узагалнену резольвенту $R(\lambda) =: R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ відношення T. Зворотно, для кожної узагальненої резольвенти відношення T існує єдиний вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$, такий що $R(\lambda) = R_{\dot{\tau}}(\lambda)$.

Якщо, крім того, $N_+ = N_-$, то $R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ є каноничною резольвентою тоді й тільки тоді, коли $\dot{\tau}$ є самоспряженим вкороченим граничним параметром (5.179). *У цьому випадку $R_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\widetilde{T}_{\dot{\tau}} - \lambda)^{-1}$ із самоспряженим розширенням $\widetilde{T}_{\dot{\tau}} \in \mathrm{Self}(T)$, заданим розділеними граничними умовами*

$$\widetilde{T}_{\dot{\tau}} = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : \Gamma_{1a}y = 0,\ \dot{C}_0\Gamma_{0b}y + \dot{C}_1\Gamma_{1b}y = 0\}. \tag{5.185}$$

Доведення. Нехай $\dot{\Pi} = \{\widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка (5.178) для T^*. Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ задача (5.180), (5.181) еквівалентна абстрактній граничній задачі (2.110), (2.111), записаній в термінах трійки $\dot{\Pi}$. Застосовуючи тепер наслідок 2.45, приходимо до потрібних тверджень. □

5.4.2. m-функції

Наступні два твердження випливають з тверджень 5.24 та 5.25.

Твердження 5.38. *Нехай виконано припущення* (Г1) - (Г4). Тоді для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ існує єдина пара операторних розв'язків $v_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, H \oplus H]$ та $u_+(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widetilde{\mathcal{H}}_b, H \oplus H]$ системи (3.5), що задовільняють граничним умовам

$$\Gamma_{1a}v_0(\lambda) = -I_H, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}v_0(\lambda) = 0, \qquad \Gamma_{1a}u_+(\lambda) = 0, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}u_+(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.186}$$

Твердження 5.39. *Нехай за припущень* (Г1) - (Г4) *$\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення* (3.160) *оператора U, Γ_{0a} – оператор* (3.161) *і $\{(H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b) \oplus (H \oplus \mathcal{H}_b), \Gamma\}$ – розділена гранична пара* (3.165) *для T_{max}. Тоді функція Вейля $M_+(\cdot)$ цієї пари є голоморфною оператор-функцією з блочним зображенням*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to H \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{5.187}$$

елементи якого задаються рівностями

$$m_0(\lambda) = \Gamma_{0a}v_0(\lambda), \qquad M_2(\lambda) = \Gamma_{0a}u_+(\lambda) \tag{5.188}$$

$$M_3(\lambda) = -\Gamma_{1b}v_0(\lambda), \qquad M_4(\lambda) = -\Gamma_{1b}u_+(\lambda). \tag{5.189}$$

Крім того, функція Вейля граничної трійки $\dot\Pi$ *для* T^* *збігається з* $M_4(\lambda)$.

Наступна теорема є наслідком теореми 5.26.

Теорема 5.40. *Нехай за припущень (Г1) - (Г4)* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує единий операторний розв'язок* $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, H\oplus H]$ *системи* (3.5), *що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}v_{\dot\tau}(\lambda) = -I_H, \quad \dot C_0(\lambda)\widetilde\Gamma_{0b}v_{\dot\tau}(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\Gamma_{1b}v_{\dot\tau}(\lambda) = 0. \tag{5.190}$$

Нехай за припущень (Г1) - (Г4) $\widetilde U$ – J-унітарне розширення (3.160) оператора U і Γ_{0a} – оператор (3.161). Припустимо також,що $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.113) і $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, H\oplus H]$ – відповідний розв'язок системи (3.5), визначений в теоремі 5.40. За цих умов означення 5.27 можна зформулювати у наступному вигляді.

Означення 5.41. Оператор-функція $m_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H]$, визначена рівністю

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = \Gamma_{0a}v_{\dot\tau}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{5.191}$$

називається m-функцією (функцією Вейля - Тітчмарша), що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot\tau$ або, еквівалентно, граничній задачі (5.180), (5.181). У випадку $N_+ = N_-$ m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$, що відповідає самоспряженому вкороченому граничному параметру $\dot\tau$, називається каноничною.

Внаслідок першої рівності в (5.190)

$$\widetilde U v_{\dot\tau}(a,\lambda)\left(= \begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix} v_{\dot\tau}(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau}(\lambda)\\ -I_H\end{pmatrix} : H \to H\oplus H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{5.192}$$

З твердження 5.28 випливає, що для заданих U та $\dot\tau$ m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ визначається однозначно з точністю до адитивної самоспряженої константи $B \in [H]$, що залежить від розширення $\widetilde U \supset U$.

Означення m-функції гамільтонової системи в дещо інших термінах дається в наступному твердженні, яке випливає безпосередньо з твердження 5.29.

Твердження 5.42. *Нехай за припущень (Г1) - (Г4)* $\widetilde U$ *–* J*-унітарне розширення* (3.160) *оператора* U, Γ_{0a} *– оператор* (3.161) *і* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді* m*-функція* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *є единою* $[H]$*-значною функцією, визначеною в* $\mathbb{C}_+$ *і такою, що операторний розв'язок* $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *системи* (3.5), *заданий рівністю*

$$v_{\dot\tau}(t,\lambda) := \varphi_U(t,\lambda)m_{\dot\tau}(\lambda) - \psi(t,\lambda) \tag{5.193}$$

належить до $\mathcal{L}^2_\Delta[H, H\oplus H]$ *і задовільняє другій граничній умові в* (5.190). *У формулі* (5.193) $\varphi_U(\cdot,\lambda)$ *та* $\psi(\cdot,\lambda)$ *–* $[H, H\oplus H]$*-значні розв'язки системи* (3.5), *задані початковими умовами* (5.12) *та* (5.13) *відповідно.*

Наслідком твердження 5.31 є таке твердження.

Твердження 5.43. *m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ гамільтонової системи належить до класу $R_u[H]$ і задовільняє нервіності*

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\cdot \mathrm{Im}\, m_{\dot\tau}(\lambda) \geq \int_{\mathcal I} v_{\dot\tau}^*(t,\lambda)\Delta(t)v_{\dot\tau}(t,\lambda)\,dt, \quad \lambda\in\mathbb C_+, \tag{5.194}$$

де $v_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)\in\mathcal L_\Delta^2[H,H\oplus H]$ – операторний розв'язок системи (3.5)*, визначений в теоремі 5.40. Якщо, крім того, m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ є каноничною, то справедлива тотожність*

$$m_{\dot\tau}(\mu)-m_{\dot\tau}^*(\lambda)=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal I} v_{\dot\tau}^*(t,\lambda)\Delta(t)v_{\dot\tau}(t,\mu)\,dt, \quad \mu,\lambda\in\mathbb C_+$$

і тому нерівність (5.194) *стає рівністю.*

В наступній теоремі, що випливає з теореми 5.30, дається опис усіх m-функцій гамільтонової системи безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра $\dot\tau$.

Теорема 5.44. *Нехай за припущень* (Г1) - (Г4) *$\widetilde U$ – J-унітарне розширення* (3.160) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (3.161)*. Припустимо також, що $M_+(\cdot)$ – оператор-функція, задана рівностями* (5.187) - (5.189) *(тобто $M_+(\cdot)$ є функцією Вейля розділеної граничної пари для T_{max}). Тоді:*

(1) *$m_0(\cdot)$ є m-функцією, що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot\tau_0=\{I_{\widetilde{\mathcal H}_b},0_{\mathcal H_b,\widetilde{\mathcal H}_b}\}$.*

(2) *для кожного вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ вигляду* (5.113) *відповідна m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ допускає зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_2(\lambda)(\dot C_0(\lambda)-\dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)M_3(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb C_+. \tag{5.195}$$

5.4.3. Квазірегулярні гамільтонові системи

Нехай виконані такі припущення:

(ГК1) Гамільтонова система (3.5) є квазірегулярною й кінцева точка a є регулярною.

(ГК2) U -оператор (5.9), що задовільняє (5.10), $\widetilde U$ – J-унітарне розширення (3.160) оператора U і $\Gamma_{ja},\ j\in\{0,1\}$, – оператори (3.161), (3.162).

(ГК3) Задано сюр'єктивний оператор

$$\Gamma_b=\begin{pmatrix}\Gamma_{0b}\\ \Gamma_{1b}\end{pmatrix}:\mathrm{dom}\,\mathcal T_{max}\to H\oplus H, \tag{5.196}$$

що задовільняє другій тотожності в (3.77) (такий оператор існує згідно з лемою 4.21).

Очевидно, що за припущення (ГК3) сукупність $\{H,\Gamma_b\}$ є b-граничним комплексом (див. означення 3.48).

Припустимо, що $\varphi_U(\cdot,\lambda)\in\mathcal L_\Delta^2[H,H\oplus H]$ та $\psi(\cdot,\lambda)\in\mathcal L_\Delta^2[H,H\oplus H],\ \lambda\in\mathbb C$, – операторні розв'язки системи (3.5) з початковими умовами (5.12) та (5.13) відповідно й $Y_{\widetilde U}(\cdot,\lambda)\in\mathcal L_\Delta^2[H\oplus H]$ – розв'язок (5.14). Тоді

$$\widetilde U Y_{\widetilde U}(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\varphi_U(\lambda) & \Gamma_{0a}\psi(\lambda)\\ \Gamma_{1a}\varphi_U(\lambda) & \Gamma_{1a}\psi(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_H & 0\\ 0 & I_H\end{pmatrix} \tag{5.197}$$

і рівність

$$\dot W(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda)\\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\Gamma_{0b}\varphi_U(\lambda) & \Gamma_{0b}\psi(\lambda)\\ \Gamma_{1b}\varphi_U(\lambda) & \Gamma_{1b}\psi(\lambda)\end{pmatrix}:H\oplus H\to H\oplus H,\quad \lambda\in\mathbb{C} \tag{5.198}$$

задає цілу $[H\oplus H]$- значну функцію $\dot W(\cdot)$. Ясно, що

$$\dot W(\lambda)=\Gamma_b Y_{\widetilde U}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5.199}$$

Твердження 5.45. *Оператор-функція $\dot W(\cdot)$ задовільняє тотожності*

$$\dot W^*(\lambda)J\dot W(\mu)-J=(\mu-\overline{\lambda})\int_{\mathcal I} Y^*_{\widetilde U}(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde U}(t,\mu)\,dt,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C} \tag{5.200}$$

Тому

$$iJ-\dot W^*(\lambda)(iJ)\dot W(\lambda)\ge 0,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+;\qquad \dot W^*(\lambda)(iJ)\dot W(\lambda)=iJ,\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

тобто оператор $\dot W(\lambda)$ є iJ-стискуючим для $\lambda\in\mathbb{C}_+$ й iJ-унітарним для $\lambda\in\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $\widetilde h\in H\oplus H,\ \lambda,\mu\in\mathbb{C}$ і $y=Y_{\widetilde U}(t,\mu)\widetilde h,\ z=Y_{\widetilde U}(t,\lambda)\widetilde h$. Тоді внаслідок (5.197)

$$(Jy(a),z(a))=(J\widetilde U Y_{\widetilde U}(a,\mu)\widetilde h,\widetilde U Y_{\widetilde U}(a,\lambda)\widetilde h)=(J\widetilde h,\widetilde h).$$

Крім того, друга тотожність в (3.77) сумісно з (5.199) дає

$$[y,z]_b=(J\Gamma_b Y_{\widetilde U}(\mu)\widetilde h,\Gamma_b Y_{\widetilde U}(\lambda)\widetilde h)=(J\dot W(\mu)\widetilde h,\dot W(\lambda)\widetilde h)=(\dot W^*(\lambda)J\dot W(\mu)\widetilde h,\widetilde h).$$

Застосовуючи тепер тотожність Лагранжа (3.22) до пар $\{y,\mu y\}$ та $\{z,\lambda z\}$, отримуємо

$$(\mu-\overline{\lambda})(y,z)_\Delta=(\dot W^*(\lambda)J\dot W(\mu)\widetilde h,\widetilde h)-(J\widetilde h,\widetilde h). \tag{5.201}$$

Оскільки

$$(y,z)_\Delta=\int_{\mathcal I}(\Delta(t)Y_{\widetilde U}(t,\mu)\widetilde h,Y_{\widetilde U}(t,\lambda)\widetilde h)\,dt=\left(\left(\int_{\mathcal I}Y^*_{\widetilde U}(t,\lambda)\Delta(t)Y_{\widetilde U}(t,\mu)\,dt\right)\widetilde h,\widetilde h\right),$$

то з рівності (5.201) випливає (5.200). □

В наступному твердженні дається у явному вигляді одна з можливих конструкцій оператора Γ_b і відповідної оператор-функції $\dot W(\lambda)$.

Твердження 5.46. *Нехай виконані припущення (ГК1) та (ГК2). Крім того, нехай*

$$\varphi_U(t,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{0,U}(t,\lambda)\\ \varphi_{1,U}(t,\lambda)\end{pmatrix}:H\to H\oplus H,\qquad \psi(t,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_0(t,\lambda)\\ \psi_1(t,\lambda)\end{pmatrix}:H\to H\oplus H \tag{5.202}$$

– блочні зображення операторних розв'язків $\varphi_U(\cdot,\lambda)$ та $\psi(\cdot,\lambda)$. Тоді:

(1) $Y^{-1}_{\widetilde U}(t,0)=-JY^*_{\widetilde U}(t,0)J,\ t\in\mathcal I$, *і для кожного $y\in\operatorname{dom}T_{max}$ існує границя*

$$\Gamma_b y:=\lim_{t\uparrow b}Y^{-1}_{\widetilde U}(t,0)y(t)=\lim_{t\uparrow b}(-JY^*_{\widetilde U}(t,0)Jy(t)),\quad y=y(\cdot)\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}. \tag{5.203}$$

Рівність (5.203) *задає сюр'єктивний оператор* $\Gamma_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \mathbb{H}$. *Якщо* $\Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus H$ *– блочне зображення цього оператора, то справедлива друга тотожність в* (3.77). *Крім того, оператори* Γ_{0b} *та* Γ_{1b} *допускають зображення*

$$\Gamma_{0b} y := \lim_{t \uparrow b} (\psi_1^*(t,0) y_0(t) - \psi_0^*(t,0) y_1(t)) \tag{5.204}$$

$$\Gamma_{1b} y := \lim_{t \uparrow b} (-\varphi_{1,U}^*(t,0) y_0(t) + \varphi_{0,U}^*(t,0) y_1(t)) \tag{5.205}$$

(2) *Відповідна оператор-функція* $\dot{W}(\cdot)$ (5.198) *допускає зображення*

$$\dot{W}(\lambda) = \lim_{t \uparrow b} Y_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0) Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = \lim_{t \uparrow b} (-J Y_{\widetilde{U}}^*(t,0) J Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.206}$$

Крім того, справедливі рівності

$$\dot{w}_1(\lambda) = I + \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0) \Delta(t) \varphi_U(t,\lambda)\, dt, \quad \dot{w}_2(\lambda) = \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0) \Delta(t) \psi(t,\lambda)\, dt \tag{5.207}$$

$$\dot{w}_3(\lambda) = -\lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,0) \Delta(t) \varphi_U(t,\lambda)\, dt, \quad \dot{w}_4(\lambda) = I - \lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,0) \Delta(t) \psi(t,\lambda)\, dt. \tag{5.208}$$

Доведення. (1) Так само, як і в твердженні 4.28, доводиться, що рівність (5.203) коректно задає сюр'єктивний оператор Γ_b і справедлива друга тотожність в (3.77). Крім того, внаслідок (5.202)

$$Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{0,U}(t,\lambda) & \psi_0(t,\lambda) \\ \varphi_{1,U}(t,\lambda) & \psi_1(t,\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H$$

і безпосередній підрахунок дає рівності (5.204), (5.205).

(2) Рівність (5.206) випливає з (5.199) та (5.203). Крім того, внаслідок (5.206) $\dot{W}(0) = I_{H \oplus H}$ і з (5.200) випливає, що

$$\dot{W}(\lambda) = I - \lambda J \int_{\mathcal{I}} Y_{\widetilde{U}}^*(t,0) \Delta(t) Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)\, dt.$$

Тепер безпосередній підрахунок дає рівності (5.207) та (5.208). □

Твердження 5.47. *Припустимо, що коефіцієнти* $B(\cdot)$ *та* $\Delta(\cdot)$ *системи* (3.5) *інтегровні на всьому проміжку* $\mathcal{I}$. *Тоді система є квазірегулярною і для кожного* $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ *існує границя*

$$y(b) := \lim_{t \uparrow b} y(t).$$

Якщо, крім того, система є гамільтоновою, кінцева точка a *є регулярною і виконано припущення* (ГК2), *то рівність*

$$\Gamma_b y := y(b), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \tag{5.209}$$

задає сюр'єктивний оператор $\Gamma_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to H \oplus H$, *що задовільняє другій тотожності в* (3.77), *і відповідна оператор-функція* $\dot{W}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$\dot{W}(\lambda) = Y_{\widetilde{U}}(b,\lambda) := \lim_{t \uparrow b} Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.210}$$

Тому

$$\dot W(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda)\\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{0,U}(b,\lambda) & \psi_0(b,\lambda)\\ \varphi_{1,U}(b,\lambda) & \psi_1(b,\lambda)\end{pmatrix}:=\lim_{t\uparrow b}\begin{pmatrix}\varphi_{0,U}(t,\lambda) & \psi_0(t,\lambda)\\ \varphi_{1,U}(t,\lambda) & \psi_1(t,\lambda)\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{C},\tag{5.211}$$

де $\varphi_{j,U}(t,\lambda)$ *та* $\psi_j(t,\lambda)$, $j\in\{0,1\}$, *визначені в* (5.202).

Доведення. Перше твердження випливає з [55, твердження 2.6]. Інші твердження є очевидними. □

Зауваження 5.48. У випадку регулярної системи оператор-функція $\dot W(\lambda)=Y_{\widetilde U}(b,\lambda)$ в твердженні 5.47 є матрицею монодромії (див., наприклад, [53]).

Твердження 5.49. *Нехай за припущень (ГК1) - (ГК3) система є U-визначеною. Нехай також $M_+(\cdot)$ – оператор-функція, задана рівностями* (5.187) - (5.189). *Тоді* $0\in\rho(M_2(\lambda))$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, *і для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *оператор-функція* $\dot W(\cdot)$ *допускає зображення*

$$\dot W(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot w_1(\lambda) & \dot w_2(\lambda)\\ \dot w_3(\lambda) & \dot w_4(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_2^{-1}(\lambda) & M_2^{-1}(\lambda)m_0(\lambda)\\ -M_4(\lambda)M_2^{-1}(\lambda) & M_3(\lambda)-M_4(\lambda)M_2^{-1}(\lambda)m_0(\lambda)\end{pmatrix}.\tag{5.212}$$

Доведення. З (5.188) та (5.186) випливає, що

$$v_0(t,\lambda)=\varphi_U(t,\lambda)m_0(\lambda)-\psi(t,\lambda),\quad u(t,\lambda)=\varphi_U(t,\lambda)M_2(\lambda)\tag{5.213}$$

і застосування операторів Γ_{0b} та Γ_{1b} до рівностей (5.213) з урахуванням (5.186) та (5.189) дає

$$0=\dot w_1(\lambda)m_0(\lambda)-\dot w_2(\lambda),\qquad -M_3(\lambda)=\dot w_3(\lambda)m_0(\lambda)-\dot w_4(\lambda)\tag{5.214}$$

$$I=\dot w_1(\lambda)M_2(\lambda),\qquad -M_4(\lambda)=\dot w_3(\lambda)M_2(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.\tag{5.215}$$

З першої рівності в (5.215) випливає, що $0\in\rho(M_2(\lambda))$ і $\dot w_1(\lambda)=M_2^{-1}(\lambda)$. Крім того, внаслідок другої рівності в (5.215) $\dot w_3(\lambda)=-M_4(\lambda)M_2^{-1}(\lambda)$. Підставляючи ці значення операторів $\dot w_1(\lambda)$ та $\dot w_3(\lambda)$ в (5.214), отримуємо потрібні рівності для $\dot w_2(\lambda)$ та $\dot w_4(\lambda)$. □

Очевидно, що за припущення (ГК3) вкороченим граничним параметром є операторна пара

$$\dot\tau=\dot\tau(\lambda)=\{\dot C_0(\lambda),\dot C_1(\lambda)\}\in\widetilde R(H),\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\tag{5.216}$$

з голоморфними оператор-функціями $\dot C_j(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to[H,\mathcal{K}]$, де $\mathcal{K}$ – допоможній скінченновимірний гільбертів простір розмірності $\dim\mathcal{K}=\nu(=\dim H)$ (зокрема, можна покласти $\mathcal{K}=H$).

В наступній теоремі дається параметризація всіх m-функцій квазірегулярної гамільтонової системи.

Теорема 5.50. *Нехай за припущень* (ГК1) - (ГК3) *гамільтонова система є U-визначеною . Припустимо також, що* $\dot W(\cdot)$ *– оператор-функція* (5.198). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$ *вигляду* (5.216) *відповідна m-функція* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=(\dot C_0(\lambda)\dot w_1(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda))^{-1}(\dot C_0(\lambda)\dot w_2(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_4(\lambda)),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.\tag{5.217}$$

Доведення. З огляду на твердження 5.49 формула (5.217) виводиться з (5.195) аналогічно тому, як фрмулу (4.169) було виведено з (4.69) (див. доведення теореми 4.29). □

5.4.4. Канонічні системи

Нагадаємо, що система (3.5) називається канонічною, якщо $B(t) = 0$, тобто якщо вона має вигляд

$$Jy' = \lambda\Delta(t)y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.218}$$

Як відомо, функція $\Delta(\cdot)$ називається функцією позитивного типа, якщо для деякого відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$ оператор $\int\limits_{[\alpha,\beta]} \Delta(t)\, dt$ є оборотним. згідно з [10, 82] канонична система є визначеною тоді й тільки тоді, коли $\Delta(t)$ є функцією позитивного типа.

Твердження 5.51. *Канонична система* (5.218) *є квазірегулярною тоді й тільки тоді, коли оператор-функція* $\Delta(\cdot)$ *є інтегровною на* $\mathcal{I}$.

Доведення. У випадку $\lambda = 0$ система (5.218) приймає вигляд

$$Jy' = 0 \tag{5.219}$$

Очевидно, що множиною усіх розв'язків такої системи є $\{y(t) \equiv \widetilde{h} : \widetilde{h} \in \mathbb{H}\}$. Якщо ситема є квазірегулярною, то кожний розв'язок системи (5.219) належить до $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Тому $\int\limits_{\mathcal{I}} (\Delta(t)\widetilde{h}, \widetilde{h})\, dt < \infty$, $\widetilde{h} \in \mathbb{H}$, і, отже, оператор-функція $\Delta(\cdot)$ є інтегровною на $\mathcal{I}$. Зворотне твердження випливає з твердження 5.47.
□

Твердження 5.52. *Нехай канонична система* (5.218) *з регулярною кінцевою точкою a є гамільтоновою і виконане припущення* (Г2) *з пункту 5.4.1.. За цих умов система є U-визначеною тоді й тільки тоді, коли для кожного $\widetilde{h} \in H \oplus H$ з рвностей $\Delta(t)\widetilde{h} = 0$ (м.в. на $\mathcal{I}$) та $U\widetilde{h} = 0$ випливає,що $\widetilde{h} = 0$.*

Доведення. З (3.14) випливає, що нуль-многовид системи (5.218) має вигляд

$$\mathcal{N} = \{y = y(t) \equiv \widetilde{h} : \widetilde{h} \in H \oplus H,\ \Delta(t)\widetilde{h} = 0 (\text{м.в. на } \mathcal{I})\}.$$

Крім того, для кожної функції $y \equiv \widetilde{h}$ маємо $\Gamma_{1a} y = U\widetilde{h}$. Звідси та з означення 5.2 випливає потрібне твердження. □

Твердження 5.53. *Нехай канонична гамільтонова система* (5.218) *з регулярною кінцевою точкою a є квазірегулярною. Крім того, нехай $\varphi_U(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda) (\in [H, H \oplus H])$ – оперторні розв'язки цеї системи з початковими умовами*

$$\varphi_U(a, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ iI_H \end{pmatrix} : H \to H \oplus H, \quad \psi(a, \lambda) = \begin{pmatrix} -iI_H \\ 0 \end{pmatrix} : H \to H \oplus H \tag{5.220}$$

і $\dot{W}(\cdot)$ – оператор-функція (5.211) *(у випадку регулярної системи $\dot{W}(\cdot)$ є матрицею монодромії). Тоді наступні умови є еквівалентними:*

(1) *Якщо $h \in H$ і $\Delta(t)\{0, h\} = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$, то $h = 0$.*

(2) *Рівність* $\ker \dot{w}_1(\lambda) = \{0\}$ *є вірною для кожного* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(3) *Рівність* $\ker \dot{w}_1(\lambda) = \{0\}$ *є вірною для деякого* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(4) $\bigcap\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker \dot{w}_1(\lambda) = \{0\}$.

Доведення. Припустимо, що

$$U = (iI_H, 0) : H \oplus H \to H, \quad \widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & -iI_H \\ iI_H & 0 \end{pmatrix} : H \oplus H \to H \oplus H. \tag{5.221}$$

Тоді $\widetilde{U}$ є J-унітарним розширенням оператора U і оператори (3.161) та (3.162) мають вигляд $\Gamma_{0a} y = -iy_1(a)$, $\Gamma_{1a} y = iy_0(a)$. Крім того, відповідні розв'язки $\varphi_U(\cdot, \lambda)$ та $\psi(\cdot, \lambda)$ системи (5.218), що задовільняють (5.197), задаються початковими умовами (5.220). Якщо надодаток Γ_b – відображення (5.209), то виконано припущення (ГК1) - (ГК3) і згідно з твердженням 5.47 відповідна оператор-функція $\dot{W}(\cdot)$ вигляду (5.199) допускає зображення (5.211).

Внаслідок твердження 5.52 умова (1) еквівалентна U-визначеності системи. Тому якщо виконана умова (1), то в силу твердження 5.49 $\ker \dot{w}_1(\lambda) = \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, і, отже, вірною є імплікація (1)⇒(2). Імплікації (2)⇒(3) та (3)⇒(4) є очевидними. Припустимо далі, що $\bigcap\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker \dot{w}_1(\lambda) = \{0\}$. Якщо $h \in H$ і $\Delta(t)\{0, h\} = 0$ м.в. на $\mathcal{I}$, то для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ функція $y = y(t) = \{0, ih\}$, $t \in \mathcal{I}$, задовільняє (5.218) і, отже, $y = \varphi_U(t, \lambda)h$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тому $\dot{w}_1(\lambda)h = \varphi_{0,U}(b, \lambda)h = y_0(b) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, звідки випливає рівність $h = 0$. Таким чином, доведено імплікацію (4)⇒(1). □

РОЗДІЛ 6

Псевдоспектральні та спектральні функції симетричних систем

6.1. Псевдоспектральні та спектральні функції повної вимірності n

6.1.1. q-псевдоспектральні та псевдоспектральні функції

Припустимо, що система (3.5) задана на проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$ і $c \in \mathcal{I}$. Тоді кожному $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ відповідає функція $\widehat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, задана рівністю

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathcal{I}} Y_c^*(t, s)\Delta(t)f(t)\, dt, \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}. \tag{6.1}$$

Використовуючи добре відомі властивості розв'язку $Y_c(\cdot, \lambda)$, неважко довести, що $\widehat{f}(\cdot)$ є неперервною (і навіть голоморфною) функцією на $\mathbb{R}$.

Нагадаємо, що оператор $V \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ називається частковою ізометрією, якщо $||Vf|| = ||f||$ для кожного $f \in \mathfrak{H}_1 \ominus \ker V$.

Означення 6.1. Функція розподілу $\Sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathbb{H}]$ називається q-псевдоспектральною функцією системи (3.5) (відносно розв'язку $Y_c(\cdot, \lambda)$), якщо $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\Sigma; \mathbb{H})$ для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ і оператор $V\widetilde{f} := \pi_\Sigma \widehat{f},\ \widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, допускає продовження до часткової ізометрії $V = V_\Sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\Sigma; \mathbb{H})]$.

Оператор $V = V_\Sigma$ називається (узагальненим) перетворенням Фур'є, що відповідає $\Sigma(\cdot)$.

Очевидним є таке твердження: якщо $\Sigma(\cdot)$ – q-псевдоспектральна функція, то для кожного $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ існує єдина (з точністю до еквівалентності відносно полунорми в $\mathcal{L}^2(\Sigma; \mathbb{H})$) функція $\widehat{f}(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\Sigma; \mathbb{H})$, така що

$$\lim_{\mathcal{I}' \to \mathcal{I}} \left|\left| \widehat{f}(\cdot) - \int_{\mathcal{I}'} Y_c^*(t, \cdot)\Delta(t)f(t)\, dt \right|\right|_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathbb{H})} = 0,$$

де $\mathcal{I}' = [\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$. Функція $\widehat{f}(\cdot)$ називається перетворенням Фур'є функції $f(\cdot)$. Очевидно, що для фінітної функції $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ перетворення Фур'є задається рівністю (6.1).

Твердження 6.2. *Нехай $\Sigma(\cdot)$ – q-псевдоспектральна функція (відносно $Y_c(\cdot, \lambda)$) і $V = V_\Sigma$ – відповідне перетворення Фур'є. Тоді для кожного $\widetilde{g} \in L^2_{loc}(\Sigma; \mathbb{H})$ функція*

$$f_{\widetilde{g}}(t) := \int_{\mathbb{R}} Y_c(t, s)\, d\Sigma(s)g(s), \quad g(\cdot) \in \widetilde{g}$$

належить до $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і $V^*\widetilde{g} = \pi_\Delta f_{\widetilde{g}}(\cdot)$. Тому

$$V^*\widetilde{g} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathbb{R}} Y_c(\cdot, s)\, d\Sigma(s)g(s) \right), \quad \widetilde{g} \in L^2(\Sigma; \mathbb{H}),\ \ g(\cdot) \in \widetilde{g}, \tag{6.2}$$

де інтеграл збігається за напівнормою в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$.

Доведення. Згідно з лемою 3.2 $f_{\widetilde{g}}(\cdot)$ є неперервною $\mathbb{H}$-значною функцією на $\mathcal{I}$ і в силу (2.13)

$$f_{\widetilde{g}}(t) = \int_{\mathbb{R}} Y_c(t,s)\Psi(s)g(s)\,d\mu(s), \quad g(\cdot) \in \widetilde{g}, \tag{6.3}$$

де μ та Ψ визначені в теоремі 2.13, (1).

Нехай $f_*(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ – функція, така що $\pi_\Delta f_*(\cdot) = V^*\widetilde{g}$. Крім того, нехай $h \in \mathbb{H}$, $\mathcal{I}' = [\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}$ і $f(t) = \chi_{\mathcal{I}'}(t)h(\in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}))$, де $\chi_{\mathcal{I}'}$ – індікатор відрізку $\mathcal{I}'$. Покажемо, що

$$\int_{\mathcal{I}} (f(t), \Delta(t)f_{\widetilde{g}}(t))_{\mathbb{H}}\,dt = \int_{\mathcal{I}} (f(t), \Delta(t)f_*(t))_{\mathbb{H}}\,dt. \tag{6.4}$$

З огляду на (6.3) маємо

$$\int_{\mathcal{I}} (f(t), \Delta(t)f_{\widetilde{g}}(t))_{\mathbb{H}}\,dt = \int_{\mathcal{I}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\Delta(t)f(t), Y_c(t,s)\Psi(s)g(s))_{\mathbb{H}}\,d\mu(s) \right) dt. \tag{6.5}$$

Оскільки $Y_c(\cdot,\cdot)$ є неперервною функцією на $\mathcal{I}\times\mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{\mathcal{I}\times\mathbb{R}} |(\Delta(t)f(t), Y_c(t,s)\Psi(s)g(s))_{\mathbb{H}}|\; dtd\mu(s) < \infty.$$

Тому внаслідок теореми Фубіні маємо

$$\begin{gathered}
\int_{\mathcal{I}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\Delta(t)f(t), Y_c(t,s)\Psi(s)g(s))_{\mathbb{H}}\,d\mu(s) \right) dt = \\
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathcal{I}} (\Delta(t)f(t), Y_c(t,s)\Psi(s)g(s))_{\mathbb{H}}\,dt \right) d\mu(s) = \\
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathcal{I}} (\Psi(s)Y_c^*(t,s)\Delta(t)f(t), g(s))_{\mathbb{H}}\,dt \right) d\mu(s) = \\
\int_{\mathbb{R}} \left(\Psi(s) \int_{\mathcal{I}} Y_c^*(t,s)\Delta(t)f(t)\,dt, g(s) \right)_{\mathbb{H}} d\mu(s) = (V\pi_\Delta f, \widetilde{g})_{L^2(\Sigma;\mathbb{H})} = \\
(\pi_\Delta f, V^*\widetilde{g})_{\mathfrak{H}} = \int_{\mathcal{I}} (f(t), \Delta(t)f_*(t))dt.
\end{gathered}$$

Комбінуючи ці співвідношення з (6.5), отримуємо рівність (6.4).

З (6.4) випливає, що $\Delta(t)f_{\widetilde{g}}(t) = \Delta(t)f_*(t)$ (м.в. на $\mathcal{I}$). Тому $f_{\widetilde{g}}(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і $\pi_\Delta f_{\widetilde{g}}(\cdot) = \pi_\Delta f_*(\cdot) = V^*\widetilde{g}$. □

Наслідок 6.3. *Нехай $\Sigma(\cdot)$ – q-псевдоспектральна функція, $f(\cdot) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ – функція, така що $\pi_\Delta f(\cdot) \in \mathfrak{H} \ominus \ker V_\Sigma$ і $\widehat{f}(\cdot)$ – перетворення Фур'є функції $f(\cdot)$. Тоді справедлива рівність (зворотне перетворення Фур'є)*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} Y_c(t,s)\,d\Sigma(s)\widehat{f}(s)$$

де інтеграл збігається за напівнормою в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$.

Лема 6.4. *Нехай за умов твердження 6.2 $E(\cdot) = E_\Sigma(\cdot)$ – ортогональна спектральна міра оператора множення $\Lambda = \Lambda_\Sigma$, $\widetilde{g} \in L^2(\Sigma;\mathbb{H})$, $\delta' = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ і*

$$y_{\delta'} = y_{\delta'}(t) := \int_{\mathbb{R}} Y_c(t,s)d\Sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s), \quad f_{\delta'} = f_{\delta'}(t) := \int_{\mathbb{R}} sY_c(t,s)d\Sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s), \quad g(\cdot) \in \widetilde{g}, \tag{6.6}$$

де $\chi_{\delta'}(\cdot)$ *– інідікатор відрізку* δ'. *Тоді:*

(1) $\{y_{\delta'}, f_{\delta'}\} \in \mathcal{T}_{max}$ *і справедливі рівності*

$$V^*E(\delta')\widetilde{g} = \pi_\Delta y_{\delta'}, \qquad V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g} = \pi_\Delta f_{\delta'}, \tag{6.7}$$

внаслідок яких $\{V^*E(\delta')\widetilde{g}, V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}\} \in T_{max}$.

(2) *Якщо* $V^*E(\delta')\widetilde{g} = 0$ *та* $V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g} = 0$, *то* $y_{\delta'} \in \mathcal{N}$.

Доведення. (1) В силу (2.11) та (2.12) $E(\delta')\widetilde{g} = \pi_\Sigma(\chi_{\delta'}(\cdot)g(\cdot))$ та $\Lambda E(\delta')\widetilde{g} = \pi_\Sigma(s\chi_{\delta'}(s)g(s))$. Тому згідно з твердженням 6.2 $y_{\delta'},\ f_{\delta'} \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і справедливі рівності (6.7). Крім того, з леми 3.2 випливає, що $y_{\delta'}(\cdot)$ є абсолютно неперервною функцією й

$$y'_{\delta'}(t) = -J\int_{\mathbb{R}}(B(t) + s\Delta(t))Y_c(t,s)\,d\Sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s) \quad (\text{м.в. на } \mathcal{I}).$$

Тому

$$Jy'_{\delta'}(t) - B(t)y_{\delta'}(t) = \Delta(t)\int_{\mathbb{R}} sY_c(t,s)\,d\Sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s) = \Delta(t)f_{\delta'}(t) \quad (\text{м.в. на } \ \mathcal{I})$$

і, отже, $\{y_{\delta'}, f_{\delta'}\} \in \mathcal{T}_{max}$.

(2) Якщо $V^*E(\delta')\widetilde{g} = 0$ та $V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g} = 0$, то внаслідок (6.7) $\widetilde{\pi}_\Delta\{y_{\delta'}, f_{\delta'}\} = 0$. Крім того, згідно з твердженням (1) $\{y_{\delta'}, f_{\delta'}\} \in \mathcal{T}_{max}$. Тому внаслідок (3.33) $y_{\delta'} \in \mathcal{N}$. ☐

Нехай V_Σ – перетворення Фур'є, що відповідає q-псевдоспектральній функції $\Sigma(\cdot)$, й $\mathfrak{H}'_0 = \mathfrak{H} \ominus \ker V_\Sigma$, $L_0 = V_\Sigma\mathfrak{H}(= V_\Sigma\mathfrak{H}'_0)$ та $L_0^\perp = L^2(\Sigma;\mathbb{H}) \ominus L_0$. Тоді

$$\mathfrak{H} = \ker V_\Sigma \oplus \mathfrak{H}'_0, \qquad L^2(\Sigma;\mathbb{H}) = L_0 \oplus L_0^\perp. \tag{6.8}$$

Припустимо також, що

$$\widetilde{\mathfrak{H}}'_0 := \mathfrak{H}'_0 \oplus L_0^\perp, \quad \widetilde{\mathfrak{H}} := \overbrace{\ker V_\Sigma \oplus \mathfrak{H}'_0}^{\mathfrak{H}} \oplus L_0^\perp = \mathfrak{H} \oplus L_0^\perp = \ker V_\Sigma \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}'_0, \tag{6.9}$$

і $\widetilde{V}' \in [\widetilde{\mathfrak{H}}'_0, L^2(\Sigma;\mathbb{H})]$ – унітарний оператор вигляду

$$\widetilde{V}' = (V_\Sigma \upharpoonright \mathfrak{H}'_0,\ I_{L_0^\perp}) : \mathfrak{H}'_0 \oplus L_0^\perp \to L^2(\Sigma;\mathbb{H}), \tag{6.10}$$

де $I_{L_0^\perp}$ – оператор вкладення з $L_0^\perp$ в $L^2(\Sigma;\mathbb{H})$. Оскільки $\mathfrak{H} \subset \widetilde{\mathfrak{H}}$, відношення T_{min} можна розглядати як лінійне відношення в $\widetilde{\mathfrak{H}}$.

Лема 6.5. *Нехай* $\Sigma(\cdot)$ *–* q*-псевдоспектральна функція системи* (3.5) *й* $\widetilde{V}'$ *– унітарний оператор* (6.10). *Крім того, нехай* $(T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ *– лінійне відношення, спряжене до* T_{min} *в* $\widetilde{\mathfrak{H}}$, *і* $\Lambda = \Lambda_\Sigma$ *– оператор множення в* $L^2(\Sigma;\mathbb{H})$. *Тоді рівності*

$$\widetilde{f} = (\widetilde{V}')^*\widetilde{g}, \qquad \widetilde{T}_0\widetilde{f} = (\widetilde{V}')^*\Lambda\widetilde{g}, \quad \widetilde{g} \in \operatorname{dom}\Lambda \tag{6.11}$$

задають самоспряжений оператор $\widetilde{T}_0$ *в* $\widetilde{\mathfrak{H}}'_0$, *такий що* $\widetilde{T}_0 \subset (T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$.

Доведення. Неважко бачити, що $(T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = T_{max} \oplus (L_0^\perp)^2$. Крім того, внаслідок (6.10) маємо

$$(\widetilde{V}')^*\widetilde{g} = V_\Sigma^*\widetilde{g} + P_{L_0^\perp}\widetilde{g}, \quad \widetilde{g} \in L^2(\Sigma;\mathbb{H}).$$

Тому рівності (6.11) можна записати як

$$\widetilde{f} = V_\Sigma^*\widetilde{g} + P_{L_0^\perp}\widetilde{g}, \qquad \widetilde{T}_0\widetilde{f} = V_\Sigma^*\Lambda\widetilde{g} + P_{L_0^\perp}\Lambda\widetilde{g}, \quad \widetilde{g} \in \operatorname{dom}\Lambda. \tag{6.12}$$

Крім того, згідно з лемою 6.4 для кожного $\widetilde{g} \in \operatorname{dom}\Lambda$ та відрізку $\delta' = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ маємо

$$\{V_\Sigma^* E(\delta')\widetilde{g}, V_\Sigma^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}\} \in T_{max},$$

й перехід до границі за умови $\delta' \to \mathbb{R}$ дає включення $\{V_\Sigma^*\widetilde{g}, V_\Sigma^*\Lambda\widetilde{g}\} \in T_{max}$, $\widetilde{g} \in \operatorname{dom}\Lambda$. Звідси та з (6.12) випливає, що $\widetilde{T}_0 \subset (T_{min})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^*$. □

Теорема 6.6. *Для кожної q-псевдоспектральної функції* $\Sigma(\cdot)$ *системи* (3.5) *відповідне перетворення Фур'є* V_Σ *задовільняє включенню*

$$\operatorname{mul} T_{min} \subset \ker V_\Sigma, \tag{6.13}$$

де $\operatorname{mul} T_{min}$ *– многозначна частина відношення* T_{min} *(див. твердження 3.7).*

Доведення. Нехай $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}_0^*$ – оператор в $\widetilde{\mathfrak{H}}_0'$, визначениций в лемі 6.5, й $(\widetilde{T}_0)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^*$ – лінійне відношення, спряжене до $\widetilde{T}_0$ в просторі $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Тоді $(\widetilde{T}_0)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^* = \widetilde{T}_0 \oplus (\ker V_\Sigma)^2$ і з включення $\widetilde{T}_0 \subset (T_{min})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^*$ випливає, що

$$T_{min} \subset \widetilde{T}_0 \oplus (\ker V_\Sigma)^2. \tag{6.14}$$

Нехай $\widetilde{n} \in \operatorname{mul} T_{min}$. Тоді $\{0, \widetilde{n}\} \in T_{min}$ і в силу (6.14) $\{0, \widetilde{n}\} \in \widetilde{T}_0 \oplus (\ker V_\Sigma)^2$. Тому існують $\widetilde{f} \in \operatorname{dom} \widetilde{T}_0$ і $\widetilde{g}, \widetilde{g}' \in \ker V_\Sigma$, такі що

$$\widetilde{f} + \widetilde{g} = 0, \qquad \widetilde{T}_0 f + \widetilde{g}' = \widetilde{n}.$$

Оскільки $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{H}}_0'$, $\widetilde{g} \in \ker V_\Sigma$ і $\widetilde{\mathfrak{H}}_0' \perp \ker V_\Sigma$ (див. (6.9)), то $\widetilde{f} = \widetilde{g} = 0$. Тому $\widetilde{T}_0\widetilde{f} = 0$ і, отже, $\widetilde{n} = \widetilde{g}' \in \ker V_\Sigma$. Звідси випливає включення (6.13). □

Зауваження 6.7. Згідно з [90, Lemma 5] рівність

$$\Phi_s f = \int_{\mathcal{I}} Y_c^*(t, s)\Delta(t) f(t)\, dt, \quad \widetilde{f} \in \operatorname{dom} T_{min} \cap \mathfrak{H}', \ \ s \in \mathbb{R} \tag{6.15}$$

задає напрямне відображенння Φ відношення T_{min} в сенсі [90]. Використовуючи цей факт та теорему 1 з [90] можна довести включення (6.13) для q-псевдоспектральних функцій $\Sigma(\cdot)$, які задовільняють додатковій умові $||V_\Sigma\widetilde{f}|| = ||\widetilde{f}||$, $\widetilde{f} \in \operatorname{dom} T_{min}$.

Означення 6.8. q-псевдоспектральна функція $\Sigma(\cdot)$ системи (3.5) називається псевдоспектральною функцією, якщо для відповідного перетворення Фур'є V_Σ справедлива рівність $\ker V_\Sigma = \operatorname{mul} T_{min}$.

Означення 6.9. Функція розподілу $\Sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathbb{H}]$ називається спектральною функцією системи (3.5) (відносно операторного розв'язку $Y_c(\cdot, \lambda)$), якщо для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ має місце включення $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\Sigma; \mathbb{H})$ і вірною є рівність Парсеваля $||\widehat{f}||_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathbb{H})} = ||\widetilde{f}||_{\mathfrak{H}}$.

З теореми 6.6 випливає, що псевдоспектральна функція є q-псевдоспектральною функцією $\Sigma(\cdot)$ з мінімально можливим ядром $\ker V_\Sigma$ відповідного перетворення Фур'є. Крім того, з тієї ж тереми випливає наступне твердження.

Твердження 6.10. *Якщо* $\operatorname{mul} T_{min} \neq \{0\}$, *то множина спектральних функцій системи* (3.5) *є порожньою. Якщо ж* $\operatorname{mul} T_{min} = \{0\}$, *то множини спектральних та псевдоспектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $Y_c(\cdot,\lambda)$*) збігаються.*

Твердження 6.11. *Нехай* $\Sigma(\cdot)$ *–* q*-псевдоспектральна функція визначеної системи* (3.5) *і* $L_0 = V_\Sigma\mathfrak{H}$. *Тоді оператор множення* Λ_Σ *є* L_0*-мінімальним (див. означення 2.5).*

Доведення. Нехай $L_0^\perp := \ker V_\Sigma^* (= L^2(\Sigma;\mathbb{H}) \ominus L_0)$, $\widetilde{g} \in L_0^\perp$ й $E_\Sigma(\delta')\widetilde{g} \in L_0^\perp$ для кожного відрізку $\delta' = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$. Тоді $\Lambda_\Sigma E_\Sigma(\delta')\widetilde{g} \in L_0^\perp$ і, отже, $V_\Sigma^* E_\Sigma(\delta')\widetilde{g} = 0$ та $V_\Sigma^*\Lambda_\Sigma E_\Sigma(\delta')\widetilde{g} = 0$. Тому внаслідок леми 6.4, (2) $y_{\delta'} \in \mathcal{N}$, де $y_{\delta'}$ – функція, задана першою рівністю в (6.6). Оскільки система є визначеною, то $y_{\delta'} = 0$ і тому

$$\int_{\delta'} d\Sigma(\sigma)g(s) = \int_{\mathbb{R}} Y_c(c,s)d\Sigma(\sigma)\chi_{\delta'}(s)g(s) = y_{\delta'}(c) = 0, \quad \delta' = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}, \quad g(\cdot) \in \widetilde{g}.$$

Звідси випливає, що $\widetilde{g} = 0$. Таким чином, підпростір L_0 задовівльняє умові (2) означення 2.5. □

Надалі покладаємо $\mathfrak{H}_0 := \mathfrak{H} \ominus \operatorname{mul} T_{min}$, так що

$$\mathfrak{H} = \operatorname{mul} T_{min} \oplus \mathfrak{H}_0. \tag{6.16}$$

Крім того, для псевдоспектральної функції $\Sigma(\cdot)$ позначаємо через $V_0 = V_{0,\Sigma}$ ізометрію з $\mathfrak{H}_0$ в $L^2(\Sigma;\mathbb{H})$, задану рівністю

$$V_{0,\Sigma} := V_\Sigma \upharpoonright \mathfrak{H}_0. \tag{6.17}$$

Очевидно, що V_Σ допускає зображення

$$V_\Sigma = (0,\, V_{0,\Sigma}) : \operatorname{mul} T_{min} \oplus \mathfrak{H}_0 \to L^2(\Sigma;\mathbb{H}) \tag{6.18}$$

Припустимо, що розширення $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}_0}(T_{min})$ є лінійним відношенням в гільбертовому просторі $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ і $\widetilde{\mathfrak{H}}_0 := \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \operatorname{mul} T_{min}$. Тоді $\mathfrak{H}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{H}}_0$ і має місце розклад

$$\widetilde{\mathfrak{H}} = \operatorname{mul} T_{min} \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}_0. \tag{6.19}$$

Надалі позначатимемо через $\widetilde{T}_0$ операторну частину відношення $\widetilde{T}$. Оскільки $\operatorname{mul}\widetilde{T} = \operatorname{mul} T_{min}$, то $\widetilde{T}_0$ є самоспряженим оператором в $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$. Нехай $E_0(\cdot)$ – ортогональна спектральна міра оператора $\widetilde{T}_0$ і $F_0(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathfrak{H}_0]$ – функція розподілу, задана рівністю

$$F_0(t) = P_{\widetilde{\mathfrak{H}}_0,\mathfrak{H}_0} E_0((-\infty,t)) \upharpoonright \mathfrak{H}_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.20}$$

Очевидно, що спектральна функція $F(\cdot)$ відношення T_{min}, породжнена розширенням $\widetilde{T}$, має вигляд

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathfrak{H}_0 \oplus \operatorname{mul} T_{min} \to \mathfrak{H}_0 \oplus \operatorname{mul} T_{min}. \tag{6.21}$$

Твердження 6.12. *Припустимо, що* $\Sigma(\cdot)$ *– псевдоспектральна функція системи (3.5),* $L_0 = V_\Sigma \mathfrak{H}$ *і оператор множення* Λ_Σ *є* L_0*-мінімальним. Тоді існує єдине (з точністю до еквівалентності) розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$*, таке що спектральна функція* $F(\cdot)$ *відношення* T_{min}*, породжена розширенням* $\widetilde{T}$*, задовільняє рівності*

$$((F(\beta) - F(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}} = \int_{[\alpha,\beta)} (d\Sigma(s)\widehat{f}(s), \widehat{f}(s)), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.22}$$

Якщо $\widetilde{T}$ *є лінійним відношенням у гільбертовому просторі* $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$*, то існує унітарний оператор* $\widetilde{V} \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_0, L^2(\Sigma; \mathbb{H})]$*, такий що* $\widetilde{V} \restriction \mathfrak{H}_0 = V_{0,\Sigma}$ *і оператори* $\widetilde{T}_0$ *та* Λ_Σ *унітарно еквівалентні за допомоги оператора* $\widetilde{V}$*. Крім того,* $V_{0,\Sigma}$ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $\widetilde{T} \in \mathrm{Self}_0(T_{min})$*.*

Доведення. Для заданої псевдоспектральної функції $\Sigma(\cdot)$ покладемо

$$L_0 = V_\Sigma \mathfrak{H}_0, \qquad L_0^\perp = L^2(\Sigma; \mathbb{H}) \ominus L_0,$$

так що $L^2(\Sigma; \mathbb{H}) = L_0 \oplus L_0^\perp$. Припустимо також, що

$$\widetilde{\mathfrak{H}}_0 := \mathfrak{H}_0 \oplus L_0^\perp, \quad \widetilde{\mathfrak{H}} := \overbrace{\mathrm{mul}\, T_{min} \oplus \mathfrak{H}_0}^{\mathfrak{H}} \oplus L_0^\perp = \mathrm{mul}\, T_{min} \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}_0, \tag{6.23}$$

й нехай $\widetilde{V} \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_0, L^2(\Sigma; \mathbb{H})]$ – унітарний оператор, заданий блочним зображенням

$$\widetilde{V} = (V_{0,\Sigma},\, I_{L_0^\perp}) : \mathfrak{H}_0 \oplus L_0^\perp \to L^2(\Sigma; \mathbb{H}). \tag{6.24}$$

Оскільки $\ker V_\Sigma = \mathrm{mul}\, T_{min}$, то $\mathfrak{H}_0' = \mathfrak{H}_0$, $\widetilde{\mathfrak{H}}_0' = \widetilde{\mathfrak{H}}_0$ і $\widetilde{V}' = \widetilde{V}$ (див. (6.8), (6.9) та (6.10)). Тому згідно з лемою 6.5 рівності (6.11) з $\widetilde{V}' = \widetilde{V}$ задають самоспряжений оператор $\widetilde{T}_0$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$. Крім того, оператори $\widetilde{T}_0$ та Λ_Σ унітарно еквівалентні за допомоги оператора $\widetilde{V}$. Звідси випливає,що ортогональна спектральна міра $E_0(\cdot)$ оператора $\widetilde{T}_0$ задовільняє рівності

$$E_0([\alpha, \beta)) = \widetilde{V}^* E_\Sigma([\alpha, \beta))\widetilde{V}, \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.25}$$

Відзначимо також, що $\widetilde{V}\mathfrak{H}_0 = V_\Sigma \mathfrak{H} = L_0$, і оскільки оператор Λ_Σ є L_0-мінімальним, то оператор $\widetilde{T}_0$ є $\mathfrak{H}_0$-мінімальним.

З другої рівності в (6.23) випливає, що $\widetilde{T} := (\{0\} \oplus \mathrm{mul}\, T_{min}) \oplus \widetilde{T}_0$ є самоспряженим лінійним відношенням в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ з операторною частиною $\widetilde{T}_0$ і $\mathrm{mul}\, \widetilde{T} = \mathrm{mul}\, T_{min}$. Крім того,

$$\{0\} \oplus \mathrm{mul}\, T_{min} \subset T_{min} \subset (T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$$

і згідно з лемою 6.5 $\widetilde{T}_0 \subset (T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$. Тому $\widetilde{T} \subset (T_{min})^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$ і, отже, $T_{min} \subset \widetilde{T}$. Відзначимо також, що відношення $\widetilde{T}$ є $\mathfrak{H}$-мінімальним, оскільки оператор $\widetilde{T}_0$ є $\mathfrak{H}_0$-мінімальним. Тому $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$.

Припустимо, далі, що $F(\cdot)$ є спектральною функцією відношення T_{min}, породженою розширенням $\widetilde{T}$, й нехай $F_0(\cdot)$ задано рівністю (6.20). Використовуючи (6.25) та (6.24), неважко показати, що

$$F_0(\beta) - F_0(\alpha) = P_{\widetilde{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{H}_0} E_0([\alpha, \beta)) \restriction \mathfrak{H}_0 = V_{0,\Sigma}^* E_\Sigma([\alpha, \beta)) V_{0,\Sigma}, \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty.$$

Тому внаслідок (6.21) та (6.18) маємо

$$F(\beta) - F(\alpha) = V_\Sigma^* E_\Sigma([\alpha, \beta)) V_\Sigma, \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty,$$

що еквівалентно (6.22). Єдиність $\widetilde{T}$ безпосередньо випливає з (6.22) та $\mathfrak{H}$-мінімальності розширення $\widetilde{T}$. Накінець, вірними є еквівалентності

$$V_{0,\Sigma}\mathfrak{H}_0 = L^2(\Sigma;\mathbb{H}) \iff \mathfrak{H}_0 = \widetilde{\mathfrak{H}}_0 \iff \mathfrak{H} = \widetilde{\mathfrak{H}} \iff \widetilde{T} \in \mathrm{Self}_0(T_{min}).$$

Тому $V_{0,\Sigma}$ є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли $\widetilde{T} \in \mathrm{Self}_0(T_{min})$. ☐

Твердження 6.13. *Нехай* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}_0}(T_{min})$, $F(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T_{min}, *породжена розширенням* $\widetilde{T}$, *і* $\Sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathbb{H}]$ *– функція розподілу, що задовільняє* (6.22). *Тоді* $\Sigma(\cdot)$ *є псевдоспектральною функцією системи* (3.5).

Доведення. Припустимо, що $\widetilde{T}$ є самоспряженим відношенням в деякому гільбертовому прсторі $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ і простір $\widetilde{\mathfrak{H}}$ розкладено за формулою (6.19). Оскільки $\mathrm{mul}\,\widetilde{T} = \mathrm{mul}\,T_{min}$, то з (6.22) та (2.9) випливає, що $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\Sigma;\mathbb{H})$ і

$$||\widehat{f}||_{\mathcal{L}^2(\Sigma;\mathbb{H})} = ||P_{\widetilde{\mathfrak{H}}_0}\widetilde{f}||_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leq ||\widetilde{f}||_{\mathfrak{H}}, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}'.$$

Тому оператор $V\widetilde{f} := \pi_\Sigma \widehat{f}$, $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, допускає продовження до оператора $V \in [\mathfrak{H}, L^2(\Sigma;\mathbb{H})]$, такого що

$$||V\widetilde{f}||_{L^2(\Sigma;\mathbb{H})} = ||P_{\widetilde{\mathfrak{H}}_0}\widetilde{f}||_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}. \tag{6.26}$$

Нехай простір $\mathfrak{H}$ розкладено за формулою (6.16). Тоді внаслідок (6.26), (6.19) і включення $\mathfrak{H}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{H}}_0$ маємо

$$V\widetilde{f} = 0, \quad \widetilde{f} \in \mathrm{mul}\,T_{min}; \qquad ||V\widetilde{f}||_{L^2(\Sigma_\tau;\mathbb{H})} = ||\widetilde{f}||_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = ||\widetilde{f}||_{\mathfrak{H}}, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}_0.$$

Таким чином, V є частковою ізометрією з $\ker V = \mathrm{mul}\,T_{min}$ і, отже, $\Sigma(\cdot)$ є псевдоспектральною функцією. ☐

6.1.2. Псевдоспектральні та спектральні функції визначених систем

В межах цього пункту періодично використовуються такі припущення:

(П1) Система (3.5) є визначеною і $n_+(T_{min}) \geq n_-(T_{min})$ (тобто має місце один з випадків 1-3 з пункту 3.4.2.).

(П2) $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ – граничний комплекс (3.67), (3.58).

(П3) $\mathcal{H}_j$ та Γ_j', $j \in \{0,1\}$, – гільбертові простори та оператори, побудовані для кожного з випадків 1-3 в пункті 3.4.2..

(П4) $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – розділена гранична трійка для T_{max} і $M_+(\cdot)$ – функція Вейля цієї трійки.

Означення 6.14. Граничний параметр $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вигляду (2.20) називається M_+-допустимим, якщо

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_1(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_1(iy) = 0 \tag{6.27}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_+(iy)(C_0(iy) - C_1(iy)M_+(iy))^{-1}C_0(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_1 = 0 \tag{6.28}$$

Твердження 6.15. *Нехай за припущень (П1) - (П4) τ – граничний параметр і $\widetilde{T}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T_{min})$ – відповідне розширення, породжене граничною задачею* (4.1), (4.2) *(див. зауваження 4.8). За цих умов $\widetilde{T}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$ тоді й тільки тоді, коли параметр τ є M_+-допустимим.*

Доведення. Як вже відзначалося в доведенні теореми 4.2 гранична задача (4.1), (4.2) еквівалентна абстрактній граничній задачі (2.110), (2.111) для розділеної граничної трійки Π. Тому потрібне твердження випливає з теореми 2.53, (2). ☐

Теорема 6.16. *Нехай за припущень (П1) - (П4) $c \in \mathcal{I}$, τ – M_+-допустимий граничний параметр, $F_\tau(\cdot)$ – спектральна функція відношення T_{min} та $\Omega_\tau^c(\cdot)$ – характеристична матриця, що відповідають τ (див. зауваження 4.8). Тоді функція розподілу $\Sigma_\tau(\cdot) : \mathbb{R} \to [\mathbb{H}]$, задана формулою обернення Стільтьєса*

$$\Sigma_\tau(s) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im} \Omega_\tau^c(u + i\varepsilon)\, du, \tag{6.29}$$

є единою псевдоспектральною функцією ситеми (3.5) *(відносно розв'язку $Y_c(\cdot, \lambda)$), що задовільняє співвідношенню*

$$((F_\tau(\beta) - F_\tau(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}} = \int_{[\alpha,\beta)} (d\Sigma_\tau(s)\widehat{f}(s), \widehat{f}(s)), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \ -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.30}$$

Доведення. 1) Покажемо спочатку, що $\Sigma_\tau(\cdot)$ задовільняє (6.30) (ми дамо лише нарис доведення, оскільки воно аналогічне доведенню близьких тверджень в [66, 48]). З (4.11) випливає, що для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$

$$R_\tau(\lambda)\widetilde{f} \ = \ \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} (Y_c(\cdot, \lambda)\Omega_\tau^c(\lambda) Y_c^*(t, \overline{\lambda}))\Delta(t) f(t)\, dt + \int_{\mathcal{I}} K(\cdot, t, \lambda)\Delta(t) f(t)\, dt \right), \quad f(\cdot) \ \in \ \widetilde{f}, \tag{6.31}$$

де $K(x, t, \lambda)$ – ціла функція від λ, така що $K^*(x, t, \lambda) = K(x, t, \overline{\lambda})$. Припустимо, що $\widehat{f}(\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ – ціла функція, задана рівністю

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathcal{I}} Y_c^*(t, \overline{\lambda})\Delta(t) f(t)\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тоді в силу (6.31)

$$(R_\tau(\lambda)\widetilde{f}, \widetilde{f}) = (\Omega_\tau^c(\lambda)\widehat{f}(\lambda), \widehat{f}(\overline{\lambda})) + S(\lambda), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $S(\cdot)$ – неперервна функція на $\mathbb{C}$ з дійсними значеннями на $\mathbb{R}$. Тому з огляду на (2.8) маємо

$$((F_\tau(\beta) - F_\tau(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f}) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\beta-\delta} \operatorname{Im}(\Omega_\tau^c(u + i\varepsilon)\widehat{f}(u + i\varepsilon), \widehat{f}(u - i\varepsilon))\, du.$$

Застосовуючи тепер формулу обернення Лівшица – Стільтьєса [17, 48], виводимо (6.30).

2) Нехай $\widetilde{T}_\tau \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$ – розширення, що відповідає параметру τ згідно з твердженням 6.15. Оскільки спектральна функція F_τ відношення T_{min} породжується розширенням $\widetilde{T}_\tau$ і має місце (6.30), то згідно з твердженням 6.13 $\Sigma_\tau(\cdot)$ є псевдоспектральною функцією системи (3.5).

3) Покажемо, що $\Sigma_\tau(\cdot)$ є єдиною псевдоспектральною функцією, що задовільняє (6.30). Припустимо, що V_{Σ_τ} – відповідне перетворення Фур'є і E_{Σ_τ} – спектральна міра (2.12). Тоді внаслідок (6.30) для кожного скінченного проміжку $\delta'=[\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ маємо

$$F_\tau(\beta)-F_\tau(\alpha)=V^*_{\Sigma_\tau}E_{\Sigma_\tau}(\delta')V_{\Sigma_\tau} \tag{6.32}$$

і в силу (6.2)

$$(F_\tau(\beta)-F_\tau(\alpha))\widetilde{f}=\pi_\Delta\left(\int_{\delta'}Y_c(\cdot,s)d\Sigma_\tau(s)\widehat{f}(s)\right),\quad \delta'=[\alpha,\beta)\subset\mathbb{R},\ \ \widetilde{f}\in\mathfrak{H}'. \tag{6.33}$$

Нехай $\Sigma(\cdot)$ – псевдоспектральна функція, така що має місце (6.30) з $\Sigma(\cdot)$ замість $\Sigma_\tau(\cdot)$. Тоді також має місце (6.33) з $\Sigma(\cdot)$ замість $\Sigma_\tau(\cdot)$ і, отже,вірною є рівність

$$\pi_\Delta\left(\int_{\delta'}Y_c(\cdot,s)d\Sigma_\tau(s)\widehat{f}(s)\right)=\pi_\Delta\left(\int_{\delta'}Y_c(\cdot,s)d\Sigma(s)\widehat{f}(s)\right),\quad \delta'=[\alpha,\beta),\ \ \widetilde{f}\in\mathfrak{H}'. \tag{6.34}$$

З теореми 2.13 випливає, що існує скалярна міра μ на борелівських множинах в $\mathbb{R}$ і функції $\Psi_j\cdot:\mathbb{R}\to[\mathbb{H}],\ j\in\{1,2\}$, такі що

$$\Sigma_\tau(\beta)-\Sigma_\tau(\alpha)=\int_{\delta'}\Psi_1(s)\,d\mu(s),\qquad \Sigma(\beta)-\Sigma(\alpha)=\int_{\delta'}\Psi_2(s)\,d\mu(s),\ \ \delta'=[\alpha,\beta) \tag{6.35}$$

Нехай $\Psi(s):=\Psi_1(s)-\Psi_2(s)$ і μ_0 – міра Лебега на борелівських множанах в $\mathcal{I}$. Позначимо також через $\mathcal{G}$ множину всіх функцій $\widehat{f}(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{H}$, які допускають зображення (6.1) з деяким $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}'$. Тоді внаслідок (6.34), (2.13) та (6.35) маємо

$$\Delta(t)\int_{\delta'}Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)\,d\mu(s)=0\ \ (\mu_0-\text{м.в. на }\ \mathcal{I}),\quad \widehat{f}\in\mathcal{G},\ \ \delta'=[\alpha,\beta). \tag{6.36}$$

Позначимо через F (злічену) множину усіх скінченних інтервалів $\delta'=[\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ з раціональними кінцями. З (6.36) випливає, що для кожного $\delta'\in F$ і кожного $\widehat{f}\in\mathcal{G}$ існує борелівська множина $B_{\delta',\widehat{f}}\subset\mathcal{I}$, така що

$$\mu_0(\mathcal{I}\setminus B_{\delta',\widehat{f}})=0\ \text{ та }\ \int_{\delta'}\Delta(t)Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)d\mu(s)=0,\ t\in B_{\delta',\widehat{f}}$$

Тому $B_{\widehat{f}}:=\bigcap\limits_{\delta'\in F}B_{\delta',\widehat{f}}$ є борелівською множиною в $\mathcal{I}$, такою що

$$\mu_0(\mathcal{I}\setminus B_{\widehat{f}})=0\quad\text{та}\quad \mu(\{s\in\mathbb{R}:\Delta(t)Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)\neq 0\})=0,\ \ t\in B_{\widehat{f}}. \tag{6.37}$$

Для кожного $\widehat{f}\in\mathcal{G}$ покладемо

$$\widetilde{B}_{\widehat{f}}=\{(t,s)\in\mathcal{I}\times\mathbb{R}:\Delta(t)Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)\neq 0\}.$$

Тоді в силу (6.37) $(\mu_0\times\mu)(\widetilde{B}_{\widehat{f}})=0$ і, отже, існує борелівська множина $C_{\widehat{f}}\subset\mathbb{R}$, така що

$$\mu(\mathbb{R}\setminus C_{\widehat{f}})=0\quad\text{та}\quad \mu_0(\{t\in\mathcal{I}:\Delta(t)Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)\neq 0\})=0,\ \ s\in C_{\widehat{f}}. \tag{6.38}$$

Нехай $s\in C_{\widehat{f}}$ і $y=y(t)=Y_c(t,s)\Psi(s)\widehat{f}(s)$. Тоді y є розв'язком системи (3.5) і згідно з (6.38) $\Delta(t)y(t)=0$ (μ_0- м.в. на $\mathcal{I}$). Тому $y\in\mathcal{N}$ і оскільки система є визначеною, то $y=0$. Звідки випливає, що $\Psi(s)\widehat{f}(s)=0$. Таким чином, для кожного $\widehat{f}\in\mathcal{G}$ існує борелівська множина $C_{\widehat{f}}\subset\mathbb{R}$, така що

$$\mu(\mathbb{R}\setminus C_{\widehat{f}})=0\ \text{ та }\ \Psi(s)\widehat{f}(s)=0,\ \ s\in C_{\widehat{f}}. \tag{6.39}$$

Доведемо далі таке твердження:

(Т) для кожного $s \in \mathbb{R}$ та $h \in \mathbb{H}$ існує функція $\widehat{f}(\cdot) \in \mathcal{G}$, така що $\widehat{f}(s) = h$.

Дійсно, нехай $s \in \mathbb{R}$, $h' \in \mathbb{H}$ і $(\widehat{f}(s), h') = 0$ для кожної функції $\widehat{f}(\cdot) \in \mathcal{G}$. Покладемо $y = y(t) = Y_c(t, s)h'$. Тоді для кожного скінченного проміжку $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ маємо $\widehat{f}_{\mathcal{I}'}(\cdot) := \int\limits_{\mathcal{I}'} Y_c^*(t, \cdot)\Delta(t)y(t)\, dt \in \mathcal{G}$ і, отже,

$$0 = (\widehat{f}_{\mathcal{I}'}(s), h') = \int_{\mathcal{I}'} (Y_c^*(t, s)\Delta(t)y(t), h')\, dt = \int_{\mathcal{I}'} (\Delta(t)y(t), y(t))\, dt, \quad \mathcal{I}' \subset \mathcal{I}.$$

Звідси випливає, що $y \in \mathcal{N}$ і в силу визначеності системи $y = 0$. Тому $h' = 0$, що доводить твердження (Т).

Нехай $\{e_j\}_1^n$ – ортонормовний базіс в $\mathbb{H}$. Тоді внаслідок твердження (Т) існує система $\{\widehat{f}_j\}_1^n$ функцій $\widehat{f}_j \in \mathcal{G}$, таких що $\widehat{f}_j(0) = e_j$. Покладемо

$$D_1 = \{s \in \mathbb{R} : d(s) \neq 0\}, \quad D_2 = \bigcap_{j=1}^{n} C_{\widehat{f}_j}, \quad D_3 = \{s \in \mathbb{R} : \mu(\{s\}) > 0\}$$

$$D = (D_1 \cap D_2) \cup D_3,$$

де $d(s) = \det(\widehat{f}_j(s), e_k)$. Якщо $s \in D_1 \cap D_2$, то $d(s) \neq 0$ (так що сукупність $\{\widehat{f}_j(s)\}_1^n$ є базісом в $\mathbb{H}$) і $\Psi(s)\widehat{f}_j(s) = 0,\ j = \overline{1, n}$. Тому $\Psi(s) = 0,\ s \in D_1 \cap D_2$. Далі, D_3 є (не більш ніж зличеною) борелівською множиною і $D_3 \subset C_{\widehat{f}}$ для кожного $\widehat{f} \in \mathcal{G}$. Тому внаслідок твердження (Т) $\Psi(s) = 0,\ s \in D_3$. Звідси випливає, що $\Psi(s) = 0,\ s \in D$. Крім того, $\mathbb{R} \setminus D = D' \cup D''$, де

$$D' = (\mathbb{R} \setminus D_1) \cap (\mathbb{R} \setminus D_3), \qquad D'' = (\mathbb{R} \setminus D_2) \cap (\mathbb{R} \setminus D_3).$$

Оскільки $\widehat{f}_j(\cdot)$ є цілою функцією, то функція $d(\cdot)$ також є цілою. Крім того, $d(0) = 1$ і, отже, множина $\mathbb{R} \setminus D_1$ є не більш ніж зличеною. Тому D' є не більш ніж зличеною множиною і $\mu(\{s\}) = 0,\ s \in D'$, звідки випливає рівність $\mu(D') = 0$. Крім того, $\mu(\mathbb{R} \setminus D_2) = 0$ і тому $\mu(D'') = 0$. Звідси випливає, що $\mu(\mathbb{R} \setminus D) = 0$ і, отже, $\Psi(s) = 0$ (μ-м.в. на $\mathbb{R}$). Таким чином, $\Psi_1(s) = \Psi_2(s)$ (μ-м.в. на $\mathbb{R}$) і внаслідок (6.35) $\Sigma_\tau(s) = \Sigma(s)$. ☐

В наступній теоремі усі псевдоспектральні функції визначеної системи (3.5) описуються в термінах M_+-допустимого граничного параметра τ.

Теорема 6.17. *Нехай виконані припущення (П1) - (П4) цього пункту і $c \in \mathcal{I}$. Тоді формула* (6.29) *задає біективну відповідність між усіма M_+-допустимими граничними параметрами $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ та усіма псевдоспектральними функціями $\Sigma = \Sigma_\tau(\cdot)$ системи* (3.5) *(відносно розв'язку $Y_c(\cdot, \lambda)$).*

Доведення. Нехай τ – M_+-допустимий граничний параметр (2.20). Тоді згідно з теоремою 6.16 формула (6.29) визначає псевдоспектральну функцію $\Sigma = \Sigma_\tau(\cdot)$. Зворотно, нехай $\Sigma(\cdot)$ – псевдоспектральна функція системи (3.5) і $L_0 = V_\Sigma \mathfrak{H}$. Тоді згідно з твердженням 6.11 оператор Λ_Σ є L_0 мінімальним і в силу тверджень 6.12, 6.15 та зауваження 4.8 існує єдиний M_+-допустимий граничний параметр τ, такий що має місце (6.22) з $F(\cdot) = F_\tau(\cdot)$. Крім того, згідно з теоремою 6.16 псевдоспектральна функція $\Sigma_\tau(\cdot)$, задана формулою (6.29), є єдиною псевдоспектральною функцією системи

(3.5), що задовільняє (6.30). Звідси випливає, що $\Sigma(\cdot) = \Sigma_\tau(\cdot)$ □

Теорема 6.18. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною і* $c \in \mathcal{I}$. *Тоді існує бієктивна відповідність* $\Sigma(\cdot) = \Sigma_{\widetilde{T}}(\cdot)$ *між усіма розширеннями* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$ *відношення* T_{min} *і усіма псевдоспектральними функціями* $\Sigma(\cdot)$ *системи (відносно розв'язку* $Y_c(\cdot, \lambda)$*). Ця відповідність задається рівністю* (6.22), *в якій* $F(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T_{min}, *породжена розширенням* $\widetilde{T}$. *Крім того, оператори* $\widetilde{T}_0$ *(операторна частина відношення* $\widetilde{T}$*) та оператор множення* $\Lambda_{\Sigma_{\widetilde{T}}}$ *в просторі* $L^2(\Sigma_{\widetilde{T}}; \mathbb{H})$ *унітарно еквівалентні і тому вони мають однакові спктиральні властивості. Звідси, зокрема, випливає, що для кожного розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$ *кратність спектра оператора* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* n.

Доведення. Потрібні твердження є наслідком теореми 6.17 і тверджень 6.11, 6.12 та 6.15. □

Наслідок 6.19. *Нехай за припущень (П1) - (П4)* τ *–* M_+*-допустимий граничний параметр,* $\Sigma(\cdot) = \Sigma_\tau(\cdot)$ *– псевдоспектральна функція системи* (3.5) *і* $V_{0,\Sigma} \in [\mathfrak{H}_0, L^2(\Sigma; \mathbb{H})]$ *– відповідна ізометрія* (6.17). *За цих припущень* $V_{0,\Sigma}$ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $N_+ = N_-$ *і* τ *є самоспряженим граничним параметром* (2.32). *Якщо ця умова виконана, то граничні умови* (4.4) *задають розширення* $\widetilde{T}_\tau \in \mathrm{Self}_0(T_{min})$ *і оператори* $\widetilde{T}_{0,\tau}$ *(операторна частина* $\widetilde{T}_\tau$*) та* Λ_Σ *унітарно еквівалентні за допомоги* $V_{0,\Sigma}$.

Доведення. Перше твердження є наслідком твердження 6.12 та теореми 4.2. Друге твердження випливає з теорем 4.2 та 6.18.

□

В наступному твердженні дається критерій, що дозволяє описувати усі псевдоспектральні функції в термінах довільного (необов'язково допустимого) граничного параметра τ.

Твердження 6.20. *За припущень (П1) - (П4) наступні твердження еквівалентні:*

(1) *Кожний граничний параметр* τ *є* M_+*-допустимим.*

(2) *Справедливі рівності*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_+(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_1 = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} y\left(\mathrm{Im}(M_+(iy)h_0, h_0)_{\mathcal{H}_0} + \tfrac{1}{2}||P_2 h_0||^2\right) = +\infty, \quad 0 \neq h_0 \in \mathcal{H}_0,$$

де P_2 *– ортопроектор в* $\mathcal{H}_0$ *на* $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$.

(3) $\mathrm{mul}\, T_{min} = \mathrm{mul}\, T_{max}$, *тобто виконується умова (У2) в твердженні 3.7, (2).*

(4) $\widetilde{\mathrm{Self}}(T_{min}) = \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T_{min})$.

(5) *Твердження теореми 6.17 є справедливими для довільного граничного параметра* τ.

Доведення. Еквівалентність (1)⇔ (4) випливає з твердження 6.15. Еквівалентність (3)⇔ (4) є наслідком твердження 2.12, (1). Еквівалентність (2)⇔ (3) випливає з теореми 2.49, (2) та зауваження

2.50, (2), застосованих до розділеної граничної трійки П для T_{max}. Нарешті, еквівалентність (1)$\Leftrightarrow$ (5) є наслідком теореми 6.17. ☐

Комбінуючи результати цього підрозділу з твердженням 6.10, приходимо до такої теореми.

Теорема 6.21. *Множина спектральних функцій визначеної системи* (3.5) *є непорожньою тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{mul} T_{min} = \{0\}$ *або ж, еквівалентно, коли виконується умова (У1) в твердженні 3.7, (2). Якщо ця умова виконана, то множини спектральних та псевдоспектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $Y_c(\cdot, \lambda)$*) збігаються і, отже, теореми 6.17, 6.18, твердження 6.20 та наслідок 6.19 справедливі для спектральних функцій (замість псевдоспектральних). У цьому випадку в теоремі 6.18 та наслідку 6.19 слід замінити* $\widetilde{T}_0$, $\widetilde{T}_{0,\tau}$ *та* $V_{0,\Sigma}$ *відповідно на* $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_\tau$ *та* V_Σ. *Крім того, у цьому випадку твердження* (3) *в твердженні 6.20 приймає такий вигляд:*

(3') $\operatorname{mul} T_{max} = \{0\}$, *тобто виконується умова* У3 *в твердженні 3.7,* (2).

Зауваження 6.22. Теорему 6.18 можна було б вивести з теореми 1 в [90], застосовуючи її до напрямних відображень (6.15). Однак такий підхід є не зовсім коректним, оскільки одне з тверджень згаданої теореми 1 не доведено в [90](саме, не доведено єдиність спектральної функції V пари $\langle S; \Phi\rangle$ для заданого розширення $\widetilde{S} = \widetilde{S}^* \supset S$, де означення ті ж самі, що і в [90]). Насправді доведення цього твердження викликає певні труднощі (пор. пункт 3) в доведенні наведеної вище теореми 6.16).

6.1.3. Випадок визначеної системи з регулярною кінцевою точкою

У наступних двох теоремах дається параметризація всіх псевдоспектральних функцій симетричних систем з регулярною кінцевою точкою безпосередньо в термінах граничного параметра (тобто, граничних умов).

Теорема 6.23. *Нехай виконано припущення твердження 4.9 з* $\widetilde{U} = I_{\mathbb{H}}$. *Крім того, нехай* $\mathcal{H}_0$ *та* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ *– скінченновимірні гілбертові простори* (3.132), (3.133), $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.34) - (4.37) *і* $\Omega_0(\cdot)$, $S_1(\cdot)$ *та* $S_2(\cdot)$ *– оператор-функції* (4.66) - (4.68). *Припустимо також, що* $Y_a(\cdot, \lambda)$ *–* $[\mathbb{H}]$*-значний розв'язок сиситеми* (3.5) *з початковою умовою* $Y_a(a, \lambda) = I_{\mathbb{H}}$. *Тоді рівності*

$$\Omega_\tau^a(\lambda) = \Omega_0(\lambda) + S_1(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.40}$$

$$\Sigma_\tau(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im}\Omega_\tau^a(u+i\varepsilon)\,du \tag{6.41}$$

задають бієктивну відповідність між усіма M_+*-допустимими граничними параметрами* $\tau \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ *вигляду* (2.20) *та усіма псевдоспектральними функціями* $\Sigma(\cdot) = \Sigma_\tau(\cdot)$ *системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $Y_a(\cdot, \lambda)$*).*

Твердження теореми є справедливим для довільних граничних параметрів τ *тоді й тільки тоді, коли виконується одна з еквівалентних умов* (1) - (4) *твердження 6.20.*

Доведення. За умов теореми простори $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ і оператори Γ_j, $j \in \{0, 1\}$, задані рівностями (3.134), (3.135) та (3.106), утворюють розділену граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для T_{max}. Крім того, згідно з твердженням 4.10 $M_+(\cdot)$ є функцією Вейля трійки П. Тому потрібне твердження випливає з теорем 6.17, 4.16 та твердження 6.20. ☐

Теорема 6.24. *Нехай виконано припущення (П1) - (П3) пункту 4.4.1. з* $\widetilde{U} = I_{\mathbb{H}}$*. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_1$ *і* $W(\cdot)$ *– ті ж самі, що і в теоремі 4.29. Припустимо також, що* $Y_a(\cdot,\lambda)$ *– той самий розв'язок системи* (3.5)*, що і в теоремі 6.23. Тоді рівність*

$$\Omega_\tau^a(\lambda) = (C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1}(C_0(\lambda)w_2(\lambda) + C_1(\lambda)w_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.42}$$

сумісно з формулою (6.41) *задає бієктивну відповідність між усіма граничними параметрами* $\tau \in \widetilde{R}(\mathbb{H}, \mathcal{H}_1)$ *вигляду* (2.20)*, що задовільняють умовам*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\mathbb{H},\mathcal{H}_1} w_1(iy)(C_0(iy)w_1(iy) + C_1(iy)w_3(iy))^{-1}C_1(iy) = 0 \tag{6.43}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} w_3(iy)(C_0(iy)w_1(iy) + C_1(iy)w_3(iy))^{-1}C_0(iy) \restriction \mathcal{H}_1 = 0 \tag{6.44}$$

та усіма псевдоспектральними функціями $\Sigma(\cdot) = \Sigma_\tau(\cdot)$ *системи (відносно розв'язку* $Y_a(\cdot,\lambda)$*).*

Доведення. За умов теореми простори $\mathbb{H}$ та $\mathcal{H}_1$ і оператори Γ_j, $j \in \{0,1\}$, задані рівностями (3.134), (3.135) та (3.106), утворюють розділену граничну трійку $\Pi = \{\mathbb{H}\oplus\mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для T_{max}. Крім того, внаслідок (4.126) функція Вейля $M_+(\cdot)$ трійки Π допускає зображення

$$M_+(\lambda) = -w_3(\lambda)w_1^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.45}$$

Припустимо, що $\tau \in \widetilde{R}(\mathbb{H}, \mathcal{H}_1)$ – граничний параметр (2.20). Тоді з огляду на (6.45)

$$\begin{aligned}(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_+(\lambda))^{-1} &= (C_0(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda)w_1^{-1}(\lambda))^{-1} = \\ &= w_1(\lambda)(C_0(\lambda)w_1(\lambda) + C_1(\lambda)w_3(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,\end{aligned}$$

і, отже, умови M_+-допустимості (6.27) та (6.28) еквівалентні умовам (6.43) та (6.44). Тому потрібне твердження випливає з теорем 6.17 та 4.29. □

Наступний наслідок випливає з теорем 6.23, 6.24 та 6.21.

Наслідок 6.25. *Нехай* $\operatorname{mul} T_{min} = \{0\}$ *і виконано умови теореми 6.23 (теореми 6.24). Тоді твердження теореми 6.23 (відп. теореми 6.24) є вірними для спектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $Y_a(\cdot,\lambda)$*).*

6.2. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для ситстеми (3.5). Нехай U – оператор (5.1), що задовільняє (5.2) - (5.4), й $\varphi_U(\cdot,\lambda)(\in [H_0, \mathbb{H}])$ – операторний розв'язок системи з початковою умовою (5.5). Тоді кожному $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ відповідає неперервна функція $\widehat{f}_0(\cdot) : \mathbb{R} \to H_0$, задана рівністю

$$\widehat{f}_0(s) = \int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,s)\Delta(t)f(t)\,dt, \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}. \tag{6.46}$$

Означення 6.26. Функція розподілу $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [H_0]$ називається вкороченою q-псевдоспектральною функцією системи (3.5) (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$), якщо $\widehat{f}_0 \in \mathcal{L}^2(\sigma;\mathbb{H})$ для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ і оператор $V\widetilde{f} := \pi_\sigma \widehat{f}_0$, $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, допускає продовження до часткової ізометрії $V = V_\sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\sigma; H_0)]$.

Оператор $V = V_\sigma$ називається перетворенням Фур'є, що відповідає $\sigma(\cdot)$.

Якщо $\sigma(\cdot)$ – вкорочена q-псевдоспектральна функція, то для кожного $f(\cdot)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ існує єдина (з точністю до еквівалентності відносно полунорми в $\mathcal{L}^2(\sigma;H_0)$) функція $\widehat{f}_0(\cdot)\in\mathcal{L}^2(\sigma;H_0)$, така що

$$\lim_{\beta\uparrow b}\Big|\Big|\widehat{f}_0(\cdot)-\int_{[a,\beta]}\varphi_U^*(t,\cdot)\Delta(t)f(t)\,dt\Big|\Big|_{\mathcal{L}^2(\sigma;H_0)}=0.$$

Функція $\widehat{f}_0(\cdot)$ називається перетворенням Фур'є функції $f(\cdot)$.

Наступне твердження доводиться аналогічно твердженню 6.2.

Твердження 6.27. *Нехай $\sigma(\cdot)$ – вкорочена q-псевдоспектральна функція (відносно $\varphi_U(\cdot,\lambda)$) і $V=V_\sigma$ – відповідне перетворення Фур'є. Тоді*

$$V^*\widetilde{g}=\pi_\Delta\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi_U(\cdot,s)\,d\sigma(s)g(s)\right),\quad \widetilde{g}\in L^2(\sigma;H_0),\ \ g(\cdot)\in\widetilde{g},\tag{6.47}$$

де інтеграл збігається за напівнормою в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Тому для кожної функцціїї $f(\cdot)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$, такої що $\pi_\Delta f(\cdot)\in\mathfrak{H}\ominus\ker V_\sigma$, зворотне перетворення Фур'є має вигляд

$$f(t)=\int_{\mathbb{R}}\varphi_U(t,s)\,d\sigma(s)\widehat{f}_0(s)\tag{6.48}$$

(тут інтеграл збігається за напівнормою в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$).

Надалі припускаємо, що $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.122) й $T\in Ext_{T_{min}}$ – симетричне відношення (5.16).

Наступна лема є аналогом леми 6.4 для вкорочених q-псевдоспектральних функцій.

Лема 6.28. *Нехай за умов твердження 6.27 $E(\cdot)=E_\sigma(\cdot)$ – ортогональна спектральна міра оператора множення $\Lambda=\Lambda_\sigma$, $\widetilde{g}\in L^2(\sigma;H_0)$, $\delta'=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ і*

$$y_{\delta'}=y_{\delta'}(t):=\int_{\mathbb{R}}\varphi_U(t,s)d\sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s)\tag{6.49}$$

$$f_{\delta'}=f_{\delta'}(t):=\int_{\mathbb{R}}s\varphi_U(t,s)d\sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s),\quad g(\cdot)\in\widetilde{g}.\tag{6.50}$$

Тоді:

(1) $\{y_{\delta'},f_{\delta'}\}\in\mathcal{T}_{max}$, $\Gamma_{1a}y_{\delta'}=0$ *й*

$$V^*E(\delta')\widetilde{g}=\pi_\Delta y_{\delta'},\qquad V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}=\pi_\Delta f_{\delta'}.\tag{6.51}$$

Крім того, $\{V^*E(\delta')\widetilde{g},V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}\}\in T^*$.

(2) *Якщо $V^*E(\delta')\widetilde{g}=0$ та $V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}=0$, то $y_{\delta'}\in\mathcal{N}$.*

Доведення. (1) Внаслідок твердження 6.27 $y_{\delta'},f_{\delta'}\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ і справедливі рівності (6.51). Включення $\{y_{\delta'},f_{\delta'}\}\in\mathcal{T}_{max}$ доводиться за допомоги леми 3.2 так само, як і в лемі 6.4.

Далі, нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U і Γ_a – оператор (3.125). Тоді

$$\Gamma_a y_{\delta'}=\widetilde{U}\varphi_U(a,\lambda)\int_{\mathbb{R}}d\sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s)$$

і в силу (3.123) та (5.6) $\Gamma_{1a}y_{\delta'}=0$. Тому згідно з (5.17)

$$\{V^*E(\delta')\widetilde{g},V^*\Lambda E(\delta')\widetilde{g}\}=\{\pi_\Delta y_{\delta'},\pi_\Delta f_{\delta'}\}\in T_*\subset T^*,$$

що завершує доведення твердження (1).

Твердження (2) доводиться за допомоги (6.51) так само, як і твердження (2) леми 6.4. □

За аналогією з (6.10) побудуємо унітарний оператор $\widetilde{V}'$, що відповідає вкороченій q-псевдоспектральній фнкції $\sigma(\cdot)$. Саме, нехай $L_0 = V_\sigma \mathfrak{H}$ і простори $\mathfrak{H}$ та $L^2(\sigma; H_0)$ розкладено в ортогональні суми

$$\mathfrak{H} = \ker V_\sigma \oplus \mathfrak{H}_0', \qquad L^2(\sigma; H_0) = L_0 \oplus L_0^\perp. \tag{6.52}$$

Крім того, нехай

$$\widetilde{\mathfrak{H}}_0' := \mathfrak{H}_0' \oplus L_0^\perp, \quad \widetilde{\mathfrak{H}} := \overbrace{\ker V_\sigma \oplus \mathfrak{H}_0'}^{\mathfrak{H}} \oplus L_0^\perp = \mathfrak{H} \oplus L_0^\perp = \ker V_\sigma \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}_0'. \tag{6.53}$$

Тоді рівність

$$\widetilde{V}' = (V_\sigma \upharpoonright \mathfrak{H}_0',\, I_{L_0^\perp}) : \mathfrak{H}_0' \oplus L_0^\perp \to L^2(\sigma; H_0), \tag{6.54}$$

задає унітарний оператор $\widetilde{V}' \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_0', L^2(\sigma; H_0)]$.

Лема 6.29. *Нехай* $\sigma(\cdot)$ *– вкорочена* q*-псевдоспектральна функція системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*) і* $\widetilde{V}'$ *– унітарний оператор* (6.54)*. Крім того, нехай* $T^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathfrak{H}})$ *– лінійне відношення, спряжене до* T *в* $\widetilde{\mathfrak{H}}$*, і* $\Lambda = \Lambda_\sigma$ *– оператор множення в* $L^2(\sigma; H_0)$*. Тоді рівності*

$$\widetilde{f} = (\widetilde{V}')^* \widetilde{g}, \qquad \widetilde{T}_0 \widetilde{f} = (\widetilde{V}')^* \Lambda \widetilde{g}, \quad \widetilde{g} \in \operatorname{dom} \Lambda \tag{6.55}$$

задають самоспряжений оператор $\widetilde{T}_0$ *в* $\widetilde{\mathfrak{H}}_0'$*, такий що* $\widetilde{T}_0 \subset T^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$.

Доведення. Ми наводимо лише основні моменти доведення, оскільки воно аналогічне доведенню леми 6.5.

Очевидно, що $T^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = T^* \oplus (L_0^\perp)^2$ і внаслідок (6.54) рівності (6.55) можна зобразити як

$$\widetilde{f} = V_\sigma^* \widetilde{g} + P_{L_0^\perp} \widetilde{g}, \qquad T_0 \widetilde{f} = V_\sigma^* \Lambda \widetilde{g} + P_{L_0^\perp} \Lambda \widetilde{g}, \quad \widetilde{g} \in \operatorname{dom} \Lambda. \tag{6.56}$$

З леми 6.28 випливає включення $\{V_\sigma^* \widetilde{g}, V_\sigma^* \Lambda \widetilde{g}\} \in T^*$. Тому внаслідок (6.56) $\widetilde{T}_0 \subset T^*_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$ □

Теорема 6.30. *Для кожної вкороченої* q*-псевдоспектральної функції* $\sigma(\cdot)$ *системи* (3.5) *відповідне перетворення Фур'є* V_σ *задовільняє включенню*

$$\operatorname{mul} T \subset \ker V_\sigma, \tag{6.57}$$

де $\operatorname{mul} T$ *– многозначна частина відношення* T *(див. твердження 5.4, (2)).*

Теорема 6.30 доводиться за допомоги леми 6.29 шляхом дослівного повторення доведення теореми 6.6 із заміною T_{min} на T.

Означення 6.31. Вкорочена q-псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ системи (3.5) називається вкороченою псевдоспектральною функцією, якщо для відповідного перетворення Фур'є V_σ справедлива рівність $\ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$.

Означення 6.32. Функція розподілу $\sigma(\cdot):\mathbb{R}\to[H_0]$ називається вкороченою спектральною функцією системи (3.5) (відносно операторного розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$), якщо для кожного $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}'$ має місце включення $\widehat{f}_0\in\mathcal{L}^2(\sigma;H_0)$ і вірною є рівність Парсеваля $||\widehat{f}_0||_{\mathcal{L}^2(\sigma;H_0)}=||\widetilde{f}||_{\mathfrak{H}}$.

З теореми 6.30 випливає, що вкорочена псевдоспектральна функція є вкороченою q-псевдоспектральною функцією $\sigma(\cdot)$ з мінімально можливим ядром $\ker V_\sigma$ відповідного перетворення Фур'є. Крім того, з тієї ж тереми випливає наступне твердження.

Твердження 6.33. *Якщо* $\operatorname{mul}T\neq\{0\}$*, то множина вкорочених спектральних функцій системи* (3.5) *є порожньою. Якщо ж* $\operatorname{mul}T=\{0\}$*, то множини вкорочених спектральних та псевдоспектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*) збігаються.*

Твердження 6.34. *Нехай* $\sigma(\cdot)$ *– вкорочена* q*-псевдоспектральна функція* U*-визначеної (зокрема, визначеної) системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*) і* $L_0=V_\sigma\mathfrak{H}$*. Тоді оператор множення* Λ_σ *є* L_0*-мінімальним.*

Доведення. Нехай $L_0^\perp:=\ker V_\sigma^*(=L^2(\sigma;H_0)\ominus L_0)$, $\widetilde{g}\in L_0^\perp$ й $E_\sigma(\delta')\widetilde{g}\in L_0^\perp$ для кожного відрізку $\delta'=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$. Тоді $\Lambda_\sigma E_\sigma(\delta')\widetilde{g}\in L_0^\perp$ і, отже,

$$V_\sigma^*E_\sigma(\delta')\widetilde{g}=0,\qquad V_\sigma^*\Lambda_\sigma E_\sigma(\delta')\widetilde{g}=0,\quad \delta'=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}. \tag{6.58}$$

Нехай $y_{\delta'}$ – функція, задана рівністю (6.49). Тоді внаслідок (6.58) та леми 6.28, (2) $y_{\delta'}\in\mathcal{N}$. Нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператора U. Позначимо через $K(\in[H_0,\mathbb{H}])$ – оператор, визначний правою частиною рівності (5.6). Тоді $K=\widetilde{U}\varphi_U(a,s)$ і, отже,

$$\Gamma_a y_{\delta'}=\widetilde{U}y_{\delta'}(a)=\widetilde{U}\int_{\mathbb{R}}\varphi_U(a,s)d\sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s)=K\int_{\mathbb{R}}d\sigma(s)\chi_{\delta'}(s)g(s),\quad g(\cdot)\in\widetilde{g}. \tag{6.59}$$

Звідси та з (3.123) випливає рівність $\Gamma_{1a}y_{\delta'}=0$ і, оскільки система є U-визначеною, то $y_{\delta'}=0$. Тому внаслідок (6.59) та очевидної рівності $\ker K=\{0\}$ маємо

$$\int_{\delta'}d\sigma(s)g(s)=0,\quad \delta'=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R},\quad g(\cdot)\in\widetilde{g},$$

і, отже, $\widetilde{g}=0$. Таким чином, підпростір L_0 задовільняє умові (2) означення 2.5. □

Надалі покладаємо $\mathfrak{H}_0:=\mathfrak{H}\ominus\operatorname{mul}T$, так що

$$\mathfrak{H}=\operatorname{mul}T\oplus\mathfrak{H}_0.$$

Крім того, для вкороченої псевдоспектральної функції $\sigma(\cdot)$ позначаємо через $V_0=V_{0,\sigma}$ ізометрію з $\mathfrak{H}_0$ в $L^2(\sigma;H_0)$, задану рівністю

$$V_{0,\sigma}:=V_\sigma\upharpoonright\mathfrak{H}_0. \tag{6.60}$$

Припустимо, що розширення $\widetilde{T}\in\widetilde{\operatorname{Self}_0}(T)$ є лінійним відношенням у гільбертовому просторі $\widetilde{\mathfrak{H}}\supset\mathfrak{H}$ і $\widetilde{\mathfrak{H}}_0:=\widetilde{\mathfrak{H}}\ominus\operatorname{mul}T$, так що $\mathfrak{H}_0\subset\widetilde{\mathfrak{H}}_0$ і

$$\widetilde{\mathfrak{H}}=\operatorname{mul}T\oplus\widetilde{\mathfrak{H}}_0.$$

Надалі позначатимемо через $\widetilde{T}_0$ операторну частину відношення $\widetilde{T}$. Оскільки $\operatorname{mul}\widetilde{T}=\operatorname{mul}T$, то $\widetilde{T}_0$ є самоспряженим оператором в $\widetilde{\mathfrak{H}}_0$.

Твердження 6.35. *Припустимо, що* $\sigma(\cdot)$ *– вкорочена псевдоспектральна фіункція системи* (3.5), $L_0 = V_\sigma \mathfrak{H}$ *і оператор множення* Λ_σ *є* L_0*-мінімальним. Тоді існує єдине (з точністю до еквівалентності) розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$*, таке що спектральна функція* $F(\cdot)$ *відношення* T*, породжена розширенням* $\widetilde{T}$*, задовільняє рівності*

$$((F(\beta) - F(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}} = \int_{[\alpha,\beta)} (d\sigma(s)\widehat{f}_0(s), \widehat{f}_0(s)), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.61}$$

Якщо це розширення $\widetilde{T}$ *є лінійним відношенням у гільбертовому просторі* $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$*, то існує унітарний оператор* $\widetilde{V} \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_0, L^2(\sigma; H_0)]$*, такий що* $\widetilde{V} \upharpoonright \mathfrak{H}_0 = V_{0,\sigma}$ *і оператори* $\widetilde{T}_0$ *та* Λ_σ *унітарно еквівалентні за допомоги оператора* $\widetilde{V}$ *(тут* $V_{0,\sigma} \in [\mathfrak{H}_0, L^2(\sigma; H_0)]$ *– ізометрія* (6.60)*). Крім того,* $V_{0,\sigma}$ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $\widetilde{T} \in \mathrm{Self}_0(T)$.

Доведення твердження 6.35 грунтується на лемі 6.29. Ми опускаємо це доведення, оскільки воно цілком аналогічне доведенню твердження 6.12.

Твердження 6.36. *Нехай* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$*,* $F(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T*, породжена розширенням* $\widetilde{T}$*, і* $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [H_0]$ *– функція розподілу, що задовільняє* (6.61)*. Тоді* $\sigma(\cdot)$ *є вкороченою псевдоспектральною функцією системи* (3.5).

Твердження 6.36 доводитья аналогічно твердженню 6.13.

6.3. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції визначених систем у випадку a1

6.3.1. Параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій

У цьому пункті будемо періодично використовувати такі припущення:

(ВП1) Система (3.5) є визначеною, кінцева точка a є регулярною і $\delta = 1$, $n_+(T_{min}) \geq n_-(T_{min})$ (тобто має місце випадок a1).

(ВП2) U – оператор (5.1), що задовільняє (5.2) - (5.4), $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.122) і $T \in Ext_{T_{min}}$ – симетричне відношення (5.18).

(ВП3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 1 (3.131).

(ВП4) $\dot{\mathcal{H}}_0$ та $\dot{\mathcal{H}}_1 \subset \dot{\mathcal{H}}_0$ – скінченновимірні гільбертові простори (5.23) і $M_{3+}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1]$ – оператор-функція, задана блочним зображенням (5.69) з елементами $M_{ij}(\lambda)$, $i, j \in \{2, 3\}$, визначеними в рівностях (4.36) та (4.37).

Означення 6.37. Вкорочений граничний параметр $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1)$ вигляду (5.31), (5.32) називається допустимим, якщо

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1} (\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy) M_{3+}(iy))^{-1} \dot{C}_1(iy) = 0 \tag{6.62}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_{3+}(iy) (\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy) M_{3+}(iy))^{-1} \dot{C}_0(iy) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1 = 0 \tag{6.63}$$

Твердження 6.38. *Нехай за припущень* (ВП1) - (ВП4) $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр і $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T)$ – відповідне розширення, породжене граничною задачею (5.36) - (5.38) (див. зауваження 5.9). Тоді для справедливості включення $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ необхідньо і достатньо, щоб параметр $\dot\tau$ був допустимим.

Доведення. Нехай $\dot\Pi = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \dot\Gamma_0, \dot\Gamma_1\}$ – гранична трійка для T^*, побудована в твердженні 5.5. Як вже відзначалося в доведенні теореми 5.8 гранична задача (5.36) - (5.38) еквівалентна абстрактній граничній задачі (5.40), (5.41) для трійки $\dot\Pi$. Крім того, згідно з твердженням 5.5, (2) функція Вейля $\dot M_+(\cdot)$ трійки $\dot\Pi$ збігається з оператор-функцією $M_{3+}(\cdot)$. Тому потрібне твердження випливає з теореми 2.53, (2), застосованої до граничної трійки $\dot\Pi$ для T^*. □

Теорема 6.39. *Нехай за припущень* (ВП1) - (ВП4) $\dot\tau$ – вкорочений допустимий граничний параметр (5.31) і $F_{\dot\tau}(\cdot)$ – спектральна функція відношення T, що відповідає $\dot\tau$ (див. зауваження 5.9). Крім того, нехай $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) оператор U, Γ_{0a} – оператор (3.121) і $m_{\dot\tau}(\cdot)$ –m-функція (5.52) системи (3.5). Тоді функція розподілу $\sigma_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{R} \to [H_0]$, задана формулою обернення Стільтьєса

$$\sigma_{\dot\tau}(s) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im} m_{\dot\tau}(u + i\varepsilon)\, du, \tag{6.64}$$

є єдиною вкороченою псевдоспектральною функцією ситеми (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$), що задовільняє співвідношенню

$$((F_{\dot\tau}(\beta) - F_{\dot\tau}(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}} = \int_{[\alpha,\beta)} (d\sigma_{\dot\tau}(s)\widehat{f}_0(s), \widehat{f}_0(s)), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \;\; -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.65}$$

Доведення. Покажемо, що функція розподілу $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ задовільняє (6.65). Нехай $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1$ – простори (5.27), $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – граничний параметр (5.35), $\Omega_\tau(\cdot)$ – характеристична матриця, що відповідає згідно з теоремою 4.16 параметру τ та розв'язку $Y_{\widetilde{U}}(\cdot, \lambda)$ системи (3.5) й $\Sigma_\tau(\cdot)$ – $[\mathbb{H}]$-значна функція розподілу (6.29). Припустимо, що $R(\lambda) = R_{\dot\tau}(\lambda)$ – узагальнена резольвента відношення T, породжена граничною задачею (5.36) - (5.38). Внаслідок (3.134) та (3.135) цю задачу можна розглядати як граничну задачу (4.1), (4.2), що відповідає граничному параметру τ. Тому $R(\lambda) = R_\tau(\lambda)$, тобто $R(\lambda)$ є узагальненою резольвентою відношення T_{min}, що відповідає граничному параметру τ. Звідси та з (2.8) випливає, що

$$((F_{\dot\tau}(\beta) - F_{\dot\tau}(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}} = ((F_\tau(\beta) - F_\tau(\alpha))\widetilde{f}, \widetilde{f})_{\mathfrak{H}}, \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \;\; -\infty < \alpha < \beta < \infty, \tag{6.66}$$

де $F_\tau(\cdot)$ – спектральна функція відношення T_{min}, що відповідає τ.

Далі, внаслідок (5.71) справедлива рівність

$$\Sigma_\tau(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{\dot\tau}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : H_0 \oplus H \to H_0 \oplus H.$$

Крім того, в силу (5.7) для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ маємо

$$\widehat{f}(s) = \{\widehat{f}_0(s), \widehat{f}_1(s)\} (\in H_0 \oplus H)$$

з деяким $\widehat{f}_1(s)$. Звідси випливає, що для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$

$$\int_{[\alpha,\beta)} (d\Sigma_\tau(s)\widehat{f}(s), \widehat{f}(s)) = \int_{[\alpha,\beta)} (d\sigma_{\dot{\tau}}(s)\widehat{f}_0(s), \widehat{f}_0(s)), \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty. \tag{6.67}$$

Порівнюючи тепер (6.66) та (6.67) з (6.30), отримуємо рівність (6.65).

Далі дається лише нарис доведення, оскільки воно цілком аналогічне доведенню теореми 6.16.

Нехай $\widetilde{T}_{\dot{\tau}} \in \widetilde{\mathrm{Self}_0}(T)$ – розширення, що відповідає вкороченому параметру $\dot{\tau}$ згідно з твердженням 6.38. Оскільки спектральна функція $F_{\dot{\tau}}(\cdot)$ відношення T породжується розширенням $\widetilde{T}_{\dot{\tau}}$ і має місце (6.65), то згідно з твердженням 6.36 $\sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ є вкороченою псевдоспектральною функцією системи (3.5). Накінець, єдиність $\sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ виводиться з (6.65) дослівним повторенням частини 3) доведення теореми 6.16 із заміною $F_\tau(\cdot)$, $\widehat{f}(\cdot)$ та $\Sigma_\tau(\cdot)$ відповідно на $F_{\dot{\tau}}(\cdot)$, $\widehat{f}_0(\cdot)$ та $\sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$. □

У наступних двох теоремах дається параметризація всіх вкорочених псевдоспектральних функцій визначених систем безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра.

Теорема 6.40. *Нехай за припущень* (ВП1) - (ВП4) $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (3.121)*. Крім того, нахай* $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (4.34) - (4.37) *і* $m_0(\cdot)$*,* $M_{1+}(\cdot)$*,* $M_{2+}(\cdot)$ *та* $M_{3+}(\cdot)$ *– оператор-функції, задані рівностями* (5.66) - (5.69)*. Тоді рівність*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_{1+}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{2+}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.68}$$

сумісно з формулою (6.64) *задає біективну відповідність між усіма вкороченими допустимими граничними параметрами* $\dot{\tau}$*, заданими рвіностями* (5.31), (5.32)*, і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*).*

Доведення. Нехай $\dot{\tau}$ – вкорочений допустимий граничний параметр (5.31), (5.32) і $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ – відповідна m-функція. Тоді згідно з теоремою 6.39 формула (6.64) задає вкорочену псевдоспектральну функцію $\sigma = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$. Зворотно, нехай $\sigma(\cdot)$ – вкорочена псевдоспектральна функція системи (3.5) і $L_0 = V_\sigma \mathfrak{H}$. Тоді згідно з твердженням 6.34 оператор Λ_σ є L_0-мінімальним і в силу тверджень 6.35, 6.38 та зауваження 5.9 існує єдиний вкорочений допустимий граничний параметр $\dot{\tau}$, такий що має місце (6.61) з $F(\cdot) = F_{\dot{\tau}}(\cdot)$. Крім того, згідно з теоремою 6.39 вкорочена псевдоспектральна функція $\sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$, задана формулою (6.64), є єдиною вкороченою псевдоспектральною функцією системи (3.5), що задовільняє (6.65). Тому $\sigma(\cdot) = \sigma_\tau(\cdot)$. Таким чином, формула (6.64) задає біективну відповідність між усіма допустимими вкороченими граничними параметрами $\dot{\tau}$ і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ сисиеми (3.5) (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$). Звідси та з теореми 5.16 випливає потрібне твердження. □

Теорема 6.41. *Нехай виконано припущення теореми 5.20. Тоді рівність*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.69}$$

сумісно з формулою (6.64) *задає біективну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами* $\dot{\tau}$ *вигляду* (5.31)*, що задовільняють умовам*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1} \dot{w}_1(iy)(\dot{C}_0(iy)\dot{w}_1(iy) + \dot{C}_1(iy)\dot{w}_3(iy))^{-1}\dot{C}_1(iy) = 0 \tag{6.70}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} \dot{w}_3(iy)(\dot{C}_0(iy)\dot{w}_1(iy) + \dot{C}_1(iy)\dot{w}_3(iy))^{-1}\dot{C}_0(iy) \upharpoonright \dot{\mathcal{H}}_1 = 0 \tag{6.71}$$

та усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot)=\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

*Д*оведення. Нехай $m_0(\cdot)$ та $M_{j+}(\cdot),\ j\in\{1,2,3\}$, – оператор-функції (5.66) - (5.69). Тоді внаслідок (5.82)

$$M_{3+}(\lambda)=-\dot w_3(\lambda)\dot w_1^{-1}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Тому для кожного вкороченого гнраничного параметра $\dot\tau$ вигляду (5.31)

$$(\dot C_0(\lambda)-\dot C_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}=(\dot C_0(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda)\dot w_1^{-1}(\lambda))^{-1}=$$
$$=\dot w_1(\lambda)(\dot C_0(\lambda)\dot w_1(\lambda)+\dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda))^{-1},\ \ \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

і, отже, умови допустимості (6.62) та (6.63) еквівалентні умовам (6.70) та (6.71). Крім того, згідно з теоремою 5.20 m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ допускає зображення (6.69). Тому потрібне твердження є наслідком теореми 6.40. ☐

Наступна теорема випливає з теореми 6.40 та тверджень 6.34, 6.35 та 6.38.

Теорема 6.42. *Нехай виконано припущення* (ВП1) *та* (ВП2)*. Тоді існує бієктивна відповідність* $\sigma(\cdot)=\sigma_{\widetilde T}(\cdot)$ *між усіма розширеннями* $\widetilde T\in\widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ *відношення* T *і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ *системи (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*). Ця відповідність задається рівністю* (6.61)*, в якій* $F(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T*, породжена розширенням* $\widetilde T$*. Крім того, оператори* $\widetilde T_0$ *(операторна частина відношення* $\widetilde T$*) та оператор множення* $\Lambda_{\sigma_{\widetilde T}}$ *в просторі* $L^2(\sigma_{\widetilde T};H_0)$ *унітарно еквівалентни. Звідси випливає, що для кожного розширення* $\widetilde T\in\widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ *кратність спектра оператора* $\widetilde T_0$ *не перевищує* $\nu+\widehat\nu(=\dim H_0)$.

Наслідок 6.43. *Нехай за припущень* (ВП1) - (ВП4) $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр,* $\sigma(\cdot)=\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *– вкорочена псевдоспектральна функція системи* (3.5) *і* $V_{0,\sigma}\in[\mathfrak{H}_0,L^2(\sigma;H_0)]$ *– відповідна ізометрія* (6.60)*. За цих припущень* $V_{0,\sigma}$ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $N_+=N_-$ *і* $\dot\tau$ *є самоспряженим вкороченим граничним параметром* (5.33), (5.34)*. Якщо ця умова виконана, то граничні умови* (5.39) *задають розширення* $\widetilde T_{\dot\tau}\in\mathrm{Self}_0(T)$ *і оператори* $\widetilde T_{0,\dot\tau}$ *(операторна частина* $\widetilde T_{\dot\tau}$*) та* Λ_σ *унітарно еквівалентні за допомоги* $V_{0,\sigma}$.

*Д*оведення. Перше твердження є наслідком твердження 6.35 та теореми 5.8. Друге твердження випливає з теорем 5.8 та 6.42. ☐

В наступному твердженні дається критерій, що дозволяє описувати усі вкорочені псевдоспектральні функції в термінах довільного (необов'язково допустимого) вкороченого граничного параметра.

Твердження 6.44. *За припущень* (ВП1) - (ВП4) *наступні твердження еквівалентні:*

(1) *Кожний вкорочений граничний параметр* $\dot\tau$ *є допустимим.*

(2) *Справедливі рівності*

$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}M_{3+}(iy)\upharpoonright\dot{\mathcal{H}}_1=0$$

$$\lim_{y\to+\infty}y\left(\mathrm{Im}(M_{3+}(iy)h_0,h_0)_{\dot{\mathcal{H}}_0}+\tfrac12||P_2h_0||^2\right)=+\infty,\quad 0\neq h_0\in\dot{\mathcal{H}}_0,$$

де P_2 *– ортопроектор в* $\dot{\mathcal{H}}_0$ *на* $\dot{\mathcal{H}}_2 = \dot{\mathcal{H}}_0 \ominus \dot{\mathcal{H}}_1$.

(3) $\operatorname{mul} T = \operatorname{mul} T^*$.

(4) $\widetilde{\mathrm{Self}}(T) = \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$.

(5) *Твердження теореми 6.40 є вірним для довільного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$.

Доведення. Еквівалентність (1)⇔ (4) випливає з твердження 6.38. Еквівалентність (3)⇔ (4) є наслідком твердження 2.12, (1). Далі, нехай $\dot{\Pi} = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \dot{\mathcal{H}}_1, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка для T^*, побудована в твердженні 5.5. Тоді згідно з твердженням 5.5, (2) функціця Вейля трійки $\dot{\Pi}$ збігається з $M_{3+}(\cdot)$. Звідси внаслідок теореми 2.49, (2) та зауваження 2.50, (2) випливає еквівалентність (2)⇔ (3). Накінець, еквівалентність (1)⇔ (5) є наслідком теореми 6.40. □

З результатів цього пункту та твердження 6.33 випливає така теорема.

Теорема 6.45. *Нехай виконано припущення* (ВП1) *та* (ВП2)*. У цьому випадку множина вкорочених спектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*) є непорожньою тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{mul} T = \{0\}$*. Якщо ця умова виконана, то множини вкорочених спектральних та псевдоспектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*) збігаються і тому теореми 6.40 - 6.42, твердження 6.44 та наслідок 6.43 справедливі для вкорочених спектральних функцій (замість вкорочених псевдоспектральних функцій). У цьому випадку в теормі 6.42 та наслідку 6.43 слід замінити* $\widetilde{T}_0$, $\widetilde{T}_{0,\dot{\tau}}$ *та* $V_{0,\sigma}$ *відповідно на* $\widetilde{T}$, $\widetilde{T}_{\dot{\tau}}$ *та* V_σ.

6.3.2. Випадок рівних мінімальних індексів дефекту

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для системи (3.5). Тоді внаслідок (3.153) та (3.4) мінімально можливими рівними формальними індексами дефекту такої системи є

$$N_+ = N_- = \nu + \widehat{\nu}. \tag{6.72}$$

Якщо виконано (6.72) і $\delta = 1$, то $\nu_{b-} = 0$, $\nu_{b+} = \widehat{\nu}$ і згідно з лемою 3.19 існує сюр'єктивний оператор $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widehat{H}$, такий що

$$[y, z]_b = i(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z)_{\widehat{H}}, \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{6.73}$$

Надалі в межах цього пункту вважаємо виконаними такі припущення:

1) система (3.5) є визначеною, кінцева точка a є регулярною, $\delta = 1$ і має місце (6.72) (тобто система має рівні мінімальні формальні індекси дефекту);

2) U – оператор (5.1), що задовільняє (5.2) - (5.4), і $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.122).

3) $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widehat{H}$ – сюр'єктивний оператор, що задовільняє (6.73).

Відзначимо, що згідно припущення 1) має місце випадок a1; крім того, припущення 3) означає, що сукупність $\{\{0\}, \{0\}, \widehat{\Gamma}_b\}$ є b-граничним комплексом типу 1.

За припущень 1) - 3) маємо $\dot{\mathcal{H}}_0 = \dot{\mathcal{H}}_1 = \widehat{H}$. Тому вкороченим граничним параметром є операторна пара

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}(\lambda) = \{\dot{C}_0(\lambda), \dot{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\widehat{H}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{6.74}$$

з голоморфними оператор-функціями $\dot{C}_j(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to [\widehat{H}, \mathcal{K}]$, $j \in \{0,1\}$, і гранична задача (5.36) - (5.38) приймає вигляд

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{6.75}$$

$$\Gamma_{1a}y = 0 \tag{6.76}$$

$$(i\dot{C}_0(\lambda) - \tfrac{1}{2}\dot{C}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_a y - (i\dot{C}_0(\lambda) + \tfrac{1}{2}\dot{C}_1(\lambda))\widehat{\Gamma}_b y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.77}$$

З твердження 4.9 випливає, що існує єдина пара операторних розв'язків $\xi_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ та $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ системи (3.5), що задовільняють граничним умовам

$$\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_b\xi_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.78}$$

$$\Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \qquad i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)\widehat{\xi}_0(\lambda) = I_{\widehat{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.79}$$

Далі припускаємо, що $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (3.120) опертора U і Γ_{0a} – оператор (3.121). Якщо $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (6.74), то згідно з означенням 5.11 m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ системи (3.5), що відповідає граничній задачі (6.75) - (6.77), задається рівністю (5.52). Відзначимо також, що згідно з твердженням 4.10 функція Вейля $M(\cdot)$ (звичайної) розділеної граничної трійки Π для T_{max} допускає блочне зображення

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda) \\ \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_0(\lambda) + \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.80}$$

Теорема 6.46. *Нехай за умов* 1) - 3) *цього пункту* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U*,* Γ_{0a} *– оператор* (3.121) *і* $M(\cdot)$ *– оператор-функція* (6.80)*. Тоді рівності*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot{\tau}1}(\lambda) & m_{\dot{\tau}2}(\lambda) \\ m_{\dot{\tau}3}(\lambda) & m_{\dot{\tau}4}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.81}$$

$$m_{\dot{\tau}1}(\lambda) = M_{11}(\lambda) + M_{12}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{22}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{21}(\lambda) \tag{6.82}$$

$$m_{\dot{\tau}2}(\lambda) = M_{12}(\lambda) + M_{12}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{22}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)(M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}}) \tag{6.83}$$

$$m_{\dot{\tau}3}(\lambda) = M_{21}(\lambda) + (M_{22}(\lambda) - \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}})(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{22}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{21}(\lambda) \tag{6.84}$$

$$m_{\dot{\tau}4}(\lambda) = M_{22}(\lambda) + (M_{22}(\lambda) - \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}})(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{22}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)(M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2}I_{\widehat{H}}) \tag{6.85}$$

сумісно з формулою (6.64) *задають біективну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами* $\dot{\tau}$ *вигляду* (6.74)*, що задовільняють умовам*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}(\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy)M_{22}(iy))^{-1}\dot{C}_1(iy) = 0 \tag{6.86}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}M_{22}(iy)(\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy)M_{22}(iy))^{-1}\dot{C}_0(iy) = 0, \tag{6.87}$$

і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

Доведення. З (6.80) випливає, що за умов теореми оператор-фнкції (5.66) - (5.69) приймають вигляд

$$m_0(\lambda) = M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}$$

$$M_{1+}(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{12}(\lambda) \\ M_{22}(\lambda) - \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}$$

$$M_{2+}(\lambda) = (M_{21}(\lambda),\, M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}) : H \oplus \widehat{H} \to \widehat{H}, \qquad M_{3+}(\lambda) = M_{22}(\lambda). \tag{6.88}$$

Тому внаслідок (6.68)

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} M_{12}(\lambda) \\ M_{22}(\lambda) - \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} (\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda) M_{22}(\lambda))^{-1} \dot{C}_1(\lambda) (M_{21}(\lambda),\, M_{22}(\lambda) + \tfrac{i}{2} I_{\widehat{H}}),$$

звідки випливають рівності (6.81) - (6.85) для m-функції $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$. Крім того, внаслідок другої рівності в (6.88) умови допустимості (6.62), (6.63) можна зобразити у вигдяді (6.86), (6.87). Звідси внаслідок теореми 6.40 випливає потрібне твердження. ☐

6.3.3. Приклад

У цьому пункті наведено приклад, що ілюструє отримані результати у випадку рівних мінімальних формальних індексів дефекту симетричної системи.

Нехай $\mathcal{I} = [0, \infty)$ і $\delta(\cdot)$ – борелівська функція на $\mathcal{I}$, така що $\delta(t) > 0$ (м.в. на $\mathcal{I}$) і

$$C := \int_0^\infty \delta(t)\, dt < \infty.$$

Припустимо також, що в (3.2) $H = \widehat{H} = \mathbb{C}$, так що $\mathbb{H} = \mathbb{C}^3$ і $H_0 = \mathbb{C}^2$. Розглянемо симетричну систему

$$Jy' = \lambda \Delta(t) y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.89}$$

де J і $\Delta(t)$ задані матрицями

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\delta(t)+1) & 0 & \frac{i}{2}(\delta(t)-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2}(\delta(t)-1) & 0 & \frac{1}{2}(\delta(t)+1) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta(t)$ є невід'ємною оборотною матрицею, то система (6.89) є визначеною й T_{min} є щільно визначеним оператором в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$. Безпосередня перевірка показує, що система (6.89) має фундаментальний операторний розв'язок

$$Y(t,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda\Phi(t)} & 0 & e^{i\lambda t} \\ 0 & e^{-i\lambda t} & 0 \\ -ie^{-i\lambda\Phi(t)} & 0 & ie^{i\lambda t} \end{pmatrix}, \tag{6.90}$$

де

$$\Phi(t) := \int_0^t \delta(s)\,ds.$$

Позначимо через $y^{(1)}(\cdot,\lambda),\ y^{(2)}(\cdot,\lambda)$ та $y^{(3)}(\cdot,\lambda)$ векторні розв'язки системи (6.89), утворені відповідно першим, другим та третім стовпчиком матриці (6.90). Легко бачити, що $y^{(1)}(\cdot,\lambda),\ y^{(3)}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I}),\ y^{(2)}(\cdot,\lambda) \notin \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I})$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ і $y^{(1)}(\cdot,\lambda),\ y^{(2)}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I}),\ y^{(3)}(\cdot,\lambda) \notin \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I})$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_-$. Тому система (6.89) має мінімальні рівні формальні індекси дефекту $N_+ = N_- = 2$.

Нехай $\theta(\cdot) \in \mathcal{L}_\Delta^2(\mathcal{I})$ – розв'язок системи (6.89), заданий рівністю

$$\theta(t) = \tfrac{i}{\sqrt{2}} e^{-C} y^{(1)}(t,i) = \tfrac{i}{\sqrt{2}} e^{-C}\{e^{\Phi(t)}, 0, -ie^{\Phi(t)}\}.$$

Тоді $[\theta,\theta]_\infty = i$ і тому рівність $\widehat{\Gamma}_b y = [y,\theta]_\infty,\ y \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$, задає сір'єктивний оператор $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \mathbb{C}$, що задовільняє (6.73).

Припустимо, що $\widetilde{U} = I$. Тоді для кожної функції $y \in \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$, зображеної у вигляді

$$y(t) = \{y_0(t), \widehat{y}(t), y_1(t)\}(\in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}), \quad t \in \mathcal{I},$$

маємо $\Gamma_{0a}y = y_0(0),\ \widehat{\Gamma}_a y = \widehat{y}(0),\ \Gamma_{1a}y = y_1(0)$. Крім того, вкороченим граничним параметром у випадку, що розглядається, є неванлинівська (скалярна) функція $\dot{\tau} = \dot{\tau}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}_+$. Тому гранична задача (6.75) - (6.77) має вигляд

$$Jy' = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in [0,\infty) \tag{6.91}$$

$$y_1(0) = 0, \quad (i\dot{\tau}(\lambda) + \tfrac{1}{2})\widehat{y}(0) - (i\dot{\tau}(\lambda) - \tfrac{1}{2})[y,\theta]_\infty = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.92}$$

Безпосередня перевірка показує, що матриця операторного розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$ системи (6.89) задається рівністю

$$\varphi_U(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-i\lambda\Phi(t)} + e^{i\lambda t}) & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda t} \\ \frac{i}{2}(-e^{-i\lambda\Phi(t)} + e^{i\lambda t}) & 0) \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}}_{H_0} \to \underbrace{\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}}_{\mathbb{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.93}$$

Для спрощення подальших міркувань перейдемо до нового ортонормовного базиса $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3\}$ в $\mathbb{C}^3$, де $\dot{e}_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\},\ \dot{e}_2 = \{0,1,0\}$ і $\dot{e}_3 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\}$. Тоді гілбертів простір $L_\Delta^2(\mathcal{I})$ можна ототожнити з множиною усіх борелівських функцій $f(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbb{C}^3$ вигляду

$$f(t) = \dot{f}_1(t)\dot{e}_1 + \dot{f}_2(t)\dot{e}_2 + \dot{f}_3(t)\dot{e}_3 =: \{\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dot{f}_3(t)\}, \tag{6.94}$$

де $\delta^{\frac{1}{2}}\dot{f}_1 \in L^2(\mathcal{I})$ і $\dot{f}_2,\ \dot{f}_3 \in L^2(\mathcal{I})$. Крім того, внаслідок (6.46) для кожної функції

$$f(\cdot) = \{\dot{f}_1(\cdot), \dot{f}_2(\cdot), \dot{f}_3(\cdot)\} \in L_\Delta^2(\mathcal{I})$$

перетворення Фур'є $\widehat{f}_0(\cdot) = \{\widehat{f}_{01}(\cdot), \widehat{f}_{02}(\cdot)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ задається рівностями

$$\widehat{f}_{01}(s) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (e^{is\Phi(t)}\delta(t)\dot{f}_1(t) + e^{-ist}\dot{f}_3(t))\,dt, \qquad \widehat{f}_{02}(s) = \int_0^\infty e^{ist}\dot{f}_2(t)\,dt. \tag{6.95}$$

Безпосередня перевірка показує, що рівності

$$\xi_0(t,\lambda) = \{ie^{i\lambda t},\, 0, e^{-i\lambda t}\}, \quad \widehat{\xi}_0(t,\lambda) = \{\tfrac{i}{\sqrt{2}} e^{i\lambda C}(e^{-i\lambda\Phi(t)} + e^{i\lambda t}),\, 0,\, \tfrac{i}{\sqrt{2}} e^{i\lambda C}(-ie^{-i\lambda\Phi(t)} + ie^{i\lambda t})\}$$

задають розв'язки $\xi_0(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda)$ системи (6.89), що належать до $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$ та задовільняють граничним умовам (6.78), (6.79). Тому оператор-функція (6.80) має вигляд

$$m(\lambda) = \begin{pmatrix} i & i\sqrt{2}e^{i\lambda C} \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

і внаслідок теореми 6.46 для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ відповідна m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ задається матрицею

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot{\tau}1}(\lambda) & m_{\dot{\tau}2}(\lambda) \\ m_{\dot{\tau}3}(\lambda) & m_{\dot{\tau}4}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

елементи якої обчислюються за формулами

$$m_{\dot{\tau}1}(\lambda) = i, \quad m_{\dot{\tau}2}(\lambda) = i\sqrt{2}e^{i\lambda C}\frac{\dot{\tau}(\lambda) - \frac{i}{2}}{\dot{\tau}(\lambda) + \frac{i}{2}}, \quad m_{\dot{\tau}3}(\lambda) = 0, \quad m_{\dot{\tau}4}(\lambda) = \tfrac{i}{2}.$$

Позначимо через $\mathcal{C}$ множину всіх голоморфних функцій $k(\cdot)$, визначених в $\mathbb{C}_+$ і таких. що $|k(\lambda)| \leq 1,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$. Оскільки рівність $k(\lambda) = \frac{\dot{\tau}(\lambda)-\frac{i}{2}}{\dot{\tau}(\lambda)+\frac{i}{2}}$ задає бієктивну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами $\dot{\tau}(\cdot)$ та усіма функціями $k(\cdot) \in \mathcal{C}$, то

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = \begin{pmatrix} i & i\sqrt{2}e^{i\lambda C}k(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{6.96}$$

де $k(\cdot) \in \mathcal{C}$. Застосовуючи формулу Стільт'єса (6.64) до оператор-функції (6.96), отримуємо вкорочену спектральну функцію $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ у вигляді

$$\sigma(s) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} s & \sigma_0(s) \\ \overline{\sigma_0(s)} & \frac{1}{2}s \end{pmatrix}, \tag{6.97}$$

де

$$\sigma_0(s) == \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\delta}^{s-\delta} e^{i(u+i\varepsilon)C}k(u+i\varepsilon)\,du. \tag{6.98}$$

Таким чином, внаслідок теореми 6.46 рівності (6.97) та (6.98) задають бієктивну відповідність між усіма функціями $k(\cdot) \in \mathcal{C}$ та усіма вкороченими спектральними функціями $\sigma(\cdot)$ системи (6.89) (відносно перетворення Фур'є (6.95)).

Нехай $\sigma(\cdot)$ – вкорочена спектральна функція (6.97). Тоді функція $\sigma_0(\cdot)$ є абсолютно неперервною і тому майже всюди на $\mathbb{R}$ існує похідна $\sigma_0'(s)$. Звідси випливає, що майже всюди на $\mathbb{R}$ існує похідна

$$\sigma'(s) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 & \sigma_0'(s) \\ \overline{\sigma_0'(s)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{6.99}$$

і простір $L^2(\sigma;\mathbb{C}^2)$ є множиною усіх борелівських функцій $g(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2$, таких що

$$\int_{\mathbb{R}} (\sigma'(s)g(s), g(s))\,ds < \infty.$$

Тому внаслідок (6.48) для кожної функції $f(\cdot) \in L^2_\Delta(\mathcal{I})$ вигляду (6.94) зворотнє перетворення Фур'є задається рівністю

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_U(t,s)\sigma'(s)\widehat{f}_0(s)\,ds$$

і безпосередній підрахунок з огляду на (6.93) та (6.99) дає

$$\dot{f}_1(t) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} (e^{-is\Phi(t)}\widehat{f}_{01}(s) + e^{-is\Phi(t)}\sigma_0'(s)\widehat{f}_{02}(s))\, ds \tag{6.100}$$

$$\dot{f}_2(t) = \tfrac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{-ist}\overline{\sigma_0'(s)}\widehat{f}_{01}(s) + \tfrac{1}{2}e^{-ist}\widehat{f}_{02}(s))\, ds \tag{6.101}$$

$$\dot{f}_3(t) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} (e^{ist}\widehat{f}_{01}(s) + e^{ist}\sigma_0'(s)\widehat{f}_{02}(s))\, ds \tag{6.102}$$

(тут $\widehat{f}_{01}(s)$ та $\widehat{f}_{02}(s)$ визначені в (6.95)).

З теореми 6.45 випливає, що перетворення Фур'є $V = V_\sigma \in [L^2_\Delta(\mathcal{I}), L^2(\sigma; \mathbb{C}^2)]$ є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли $\dot{\tau}$ є дійсною константою або, еквівалентно, коли $k(\lambda) \equiv k,\ |k| = 1$. У цьому випадку внаслідок (6.98) маємо $\sigma_0'(s) = \frac{k}{\sqrt{2}}e^{isC}$ і формули (6.99) та (6.100) - (6.102) приймають вигляд

$$\sigma'(s) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{\sqrt{2}}e^{isC} \\ \frac{1}{k\sqrt{2}}e^{-isC} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{f}_1(t) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} (e^{-is\Phi(t)}\widehat{f}_{01}(s) + \tfrac{k}{\sqrt{2}}e^{-is(\Phi(t)-C)}\widehat{f}_{02}(s))\, ds,$$

$$\dot{f}_2(t) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} (\tfrac{1}{k}e^{-is(t+C)}\widehat{f}_{01}(s) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-ist}\widehat{f}_{02}(s))\, ds,$$

$$\dot{f}_3(t) = \tfrac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} (e^{ist}\widehat{f}_{01}(s) + \tfrac{k}{\sqrt{2}}e^{is(t+C)}\widehat{f}_{02}(s))\, ds.$$

6.4. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції у випадку а2

6.4.1. Вкорочені псевдоспектральні функції та спектри самоспряжених розширень

Надалі в межах цього підрозділу вважаються виконаними такі припущення:

(ВП1') кінцева точка a є регулярною для системи (3.5), $\delta = -1$ і $N_+ - N_- \geq \widehat{\nu}$ (тобто має місце випадок а2);

(ВП2') U – оператор (5.1), що задовільняє (5.2) - (5.4), $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори (3.122) і $T \in Ext_{T_{min}}$ – симетричне відношення (5.18);

(ВП3') система є U-визначеною;

(ВП4') $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 2 (3.138).

(ВП5') $M_4(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b]$ – оператор-функція, задана останньою рівністю в (5.136);

Нехай $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.113) і $R_{\dot{\tau}}(\cdot)$ – узагальнена резольвента відношення T, породжена граничною задачею (5.115) - (5.117) (див. теорему 5.23). Надалі будемо позначати через $\widetilde{T}_{\dot{\tau}} (\in \widetilde{\mathrm{Self}}(T))$ розширення відношення T, що породжує $R_{\dot{\tau}}(\cdot)$.

Означення 6.47. Вкорочений граничний параметр $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b)$ вигляду (5.113) називається допустимим, якщо

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b}(\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot{C}_1(iy) = 0 \tag{6.103}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_4(iy)(\dot{C}_0(iy) - \dot{C}_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot{C}_0(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_b = 0 \tag{6.104}$$

Твердження 6.48. *Нехай за припущень* (ВП1') - (ВП5') $\dot\tau \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b)$ – вкорочений граничний параметр. Тоді для справедливості включення $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ необхідно і достатньо, щоб параметр $\dot\tau$ був допустимим.

Доведення. Нехай $\dot\Pi = \{\dot{\mathcal{H}}_0 \oplus \mathcal{H}_b, \dot\Gamma_0, \dot\Gamma_1\}$ – гранична трійка (5.109), (5.110) для T^* і $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{C}_0(\lambda), \widetilde{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \mathcal{H}_b)$ – голоморфна операторна пара (5.114). Як відзначалося в доведенні теореми 5.23, гранична задача (5.115) - (5.117) еквівалентна абстрактній граничній задачі (5.118), (5.119) для трійки $\dot\Pi$. Тому внаслідок теореми 2.53, (2) включення $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ має місце тоді й тільки тоді, коли вірними є рівності

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} P_{\dot{\mathcal{H}}_0,\mathcal{H}_b}(\widetilde{C}_0(iy) - \widetilde{C}_1(iy)\dot{M}_+(iy))^{-1}\widetilde{C}_1(iy) = 0 \tag{6.105}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} \dot{M}_+(iy)(\widetilde{C}_0(iy) - \widetilde{C}_1(iy)\dot{M}_+(iy))^{-1}\widetilde{C}_0(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_b = 0, \tag{6.106}$$

де $\dot{M}_+(\cdot)$ – функція Вейля трійки $\dot\Pi$. згідно з твердженням 5.25, (3) $\dot{M}_+(\lambda)$ має вигляд (5.138) і внаслідок (5.147)

$$(\widetilde{C}_0(\lambda) - \widetilde{C}_1(\lambda)\dot{M}_+(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} I_{\widehat{H}} & 0 \\ * & (\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Крім того,

$$P_{\dot{\mathcal{H}}_0,\mathcal{H}_b} = (0,\, P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}) : \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathcal{H}_b, \qquad \widetilde{C}_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{C}_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_b \end{pmatrix} : \mathcal{H}_b \to \widehat{H} \oplus \mathcal{K}$$

і баезпосередній підрахунок дає

$$P_{\dot{\mathcal{H}}_0,\mathcal{H}_b}(\widetilde{C}_0(\lambda) - \widetilde{C}_1(\lambda)\dot{M}_+(\lambda))^{-1}\widetilde{C}_1(\lambda) = P_{\widetilde{\mathcal{H}}_b,\mathcal{H}_b}(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda),$$
$$\dot{M}_+(\lambda)(\widetilde{C}_0(\lambda) - \widetilde{C}_1(\lambda)\dot{M}_+(\lambda))^{-1}\widetilde{C}_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_b = M_4(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_0(\lambda) \upharpoonright \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси випливає, що (6.105) та (6.106) еквівалентні умовам (6.103) та (6.104). ☐

В наступній теоремі наведено формули для обчислення вкорочених псевдоспектральних функцій спеціального вигляду безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра.

Теорема 6.49. *Нехай за припущень (ВП1') – (ВП5')* $\widetilde{U}$ *– J-унітарне розширення* (3.120) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (3.121). *Крім того, нехай $M_+(\cdot)$ – оператор-функція* (5.134) - (5.136). *Тоді для кожного допустимого вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ вигляду* (5.113) *рівності*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.107}$$

$$N_{\dot\tau}(\lambda) = N_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)N_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.108}$$

$$\sigma_{\dot\tau 1}(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im} m_{\dot\tau}(u+i\varepsilon)\,du \tag{6.109}$$

$$\sigma_{\dot\tau 2}(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta}^{s-\delta} N_{\dot\tau}(u+i\varepsilon)\,du \tag{6.110}$$

$$\sigma_{\dot\tau}(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{\dot\tau 1}(s) & \sigma_{\dot\tau 2}(s) \\ \sigma^*_{\dot\tau 2}(s) & \frac{1}{2\pi} s I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{6.111}$$

задають вкорочену псевдоспектральну функцію $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ системи (3.5) *(відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$).*

Доведення. Нехай $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\mathrm{Self}_0}(T)$ – розширення, що відповідає параметру $\dot\tau$ згідно з твердженням 6.48, й $F_{\dot\tau}(\cdot)$ – спектральна функція відношення T, породжена цим розширенням. Крім того, нехай $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ – m-функція системи (3.5) й $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ – функція розподілу, визначена рівністю (6.64) з $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ замість $m_{\dot\tau}(\cdot)$. Покажемо, що вірним є співвідношення (6.65) (ми даємо лише нарис доведення цього факту за тих самих причин, що і в доведенні частини 1 теореми 6.16).

З твердження 5.29 випливає, що функція Гріна (5.168) допускає зображення

$$G_{\dot\tau}(x,t,\lambda) = \varphi_U(x,\lambda)\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda)\varphi_U^*(t,\overline{\lambda}) + G_0(x,t,\lambda), \tag{6.112}$$

де $G_0(x,t,\lambda)$ – ціла функція змінної λ, така що $G_0^*(x,t,\lambda) = G_0(t,x,\overline{\lambda})$. Нехай $\widehat{f}_0(\cdot)$ – ціла функція, визначена рівністю

$$\widehat{f}_0(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тоді внаслідок (5.169) та (6.112) узагальнена резольвента $R_{\dot\tau}(\cdot)$ задовільняє рівності

$$(R_{\dot\tau}(\lambda)\widetilde{f},\widetilde{f}) = (\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda)\widehat{f}_0(\lambda),\widehat{f}_0(\overline{\lambda})) + S(\lambda), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $S(\cdot)$ – деяка неперервна функція на $\mathbb{C}$ з дійсними значеннями на $\mathbb{R}$. Тому внаслідок (2.8) для кожного скінченного інтервалу $[\alpha,\beta)$ маємо

$$((F_{\dot\tau}(\beta) - F_{\dot\tau}(\alpha))\widetilde{f},\widetilde{f}) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\delta}^{\beta-\delta} \mathrm{Im}(\widetilde{m}_{\dot\tau}(u+i\varepsilon)\widehat{f}_0(u+i\varepsilon),\widehat{f}_0(u-i\varepsilon))\,du.$$

Застосовуючи тепер формулу обернення Лівшица - Стільт'єса [17, 48], виводимо (6.65).

З твердження 6.36 випливає, що $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ є вкороченою псевдоспектральною функцією. Крім того, комбінуючи (6.64) з (5.152) та (5.156), (5.157), отримуємо рівності (6.107) - (6.111). ☐

В наступній теоремі характеризуються деякі властивості спектра розширення $\widetilde{T}_{\dot\tau}$.

Теорема 6.50. *Нехай за припущень* (ВП1') - (ВП5') $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр,* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *– відповідна вкорочена псевдоспектральна функція* (6.111) *і* $V_{0,\sigma} \in [\mathfrak{H}_0, L^2(\sigma;H_0)]$ *– ізометрія* (6.60)*. Тоді:*

(1) *Існує унітарне розширення* $\widetilde{V} \in [\widetilde{\mathfrak{H}}_0, L^2(\sigma;H_0)]$ *оператора* $V_{0,\sigma}$*, таке що оператори* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *(операторна частина відношення* $\widetilde{T}_{\dot\tau}$*) та оператор множення* Λ_σ *в* $L^2(\sigma;H_0)$ *унітарно еквівалентні за допомоги* $\widetilde{V}$*.*

(2) *Справедливі рівності*

$$\mathrm{spec}_{ac}(\widetilde{T}_{0,\dot\tau}) = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{spec}_s(\widetilde{T}_{0,\dot\tau}) = S_s(\sigma_{\dot\tau 1}), \tag{6.113}$$

де $\sigma_{\dot\tau 1}(\cdot)$ *–* $[H]$*-значна функція розподілу* (6.109) *і* $S_s(\sigma_{\dot\tau 1}) \subset \mathbb{R}$ *– множина, визначена в* (2.10)*.*

Доведення. (1) В процесі доведення теореми 6.49 було показано, що спектральна функція $F_{\dot\tau}(\cdot)$ відношення T, породжена розширенням $\widetilde{T}_{\dot\tau}$, задовільняє (6.65). Крім того, оскільки система є U-визначеною, то згідно з твердженням 6.34 оператор Λ_σ є L_0-мінімальним (тут $L_0 = V_\sigma\mathfrak{H}$). Тому внаслідок твердження 6.35 справедливе твердження (1) теореми.

(2) Нехай $\sigma_{ac}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$ і $\sigma_{1,ac}(\cdot)$, $\sigma_{1,s}(\cdot)$ – абсолютно неперервна та сінгулярна частини функцій розподілу $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ і $\sigma_{\dot\tau 1}(\cdot)$ відповідно. Тоді внаслідок (6.111) справедливі наступні блочні зображення:

$$\sigma_{ac}(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,ac}(s) & \sigma_{\dot\tau 2}(s) \\ \sigma^*_{\dot\tau 2}(s) & \frac{1}{2\pi} sI \end{pmatrix} \in [H \oplus \widehat{H}], \qquad \sigma_s(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,s}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in [H \oplus \widehat{H}]$$

Звідси внаслідок твердження (1) та теореми 2.14 випливає (6.113). □

Наслідок 6.51. *Нехай за припущень* (ВП1') - (ВП5') $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр,* $E(\cdot)$ *– ортогональна спектральна міра оператора* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *і* $E_s(\cdot)$ *– сінгулярна частина міри* $E(\cdot)$. *Тоді:*

(1) *Кратність спектра оператора* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *(тобто, кратність міри* $E(\cdot)$*) не перевищує* $\nu + \widehat{\nu}(= \dim H_0)$.

(2) *Кратність сингулярного спектра оператора* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *(тобто, кратність ортогональної спектральної міри* $E_s(\cdot)$*) не перевищує* $\nu(= \dim H)$. *Тому кратність кожного власного значення* λ_0 *оператора* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *не перевищує* ν.

Зауваження 6.52. Якщо $\operatorname{mul} T = \{0\}$, то згідно з твердженням 6.33 множини вкорочених спектральних та псевдоспектральних функцій системи (3.5) (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$) збігаються і тому теореми 6.49 та 6.50 справедливі для вкорочених спектральних функцій (замість вкорочених псевдоспектральних функцій). У цьому випадку в теоремі 6.50 та наслідку 6.51 слід замінити $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ та $V_{0,\sigma}$ відповідно на $\widetilde{T}_{\dot\tau}$ та V_σ. Якщо ж $\operatorname{mul} T^* = \{0\}$ (і, отже, $\operatorname{mul} T = \{0\}$), то теореми 6.49, 6.50 та наслідок 6.51 є вірними для довільних вкорочених граничних параметрів $\dot\tau$, оскільки у цьому випадку кожний вкорочений граничний параметр є допустимим.

6.4.2. Випадок мінімальних індексів дефекту

Твердження 6.53. *Припустимо, що* $\delta = -1$ *і кінцева точка* a *є регулярною для системи* (3.5). *Тоді:* (1) *Мінімально можливими формальними індексами дефекта такої ситеми є*

$$N_+ = \nu + \widehat{\nu}, \qquad N_- = \nu.$$

(2) *Якщо* $N_- = \nu$, *то існує скінченновимірний гільбертів простір* $\widehat{\mathcal{H}}_b$ *і сюр'єктивний лінійний оператор* $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max} \to \widehat{\mathcal{H}}_b$, *такий що*

$$[y, z]_b = i(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z), \quad y, z \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}. \tag{6.114}$$

Доведення. Твердження (1) випливає з (3.153) та (3.4). Далі, якщо $N_- = \nu$, то $\nu_{b-} = 0$ і згідно з лемою 3.19 справедливе твердження (2) □

Твердження 6.54. *Припустимо, що:*

1) *кінцева точка* a *є регулярною для системи* (3.5), $\delta = -1$ *і* $N_- = \nu$ *(тобто формальний індекс дефекту* N_- *набуває мінімального значення);*

2) U – *оператор* (5.1), *що задовільняє* (5.2) - (5.4), *і* $\widehat{\Gamma}_a$ *та* Γ_{1a} – *оператори* (3.122);

3) *система є* U*-визначеною;*

4) $\widehat{\mathcal{H}}_b$ – *скінченновимірний гільбертів простір і* $\widehat{\Gamma}_b : \mathrm{dom}\,\mathcal{T}_{max} \to \widehat{\mathcal{H}}_b$ – *сюр'єктивний оператор, що задовільняє* (6.114).

Тоді:

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H,\mathbb{H}]$ *та* $\widehat{\xi}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\widehat{H},\mathbb{H}]$ *системи* (3.5), *що задовільняють граничним умовам*

$$\begin{aligned} &\Gamma_{1a}\xi(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_a\xi(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_b\xi(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \\ &\Gamma_{1a}\widehat{\xi}(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}, \qquad \widehat{\Gamma}_b\widehat{\xi}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

(2) *Існує єдиний (допустимий) вкорочений граничний параметр* $\dot{\tau}_0 = \{I_{\widehat{\mathcal{H}}_b}, 0\}$ *і єдина (з точністю до самоспряженої адитивної константи) m-функція* $\widetilde{m}(\lambda) = m_{\dot{\tau}_0}(\lambda)$ *системи* (3.5). *Якщо* $\widetilde{U}$ – J*-унітарне розширення* (3.120) *оператора* U *і* Γ_{0a} – *оператор* (3.121), *то m-функція* $\widetilde{m}(\cdot)$ *задається рівністю*

$$\widetilde{m}(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & N(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.115}$$

(3) *Вкорочена псевдоспектральна фнкція* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}_0}$ *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*) задається рівностями*

$$\sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_1(s) & \sigma_2(s) \\ \sigma_2^*(s) & \frac{1}{2\pi}sI_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{6.116}$$

$$\sigma_1(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta}\mathrm{Im}\, m(u+i\varepsilon)\,du \tag{6.117}$$

$$\sigma_2(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta}^{s-\delta} N(u+i\varepsilon)\,du \tag{6.118}$$

(4) *Рівність* (5.18) *задає максимальне симетричне відношення* $T \in Ext_{T_{min}}$ *і тому існує єдине самоспряжене розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T)$. *Крім того, для оператора* $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}_0^*$ *(операторної частини відношення* $\widetilde{T}$*) справедливі теорема 6.50 та наслідок 6.51.*

Доведення. Внаслідок припущення 1) та (3.153) має місце випадок а2. Крім того, припущення 4) означає, що сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій

$$\widetilde{\mathcal{H}}_b = \widehat{\mathcal{H}}_b, \qquad \mathcal{H}_b = \{0\}, \qquad \Gamma_b = \widehat{\Gamma}_b (= \widetilde{\Gamma}_{0b}) \tag{6.119}$$

є b-граничним комплексом типу 2. Тому потрібні твердження випливають з тверджень 5.21, 5.24 і теорем 5.30, 6.49. □

Зауваження 6.55. Оскільки відношення T в твердженні 6.54, (4) є максимальним симетричним, то його операторна частина T_0 є максимальним симетричним оператором у просторі $\mathfrak{H}_0 (= \mathfrak{H} \ominus \mathrm{mul}\, T)$. Тому оператор $\widetilde{T}_0$ в твердженні 6.54, (4) є (єдиним) самоспряженим розширенням оператора T_0, тобто $\widetilde{T}_0 \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T_0)$.

Твердження 6.56. *Нехай надодаток до умов твердження 6.54* $N_+ = \nu + \widehat{\nu}$ *(тобто обидва формальні індекси дефекту* N_+ *та* N_- *є мінімальними). Тоді розділена гранична пара для* T_{max} *має вигляд* $\{(H \oplus \widehat{H}) \oplus H, \Gamma\}$, *де*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-\Gamma_{1a} y) \oplus (-i\widehat{\Gamma}_a y) \\ \Gamma_{0a} y \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{6.120}$$

і m-функція $\widetilde{m}(\cdot)$ *збігається з оператор-функцією* $\mathcal{M}(\cdot)$ *для цієї граничної пари (тут* $\mathcal{M}(\cdot)$ – *оператор-функція, визначена в наслідку 2.62, (2)).*

Доведення. Оскільки за умов твердження $\nu_{b+} = \nu_{b-} = 0$, то в формулах (3.139) - (3.141) $\mathcal{H}_b = \widetilde{\mathcal{H}}_b = \{0\}$ і рівність (3.147) дає (6.120). Далі, згідно з (5.134) - (5.136) функція Вейля розділеної граничної пари має блочне зображення

$$M_+(\lambda) = (\Gamma_{0a}\xi(\lambda), \, \Gamma_{0a}\widehat{\xi}(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \to H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.121}$$

Порявняння цієї рівності з (6.115) та (2.71) показує, що $\widetilde{m}_0(\cdot)$ збігається з оператор-функцією $\mathcal{M}(\cdot)$ для розділеної граничної пари. □

Зауваження 6.57. В роботі [78] було уведено "прямокутну"функцію Вейля-Тітчмарша $M_{TW}(\lambda)(\in [H \oplus \widehat{H}, H])$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, для симетричної системи (3.5) з мінімальними формальними індексвми дефекту $N_+ = \nu + \widehat{\nu}$ та $N_- = \nu$. Неважко показати, що функція $M_{TW}(\lambda)$ пов'язана з m-функцією $\widetilde{m}(\cdot)$ (див. (6.115)) рівністю

$$M_{TW}(\lambda) = (m(\lambda), \, N(\lambda)) : H \oplus \widehat{H} \to H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Це означає, що $M_{TW}(\lambda)$ збігається з функцією Вейля $M_+(\lambda)$ розділеної граничної пари (див. (6.121)).

6.5. Вкорочені псевдоспектральні та спектральні функції гамільтонових систем

6.5.1. Параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій гамільтонових систем

Очевидно, що для гамільтонової системи (3.5) перетворення фур'є $\widehat{f}_0(\cdot)$ вигляду (6.46) є H-значною функцією і вкорочена q-псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ є операторною $[H]$-значною функцією розподілу.

Нехай надодаток до припущень (ВП1') - (ВП5') система є гамільтоновою, тобто виконано такі припущення:

(ПГ1) Система (3.5) є гамільтоновою, кінцева точка a є регулярною і $N_+ \geq N_-$.

(ПГ2) U – оператор (5.9), що задовільняє (5.10), Γ_{1a} – оператор (3.162) і $T \in Ext_{T_{min}}$ – симетричне відношення (5.176).

(ПГ3) Система є U-визначеною.

(ПГ4) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 2 (3.138).

(ПГ5) $M_4(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b]$ – оператор-функція, задана 2-ю рівністю в (5.189).

Нехай за цих припущень $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.113), $R_{\dot\tau}(\cdot)$ – узагальнена резольвента відношення T, породжена граничною задачею (5.180), (5.181), і $\widetilde{T}_{\dot\tau}(\in \widetilde{\text{Self}}(T))$ – розширення відношення T, що породжує $R_{\dot\tau}(\cdot)$. Тоді згідно з твердженням 6.48 $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \widetilde{\text{Self}}_0(T)$ тоді й тільки тоді, коли параметр $\dot\tau$ є допустимим у сенсі означення 6.47.

Твердження 6.58. *Нехай за припущень*(ПГ1) - (ПГ5) $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр і* $F_{\dot\tau}(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T*, породжена розширенням* $\widetilde{T}_{\dot\tau}$*. Крім того, нехай* $\widetilde{U}$ *–* J*-унітарне розширення* (3.160) *оператора* U*,* Γ_{0a} *– оператор* (3.161) *і* $m_{\dot\tau}(\cdot)$ *–*m*-функція* (5.191) *системи* (3.5)*. Тоді функція розподілу* $\sigma_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{R} \to [H]$*, задана формулою обернення Стільтьєса* (6.64)*, є единою вкороченою псевдоспектральною функцією ситеми* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*), що задовільняє співвідношенню* (6.65)*.*

Доведення. В процесі доведення теореми 6.49 було показано, що $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ є вкороченою псевдоспектральною функцією, що задовільняє (6.65). Покажемо, далі, єдиність $\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$.

Нехай $\sigma(\cdot)$ – псевдоспектральна функця, яка також задовільняє (6.65). Згідно з теоремою 2.13 існує скалярна міра μ на борелівських множинах в $\mathbb{R}$ і функції $\Psi_j(\cdot) : \mathbb{R} \to [H],\ j \in \{1, 2\}$, такі що

$$\sigma_{\dot\tau}(\beta) - \sigma_{\dot\tau}(\alpha) = \int_{\delta'} \Psi_1(s)\, d\mu(s), \qquad \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = \int_{\delta'} \Psi_2(s)\, d\mu(s), \ \ \delta' = [\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \tag{6.122}$$

Нехай $\Psi(s) := \Psi_1(s) - \Psi_2(s)$ і μ_0 – міра Лебега. Позначимо також через $\mathcal{G}$ множину всіх функцій $\widehat{f}_0(\cdot) : \mathbb{R} \to H$, які допускають зображення (6.46) з деяким $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$. Аналогічно рівності (6.36) доводиться рівність

$$\Delta(t) \int_{\delta'} \varphi_U(t, s)\Psi(s)\widehat{f}_0(s)\, d\mu(s) = 0 \ \ (\mu_0 - \text{м.в. на } \mathcal{I}), \quad \widehat{f}_0 \in \mathcal{G}, \ \ \delta' = [\alpha, \beta).$$

Використовуючи цю рівність, так само як і в теремі 6.16 доводимо, що для кожного $\widehat{f}_0 \in \mathcal{G}$ існує борелівська множина $C_{\widehat{f}_0} \subset \mathbb{R}$, така що

$$\mu(\mathbb{R} \setminus C_{\widehat{f}_0}) = 0 \quad \text{та} \quad \mu_0(\{t \in \mathcal{I} : \Delta(t)\varphi_U(t, s)\Psi(s)\widehat{f}_0(s) \neq 0\}) = 0, \ \ s \in C_{\widehat{f}_0}. \tag{6.123}$$

Нехай $s \in C_{\widehat{f}_0}$ і $y = y(t) = \varphi_U(t, s)\Psi(s)\widehat{f}_0(s)$. Тоді y є розв'язком системи (3.5) і згідно з (6.123) $\Delta(t)y(t) = 0$ (μ_0- м.в. на $\mathcal{I}$). Тому $y \in \mathcal{N}$. Крім того, в силу (5.11)

$$y(a) = \begin{pmatrix} u_2^* \\ -u_1^* \end{pmatrix} \Psi(s)\widehat{f}_0(s)$$

і (5.10) дає рівність $\Gamma_{1a}y = 0$. Звідси внаслідок U-визначеності системи випливає, що $y = 0$ і, отже, $\Psi(s)\widehat{f}_0(s) = 0$. Таким чином, для кожного $\widehat{f}_0 \in \mathcal{G}$ існує борелівська множина $C_{\widehat{f}_0} \subset \mathbb{R}$, така що

$$\mu(\mathbb{R} \setminus C_{\widehat{f}_0}) = 0 \ \ \text{та} \ \ \Psi(s)\widehat{f}_0(s) = 0, \ \ s \in C_{\widehat{f}_0}. \tag{6.124}$$

Доведемо далі таке твердження:

(Т) для кожного $s \in \mathbb{R}$ та $h \in H$ існує функція $\widehat{f}_0(\cdot) \in \mathcal{G}$, така що $\widehat{f}_0(s) = h$.

Дійсно, нехай $s \in \mathbb{R}$, $h' \in H$ і $(\widehat{f}_0(s), h') = 0$ для кожної функції $\widehat{f}_0(\cdot) \in \mathcal{G}$. Покладемо $y = y(t) = \varphi_U(t,s)h'$. Тоді для кожного $\beta \in \mathcal{I}$ маємо

$$\widehat{f}_{0,\beta}(\cdot) := \int\limits_{[a,\beta]} \varphi_U^*(t,\cdot)\Delta(t)y(t)\,dt \in \mathcal{G}$$

і, отже,

$$0 = (\widehat{f}_{0,\beta}(s), h') = \int_{[a,\beta]} (\varphi_U^*(t,s)\Delta(t)y(t), h')\,dt = \int_{[a,\beta]} (\Delta(t)y(t), y(t))\,dt, \quad \beta \in \mathcal{I}.$$

Звідси випливає, що $y \in \mathcal{N}$. Крім того, згідно з (5.11) та (5.10) $\Gamma_{1a}y = 0$ і внаслідок U-визначеності системи $y = 0$. Тому $h' = 0$, що доводить твердження (T).

Далі спираючись на (6.124) та твердження (T) із використанням тих самих міркувань, що і в доведенні теореми 6.16, отримуємо рівність $\Psi(s) = 0$ (μ-м.в. на $\mathbb{R}$). Таким чином, $\Psi_1(s) = \Psi_2(s)$ (μ-м.в. на $\mathbb{R}$) і внаслідок (6.122) $\sigma_{\dot\tau}(s) = \sigma(s)$. ☐

У наступній теоремі дається параметризація всіх вкорочених псевдоспектральних функцій U-визначеної гамільтонової системи безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра (тобто, розділених граничних умов).

Теорема 6.59. *Нехай за припущень (ПГ1) - (ПГ5)* $\widetilde{U}$ *– J-унітарне розширення* (3.160) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (3.161). *Крім того, нахай* $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (5.187) - (5.189). *Тоді рівність*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_2(\lambda)(\dot C_0(\lambda) - \dot C_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot C_1(\lambda)M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \qquad (6.125)$$

сумісно з формулою (6.64) *задає бієктивну відповідність між усіма допустимими вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ *вигляду* (5.113) *і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *гамільтонової системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

Доведення. З тверджень 6.58, 6.34 і 6.35 випливає, що формула обернення Стільт'єса (6.64) задає бієктивну відповідність між усіма допустимими вкороченими граничними параметрами $\dot\tau$ і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ системи (3.5) (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$). Звідси та з теореми 5.44 випливає потрібне твердження. ☐

Наступна теорема випливає з теореми 6.59 та тверджень 6.34, 6.35.

Теорема 6.60. *Нехай виконано припущення* (ПГ1) - (ПГ3). *Тоді існує бієктивна відповідність* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\widetilde{T}}(\cdot)$ *між усіма розширеннями* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ *відношення* T *і усіма вкороченими псевдоспектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ *гамільтонової системи (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*). Ця відповідність задається рівністю* (6.61), *в якій* $F(\cdot)$ *– спектральна функція відношення* T*, породжена розширенням* $\widetilde{T}$*. Крім того, оператори* $\widetilde{T}_0$ *(операторна частина відношення* $\widetilde{T}$*) та оператор множення* $\Lambda_{\sigma_{\widetilde{T}}}$ *в просторі* $L^2(\sigma_{\widetilde{T}}; H)$ *унітарно еквівалентни. Звідси випливає, що для кожного розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}_0(T)$ *кратність спектра оператора* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* $\nu(= \dim H)$*.*

Наслідок 6.61. *Нехай за припущень* (ПГ1) - (ПГ5) $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр,* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *– вкорочена псевдоспектральна функція системи* (3.5) *і* $V_{0,\sigma} \in [\mathfrak{H}_0, L^2(\sigma; H)]$

– *відповідна ізометрія* (6.60). *За цих припущень* $V_{0,\sigma}$ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $N_+ = N_-$ *і* $\dot\tau$ *є самоспряженим вкороченим граничним параметром* (5.179). *Якщо ця умова виконана, то розділені граничні умови* (5.185) *задають розширення* $\widetilde{T}_{\dot\tau} \in \text{Self}_0(T)$ *і оператори* $\widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *(операторна частина* $\widetilde{T}_{\dot\tau}$*) та* Λ_σ *унітарно еквівалентні за допомоги* $V_{0,\sigma}$*.*

Доведення. Перше твердження є наслідком твердження 6.35 та теореми 5.37. Друге твердження випливає з теорем 5.37 та 6.60. □

У наступнопу твердженні дається критерій, що дозволяє описувати усі вкорочені псевдоспектральні функції гамільтонових систем в термінах довільного (необов'язково допустимого) вкороченого граничного параметра.

Твердження 6.62. *За припущень* (ПГ1) - (ПГ5) *наступні твердження еквівалентні:*

(1) *Кожний вкорочений граничний параметр* $\dot\tau$ *є допустимим.*

(2) *Справедливі рівності*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_4(iy) \upharpoonright \mathcal{H}_b = 0 \tag{6.126}$$

$$\lim_{y\to+\infty} y \left(\text{Im}(M_4(iy)h,h)_{\widetilde{\mathcal{H}}_b} + \tfrac{1}{2}||P_2 h||^2\right) = +\infty, \quad 0 \neq h \in \widetilde{\mathcal{H}}_b, \tag{6.127}$$

де P_2 *– ортопроектор в* $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ *на* $\mathcal{H}_2 = \widetilde{\mathcal{H}}_b \ominus \mathcal{H}_b$*.*

(3) $\text{mul}\, T = \text{mul}\, T^*$*, тобто виконана умова* (У2) *в твердженні 5.36.*

(4) $\widetilde{\text{Self}}(T) = \widetilde{\text{Self}}_0(T)$.

(5) *Твердження теореми 6.59 є вірним для довільного вкороченого граничного параметра* $\dot\tau$*.*

Доведення. Нехай $\dot\Pi = \{\widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b, \dot\Gamma_0, \dot\Gamma_1\}$ – гранична трійка (5.178) для T^*. Тоді згідно з твердженням 5.39 функціця Вейля цієї трійки збігається з $M_4(\cdot)$. Звідси внаслідок теореми 2.49, (2) та зауваження 2.50, (2) випливає еквівалентність (2)⇔ (3). Інші еквівалентності доводяться так само, як і в твердженні 6.44. □

Зауваження 6.63. Якщо $N_+ = N_-$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b$, $M_4(\cdot) \in R[\mathcal{H}_b]$ і умови (6.126), (6.127) приймають простіший вигляд:

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy} M_4(iy) = 0, \qquad \lim_{y\to+\infty} y \cdot \text{Im}(M_4(iy)h,h) = +\infty, \quad 0 \neq h \in \mathcal{H}_b.$$

З результатів цього пункту та твердження 6.33 випливає така теорема.

Теорема 6.64. *Нехій виконано припущення* (ПГ1) - (ПГ3)*. У цьому випадку множина вкорочених спектральних функцій гамільтонової системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*) є непорожньою тоді й тільки тоді, коли* $\text{mul}\, T = \{0\}$ *або ж, еквівалентно, коли виконується умова (У1) в твердженні 5.36. Якщо ця умова виконана, то множини вкорочених спектральних та псевдоспектральних функцій системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*) збігаються і тому теореми 6.59, 6.60, твердження 6.62 та наслідок 6.61 справедливі для вкорочених спектральних функцій (замість* *вкорочених псевдоспектральних). У цьому випадку розділені граничні умови* (5.185) *задають оператор* $\widetilde{T}_{\dot\tau}$ *і твердження теореми 6.60 та наслідку 6.61 є вірними з* $\widetilde{T} = \widetilde{T}_{\dot\tau}$ *та* V_σ *замість* $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}_{0,\dot\tau}$ *та* $V_{0,\sigma}$ *відповідно. Крім того, у цьому випадку твердження* (3) *в твердженні 6.62 приймає такий вигляд:*

(3') $\operatorname{mul} T^* = \{0\}$, *тобто виконується умова* (У3) *в твердженні 5.36.*

6.5.2. Випадок квазірегулярної системи

Припустимо, що гамільтонова система (3.5) з регулярною кінцевою точкою a є квазірегулярною. Крім того, нехай U – оператор (5.9), що задовільняє (5.10). Тоді рівність (6.46) задає неперервну функцію $\widehat{f}_0(\cdot) : \mathbb{R} \to H$ для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$.

Припустимо, далі, що Γ_{1a} – оператор (3.162) і $T \in Ext_{T_{min}}$ – симетричне відношення (5.176).

Твердження 6.65. *Припустимо, що* L_0 *– лінійний многовид в* $\mathfrak{H}$, *визначений рівністю*

$$L_0 = \{\widetilde{f} \in \mathfrak{H} : \widehat{f}_0(s) = 0,\ s \in \mathbb{R}\}. \tag{6.128}$$

Тоді справедлива рівність

$$\operatorname{mul} T = L_0 \tag{6.129}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{f} \in \operatorname{mul} T$ і $f(\cdot) \in \widetilde{f}$. Тоді згідно з твердженням 5.4, (2) існує функція $y \in AC(\mathcal{I}; H \oplus H)$, така що $\{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}$ і справедливі співвідношення (5.20). Для фіксованих $s \in \mathbb{R}$ та $h \in H$ покладемо $z = z(t) = \varphi_U(t, s)h$. Тоді $\{z, sz\} \in \mathcal{T}_{max}$ і застосування тотожності Лагранжа (3.22) до $\{y, f\}$ та $\{z, sz\}$ дає

$$(f, z)_\Delta - s(y, z)_\Delta = [y, z]_b - (Jy(a), z(a)). \tag{6.130}$$

Тут

$$(f, z)_\Delta = \int_{\mathcal{I}} (\Delta(t) f(t), \varphi_U(t, s)h)\, dt = \left(\int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t, s)\Delta(t) f(t)\, dt, h \right) = (\widehat{f}_0(s), h)$$

і з огляду на першу рівність в (5.20) маємо $(y, z)_\Delta = 0$. Крім того, згідно з (5.20) $\Gamma_{1a} y = 0$ і в силу (5.12) $\Gamma_{1a} z = 0$, що внаслідок (3.164) дає $(Jy(a), z(a)) = 0$. Відзначимо також. що згідно з (5.20) $[y, z]_b = 0$. Тому (6.130) дає $(\widehat{f}_0(s), h) = 0,\ s \in \mathbb{R},\ h \in H$, і, отже, $\widehat{f}_0(s) = 0,\ s \in \mathbb{R}$. Таким чином $\widetilde{f} \in L_0$, що доводить включення $\operatorname{mul} T \subset L_0$. З іншого боку, для кожної вкороченої псевдоспектральної функції $\sigma(\cdot)$ маємо $L_0 \subset \ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$. Тому справедлива рівність (6.129). □

Очевидно, що за наведених перед твердженням 6.65 умов означення 6.26, 6.31 та 6.32 можна переформулювати наступним чином.

Означення 6.66. Функція розподілу $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \to [H]$ називається вкороченою q-псевдоспектральною функцією квазірегулярної гамільтонової системи (3.5) (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$), якщо $\widehat{f}_0 \in \mathcal{L}^2(\sigma; H)$ для кожного $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}$ і рівність $V\widetilde{f} := \pi_\sigma \widehat{f}_0,\ \widetilde{f} \in \mathfrak{H}$, задає часткову ізометрію (перетворення Фур'є) $V = V_\sigma \in [\mathfrak{H}, \mathcal{L}^2(\sigma; H)]$.

Означення 6.67. Вкорочена q-псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ квазірегулярної гамільтонової системи називається вкороченою псевдоспектральною (спектральною) функцією, якщо $\ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$ (відп. $\ker V_\sigma = \{0\}$).

Зауваження 6.68. Внаслідок (6.129) умову $\ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$ в означенні 6.67 можна замінити умовою $\ker V_\sigma = L_0$. Тому у випадку каноничної регулярної гамільтонової системи (5.218) наше означення (вкороченої) псевдоспектральної функції збігається з означенням, уведеним для таких систем в [43, 114, 53].

Наступне твердження має місце для довільних (необов'язково квазірегулярних) гамільтонових систем.

Твердження 6.69. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для гамільтонової системи (3.5). Крім того, нехай $\widetilde{\sigma}(\cdot) : \mathbb{R} \to [H]$ – функція розподілу, яка для кожного відрізку $\mathcal{I}_\beta = [a, \beta] \subset \mathcal{I}$ є вкороченою псевдоспектральною функцією (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$) для звуження системи на $\mathcal{I}_\beta$. Тоді $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ є вкороченою псевдоспектральною функцією системи (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot, \lambda)$) в сенсі означення 6.31.*

Доведення. Для відрізку $\mathcal{I}_\beta = [a, \beta] \subset \mathcal{I}$ покладемо

$$\mathfrak{H}_\beta := \{\widetilde{f} \in \mathfrak{H} : \Delta(t) f(t) = 0 \ \text{ м.в. на } \ (\beta, b) \ \text{ для кожного } \ f(\cdot) \in \widetilde{f}\}$$

(надалі ми ототожнюємо $\mathfrak{H}_\beta$ з $L^2_\Delta(\mathcal{I}_\beta)$). Оскільки кожне $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ належить до $\mathfrak{H}_\beta$ із деяким $\beta \in \mathcal{I}$, рівність (6.46) з $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$ задає функцію $\widehat{f}_0(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\widetilde{\sigma}; H)$, таку що $||\widehat{f}_0|| \le ||\widetilde{f}||$. Тому оператор $V\widetilde{f} = \pi_{\widetilde{\sigma}} \widehat{f}_0(\cdot)$, $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}'$, допускає продовження до стиску $V \in [\mathfrak{H}, L^2(\widetilde{\sigma}; H)]$. Нехай $L_{0,\beta} \subset \mathfrak{H}_\beta$ – підпростір (6.128) для звуження системи на $\mathcal{I}_\beta$, $L_0 = \bigcup\limits_{\beta \in \mathcal{I}} L_{0,\beta}$ і $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \ominus L_0$.Припустимо, що $\widetilde{f} \in \mathfrak{H}_0$, $f(\cdot) \in \widetilde{f}$ й нехай $\widetilde{f}_\beta = \pi_\Delta(f(\cdot)\chi_{\mathcal{I}_\beta}(\cdot))$, $\beta \in \mathcal{I}$, де $\chi_{\mathcal{I}_\beta}(\cdot)$ – індікатор відрізку $\mathcal{I}_\beta$. Тоді $\widetilde{f}_\beta \in \mathfrak{H}_\beta \ominus L_{0,\beta}$ і згідно зауваженню 6.68 $||V\widetilde{f}_\beta|| = ||\widetilde{f}_\beta||$. Тому перехід до границі за умови $\beta \to b$ дає $||V\widetilde{f}|| = ||\widetilde{f}||$. Крім того, для кожних $\beta \in \mathcal{I}$ та $\widetilde{f} \in L_{0,\beta}$ маємо $V\widetilde{f} = 0$ і, отже, $V\widetilde{f} = 0$, $\widetilde{f} \in \overline{L}_0$. Звідси випливає, що V є частковою ізометрією з $\ker V = \overline{L}_0$ і, отже, $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ є вкороченою q- псевдоспектральною функцією системи (3.5). Тому згідно з теоремою 6.30 $\operatorname{mul} T \subset \overline{L}_0$. З іншого боку, для кожної вкороченої псевдоспектральної функції $\sigma(\cdot)$ системи (3.5) і для кожного $\beta \in \mathcal{I}$ маємо $L_{0,\beta} \subset \ker V_\sigma = \operatorname{mul} T$, так що $\overline{L}_0 \subset \operatorname{mul} T$. Таким чином, $\ker V = \overline{L}_0 = \operatorname{mul} T$ і, отже, $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ є вкороченою псевдоспектральною функцією. □

Зауваження 6.70. В монографії Д.З. Арова та Г. Дима [53] псевдоспектральна функція каноничної гамільтонової системи з регулярною кінцевою точкою визначається як операторна функція розподілу $\widetilde{\sigma}(\cdot)$, що задовільняє умовам твердження 6.69. Відзначимо, що необхідною умовою існування такої псевдоспектральної функції $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ є співвідношення

$$\mathfrak{H}_{\beta_1} = (\mathfrak{H}_{0,\beta_2} \cap \mathfrak{H}_{\beta_1}) \oplus (L_{0,\beta_2} \cap \mathfrak{H}_{\beta_1}), \quad \beta_1 < \beta_2, \tag{6.131}$$

де $\mathfrak{H}_\beta$ та $L_{0,\beta}$ ті ж самі, що і в доведенні твердження 6.69, і $\mathfrak{H}_{0,\beta} = \mathfrak{H}_\beta \ominus L_{0,\beta}$, $\beta \in \mathcal{I}$. В той же час умова (6.131) не є достатньою для існування функції $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ (декілька достатніх умов можна знайти в [53]). Якщо умова (6.131) не виконується, то псевдоспектральна функція $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ не існує навіть для регулярної системи. Поруч з тим (вкорочена) псевдоспектральна функція $\sigma(\cdot)$ в сенсі означення 6.31 існує для кожної гамільтонової системи з регулярною кінцевою точкою. Крім того, згідно з твердженням 6.69

кожна псевдоспектральна функція $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ в сенсі [53] є (вкороченою) псевдоспектральною функцією в сенсі нашего означення. Тому функція $\sigma(\cdot)$ уявляється більш загальним та зручним об'єктом, ніж $\widetilde{\sigma}(\cdot)$.

В наступній теоремі показано, що у випадку квазірегулярної гамільтонової системи параметризація вкорочених псевдоспектральних функцій в теоремі 6.59 допускає дещо інше зображення.

Теорема 6.71. *Нехай виконано припущення теореми 5.50. Тоді рівність*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = (\dot C_0(\lambda)\dot w_1(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda))^{-1}(\dot C_0(\lambda)\dot w_2(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\dot w_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{6.132}$$

сумісно з формулою (6.64) *задає бієктивну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами $\dot\tau$ вигляду* (5.216), *що задовільняють умовам*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}\dot w_1(iy)(\dot C_0(iy)\dot w_1(iy) + \dot C_1(iy)\dot w_3(iy))^{-1}\dot C_1(iy) = 0 \tag{6.133}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}\dot w_3(iy)(\dot C_0(iy)\dot w_1(iy) + \dot C_1(iy)\dot w_3(iy))^{-1}\dot C_0(iy) = 0 \tag{6.134}$$

та усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ системи (3.5)*(відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$). Якщо, крім того,* $\operatorname{mul} T = \{0\}$, *то твердження теореми є вірним для спектральних функцій замість псевдоспектральних.*

*Д*оведення. За умов теореми умови доппустимості (6.103) та (6.104) приймають вигляд

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}(\dot C_0(iy) - \dot C_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot C_1(iy) = 0 \tag{6.135}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}M_4(iy)(\dot C_0(iy) - \dot C_1(iy)M_4(iy))^{-1}\dot C_0(iy) = 0 \tag{6.136}$$

З (5.212) випливає, що

$$M_4(\lambda) = -\dot w_3(\lambda)\dot w_1^{-1}(\lambda), \tag{6.137}$$

і тому умови (6.135), (6.136) еквівалентні умовам (6.133), (6.134). Крім того, згідно з теоремою 5.50 m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ допускає зображення (6.132). Звідси внаслідок теорем 6.59 та 6.64 випливають потрібні твердження. □

В наступній теоремі дається критерій, згідно якого умови (6.133) та (6.134) в теоремі 6.71 можна відкинути.

Теорема 6.72. *Нехай за припущень теореми 6.71*

$$\chi(\lambda) = (i\dot w_3^*(\overline{\lambda}) + \dot w_1^*(\overline{\lambda}))^{-1}(i\dot w_3^*(\overline{\lambda}) - \dot w_1^*(\overline{\lambda})), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.138}$$

Тоді наступні твердження еквівалентні:

(1) *Кожний вкорочений граничний параметр $\dot\tau$ задовільняє* (6.133), (6.134).

(2) *Справедливі рівності*

$$\lim_{y\to+\infty} \tfrac{1}{iy}\dot w_3(iy)\dot w_1^{-1}(iy) = 0, \qquad \lim_{y\to+\infty} y\cdot \operatorname{Im}(\dot w_3(iy)\dot w_1^{-1}(iy)h,h) = -\infty, \quad 0 \neq h \in H.$$

(3) $\lim\limits_{y\to+\infty} y(||h|| - ||\chi(iy)h||) = +\infty, \quad 0 \neq h \in H.$

(4) *Твердження теореми 6.71 є вірними для довільного вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ (тобто умови* (6.133) *та* (6.134) *в цій теоремі можна відкинути).*

Доведення. Еквівалентність (1)$\Leftrightarrow$ (2) є наслідком твердження 6.62, зауваження 6.63 та рівності (6.137). Еквівалентність (1)$\Leftrightarrow$ (4) випливає з теореми 6.71. Далі, внаслідок (5.212)

$$\dot{w}_1^*(\overline{\lambda}) = M_2^{-1*}(\overline{\lambda}), \qquad \dot{w}_3^*(\overline{\lambda}) = -M_2^{-1*}(\overline{\lambda})M_4(\lambda)$$

і тому (6.138) допускає зображення

$$\chi(\lambda) = (M_4(\lambda)+iI)^{-1}(M_4(\lambda)-iI) = (M_4(\lambda)-iI)(M_4(\lambda)+iI)^{-1}, \;\; \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{6.139}$$

Нехай $\dot{\Pi} = \{\mathcal{H}_b, \dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_1\}$ – гранична трійка (5.178) для T^*. Оскільки згідно з твердженням 5.39 $M_4(\lambda)$ є функцією Вейля трійки $\dot{\Pi}$, то з (6.139) і результатів роботи [30] випливає, що $\chi(\lambda)$ є характеристичною функцією відношення T в сенсі [49]. Тому згідно з [49, теорема 3.3] рівність $\operatorname{mul} T = \operatorname{mul} T^*$ еквівалентна умові (3). Звідси та з твердження 6.62 випливає, що умова (3) виконується тоді й тільки тоді, коли кожний вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ задовільняє (6.135), (6.136) або, еквівалентно, умовам (6.133) та (6.134). Таким чином, доведено еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (3). □

Наслідок 6.73. *Нехай за припущень твердження 5.53 U – оператор* (5.221) *і виконано хоча б одну (і тому кожну) з умов* (1) - (4) *цього твердження. Тоді:*

(1) *Рівність* (6.132) *сумісно з формулою* (6.64) *задає бієктивну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами $\dot{\tau}$ вигляду* (5.216)*, що задовільняють умовам допустимості* (6.133)*,* (6.134)*, та усіма вкороченими псевдоспектральними функціями $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ канонічної гамільтонової системи* (5.218) *(відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$).*

(2) *Якщо, крім того, існує позитивна константа $\gamma < 1$, така що оператор-функція $\chi(\lambda)$ вигляду* (6.138) *задовільняє нерівності*

$$||\chi(iy)|| \le \gamma, \quad y>0, \tag{6.140}$$

то умови (6.133) *та* (6.134) *можна пропустити.*

Доведення. Як було відзначено в процесі доведення твердження 5.53, умова (1) цього твердження еквівалентна U-визначеності системи (5.218). Тому внаслідок теореми 6.71 вірним є твердження (1) наслідку. Далі, з умови (6.140) випливає твердження (3) теореми 6.72. Тому згідно цієї теореми вірним є твердження (2) наслідку. □

Зауваження 6.74. (1) Припустимо, що за умов твердження 5.53 канонична гамільтонова система (5.218) є регулярною. За допомоги твердження 5.4, (2) неважко довести, що у цьому випадку

$$\operatorname{mul} T = \{\widetilde{f}\in\mathfrak{H} : (I_H,\,0)y_{\widetilde{f}}(a)=0 \;\text{ та }\; \Delta(x)y_{\widetilde{f}}(x)=0 \;\text{ м.в. на }\; \mathcal{I}\}, \tag{6.141}$$

де $y_{\widetilde{f}}(\cdot)$ – $[H\oplus H]$-значна функція на $\mathcal{I}$, визначена для кожного $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}$ рівністю

$$y_{\widetilde{f}}(x) = J\int_x^b \Delta(t)f(t)\,dt, \quad f(\cdot)\in\widetilde{f}.$$

У зв'язку з цим відзначимо, що для регулярної канонічної системи рівність (6.129) з $\operatorname{mul} T$ вигляду (6.141) доведено в [114, Lemma A.18].

(2) Для регулярної каноничної гамільтонової системи (5.218) твердження (1) наслідку 6.73 іншими методами доведено в монографії А.Л. Сахновіча, Л.А. Сахновіча та І.Я. Ройтберг [114], а твердження (2) того ж наслідку – в монографії Д.З. Арова та Г. Дима [53]. Відзначимо, що в [114] умови допустимості для параметра $\tau = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ є складнішими, ніж умови (6.133), (6.134) (див. формулу (A.134) в [114]). Відзначимо також, що умова (3) теореми 6.72 є критерієм справедливості теореми 6.71 для довільного (необов'язково допустимого) граничного параметра $\dot\tau$ і ця умова слабкіше за умову (6.140).

6.5.3. Випадок мінімальних індексів дефекту

Наступне твердження є безпосереднім наслідком твердження 6.53.

Твердження 6.75. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для гамільтонової системи* (3.5). *Тоді:*

(1) *Мінімально можливими формальними індексами дефекту такої ситеми є*

$$N_+ = \nu, \qquad N_- = \nu.$$

(2) *Якщо $N_- = \nu$, то існує скінченновимірний гільбертів простір $\widehat{\mathcal{H}}_b$ і сюр'єктивний лінійний оператор $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \widehat{\mathcal{H}}_b$, що задовільняє* (6.114).

Твердження 6.76. *Припустимо, що:*

1') *система* (3.5) *є гамільтоновою, кінцева точка a є регулярною і $N_- = \nu$;*

2') *U – оператор* (5.9), *що задовільняє* (5.10), *і Γ_{1a} – оператор* (3.162);

3') *система є U-визначеною;*

4') *$\widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір і $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom}\mathcal{T}_{max} \to \widehat{\mathcal{H}}_b$ – сюр'єктивний оператор, що задовільняє* (6.114).

Тоді:

(1) *Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ існує єдиний операторний розв'язок $v_0(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, H\oplus H]$ системи* (3.5), *що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}v_0(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_b v_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

(2) *Існує єдиний (допустимий) вкорочений граничний параметр $\dot\tau_0 = \{I_{\widehat{\mathcal{H}}_b}, 0\}$ і єдина (з точністю до самоспряженої адитивної константи) m-функція $m_0(\lambda) = m_{\dot\tau_0}(\lambda)$ системи* (3.5). *Якщо $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення* (3.160) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (3.161), *то m-функція $m_0(\cdot)$ задається рівністю*

$$m_0(\lambda) = \Gamma_{0a}v_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{6.142}$$

(3) *Існує єдина вкорочена псевдоспектральна функція $\sigma_0(\cdot) = \sigma_{\dot\tau_0}$ системи* (3.5) *(відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$). Ця функція задається формулою обернення Стільт'єса*

$$\sigma_0(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta}\operatorname{Im} m_0(u+i\varepsilon)\,du. \tag{6.143}$$

(4) *Рівність* (5.176) *задає максимальне симетричне відношення* $T \in Ext_{T_{min}}$ *і тому існує єдине самоспряжене розширення* $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(T)$. *Крім того, оператор* $\widetilde{T}_0$ *(операторна частина відношення* $\widetilde{T}$*) та оператор множення* Λ_{σ_0} *в* $L^2(\sigma_0; H)$ *унітарно еквівалентні і тому кратність спектра оператора* $\widetilde{T}_0$ *не перевищує* $\nu (= \dim H)$.

Доведення. Очевидно, що умови 1') - 4') є частковим випадком умов 1) - 4) твердження 6.54 (за додаткового припущення $\widehat{\nu} = 0$). Тому потрібні твердження є наслідком твердження 6.54. ☐

У випадку рівних мінімальних індексів дефекту наведені вище твердження істотно спрощуються. Саме, наступний наслідок випливає безпосередньо з твердження 6.76.

Наслідок 6.77. *Припустимо, що для гамільтонової системи* (3.5) *кінцева точка a є регулярною,* $N_+ = N_- = \nu$ *і виконано припущення* 2') *та* 3') *твердження 6.76. Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдиний операторний розв'язок* $v_0(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[H, H \oplus H]$ *системи* (3.5), *що задовільняє умові* $\Gamma_{1a} v_0(\lambda) = -I_H$.

(2) *Якщо* $\widetilde{U}$ – J*-унітарне розширення* (3.160) *оператора* U *і* Γ_{0a} – *оператор* (3.161), *то єдина (з точністю до самоспряженої адитивної константи) m-функція* $m_0(\cdot)$ *задається рівністю* (6.142). *Крім того, справедливе твердження* (3) *твердження 6.76.*

(3) *Рівність*

$$T = \{\{\pi_\Delta y, \pi_\Delta f\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max}, \ \Gamma_{1a} y = 0\}$$

задає самоспряжене відношення $T \in Ext_{T_{min}}$. *Крім того, рівність* (6.60) *задає унітарний оператор* $V_{0,\sigma_0} \in [\mathfrak{H}_0, L^2(\sigma_0; H)]$ *і оператор* T_0 *(операторна частина відношення* T*) та оператор множення* Λ_{σ_0} *в* $L^2(\sigma_0; H)$ *унітарно еквівалентні за допомоги оператора* V_{0,σ_0}.

Твердження 6.78. *Нехай виконано умови твердження 6.76. Тоді:*

(1) *Розділена гранична пара для* T_{max} *має вигляд* $\{(H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b) \oplus H, \Gamma\}$, *де*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-\Gamma_{1a} y) \oplus \widehat{\Gamma}_b y \\ \Gamma_{0a} y \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\}, \tag{6.144}$$

і m-функція $m_0(\cdot)$ *збігається з оператор-функцією* $M(\cdot)$ *для цієї граничної пари (тут* $M(\cdot)$ – *оператор-функція, визначена в наслідку 2.62, (2)).*

(2) *Якщо крім того* $N_+ = N_- = \nu$ *(тобто обидва фрмальні індекси дефекту є мінімальними), то розділена гранична пара для* T_{max} *має вигляд* $\{H, \Gamma\}$, *де*

$$\Gamma = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \pi_\Delta y \\ \pi_\Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\Gamma_{1a} y \\ \Gamma_{0a} y \end{pmatrix} \right\} : \{y, f\} \in \mathcal{T}_{max} \right\},$$

і m-функція $m_0(\cdot)$ *збігається з функцією Вейля* $M(\cdot)$ *цієї пари.*

Доведення. За умов твердження справедливі рівності (6.119). Тому розділена гранична пара для T_{max}, визначена в теоремі 3.49, приймає вигляд $\{(H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b) \oplus H, \Gamma\}$, де відношення Γ задане рівністю (6.144). Крім того, згідно з (5.187) - (5.189) функція Вейля $M_+(\cdot)$ цієї пари має блочне зображення

$$M_+(\lambda) = (\Gamma_{0a} v_0(\lambda), \, \Gamma_{0a} u_+(\lambda)) : H \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \to H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Порявняння цієї рівності з (6.142) та (2.69) дає твердження (1). Твердження (2) є безпосереднім наслідком твердження (1). □

РОЗДІЛ 7

Характеристичні матриці граничних задач з розділеними граничними умовами

7.1. $\mathcal{L}^2_\Delta$-розв'язки граничних задач з розділеними граничними умовами

Лема 7.1. *Припустимо, що система* (3.5) *є визначеною,* $\delta = -1$ *і*

$$N_{r+} - N_{r-} = N_{l-} - N_{l+} = \widehat{\nu}. \tag{7.1}$$

Тоді існують скінченновимірні гільбертові простори $\mathcal{H}_a$ *та* $\mathcal{H}_b$ *і сюр'єктивні лінійні оператори* Γ_a *та* Γ_b *вигляду* (3.75) *та* (3.76)*, що задовільняють тотожностям* (3.77)*.*

Доведення. З (3.174) та (3.4) випливає, що за умови (7.1) справедливі рівності $\nu_{b_+} = \nu_{b-}$ та $\nu_{a_+} = \nu_{a-}$. Тому потрібне твердження є наслідком леми 3.19, (3) та зауваження 3.22. ☐

Надалі в межах цього розділу вважаються виконаними такі припущення:

(ПР1) $\delta = -1$ і вірним є співвідношення (7.1).

(ПР2) $Def_{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ і $c \in Def_{\mathcal{I}}$ – фіксована точка (див. означення 3.54).

(ПР3) $\mathcal{H}_a$ та $\mathcal{H}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори і Γ_a та Γ_b – лінійні оператори (3.75) та (3.76), що задовільняють тотожностям (3.77).

З припущення (ПР2) випливає, що система (3.5) є визначеною, і внаслідок (7.1) та (3.173) маємо $N_+ = N_-(\Leftrightarrow n_+(T_{min}) = n_-(T_{min}))$. Крім того, припущення (ПР3) означає, що сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, де $\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a$ та $\mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b$, є граничним комплексом в сенсі означення 3.20. Тому згідно з теоремою 3.31 скінченновимірний гільбертів простір $\mathcal{H}$ та оператори $\Gamma_j : T_{max} \to \mathcal{H},\ j \in \{0, 1\}$, визначені рівностями

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b \tag{7.2}$$

$$\Gamma_0\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = (-\Gamma_{1a}y) \oplus \Gamma_{0b}y (\in \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b) \tag{7.3}$$

$$\Gamma_1\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma_{0a}y \oplus (-\Gamma_{1b}y) (\in \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b), \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} \tag{7.4}$$

утворюють (розділену) звичайну граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для T_{max}.

Нехай $\mathcal{K}_a$ та $\mathcal{K}_b$ – допоможні скінченновимірні гільбертові простори і

$$\tau_a = \tau_a(\lambda) = \{C_{0a}(\lambda), C_{1a}(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_a), \qquad \tau_b = \tau_b(\lambda) = \{C_{0b}(\lambda), C_{1b}(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_b) \tag{7.5}$$

– пари голоморфних оператор-функцій $C_{ja}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_a, \mathcal{K}_a]$ та $C_{jb}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathcal{H}_b, \mathcal{K}_b]$, $j \in \{0, 1\}$. Тоді рівності

$$C_0(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{0a}(\lambda) & 0 \\ 0 & C_{0b}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}} \to \underbrace{\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b}_{\mathcal{K}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.6}$$

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{1a}(\lambda) & 0 \\ 0 & C_{1b}(\lambda) \end{pmatrix} : \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathcal{H}} \to \underbrace{\mathcal{K}_a \oplus \mathcal{K}_b}_{\mathcal{K}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.7}$$

задають граничий параметр

$$\tau = \tau(\lambda) = \{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}) \tag{7.8}$$

в сенсі означення 4.1.

Означення 7.2. Граничний параметр τ, визначений рівностями (7.5) - (7.8), називається розділеним граничним параметром для системи (3.5).

Якщо

$$\tau_a = \{C_{0a}, C_{1a}\} \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_a), \qquad \tau_b = \{C_{0b}, C_{1b}\} \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H}_b), \tag{7.9}$$

тобто τ_a та τ_b є самоспряженими операторними парами, то рівності (7.6) та (7.7) задають самоспряжений розділений граничний параметр $\tau = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{R}^0(\mathcal{H})$. Надалі використовується позначення $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ для розділеного граничного параметра τ, визначеного рівностями (7.5) - (7.8).

Нехай $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ – розділений граничний параметр. Тоді внаслідок теореми 4.2 гранична задача

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y + \Delta(t)f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{7.10}$$

$$C_{0a}(\lambda)\Gamma_{1a}y + C_{1a}(\lambda)\Gamma_{0a}y = 0, \quad C_{0b}(\lambda)\Gamma_{0b}y + C_{1b}(\lambda)\Gamma_{1b}y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.11}$$

породжує узагальнену разольвенту $R_\tau(\lambda)$ відношення T_{min}. Крім того, $R_\tau(\lambda)$ є каноничною резольвентою тоді й тільки тоді, коли параметр $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ є самоспряженим. У цьому випадку $R_\tau(\lambda) = (\widetilde{T}_\tau - \lambda)^{-1}$, де $\widetilde{T}_\tau \in \mathrm{Self}(T_{min})$ – розширення, визначене розділеними самоспряженими граничними умовами

$$\widetilde{T}_\tau = \{\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max} : C_{0a}\Gamma_{1a}y + C_{1a}\Gamma_{0a}y = 0, \quad C_{0b}\Gamma_{0b}y + C_{1b}\Gamma_{1b}y = 0\}.$$

Лема 7.3. (1) *Для кожної функції* $y_l \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l}$ *існує функція* $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, *така що* $y_l = y \restriction \mathcal{I}_l$. *Крім того, рівність* $G_a y_l = \Gamma_a y$, $y_l \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l}$, *коректно задає сюр'єктивний лінійний оператор*

$$G_a = \begin{pmatrix} G_{0a} \\ G_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \to \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a, \tag{7.12}$$

що задовільняє тотожності

$$[y_l, z_l]_a = (G_{0a}y_l, G_{1a}z_l) - (G_{1a}y_l, G_{0a}z_l), \quad y_l, z_l \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \tag{7.13}$$

(2) *Для кожної функції* $y_r \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}$ *існує функція* $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$, *така що* $y_r = y \restriction \mathcal{I}_r$. *Крім того, рівність* $G_b y_r = \Gamma_b y,\ y_r \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}$, *коректно задає сюр'єктивний лінійний оператор*

$$G_b = \begin{pmatrix} G_{0b} \\ G_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b, \tag{7.14}$$

що задовільняє тотожності

$$[y_r, z_r]_b = (G_{0b} y_r, G_{1b} z_r) - (G_{1b} y_r, G_{0b} z_r), \quad y_r, z_r \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}. \tag{7.15}$$

Доведення. Ми доведемо лише твердження (1), оскільки твердження (2) доводиться аналогічно.

Доведення існування потрібної функції $y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ міститься в доведенні леми 3.56. Припустимо, далі, що $y_l \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l},\ y_1, y_2 \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$ і $y_1 \restriction \mathcal{I}_l = y_2 \restriction \mathcal{I}_l = y_l$. Покладемо $y_3 = y_1 - y_2$. Тоді $y_3 \in \mathcal{D}_{0a}$ і внаслідок (3.71) $\Gamma_a y_3 = 0$. Тому $\Gamma_a y_1 = \Gamma_a y_2$ і, отже, оператор G_a є коректно визначеним. Крім того, внаслідок сюр'єктивності оператора Γ_a оператор G_a також є сюр'єктивним. Накінець, тотожність (7.13) випливає з (3.77). □

Нехай $\Gamma_c : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \cup \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r} \to \mathbb{H}$ – лінійний оператор, визначений рівністю

$$\Gamma_c y = y(c), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \cup \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}.$$

Очевидно, що оператор Γ_c допускає блочне зображаення

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} \Gamma_{0c} \\ \widehat{\Gamma}_c \\ \Gamma_{1c} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \cup \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r} \to H \oplus \widehat{H} \oplus H, \tag{7.16}$$

де $\Gamma_{jc},\ j \in \{0, 1\}$, та $\widehat{\Gamma}_c$ – оператори, визначені рівностями (див. (3.119))

$$\Gamma_{0c} y = y_0(c), \qquad \widehat{\Gamma}_c y = \widehat{y}(c), \qquad \Gamma_{1c} y = y_1(c), \quad y \in \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,l} \cup \operatorname{dom} \mathcal{T}_{\max,r}. \tag{7.17}$$

Зауваження 7.4. Нехай $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів протір і $Y_r(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r; [\mathcal{K}, \mathbb{H}])$ та $Y_l(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l; [\mathcal{K}, \mathbb{H}])$ – операторні розв'язки системи (3.5) відповідно на $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$. Припустимо, що

$$Y_r(c, \lambda) = \begin{pmatrix} Y_{r0}(c, \lambda) \\ \widehat{Y}_r(c, \lambda) \\ Y_{r1}(c, \lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{K} \to H \oplus \widehat{H} \oplus H, \qquad Y_l(c, \lambda) = \begin{pmatrix} Y_{l0}(c, \lambda) \\ \widehat{Y}_l(c, \lambda) \\ Y_{l1}(c, \lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{K} \to H \oplus \widehat{H} \oplus H$$

– блочні зображення операторів $Y_r(c, \lambda)$ та $Y_l(c, \lambda)$. Крім того, нехай $\mathcal{N}_{r\lambda}$ та $\mathcal{N}_{l\lambda}$ – простори (3.13) для звужень системи відповідно на $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$ і $Y_r(\lambda) : \mathcal{K} \to \mathcal{N}_{r\lambda}$ та $Y_l(\lambda) : \mathcal{K} \to \mathcal{N}_{l\lambda}$ – оператори, що відповідають розв'язкам $Y_r(\cdot, \lambda)$ та $Y_l(\cdot, \lambda)$ згідно з лемою 3.4. Тоді очевидними є рівності

$$\Gamma_{0c} Y_r(\lambda) = Y_{r0}(c, \lambda), \quad \widehat{\Gamma}_c Y_r(\lambda) = \widehat{Y}_r(c, \lambda), \quad \Gamma_{1c} Y_r(\lambda) = Y_{r1}(c, \lambda)$$
$$\Gamma_{0c} Y_l(\lambda) = Y_{l0}(c, \lambda), \quad \widehat{\Gamma}_c Y_l(\lambda) = \widehat{Y}_l(c, \lambda), \quad \Gamma_{1c} Y_l(\lambda) = Y_{l1}(c, \lambda).$$

Твердження 7.5. *Нехай за припущень (ПР1) - (ПР3)* G_a *та* G_b *– оператори* (7.12) *та* (7.14), *визначені в лемі 7.3, і* Γ_c *– оператор* (7.16), (7.17). *Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина трійка операторних розв'язків* $\xi_{0r}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[H,\mathbb{H}])$, $\widehat{\xi}_{0r}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[\widehat{H},\mathbb{H}])$ *та* $u_r(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[\mathcal{H}_b,\mathbb{H}])$ *ситеми* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_r$, *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_{0r}(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_c\xi_{0r}(\lambda) = 0, \qquad G_{0b}\xi_{0r}(\lambda) = 0 \tag{7.18}$$

$$\Gamma_{1c}\widehat{\xi}_{0r}(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_c\widehat{\xi}_{0r}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}, \qquad G_{0b}\widehat{\xi}_{0r}(\lambda) = 0 \tag{7.19}$$

$$\Gamma_{1c}u_r(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_c u_r(\lambda) = 0, \qquad G_{0b}u_r(\lambda) = I_{\mathcal{H}_b} \tag{7.20}$$

(2) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_{0l}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H,\mathbb{H}])$ *та* $u_l(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[\mathcal{H}_a,\mathbb{H}])$ *ситеми* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_l$, *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_{0l}(\lambda) = I_H, \qquad G_{1a}\xi_{0l}(\lambda) = 0 \tag{7.21}$$

$$\Gamma_{1c}u_l(\lambda) = 0, \qquad G_{1a}u_l(\lambda) = -I_{\mathcal{H}_a} \tag{7.22}$$

Доведення. (1) Розглянемо визначену систему

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y, \quad t \in \mathcal{I}_r = [c,b), \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{7.23}$$

з регулярною кінцевою точкою c, яка є звуженням ситсми (3.5) на $\mathcal{I}_r$. З (7.1) випливає, що для системи (7.23) виконано умову 1) твердження 5.21. Крім того, сукупність $\{\mathcal{H}_b, G_b\}$ є b-граничним комплексом типу 2 для цієї системи (див. зауваження 3.37). Тому справедливе таке твердження:

(T) Для системи (7.23) виконано умови твердження 5.21 з $a = c$, операторами $\widehat{\Gamma}_a = \widehat{\Gamma}_c \upharpoonright \operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,r}$ та $\Gamma_{1a} = \Gamma_{1c} \upharpoonright \operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,r}$ і b-граничним омплексом $\{\mathcal{H}_b, G_b\}$.

Тепер потрібне твердження (1) випливає з твердження 5.24.

(2) Розглянемо дві сиситеми

$$Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y, \quad t \in \mathcal{I}_l = (a,c], \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{7.24}$$

$$-Jy' + B(t)y = \lambda\Delta(t)y, \quad t \in \mathcal{I}_l, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7.25}$$

Перша з цих систем є звуженням системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$, а друга система є протилежною до першої. Оскільки система (7.24) є визначеною, то такою ж самою є система (7.25). Нехай $\mathcal{T}^-_{max}$ та T^-_{max} – максимальні відношення відповідно в $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l)$ та $L^2_\Delta(\mathcal{I}_l)$. породжені системою (7.25). Очевидно, що $\mathcal{T}^-_{max} = -\mathcal{T}_{\max,l}$, і тому

$$\operatorname{dom}\mathcal{T}^-_{max} = \operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,l} =: \mathcal{D}_{max}, \qquad \mathcal{N}_{l\lambda} = \mathcal{N}^-_{-\lambda}(\subset \mathcal{D}_{max}), \ \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7.26}$$

де $\mathcal{N}_{l\lambda}$ та $\mathcal{N}^-_\lambda$ – простори (3.13) для систем (7.24) та (7.25) відповідно. Неважко перевірити, що для системи (7.25) має місце випадок 2 (див. п. 3.4.2.) і оператори

$$G^-_a = \begin{pmatrix} -G_{0a} \\ G_{1a} \end{pmatrix} : \mathcal{D}_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a}, \qquad \Gamma^-_c = \begin{pmatrix} \Gamma_{1c} \\ i\widehat{\Gamma}_c \\ \Gamma_{0c} \end{pmatrix} : \mathcal{D}_{max} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus H}_{\mathbb{H}}$$

утворюють граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a, G_a^-; \mathbb{H}, \Gamma_c^-\}$. Нехай $\mathcal{H}_{0l}$ та $\mathcal{H}_{1l}$ – скінченновимірні гільбертові простори і $\Gamma'_{jl} : \mathcal{D}_{max} \to \mathcal{H}_{jl},\ j \in \{0,1\}$, – лінійні оператори, визначені рівностями

$$\mathcal{H}_{0l} = H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathcal{H}_{1l} = H \oplus \mathcal{H}_a \tag{7.27}$$

$$\Gamma'_{0l} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1c} \\ i\widehat{\Gamma}_c \\ -G_{1a} \end{pmatrix} : \mathcal{D}_{max} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathcal{H}_{0l}}, \qquad \Gamma'_{1l} = \begin{pmatrix} -\Gamma_{0c} \\ -G_{0a} \end{pmatrix} : \mathcal{D}_{max} \to \underbrace{H \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathcal{H}_{1l}}. \tag{7.28}$$

Тоді згідно з (3.84) - (3.86) і теореми 3.27 сукупність $\Pi^- = \{\mathcal{H}_{0l} \oplus \mathcal{H}_{1l}, \Gamma_{0l}, \Gamma_{1l}\}$ з операторами $\Gamma_{jl} : T_{max}^- \to \mathcal{H}_j,\ j \in \{0,1\}$, визначеними рівностями

$$\Gamma_{0l}\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_{0l}y, \qquad \Gamma_{1l}\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} = \Gamma'_{1l}y, \quad \{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in T_{max}^- \tag{7.29}$$

є граничною трійкою для T_{max}^-.

Надалі позначатимемо через P_{1l} та P_{2l} ортопроектори в $\mathcal{H}_{0l}$ відповідно на $\mathcal{H}_{1l}$ та $\mathcal{H}_{2l} := \mathcal{H}_{0l} \ominus \mathcal{H}_{1l}$. Застосовуючи лему 2.30 до граничної трійки Π_-, неважко показати, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ оператор $P_{1l}\Gamma'_{0l} \upharpoonright \mathcal{N}_{-\lambda}^-$ є ізоморфізмом $\mathcal{N}_{-\lambda}^-$ на $\mathcal{H}_{1l}$. Звідси та з другої рівності в (7.26) випливає, що рівність

$$Z(\lambda) = (P_{1l}\Gamma'_{0l} \upharpoonright \mathcal{N}_{l\lambda})^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

коректно задає ізоморфізм $Z(\lambda) : \mathcal{H}_{1l} \to \mathcal{N}_{l\lambda}$, такий що

$$P_{1l}\Gamma'_{0l}Z(\lambda) = I_{\mathcal{H}_{1l}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{7.30}$$

Нехай

$$Z(\lambda) = (\xi_{0l}(\lambda), u_l(\lambda)) : H \oplus \mathcal{H}_a \to \mathcal{N}_{l\lambda} \tag{7.31}$$

– блочне зображення оператора $Z(\lambda)$ і $\xi_{0l}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l; [H, \mathbb{H}])$ та $u_l(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l; [\mathcal{H}_a, \mathbb{H}])$ – операторні розв'язки системи (3.5) на $\mathcal{I}_l$, породжені згідно з лемою 3.4 операторами $\xi_{0l}(\lambda)$ та $u_l(\lambda)$. Тоді в силу (7.30) та (7.28)

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{1c} \\ -G_{1a} \end{pmatrix} (\xi_{0l}(\lambda), u_l(\lambda)) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{H}_a} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

звідки випливає (7.21) та (7.22). Єдиність розв'язків $\xi_{0l}(\cdot,\lambda)$ та $u_l(\cdot,\lambda)$ є наслідком ізоморфності оператора $P_{1l}\Gamma'_{0l} \upharpoonright \mathcal{N}_{l\lambda}$. □

Твердження 7.6. *Нехай за умов твердження 7.5* $\xi_{0r}(\cdot,\lambda)$, $\widehat{\xi}_{0r}(\cdot,\lambda)$, $u_r(\cdot,\lambda)$ *та* $\xi_{0l}(\cdot,\lambda)$, $u_l(\cdot,\lambda)$ *– операторні розв'язки, визначені в цьому твердженні. Тоді:*

(1) *Блочне зображення*

$$M_r(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{0r}(\lambda) & N_{0r}(\lambda) & M_{2r}(\lambda) \\ M_{3r}(\lambda) & N_{2r}(\lambda) & M_{4r}(\lambda) \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b \to H \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{7.32}$$

елементи якого визначаються рівностями

$$m_{0r}(\lambda)=\Gamma_{0c}\xi_{0r}(\lambda),\qquad N_{0r}(\lambda)=\Gamma_{0c}\widehat{\xi}_{0r}(\lambda),\qquad M_{2r}(\lambda)=\Gamma_{0c}u_r(\lambda)\tag{7.33}$$

$$M_{3r}(\lambda)=-G_{1b}\xi_{0r}(\lambda),\qquad N_{2r}(\lambda)=-G_{1b}\widehat{\xi}_{0r}(\lambda),\qquad M_{4r}(\lambda)=-G_{1b}u_r(\lambda),\tag{7.34}$$

задає голоморфну оператор-функцію $M_r(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_b,H\oplus\mathcal{H}_b]$.

(2) *Блочне зображення*

$$M_l(\lambda)=\begin{pmatrix}m_{0l}(\lambda) & M_{2l}(\lambda)\\ N_{0l}(\lambda) & N_{2l}(\lambda)\\ M_{3l}(\lambda) & M_{4l}(\lambda)\end{pmatrix}:H\oplus\mathcal{H}_a\to H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{7.35}$$

елементи якого визначаються рівностями

$$m_{0l}(\lambda)=\Gamma_{0c}\xi_{0l}(\lambda),\qquad N_{0l}(\lambda)=\widehat{\Gamma}_c\xi_{0l}(\lambda),\qquad M_{3l}(\lambda)=G_{0a}\xi_{0l}(\lambda)\tag{7.36}$$

$$M_{2l}(\lambda)=\Gamma_{0c}u_l(\lambda),\qquad N_{2l}(\lambda)=\widehat{\Gamma}_c u_l(\lambda),\qquad M_{4l}(\lambda)=G_{0a}u_l(\lambda),\tag{7.37}$$

задає голоморфну оператор-функцію $M_l(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H\oplus\mathcal{H}_a,H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a]$. *Крім того, рівність*

$$\mathcal{M}_l(\lambda)=\begin{pmatrix}m_{0l}(\lambda) & 0 & M_{2l}(\lambda)\\ N_{0l}(\lambda) & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} & N_{2l}(\lambda)\\ M_{3l}(\lambda) & 0 & M_{4l}(\lambda)\end{pmatrix}:H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a\to H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{7.38}$$

задає оператор-функцію $\mathcal{M}_l(\cdot)\in R_u[H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a]$.

Доведення. (1) За умов твердження справедливим є твердження (T) (див. доведення твердження 7.5, (1)). Покладемо також $\widetilde{U}:=I_{\mathbb{H}}$, $a:=c$ і $\Gamma_{0a}:=\Gamma_{0c}\upharpoonright\operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,r}$. Тоді виконано умови твердження 5.25, внаслідок якого вірним є потрібне твердження (1).

(2) Будемо використовувати ті ж самі позначення, що і в доведенні твердження 7.5, (2). Нехай $M_-(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}_-$, – функція Вейля граничної трійки Π^- для T^-_{max}. Покажемо, що

$$(\Gamma'_{1l}+iP_{2l}\Gamma'_{0l})\upharpoonright\mathcal{N}_{l\lambda}=M_-(-\lambda)P_{1l}\Gamma'_{0l}\upharpoonright\mathcal{N}_{l\lambda},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.\tag{7.39}$$

Нехай $\lambda\in\mathbb{C}_+$ і $y\in\mathcal{N}_{l\lambda}$. Тоді внаслідок другої рівності в (7.26) $y\in\mathcal{N}^-_{-\lambda}$ і, отже, $\pi_\Delta y\in\mathfrak{N}_{-\lambda}(T^-_{min})$, де T^-_{min} – мінімальне відношення в $L^2_\Delta(\mathcal{I}_l)$, породжене системою (7.25). Звідси та з (2.62) випливають рівності

$$(\Gamma'_{1l}+iP_{2l}\Gamma'_{0l})y=(\Gamma_{1l}+iP_{2l}\Gamma_{0l})\{\pi_\Delta y,-\lambda\pi_\Delta y\}=M_-(-\lambda)P_{1l}\Gamma_{0l}\{\pi_\Delta y,-\lambda\pi_\Delta y\}=M_-(-\lambda)P_{1l}\Gamma'_{0l}y,$$

які доводять (7.39). Нехай $Z(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H\oplus\mathcal{H}_a,\mathbb{H}])$ – операторний ров'язок системи (3.5) на проміжку $\mathcal{I}_l$, заданий блочним зображенням

$$Z(t,\lambda)=(\xi_{0l}(t,\lambda),u_l(t,\lambda)):H\oplus\mathcal{H}_a\to\mathbb{H},$$

і $Z(\lambda):H\oplus\mathcal{H}_a\to\mathcal{N}_{l\lambda}$ – відповідне зображення, визначене в лемі 3.4. В процессі доведення твердження 7.5 було показано, що $Z(\lambda)$ задовільняє (7.30). Тому внаслідок (7.39) справедлива рівність

$$(\Gamma'_{1l}+iP_{2l}\Gamma'_{0l})Z(\lambda)=M_-(-\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.\tag{7.40}$$

З іншого боку, в силу (7.28) та (7.31) маємо

$$(\Gamma_{1l}' + iP_{2l}\Gamma_{0l}')Z(\lambda) = -\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\\ \widehat{\Gamma}_c\\ G_{0a}\end{pmatrix}(\xi_{0l}(\lambda),\, u_l(\lambda)) = -M_l(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Звідси та з (7.40) випливає рівність

$$M_l(\lambda) = -M_-(-\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{7.41}$$

внаслідок якої $M_l(\cdot)$ є голоморфною оператор-функцією. Крім того, в силу (7.41)

$$\mathcal{M}_l(\lambda) = -\mathcal{M}(-\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{7.42}$$

де $\mathcal{M}(\cdot)$ – оператор-функція (2.71) для граничної трійки Π^-. Оскільки згідно з наслідком 2.34 $\mathcal{M}(\cdot)\in R_u[H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a]$, то внаслідок (7.42) $\mathcal{M}_l(\cdot)\in R_u[H\oplus\widehat{H}\oplus\mathcal{H}_a]$. □

Теорема 7.7. *Нехай за умов твердження 7.5* $\tau=\{\tau_a,\tau_b\}$ *– розділений граничний параметр* (7.5) - (7.8). *Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_{\tau r}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[H,\mathbb{H}])$ *та* $\widehat{\xi}_{\tau r}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[\widehat{H},\mathbb{H}])$ *ситеми* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_r$, *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_{\tau r}(\lambda) = -I_H \tag{7.43}$$

$$\widehat{\Gamma}_c\xi_{\tau r}(\lambda)=0, \qquad C_{0b}(\lambda)G_{0b}\xi_{\tau r}(\lambda)+C_{1b}(\lambda)G_{1b}\xi_{\tau r}(\lambda)=0 \tag{7.44}$$

$$\Gamma_{1c}\widehat{\xi}_{\tau r}(\lambda)=0 \tag{7.45}$$

$$\widehat{\Gamma}_c\widehat{\xi}_{\tau r}(\lambda)=iI_{\widehat{H}}, \qquad C_{0b}(\lambda)G_{0b}\widehat{\xi}_{\tau r}(\lambda)+C_{1b}(\lambda)G_{1b}\widehat{\xi}_{\tau r}(\lambda)=0 \tag{7.46}$$

(2) *Для кожного* $\lambda\in\mathbb{C}_+$ *існує єдиний операторний розв'язок* $\xi_{\tau l}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H,\mathbb{H}])$ *ситеми* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_l$, *що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_{\tau l}(\lambda)=I_H, \qquad C_{0a}(\lambda)G_{1a}\xi_{\tau l}(\lambda)+C_{1a}(\lambda)G_{0a}\xi_{\tau l}(\lambda)=0. \tag{7.47}$$

(3) *Справедливі рівності*

$$\xi_{\tau r}(t,\lambda)=\xi_{0r}(t,\lambda)-u_r(t,\lambda)(\tau_b(\lambda)+M_{4r}(\lambda))^{-1}M_{3r}(\lambda) \tag{7.48}$$

$$\widehat{\xi}_{\tau r}(t,\lambda)=\widehat{\xi}_{0r}(t,\lambda)-u_r(t,\lambda)(\tau_b(\lambda)+M_{4r}(\lambda))^{-1}N_{2r}(\lambda) \tag{7.49}$$

$$\xi_{\tau l}(t,\lambda)=\xi_{0l}(t,\lambda)-u_l(t,\lambda)(\tau_a(\lambda)+M_{4l}(\lambda))^{-1}M_{3l}(\lambda), \tag{7.50}$$

де $M_{3r}(\lambda)$, $N_{2r}(\lambda)$ *та* $M_{4r}(\lambda)$ *визначені рівностями* (7.34), *а* $M_{3l}(\lambda)$ *та* $M_{4l}(\lambda)$ *– останніми рівностями в* (7.36) *та* (7.37).

Доведення. За умов твердження вірним є твердження (T) (див. доведення твердження 7.5). Крім того, τ_b є вкороченим граничним параметром для системи (7.23) у сенсі означення 5.22. Тому застосування теореми 5.26 до цієї системи дає потрібне твердження (1) та рівності (7.48), (7.49).

Далі, нехай $\mathcal{M}_l(\cdot)$ – оператор-функція (7.38). Оскільки згідно з твердженням 7.6 $\mathcal{M}_l(\cdot) \in R_u[H \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_a]$, то $M_{4l}(\cdot) \in R_u[\mathcal{H}_a]$. Тому $0 \in \rho(\tau_a(\lambda) + M_4(\lambda))$ і рівність (7.50) коректно задає розв'язок $\xi_{\tau l}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l; [H, \mathbb{H}])$ ситеми (3.5) на проміжку $\mathcal{I}_l$. Покажемо, що $\xi_{\tau l}(\cdot, \lambda)$ задовільнє (7.47). Комбінуючи (7.50) з (7.21), (7.22) та останніми рівностями в (7.36) та (7.37), отримуємо першу рівність в (7.47), а також рівності

$$G_{1a}\xi_{\tau l}(\lambda) = (\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1} M_{3l}(\lambda) \tag{7.51}$$

$$G_{0a}\xi_{\tau l}(\lambda) = (I_{\mathcal{H}_a} - M_{4l}(\lambda)(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1}) M_{3l}(\lambda) \tag{7.52}$$

Оскільки

$$\tau_a(\lambda) = \{\{(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1} h_a, (I_{\mathcal{H}_a} - M_{4l}(\lambda)(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1}) h_a\} : h_a \in \mathcal{H}_a\},$$

то внаслідок (7.51) та (7.52) $\{G_{1a}\xi_{\tau l}(\lambda) h, G_{0a}\xi_{\tau l}(\lambda) h\} \in \tau_a(\lambda),\ h \in H$. Тому вірною є друга рівність в (7.47). ☐

7.2. m-функції та характеристичні матриці

Нехай за припущень (ПР1) - (ПР3) пункту 7.1. Γ_c – оператор (7.16). Крім того, нехай $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ – розділений граничний параметр і $\xi_{\tau r}(\cdot, \lambda)$, $\widehat{\xi}_{\tau r}(\cdot, \lambda)$ та $\xi_{\tau l}(\cdot, \lambda)$– відповідні операторні розв'язки, визначені в теоремі 7.7.

Означення 7.8. Оператор-функції $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H_0]$ та $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H_0]$, визначені рівностями

$$\widetilde{m}_{\tau r}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau r}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0c}\xi_{\tau r}(\lambda) & \Gamma_{0c}\widehat{\xi}_{\tau r}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.53}$$

$$\widetilde{m}_{\tau l}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\tau l}(\lambda) & 0 \\ N_{\tau l}(\lambda) & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0c}\xi_{\tau l}(\lambda) & 0 \\ \widehat{\Gamma}_c \xi_{\tau l}(\lambda) & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.54}$$

називаються m-функціями системи (3.5) на проміжках $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$, що відповідають розділеному граничному параметру τ.

Зауваження 7.9. Нехай $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ – розділений граничний параметр. Тоді $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ є m-функцією $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot)$ системи (7.23) на проміжку $\mathcal{I}_r = [c, b)$ з регулярною кінцевою точкою c, що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot{\tau} = \tau_b$ (див. означення 5.27). Аналогічно, можна природним чином визначити вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ і відповідну m-функцію $\widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\cdot)$ для симетричної системи на проміжку $\mathcal{I} = (a, b]$ з регулярною кінцевою точкою b так, що для системи (7.24) на проміжку $\mathcal{I}_l = (a, c]$ пара τ_a буде деяким вкороченим граничним параметром $\dot{\tau}$ і виконуватиметься рівність $\widetilde{m}_{\tau l}(\lambda) = \widetilde{m}_{\dot{\tau}}(\lambda)$.

Теорема 7.10. *Нехай за припущень* (ПР1) - (ПР3) *пункту 7.1.* Γ_c *– оператор* (7.16) *і* $M_r(\cdot)$ *та* $M_l(\cdot)$ *– оператор-функції, визначені відповідно рівностями* (7.32) - (7.34) *та* (7.35) - (7.37). *Тоді:*

(1) *Оператор-функції*

$$\widetilde{m}_{0r}(\lambda) := \begin{pmatrix} m_{0r}(\lambda) & N_{0r}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.55}$$

$$\widetilde{m}_{0l}(\lambda) := \begin{pmatrix} m_{0l}(\lambda) & 0 \\ N_{0l}(\lambda) & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.56}$$

є m-функціями, що відповідають розділеному граничному параметру $\tau_0 = \{\tau_{a0}, \tau_{b0}\}$ з $\tau_{a0} = \{I_{\mathcal{H}_a}, 0\}$ та $\tau_{b0} = \{I_{\mathcal{H}_b}, 0\}$.

(2) *Для кожного розділеного граничного параметра $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ вигляду* (7.5) - (7.8) *відповідні m-функції $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ та $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ задаються операторними матрицями* (7.53) *та* (7.54), *елементи яких допускають зображення*

$$m_{\tau r}(\lambda) = m_{0r}(\lambda) + M_{2r}(\lambda)(C_{0b}(\lambda) - C_{1b}(\lambda)M_{4r}(\lambda))^{-1}C_{1b}(\lambda)M_{3r}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.57}$$

$$N_{\tau r}(\lambda) = N_{0r}(\lambda) + M_{2r}(\lambda)(C_{0b}(\lambda) - C_{1b}(\lambda)M_{4r}(\lambda))^{-1}C_{1b}(\lambda)N_{2r}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.58}$$

$$m_{\tau l}(\lambda) = m_{0l}(\lambda) + M_{2l}(\lambda)(C_{0a}(\lambda) - C_{1a}(\lambda)M_{4l}(\lambda))^{-1}C_{1a}(\lambda)M_{3l}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.59}$$

$$N_{\tau l}(\lambda) = N_{0l}(\lambda) + N_{2l}(\lambda)(C_{0a}(\lambda) - C_{1a}(\lambda)M_{4l}(\lambda))^{-1}C_{1a}(\lambda)M_{3l}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.60}$$

Доведення. Твердження теореми стосовно $\widetilde{m}_{\tau r}(\lambda)$ є наслідком зауваження 7.9 та теореми 5.30. Далі, застосування операторів Γ_{0c} та $\widehat{\Gamma}_c$ до рівності (7.50) з огляду на (7.54) та (7.36), (7.37) дає

$$m_{\tau l}(\lambda) = m_{0l}(\lambda) - M_{2l}(\lambda)(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1}M_{3l}(\lambda) \tag{7.61}$$

$$N_{\tau l}(\lambda) = N_{0l}(\lambda) - N_{2l}(\lambda)(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1}M_{3l}(\lambda) \tag{7.62}$$

Крім того, згідно з [94, лема 2.1]

$$-(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1} = (C_{0a}(\lambda) - C_{1a}(\lambda)M_{4l}(\lambda))^{-1}C_{1a}(\lambda).$$

Звідси випливають рівності (7.59) та (7.60). Твердження (1) стосовно $\widetilde{m}_{0l}(\lambda)$ є безпосереднім наслідком твердження (2). ☐

Лема 7.11. *Для кожного розділеного граничного параметра $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ справедливі включення $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot) \in R_u[H_0]$ і $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot) \in R[H_0]$.*

Доведення. Включення $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot) \in R_u[H_0]$ випливає із зауваження 7.9 та твердження 5.31. Далі, згідно з (7.38) оператор-функцію $\mathcal{M}_l(\cdot)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{M}_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{m}_{0l}(\lambda) & x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) & M_{4l}(\lambda) \end{pmatrix} : H_0 \oplus \mathcal{H}_a \to H_0 \oplus \mathcal{H}_a, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де покладено

$$x_1(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{2l}(\lambda) \\ N_{2l}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathcal{H}_a \to \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0}, \qquad x_2(\lambda) = (M_{3l}(\lambda), 0) : \underbrace{H \oplus \widehat{H}}_{H_0} \to \mathcal{H}_a.$$

Крім того, згідно з твердженням 7.6,(2) $\mathcal{M}_l(\cdot) \in R_u[H_0 \oplus \mathcal{H}_a]$ і внаслідок (7.61), (7.62) та (7.54) маємо

$$\widetilde{m}_{\tau l}(\lambda) = \widetilde{m}_{0l}(\lambda) - x_1(\lambda)(\tau_a(\lambda) + M_{4l}(\lambda))^{-1} x_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Тому згідно з лемою 4.18 $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot) \in R[H_0]$. □

Лема 7.12. *Нехай* $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ *– розділений граничний параметр і* $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ *та* $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ *– відповідні* m*-функції* (7.53) *та* (7.54)*. Тоді*

$$0 \in \rho(m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda) + iN_{\tau r}(\lambda) N_{\tau l}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.63}$$

і тому рівність

$$\Phi_\tau(\lambda) = -(m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda) + iN_{\tau r}(\lambda) N_{\tau l}(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{7.64}$$

коректно задає оператор-фукцію $\Phi_\tau(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [H]$.

Доведення. Оскільки згідно з лемою 7.11 $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot) \in R_u[H_0]$ і $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot) \in R[H_0]$, то оператор-функція

$$m(\lambda) := \widetilde{m}_{\tau l}(\lambda) + \widetilde{m}_{\tau r}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau r}(\lambda) \\ N_{\tau l}(\lambda) & iI_{\widehat{H}} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

належить до класу $R_u[H_0]$. Тому $0 \in \rho(m(\lambda))$ і згідно формули Фробеніуса $0 \in \rho(\Psi(\lambda))$, де

$$\Psi(\lambda) = m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda)) - N_{\tau r}(\lambda)(iI_{\widehat{H}})^{-1} N_{\tau l}(\lambda) = m_{\tau l}(\lambda) + m_{\tau r}(\lambda) + iN_{\tau r}(\lambda) N_{\tau l}(\lambda).$$

Звідси випливає (7.63). □

В ніступній теоремі показано, що за розділених граничних умов характеристична матриця симетричної системи на проміжку $\mathcal{I} = (a, b)$ допускає зображення в термінах m-функцій цієї ж системи на проміжках $\mathcal{I}_l = (a, c]$ та $\mathcal{I}_r = [c, b)$.

Теорема 7.13. *Нехай для системи* (3.5) *виконано прпущення (ПР1) - (ПР3) пункту 7.1.. Крім того, нехай* $\tau = \{\tau_a, \tau_b\}$ *– розділений граничний параметр* (7.5) - (7.8) *і* $R_\tau(\lambda)$ *– узагальнена резольвента відношення* T_{min}*, породжена граничною задачею* (7.10), (7.11)*. Припустимо також, що* Γ_c *– оператор* (7.16), (7.17) *і* $\widetilde{m}_{\tau r}(\cdot)$ *та* $\widetilde{m}_{\tau l}(\cdot)$ *–* m*-функції* (7.53) *та* (7.54) *на проміжках* $\mathcal{I}_r$ *та* $\mathcal{I}_l$ *відповідно. Тоді характеристична матриця* $\Omega_\tau^c(\cdot)$*, що відповідає* $R_\tau(\lambda)$ *та розв'язку* $Y_c(\cdot, \lambda)$*, допускає зображення*

$$\Omega_\tau^c(\lambda) = \begin{pmatrix} -m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) m_{\tau r}(\lambda) & -m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) N_{\tau r}(\lambda) & \frac{1}{2} I_H + m_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) \\ -N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) m_{\tau r}(\lambda) & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} - N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) N_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda) \\ -\frac{1}{2} I_H - \Phi_\tau(\lambda) m_{\tau r}(\lambda) & -\Phi_\tau(\lambda) N_{\tau r}(\lambda) & \Phi_\tau(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{7.65}$$

де $\Phi_\tau(\lambda)$ *– оператор-функція* (7.64) *(операторна матриця в* (7.65) *задана згідно розкладу* $\mathbb{H} = H \oplus \widehat{H} \oplus H$*).*

Доведення. Для доведення теореми достотньо довести рівність

$$R_\tau(\lambda)\widetilde{f} = \pi_\Delta \left(\int_{\mathcal{I}} Y_c(x, \lambda)(\Omega_\tau^c(\lambda) + \tfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(t - x) J) Y_c^*(t, \overline{\lambda}) \Delta(t) f(t)\, dt \right), \quad \widetilde{f} \in \mathfrak{H}', \quad f(\cdot) \in \widetilde{f}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $\Omega_\tau^c(\cdot)$ – оператор-функція (7.65). Внаслідок теореми 4.2 ця рівність еквівалентна такому твердженню:

(T) Для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+,\ \widetilde f\in\mathfrak{H}'$ і $f(\cdot)\in\widetilde f$ функція

$$y_{\widetilde f}=y_{\widetilde f}(x,\lambda):=\int_{\mathcal{I}} Y_c(x,\lambda)(\Omega_\tau^c(\lambda)+\tfrac12\mathrm{sgn}\,(t-x)J)Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt \tag{7.66}$$

є розв'язком граничної задачі (7.10), (7.11).

Отже, для доведення теореми потрібно довести твердження (T).

З (7.66) випливає, що

$$y_{\widetilde f}=Y_c(x,\lambda)C(x,\lambda), \tag{7.67}$$

де

$$C(x,\lambda)=(\Omega_\tau^c(\lambda)+\tfrac12 J)\int_x^b Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt+(\Omega_\tau^c(\lambda)-\tfrac12 J)\int_a^x Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt. \tag{7.68}$$

Припустимо, що $[\alpha_{\widetilde f},\beta_{\widetilde f}]\subset\mathcal{I}$ – відрізок, такий що $\Delta(t)f(t)=0$ м.в. на $\mathcal{I}\setminus[\alpha_{\widetilde f},\beta_{\widetilde f}]$, і

$$h_{\widetilde f}:=\int_{\mathcal{I}} Y_c^*(t,\overline{\lambda})\Delta(t)f(t)\,dt(\in\mathbb{H}).$$

Тоді

$$C(x,\lambda)=(\Omega_\tau^c(\lambda)+\tfrac12 J)h_{\widetilde f},\ \ x\in(a,\alpha_{\widetilde f});\qquad C(x,\lambda)=(\Omega_\tau^c(\lambda)-\tfrac12 J)h_{\widetilde f},\ \ x\in(\beta_{\widetilde f},b)$$

і внаслідок (7.67) маємо

$$y_{\widetilde f}(x,\lambda)=Y_c(x,\lambda)(\Omega_\tau^c(\lambda)+\tfrac12 J)h_{\widetilde f},\quad x\in(a,\alpha_{\widetilde f}) \tag{7.69}$$

$$y_{\widetilde f}(x,\lambda)=Y_c(x,\lambda)(\Omega_\tau^c(\lambda)-\tfrac12 J)h_{\widetilde f},\quad x\in(\beta_{\widetilde f},b). \tag{7.70}$$

Покажемо, далі. що

$$\Omega_\tau^c(\lambda)+\tfrac12 J=\xi_{\tau l}(c,\lambda)C_l(\lambda),\qquad \Omega_\tau^c(\lambda)-\tfrac12 J=v_{\tau r}(c,\lambda)C_r(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{7.71}$$

де

$$v_{\tau r}(t,\lambda)=(\xi_{\tau r}(t,\lambda),\,\widehat\xi_{\tau r}(t,\lambda)):H\oplus\widehat H\to H \tag{7.72}$$

$$C_l(\lambda)=-\Phi_\tau(\lambda)\,(m_{\tau r}(\lambda),\,N_{\tau r}(\lambda),\,-I_H)$$

$$C_r(\lambda)=\begin{pmatrix} I_H+\Phi_\tau(\lambda)m_{\tau r}(\lambda) & \Phi_\tau(\lambda)N_{\tau r}(\lambda) & -\Phi_\tau(\lambda)\\ iN_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)m_{\tau r}(\lambda) & I_{\widehat H}+iN_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)N_{\tau r}(\lambda) & -iN_{\tau l}(\lambda)\Phi_\tau(\lambda)\end{pmatrix}.$$

З рівностей (7.43) - (7.46) та (7.53) випливає, що

$$v_{\tau r}(c,\lambda)=\Gamma_c v_{\tau r}(\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\\ \widehat\Gamma_c\\ \Gamma_{1c}\end{pmatrix}(\xi_{\tau r}(\lambda),\ \widehat\xi_{\tau r}(\lambda))=\begin{pmatrix} m_{\tau r}(\lambda) & N_{\tau r}(\lambda)\\ 0 & iI_{\widehat H}\\ -I_H & 0\end{pmatrix}.$$

Крім того, внаслідок (7.47) та (7.54) маємо

$$\xi_{\tau l}(c,\lambda)=\Gamma_c\xi_{\tau l}(\lambda)=\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\\ \widehat\Gamma_c\\ \Gamma_{1c}\end{pmatrix}\xi_{\tau l}(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\tau l}(\lambda)\\ N_{\tau l}(\lambda)\\ I_H\end{pmatrix}.$$

Звідси прямим підрахунком отримуємо рівності (7.71). З (7.69), (7.70) та (7.71) випливає, що

$$y_{\widetilde{f}}(x,\lambda) = \xi_{\tau l}(x,\lambda)C_l(\lambda)h_{\widetilde{f}}, \quad x\in(a,\alpha_{\widetilde{f}})\cap\mathcal{I}_l \tag{7.73}$$

$$y_{\widetilde{f}}(x,\lambda) = \upsilon_{\tau r}(x,\lambda)C_r(\lambda)h_{\widetilde{f}}, \quad x\in(\beta_{\widetilde{f}},b)\cap\mathcal{I}_r. \tag{7.74}$$

Внаслідок (7.67) та (7.73), (7.74) $y_{\widetilde{f}}\in AC(\mathcal{I};\mathbb{H})\cap\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$. Крім того, з огляду на (4.50) маємо

$$Y_c(x,\lambda)C'(x,\lambda) = Y_c(x,\lambda)[(\Omega^c_\tau(\lambda)-\tfrac{1}{2}J)-(\Omega^c_\tau(\lambda)+\tfrac{1}{2}J)]Y_c^*(x,\overline{\lambda})\Delta(x)f(x) =$$
$$= -Y_c(x,\lambda)JY_c^*(x,\overline{\lambda})\Delta(x)f(x) = -J\Delta(x)f(x) \ \ (\text{м.в. на } \mathcal{I}).$$

Тому внаслідок (7.67)

$$Jy'_{\widetilde{f}}(x,\lambda)-B(x)y_{\widetilde{f}}(x,\lambda) = (JY'_c(x,\lambda)-B(x)Y_c(x,\lambda))C(x,\lambda)+JY_c(x,\lambda)C'(x,\lambda) =$$
$$= \lambda\Delta(x)Y_c(x,\lambda)C(x,\lambda)-J^2\Delta(x)f(x) = \lambda\Delta(x)y_{\widetilde{f}}(x,\lambda)+\Delta(x)f(x) \ \ (\text{м.в. на } \mathcal{I}).$$

Таким чином, функція $y_{\widetilde{f}}(\cdot,\lambda)$ задовільняє рівнянню (7.10).

Покажемо, що $y_{\widetilde{f}}(\cdot,\lambda)$ задовільняє граничним умовам (7.11). Нехай G_a та G_b – оператори (7.12) та (7.14), визначені в лемі 7.3. Тоді $\Gamma_a y_{\widetilde{f}} = G_a(y_{\widetilde{f}}\upharpoonright\mathcal{I}_l)$ і $\Gamma_b y_{\widetilde{f}} = G_b(y_{\widetilde{f}}\upharpoonright\mathcal{I}_r)$, звідки внаслідок (7.73) та (7.74) випливають рівності

$$\Gamma_{0a}y_{\widetilde{f}} = G_{0a}\xi_{\tau l}(\lambda)C_l(\lambda)h_{\widetilde{f}}, \qquad \Gamma_{1a}y_{\widetilde{f}} = G_{1a}\xi_{\tau l}(\lambda)C_l(\lambda)h_{\widetilde{f}} \tag{7.75}$$

$$\Gamma_{0b}y_{\widetilde{f}} = G_{0b}\upsilon_{\tau r}(\lambda)C_r(\lambda)h_{\widetilde{f}}, \qquad \Gamma_{1b}y_{\widetilde{f}} = G_{1b}\upsilon_{\tau r}(\lambda)C_r(\lambda)h_{\widetilde{f}} \tag{7.76}$$

Комбінуючи (7.75) з другою рівністю в (7.47), отримуємо першу рівність в (7.11) для $y_{\widetilde{f}}$. Далі, внаслідок (7.72) та других рівностей в (7.44) та (7.46) маємо

$$C_{0b}(\lambda)G_{0b}\upsilon_{\tau r}(\lambda)+C_{1b}(\lambda)G_{1b}\upsilon_{\tau r}(\lambda) = 0.$$

Комбінуючи цю рівність з (7.76), отримуємо другу рівність в (7.11) для $y_{\widetilde{f}}$. Таким чином, доведено твердження (T). ☐

Наступний наслідок випливає з теорем 6.17, 7.13 та 7.10.

Наслідок 7.14. *Нехай система* (3.5) *задовільняє припущенням (ПР1) - (ПР3) пункту 7.1.. Припустимо також, що* $M(\cdot)$ *– функція Вейля розділеної граничної трійки* $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *для* T_{max} *(див.* (7.2) - (7.4)*),* $M_r(\cdot)$ *та* $M_l(\cdot)$ *– оператор-функції, визначені відповідно рівностями* (7.32) - (7.34) *та* (7.35) - (7.37) *і* $\tau=\{\tau_a,\tau_b\}$ *– розділений граничний параметр* (7.5) - (7.8)*, що задовільняє умовам*

$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}(C_0(iy)-C_1(iy)M(iy))^{-1}C_1(iy) = 0$$
$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{1}{iy}M(iy)(C_0(iy)-C_1(iy)M(iy))^{-1}C_0(iy) = 0$$

(це означає, що τ *є* M*-допустимим граничним параметром у сенсі означення 6.14). Тоді псевдоспектральна функція* $\Sigma_\tau(\cdot)$ *системи* (3.5)*, що відповідає* τ *згідно теорми 6.17, задається рівностями* (7.57) - (7.60)*,* (7.65) *та формулою обернення Стільтьєса* (6.29).

7.3. Частинні випадки

7.3.1. Випадок нульових формальних індексів дефекту

Твердження 7.15. *Для системи* (3.5) *наступні твердження еквівалентні:*

(1) $N_+ = N_- = 0$;

(2) *система є визначеною і* $T_{min} = T^*_{min} (= T_{max})$.

(3) *система є визначеною і праві та ліві формальні індекси дефекту набувають мінімально можливі значення*

$$N_{l\pm} = \nu_\pm, \qquad N_{r\pm} = \nu_\mp. \tag{7.77}$$

Доведення. Еквівалентність (1)⇔ (2) випливає з твердження 3.11. Еквівалентність (2)⇔ (3) є наслідком рівностей (3.108) та (3.174). □

Теорема 7.16. *Припустимо, що для системи* (3.5) $\delta = -1$, $N_+ = N_- = 0$ *і* $c \in Def_{\mathcal{I}}$. *Крім того, нехай* Γ_c *– оператор* (7.16), (7.17). *Тоді:*

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_r(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[H,\mathbb{H}])$ *та* $\widehat{\xi}_r(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[\widehat{H},\mathbb{H}])$ *ситеми* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_r$ *і єдиний операторний розв'язок* $\xi_l(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H,\mathbb{H}])$ *тієї ж системи на проміжку* $\mathcal{I}_l$, *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_r(\lambda) = -I_H, \qquad \widehat{\Gamma}_c\xi_r(\lambda) = 0; \qquad \Gamma_{1c}\widehat{\xi}_r(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_c\widehat{\xi}_r(\lambda) = iI_{\widehat{H}}$$
$$\Gamma_{1c}\xi_l(\lambda) = I_H$$

(2) *Існує єдина m-функція* $\widetilde{m}_r(\cdot)$ *системи* (3.5) *на проміжку* $\mathcal{I}_r$, *яка задається рівністю*

$$\widetilde{m}_r(\lambda) = \begin{pmatrix} m_r(\lambda) & N_r(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0c}\xi_r(\lambda) & \Gamma_{0c}\widehat{\xi}_r(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{7.78}$$

Крім того, існує єдина m-функція $\widetilde{m}_l(\cdot)$ *тієї ж системи на проміжку* $\mathcal{I}_l$, *яка задається рівністю*

$$\widetilde{m}_l(\lambda) = \begin{pmatrix} m_l(\lambda) & 0 \\ N_l(\lambda) & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0c}\xi_l(\lambda) & 0 \\ \widehat{\Gamma}_c\xi_l(\lambda) & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : H \oplus \widehat{H} \to H \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{7.79}$$

(3) *Існує єдина характеристична матриця* $\Omega^c(\cdot)$ *системи* (3.5), *і ця характеристична матриця відповідає каноничній резольвенті* $(T_{min} - \lambda)^{-1}$. *Крім того, справедлива рівність*

$$\Omega^c(\lambda) = \begin{pmatrix} -m_l(\lambda)\Phi(\lambda)m_r(\lambda) & -m_l(\lambda)\Phi(\lambda)N_r(\lambda) & \frac{1}{2}I_H + m_l(\lambda)\Phi(\lambda) \\ -N_l(\lambda)\Phi(\lambda)m_r(\lambda) & \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} - N_l(\lambda)\Phi(\lambda)N_r(\lambda) & N_l(\lambda)\Phi(\lambda) \\ -\frac{1}{2}I_H - \Phi(\lambda)m_r(\lambda) & -\Phi(\lambda)N_r(\lambda) & \Phi(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{7.80}$$

де $\Phi(\lambda) = -(m_l(\lambda) + m_r(\lambda) + iN_r(\lambda)N_l(\lambda))^{-1}$.

(4) *Існує єдина псевдоспектральна функція* $\Sigma(\cdot)$ *системи* (3.5) *(відносно розв'язку* $Y_c(\cdot,\lambda)$*). Ця псевдоспектральна функція задається формулою обернення Стільтьєса*

$$\Sigma(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im}\Omega^c(u+i\varepsilon)\,du, \tag{7.81}$$

Доведення. Згідно з твердженням 7.15 справедливі рівності (7.77). Тому внаслідок (3.4) виконано співвідношення (7.1). Крім того, з (3.108) випливає, що $\nu_{a+}=\nu_{a-}=0$, $\nu_{b+}=\nu_{b-}=0$, і згідно з (3.57) маємо $\mathcal{H}_a=\mathcal{H}_b=\{0\}$. Таким чином, виконано припущення (ПР1) - (ПР3) пункту 7.1., і потрібні твердження (1) - (3) випливають з твердження 7.5 і теорем 7.10 та 7.13. Крім того, з твердження (3) та теореми 6.17 випливає твердження (4). □

Зауваження 7.17. В роботах [78, 54] для системи (3.5) з $N_+=N_-=0$ уведені ліва та права "прямокутні"функції Вейля - Тітчмарша $M^l_{TW}(\lambda)$ та $M^r_{TW}(\lambda)$. Неважко довести, що ці функції пов'язані з m-функціями $\widetilde{m}_r(\cdot)$ та $\widetilde{m}_l(\cdot)$ (див. (7.78) та (7.79)) рівностями

$$M^r_{TW}(\lambda)=(m_r(\lambda),\,N_r(\lambda)),\qquad M^l_{TW}(\lambda)=(m_l(\lambda),\,N_l(\lambda))^{\top}.$$

Тому формула (7.80) для характеристичної матриці $\Omega^c(\cdot)$ збігається з аналогічною формулою, доведеною для випадку $N_+=N_-=0$ в [54].

7.3.2. Випадок гамільтонової системи

У випадку гамільтонової системи результати цього розділу істотно спрощуються. Перш за все відзначимо, що для такої системи припущення (ПР1) пункту 7.1. притймає такий вигляд:

(ПР1') справедливі рівності $N_{r+}=N_{r-}$ та $N_{l+}=N_{l-}$.

Наступне твердження є наслідком теореми 7.7.

Твердження 7.18. *Нехай для гамільтонової системи* (3.5) *виконане припущення (ПР1'), а також припущення (ПР2) та (ПР3) пункту 7.1.. Крім того, нехай G_a та G_b – оператори* (7.12), *визначені в лемі 7.3, і Γ_c – оператор, заданий рівністю*

$$\Gamma_c=\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\\ \Gamma_{1c}\end{pmatrix}:\operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,l}\cup\operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,r}\to H\oplus H,$$

в якій $\Gamma_{0c}y=y_0(c)$, $\Gamma_{1c}y=y_1(c)$, $\quad y\in\operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,l}\cup\operatorname{dom}\mathcal{T}_{\max,r}$ (див. (3.159)*). Тоді для кожного розділеного граничного параметра $\tau=\{\tau_a,\tau_b\}$ вигляду* (7.5) - (7.8) *справедливе таке твердження:*

для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+$ існує едина пара операторних розв'язків $\xi_{\tau r}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[H,H\oplus H])$ та $\xi_{\tau l}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H,H\oplus H])$ ситеми (3.5) *відповідно на проміжках $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$,що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1c}\xi_{\tau r}(\lambda)=-I_H,\qquad C_{0b}(\lambda)G_{0b}\xi_{\tau r}(\lambda)+C_{1b}(\lambda)G_{1b}\xi_{\tau r}(\lambda)=0$$
$$\Gamma_{1c}\xi_{\tau l}(\lambda)=I_H,\qquad C_{0a}(\lambda)G_{1a}\xi_{\tau l}(\lambda)+C_{1a}(\lambda)G_{0a}\xi_{\tau l}(\lambda)=0$$

Нехай виконано умови твердження 7.18. Тоді згідно з означенням 7.8 m-функціями гамільтонової системи (3.5) на проміжках $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$ є відповідно оператор-функції $m_{\tau r}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H]$ та $m_{\tau l}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[H]$, визначені рівностями

$$m_{\tau r}(\lambda)=\Gamma_{0c}\xi_{\tau r}(\lambda),\qquad m_{\tau l}(\lambda)=\Gamma_{0c}\xi_{\tau l}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+,\tag{7.82}$$

і згідно з лемою 7.11 спрiведливі включення $m_{\tau r}(\cdot)\in R_u[H]$ та $m_{\tau l}(\cdot)\in R[H]$. Крім того, з твердження 7.5 випливає, що для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+$ справедливі такі твердження:

(1) існує єдина пара операторних розв'язків $\xi_{0r}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[H,H\oplus H])$ та $u_r(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_r;[\mathcal{H}_b,H\oplus H])$ ситеми (3.5) на проміжку $\mathcal{I}_r$, що задовільняють граничним умовам

$$\Gamma_{1c}\xi_{0r}(\lambda)=-I_H,\qquad G_{0b}\xi_{0r}(\lambda)=0;\qquad \Gamma_{1c}u_r(\lambda)=0,\qquad G_{0b}u_r(\lambda)=I_{\mathcal{H}_b}$$

(2) існує єдина пара операторних розв'язків $\xi_{0l}(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[H,H\oplus H])$ та $u_l(\cdot,\lambda)\in\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I}_l;[\mathcal{H}_a,H\oplus H])$ ситеми (3.5) на проміжку $\mathcal{I}_l$, що задовільняють граничним умовам (7.21) та (7.22).

З теорем 7.10 та 7.13 випливає

Теорема 7.19. *Нехай система* (3.5) *є гамільтоновою і виконано умови твердження 7.18. Крім того, нехай*

$$M_r(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{0r}(\lambda) & M_{2r}(\lambda)\\ M_{3r}(\lambda) & M_{4r}(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\xi_{0r}(\lambda) & \Gamma_{0c}u_r(\lambda)\\ -G_{1b}\xi_{0r}(\lambda) & -G_{1b}u_r(\lambda)\end{pmatrix}:H\oplus\mathcal{H}_b\to H\oplus\mathcal{H}_b,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

$$M_l(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{0l}(\lambda) & M_{2l}(\lambda)\\ M_{3l}(\lambda) & M_{4l}(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\Gamma_{0c}\xi_{0l}(\lambda) & \Gamma_{0c}u_l(\lambda)\\ G_{0a}\xi_{0l}(\lambda) & G_{0a}u_l(\lambda)\end{pmatrix}:H\oplus\mathcal{H}_a\to H\oplus\mathcal{H}_a,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.$$

Тоді для кожного розділеного граничного параметра $\tau=\{\tau_a,\tau_b\}$ *вигляду* (7.5) - (7.8) *справедливі такі твердження:*

(1) *m-функції $m_{\tau r}(\cdot)$ та $m_{\tau l}(\cdot)$ допускають зображення* (7.57) *та* (7.59).

(2) *Характеристична матриця $\Omega(\cdot)=\Omega^c_\tau(\cdot)$, що відповідає узагальненій резольвенті $R_\tau(\lambda)$ та розв'язку $Y_c(\cdot,\lambda)$, допускає зображення*

$$\Omega(\lambda)=\begin{pmatrix} m_{\tau l}(\lambda)(m_{\tau l}(\lambda)+m_{\tau r}(\lambda))^{-1}m_{\tau r}(\lambda) & \frac{1}{2}I_H-m_{\tau l}(\lambda)(m_{\tau l}(\lambda)+m_{\tau r}(\lambda))^{-1}\\ -\frac{1}{2}I_H+(m_{\tau l}(\lambda)+m_{\tau r}(\lambda))^{-1}m_{\tau r}(\lambda) & -(m_{\tau l}(\lambda)+m_{\tau r}(\lambda))^{-1}\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{C}_+.\tag{7.83}$$

Зауваження 7.20. Неважко показати, що m-функції $m_{\tau r}(\cdot)$ та $m_{\tau l}(\cdot)$ для гамільтонової системи, визначені рівностями (7.82), збігаються з функціями Вейля – Титчмарша для звужень такої системи відповідно на $\mathcal{I}_r$ та $\mathcal{I}_l$ у сенсі робіт [66, 76, 83]. Тому формула (7.83) збігається з аналогічною формулою для характеристичної матриці гамільтонової системи, отриманою в [84].

РОЗДІЛ 8

Деякі спектральні властивості диференціальних операторів

8.1. Диференціальні вирази та відповідні симетричні системи

Нехай H – скінченновимірний гільбертів простір вимірності m й $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ – проміжок в $\mathbb{R}$. Надалі використовуються такі позначення: $\mathfrak{H} = L^2(\mathcal{I})$ – гільбертів простір борелівських функцій $f(\cdot) : \mathcal{I} \to H$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} ||f(t)||^2\, dt < \infty$; $\mathfrak{H}'$ – множина всіх функцій $f(\cdot) \in \mathfrak{H}$, таких що для деякого відрізку $[\alpha_f, \beta_f] \subset \mathcal{I}$ вионується рівність $f(t) = 0,\ t \in \mathcal{I} \setminus [\alpha_f, \beta_f]$. Крім того, для заданого скінченновимірного простору $\mathcal{K}$ позначатимемо через $L^2[\mathcal{K}, H]$ множину всіх борелівських оператор-функцій $F(\cdot) : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$, таких що $\int\limits_{\mathcal{I}} ||F(t)||^2\, dt < \infty$.

Нехай

$$l[y] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left((p_{k-j} y^{(j)})^{(j)} - \tfrac{i}{2}[(q_{k-j} y^{(j-1)})^{(j)} + (q_{k-j} y^{(j)})^{(j-1)}] \right) + p_k y \tag{8.1}$$

– формально-самоспряжений диференціальний вираз парного порядку $\eta = 2k$ з операторзначними коефіцієтами $p_{k-j},\, q_{k-j} : \mathcal{I} \to [H]$, такими що

$$p_k \in C(\mathcal{I}), \quad 0 \in \rho(p_0(t)), \quad p_{k-j},\, q_{k-j} \in C^j(\mathcal{I})$$
$$p_{k-j}(t) = p^*_{k-j}(t), \quad q_{k-j}(t) = q^*_{k-j}(t), \quad t \in \mathcal{I},\ \ j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Позначимо через $y^{[j]}$, $j \in \{0, \ldots, 2k\}$, квазіпохідні функції $y : \mathcal{I} \to H$, що відповідають виразу (8.1) [40, 116, 82]. Нехай $\operatorname{dom} l$ – множина усіх функцій $y \in AC(\mathcal{I}; H)$, для яких $y^{[j]} \in AC(\mathcal{I}; H)$, $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$. Для кожної функції $y \in \operatorname{dom} l$ покладемо $l[y] = y^{[2k]}$.

Нехай

$$\mathbf{H} := H^k, \qquad \mathbb{H} := \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = H^k \oplus H^k. \tag{8.2}$$

Очевидно, що

$$\mathbf{H} := \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{k} \tag{8.3}$$

$$\mathbb{H} = \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{k} \oplus \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{k}. \tag{8.4}$$

З кожною функцією $y \in \operatorname{dom} l$ пов'язані функції $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 : \mathcal{I} \to \mathbf{H}$ та $\mathbf{y} : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, визначені рівностями

$$\mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k-1]}(t) (\in H^k = \mathbf{H}), \quad \mathbf{y}_1(t) = y^{[2k-1]}(t) \oplus \ldots \oplus y^{[k]}(t) (\in H^k = \mathbf{H}) \tag{8.5}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus \mathbf{y}_1(t)\} (\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{8.6}$$

Нехай $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір. Для кожного операторного розв'язку $Y : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$ рівняння

$$l[y] = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{8.7}$$

квазіпохідні $Y^{[j]} : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$ визначаються рівністю

$$Y^{[j]}(\cdot)h = (Y(\cdot)h)^{[j]}, \quad h \in \mathcal{K}, \;\; j \in \{0, 1, \ldots, 2k-1\}. \tag{8.8}$$

Визначимо також оператор-функції $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1 : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbf{H}]$ та $\mathbf{Y} : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ за допомоги блочних зображень

$$\mathbf{Y}_0(t) = (Y(t), Y^{[1]}(t), \ldots, Y^{[k-1]}(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{H^k = \mathbf{H}} \tag{8.9}$$

$$\mathbf{Y}_1(t) = (Y^{[2k-1]}(t), \ldots, Y^{[k]}(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{H^k = \mathbf{H}} \tag{8.10}$$

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{Y}_0(t), \, \mathbf{Y}_1(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{8.11}$$

Припустимо далі, що

$$l[y] = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(\tfrac{i}{2}[(q_{k-j} y^{(j)})^{(j+1)} + (q_{k-j} y^{(j+1)})^{(j)}] + (p_{k-j} y^{(j)})^{(j)} \right) \tag{8.12}$$

– формально-самоспряжений диференціальний вираз непарного порядку $\eta = 2k+1$ з операторзначними коефіцієтами $p_{k-j}, \, q_{k-j} : \mathcal{I} \to [H]$, такими що

$$p_{k-j} \in C^j(\mathcal{I}), \quad q_{k-j} \in C^{j+1}(\mathcal{I})$$
$$p_{k-j}(t) = p^*_{k-j}(t), \quad q_{k-j}(t) = q^*_{k-j}(t), \quad 0 \in \rho(q_0(t)), \quad t \in \mathcal{I}, \;\; j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Позначимо через $y^{[j]}$, $j \in \{0, \ldots, 2k+1\}$, квазіпохідні функції $y : \mathcal{I} \to H$, що відповідають виразу (8.12) [116, 82]. Нехай $\operatorname{dom} l$ – множина усіх функцій $y \in AC(\mathcal{I}; H)$, для яких $y^{[j]} \in AC(\mathcal{I}; H)$, $j \in \{1, \ldots, 2k\}$. Для кожної функції $y \in \operatorname{dom} l$ покладемо $l[y] = y^{[2k+1]}$.

Як відомо, для кожного $t \in \mathcal{I}$ має місце розклад $H = H_t^+ \oplus H_t^-$, де H_t^+ (H_t^-) – інваріантний підпростір оператора $q_0(t)$, на якому $q_0(t)$ є строго додатним (відп. від'ємним) оператором. Покладемо

$$\nu_{0+} = \dim H_t^+, \qquad \nu_{0-} = \dim H_t^- \tag{8.13}$$

(ці числа не залежать від t). Надалі також позначаємо

$$\widehat{\nu} = |\nu_{0+} - \nu_{0-}|, \qquad \delta = \operatorname{sign}(\nu_{0+} - \nu_{0-}) \tag{8.14}$$

За допомоги формули (1.27) в [82] неважко додовести існування скінченновимірних гільбертових просторів H', $\widehat{H}$ та абсолютно неперервної оператор-функції

$$Q(t) = (Q_1(t), \, \widehat{Q}(t), \, Q_2(t))^\top : H \to H' \oplus \widehat{H} \oplus H', \quad t \in \mathcal{I}, \tag{8.15}$$

таких що оператор $Q(t)$ є оборотним і справедлива тотожність

$$iq_0(t) = -Q_1^*(t)Q_2(t) + Q_2^*(t)Q_1(t) + i\delta \widehat{Q}^*(t)\widehat{Q}(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

У цьому випадку розмірності просторів H' та $\widehat{H}$ визначаються рівностями

$$\dim H' = \min\{\nu_{0+}, \nu_{0-}\}, \qquad \dim \widehat{H} = \widehat{\nu}. \tag{8.16}$$

Відзначимо, що оператор-функція $Q(t)$ визначається в термінах операторів $q_0(t) \upharpoonright H_t^+$ та $q_0(t) \upharpoonright H_t^-$.

Нехай $\mathbf{H}$ та $\mathbf{H}_0$ – скінченновимірні гільбертові простори, визначені рівностями

$$\mathbf{H} = H^k \oplus H' \tag{8.17}$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} \oplus \widehat{H} = H^k \oplus H' \oplus \widehat{H}, \qquad \mathbb{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H} = \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}. \tag{8.18}$$

Очевидно, що простори $\mathbf{H}$ та $\mathbb{H}$ допускають зображення

$$\mathbf{H} = \underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{k} \oplus H' \tag{8.19}$$

$$\mathbb{H} = \overbrace{\underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{k} \oplus H'}^{\mathbf{H}} \oplus \widehat{H} \oplus \overbrace{\underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{k} \oplus H'}^{\mathbf{H}} \tag{8.20}$$

Тому внаслідок (8.16) $\dim \mathbb{H} = \eta m$.

З кожною функцією $y \in \operatorname{dom} l$ пов'язані функції $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 : \mathcal{I} \to \mathbf{H}$ та $\mathbf{y} : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, визначені рівностями

$$\mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \ \dots \ \oplus y^{[k-1]}(t) \oplus Q_1(t) y^{(k)}(t) (\in H^k \oplus H' = \mathbf{H}) \tag{8.21}$$

$$\mathbf{y}_1(t) = y^{[2k]}(t) \oplus \ \dots \ \oplus y^{[k+1]}(t) \oplus Q_2(t) y^{(k)}(t) (\in H^k \oplus H' = \mathbf{H}) \tag{8.22}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus \widehat{Q}(t) y^{(k)}(t) \oplus \mathbf{y}_1(t)\} (\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{8.23}$$

Нехай $\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір. Для кожного операторного розв'язку $Y : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$ рівняння (8.7) квазіпохідні $Y^{[j]} : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, H]$ визначаються рівністю (8.8). Визначимо також оператор-функції $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1 : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbf{H}]$ та $\mathbf{Y} : \mathcal{I} \to [\mathcal{K}, \mathbb{H}]$ за допомоги блочних зображень

$$\mathbf{Y}_0(t) = (Y(t), Y^{[1]}(t), \ \dots \ , Y^{[k-1]}(t), Q_1(t) Y^{(k)}(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{H \oplus \ \dots \ \oplus H \oplus H'}_{\mathbf{H}} \tag{8.24}$$

$$\mathbf{Y}_1(t) = (Y^{[2k]}(t), \ \dots \ , Y^{[k+1]}(t), Q_2(t) Y^{(k)}(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{H \oplus \ \dots \ \oplus H \oplus H'}_{\mathbf{H}} \tag{8.25}$$

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{Y}_0(t), \widehat{Q}(t) Y^{(k)}(t), \mathbf{Y}_1(t))^\top : \mathcal{K} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{8.26}$$

Означення 8.1. Диференціальним виразом (або D-виразом) порядку η називається або вираз парного порядку $\eta = 2k$ (8.1), або вираз непарного порядку $\eta = 2k + 1$ (8.12).

Як відомо [40, 116] кожний D-вираз породжує мінімальний оператор L_{min} та максимальний оператор L_{max} в $\mathfrak{H}$. Крім того, L_{min} є замкненим щільно визначеним симетричним оператором і $L_{min}^* = L_{max}$. Дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda(L_{min})$ є множиною усіх функцій $y \in \mathfrak{H}$, які є розв'язками рівняння (8.7); тому $n_\pm(L_{min}) \leq \eta m < \infty$. Надалі для операторного розв'язку $Y(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathcal{K}, H]$ рівняння (8.7) будемо позначати через $Y(\lambda)$ оператор з $\mathcal{K}$ в $\mathfrak{N}_\lambda(L_{min})$, визначений рівністю $(Y(\lambda)h)(t) = Y(t, \lambda)h, \ h \in \mathcal{K}$.

Кожній функції $f \in \mathfrak{H}$ ставиться у відповідність функція $\dot{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{H}$, визначена рівністю

$$\dot{f}(t) = \{f(t),\, 0,\, \ldots,\, 0\},\ t \in \mathcal{I} \tag{8.27}$$

(тобто перша компонениа функції $\dot{f}$ відносно розкладів (8.4) та (8.20) дорівнює $f(t)$, а усі інші компоненти є нулями).

Виявляється, що для кожного D-виразу рівняння (8.7) є еквівалентним деякій симетричній системі. Точніше, наступне твердження випливає з результатів роботи [82].

Твердження 8.2. *Припустимо, що* $l[y]$ *–* D*-вираз або парного порядку* $\eta = 2k$*, або непарного порядку* $\eta = 2k+1$*. Нехай* $J_\eta \in [\mathbb{H}]$ *– оператор і* $\Delta_\eta : \mathcal{I} \to [\mathbb{H}]$ *– оператор-функція, визначені наступним чином:*

У випадку $\eta = 2k$

$$J_\eta = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathbf{H}} \\ I_{\mathbf{H}} & 0 \end{pmatrix} \in [\underbrace{\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}], \qquad \Delta_\eta(t) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in [\underbrace{\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}]; \tag{8.28}$$

У випадку $\eta = 2k+1$

$$J_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_H \\ 0 & i\delta I_{\widehat{H}} & 0 \\ I_H & 0 & 0 \end{pmatrix} \in [\underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}], \quad \Delta_\eta(t) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in [\underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}]. \tag{8.29}$$

В цих рівностях δ *визначено в* (8.14) *і* P *– ортопроектор в* $\mathbf{H}$ *на першу компоненту в розкладі* (8.3) *у випадку* $\eta = 2k$ *та* (8.19) *у випадку* $\eta = 2k+1$*. Тоді існує неперервна оператор-функція* $B_\eta(t) = B_\eta^*(t) (\in [\mathbb{H}])$, $t \in \mathcal{I}$ *(визначена в термінах коефіцієнтів виразу* p_j *та* q_j*), така що симетрична система*

$$J_\eta y' - B_\eta(t) y = \lambda \Delta_\eta(t) y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{8.30}$$

є визначеною і справедливі такі твердження:

(1) *Якщо* $Y(\cdot,\lambda)$ *–* $[\mathcal{K}, H]$*-значний операторний розв'язок рівняння* (8.7)*, то* $\mathbf{Y}(\cdot,\lambda)$ *є* $[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$*-значним операторним розв'язком системи* (8.30)*. Зворотно, для кожного* $[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$*-значного операторного розв'язку* $\widetilde{Y}(\cdot,\lambda)$ *системи* (8.30) *існує єдиний* $[\mathcal{K}, H]$*-значний операторний розв'язок* $Y(\cdot,\lambda)$ *рівняння* (8.7)*, такий що* $\mathbf{Y}(\cdot,\lambda) = \widetilde{Y}(\cdot,\lambda)$*. Крім того,* $Y(\cdot,\lambda) \in L^2[\mathcal{K}, H]$ *тоді й тільки тоді, коли* $\mathbf{Y}(\cdot,\lambda) \in \mathcal{L}^2_\Delta[\mathcal{K}, \mathbb{H}]$.

(2) *Нехай* $\mathcal{T}_{max}$ *– максимальне відношення в* $\mathcal{L}^2_\Delta(\mathcal{I})$*, породжене системою* (8.30)*. Тоді рівність* $(V_1 y)(t) = \mathbf{y}(t)$, $y(\cdot) \in \operatorname{dom} L_{max}$*, задає біективний лінійний оператор* $V_1 : \operatorname{dom} L_{max} \to \operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$*, такий що* $(V_1 y, V_1 z)_\Delta = (y, z)_{\mathfrak{H}}$, $y, z \in \operatorname{dom} L_{max}$.

(3) *Нехай* T_{min} *та* T_{max} *– мінімальне та максимельне відношення в* $L^2_\Delta(\mathcal{I})$*, породжене системою* (8.30)*. Тоді* $\operatorname{mul} T_{max} = \{0\}$ *(тобто* T_{min} *є щільно визначеним оператором) і рівність* $V_2 f = \pi_\Delta(\dot{f}(\cdot))$, $f = f(\cdot) \in \mathfrak{H}$*, задає унітарний оператор* $V_2 \in [\mathfrak{H}, L^2_\Delta(\mathcal{I})]$*, такий що* $(V_2 \oplus V_2)(\operatorname{gr} L_{min}) = \operatorname{gr} T_{min}$ *і* $(V_2 \oplus V_2)(\operatorname{gr} L_{max}) = \operatorname{gr} T_{max}$ *(тобто оператори* L_{min} *та* T_{min}*, а також* L_{max} *та* T_{max}*, унітарно еквівалентні за допомоги* V_2*).*

Зауваження 8.3. Зважаючи на твердження 8.2, (2), надалі можна ототожнювати $\operatorname{dom} L_{max}$ з $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$.

Означення 8.4. HD-виразом називається або D-вираз (8.1) парного порядку $\eta = 2k$, або D-вираз (8.12) непарного порядку $\eta = 2k+1$, що задовільняє умові $\widehat{\nu} = 0$ (або, еквівалентно, умові $\nu_{0+} = \nu_{0-}$).

SD-виразом називається вираз непарного порядку (8.12), такий що $\widehat{\nu} \neq 0 (\Leftrightarrow \nu_{0+} \neq \nu_{0-})$.

Надалі для HD-виразу порядку η покладаємо

$$\nu_0 = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad \eta = 2k \\ \nu_{0+} (= \nu_{0-}), \quad \text{якщо} \quad \eta = 2k+1 \end{cases} \tag{8.31}$$

Зауваження 8.5. (1) Очевидно, що кожний D-вираз є або HD-виразом, або SD-виразом. Крім того, D-вираз є HD-виразом тоді й тільки тоді, коли відповідна симетрична система (8.30) є гамільтоновою.

(2) Нагадаємо, що D-вираз називається скалярним, якщо $m = 1$. Без обмеження загальності можна вважати, що для скалярного D-виразу $H = \mathbb{C}$ і тому коефіцієнти такого виразу є дійснозначними функціями. Для скалярного D-виразу непарного порядку (8.12) відучий коефіцієнт $q_0(t)$ має той самий самий знак для всіх $t \in \mathcal{I}$ і формула (8.14) приймає вигляд

$$\widehat{\nu} = 1, \qquad \delta = \operatorname{sign} q_0(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Тому скалярний D-вираз є HD-виразом (SD-виразом) тоді й тільки тоді, коли він має парний (відп. непарний) порядок. Для скалярного виразу непарного порядку можна покласти $H' = \{0\}$, $\widehat{H} = \mathbb{C}$, $\widehat{Q}(t) = -i|q_0(t)|^{\frac{1}{2}}$. У цьому випадку рівності (8.17) - (8.23) приймають вигляд

$$\begin{gathered} \mathbf{H} = \mathbb{C}^k, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^{k+1}, \qquad \mathbb{H} = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^{2k+1} (= \mathbb{C}^\eta) \\ \mathbf{y}_0(t) = y(t) \oplus \dots \oplus y^{[k-1]}(t)\} (\in \mathbb{C}^k), \quad \mathbf{y}_1(t) = y^{[2k]}(t) \oplus \dots \oplus y^{[k+1]}(t) (\in \mathbb{C}^k) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) \oplus (-i|q_0(t)|^{\frac{1}{2}} y^{(k)}(t)) \oplus \mathbf{y}_1(t)\} (\in \mathbb{C}^{2k+1}). \end{gathered} \tag{8.32}$$

Нашою подальшою метою є перенесення на D-вирази деяких результатів, отриманих у попередніх розділах роботи для симетричних систем.

8.2. Граничні трійки та граничні умови для диференціальних виразів

Нехай $l[y]$ – D-вираз (8.1) або (8.12). Покладемо

$$[y, z]_t = \sum_{j=1}^{k} [(y^{[j-1]}(t), z^{[2k-j]}(t)) - (y^{[2k-j]}(t), z^{[j-1]}(t))], \quad y, z \in \operatorname{dom} l$$

для виразу (8.1) і

$$[y, z]_t = i(q_0(t) y^{(k)}(t), z^{(k)}(t)) + \sum_{j=0}^{k-1} [(y^{[j]}(t), z^{[2k-j]}(t)) - (y^{[2k-j]}(t), z^{[j]}(t))], \quad y, z \in \operatorname{dom} l$$

для виразу (8.12). Тоді згідно з [40, 116] існують границі

$$[y,z]_a = \lim_{t\to a}[y,z]_t, \qquad [y,z]_b = \lim_{t\to b}[y,z]_t, \quad y,z \in \operatorname{dom} L_{max}$$

і справедлива тотожність Лагранжа

$$(L_{max}y,z) - (y, L_{max}z) = [y,z]_b - [y,z]_a, \quad y,z \in \operatorname{dom} L_{max}. \tag{8.33}$$

Очевидно, що

$$[y,z]_t = (J_\eta \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)), \quad y,z \in \operatorname{dom} L_{max}. \tag{8.34}$$

Тому тотожність (8.33) є наслідком тотожності Лагранжа (3.22) для системи (8.30).

Нехай $c \in (a,b)$ і $L_{min,l}$ та $L_{max,l}$ ($L_{min,r}$ та $L_{max,r}$) – мінімальний та максимальний оператори, породжені звуженням D-виразу на $\mathcal{I}_l = \langle a, c]$ (відп. $\mathcal{I}_r = [c, a\rangle$). Очевидно, що числа

$$n_{l\pm} = n_\pm(L_{min,l}), \qquad n_{r\pm} = n_\pm(L_{min,r}) \tag{8.35}$$

не залежать віж вибору точки $c \in (a,b)$ і справедливі рівності

$$n_{l\pm} = N_{l\pm}, \qquad n_{r\pm} = N_{r\pm}, \tag{8.36}$$

де $N_{l\pm}$ та $N_{r\pm}$ – відповідно ліві та праві формальні індекси дефекту системи (8.30). Тому з (3.175) випливає добре відома формула [40, 116]

$$n_\pm(L_{min}) = n_{l\pm} + n_{r\pm} - \eta m. \tag{8.37}$$

Нагадаємо наступне означення.

Означення 8.6. Кінцева точка a (відп. b) називається регулярною для D-виразу, якщо $a > -\infty$ і $a \in \mathcal{I}$ (відп. $b < \infty$ і $b \in \mathcal{I}$). Кінцева точка a (відп. b) називається квазірегулярною, якщо $n_{l+} = n_{l-} = \eta m$ (відп. $n_{r+} = n_{r-} = \eta m$).

D-вираз називається регулярним (квазірегулярним), якщо обидві кінцеві точки a та b є регулярними (відп. квазірегулярними).

Очевидно, що D-вираз є регулярним, якщо $\mathcal{I} = [a,b]$, і квазірегулярним, якщо $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min}) = \eta m$. Також очевидно, що регулярна кінцева точка є квазірегулярною і регулярний D-вираз є квазірегулярним.

Надалі покладаємо

$$\varepsilon_a = n_{l-} - n_{l+}, \qquad \varepsilon_b = n_{r+} - n_{r-} \tag{8.38}$$

для HD-виразу і

$$\varepsilon_a = n_{l-} - n_{l+} + \delta\widehat{\nu}, \qquad \varepsilon_b = n_{r+} - n_{r-} + \delta\widehat{\nu} \tag{8.39}$$

для SD-виразу. Крім того, покладаємо

$$\delta_a = \operatorname{sign}\varepsilon_a, \qquad \delta_b = \operatorname{sign}\varepsilon_b.$$

У випадку скалярного виразу непарного порядку (тобто скалярного SD-виразу)

$$\varepsilon_a = n_{l-} - n_{l+} + \delta, \qquad \varepsilon_b = n_{r+} - n_{r-} + \delta$$

Означення 8.7. Граничним комплексом для D-виразу $l[y]$ називається сукупність $\{\mathbb{H}_a,\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$, в якій $\mathbb{H}_a$ та $\mathbb{H}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори (3.67) і

$$\Gamma_a=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \widehat{\Gamma}_a\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}:\operatorname{dom}L_{max}\to\underbrace{\mathcal{H}_a\oplus\widehat{\mathcal{H}}_a\oplus\mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a},\quad \Gamma_b=\begin{pmatrix}\Gamma_{0b}\\ \widehat{\Gamma}_b\\ \Gamma_{1b}\end{pmatrix}:\operatorname{dom}L_{max}\to\underbrace{\mathcal{H}_b\oplus\widehat{\mathcal{H}}_b\oplus\mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b} \tag{8.40}$$

– сюр'єктивні лінійні оператори, що задовільняють тотожностям

$$[y,z]_a=i\delta_a(\widehat{\Gamma}_a y,\widehat{\Gamma}_a z)-(\Gamma_{1a}y,\Gamma_{0a}z)+(\Gamma_{0a}y,\Gamma_{1a}z),\quad y,z\in\operatorname{dom}L_{max} \tag{8.41}$$

$$[y,z]_b=i\delta_b(\widehat{\Gamma}_b y,\widehat{\Gamma}_b z)-(\Gamma_{1b}y,\Gamma_{0b}z)+(\Gamma_{0b}y,\Gamma_{1b}z),\quad y,z\in\operatorname{dom}L_{max}. \tag{8.42}$$

Зауваження 8.8. З (8.36), (8.38), (8.39) та (3.177), (3.179) випливає, що граничний комплекс для D-виразу є граничним комплексом для еквівалентної системи (8.30) в сенсі означення 3.20. Тому внаслідок леми 3.19 граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a,\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$ існує для кожного D-виразу.

Зауваження 8.9. Якщо для D-виразу справедливі рівності

$$\varepsilon_a=\varepsilon_b=0, \tag{8.43}$$

то внаслідок (8.36), еквівалентностей (3.178), (3.179) та зауваження 3.22 граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a,\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$ задається рівностями (3.73) і

$$\Gamma_a=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}\\ \Gamma_{1a}\end{pmatrix}:\operatorname{dom}L_{max}\to\underbrace{\mathcal{H}_a\oplus\mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a},\qquad \Gamma_b=\begin{pmatrix}\Gamma_{0b}\\ \Gamma_{1b}\end{pmatrix}:\operatorname{dom}L_{max}\to\underbrace{\mathcal{H}_b\oplus\mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b} \tag{8.44}$$

Крім того, відповідні тотожності (8.41) та (8.42) приймають вигляд (3.77)

Зауваження 8.10. У випадку регулярної кінцевої точки a (відп. b) в означенні 8.7 граничного комплексу можна покласти $\Gamma_a y=\mathbf{y}(a)$ (відп. $\Gamma_b y=\mathbf{y}(b)$). Якщо ж $\{\mathbb{H}_a,\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$ – граничний комплекс для виразу $l[y]$ з сингулярною кінцевою точкою a (відп. b), то вектор $\Gamma_a y$ (відп. $\Gamma_b y$) є сингулярним граничним значенням функції $y\in\operatorname{dom}L_{max}$ в точці a (відп. b) в сенсі [14, гл. 13.2] (детальніше див. зауваження 3.23).

Наступні випадки д1 - д3 для D-виразу еквівалентні відповідно випадкам 1 - 3 для симетричної системи (8.30) (див. п. 3.4.2. та зауваження 3.60).

Випадок д1. $\varepsilon_b\ge\varepsilon_a\ge 0$

Випадок д2. $\varepsilon_b\ge 0\ge\varepsilon_a$

Випадок д3. $0\ge\varepsilon_b\ge\varepsilon_a$

Внаслідок зауваження 3.29 випадками д1 - д3 вичерпуються D-вирази, для яких $n_+(L_{min})\ge n_-(L_{min})$.

Надалі $\{\mathbb{H}_a,\Gamma_a;\mathbb{H}_b,\Gamma_b\}$ – граничний комплекс (8.40) для D-виразу. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\widehat{\mathcal{H}}_a\subset\widehat{\mathcal{H}}_b$ у випадку д1 і $\widehat{\mathcal{H}}_b\subset\widehat{\mathcal{H}}_a$ у випадку д3. За допомоги формул (3.78) - (3.92) для кожного з випадків д1 - д3 будуються скінченновимірні гільбертові простори $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_1\subset\mathcal{H}_0$ і лінійні оператори $\Gamma_j':\operatorname{dom}L_{max}\to\mathcal{H}_j,\ j\in\{0,1\}$ (в цих формулах $\operatorname{dom}\mathcal{T}_{max}$ замінюється на $\operatorname{dom}L_{max}$).

Застосування теорем 3.27, 3.31 до системи (8.30) з огляду на твердження 8.2, (3) дає такі теореми.

Теорема 8.11. *Припустимо, що* $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$ *і* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (8.40) *для* D*-виразу. Крім того, нехай* $\mathcal{H}_j$ *– скінченновимірні гільбертові простори і* $\Gamma'_j : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, *– лінійні оператори* (3.81)–(3.83) *у випадку* д1, (3.84)–(3.86) *у випадку* д2 *й* (3.90)–(3.92) *у випадку* д3. *Тоді сукупність* $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma'_0, \Gamma'_1\}$ *є граничною трійкою для* L_{max}.

Теорема 8.12. *Нехай* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$*. Тоді:*

(1) $\delta_a = \delta_b =: \widetilde{\delta}$ *й існує граничний комплекс* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *для* D*-виразу, такий що*

$$\mathbb{H}_a = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_a, \qquad \mathbb{H}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b \tag{8.45}$$

$$\Gamma_a = \begin{pmatrix} \Gamma_{0a} \\ \widehat{\Gamma}_a \\ \Gamma_{1a} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} L_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_a}_{\mathbb{H}_a}, \quad \Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} L_{max} \to \underbrace{\mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b}_{\mathbb{H}_b}. \tag{8.46}$$

(3) *Якщо* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (8.45), (8.46)*, то гільбертів простір* $\mathcal{H}$ *і оператори* $\Gamma'_j : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}$, $j \in \{0, 1\}$*, задані рівностями*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b \tag{8.47}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\widetilde{\delta}(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b) y \oplus \Gamma_{0b} y (\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b) \tag{8.48}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b) y \oplus (-\Gamma_{1b} y)(\in \mathcal{H}_a \oplus \widehat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.49}$$

утворюють (звичайну) граничну трійку $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma'_0, \Gamma'_1\}$ *для* L_{max}.

Означення 8.13. Граничні трійки, побудовані в теоремах 8.11 та 8.12, називаються розділеними граничними трійками для L_{max}.

Зауваження 8.14. Припустимо, що виконано умову (8.43). Тоді внаслідок (8.37) $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ і згідно із зауваженням 8.9 граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ приймає вигляд (8.44). Тому згідно з теоремою 8.12 розділена гранична трійка $\{\mathcal{H}, \Gamma'_0, \Gamma'_1\}$ для L_{max} задається рівностями

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b \tag{8.50}$$

$$\Gamma'_0 y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus \Gamma_{0b} y (\in \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b) \tag{8.51}$$

$$\Gamma'_1 y = \Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y)(\in \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.52}$$

Зауваження 8.15. Якщо для HD-виразу кінцева точка a або b є квазірегулярною і $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$, то виконано умову (8.43). Тому для такого виразу розділена гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma'_0, \Gamma'_1\}$ для L_{max} задається рівностями (8.50) - (8.52).

В наступних двох твердженнях, які є наслідками застосування тверджень 3.61 та 3.62 до системи (8.30), дається опис різних класів розширень $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ в термінах граничних умов на кінцях проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$.

Твердження 8.16. *Припустимо, що для* D*-виразу* $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$*. Крім того, нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (8.40) *і* J_a, J_b *– оператори* (3.68), (3.69)*. Тоді:*

(1) *Для кожної допустимої операторної пари* $\widetilde{\theta} = \{C_a, C_b\}$ *з операторами* $C_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}]$ *та* $C_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$, *де* $\mathcal{K}$ *– скінченновимірний гільбертів простір, рівності (граничнні умови)*

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, C_a \Gamma_a y + C_b \Gamma_b y = 0\}, \qquad \widetilde{L} = L_{max} \restriction \operatorname{dom} \widetilde{L} \tag{8.53}$$

задають розширення $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *і, зворотно, для кожного розширення* $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *існує едина (з точністю до еквівалентності) допустима операторна пара* $\widetilde{\theta} = \{C_a, C_b\}$ *з операторами* $C_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}]$ *та* $C_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}]$, *така що має місце* (8.53).

(2) *Граничні умови* (8.53) *задають максимальне дисипативне (акумулятивне) розширення* $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *тоді й тільки тоді, коли* $\dim \mathcal{K} = n_-(L_{min})$ *(відп.* $\dim \mathcal{K} = n_+(L_{min})$*) і справедливі рівності* (3.184). *Крім того, якщо* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min}) =: d$, *то справедлива еквівалентність*

$$\widetilde{L} = \widetilde{L}^* \iff \dim \mathcal{K} = d \;\text{ й }\; C_a J_a C_a^* = C_b J_b C_b^*.$$

Твердження 8.17. *Припустимо, що для* D*-виразу* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$. *Крім того, нехай* $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ *– граничний комплекс* (8.46), $\mathcal{H}$ *– гільбертів простір* (8.47) *і* $\Gamma'_j : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}$, $j \in \{0, 1\}$,*– оператори* (8.48),(8.49) *(за умови* (8.43) *граничний комплекс задається рівностями* (8.44), *а простір* $\mathcal{H}$ *та оператори* Γ'_j *– рівностями* (8.50) - (8.52)*). Тоді:*

(1) *Для кожної операторної пари (лінійного відношення)* $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *з операторами* $C_j \in [\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ *(*$\mathcal{K}$ *– скінченновимірний гільбертів простір) граничні умови*

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, C_0 \Gamma'_0 y + C_1 \Gamma'_1 y = 0\}, \qquad \widetilde{L} = L_{max} \restriction \operatorname{dom} \widetilde{L} \tag{8.54}$$

задають розширення $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *і, зворотно, для кожного розширення* $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *існує едина операторна пара* $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$, *така що має місце* (8.54).

(2) *Граничні умови* (8.54) *задають максимальне дисипативне, максимальне акумулятивне або самоспряжене розширення* $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *тоді й тільки тоді, коли операторна пара* $\theta = \{C_0, C_1\}$ *є максимальною дисипативною, максимальною акумулятивною або самоспряженою відповідно.*

Нехай за умов твердження 8.16 $\mathcal{K}_a$ та $\mathcal{K}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори і $N_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}_a]$ та $N_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}_b]$ –сюр'єктивні оператори. Тоді розширення $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ задається розділеними граничним умовами, якщо

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, N_a \Gamma_a y = 0, \; N_b \Gamma_b y = 0\}, \qquad \widetilde{L} = L_{max} \restriction \operatorname{dom} \widetilde{L}. \tag{8.55}$$

Припустимо, що виконано (8.43). Тоді згідно зауваження 8.9 граничний комплекс $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ задається рівностями (3.73), (8.44). Нехай $N_a \in [\mathbb{H}_a, \mathcal{K}_a]$, $N_b \in [\mathbb{H}_b, \mathcal{K}_b]$ і

$$N_a = (N_{a0}, N_{a1}) : \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_a \to \mathcal{K}_a, \qquad N_b = (N_{b0}, N_{b1}) : \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b \to \mathcal{K}_b$$

– блочні зображення операторів N_a та N_b. Тоді розділені граничні умови (8.55) можна зобразити як

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \, N_{a0} \Gamma_{0a} y + N_{a1} \Gamma_{1a} y = 0, \; N_{b0} \Gamma_{0b} y + N_{b1} \Gamma_{1b} y = 0\}, \quad \widetilde{L} = L_{max} \restriction \operatorname{dom} \widetilde{L} \tag{8.56}$$

Граничні умови (8.56) називаються самоспряженими, якщо $\widetilde{L} = \widetilde{L}^*$.

В наступній теоремі, яка є наслідком твердження 8.2 та теореми 3.66, характеризуються розділені самоспряжені гранині умови для диференціальних виразів довільного порядку.

Теорема 8.18. *Розділені самоспряжені граничні умови для D-виразу існують тоді й тільки тоді, коли виконується* (8.43). *Для D-виразу з квазірегулярною кінцевою точкою a або b умова* (8.43) *еквівалентна тому, що цей вираз є HD-виразом і $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$.*

Якщо (8.43) *виконано, то розділені граничні умови* (8.56) *є самоспряженими тоді й тільки тоді, коли операторні пари $\{N_{a0}, N_{a1}\}$ та $\{N_{b0}, N_{b1}\}$ є самоспряженими.*

Наслідок 8.19. *Припустимо, що D-вираз є регулярним. У випадку HD-виразу покладемо*

$$\Gamma_0' y := \mathbf{y}_0(a) \oplus \mathbf{y}_0(b) \, (\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}) \tag{8.57}$$

$$\Gamma_1' y := \mathbf{y}_1(a) \oplus (-\mathbf{y}_1(b)) \, (\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.58}$$

де $\mathbf{y}_0(t)$ та $\mathbf{y}_1(t)$ – функції (8.5) *для виразу парного порядку і* (8.21), (8.22) *для виразу непарного порядку. У випадку SD-виразу покладемо*

$$\Gamma_0' y := \mathbf{y}_0(a) \oplus i\delta(\widehat{Q}(a)y^{(k)}(a) - \widehat{Q}(b)y^{(k)}(b)) \oplus \mathbf{y}_0(b) \, (\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}) \tag{8.59}$$

$$\Gamma_1' y := \mathbf{y}_1(a) \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{Q}(a)y^{(k)}(a) + \widehat{Q}(b)y^{(k)}(b)) \oplus (-\mathbf{y}_1(b)) \, (\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} = \mathbb{H}), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.60}$$

де $\mathbf{y}_0(t)$ та $\mathbf{y}_1(t)$ – функції (8.21), (8.22) *і δ визначено в* (8.14). *Тоді:*

(1) *Граничні умови* (8.54) *з операторами Γ_0' та Γ_1' вигляду* (8.57), (8.58) *у випадку HD-виразу і* (8.59), (8.60) *у випадку SD-виразу задають бієктивну відповідність між усіма самоспряженими операторними парами (лінійними відношеннями) $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbb{H})$ і усіма розширеннями $\widetilde{L} = \widetilde{L}^* \in Ext_{L_{min}}$.*

(2) *Розділені самоспряжені граничні умови існують лише для HD-виразів. Ці умови мають вигляд*

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \; N_{a0}\mathbf{y}_0(a) + N_{a1}\mathbf{y}_1(a) = 0, \; N_{b0}\mathbf{y}_0(b) + N_{b1}\mathbf{y}_1(b) = 0\},$$

де $\{N_{a0}, N_{a1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$ та $\{N_{b0}, N_{b1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$ – самоспряжені опраторні пари.

Доведення. З (8.34) випливає, що сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій

$$\Gamma_a y = \mathbf{y}_1(a) \oplus (-\mathbf{y}_0(a)), \qquad \Gamma_b y = \mathbf{y}_0(b) \oplus \mathbf{y}_1(b), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}$$

для HD-виразу і

$$\Gamma_a y = \mathbf{y}_1(a) \oplus \widehat{Q}(a)y^{(k)}(a) \oplus (-\mathbf{y}_0(a)), \qquad \Gamma_b y = \mathbf{y}_0(b) \oplus \widehat{Q}(b)y^{(k)}(b) \oplus \mathbf{y}_1(b), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}$$

для SD-виразу, є граничним комплексом. Звідси та з твердження 8.17 випливає твердження (1). Твердження (2) є наслідком теореми 8.18. □

Наслідок 8.20. *Припустимо, що D-вираз є квазірегулярним. Нехай $c \in \mathcal{I}$ й $Y_c(t)$ – $[\mathbb{H}, H]$-значний операторний розв'язок рівняння $l[y] = 0$, такий що $\mathbf{Y}_c(c) = I_{\mathbb{H}}$. Тоді:*

(1) *Рівності*

$$\Gamma_b y := \lim_{t \to b} \mathbf{Y}_c^{-1}(t)\mathbf{y}(t) = \lim_{t \to b}(-J_\eta \mathbf{Y}_c^*(t) J_\eta \mathbf{y}(t)), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.61}$$

$$\Gamma_a y := \lim_{t \to a} \mathbf{Y}_c^{-1}(t)\mathbf{y}(t) = \lim_{t \to a}(-J_\eta \mathbf{Y}_c^*(t) J_\eta \mathbf{y}(t)), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.62}$$

коректно задають оператори $\Gamma_a : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbb{H}$ *та* $\Gamma_b : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbb{H}$.

(2) *Нехай*

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}, \quad \Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.63}$$

– блочні зображення операторів Γ_a *та* Γ_b *у випадку* HD*-виразу і*

$$\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \widehat{\Gamma}_a, \Gamma_{1a})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.64}$$

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.65}$$

– блочні зображення тих самих операторів у випадку SD*-виразу. Покладемо*

$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus \Gamma_{0b} y \, (\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}), \quad \Gamma_1' y = \Gamma_{0a} y \oplus (-\Gamma_{1b} y) \, (\in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.66}$$

у випадку HD*-виразу і*

$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\delta(\widehat{\Gamma}_a y - \widehat{\Gamma}_b y) \oplus \Gamma_{0b} y \, (\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}) \tag{8.67}$$

$$\Gamma_1' y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a y + \widehat{\Gamma}_b y) \oplus (-\Gamma_{1b} y) \, (\in \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.68}$$

у випадку SD*-виразу. Тоді:*

(a) *справедливим є твердження (1) наслідку 8.19 з операторами* Γ_0' *та* Γ_1' *вигляду* (8.66) *у випадку* HD*-виразу і* (8.67), (8.68) *у випадку* SD*-виразу.*

(b) *розділені самоспряжені граничні умови існують лише для* HD*-виразів. Ці умови задаються формулою* (8.56), *де* Γ_{ja} *та* Γ_{jb}, $j \in \{0, 1\}$, *визначені рівностями* (8.61) - (8.63) *і* $\{N_{a0}, N_{a1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$ *та* $\{N_{b0}, N_{b1}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$ *– самоспряжені опраторні пари.*

Доведення. Твердження (1) є наслідком застосування твердження 4.28, (1) до системи (8.30). Крім того, з твердження 4.28, (1) випливає, що сукупність $\{\mathbb{H}_a, \Gamma_a; \mathbb{H}_b, \Gamma_b\}$ є граничним комплексом. Тому внаслідок твердження 8.17 та теореми 8.18 вірним є твердження (2). ☐

Зауваження 8.21. Так само, як і в наслідку 8.20, розділені самоспряжені граничні умови параметризуються в роботі [71] для квазірегулярних скалярних виразів другого порядку та в роботі [34] для квазірегулярних двочленних скалярних виразів парного порядку. Наслідок 8.19 доведено в [42]; крім того,в роботі [45] міститься параметризація усіх самоспряжених (зокрема, розділених) граничних умов для квазірегулярних HD-виразів у тому ж самому вигляді, що і в наслідку 8.20. Відзначимо, що в [42, 45, 113] розглядаються диференціальні вирази з $[H]$-значними коефіцієнтами ($\dim H \le \infty$).

8.3. m-функції та спектральні функції для HD-виразів

8.3.1. m-функції для HD-виразів

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для HD-виразу (8.1) або (8.12). Тоді внаслідок зауваження 3.45, застосованого до гамільтонової системи (8.30), справедливі нерівності

$$km + \nu_0 \le n_\pm(L_{min}) \le \eta m, \tag{8.69}$$

де ν_0 визначено в (8.31). Крім того, $n_{l+} = n_{l-}(= \eta)$; тому $\varepsilon_a = 0$ і справедлива еквівалентність

$$n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min}) \iff \varepsilon_b \geq 0.$$

Припустимо, далі, що $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$. Нехай $\mathcal{H}_b,\ \widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори і

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \widehat{\Gamma}_b \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{8.70}$$

– сюр'єктивний оператор, що задовільняє тотожності

$$[y,z]_b = i(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z) - (\Gamma_{1b} y, \Gamma_{0b} z) + (\Gamma_{0b} y, \Gamma_{1b} z), \quad y, z \in \operatorname{dom} L_{max}. \tag{8.71}$$

Покладемо

$$\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b} = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b)^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \widehat{\mathcal{H}}_b, \tag{8.72}$$

так що оператор Γ_b допускає зображення

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma}_{0b} \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} L_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \mathcal{H}_b. \tag{8.73}$$

Означення 8.22. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій Γ_b – оператор (8.73), називається b-граничним комплексом для HD-виразу.

Зауваження 8.23. У випадку $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ (і тільки в цьому випадку) b-граничним комплексом є сукупність $\{\mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\mathcal{H}_b$ – скінченновимірний гільбертів простір і

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} \Gamma_{0b} \\ \Gamma_{1b} \end{pmatrix} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_b \tag{8.74}$$

– сюр'єктивний оператор, що задовільняє другій тотожності в (3.77).

Надалі в межах цього пункту вважаються виконаними такі припущення:

(HD1) Кінцева точка a є регулярною для HD-виразу (8.1) або (8.12) і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$.

(HD2) Задано оператор

$$U = (u_1, u_2) : \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \to \mathbf{H}, \tag{8.75}$$

що задовільняє (5.10) (тут $\mathbf{H}$ – простір (8.3) або (8.17)).

(HD3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс (8.73).

Зауваження 8.24. Внаслідок зауваження 8.3 b-граничний комплекс для HD-виразу є b-граничним комплексом для еквівалентної гамільтонової системи (8.30) в сенсі означення 3.48. Тому умови (HD1) - (HD3) еквіалентні умовам (Г1)-(Г3) для (визначеної) гамільтонової системи (8.30) (див. п. 5.4.1.).

Надалі з оператором U (8.75) пов'язується оператор $\Gamma_{1a} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H}$, визначений рівністю

$$\Gamma_{1a} y = u_1 \mathbf{y}_0(a) + u_2 \mathbf{y}_1(a), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.76}$$

і операторний розв'язок $\varphi_U(\cdot, \lambda)(\in [\mathbf{H}, H])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, рівняння (8.7), визначений початковою умовою

$$\boldsymbol{\varphi}_U(a, \lambda) = \begin{pmatrix} u_2^* \\ -u_1^* \end{pmatrix} : \mathbf{H} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.77}$$

(у формулі (8.76) $\mathbf{y}_0(t)$ та $\mathbf{y}_1(t)$ – функції (8.5) або (8.21), (8.22)). Якщо

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.78}$$

– J_η-унітарне розширення оператора U, то

$$\widetilde{U} \boldsymbol{\varphi}_U(a, \lambda) = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{H}} \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbf{H} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}. \tag{8.79}$$

Надалі з J_η-унітарним оператором $\widetilde{U}$ вигляду (8.78) пов'язуються оператор $\Gamma_{0a} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H}$, визначений рівністю

$$\Gamma_{0a} y = u_3 \mathbf{y}_0(a) + u_4 \mathbf{y}_1(a), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.80}$$

та операторний розв'язок $\psi_U(\cdot, \lambda)(\in [\mathbf{H}, H])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, рівняння (8.7), визначений початковою умовою

$$\widetilde{U} \boldsymbol{\psi}(a, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\mathbf{H}} \end{pmatrix} : \mathbf{H} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}. \tag{8.81}$$

Далі в цьому пункті наводяться результати для HD-виразів, які є безпосередніми наслідками твердження 8.2, зауваження 8.24 та відповідних результатів для гамільтонових систем (див. підрозділ 5.4.)

За припущень (HD1) - (HD3) вкороченим граничним параметром для HD-виразу називається та ж сама операторна пара $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b)$, що і в означенні 5.22. Якщо ж $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b$ і вкорочений граничний параметр $\dot{\tau} \in \widetilde{R}(\mathcal{H}_b)$. Крім того, у цьому випадку граничний параметр $\dot{\tau}$ називається самоспряженим, якщо він є самоспряженою парою операторів (5.179).

Теорема 8.25. *Нехай за припущень* (HD1) - (HD3) $\dot{\tau}$ *– вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдиний операторний розв'язок* $v_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ *рівняння* (8.7), *що задовільняє граничним умовам*

$$\Gamma_{1a} v_{\dot{\tau}}(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}, \quad \dot{C}_0(\lambda) \widetilde{\Gamma}_{0b} v_{\dot{\tau}}(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda) \Gamma_{1b} v_{\dot{\tau}}(\lambda) = 0 \tag{8.82}$$

Нехай за припущень (HD1) - (HD3) $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.78) оператора U і Γ_{0a} – оператор (8.80). Припустимо також,що $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.113) і $v_{\dot{\tau}}(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ – операторний розв'язок рівняння (8.7), визначений в теоремі 8.25.

Означення 8.26. Оператор-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot):\mathbb{C}_+\to[\mathbf{H}]$, визначена рівністю

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda)=\Gamma_{0a}v_{\dot{\tau}}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{8.83}$$

називається m-функцією (функцією Вейля - Тітчмарша) HD-виразу, що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot{\tau}$. У випадку $n_+(L_{min})=n_-(L_{min})$ m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$, що відповідає самоспряженому вкороченому граничному параметру $\dot{\tau}$, називається каноничною.

Зауваження 8.27. Очевидно, що m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ HD-виразу є також m-функцією еквівалентної гамільтонової системи (8.30) в сенсі означення 5.41.

Твердження 8.28. *m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ HD-виразу є единою $[\mathbf{H}]$-значною функцією, визначеною в $\mathbb{C}_+$ і такою, що операторний розв'язок*

$$v_{\dot{\tau}}(t,\lambda):=\varphi_U(t,\lambda)m_{\dot{\tau}}(\lambda)-\psi(t,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C}_+$$

рівняння (8.7) *належить до $L^2[\mathbf{H},H]$ і задовільняє другій граничній умові в* (8.82).

Твердження 8.29. *m-функція $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ HD-виразу належить до класу $R_u[\mathbf{H}]$ і задовільняє нерівності*

$$(\mathrm{Im}\lambda)^{-1}\cdot\mathrm{Im}\,m_{\dot{\tau}}(\lambda)\geq\int_{\mathcal{I}}v^*_{\dot{\tau}}(t,\lambda)v_{\dot{\tau}}(t,\lambda)\,dt,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+. \tag{8.84}$$

Для каноничної m-функції $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ нерівність (8.84) *стає рівністю.*

Твердження 8.30. *Нехай виконано припущення* (HD1) - (HD3). *Тоді для кожного $\lambda\in\mathbb{C}_+$ існує едина пара операторних розв'язків $v_0(\cdot,\lambda)\in L^2[\mathbf{H},H]$ та $u_+(\cdot,\lambda)\in L^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b,H]$ рівняння* (8.7), *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}v_0(\lambda)=-I_{\mathbf{H}},\qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}v_0(\lambda)=0,\qquad \Gamma_{1a}u_+(\lambda)=0,\qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}u_+(\lambda)=I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}.$$

Якщо, крім того, $\widetilde{U}$ – J-унітарне розширення (8.78) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.80), *то рівність*

$$M_+(\lambda)=\begin{pmatrix}m_0(\lambda)&M_2(\lambda)\\M_3(\lambda)&M_4(\lambda)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\Gamma_{0a}v_0(\lambda)&\Gamma_{0a}u_+(\lambda)\\-\Gamma_{1b}v_0(\lambda)&-\Gamma_{1b}u_+(\lambda)\end{pmatrix}:\mathbf{H}\oplus\widetilde{\mathcal{H}}_b\to\mathbf{H}\oplus\mathcal{H}_b,\quad \lambda\in\mathbb{C}_+, \tag{8.85}$$

задає голоморфну оператор-функцію $M_+(\cdot)$, яка збігаїться з функцією Вейля розділеної граничної трійки для L_{max}.

В наступній теоремі дається параметризація усіх m-функцій HD-виразу безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра.

Теорема 8.31. *Нехай за припущень* (HD1) - (HD3) *$\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення* (8.78) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.80). *Припустимо також, що $M_+(\cdot)$ – оператор-функція*(8.85). *Тоді для m-функцій HD-виразу* (8.1) *або* (8.12) *вірними є твердження теореми 5.44.*

У випадку квазірегулярного HD-виразу можлива дещо інша параметризація усіх m-функцій. Саме, застосовуючи твердження 5.46 та теорему 5.50 до системи (8.30) та приймаючи до уваги зауваження 8.27, отримуємо таку теорему.

Теорема 8.32. *Припустимо,що:*

1) HD*-вираз є квазірегулярним і кінцева точка* a *є регулярною;*

2) U *-оператор* (8.75)*, що задовільняє* (5.10)*, і* $\widetilde{U}$ *–* J_η*-унітарне розширення* (8.78) *оператора* U*;*

3) $Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = (\varphi_U(t,\lambda),\, \psi(t,\lambda))$*, тобто* $Y_{\widetilde{U}}(\cdot,\lambda)(\in [\mathbb{H}, H])$ *– операторний розв'язок рівняння* (8.7) *з початковою умовою* $\widetilde{U}\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(a,\lambda) = I_{\mathbb{H}}$.

Тоді:

(1) *Рівність*

$$\Gamma_b y := \lim_{t\uparrow b} \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)y(t) = \lim_{t\uparrow b}(-J_\eta \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{*}(t,0)J_\eta y(t)), \quad y = y(\cdot) \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.86}$$

задає оператор $\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$*, такий що сукупність* $\{\mathbf{H}, \Gamma_b\}$ *є* b*-граничним комплексом для* HD*-виразу.*

(2) *Рівність*

$$\dot{W}(\lambda) = \lim_{t\uparrow b} \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(t,\lambda) = \lim_{t\uparrow b}(-J_\eta \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{*}(t,0)J_\eta \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(t,\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{8.87}$$

задає цілу оператор-функцію $\dot{W}(\lambda)(\in [\mathbb{H}])$*. Якщо*

$$\dot{W}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(\lambda) & \dot{w}_2(\lambda) \\ \dot{w}_3(\lambda) & \dot{w}_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \to \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{8.88}$$

– блочне зображення функції $\dot{W}(\cdot)$*, то*

$$\dot{w}_1(\lambda) = I + \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0)\varphi_U(t,\lambda)\,dt, \quad \dot{w}_2(\lambda) = \lambda \int_{\mathcal{I}} \psi^*(t,0)\psi(t,\lambda)\,dt \tag{8.89}$$

$$\dot{w}_3(\lambda) = -\lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,0)\varphi_U(t,\lambda)\,dt, \quad \dot{w}_4(\lambda) = I - \lambda \int_{\mathcal{I}} \varphi_U^*(t,0)\psi(t,\lambda)\,dt. \tag{8.90}$$

(3) *Для кожного вкороченого граничного параметра*

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}(\lambda) = \{\dot{C}_0(\lambda), \dot{C}_1(\lambda)\} \in \widetilde{R}(\mathbf{H}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{8.91}$$

відповідна m*-функція* $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *допускає зображення* (5.217)*. Якщо*

$$\dot{\tau} = \{\dot{C}_0, \dot{C}_1\} \in \widetilde{R}^0(\mathbf{H}).$$

– самоспряжений граничний параметр, то внаслідок (5.217) *відповідна канонична* m*-функціця* $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *допускає зображення*

$$m_{\dot{\tau}}(\lambda) = (\dot{C}_0\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1\dot{w}_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{8.92}$$

Зауваження 8.33. У випадку регулярного виразу твердження (3) теорема 8.32 є вірною також і з матрицею монодромії $\dot{W}(\lambda) = \mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(b,\lambda)$.

8.3.2. Спектральні функції для HD-виразів

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для HD-виразу. Нехай U – оператор (8.75), що задовільняє (5.10), й $\varphi_U(\cdot,\lambda)(\in[\mathbf{H},H])$ – операторний розв'язок рівняння (8.7) з початковою умовою (8.77). Тоді кожній функції $f\in\mathfrak{H}'$ відповідає неперервна функція $\widehat{f}_0(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbf{H}$, задана рівністю

$$\widehat{f}_0(s)=\int_{\mathcal{I}}\varphi_U^*(t,s)f(t)\,dt. \tag{8.93}$$

Означення 8.34. Функція розподілу $\sigma(\cdot):\mathbb{R}\to[\mathbf{H}]$ називається вкороченою спектральною функцією HD-виразу (відносно операторного розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$), якщо для кожної функції $f(\cdot)\in\mathfrak{H}'$ має місце включення $\widehat{f}_0\in\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H})$ і вірною є рівність Парсеваля $||\widehat{f}_0||_{\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H})}=||f||_{\mathfrak{H}}$.

Твердження 8.35. *Припустимо, що $\sigma(\cdot)$ – вкорочена спектральна функція HD-виразу. Тоді:*

(1) *Для кожної функції $f(\cdot)\in\mathfrak{H}$ інтеграл в (8.93) збігається за напівнормою в $\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H})$ до функції $\widehat{f}_0(\cdot)\in\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H})$, яка визначається однозначно з точністю до еквівалентності відносно цієї напівнорми.*

(1) *Рівність $Vf=\pi_\sigma\widehat{f}_0$, $f\in\mathfrak{H}$, задає ізометрію $V=V_\sigma\in[\mathfrak{H},L^2(\sigma;\mathbf{H})]$*

Фенкція $\widehat{f}_0(\cdot)$, визначена в твердженні 8.35, називається перетворенням Фур'є функції $f(\cdot)\in\mathfrak{H}$.

Зауваження 8.36. Внаслідок (8.27) та другої рівності в (8.29) перетворення Фур'є (8.93) можна зобразити у вигляді

$$\widehat{f}_0(s)=\int_{\mathcal{I}}\boldsymbol{\varphi}_U^*(t,s)\Delta_\eta(t)\dot{f}(t)\,dt. \tag{8.94}$$

Звідси та з твердження 8.2,(3) випливає, що множина вкорочених спектральних функцій HD-виразу (відносно $\varphi_U(\cdot,\lambda)$) збігається з множиною вкорочених спектральних функцій еквівалентної системи (8.30) (відносно $\boldsymbol{\varphi}_U(\cdot,\lambda)$).

Наступне твердження є наслідком зауваження 8.36 та твердження 6.27.

Твердження 8.37. *Якщо $\sigma(\cdot)$ – вкорочена спектральна функція HD-виразу, то для кожної функції $f(\cdot)\in\mathfrak{H}$ зворотне перетворення Фур'є задається формулою* (6.48), *в якій інтеграл збігається за нормою в $\mathfrak{H}$.*

У наступній теоремі дається параметризація всіх вкорочених спектральних функцій HD-виразу безпосередньо в термінах граничних умов.

Теорема 8.38. *Нехай виконано умови теореми 8.31. Тоді рівності*

$$m_{\dot\tau}(\lambda)=m_0(\lambda)+M_2(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda)-\dot{C}_1(\lambda)M_4(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_3(\lambda),\quad\lambda\in\mathbb{C}_+ \tag{8.95}$$

$$\sigma_{\dot\tau}(s)=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta}\operatorname{Im}m_{\dot\tau}(u+i\varepsilon)\,du \tag{8.96}$$

задають біективну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами $\dot\tau$ вигляду (5.113) *і усіма вкороченими спектральними функціями $\sigma(\cdot)=\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ HD-виразу (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$).*

Доведення. Застосовуючи теореми 6.64, 6.59 та твердження 6.62 до гамільтонової системи (8.30) та приймаючи до уваги зауваження 8.36, отримуємо потрібне твердження. ☐

У випадку квазірегулярного HD-виразу параметризацію (8.95), (8.96) усіх вкорочених спектральних функцій можна зобразити у дещо іншому вигляді. Саме, з теорем 8.32 та 8.38 випливає така

Теорема 8.39. *Нехай за умов теореми 8.32* $\dot W(\cdot)$ *– оператор-функція* (8.87) *з блочним зображенням* (8.88)*. Тоді рівність*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = (\dot C_0(\lambda)\dot w_1(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\dot w_3(\lambda))^{-1}(\dot C_0(\lambda)\dot w_2(\lambda) + \dot C_1(\lambda)\dot w_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{8.97}$$

сумісно з формулою обернення Стільтьєса (8.96) *задає бієктивну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ *вигляду* (8.91) *і усіма вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ HD*-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

Теорема 8.40. *Нехай виконано припущення* (HD1) *та* (HD2) *пункту 8.3.1.. Тоді:*

(1) *Рівність*

$$\operatorname{dom} L = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : u_1\mathbf{y}_0(a) + u_2\mathbf{y}_1(a)(=\Gamma_{1a}y) = 0 \ \ \text{та} \ \ [y,z]_b = 0, \ z \in \operatorname{dom} L_{max}\} \tag{8.98}$$

задає симетричний оператор $L \in Ext_{L_{min}}$*, такий що існує бієктивна відповідність* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\widetilde L}(\cdot)$ *між усіма розширеннями* $\widetilde L \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L)$ *оператора* L *і усіма вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot)$ HD*-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*). Ця відповідність задається рівністю* (6.61)*, в якій* $F(\cdot)$ *– спектральна функція оператора* L*, породжена розширенням* $\widetilde L$*. Крім того, оператори* $\widetilde L$ *та оператор множення* $\Lambda_{\sigma_{\widetilde L}}$ *в просторі* $L^2(\sigma_{\widetilde L};\mathbf{H})$ *унітарно еквівалентни.*

(2) *Кратність спектра кожного розширення* $\widetilde L \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L)$ *не перевищує* s*, де* $s = k$ *для скалярного виразу* (8.1) *і* $s = km + \nu_0 (= \dim \mathbf{H})$ *для довільного* HD*-виразу (тут* ν_0 *визначено в* (8.31)*).*

Доведення. Твердження (1) випливає із зауваження 8.36 та теорем 6.64, 6.60. Твердження (2) є наслідком твердження (1). ☐

Із зауваження 8.36 та наслідку 6.61 випливає

Наслідок 8.41. *Нехай за припущень* (HD1) - (HD3) *пункту 8.3.1.* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр,* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *– вкорочена спектральна функція* HD*-виразу і* $V_\sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\sigma;\mathbf{H})]$ *– відповідне пертворення Фур'є. За цих припущень* V_σ *є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ *і* $\dot\tau$ *є самоспряженим вкороченим граничним параметром* (5.179)*. Якщо ця умова виконана, то оператор* $\widetilde L_{\dot\tau} \in \mathrm{Self}(L)$*, визначений розділеними самоспряженими граничними умовами*

$$\operatorname{dom} \widetilde L_{\dot\tau} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : u_1\mathbf{y}_0(a) + u_2\mathbf{y}_1(a) = 0, \ \ \dot C_0\Gamma_{0b}y + \dot C_1\Gamma_{1b}y = 0\}, \tag{8.99}$$

є унітарно еквівалентним оператору множення Λ_σ *за допомоги* V_σ*.*

Зауваження 8.42. Якщо кінцева точка a є регулярною для HD-виразу, то внаслідок (8.69) мінімально можливими індексами дефекту опретора L_{min} є

$$n_+(L_{min}) = km + \nu_0, \qquad n_-(L_{min}) = km + \nu_0,$$

де ν_0 визначено в (8.31). У випадку HD-виразів з мінімальними індексами дефекту $n_\pm(L_{min})$ попередні результати істотно спрощуються. Саме, за допомоги твердження 8.2 неважко перенести на такі вирази результати, отримані в п. 6.5.3. для гамільтонових систем.

Зауваження 8.43. Припустимо, що для диференціального виразу парного порядку (8.1) $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$, $\dot\tau$ – самоспряжений вкорочений граничний параметр (5.179) і $\widetilde{L}_{\dot\tau} \in \mathrm{Self}(L)$ – розширення (8.99). Тоді внаслідок теореми 5.35 резольвента $(\widetilde{L}_{\dot\tau} - \lambda)^{-1}$ допускає зображення

$$((\widetilde{L}_{\dot\tau} - \lambda)^{-1} f)(x) = \int_{\mathcal{I}} G_{\dot\tau}(x,t,\lambda) f(t)\, dt, \quad f(\cdot) \in \mathfrak{H}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

з функцією Гріна $G_{\dot\tau}(x,t,\lambda)$ вигляду (5.168). Звідси випливає, що для виразу парного порядку з рівними індексами дефекту мінімального оператора канонична m-функція $m(\cdot) = m_{\dot\tau}(\cdot)$ в сенсі означення 8.26 збігається з класичною функцією Вейля - Тітчмарша (або характеристичною матрицею, див., наприклад, [40]). Відзначимо також, що для квазірегулярного HD-виразу з $[H]$-значними ($\dim H \leq \infty$) коефіцієнтами означення канонічної m-функції (характеристичної матриці) у вигляді, еквівалентному означенню 8.26, міститься в роботі [45] (див. також [113]).

Зауваження 8.44. Для квазірегулярних виразів Штурма - Ліувілля $l[y] = -y'' + q(t)y$ на півосі $\mathbb{R}_+$ з операторним $[H]$-значним потенціалом $q(\cdot)$ параметризацію всіх m-функцій у вигляді (5.217) отримано в роботі [12]. В цій роботі коефіцієнти $\dot w_j(\lambda)$ визначаються рівностями (8.89), (8.90). Для канонічних m-функцій теорему 8.32 (за винятком формул (8.89) та (8.90)) доведено в роботі [71] у випадку скалярного квазірегулярного виразу Штурма - Ліувілля та в роботі [45] у випадку квазірегулярного HD-виразу з $[H]$-значними ($\dim H \leq \infty$) коефіцієнтами. Відзначимо також, що для довільного (необов'язково квазірегулярного) виразу парного порядку з $[H]$-значними ($\dim H \leq \infty$) коефіцієнтами теорему 8.31 доведено в [36] (див. також [103]).

Зауваження 8.45. Нагадаємо, що вкорочена спектральна функція $\sigma(\cdot)$ називається ортогональною, якщо відповідне перетворення Фур'є V_σ є унітарним оператором. Той факт, що канонична m-функція (характеристична матриця) $m(\cdot)$ виразу парного порядку (8.1) породжує за формулою (8.96) ортогональну вкорочену спектральну функцію $\sigma(\cdot)$, є добре відомим класичним результатом (див., наприклад, [40]). Поруч з тим з теореми 8.38 та наслідку 8.41 випливає, що в такий спосіб (тобто за допомоги канонічних m-функцій) вичерпуються усі ортогональні вкорочені спектральні функції виразу (8.1) (і навіть HD-виразу непарного порядку (8.12)).

8.4. m-функції та спектральні функції для SD-виразів

8.4.1. m-функції для SD-виразів

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для SD-виразу (8.12). Тоді внаслідок зауваження 3.45, застосованого до системи (8.30), справедливі нерівності (див. також [82])

$$km + \nu_{0-} \leq n_+(L_{min}) \leq (2k+1)m, \qquad km + \nu_{0+} \leq n_-(L_{min}) \leq (2k+1)m. \tag{8.100}$$

Зокрема, для скалярного SD-виразу (тобто, для скалярного виразу непарного порядку) співвідношення (8.100) приймають такий вигляд:

якщо $q_0(t) > 0$, то

$$k \le n_+(L_{min}) \le 2k+1, \qquad k+1 \le n_-(L_{min}) \le 2k+1; \tag{8.101}$$

якщо $q_0(t) < 0$, то

$$k+1 \le n_+(L_{min}) \le 2k+1, \qquad k \le n_-(L_{min}) \le 2k+1; \tag{8.102}$$

Нехай H' та $\widehat{H}$ – простори, визначені в (8.15), $\mathbf{H}$ – простір (8.17) і

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}} \to \widehat{H} \oplus \mathbf{H} \tag{8.103}$$

– оператор, що задовільняє співвідношенням (5.2) - (5.4). Надалі з таким оператором пов'язуються оператори $\widehat{\Gamma}_a : \operatorname{dom} L_{max} \to \widehat{H}$ та $\Gamma_{1a} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H}$, визначені рівностями

$$\widehat{\Gamma}_a y = u_1 \mathbf{y}_0(a) + u_2 \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a) + u_3 \mathbf{y}_1(a) \tag{8.104}$$

$$\Gamma_{1a} y = u_4 \mathbf{y}_0(a) + u_5 \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a) + u_6 \mathbf{y}_1(a), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.105}$$

та операторний розв'язок $\varphi_U(\cdot, \lambda)(\in [\mathbf{H}_0, H])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, рівняння (8.7), визначений початковою умовою

$$\boldsymbol{\varphi}_U(a,\lambda) = \begin{pmatrix} u_6^* & i\delta u_3^* \\ -i\delta u_5^* & u_2^* \\ -u_4^* & -i\delta u_1^* \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}. \tag{8.106}$$

(в формулах (8.104), (8.105) $\mathbf{y}_0(t)$ та $\mathbf{y}_1(t)$ – функції (8.21) та (8.22)). Якщо

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} u_7 & u_8 & u_9 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}} \tag{8.107}$$

– J_η-унітарне розширення оператора U, то

$$\widetilde{U}\boldsymbol{\varphi}_U(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{H}} & 0 \\ 0 & I_{\widehat{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}. \tag{8.108}$$

Надалі з J_η-унітарним оператором $\widetilde{U}$ (8.107) пов'зується оператор $\Gamma_{0a} : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathbf{H}$, визначений рівністю

$$\Gamma_{0a} y = u_7 \mathbf{y}_0(a) + u_8 \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a) + u_9 \mathbf{y}_1(a), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max}, \tag{8.109}$$

та операторний розв'язок $\chi(\cdot, \lambda)(\in [\mathbf{H}_0, H])$, $\lambda \in \mathbb{C}$, рівняння (8.7), визначений початковою умовою

$$\widetilde{U}\boldsymbol{\chi}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta I_{\widehat{H}} \\ I_{\mathbf{H}} & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}. \tag{8.110}$$

Наступне твердження є наслідком твердження 5.4, застосованого до симетричної системи (8.30).

Твердження 8.46. *Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для SD-виразу. Нехай U – оператор* (8.103)*, що задовільняє* (5.2) – (5.4)*, і $\widehat{\Gamma}_a$ та Γ_{1a} – оператори* (8.104)*,* (8.105)*. Тоді рівності*

$$\operatorname{dom} L = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \Gamma_{1a} y = \widehat{\Gamma}_a y = 0 \ \text{ та } \ [y,z]_b = 0, \ z \in \operatorname{dom} L_{max}\} \tag{8.111}$$

та $L = L_{max} \restriction \operatorname{dom} L$ задають симетричний оператор $L \in Ext_{L_{min}}$.

SD-вирази з регулярною кінцевою точкою a і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$ вичерпуються наступними випадками ад1 - ад3, які еквівалентні відповідно випадкам а1 - а3 для системи (8.30) (див. п. 3.4.3.):

Випадок ад1 $\delta = 1$ і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$

Випадок ад2 $\delta = -1$ і $n_+(L_{min}) - n_-(L_{min}) \geq \widehat{\nu}$

Випадок ад3 $\delta = -1$ і $0 \leq n_+(L_{min}) - n_-(L_{min}) \leq \widehat{\nu}$

Далі розглядаються лише SD-вирази, для яких має місце випадок ад1 або ад2.

Зауваження 8.47. Для скалярного виразу непарного порядку $\widehat{\nu} = 1$ і тому випадок ад3 відрізняється від випадку ад2 лише за умов $\delta = -1$ і $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$. Але за цих умов перехід до протилежного виразу призводить до випадку ад1. Таким чином, скалірні SD-вирази з $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$ вичерпуються фактично випадками ад1 та ад2.

Нехай $\mathcal{H}_b$, $\widehat{\mathcal{H}}_b$ – скінченновимірні гільбертові простори і Γ_b – сюр'єктивний оператор (8.70), що задовільняє тотожності (8.71).

У випадку ад1 без обмеження загальності вважаємо, що $\widehat{H} \subset \widehat{\mathcal{H}}_b$. За допомоги формул (3.127) - (3.129) (з $\operatorname{dom} L_{max}$ замість $\operatorname{dom} \mathcal{T}_{max}$) будуються простір $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ та оператори $\widetilde{\Gamma}_{0b}$, $\widehat{\Gamma}'_b$, такі що оператор Γ_b допускає зображення

$$\Gamma_b = (\widetilde{\Gamma}_{0b}, \widehat{\Gamma}'_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \widetilde{\mathcal{H}}_b \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b. \tag{8.112}$$

Означення 8.48. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій Γ_b – оператор (8.112), називається b-граничним комплексом типу 1 для SD-виразу.

У випадку ад2 нехай $\widetilde{\mathcal{H}}_b$ та $\widetilde{\Gamma}_{0b}$ – простір та оператор, визначені в (8.72), так що оператор Γ_b допускає зображення (8.73).

Означення 8.49. Сукупність $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$, в якій $\widetilde{\Gamma}_b$ – оператор (8.73), називається b-граничним комплексом типу 2 для SD-виразу.

Зауваження 8.50. Внаслідок зауваження 8.3 b-граничний комплекс типу 1 або 2 для SD-виразу є відповідно b-граничним комплексом типу 1 або 2 для еквівалентноє системи (8.30) у сенсі означень 3.33 та 3.35.

Далі для SD-виразів наводяться результати, які є безпосередніми наслідками твердження 8.2, зауваження 8.50 та відповідних результатів для симетричних систем (див. підрозділи 5.2. та 5.3.).

Припустимо, що:

(SD1) Кінцева точка a є регулярною для SD-виразу (8.12), $\delta = 1$ і $n_+(L_{min}) \geq n_-(L_{min})$ (тобто має місце випадок ад1).

(SD2) U – оператор (8.103), що задовільняє (5.2) - (5.4).

(SD3) $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 1 (8.112).

Зауваження 8.51. Внаслідок зауваження 8.50 умови (SD1) - (SD3) еквівалентні умовам 1) - 3) твердження 5.5 для симетричної системи (8.30).

Нехай $\dot{\mathcal{H}}_0$ та $\dot{\mathcal{H}}_1$ – простори (5.23). Тоді вкороченим граничним параметром для SD-виразу називається та ж сама операторна пара $\dot\tau \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}_0, \dot{\mathcal{H}}_1)$, що і в означенні 5.6. Якщо $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$, то $\dot{\mathcal{H}}_0 = \dot{\mathcal{H}}_1 := \dot{\mathcal{H}}$ і $\dot\tau \in \widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}})$. У цьому випадку вкорочений граничний параметр $\dot\tau$ називається самоспряженим, якщо він є самоспряженою парою операторів (5.33), (5.34).

Теорема 8.52. *Нехай за припущень* (SD1) - (SD3) $\dot{\mathcal{H}}_0$ *та* $\dot{\mathcal{H}}_1$ *– простори* (5.23) *і* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр* (5.31), (5.32). *Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ *рівняння* (8.7), *що задовільняють граничним умовам* $\Gamma_{1a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}$ *та* (5.43) - (5.45).

Нехай за припущень (SD1) - (SD3) $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.107) оператора U і Γ_{0a} – оператор (8.109). Крім того, нехай $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.31), (5.32) і $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ – операторні розв'язки рівняння (8.7), визначені в теоремі 8.52.

Означення 8.53. Оператор-функція $m_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbf{H}_0]$, визначена рівностю

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}(\lambda) \\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) \\ \widehat{\Gamma}_a\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) + \frac{i}{2}I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{8.113}$$

називається m-функцією SD-виразу (8.12) (у випадку ад1), що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot\tau$. Якщо $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ і $\dot\tau$ – самоспряжений вкорочений граничний параметр, то відповідна m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ називається каноничною.

Зауваження 8.54. Очевидно, що m-функція SD-виразу у випадку ад1 є також m-функцією еквівалентної симетричної системи (8.30) у випадку а1 (див. означення 5.11).

Твердження 8.55. *m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ SD-виразу (у випадку* ад1*) є єдиною* $[\mathbf{H}_0]$*-значною функцією, визначеною в* $\mathbb{C}_+$ *і такою, що операторний розв'язок*

$$v_{\dot\tau}(t,\lambda) := \varphi_U(t,\lambda)m_{\dot\tau}(\lambda) - \chi(t,\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

рівняння (8.7) *належить до* $L^2[\mathbf{H}_0, H]$ *і компоненти* $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *та* $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ *блочного зображення*

$$v_{\dot\tau}(t,\lambda) = (\xi_{\dot\tau}(t,\lambda), \widehat{\xi}_{\dot\tau}(t,\lambda)) : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \to H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

задовільняють граничним умовам (5.43) *та* (5.45). *Крім того,* $m_{\dot\tau}(\cdot) \in R[\mathbf{H}_0]$ *і справедлива нерівність* (8.84), *яка у випадку каноничної m-функції стає рівністю.*

Твердження 8.56. *Нехай виконано припущення* (SD1) - (SD3). *Тоді для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина трійка операторних розв'язків* $\xi_0(\cdot,\lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$, $\widehat{\xi}_0(\cdot,\lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ *та* $u_+(\cdot,\lambda) \in L^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b, H]$ *рівняння* (8.7), *що задовільняють граничним умовам*

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}, && \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b\xi_0(\lambda), && \widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0 \\
&\Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, && i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}'_b)\widehat{\xi}_0(\lambda) = I_{\widehat{H}}, && \widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0 \\
&\Gamma_{1a}u_+(\lambda) = 0, && \widehat{\Gamma}_a u_+(\lambda) = \widehat{\Gamma}'_b u_+(\lambda), && \widetilde{\Gamma}_{0b}u_+(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}.
\end{aligned}$$

Якщо, крім того, $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.107) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.109), *то блочне зображення*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) & M_{13}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) & M_{23}(\lambda) \\ M_{31}(\lambda) & M_{32}(\lambda) & M_{33}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{8.114}$$

з елементами $M_{ij}(\lambda)$, визначеними в (4.35) - (4.37), *задає голоморфну оператор-функцію $M_+(\cdot)$, яка збігаіться з функцією Вейля розділеної граничної трійки для L_{max}.*

У наступноій теоремі дається параметризація усіх m-функцій SD-виразу (у випадку ад1), аналогічна параметризації m-функцій HD-виразу в теоремі 8.31.

Теорема 8.57. *Нехай за припущень* (SD1) - (SD3) $\widetilde{U}$ – *J_η-унітарне розширення* (8.107) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.109). *Припустимо також, що $M_+(\cdot)$ – оператор-функція* (8.114) *і $m_0(\cdot)$, $M_{1+}(\cdot)$, $M_{2+}(\cdot)$ та $M_{3+}(\cdot)$ – оператор-функції, задані рівностями* (5.66)-(5.69) *(з* $\mathbf{H}$ *замість H). Тоді для m-функцій $m_{\dot\tau}(\cdot)$ SD-виразу* (8.12) *(у випадку* ад1*) вірними є твердження теореми 5.16.*

Припустимо, далі, що:

(SD1') Кінцева точка a є регулярною для SD-виразу (8.12), $\delta = -1$ і $n_+(L_{min}) - n_-(L_{min}) \geq \widehat{\nu}$ (тобто має місце випадок ад2).

(SD2') U – оператор (8.103), що задовільняє (5.2) - (5.4).

(SD3') $\{\widetilde{\mathcal{H}}_b, \mathcal{H}_b, \Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 2 (8.73).

Зауваження 8.58. Внаслідок зауваження 8.50 умови (SD1') - (SD3') еквівалентні умовам 1) - 3) твердження 5.21 для симетричної системи (8.30).

За припущень (SD1') - (SD3') вкороченим граничним параметром для SD-виразу називається та ж сама операторна пара $\dot\tau$, що і в означенні 5.22.

Теорема 8.59. *Нехай за припущень* (SD1') - (SD3') $\dot\tau$ – *вкорочений граничний параметр* (5.113). *Тоді для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ існує єдина пара операторних розв'язків $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ та $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ рівняння* (8.7), *що задовільняють граничним умовам $\Gamma_{1a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}$ та* (5.142) - (5.144).

Нехай за припущень (SD1') - (SD3') $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.107) оператора U і Γ_{0a} – оператор (8.109). Крім того, нехай $\dot\tau$ – вкорочений граничний параметр (5.113) і $\xi_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\cdot,\lambda)$ – операторні розв'язки рівняння (8.7), визначені в теоремі 8.59.

Означення 8.60. Оператор-функція $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot) : \mathbb{C}_+ \to [\mathbf{H}_0]$, визначена рівністю

$$\widetilde{m}_{\dot\tau}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau}(\lambda) & N_{\dot\tau}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi_{\dot\tau}(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_{\dot\tau}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H}}_{\mathbf{H}_0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{8.115}$$

називається m-функцією SD-виразу (8.12) (у випадку ад2), що відповідає вкороченому граничному параметру $\dot\tau$.

Зауваження 8.61. Очевидно, що m-функція SD-виразу у випадку ад2 є також m-функцією еквівалентної симетричної системи (8.30) у випадку а2 (див. означення 5.27).

Твердження 8.62. *Для m-функції $\widetilde{m_{\dot\tau}}(\cdot)$ SD-виразу (у випадку* ад2*) справедливим є твердження 8.55 із заміною $m_{\dot\tau}(\lambda)$ на $\widetilde{m_{\dot\tau}}(\lambda)$ і граничних умов* (5.43) *та* (5.45) *граничними умовами* (5.142) *та* (5.144)*.*

Твердження 8.63. *Нехай виконано припущення* (SD1') - (SD3')*. Тоді для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ існує єдина трійка операторних розв'язків $\xi_0(\cdot,\lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$, $\widehat{\xi_0}(\cdot,\lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ та $u_+(\cdot,\lambda) \in L^2[\widetilde{\mathcal{H}}_b, H]$ рівняння* (8.7)*, що задовільняять граничним умовам*

$$\begin{gathered}\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}, \qquad \widehat{\Gamma}_a\xi_0(\lambda) = 0, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}\xi_0(\lambda) = 0\\ \Gamma_{1a}\widehat{\xi_0}(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi_0}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}\widehat{\xi_0}(\lambda) = 0\\ \Gamma_{1a}u_+(\lambda) = 0, \qquad \widehat{\Gamma}_a u_+(\lambda) = 0, \qquad \widetilde{\Gamma}_{0b}u_+(\lambda) = I_{\widetilde{\mathcal{H}}_b}.\end{gathered}$$

Якщо, крім того, $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.107) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.109)*, то блочне зображення*

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} m_0(\lambda) & N_0(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & N_2(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_b \to \mathbf{H} \oplus \mathcal{H}_b, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{8.116}$$

елементи якого визначаються рівностями (5.135) *та* (5.136)*, задає голоморфну оператор-функцію $M_+(\cdot)$.*

У випадку ад2 аналогом теореми 8.57 є наступна

Теорема 8.64. *Нехай за припущень* (SD1') - (SD3') *$\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення* (8.107) *оператора U і Γ_{0a} – оператор* (8.109)*. Припустимо також, що $M_+(\cdot)$ – оператор-функція* (8.116)*. Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot\tau$ вигляду* (5.113) *відповідна m-функція $\widetilde{m}_{\dot\tau}(\cdot)$ SD-виразу (у випадку* ад2*) задається рівністю* (8.115) *з елементами $m_{\dot\tau}(\cdot)$ та $N_{\dot\tau}(\cdot)$, що допускають зображення* (5.156), (5.157).

8.4.2. Випадок квазірегулярного SD-виразу

Наступна лема є наслідком твердження 4.28, (1), застосованого до симетричної системи (8.30).

Лема 8.65. *Припустимо,що:*

1) *SD-вираз з регулярною кінцевою точкою a є квазірегулярним і $\delta = 1$ (так що має місце випадок* ад1*);*

2) *U -оператор* (8.103)*, що задовільняє* (5.2) - (5.4)*, і $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення* (8.107) *оператора U;*

3) *$Y_{\widetilde{U}}(t,\lambda)(\in [\mathbb{H}, H])$ – операторний розв'язок рівняння* (8.7) *з початковою умовою $\widetilde{U}\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(a,\lambda) = I_{\mathbb{H}}$.*

Тоді: (1) *Рівність* (8.86) *задає оператор*

$$\Gamma_b = (\Gamma_{0b}, \widehat{\Gamma}_b, \Gamma_{1b})^\top : \operatorname{dom} L_{max} \to \underbrace{\mathbf{H} \oplus \widehat{H} \oplus \mathbf{H}}_{\mathbb{H}}, \tag{8.117}$$

такий що сукупність $\{\mathbf{H},\mathbf{H},\Gamma_b\}$ *є* b*-граничним комплексом типу 1 для* SD*-виразу.*

(2) *Рівність*

$$B(\lambda)=\lim_{t\uparrow b}\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{-1}(t,0)\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(t,\lambda)=\lim_{t\uparrow b}(-J_\eta\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}^{*}(t,0)J_\eta\mathbf{Y}_{\widetilde{U}}(t,\lambda)),\quad \lambda\in\mathbb{C} \tag{8.118}$$

коректно задає цілу оператор-функцію $B(\cdot):\mathbb{C}\to[\mathbb{H}]$.

Припустимо, далі, що $\{\mathbf{H},\mathbf{H},\Gamma_b\}$ – b-граничний комплекс типу 1 з оператором Γ_b, визначеним рівностями (8.86), (8.117). Тоді $\dot{\mathcal{H}}_0=\dot{\mathcal{H}}_1=:\dot{\mathcal{H}}$, де

$$\dot{\mathcal{H}}=\widehat{H}\oplus\mathbf{H},$$

і вкорочений граничний параметр $\dot{\tau}$ має вигляд

$$\dot{\tau}=\dot{\tau}(\lambda)=\{\dot{C}_0(\lambda),\dot{C}_1(\lambda)\}\in\widetilde{R}(\dot{\mathcal{H}}),\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \tag{8.119}$$

де $\dot{C}_j(\cdot):\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to[\dot{\mathcal{H}},\mathcal{K}]$ – голоморфні оператор-функції ($\mathcal{K}$ – скінченновимірний гільбертів простір).

Нехай

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}B_{11}(\lambda)&B_{12}(\lambda)&B_{13}(\lambda)\\B_{21}(\lambda)&B_{22}(\lambda)&B_{23}(\lambda)\\B_{31}(\lambda)&B_{32}(\lambda)&B_{33}(\lambda)\end{pmatrix}:\underbrace{\mathbf{H}\oplus\widehat{H}\oplus\mathbf{H}}_{\mathbb{H}}\to\underbrace{\mathbf{H}\oplus\widehat{H}\oplus\mathbf{H}}_{\mathbb{H}},\quad\lambda\in\mathbb{C}. \tag{8.120}$$

– блочне зображення оператор-функції (8.118) і

$$\dot{W}(\lambda)=\begin{pmatrix}\dot{w}_1(\lambda)&\dot{w}_2(\lambda)\\\dot{w}_3(\lambda)&\dot{w}_4(\lambda)\end{pmatrix}:\mathbf{H}_0\oplus\mathbf{H}_0\to\dot{\mathcal{H}}\oplus\dot{\mathcal{H}},\quad\lambda\in\mathbb{C}, \tag{8.121}$$

де $\dot{w}_j(\lambda)$ визначені рівностями (5.77) - (5.80) з $H=\mathbf{H}$, $\mathcal{H}_b=\mathbf{H}$ і $\dot{\mathcal{H}}_0=\dot{\mathcal{H}}_1=\dot{\mathcal{H}}$. Ясно, що рівність (8.121) задає цілу оператор-функцію $\dot{W}(\cdot)$.

В наступній теоремі показано, що у випадку квазірегулярного SD-виразу можлива інша параметризація m-функцій у порівнянні з теоремою 8.57.

Теорема 8.66. *Нехай за припущень леми 8.65* $B(\cdot)$ *– оператор функція* (8.118), (8.120) *і* $\dot{W}(\cdot)$ *– відповідна оператор-функція* (8.121). *Тоді для кожного вкороченого граничного параметра* $\dot{\tau}$ *вигляду* (8.119) *відповідна* m*-функція* $m_{\dot{\tau}}(\cdot)$ *(у випадку* ад1*) допускає зображення* (5.107).

Доведення. Застосовуючи теорему 5.20 до системи (8.30) та приймаючи до уваги зауваження 8.54, отримуємо потрібне твердження. □

8.4.3. Спектральні функції для SD-виразів

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для SD-виразу. Нехай U – оператор (8.103), що задовільняє (5.2) - (5.4), й $\varphi_U(\cdot,\lambda)(\in[\mathbf{H}_0,H])$ – операторний розв'язок рівняння (8.7) з початковою умовою (8.106). Тоді кожній функції $f\in\mathfrak{H}'$ відповідає неперервна функція $\widehat{f}_0(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbf{H}_0$, визначена рівністю (8.93).

Вкорочена спектральна функція $\sigma(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbf{H}_0$ SD-виразу (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$) задається за допомоги означення 8.34, в якому простір $\mathbf{H}$ замінюється простором $\mathbf{H}_0$ (див. (8.18)).

Зауваження 8.67. Для скалярного SD-виразу $\varphi_U(\cdot,\lambda)$ є $(k+1)$-компонентним операторним роз- в'язком

$$\varphi_U(t,\lambda) = (\varphi_1(t,\lambda),\, \varphi_2(t,\lambda),\, \ldots,\, \varphi_k(t,\lambda),\, \varphi_{k+1}(t,\lambda)) : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}$$

рівняння (8.7) з початковою умовою

$$\widetilde{U}\boldsymbol{\varphi}_U(a,\lambda) = \begin{pmatrix} I_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1} \oplus \mathbb{C}^{k},$$

де $\widetilde{U}$ – J_η-унітарне розширення (8.107) оператора U і $\boldsymbol{\varphi}_U(t,\lambda) = \left(\varphi_l^{[j]}(t,\lambda)\right)_{j=0\ l=1}^{2k\ \ k+1}$ – матриця Вронського для розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$. Крім того, $\widehat{f}_0(s) = \{\widehat{f}_{0,1}(s),\, \ldots,\, \widehat{f}_{0,k}(s), \widehat{f}_{0,k+1}(s)\} (\in \mathbb{C}^{k+1})$, де

$$\widehat{f}_{0,l}(s) = \int_{\mathcal{I}} \varphi_l^*(t,s) f(t)\, dt, \quad l \in \{1,\, \ldots,\, k, k+1\}.$$

Відзначимо також, що у випадку скалярного SD-виразу m-функція $m_{\dot\tau}(\cdot)$ та вкорочена спектральна функція $\sigma(\cdot)$ можуть бути зображені у стандартному бізісі простору $\mathbb{C}^{k+1}$ як $(k+1)\times(k+1)$-матричні функції $m_{\dot\tau}(\lambda) = (m_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{k+1}$ та $\sigma(s) = (\sigma_{ij}(s))_{i,j=1}^{k+1}$

Для вкороченої спектральної функції $\sigma(\cdot)$ SD-виразу залишаються вірними твердження 8.35 (із заміною просторів $\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H})$ та $L^2(\sigma;\mathbf{H})$ відповідно на $\mathcal{L}^2(\sigma;\mathbf{H}_0)$ та $L^2(\sigma;\mathbf{H}_0)$, зауваження 8.36 та твердження 8.37. Відзначимо, що у цьому випадку перетворення Фур'є V_σ є ізометрією з $\mathfrak{H}$ в $L^2(\sigma;\mathbf{H}_0)$.

У наступній теоремі дається параметризація всіх вкорочених спектральних функцій SD-виразу у випадку ад1 безпосередньо в термінах граничних умов.

Теорема 8.68. *Нехай виконано умови теореми 8.57. Тоді рівності*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = m_0(\lambda) + M_{1+}(\lambda)(\dot{C}_0(\lambda) - \dot{C}_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}\dot{C}_1(\lambda)M_{2+}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{8.122}$$

$$\sigma_{\dot\tau}(s) = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{s-\delta} \operatorname{Im} m_{\dot\tau}(u+i\varepsilon)\, du \tag{8.123}$$

задають біективну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами $\dot\tau$ *вигляду* (5.31), (5.32) *і усіма вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ SD*-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

Доведення. Застосовуючи теореми 6.45, 6.40 та твердження 6.44 до симетричної системи (8.30) та приймаючи до уваги зауваження 8.36 (для SD-виразів), отримуємо потрібне твердження. □

Для квазірегулярного SD-виразу також вірною є

Теорема 8.69. *Нехай виконано припущення теореми 8.66. Тоді рівність*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = (\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_1(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_3(\lambda))^{-1}(\dot{C}_0(\lambda)\dot{w}_2(\lambda) + \dot{C}_1(\lambda)\dot{w}_4(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{8.124}$$

сумісно з формулою обернення Стільтьєса (8.123) *задає біективну відповідність між усіма вкороченими граничними параметрами* $\dot\tau$ *вигляду* (8.119) *і усіма вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ SD*-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot,\lambda)$*).*

Доведення. Потрібне твердження випливає з теорем 8.66 та 8.68. ☐

Теорема 8.70. *Нехай виконано припущення* (SD1) *та* (SD2) *пункту 8.4.1.. Тоді:*

(1) *Для вкорочених спектральних функцій $\sigma(\cdot)$ SD-виразу (відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$) справедливим є твердження* (1) *теореми 8.40 з симетричним оператором $L \in Ext_{L_{min}}$, визначеним рівністю* (8.111).

(2) *Кратність спектра кожного розширення $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L)$ не перевищує $km + \nu_{0+}(= \dim \mathbf{H}_0)$ для будь-якого SD-виразу і $k+1$ для скалярного SD-виразу.*

Доведення. Твердження (1) випливає із зауваження 8.36 (для SD-виразу) та теорем 6.45, 6.42. Твердження (2) є наслідком твердження (1). ☐

Наслідок 8.71. *Нехай за припущень* (SD1) - (SD3) *пункту 8.4.1. $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр, $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ – вкорочена спектральна функція SD-виразу і $V_\sigma \in [\mathfrak{H}, L^2(\sigma; \mathbf{H}_0)]$ – відповідне пертворення Фур'є. За цих припущень V_σ є унітарним оператором тоді й тільки тоді, коли $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min})$ і $\dot{\tau}$ є самоспряженим вкороченим граничним параметром* (5.33), (5.34).

Розглянемо, далі, вкорочені спектральні функції SD-виразів у випадку ад2. Нехай за припущень (SD1') - (SD3') пункту 8.4.1. $\dot{\tau}$ – вкорочений граничний параметр (5.113). Для заданої функції $f \in \mathfrak{H}$ розглянемо граничну задачу

$$l[y] - \lambda y = f(t), \quad t \in \mathcal{I} \tag{8.125}$$

$$\Gamma_{1a} y (= u_4 \mathbf{y}_0(a) + u_5 \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a) + u_6 \mathbf{y}_1(a)) = 0 \tag{8.126}$$

$$\widehat{\Gamma}_a y (= u_1 \mathbf{y}_0(a) + u_2 \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a) + u_3 \mathbf{y}_1(a)) = 0 \tag{8.127}$$

$$\dot{C}_0(\lambda) \widetilde{\Gamma}_{0b} y + \dot{C}_1(\lambda) \Gamma_{1b} y = 0 \tag{8.128}$$

Внаслідок зауваження 8.58 та теореми 5.23, застосованої до симетричної сиситеми (8.30), гранична задача (8.125) - (8.128) породжує узагальнену резольвенту $R(\lambda) =: R_{\dot{\tau}}(\lambda)$ оператора L. Надалі будемо позначати через $\widetilde{L}_{\dot{\tau}} (\in \widetilde{\mathrm{Self}}(L))$ розширення оператора L, що породжує $R_{\dot{\tau}}(\lambda)$.

В наступній теоремі наведено формули для обчислення вкорочених спектральних функцій спеціального вигляду для SD-виразу (8.12) у випадку ад2 безпосередньо в термінах вкороченого граничного параметра.

Теорема 8.72. *Нехай виконано умови теореми 8.64. Тоді для кожного вкороченого граничного параметра $\dot{\tau}$ вигляду* (5.113) *рівності* (6.107) - (6.111) *(з* $\mathbf{H}$ *замість H в формулі* (6.111)*) задають вкорочену спектральну функцію $\sigma_{\dot{\tau}}(\cdot)$ SD-варазу* (8.12) *(відносно розв'язку $\varphi_U(\cdot,\lambda)$).*

Доведення. Застосовуючи теорему 6.49 до симетричної системи (8.30) і приймаючи до уваги зуваження 6.52 та 8.36 (для SD-виразів), отримуємо потрібне твердження. ☐

В наступній теоремі, яка є наслідком твердження 8.2, (3) та теореми 6.50 для системи (8.30), характеризуються деякі властивості спектра розширення $\widetilde{L}_{\dot{\tau}}$.

Теорема 8.73. *Нехай за припущень (SD1') - (SD3')* $\dot\tau$ *– вкорочений граничний параметр і* $\sigma(\cdot)=\sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *– відповідна вкорочена спектральна функція* (6.111). *Тоді:*

(1) *Оператор* $\widetilde{L}_{\dot\tau}(\in \widetilde{\mathrm{Self}}(L))$ *є унітарно еквівалентним оператору множення* Λ_σ *в* $L^2(\sigma;\mathbf{H}_0)$

(2) *Справедливі рівності*

$$\mathrm{spec}_{ac}(\widetilde{L}_{\dot\tau})=\mathbb{R},\qquad \mathrm{spec}_s(\widetilde{L}_{\dot\tau})=S_s(\sigma_{\dot\tau 1}),$$

де $\sigma_{\dot\tau 1}(\cdot)$ *–* $[\mathbf{H}]$*-значна функція розподілу* (6.109) *і* $S_s(\sigma_{\dot\tau 1})\subset\mathbb{R}$ *– множина, визначена в* (2.10).

Наслідок 8.74. *Нехай за припущень (SD1') - (SD3')* $\dot\tau$ *– допустимий вкорочений граничний параметр,* $E(\cdot)$ *– ортогональна спектральна міра оператора* $\widetilde{L}_{\dot\tau}$ *і* $E_s(\cdot)$ *– сінгулярна часина міри* $E(\cdot)$*. Тоді:*

(1) *Кратність спектра оператора* $\widetilde{L}_{\dot\tau}$ *(тобто, кратність міри* $E(\cdot)$*) не перевищує* $km+\nu_{0-}(=\dim\mathbf{H}_0)$*.*

(2) *Кратність сингулярного спектра оператора* $\widetilde{L}_{\dot\tau}$ *(тобто кратність ортогональної спектральної міри* $E_s(\cdot)$*) не перевищує* $km+\nu_{0+}(=\dim\mathbf{H})$*. Тому кратність кожного власного значення* λ_0 *оператора* $\widetilde{L}_{\dot\tau}$ *не перевищує* $km+\nu_{0+}$*.*

Якщо, крім того, вираз (8.12) *є скалярним, то кратність спектра оператора* $\widetilde{L}_{\dot\tau}$ *не перевищує* $k+1$*, а кратність сингулярного спектра того ж оператора не перевищує* k*.*

Зауваження 8.75. Використовуючи зв'язок D-виразів (8.1) та (8.12) з симетричними системами (див. твердження 8.2), неважко перенести на диференціальні вирази результати розділу 7 стосовно граничних задач з розділеними граничними умовами та відповідних спектральних функцій.

8.4.4. SD-вирази з мінімальними індексами дефекту

Припустимо, що кінцева точка a є регулярною для SD-виразу. Тоді внаслідок (8.100), (8.101) та (8.102) мінімально можливими рівними індексами дефекту оператора L_{min} є

$$n_+(L_{min})=n_-(L_{min})=km+\max\{\nu_{0+},\nu_{0-}\}\tag{8.129}$$

для будь-якого SD-виразу і, зокрема,

$$n_+(L_{min})=n_-(L_{min})=k+1$$

для скалярного SD-виразу.

Твердження 8.76. *Припустимо, що:*

1) SD*-вираз з регулярною кінцевою точкою* a *задовільняє* (8.129)*;*

2) $\widetilde{U}$ *–* J_η*-унітарний оператор* (8.107) *і* Γ_{ja}*,* $j\in\{0,1\}$*, та* $\widehat{\Gamma}_a$ *– оператори* (8.104), (8.105) *та* (8.109)

3) $\widehat{\Gamma}_b:\mathrm{dom}\,L_{max}\to\widehat{H}$ *– сюр'єктивний оператор, що задовільняє тотожності*

$$[y,z]_b=i\delta(\widehat{\Gamma}_b y,\widehat{\Gamma}_b z)_{\widehat{H}},\quad y,z\in\mathrm{dom}\,L_{max}\tag{8.130}$$

(існування такого оператора випливає з леми 3.19, застосованої до системи (8.30)*). Тоді вірним є твердження 8.17 з простором* $\mathcal{H}$ *та операторами* $\Gamma_j' : \operatorname{dom} L_{max} \to \mathcal{H},\ j \in \{0,1\}$, *визначеними рівностями*

$$\mathcal{H} = \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \tag{8.131}$$

$$\Gamma_0' y = (-\Gamma_{1a} y) \oplus i\delta(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)y, \qquad \Gamma_1' y = \Gamma_{0a} y \oplus \tfrac{1}{2}(\widehat{\Gamma}_a + \widehat{\Gamma}_b)y, \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.132}$$

Доведення. Очевидно, що сукупність $\{\mathbb{H}, \Gamma_a; \widehat{H}, \widehat{\Gamma}_b\}$, *в якій* $\Gamma_a = (\Gamma_{0a}, \widehat{\Gamma}_a, \Gamma_{1a})^\top$, *є граничним комплексом. Тому потрібне твердження випливає з твердження 8.17.* □

Зауваження 8.77. 1) За умов твердження 8.76 частковим випадком граничних умов (8.54) є "майже розділені"самоспряжені граничні умови

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : C_0\Gamma_{0a} y + C_1 \Gamma_{1a} y = 0,\ \ (i\delta \dot{C}_0 - \tfrac{1}{2}\dot{C}_1)\widehat{\Gamma}_a y - (i\delta\dot{C}_0 + \tfrac{1}{2}\dot{C}_1)\widehat{\Gamma}_b y = 0\} \tag{8.133}$$

з операторами C_j та $\dot{C}_j$, що утворюють самоспряжені операторні пари $\theta = \{C_0, C_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathbf{H})$ та $\dot{\theta} = \{\dot{C}_0, \dot{C}_1\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\widehat{H})$.

2) Якщо $\widetilde{U} = I_{\mathbb{H}}$, то в формулах (8.132) та (8.133) $\Gamma_{0a} y = \mathbf{y}_0(a)$, $\Gamma_{1a} y = \mathbf{y}_1(a)$ й $\widehat{\Gamma}_a y = \widehat{Q}(a) y^{(k)}(a)$.

Наступне твердження є наслідком твердження 8.56.

Твердження 8.78. *Припустимо, що:*

1) *для* SD*-виразу з регулярною кінцевою точкою* a *справедливі рівності* $\delta = 1$ *і* $n_+(L_{min}) = n_-(L_{min}) = km + \nu_{0+}$*;*

2) U*-оператор* (8.103), *що задовільняє* (5.2) - (5.4), *і* Γ_{1a} *та* $\widehat{\Gamma}_a$ *– оператори* (8.104) *та* (8.105).

3) $\widehat{\Gamma}_b : \operatorname{dom} L_{max} \to \widehat{H}$ *– сюр'єктивний оператор, що задовільняє тотожності*

$$[y, z]_b = i(\widehat{\Gamma}_b y, \widehat{\Gamma}_b z)_{\widehat{H}}, \quad y, z \in \operatorname{dom} L_{max}.$$

Тоді для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi_0(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ *та* $\widehat{\xi}_0(\cdot, \lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ *рівняння* (8.7), *що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi_0(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}, \quad \widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda) = \widehat{\Gamma}_b \xi_0(\lambda), \quad \Gamma_{1a}\widehat{\xi}_0(\lambda) = 0, \qquad i(\widehat{\Gamma}_a - \widehat{\Gamma}_b)\widehat{\xi}_0(\lambda) = I_{\widehat{H}}$$

Якщо, крім того, $\widetilde{U}$ *–* J_η*-унітарне розширення* (8.107) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (8.109), *то блочне зображення*

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}(\lambda) & M_{12}(\lambda) \\ M_{21}(\lambda) & M_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi_0(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}_0(\lambda) \\ \widehat{\Gamma}_a \xi_0(\lambda) & \widehat{\Gamma}_a \widehat{\xi}_0(\lambda) + \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \tag{8.134}$$

задає голоморфну оператор-функцію $M(\cdot)$.

У випадку SD-виразу з мінімальними рівними індексами дефекту $n_\pm(L_{min})$ параметризація усіх вкорочених спектральних функцій, наведена в теоремі 8.68, істотно спрощується. Саме, застосування теорем 6.46 та 6.45 до симетричної системи (8.30) дає таку теорему.

Теорема 8.79. *Нехай за припущень* 1) - 3) *твердження 8.78* $\widetilde{U}$ *–* J_η*-унітарне розширення* (8.107) *оператора* U *і* $M_+(\cdot)$ *– оператор-функція* (8.134)*. Тоді формула*

$$m_{\dot\tau}(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{\dot\tau 1}(\lambda) & m_{\dot\tau 2}(\lambda) \\ m_{\dot\tau 3}(\lambda) & m_{\dot\tau 4}(\lambda) \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

сумісно з рівностями (6.82) - (6.85) *та формулою обернення Стільтьєса* (8.123) *задає бієктивну відповідність між усіма голоморфними операторними парами* $\dot\tau$ *вигляду* (6.74) *(граничними параметрами) і усіма вкороченими спектральними функціями* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *SD-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*).*

Твердження 8.80. *За припущень* 1) - 3) *твердження 8.78 перетворення Фур'є* V_σ*, що відповідає вкороченій спектральній функції* $\sigma(\cdot) = \sigma_{\dot\tau}(\cdot)$ *SD-виразу, є унітарним оператором тоді й тільки тоді,коли* $\dot\tau$ *є самоспряженим граничним параметром* $\dot\tau = \{\dot C_0, \dot C_1\} \in \widetilde{R}^0(\widehat{H})$*. Якщо ця умова виконана, то самоспряжений оператор* $\widetilde{L}_{\dot\tau} \in Ext_{L_{min}}$*, визначений граничними умовами*

$$\operatorname{dom} \widetilde{L} = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \Gamma_{1a} y = 0, \ \ (i\dot C_0 - \tfrac{1}{2}\dot C_1)\widehat{\Gamma}_a y - (i\dot C_0 + \tfrac{1}{2}\dot C_1)\widehat{\Gamma}_b y = 0\}, \quad \widetilde{L} = L_{max} \upharpoonright \operatorname{dom} \widetilde{L},$$

є унітарно еквівалентним оператору множення Λ_σ *за допомоги* V_σ*.*

Наступне твердження є наслідком твердження 6.54, застосованого до симетричної системи (8.30).

Твердження 8.81. *Припустимо, що:*

1) *SD-вираз з регулярною кінцевою точкою* a *задовільняє умовам* $\delta = -1$ *і*

$$n_+(L_{min}) = km + \nu_{0-}, \qquad n_-(L_{min}) = km + \nu_{0+} \tag{8.135}$$

(тобто індекси дефекту $n_\pm(L_{min})$ *набувають мінімальних значень);*

2) U *– оператор* (8.103)*, що задовільняє* (5.2) - (5.4)*, і* Γ_{1a} *та* $\widehat{\Gamma}_a$ *– оператори* (8.104), (8.105).

Тоді:

(1) *Для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *існує єдина пара операторних розв'язків* $\xi(\cdot, \lambda) \in L^2[\mathbf{H}, H]$ *та* $\widehat{\xi}(\cdot, \lambda) \in L^2[\widehat{H}, H]$ *рівняння* (8.7)*, що задовільняють граничним умовам*

$$\Gamma_{1a}\xi(\lambda) = -I_{\mathbf{H}}, \quad \widehat{\Gamma}_a \xi(\lambda) = 0, \quad \Gamma_{1a}\widehat{\xi}(\lambda) = 0, \quad \widehat{\Gamma}_a\widehat{\xi}(\lambda) = iI_{\widehat{H}}$$

(2) *Існує єдина (з точністю до самоспряженої адитивної константи) m-функція* $\widetilde{m}(\cdot)$ *SD-виразу. Якщо* $\widetilde{U}$ *–* J_η*-унітарне розширення* (8.107) *оператора* U *і* Γ_{0a} *– оператор* (8.109)*, то*

$$\widetilde{m}(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & N(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Gamma_{0a}\xi(\lambda) & \Gamma_{0a}\widehat{\xi}(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2} I_{\widehat{H}} \end{pmatrix} : \mathbf{H} \oplus \widehat{H} \to \mathbf{H} \oplus \widehat{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

(3) *Рівності* (6.116) - (6.118) *(з* $\mathbf{H}$ *замість* H*) задають вкорочену спектральну функцію* $\sigma(\cdot)$ *SD-виразу (відносно розв'язку* $\varphi_U(\cdot, \lambda)$*).*

(4) *Граничні умови*

$$\operatorname{dom} L = \{y \in \operatorname{dom} L_{max} : \Gamma_{1a} y = \widehat{\Gamma}_a y = 0\}, \quad L = L_{max} \upharpoonright \operatorname{dom} L$$

задають максимальний симетричний оператор $L \in Ext_{L_{min}}$ *і тому існує єдине самоспряжене розширення* $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathrm{Self}}(L)$*. Для цього розширення справедливі теорема 8.73 та наслідок 8.74.*

Зауваження 8.82. Для скалярного виразу непарного порядку рівності (8.135) приймають вигляд

$$n_+(L_{min}) = k + 1, \qquad n_-(L_{min}) = k.$$

8.4.5. Приклад: оператор диференціювання 3-го порядку

Розглянемо скалярний диференціальний вираз 3-го порядку

$$l[y] = iy^{(3)} \tag{8.136}$$

на півосі $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Для такого виразу $q_0(t) \equiv -1$; тому $\delta = -1$ і згідно з (8.32)

$$\mathbf{y}(t) = y(t) \oplus (-iy'(t)) \oplus (-iy''(t)) (\in \mathbb{C}^3)$$

Крім того, коефіцієнти еквівалентної симетричної системи (8.30) мають вигляд

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що оператор L_{min}, породжений виразом (8.136), має мінімальні індекси дефекту

$$n_+(L_{min}) = 2, \qquad n_-(L_{min}) = 1.$$

Покладемо $\widetilde{U} = I_3$, так що оператори (8.104), (8.105) та (8.109) мають вигляд

$$\Gamma_{00} y = y(0), \qquad \widehat{\Gamma}_0 y = -iy'(0), \qquad \Gamma_{10} y = -iy''(0), \quad y \in \operatorname{dom} L_{max} \tag{8.137}$$

(у цих рівностях прийнято до уваги, що $a = 0$). Припустимо, що

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{6} i}, \qquad z_2 = e^{\frac{5}{6}\pi i}, \qquad z_3 = e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i$$

– кубічні корені від i. Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ визначимо функції

$$\xi(t, \lambda) = -\frac{i}{z_1(z_1 - z_3)(\sqrt[3]{\lambda})^2} e^{-z_1 \sqrt[3]{\lambda} \cdot t} + \frac{i}{z_3(z_1 - z_3)(\sqrt[3]{\lambda})^2} e^{-z_3 \sqrt[3]{\lambda} \cdot t} \tag{8.138}$$

$$\widehat{\xi}(t, \lambda) = \frac{z_3}{z_1(z_3 - z_1)\sqrt[3]{\lambda}} e^{-z_1 \sqrt[3]{\lambda} \cdot t} - \frac{z_1}{z_3(z_3 - z_1)\sqrt[3]{\lambda}} e^{-z_3 \sqrt[3]{\lambda} \cdot t}, \tag{8.139}$$

де $\operatorname{Arg} \sqrt[3]{\lambda} \in (0, \frac{\pi}{3})$. Безпосередня перевірка показує, що функції $\xi(\cdot, \lambda)$ та $\widehat{\xi}(\cdot, \lambda)$ є розв'язками рівняння $l[y] = \lambda y$, належать до $L^2(\mathbb{R}_+)$ і задовільняють рівностям

$$\Gamma_{00} \xi(\lambda) = \xi(0, \lambda) = \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2}, \quad \widehat{\Gamma}_0 \xi(\lambda) = -i\xi'(0, \lambda) = 0, \quad \Gamma_{10} \xi(\lambda) = -i\xi''(0, \lambda) = -1 \tag{8.140}$$

$$\Gamma_{00} \widehat{\xi}(\lambda) = \widehat{\xi}(0, \lambda) = \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}}, \quad \widehat{\Gamma}_0 \widehat{\xi}(\lambda) = -i\widehat{\xi}'(0, \lambda) = i, \quad \Gamma_{10} \widehat{\xi}(\lambda) = -i\widehat{\xi}''(0, \lambda) = 0 \tag{8.141}$$

Тому згідно з твердженням 8.81 (єдина) m-функція $\widetilde{m}(\cdot)$ виразу (8.136) задається матрицею

$$\widetilde{m}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \tag{8.142}$$

Застосовуючи формули (6.116) – (6.118) до цієї матриці, отримуємо спектральну функцію $\sigma(\cdot)$ виразу (8.136) у вигляді $\sigma(s) = \int\limits_0^s \sigma'(u)\, du$, де

$$\sigma'(s) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{(\sqrt[3]{s})^2} & -\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{\sqrt[3]{s}} \\ -\frac{e^{-\frac{2}{3}\pi i}}{\sqrt[3]{s}} & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Відзначимо, що ранг матриці $\sigma'(s)$ дорівнює 1 для всіх $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Звідси та з твердження 8.81 випливає

Твердження 8.83. *Нехай* $\operatorname{dom} L$ *– лінеал усіх функцій* $y(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+)$*, таких що друга похідна* $y''(\cdot)$ *абсолютно неперервна на кожному відрізку в* $\mathbb{R}_+$*,* $y^{(3)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *і* $y'(0) = y''(0) = 0$*. Тоді рівність* $Ly = iy^{(3)}$*,* $y \in \operatorname{dom} L$*, задає максимальний симетричний оператор* L *в* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *(оператор диференціювання 3-го порядку на* $\mathbb{R}_+$*), так що існує єдине самоспряжене розширення* $\widetilde{L} \in \widetilde{\operatorname{Self}}(L)$*. Крім того,* $\operatorname{spec}_{ac}(\widetilde{L}) = \mathbb{R}$*,* $\operatorname{spec}_s(\widetilde{L}) = \emptyset$ *і оператор* $\widetilde{L}$ *має простий спектр.*

Розглянемо, далі, вираз (8.136) (а також еквівалентну симетричну систему (8.30)) на всій осі $\mathbb{R}$. Покладемо $c = 0$, так що $\mathcal{I}_l = \mathbb{R}_-(= (-\infty, 0])$, $\mathcal{I}_r = \mathbb{R}_+$ і оператори $\Gamma_{00}(= \Gamma_{0c})$, $\widehat{\Gamma}_0(= \widehat{\Gamma}_c)$ та $\Gamma_{10}(= \Gamma_{1c})$, визначені в (7.17), задаються рівностями (8.137). Неважко перевірити, що оператор $L_{\mathbb{R}} := L_{min}(= L_{max})$ є самоспряженим (тут L_{min} – мінімальний оператор в $L^2(\mathbb{R})$, породжений виразом (8.136) або, еквівалентно, системою (8.30)). Покладемо $\xi_r(t,\lambda) = \xi(t,\lambda)$ та $\widehat{\xi}_r(t,\lambda) = \widehat{\xi}(t,\lambda)$, де $\xi(t,\lambda), \widehat{\xi}(t,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ – розв'язки (8.138) та (8.139) рівняння $l[y] = \lambda y$. Крім того, для кожного $\lambda \in \mathbb{C}_+$ нехай

$$\xi_l(t,\lambda) = \frac{i}{z_2^2(\sqrt[3]{\lambda})^2} e^{-z_2 \sqrt[3]{\lambda} \cdot t},$$

де $\operatorname{Arg} \sqrt[3]{\lambda} \in (0, \frac{\pi}{3})$. Безпосередня перевірка показує, що функція $\xi_l(\cdot,\lambda)$ є розв'язком рівняння $l[y] = \lambda y$, належить до $L^2(\mathbb{R}_-)$ і задовільняє рівностям

$$\Gamma_{00}\xi_l(\lambda) = \xi_l(0,\lambda) = \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2}, \quad \widehat{\Gamma}_0\xi_l(\lambda) = -i\xi_l'(0,\lambda) = \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}}, \quad \Gamma_{10}\xi_l(\lambda) = -i\xi_l''(0,\lambda) = 1.$$

Тому згідно з теоремою 7.16 m-функції $\widetilde{m}_r(\cdot)$ та $\widetilde{m}_l(\cdot)$ виразу (8.136) (або ж еквівалентної системи (8.30)) відповідно на проміжках $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ задаються матрицями

$$\widetilde{m}_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{m}_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & 0 \\ \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси та з (7.80) випливає, що (єдина) характеристична матриця $\Omega^0(\cdot)$ виразу (8.136) (або, еквівалентно, системи (8.30)) має вигляд

$$\Omega^0(\lambda) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{z_2}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} & \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} & \frac{1}{2} \\ \frac{z_1}{\sqrt[3]{\lambda}} & \frac{i}{2} & z_1^2 \sqrt[3]{\lambda} \\ -\frac{1}{2} & -z_1^2 \sqrt[3]{\lambda} & z_1(\sqrt[3]{\lambda})^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Застосовуючи формулу обернення Стільт'єса (7.81) до цієї матриці, отримуємо (єдину) спектральну функцію виразу (8.136) у вигляді $\Sigma(s) = \int\limits_0^s \Sigma'(u)\,du$, де

$$\Sigma'(s) = \frac{1}{6\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{(\sqrt[3]{s})^2} & \frac{1}{\sqrt[3]{s}} & -i \\ \frac{1}{\sqrt[3]{s}} & 1 & -i\sqrt[3]{s} \\ i & i\sqrt[3]{s} & (\sqrt[3]{s})^2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Відзначимо, що ранг матриці $\Sigma'(s)$ дорівнює 1 для всіх $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Звідси та з теорем 6.18,6.21 випливає

Твердження 8.84. *Нехай* $\operatorname{dom} L_{\mathbb{R}}$ *– лінеал усіх функцій* $y(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$*, таких що друга похідна* $y''(\cdot)$ *абсолютно неперервна на кожному відрізку в* $\mathbb{R}$ *і* $y^{(3)} \in L^2(\mathbb{R})$*. Тоді рівність* $L_{\mathbb{R}} y = iy^{(3)}$*,* $y \in \operatorname{dom} L_{\mathbb{R}}$*, задає самоспряжений оператор* $L_{\mathbb{R}}$ *в* $L^2(\mathbb{R})$ *(оператор диференціювання 3-го порядку на* $\mathbb{R}$*). Крім того,* $\operatorname{spec}_{ac}(L_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}$*,* $\operatorname{spec}_s(L_{\mathbb{R}}) = \emptyset$ *і оператор* $L_{\mathbb{R}}$ *має простий спектр.*

Зауваження 8.85. Уявляється цікавим порівняння твердження 8.84 з таким добре відомим твердженням [2]: оператор дифернціювання першого (другого) порядку на $\mathbb{R}$ має простий (відп. двократний) спектр.

8.5. Диференціальні вирази з дійсними дефектними підпросторами максимальної вимірності

Теорема 8.86. *Нехай* $l[y]$ *– диференціальний вираз парного порядку* (8.1) *або непарного порядку* (8.12) *на проміжку* $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$ *і* L_{min} *– відповідний мінімальний оператор. Припустимо, що:*

1) $n_{l+} = n_{l-} =: d_l$ *й* $n_{r+} = n_{r-} =: d_r$*;*

2) $\mathcal{I}'$ *– скінченний або нескінченний інтервал в* $\mathbb{R}$ *з наступною властивістю: існує не більш ніж злічена множина* $X \subset \mathcal{I}'$*, така що для деякої (і тому для кожної) точки* $c \in (a, b)$ *і для кожного* $\lambda \in \mathcal{I}' \setminus X$ *рівняння* $l[y] = \lambda y$ *має* d_l *лінійно незалежних розв'язків, що належать до* $L^2(a, c)$*, і* d_r *лінійно незалежних розв'язків, що належать до* $L^2(c, b)$*.*

Тоді для кожного самоспряженошо розширення $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *перетин* $\operatorname{spec}_c(\widetilde{L}) \cap \mathcal{I}'$ *є пустим і множина* $\operatorname{spec}(\widetilde{L}) \cap \mathcal{I}'$ *є ніде нещільною в* $\mathcal{I}'$*.*

Доведення. Нехай $c \in (a, b)$ і $L_{\min,l}$ та $L_{\min,r}$ – мінімальні оператори, породжені звуженням D-виразу відповідно на $\mathcal{I}_l = \langle a, c]$ та $\mathcal{I}_r = [c, b\rangle$. Оскільки кінцева точка c є регулярною для проміжків $\mathcal{I}_l$ та $\mathcal{I}_r$, то симетричні оператори $L_{\min,l}$ в $L^2(\mathcal{I}_l)$ та $L_{\min,r}$ в $L^2(\mathcal{I}_r)$ є простими (див., наприклад, [72]). Тому симетричний оператор $\widehat{L} := L_{\min,l} \oplus L_{\min,r}$ в $\mathfrak{H}(= L^2(\mathcal{I}))$ є простим. Далі, внаслідок рівності $\mathfrak{N}_\lambda(\widehat{L}) = \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,l}) \oplus \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,r})$ маємо

$$\dim \mathfrak{N}_\lambda(\widehat{L}) = \dim \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,l}) + \dim \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,r}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Звідси внаслідок (8.35) та припущення 1) випливає, що $n_\pm(\widehat{L}) = d_l + d_r$. Крім того, в силу припущення 2)

$$\dim \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,l}) = d_l, \qquad \dim \mathfrak{N}_\lambda(L_{\min,r}) = d_r, \quad \lambda \in \mathcal{I}' \setminus X$$

і, отже, $\dim \mathfrak{N}_\lambda(\widehat{L}) = d_l + d_r$, $\lambda \in \mathcal{I}' \setminus X$. Звідси випливає, що $\mathcal{I}' \setminus X \subset \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}'}(\widehat{L})$ і тому $\mathcal{I}' \setminus \widetilde{\rho}_{\mathcal{I}'}(\widehat{L}) \subset X$. Відзначимо також, що $\widehat{L} \subset L_{min}$ і, отже, $\widehat{L} \subset \widetilde{L}$ для кожного розширення $\widetilde{L}^* = \widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$. Тепер потрібне твердження випливає з теореми 2.72, застосованої до симетричного оператора $\widehat{L}$ і самоспряженого розширення $\widetilde{L} \supset L(\supset \widehat{L})$. ☐

Наступний наслідок випливає безпосередньо з теорем 8.86 та 2.72.

Наслідок 8.87. *Нехай* $l[y]$ *– диференціальний вираз парного порядку* (8.1) *або непарного порядку* (8.12) *на проміжку* $\mathcal{I} = [a, b\rangle$ $(-\infty < a < b \le \infty)$ *з регулярною кінцевою точкою* a *і відповідний мінімальний оператор* L_{min} *має рівні індекси дефекту* $d = n_\pm(L_{min})$*. Крім того, нехай* $\mathcal{I}'$ *– скінченний або нескінченний інтервал в* $\mathbb{R}$ *з наступною властивістю: існує не більш ніж злічена множина* $X \subset \mathcal{I}'$*, така що для кожного* $\lambda \in \mathcal{I}' \setminus X$ *рівняння* $l[y] = \lambda y$ *має* d *лінійно незалежних розв'язків, що належать до* $L^2(\mathcal{I})$*. Тоді:*

(1) *Для кожного самоспряженошо розширення* $\widetilde{L} \in Ext_{L_{min}}$ *справедливим є твердження теореми 8.86.*

(2) *Множина всіх точок* $\lambda \in \mathcal{I}'$*, таких що* $\overline{\mathrm{ran}\,(L_{min} - \lambda)} \neq \mathrm{ran}\,(L_{min} - \lambda)$*, є ніде нещільною в* $\mathcal{I}'$*.*

Зауваження 8.88. Умова на интервал $\mathcal{I}'$ в наслідку 8.87 означає, що для кожного дійсного $\lambda \in \mathcal{I}' \setminus X$ дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda(L_{min})$ має максимально можливу вимірність $\dim \mathfrak{N}_\lambda(L_{min}) = d$.

Зауваження 8.89. За додаткових припущень наслідок 8.87 доведено в роботах [73, 116, 115].

Зауваження 8.90. З результатів роботи [112] випливає, що у випадку скінченного інтервалу $\mathcal{I}$ й $d = 1$ симетричний оператор A в зворотному твердженні теореми 2.73 може бути реалізований як мінімальний оператор, породжений диференціальним виразом 2-го порядку на півосі $\mathbb{R}_+$. В той же час невідомо, чи може бути реалізований той самий оператор A як мінмальний диференціальний оператор у випадку нескінченного інтервалу $\mathcal{I}'$ або $d > 1$.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджено спектральні властивості симетричних лінійних відношень у гільбертовому просторі та симетричних диференціальних систем $Jy' - B(t)y = \lambda\Delta(t)y$ з матричними коефіцієнтами вимірності n (надалі для стислості вживається термін "система"). Основними результатами роботи є:

1. Теорію граничних трійок та їх функцій Вейля (Q-функцій) поширено на симетричні відношення (зокрема, оператори) A з нерівними індексами дефекту таким чином, що функція Вейля залишається неванлиннівською оператор-функцією. За допомоги граничних трійок описано різні класи розширень відношення A в термінах абстрактних граничних умов та отримано параметризацію $\widetilde{A} = \widetilde{A}_\tau$ самоспряжених розширень $\widetilde{A} \supset A$ з виходом в ширший простір в термінах абстрактного граничного параметра $\tau = \tau(\lambda)$. Така параметризація дається формулою типа Крейна для узагальнених резольвент, а також абстрактною граничною задачею з λ-залежними граничними умовами, що визначаються в термінах τ. В термінах параметра τ та функції Вейля охарактеризовано деякі геометричні властивості розширень $\widetilde{A}_\tau$; зокрема, описано розширення $\widetilde{A}_\tau$ із збереженням многозначної частини відношення A. Перелічені результати розвивають результати робіт Крейна та Лангера; Лангера та Тексторіуса; Деркача та Маламуда.

2. Охарактеризовано спектральні властивості самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ простого симетричного оператора A з рівними індексами дефекту $d := n_\pm(A) < \infty$, такого що для всіх точок λ з деякого інтервалу $\mathcal{I}' \subset \mathbb{R}$ відповідні дефектні підпростори $\mathfrak{N}_\lambda(A)$ оператора A мають максимально можливу вимірність $\dim \mathfrak{N}_\lambda(A) = d$. Доведено, що кожне розширення $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \supset A$ не має неперервного спектра в $\mathcal{I}'$ і точковий спектр оператора $\widetilde{A}$ є ніде нещільною множиною в $\mathcal{I}'$. Доведено також існування розширень $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \supset A$, спектр яких в $\mathcal{I}'$ не є дискретним. За допомоги цих тверджень відомі результати Хартмана, Уінтнера та Вейдмана стосовно спектра диференціальних операторів з мінімальними індексами дефекту, визначених на проміжку $\mathcal{I} = [a, b\rangle$ з регулярною кінцевою точкою a, узагальнено на диференціальні оператори з довільними рівними індексами дефекту, визначені на проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ з довільними (регулярними або сингулярними) кінцевими точками a та b.

3. Для систем з довільними індексами дефекту, визначених на проміжку $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, з регулярними або сингулярними кінцевими точками, у компактному вигляді визначено сингулярні граничні значення функцій y з області визначення максимального відношення та описано граничні умови різних класів, що накладаються на регулярні та сингулярні граничні значення функцій. Зокрема, отримано компактний опис максимальних дисипативних та акумулятивних розділених граничних умов, а також знайдено критерій існування та отримано компактний опис самоспряжених розділених граничних умов. Ці результати дозволили параметризувати за допомоги неванлинівського граничного параметра $\tau = \tau(\lambda)$ узагальнені резольвенти та самоспряжені розширення з виходом в ширший простір мінімального відношення T_{min}, породженого системою. Така параметризація задається граничною задачею для системи з λ-залежними граничними умовами, які визначаються в термінах параметра τ.

4. Уведено та досліджено матричні псевдоспектральні функції вимірності n для сингулярної системи. Встановлено зв'язок між псевдоспектральними функціями та самоспряженими розширен-

ними з виходом в ширший простір відношення T_{min}. Для систем на півосі отримано параметризацію характеристичних матриць та псевдоспектральних функцій безпосередньо в термінах допустимого граничного параметра τ (тобто, допустимих граничних умов). Знайдено критерії, що дозволяють пропустити умову допустимості параметра τ. Доведено, що спектральні функції системи існують (і збігаються з псевдоспектральними) тоді й тільки тоді, коли відношення T_{min} є оператором. Частину перелічених результатів щодо псевдоспектральних функцій вимірності n раніше доведено Лангером та Текcторіусом для регулярних систем.

5. Для систем на проміжку $\mathcal{I} = [a, b\rangle$ з регулярною кінцевою точкою a і довільними інддексами дефекту визначено граничну задачу з λ-залежними граничним умовами, аналогічними самоспряженим розділеним граничним умовам для гамільтонових систем. Кожній такій задачі поставлено у відповідність вкорочену матричну псевдоспектральну функцію вимірності $\dim \ker (iJ + I) < n$. Ця функція визначається як матрична функція розподілу, така що узагальнене перетворення Фур'є є частковою ізометрією з мінімально можливим ядром. Доведено, що зазначеній граничній задачі відповідає m-функція (функція Вейля - Тітчмарша), спектральна функція якої за деяких умов допустимості є вкороченою псевдоспектральною функцією системи. Ці результати є поширенням на симетричні системи з довільними індексами дефекту теорії Вейля - Тітчмарша для операторів Штурма - Ліувілля (раніше ця теорія була поширена Хінтоном та Шнайдером на гамільтонові симетричні системи з рівними індексами дефекту). Знайдено зв'язок між вкороченими псевдоспектральними функціями та самоспряженими розширеннями $\widetilde{T}$ з виходом в ширший простір деякого симетричного відношення $T \supset T_{min}$. За деяких додаткових умов знайдено оцінку кратності сингулярного спектра (і, отже, кратності власних значень) розширень $\widetilde{T}$. Отримано параметризацію m-функцій та вкорочених псевдоспектральних функцій безпосередньо в термінах вкороченого допустимого граничного параметра τ, що входить до граничних умов. Знайдено критерії, що дозволяють пропустити умову допустимості. Доведено, що вкорочені спектральні функції системи існують (і збігаються з вкороченими псевдоспектральними функціями) тоді й тільки тоді, коли відношення T є оператором. Зазначені результати розвивають результати монографій Арова та Дима; А. Сахновича, Л. Сахновича та Ройтберг щодо вкорочених псевдоспектральних функцій гамільтонових регулярних систем.

6. Для характеристичної матриці довільної (можливо негамільтонової) системи на проміжку $\mathcal{I} = (a, b)$ з сингулярними кінцями, що відповідає розділеним самоспряженим граничним умовам, доведено формулу Тітчмарша, яка є аналогом відомої формули Тітчмарша для характеристичної матриці оператора Штурма-Ліувілля на осі. Ця формула виражає характеристичну матрицю системи в термінах m-функцій на півосях. За допомоги формули Тітчмарша отримано параметризацію ортогональних спектральних функцій, що відповідають самоспряженим розділеним граничним умовам. Ця параметризація задається в термінах самоспряжених граничних параметрів в точках a та b, за допомоги яких визначаються граничні умови.

7. Перелічені результати стосовно систем перенесено на звичайні симетричні диференціальні оператори довільного (парного або непарного) порядку з матричними коефіцієнтами. Це, зокрема, дозволило поширити теорію Вейля - Тітчмарша на диференціальні оператори парного порядку з нерівними індексами дефекту та непарного порядку з довільними (як рівними, так і нерівними)

індексами дефекту, визначені на проміжку з регулярною кінцевою точкою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — Москва: Мир, 1968. — 750 с.

[2] Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман . — М.: Наука, 1966. — 544 с.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М.Березанский. — Киев: Наук. думка, 1965. — 450 с.

[4] Бирман М.Ш. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов / М.Ш. Бирман // Мат. сб. — 1956. — Т.38, № 4. — С. 431-450.

[5] Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторовТреугольные и жордановы представления линейных операторов / М.С. Бродский. — Москва: Наука, 1969. — 288 с.

[6] Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии / В.М. Брук // Мат. сб. — 1976. — Т.100, № 2. — С. 210-216.

[7] Брук В.М. О расширениях симметрических отношений / В.М. Брук // Матем. заметки — 1977. — Т.22, № 6. — С. 825–834.

[8] Брук В.М. О линейных отношениях в пространстве вектор-функций / В.М. Брук // Матем. заметки — 1978. — Т.24, № 4. — С. 499-511.

[9] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Тр. Моск. мат. о-ва — 1952. — Т.1. — С. 187-246.

[10] Гохберг И. Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. — Москва: Наука, 1967. — 508 с.

[11] Горбачук В.И Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений / В.И.Горбачук, М.Л.Горбачук. — К.: Наук. думка, 1984. — 284 с.

[12] Горбачук М.Л. О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами / М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. — 1966. — Т.18, № 2. — С. 3-21.

[13] Горбачук М.Л. Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неогрниченным операторным коэффициентом / М.Л. Горбачук // Функц. анализ и его пролож. — 1971. — Т.5, № 1. — С. 10-21.

[14] Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — Москва: Мир, 1966. — 1064 с.

[15] Деркач В.А Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов / В.А. Деркач, М.М. Маламуд // Укр. мат. журн. — 1992. — Т.44, № 4. — С. 435-459.

[16] Кац И.С.О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями / Зап. Харьковского мат. общества // И.С. Кац — 1950. — Т.22, № 4. — С. 95-113.

[17] Кац И.С.О спектральных функциях струны / И.С. Кац, М.Г. Крейн // Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — Москва: Мир, 1968. — с. 648-737.

[18] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т.Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[19] Ковалишина И.В.Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач / И.В. Ковалишина // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1983. — Т.47, № 3. — С. 455–497.

[20] Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.- М.: изд. Иностр. лит-ры, 1958.- 450 с.

[21] Кочубей А.Н.О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А.Н. Кочубей // Матем. заметки. — 1975. — Т.17, № 1. — С. 41-48.

[22] Кочубей А.Н. О спектре самосопряженных расширений симметрического оператора / А.Н. Кочубей // Матем. заметки. — 1976. — Т.19, № 3. — С. 429-434.

[23] Кочубей А.Н. О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений / А.Н. Кочубей // Изв. АН Арм. ССР. Математика — 1980. — Т.15, № 3. — С. 219-232.

[24] Красносельский М.А. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов / М.А. Красносельский // Укр. мат. журн. — 1949. — № 1. — С. 21-38.

[25] Крейн М.Г. О резольвентах эрмитова оператора с индексами дефекта (m, m) / М.Г. Крейн // Докл. Акад. Наук СССР. — 1946. — Т.52, № 8. — С. 657-660.

[26] Крейн М.Г. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ, часть 1 / М.Г. Крейн, Г. Лангер, часть 1 // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Т.5, № 2. — С. 59-71; часть 2 // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Т.5, № 3. — С. 54-69 .

[27] Кужель С.А. О пространствах граничных значений эрмитовых операторов / С.А. Кужель // Укр. мат. журн. — 1990. — Т.42, № 6. — С. 854-857.

[28] Левитан Б.М. Введение в спектральную теорию / Б.М. Левитан, И.С. Саргасян. — М.: Наука, 1970. — 672 с.

[29] Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гальбертовом пространстве / М.С. Лившиц // Мат. сб. — 1946. — Т.19, № 2. — С. 239 - 260.

[30] Маламуд М.М. О формуле обобщенных резольвент неплотно заданного эрмитова оператора / М.М. Маламуд // Укр. мат. журн. — 1992. — Т.44, № 12. — С. 1658-1688.

[31] Маламуд М.М. Резольвентные матрицы и спектральные функции изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Докл. акад. наук. – 2004. – V.395, № 1. – С. 1-7.

[32] Маламуд М.М. Резольвентные матрицы и характеристические функции расширений изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Докл. акад. наук. – 2005. – V.405, № 4. – С. 454-461.

[33] Маламуд М.М. Об унитарной эквивалентности собственных расширений эрмитова оператора и функции Вейля / М.М. Маламуд, В. И. Могилевский, С. Хасси // Матем. заметки . – 2012. – V.91, № 2. – С. 316-320.

[34] Мирзоев Г.А.Описание самосопряженных расширений квазирегулярных операторов, порожденных двучленными дифференциальными выражениями / Г.А. Мирзоев // Матем. заметки — 1981. — Т.29, № 2. — С. 225-233.

[35] Михайлец В.А.Спектры операторов и граничные задачи / В.А. Михайлец // Спектральный анализ дифференциальных операторов.— К.: Институт математики, 1980. — С. 106-131.

[36] Могилевский В.И. Описание спектральных функций дифференциального оператора с произвольными индексами дефекта / В.И. Могилевский // Матем. заметки . – 2007. – V.81, № 4. – С. 625-630.

[37] Могилевский В.И. Описание обобщенных резольвент и характеристических матриц дифференциальных операторов посредством граничного параметра / В.И. Могилевский // Матем. заметки . – 2011. – V.90, № 4. – С. 558-583.

[38] Могилевский В.И. О характеристических матрицах дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / В.И. Могилевский // Доповіді Нац. акад. наук України . – 2012. – № 2. – С. 25-31.

[39] Наймарк М.А. О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора / М.А. Наймарк // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1940. — Т.4, № 1. — С. 53 -104.

[40] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

[41] Рид М. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. — М.: Мир, 1977. — 357 с.

[42] Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в протсранстве вектор-функций / Ф.С. Рофе-Бекетов // Теория функций, функц. анализ и их прилож. — 1969. — Т.8. — С. 3-24.

[43] Сахнович А.Л.Спектральные функции канонической системы $2n$-го порядка / А.Л. Сахнович // Мат. сб. — 1990. — Т.181, № 11. — С. 1510-1524.

[44] Сторож О.Г. О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами / О.Г. Сторож // Мат. заметки. — 1984. — Т.36, № 5. — С. 791-796.

[45] Холькин А.М.Описание самосопряженных расширений дифференциальных операторов произвольного порядка на бесконечном интервале в абсолютно неопределенном случае / А.М. Холькин // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1985. — Т.44. — С. 112-122.

[46] Шмульян Ю.Л.Теория линейных отношений и пространства с индефинитной метрикой / Ю.Л. Шмульян // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т.10, № 1. — С. 67–72.

[47] Штраус А.В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов / А.В. Штраус // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1954. — Т.18, № 1. — С. 51-86.

[48] Штраус А.В.Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка / А.В. Штраус // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1957. — Т.21, № 6. — С. 85–808.

[49] Штраус А.В.О расширениях и характеристической функции симметрического оператора / А.В. Штраус // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1968. — Т.32. — С. 186-207.

[50] Штраус А.В.Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора / А.В. Штраус // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1970. — Т.34, № 1. — С. 175–202.

[51] Albeverio S.On Titchmarsh-Weyl functions and eigenfunction expansions of first-order symmetric systems / S. Albeverio, M.M. Malamud, V.I.Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory — 2013. — V.77. — P. 303–354.

[52] Arens R. Operational calculus of linear relations / R. Arens // Pacific. J. Math. — 1961. — V.11. — P. 9-23.

[53] Arov D.Z. Bitangential direct and inverse problems for systems of integral and differential equations / D.Z. Arov, H. Dym. — Cambridge University Press: Cambridge, 2012. — 488 p.

[54] Behncke H.Two singular point Hamiltonian systems with interface condition / H. Behncke. D. Hinton // Math. Nachr. — 2010. — V.283, № 3. — P. 365–378.

[55] Behrndt J. Square-integrable solutions and Weyl functions for singular canonical systems / J. Behrndt, S. Hassi, H. de Snoo, R. Wiestma // Math. Nachr. — 2011. — V.284, № 11-12. — P. 1334–1383.

[56] Bennevitz C. Symmetric relations on a Hilbert space / C. Bennevitz. — Berlin: Springer, 1972. — 284 p.

[57] Brasche J.F.Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions / J.F. Brasche, M.M. Malamud, H. Neidhart // Integr. Equ. Oper. Theory — 2002. — V.43, № 3. — P. 264–289.

[58] Calkin J.Abstract symmetric boundary conditions / J. Calkin // Trans. Amer. Math. Soc. — 1939. — V.45. — P. 369-442.

[59] Coddington E.A. Extension theory of formally normal and symmetric subspaces / E.A. Coddington // Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — V.134. — P. 1-80.

[60] Derkach V.A.Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Funct. Anal. — 1991. — V.95. — P. 1–95.

[61] Derkach V.A.The extension theory of Hermitian operators and the moment problem / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Math. Sciences — 1995. — V.73, № 2. — P. 141-242.

[62] Derkach V.A.Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility / V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2000. — V.6, № 3. — P. 24–55.

[63] Derkach V.A.Boundary relations and their Weyl families / V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo // Trans. Amer. Math. Soc. —2006. — V.358, № 12. — P. 5351–5400.

[64] Derkach V.A.Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators / V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo // Russian J. Math. Ph. — 2009. — V.16, № 1. — P. 17–60.

[65] Dijksma A.Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions / A. Dijksma, H. Langer, H.S.V. de Snoo // Oper. Theory Adv. Appl — 1988. — V.35. — P. 37–83.

[66] Dijksma A.Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions / A. Dijksma, H. Langer, H.S.V. de Snoo // Math. Nachr. — 1993. — V.161. — P. 107–153.

[67] Dijksma A.Self-adjoint extensions of symmetric subspaces / A. Dijksma, H.S.V. de Snoo // Pacific J. Math. — 1974. — V.54, № 1. — P. 71-100.

[68] Everitt W.N.Integrable-square, analytic solutions of odd order,fomally symmetric, ordinary differential equations / W.N. Everitt // Proc. London Math.Soc. — 1972. — V.25, № 3. — P. 156–182.

[69] Everitt W.N.On the Titchmarsh-Weyl theory of ordinary symmetric differential expressions 1 : The general theory / W.N. Everitt, V. Krishna Kumar // Nieuw Arch. voor Wiskunde — 1976. — V.24, № 3. — P. 1–48.

[70] Everitt W.N.On the Titchmarsh-Weyl theory of ordinary symmetric differential expressions 2 : The odd-order case / W.N. Everitt, V. Krishna Kumar // Nieuw Arch. voor Wiskunde — 1976. — V.24, № 3. — P. 109–145.

[71] Fulton Ch. T.Parametrizations of Titchmarsh's $m(x)$-functions $m(\lambda)$-functions in the limit circle case / Ch. T. Fulton // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — V.229. — P. 51–63.

[72] Gilbert R.C.Simplicity of linear ordinary differential operators / R.C. Gilbert // J. Differential Equations — 1972. — V.11. — P. 672–681.

[73] Hartman Ph.A separation theorem for continuous spectra / Ph. Hartman, A. Wintner // Amer. J. Math. — 1949. — V.71 . — P. 650–662.

[74] Hassi S. Generalized resolvents and boundary triplets for dual pairs of linear relations / S. Hassi, M. Malamud, V. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2005. – V.11, № 2. – P. 170-187.

[75] Hassi S. Unitary equivalence of proper extensions of a symmetric operator and the Weyl function / Seppo Hassi, Mark Malamud and Vadim Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2013. – V.77. – P.449-487 .

[76] Hinton D.B.On the Titchmarsh-Weyl coefficients for singular S-Hermitian systems / D.B. Hinton, A. Schneider // Math. Nachr. — 1993. — V.163. — P. 323–342.

[77] Hinton D.B.On the spectral representation for singular selfadjoint boundary eigenfunction problems / D.B. Hinton, A. Schneider // Oper. Theory: Advances and Applications — 1998. — V.106.

[78] Hinton D.B.Titchmarsh-Weyl coefficients for odd order linear Hamiltonian systems / D.B. Hinton, A. Schneider // J. Spectral Mathematics — 2006. — V.1. — P. 1-36.

[79] Hinton D.B. On Titchmarsh-Weyl $m(\lambda)$-functions for linear Hamiltonian systems / D.B. Hinton, J.K. Shaw // J. Differ. Equations — 1981. — V.40. — P. 316-342.

[80] Hinton D.B. Parameterization of the $M(\lambda)$ function for a Hamiltonian system of limit circle type / D.B. Hinton, J.K. Shaw // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A — 1982/83. — V.93, № 3-4. — P. 349-360.

[81] Kats I.S.Linear relations generated by the canonical differential equation of phase dimension 2, and eigenfunction expansion / I.S. Kats // St. Petersburg Math. J. — 2003. — V.14. — P. 429–452 .

[82] Kogan V.I.On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order / V.I. Kogan, F.S. Rofe-Beketov // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A — 1974/75. — V.74. — P. 5–40.

[83] Krall A.M.$M(\lambda)$-theory for singular Hamiltonian systems with one singular endpoint / A.M. Krall // SIAM J. Math. Anal. — 1989. — V.20№ 3. — P. 664–700.

[84] Krall A.M.$M(\lambda)$-theory for singular Hamiltonian systems with two singular points / A.M. Krall // SIAM J. Math. Anal. — 1989. — V.20, № 3. — P. 701–715. A.M. Krall, *$M(\lambda)$-theory for singular Hamiltonian systems with two singular points*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no 3, .

[85] Krein M.G Über die Q-functions eines π-hermiteschen operators in raume Π_κ / M.G Krein, H. Langer // Acta. Sci. Math. (Szeged) — 1973. — V.34. — P. 191–230.

[86] Krishna Kumar V. On the Titchmarsh-Weyl theory of ordinary symmetric odd-order differential expressions and a direct convergence theorem / V. Krishna Kumar // Quaestiones Math. — 1982. — V.5. — P. 165-185.

[87] Kuzhel A. V. Regular Extensions of Hermitian Operators / Kuzhel A. V., Kuzhel S. A.. — Utrecht: VSP, 1998. — 275 с.

[88] Langer H.On generalized resolvents and Q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in Hilbert space / H. Langer, B. Textorious // Pacif. J. Math. — 1977. — V.72, № 1. — P. 135-165.

[89] Langer H.L-resolvent matrices of symmetric linear relations with equal defect numbers; appliccations to canonical differential relations / H. Langer, B. Textorius // Integr. Eq. Oper. Theory — 1982. — V.5. — P. 208–243.

[90] Langer H.Spectral functions of a symmetric linear relation with a directing mapping, I / H. Langer, B. Textorius // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A — 1984. — V.97. — P. 165-176.

[91] Langer H.Spectral functions of a symmetric linear relation with a directing mapping, II / H. Langer, B. Textorius // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A — 1985. — V.101. — P. 111-124.

[92] Lesch M. On the deficiency indices and self-adjointness of symmetric Hamiltonian systems / M. Lesch, M.M. Malamud // J. Differential Equations — 2003. — V.189. — P. 556–615.

[93] Malamud M.M. On Weyl functions and Q-functions of dual pairs of linear relations / Malamud M.M., V.I. Mogilevskii // Доповіді Нац. акад. наук України. – 1999. – № 4. – С. 32-37.

[94] Malamud M. M.Krein type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations / M. M. Malamud, V. I. Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2002. — V.8, № 4. — P. 72-100.

[95] Маламуд М.М. Обобщенные резольвенты изометрического оператора / М.М. Маламуд, В.И. Могилевский // Матем. заметки. – 2003. – V.73, № 3. – С. 460-465.

[96] Mogilevskii V.I. On nonselfajoint differential operators in a vector-function space /V.I. Mogilevskii //Доповіді Нац. акад. наук України. – 2000 . – № 7. – С. 35-40.

[97] Mogilevskii V.I.Nevanlinna type families of linear relations and the dilation theorem / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2006. — V.12, № 1. — P. 38–56.

[98] Mogilevskii V.I.Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2006. — V.12, № 3. — P. 258–280.

[99] Mogilevskii V.I.Boundary triplets and Titchmarsh - Weyl functions of differential operators with arbitrary deficiency indices / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2009. — V.15, № 3. — P. 280–300.

[100] Mogilevskii V.Fundamental solutions of boundary-value problems and resolvents of differential operators / V. Mogilevskii // Ukr. Math. Bul. — 2009. — V.6, № 4. — P. 487–525.

[101] Mogilevskii V. Symmetric operators with real defect subspaces of the maximal dimension. Applications to differential operator / Vadim Mogilevskii // J. of Funct. Anal. – 2011. – V.261. – P. 1955–1968.

[102] Mogilevskii V.I.Boundary pairs and boundary conditions for general (not necessarily definite) first-order symmetric systems with arbitrary deficiency indices / V.I.Mogilevskii // Math. Nachr. — 2012. — V.285. — P. 14–15.

[103] Mogilevskii V. Minimal spectral functions of an ordinary differential operator / Vadim Mogilevskii // Proc. of the Edinburgh Math. Soc. – 2012. – V.55. – P. 731—769.

[104] Mogilevskii V.I.On exit space extensions of symmetric operators with applications to first order symmetric systems / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2013. — V.19, № 3. — P. 268–292.

[105] Mogilevskii V.I.On generalized resolvents and characteristic matrices of first-order symmetric systems / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2014. — V.20, № 4. — P. 328–348.

[106] Mogilevskii V. On characteristic matrices and eigenfunction expansions of two singular point symmetric systems / Vadim Mogilevskii // Math. Nachr. – 2015. – V.288, № 2-3. – P.249-280 .

[107] Mogilevskii V.I.Characteristic matrices and spectral functions of first order symmetric systems with maximal deficiency index of the minimal relation / V.I.Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology — 2015. — V.21, № 1. — P. 76–98.

[108] Mogilevskii V. On eigenfunction expansions of first-order symmetric systems and ordinary differential operators of an odd order / Vadim Mogilevskii // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2015. – V.82. – P. 301-337.

[109] Mogilevskii V.I.On spectral and pseudospectral functions of first-order symmetric systems / V.I.Mogilevskii // Уфимский матем. журн. — 2015. — V.7, № 2. — P. 123–144.

[110] Mogilevskii V. Spectral and pseudospectral functions of Hamiltonian systems: development of the results by Arov-Dym and Sakhnovich / Vadim Mogilevskii // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V.21, № 4. — P. 370-402.

[111] Orcutt B.C.Canonical differential equations / B.C. Orcutt // Dissertation. — University of Virginia,1969. .

[112] Remling C.Essential spectrum and L_2-solutions of one-dimensional Schredinger operators / C. Remling // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V.124, № 7. — P. 2097–2100.

[113] Rofe-Beketov F.S. Spectral analysis of differential operators. Interplay between spectral and oscillatory properties / F.S. Rofe-Beketov, A. M. Kholkin. – New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai: World Scientific publishing com., 2005. – 462 p

[114] Sakhnovich A.L.Inverse problems and nonlinear evolution equations. Solutions, Darboux matrices and Weyl-Titchmarsh functions / A.L. Sakhnovich, L.A. Sakhnovich I.Ya. Roitberg. — Berlin: De Gruyter, 2013. — 341 p.

[115] Sun J.Continuous spectrum and square-integrable solutions of differential operators with intermediate deficiency index / J. Sun, A. Wang, A. Zettl // J. Funct. Anal. — 2008. — V.255. — P. 3229–3248.

[116] Weidmann J. Spectral theory of ordinary differential operators / J. Weidmann. — Berlin: Springer-Verlag, 1987. — 303p.