ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Могілевського Вадима Йосиповича
"Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем" подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Основною задачею теорії розширень симетричного оператора A у гільбертовому просторі є опис розширень $\tilde{A}$, таких що $A \subset \tilde{A} \subset A^*$, та виділення певних класів розширень, об'єднаних спільними властивостями. Така теорія виникла із прикладних задач, зокрема, з досліджень операторів, пов'язаних з крайовими задачами для диференціальних рівнянь. Тому в теорії розширень часто використовується мова диференціальних рівнянь, наприклад термін "граничні умови", але зрозуміло, що у загальній абстрактній формі.

Абстрактні граничні умови природним чином виникають в процесі застосування підходу, що базується на понятті граничної трійки та відповідної абстрактної функції Вейля. Цей підхід був розвинутий в роботах Ф.С. Рофе-Бекетова, В.І. Горбачук, М.Л. Горбачука, А.Н. Кочубея, В.О. Деркача, М.М. Маламуда та їх числених учнів і послідовників. Застосування методу граничних трійок обумовило появу істотно нових результатів у теорії розширень. Проте зазначимо, що метод граничних трійок та відповідних функцій Вейля був розроблений і використовувався за умов, що симетричний оператор A має рівні дефектні числа $n_+ = n_-$. Тому поза увагою залишалися диференціальні вирази, що породжують оператори з $n_+ \neq n_-$. Поширення теорії граничних трійок та абстрактних функцій Вейля на симетричні оператори (лінійні відношення) з нерівними дефектними числами є актуальною складною проблемою.

Нехай J – $n \times n$-матриця, така що $J^* = J^{-1} = -J$, і

$$\nu_\pm = \dim \ker (J \mp iI).$$

Основним об'єктом дисертації є є симетрична диференціальна система вигляду

$$Jy' - B(t)y = \lambda \Delta(t) y, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

де $B(t) = B^*(t)$ і $\Delta(t) \geq 0$ – $n \times n$-матричні коефіцієнти, визначені або на відрізку $\mathcal{I} = [a, b]$ (і тоді система називається регулярною), або на півосі $\mathcal{I} = [0, \infty)$ чи всій осі $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ (така система називається сингулярною). Система називається гамільтоновою, якщо $\nu_+ = \nu_- =: k$, і тому $n = 2k$.

Припустимо, що $Y(t, \lambda)$ – матричний розв'язок системи. Так само, як це завжди було з диференціальними операторами, спектральною функцією

системи називають матричну функцію розподілу $\sigma(s)$, таку що перетворення Фур'є

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathcal{I}} Y^*(t,s)\Delta(t)f(t)\,dt \qquad (*)$$

є ізометрією з $L^2_\Delta(\mathcal{I})$ в $L^2(\sigma)$. Якщо $\sigma(s)$ – спектральна функція, то кожна функція $f \in L^2_\Delta(\mathcal{I})$ відновлюється з $\widehat{f}$ за допомоги зворотного перетворення Фур'є. Можливо, що матрична вага $\Delta(t)$ вироджується на множині не нульової міри. В такому разі спектральна функція може не існувати. Але тоді для регулярної гамільтонової системи існує псевдоспектральна функція, тобто $k \times k$ - матрична функція розподілу $\sigma(s)$, така що наведене перетворення Фур'є задає часткову ізометрію V_σ із мінімально можливим ядром $\ker V_\sigma$. Усі псевдоспектральні функції гамільтонової регулярної системи параметризуються як спектральні функції неванліннівської функції (функції Вейля-Тітчмарша) $m(\lambda)$, що задається дробово-лінійним перетворенням

$$m(\lambda) = (w_{11}(\lambda)C_0(\lambda) + w_{12}(\lambda)C_1(\lambda))(w_{21}(\lambda)C_0(\lambda) + w_{22}(\lambda)C_1(\lambda))^{-1}. \quad (**)$$

Тут $w_{ij}(\lambda)$ – блоки матриці монодромії $W(\lambda)$ і $C_0(\lambda), C_1(\lambda)$ – неванліннівська матрична пара в якості параметра, що ще додатково задовольняє певну умову допустимості. Параметризація (**) є в монографіях Д.З. Арова та Г. Дима (2012) і А.Л. Сахновича, Л.А Сахновича та І.Я. Ройтберг (2013). Вона аналогічна до параметризації розв'язків класичних проблем аналізу (степенева та тригонометричні проблеми моментів, проблеми Каратеодорі, Шура та інші) в абсолютно невизначеному випадку.

Якщо досліджувана система є сингулярною, то перетворення Фур'є визначене лише на фінітних функціях, і отже означення псевдоспектральної функції, у випадку регулярної системи, не поширюється автоматично на сингулярні системи. У зв'язку із зазначеним є актуальними такі задачі: 1) поширити поняття псевдоспектральної функції на довільні негамільтонові та сингулярні системи таким чином, щоб зображення у вигляді зворотного перетворення Фур'є мало місце для всіх функцій f з максимально можливого підпростору в $L^2_\Delta(\mathcal{I})$; 2) отримати параметризацію псевдоспектральних функцій за допомоги граничного параметра; 3) характеризувати спектральні властивості самоспряжених операторів, що відповідають симетричним системам.

Симетричний диференціальний оператор можна звести до симетричної системи. Отже методи, розроблені для симетричних систем, цілком застосовні і до дослідження диференціальних операторів. На цьому шляху актуальними є такі задачі, як компактна характеризація граничних умов для сингулярних диференціальних операторів; поширення теорії Вейля - Тітчмарша на диференціальні оператори непарного порядку; параметризація спектральних функцій диференціальних операторів.

Дослідженню перелічених актуальних проблем і присвячена дисертація В.Й. Могілевського.

Перейдемо до детального змісту дисертаційної роботи. Вона складається зі вступу, восьми розділів, висновків і списку літератури що має понад ста найменувань.

У першому розділі традиційно подано історичний огляд літератури за темою дисертації.

Викладення основних результатів починається у другому розділі. Він присвячений дослідженню розширень симетричних операторів методом граничних трійок. Зокрема тут введені і аналізуються поняття граничної трійки та відповідної їй функції Вейля взагалі для симетричного лінійного відношення і як частинного випадку оператора A з довільними дефектними числами. Також дається параметризація самоспряжених розширень відношення A з виходом у ширший простір. У випадку нерівних дефектних чисел ці результати узагальнюють відомі результати з робіт М.Г. Крейна і Г. Лангера, В.О. Деркача і М.М. Маламуда та інших авторів.

Далі у розділі досліджується спектр самоспряжених розширень $\widetilde{A}$ симетричного оператора A з рівними скінченими дефектними числами d і дійсними дефектними підпросторами максимально можливої розмірності d. Новими результатами спектральної теорії є теореми 2.72 та 2.73, згідно з якими спектр кожного розширення $\widetilde{A}$ є ніде не щільною множиною, що збігається із замиканням множини власних значень оператора $\widetilde{A}$, і в той же час спектр $\widetilde{A}$ не є, взагалі кажучи, дискретним.

Дослідження спектральних властивостей симетричних систем за допомогою розвинутих в розділі 1 методів абстрактної теорії розширень міститься в розділах 3 - 7.

Основним результатом третього розділу є цікава нова теорема 3.66, яка містить критерій існування та параметризацію розділених самоспряжених граничних умов для симетричної системи. З цієї теореми випливає, що для негамільтонової системи на осі зазначені умови можуть існувати лише у випадку, коли звуження системи на півосі має нерівні дефектні числа. Це твердження ще раз підкреслює актуальність дослідження систем з нерівними дефектними числами.

Далі в роботі розглядаються сингулярні системи з довільними дефектними числами. Для такої системи записана гранична задача з λ-залежними неванліннівськими (зокрема самоспряженими) граничними умовами на нескінченості, в термінах якої параметризуються узагальнені резольвенти мінімального відношення і характеристичні матриці системи $\Omega(\lambda)$. Така параметризація має вигляд перетворення

$$\Omega(\lambda) = \Omega_0(\lambda) + S_1(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)S_2(\lambda),$$

неванліннівської пари матричних функцій $\{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ (граничного параметра), за допомоги якої визначаються граничні умови відповідної граничної задачі. Коефіцієнти цього перетворення Ω_0, S_1, S_2 та M визначаються в термінах граничних значень деяких матричних розв'язків системи. Цей результат є узагальненням на сингулярні системи відомого результату Г. Лангера та Б. Текстеріуса для регулярних систем.

У п'ятому розділі вводиться нове поняття спектральної теорії – m-функція $m(\lambda)$ довільної симетричної системи на півосі, яка є узагальненням відомої функції Вейля-Тітчмарша для гамільтонової системи. Функція $m(\lambda)$ є матричною неванлінніською функцією розміру меншим за n. Для різних відзначених автором випадків a1 та a2, які характеризуються дефектними числами системи та числами $\nu_\pm$, дослідження m-функцій негамільтонових систем вимагає різних підходів. У випадку a1 m-функції заданої системи параметризуються неванліннівськими парами матричних функцій $\{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ за допомоги виразу

$$m(\lambda) = m_0(\lambda) + M_{1+}(\lambda)(C_0(\lambda) - C_1(\lambda)M_{3+}(\lambda))^{-1}C_1(\lambda)M_{2+}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

з матричними коефіцієнтами, які визначаються в термінах граничних значень деякого матричного розв'язку системи. У випадку a2 m-функція має трикутне блочне зображення

$$m(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) & m_2(\lambda) \\ 0 & \frac{i}{2}I_{|\nu_+ - \nu_-|} \end{pmatrix},$$

а матричні функції $m_1(\lambda)$ та $m_2(\lambda)$ параметризуються перетворенням, аналогічним випадку a1.

У випадку $N_+ = N_- = n$ (квазірегулярна система) параметризація m-функцій задається дробово-лінійним перетворенням (**) із коефіцієнтами $w_{ij}(\lambda)$, визначеними в термінах матричної функції

$$\lim_{t \to +\infty} Y^{-1}(t, 0)Y(t, \lambda),$$

де $Y(t, \lambda)$ позначає фундаментальний розв'язок системи.

Дослідженню псевдоспектральних функцій довільних симетричних систем присвячено шостий розділ.

Матрична функція розподілу $\Sigma(s)$ розміру $n \times n$ є спектральною функцією системи, якщо перетворення Фур'є (*) з фундаментальним розв'язком $Y(t, \lambda)$ розміру $n \times n$ є ізометрією. Важлива теорема 6.6 пояснює, чому спектральна функція може не існувати. Саме, згідно з цією теоремою

кожне частково-ізометричне перетворення Фур'є V_Σ вигляду (*) задовольняє включенню $\operatorname{mul} T_{min} \subset \ker V_\Sigma$, де $\operatorname{mul} T_{min}$ позначає многозначну частину мінімального відношення T_{min}. Отже спектральна функція може існувати лише у випадку, коли T_{min} є оператором. Виходячи з цього твердження, автор вводить нове поняття псевдоспектральної функції як $n \times n$-матричної функції розподілу $\Sigma(s)$, такої що перетворення Фур'є V_Σ є частковою ізометрією з мінімально можливим ядром, що дорівнює $\operatorname{mul} T_{min}$. Завдяки такому означенню псевдоспектральної функції, зворотне перетворення Фур'є існує для всіх функцій f з максимально можливого підпростору $L^2_\Delta(\mathcal{I}) \ominus \operatorname{mul} T_{min}$. Аналогічно в роботі вводиться укорочена псевдоспектральна функція розміру меншого за n, але у цьому випадку замість відношення T_{min} використовується деяке його розширення.

Основним результатом роботи стосовно псевдоспектральних функцій є їх параметризація за допомоги зазначеного вище перетворення для $\Omega(\lambda)$ і формули обернення Стільт'єса; при цьому неванлинівський параметр $\{C_0(\lambda), C_1(\lambda)\}$ повинен задовольняти певні умови допустимості. У випадку, коли $\operatorname{mul} T_{min} = \{0\}$, твердження роботи виконуються для спектральних функцій замість псевдоспектральних.

В роботі також дається параметризація усіх укорочених псевдоспектральних функцій у випадку a1 за допомоги зазначених параметризацій m-функції $m(\lambda)$ та формули обернення Стільт'єса для $m(\lambda)$. Крім того, у випадку a2 даються формули для обчислення укорочених псевдоспектральних функцій $\sigma(s)$ спеціального вигляду. Такий вигляд є наслідком застосування формули обернення Стільтьєса до "трикутної" m-функції. Далі наведена характеристика спектра самоспряженого розширення $\widetilde{T} \supset T$ з виходом в ширший простір, що відповідає $\sigma(s)$ у випадку a2. Тут цікавим є твердження про те, що кратність сингулярного спектра і кратність кожного власного значення операторної частини відношення $\widetilde{T}$ не перевищує $\min\{\nu_+, \nu_-\}$.

Перелічені результати є суттєвим просуванням в спектральній теорії симетричних систем. Вони поширюють відомі результати стосовно спектральних та псевдоспектральних функцій для регулярних гамільтонових систем на довільні сингулярні системи.

У сьомому розділі розглядаються характристичні матриці довільної симетричної системи на всій осі, що відповідають розділеним самоспряженим граничним умовам. Для такої матриці доводиться формула Тітчмарша, яка є аналогом відомою формули Тітчмарша для оператора Штурма - Ліувілля на осі. За допомоги формули Тітчмарша в роботі дається параметризація ортогональних спектральних функцій.

Восьмий розділ присвячений дослідженню диференціальних операторів довільного порядку з матричними коефіцієнтами шляхом зведення такого оператора до симетричної системи з подальшим застосуванням отриманих

в роботі результатів для систем. Такий підхід виявляється найбільш ефективним для операторів непарного порядку, які зводяться до негамільтонової системи. Отримані в цьому розділі результати розвивають відомі результати М.Л. Горбачука, Ф.С. Рофе-Бекетова, Ч. Фултона, О.М. Холькіна та інших математиків стосовно граничних умов та спектральних функцій диференціальних операторів. Серед найбільш цікавих результатів дисертації у цьому напрямку слід відзначити лаконічний опис різних класів граничних умов, поширення теорії Вейля - Тітчмарша на оператори непарного порядку та параметризацію спектральних функцій безпосередньо в термінах граничних умов.

До роботи є ряд зауважень:

1. На стор. 65 відсутнє посилання на роботу І.С. Каца (1950 р.), в якій вперше було доведено повноту простору $L^2_\Delta(\mathcal{I})$.

2. На стор. 83 дисертації визначені випадки a1 - a3 для симетричної системи з регулярною кінцевою точкою. В зауваженні 3.39 сказано, що без обмеження загальності можна розглядати лише системи у цих трьох випадках, і твердження розділу 3 доведені для всіх випадків a1 - a3. В той же час m-функції та укорочені псевдоспектральні функції в розділах 5 та 6 досліджено лише у випадках a1 та a2. Насправді було б цікаво записати аналогічні результати і для випадку a3, оскільки, як свідчать результати дисертації, цей випадок є проміжним між випадками a1 та a2. Можливо, зазначений недолік пояснюються обмеженнями, що накладаються на об'єм дисертації.

3. В роботі зустрічаються друкарські помилки наприклад в дисертації:

– стор. 14, рядок 7: замість "... задовольняє деякій граничній умові ... ", має бути "... задовольняє деяку граничну умові ... ";

– стор. 15, рядок 25: замість "... уявляється цикавою така задача ... ", має бути "... виявляється цікавою така задача ... ";

– стор. 20, рядок 13: замість "... базуеться на теоремі ... ", має бути "... базується на теоремі ...";

та авторефераті і дисертації:

– замість "... кінцева точка ... ", має бути "... крайня точка ..."; та інше.

Щодо оцінки дисертаційної роботи в цілому, слід зазначити, що основні результати, які отримані в дисертації і виносяться на захист, є новими. У роботі дано їх строгі доведення методами функціонального аналізу: теорії лінійних операторів, та методами спектрального аналізу.

Автореферат дисертації правильно відображає основний зміст роботи. Результати досліджень за темою дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені в 39 публікаціях, з них – 27 статей у наукових фахових виданнях та 14 включені до міжнародних наукометричних баз. Ці результати пройшли апробацію на всеукраїнських і міжнародних конференціях та наукових семінарах, зокрема в Інституті математики НАН України.

Робота Могілевського В.Й. має безпосередні зв'язки із науковими програмами, планами і темами, які виконуються у провідних наукових установах України, зокрема Інституті математики НАН України.

Щодо змісту дисертації та її оформлення є зауваження лінгвістичного характеру, які не впливають на загальну оцінку роботи. Загалом можна стверджувати, що робота є завершеним теоретичним дослідженням, виконаним на високому науковому рівні, написана чіткою ясною математичною мовою.

Робота відповідає сучасному рівню розвитку математики та всім вимогам пп. 10, 12, 13, 14 "Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника" (Постанова КМУ від 24 липня 2013р. № 567), що висуваються до докторської дисертації.

Виходячи з вищесказаного, вважаю, що дисертаційна робота В.Й. Могілевського "Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем" відповідає всім вимогам ДАК МОН України щодо робіт поданих на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент:
доктор фіз.-мат. наук, професор,
в.о. завідувача кафедри
диференціальних рівнянь
Національного технічного
університету України "КПІ" Дудкін М. Є.

Підписи засвідчую
Учений секретар
Національного технічного
університету України "КПІ" Мельниченко А. А.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 20.05.2016 р.
секретар ради /Артемиченко Ж.В./