ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Могілевського Вадима Йосиповича «Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем» подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01-математичний аналіз

Дисертація присвячена дослідженню спектральних властивостей симетричних лінійних відношень та симетричних диференціальних систем. Ці питання інтенсивно розробляються у нас в країні і за кордоном. Ряд фізичних задач приводить до симетричних систем. Ефективний метод розв'язання таких задач ґрунтується на теорії розширень симетричних операторів, що є однією з найважливіших проблем функціонального аналізу.

Витончений процес розширення симетричного оператора в гільбертовому просторі був запропонований Дж. Фон Нейманом, а потім розвинений в роботах М. Стоуна, М.Г. Крейна, Ф. Рісса та Б. Секефальві-Надя, Н.І. Ахієзера та І.М. Глазмана. М.А. Наймарка, А.В. Штрауса. Важливим розділом цієї теорії є розширення симетричних диференціальних операторів, викладення якої міститься в монографіях Е.Ч. Тітчмарша, Н. Данфорда та Дж.Т. Шварца, Б.М. Левітана. Тут необхідно відзначити статті Ф.С. Рофе-Бекетова. який, використовуючи ермітові бінарні відношення, отримав загальний вигляд самоспряжених крайових задач на скінченому інтервалі для диференціальних рівнянь довільного парного або непарного порядку з неперервними операторними коефіцієнтами. Опис усіх самоспряжених розширень оператора Штурма-Ліувілля на нескінченному інтервалі в скалярному випадку в різній формі отримали М.Г. Крейн. Г. Вейль, Е.Ч. Тітчмарш, а потім Ч. Фултон. Новий виток в розвиток теорії розширень пов'язаний з використанням простору граничних значень, введеного в розгляд Дж. Келкіним і розвиненого в роботах А.Н. Кочубея і В.М. Брука. Однією з перших робіт, в якій з використанням граничної трійки в абсолютно невизначеному випадку отримано опис всіх самоспряжених розширень симетричних операторів довільного (як парного, так і непарного) порядку з операторними коефіцієнтами на нескінченному інтервалі (осі, півосі), є робота О.М. Холькіна (одночасно і незалежно аналогічний результат для двочленної скалярної операції парного порядку в квазірегулярному випадку для задачі на півосі отримав Г.А. Мірзоєв). У випадку проміжних індексів дефекту ці питання в подальшому досліджувалися в роботах В.О. Деркача, М.М. Маламуда, В.Й. Могилевського, І.М. Гусейнова, Р.Т. Пашаєва. Ф.Г. Максудова, Б.П. Аллахвердиева. Метод граничних трійок в теорії розширень отримав розвиток в роботах М.Л. Горбачука, В.А. Михайлеця, Ю.М. Арлінського, Ф.С. Рофе-Бекетова та інших математиків. До публікацій праць здобувача В.Й. Могілевського метод граничних трійок застосовувався тільки для операторів з рівними індексами дефекту.

Поняття характеристичної функції (х. ф.) симетричного оператора вперше було введено М.С. Ліфшицем для щільно визначеного оператора зі скінченими індексами дефекту, а потім узагальнено в статті А.В. Штрауса для нещільно заданого оператора. Параметризацію х. ф. для скалярного рівняння Штурма-Ліувілля отримали М.Г. Крейн, Г. Вейль, а потім в другій формі Ч. Фултон. Опис всіх спектральних функцій скалярного диференціального оператора парного порядку за допомогою характеристичних матриць дано в статті А.В. Штрауса, результати якої для рівнянь в просторі вектор-функцій узагальнив В.М. Брук. Однак в цих роботах не розглядалося питання про параметризацію характеристичних матриць в випадку задач на півосі. Для диференціально-операторних рівнянь на нескінченному інтервалі в абсолютно невизначеному випадку параметризація всіх функцій Вейля в термінах самоспряжених граничних умов на нескінченності одержана в роботах М.Л. Горбачука, О.М. Холькіна. А.Н. Кочубей визначив х.ф. щільно визначеного оператора, використовуючи граничну трійку, і довів, що вона є голоморфною стискаючою оператор-функцією. У роботах В.О. Деркача та М.М. Маламуда для граничної трійки симетричних відношень введено поняття функції Вейля, яка для диференціальних операторів збігається з класичною функцією Вейля.

Значний внесок в спектральну теорію операторів внесли також Ю.М. Березанський, М.Г. Гасимов, І.М. Гельфанд, Е.А. Коддінгтон, А.Г. Костюченко, Н. Левінсон, В.О. Марченко і багато інших математиків.

Для довільних симетричних систем питання опису розширень і параметризації х. ф. досліджені значно менше. Це пов'язано з тим, що для таких задач не завжди існує спектральна функція і тому замість спектральної функції визначається псевдоспектральна. У монографіях Д.З. Арова та Г. Дима; А.Л. Сахновича, Л.А. Сахновича та І.Я. Ройтберга для регулярних гамільтонових систем міститься визначення таких функцій та їх параметризація. Для гамільтонових систем на півосі відзначимо роботи Д. Хінтона та Дж.К. Шао: Д. Хінтона та А. Шнайдера; А. Кралла та других математиків. Істотні проблеми виникають при дослідженні диференціальних операторів непарного порядку, оскільки такі оператори зводяться до негамільтонових систем, які, як зазначалося вище, мало досліджені.

Це визначає актуальність дисертації В.И. Могілевського, в якій продовжуються дослідження з метою узагальнення цих результатів на симетричні диференціальні оператори з нерівними індексами дефекту та на довільні симетричні системи (не обов'язково гамільтонові).

Дисертація В.І. Могілевського складається зі вступу, основної частини з восьми розділів, висновків і списку використаних джерел зі 116 найменувань. Загальний обсяг роботи 267 сторінок. Це цілісне наукове дослідження, написане за результатами 27 робіт.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертації, викладається наукова новизна і значення отриманих у дисертації результатів.

У першому розділі наведено огляд літератури і сформульовано результати з теорії розширень та спектральної теорії граничних задач, які мають безпосереднє відношення до дисертації.

У другому розділі з використанням граничних трійок розглядаються розширення симетричних відношень, зокрема, з нерівними індексами дефекту (див. підрозділ 2.2). В цьому випадку абстрактна функція Вейля $M(Я)$ є неванлинівською, тому відповідна їй спектральна функція в разі диференціального оператора збігається з класичною спектральною функцією. Оскільки симетричні лінійні відношення є узагальненням поняття оператора, то отримані для них результати поширюються і на оператори (зауважимо, що диференціальні оператори і симетричні системи часто приводять до відношень з нерівними дефектними числами).

У підрозділі 2.3 результати робіт М.М. Маламуда та В.О. Деркача узагальнюються на граничні трійки з нерівними граничними просторами.

У підрозділі 2.4 (теореми 2.40, 2.41) в термінах граничної трійки дається параметризація всіх самоспряжених розширень симетричних відношень. Ці результати узагальнюють відомі раніше результати інших авторів на випадок довільних індексів дефекту.

У підрозділі 2.6 досліджується спектр самоспряжених розширень симетричного оператора з рівними максимальними індексами дефекту. В теоремах 2.72, 2.73 встановлено, що спектр кожного розширення є ніде не щільною множиною, яка збігається з замиканням власних значень оператора, і в той же час спектр оператора не є дискретним. Результати цих теорем узагальнюють результати робіт Ф. Хартмана, А. Уітнера. Дж. Вейдмана, А. Цеттла.

У розділах 3-7 результати розділу 2, отримані з використанням граничної трійки для абстрактної теорії розширень, застосовуються для дослідження спектральних властивостей довільних симетричних систем.

В розділі 3 у випадку сингулярної системи визначаються сингулярні граничні значення функцій з області визначення максимального відношення. У термінах граничних значень будуються граничні трійки мінімальних відношень, які називаються розділеними граничними трійками. Це дозволило описати максимальні дисипативні (акумулятивні), симетричні і самоспряжені граничні умови. Критерій існування і параметризація розділених граничних умов для симетричних систем наводиться в теоремі 3.66, в силу якої для негамільтонової системи на всій осі розділені граничні умови можуть існувати тільки в разі нерівних дефектних чисел на півосях. Цей факт підкреслює доцільність вивчення систем з нерівними індексами дефекту.

У розділі 4 розглядаються визначені сингулярні системи з довільними індексами дефекту. У термінах граничної задачі з $Я$-залежними неванлінівськими граничними умовами на нескінченності параметризуються всі узагальнені резольвенти і характеристичні матриці системи. У теоремі 4.16 вказана параметризація характеристичних матриць для системи на півосі отримана в явному вигляді за допомогою перетворення Редхеффера. параметром в якому служить неванлинівська пара матричних функцій, за допомогою якої визначаються граничні умови відповідної граничної задачі. Ця теорема є узагальненням результату Г. Лангера і Б. Тесторіуса для регулярних систем. Для гамільтонових визначених систем результати істотно спрощуються.

У розділі 5 розглядаються т-функції довільних (можливо негамільтонових) симетричних систем на півосі з регулярною кінцевою точкою, які є узагальненням відомої функції Вейля-Тітчмарша для гамільтонових систем. Системи з регулярною кінцевою точкою вичерпуються трьома випадками: аі, а2, а3, які визначаються індексами дефекту системи і числами $v_{\pm} = \dim\ker(J + //)$ (протягом всієї роботи неодноразово окремо розглядаються ці випадки), т-функція системи є неванлинівською матрицею-функцією розміру $v = \max(v_+, v\_) < п$. У випадках аі та а2 дослідження т-функцій вимагає різних підходів. У випадку аі згідно з теоремою 5.16 т-функції заданої системи параметризуються неванлинівськими парами матричних функцій $\{C_0(Я), C,(Л)\}$ за допомогою перетворення Редхеффера, коефіцієнти якого визначаються в термінах функції Вейля розділеної граничної трійки. У випадку а2 т-функція має блочно-трикутний вигляд. У випадку гамільтонової системи результати розділу 5 істотно спрощуються - в цьому випадку коефіцієнтами дрібно-лінійного перетворення /я(Я) є відповідно елементи блочних зображень функції Вейля і матричної функції $= \lim_{/\to\infty} 7^{-1}(0, Я) У(/, Я)$, де *Y{t,X)* - фундаментальний розв'язок системи.

Ґлава 6 присвячена дослідженню псевдоспектральних функцій довільних симетричних систем. Нехай Г(/,Я) - фундаментальний матричний розв'язок розміру *пхп* заданої системи. Спектральною функцією називається матрична функція розподілу 2(5), якщо перетворення Фур'є є частковою ізометрією. Важливе значення має теорема 6.6, яка пояснює, чому спектральна функція може не існувати. Відповідно до цієї теореми спектральна функція існує тільки в випадку, коли мінімальне відношення T_{mm} є оператором. Це пояснює, чому здобувач вводить нове поняття псевдоспектральної функції.

Важливим результатом дисертації є параметризація псевдоспектральних функцій за допомогою перетворення Редхеффера та фогмул обернення Стільтьєса.

Аналогічно в роботі вводиться поняття укороченої псевдоспектральної функції розміру меншого, ніж п. У дисертації проводиться параметризація всіх укорочених псевдоспектральних функцій в випадку аі. Підрозділ 6.4 присвячений дослідженню укорочених псевдоспектральних функцій U-визначених систем на півосі в випадку а2. Тут отриманий цікавий результат, пов'язаний з характеристикою спектра самоспряженого розширення f з T з виходом в ширший простір. Згідно з висновком 6.51 кратність сингулярного спектра і кратність кожного власного значення операторної частини відносини T на перевищує **шіп{У₊,У_}** $< V$.

Необхідно відзначити, що багато результатів монографій Д.З. Арова, Г. Дима та А.Л. Сахнович, ЛА. Сахнович, І.Я. Ройтберга є простими висновками теорем розділу 6.

У сьомому розділі для симетричних систем на осі з розділеними граничними умовами досліджуються характеристичні матриці. Доведена формула, яка є аналогом формули Тітчмарша для оператора Штурма-Ліувілля. Близьку формулу отримав В.І. Храбустовський.

Використовуючи теореми, отримані для симетричних систем, у восьмому розділі, встановлений ряд нових, цікавих теорем для диференціальних операторів довільного порядку з матричними коефіцієнтами. Такий підхід дозволяє отримати опис максимально дисипативних (акумулятивних) та самоспряжених граничних умов для операторів, породжених диференціальними виразами довільного порядку з матричними коефіцієнтами. У теоремі 8.18 встановлені необхідні та достатні умови існування самоспряжених граничних умов, що розпадаються. Ці результати узагальнюють результати Ф.С. Рофе-Бекетова, Ч. Фултона, О.М. Холькіна. Найбільш цікаві твердження та теореми цього розділу відносяться до диференціальних операторів непарного порядку на півосі, які зводяться до негамільтонових систем. У дисертації параметризуються всі т -функції в термінах граничних умов, що дозволяє розширити результати Ч. Фултона для скалярних диференціальних операторів і результати М.Л. Горбачука і О.М. Холькіна для диференціальних операторів в нескінченновимірному просторі в абсолютно невизначеному випадку.

Головним достоїнством дисертації вважаю те, що автору вдалося розв'язати кілька складних і важливих задач, які представляють істотний внесок в розвиток теорії розширень довільних симетричних систем і операторів, параметризації характеристичних функцій.

Результати дисертації нові і в деякому сенсі завершують дослідження з теорії розширень систем і диференціальних рівнянь з матричними коефіцієнтами. Бажано узагальнити їх на випадок систем і диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами, коли індекси дефекту нескінченні, але не має місце абсолютно невизначений випадок.

Всі результати дисертації В.Й. Могілевського доведені з достатньою повнотою і їх достовірність не викликає сумнівів. Автореферат повністю відображає зміст дисертації. Всі результати дисертації опубліковано в фахових і міжнародних журналах, серед них 14 робіт включені до наукометричних баз даних. Роботи доповідалися на семінарах у різних наукових центрах та на фахових конференціях.

Як зауваження необхідно відзначити те, що в дисертації, на жаль, міститься значна кількість описок, наприклад,

-стор. 10, рядок 3: написано слово «терия» замість слова «теорія»;

-стор. 13, рядок 12: написано слово «Розшиернння» замість слова «Розширення»;

-стор. 22, рядок 17: написано слово «ідношення» замість слова «відношення» (зауважу, що в наступному рядку це слово написано вірно);

іт.д.

Висловлене зауваження не впливає на оцінку роботи, в цілому. Дисертація В.И. Могілевського - актуальне дослідження з спектрального аналізу диференціальних операторів і систем.

Резюмуючи сказане, вважаю, що новизна і значимість отриманих результатів дозволяють зробити висновок, що дисертація В.И. Могілевського «Спектральні властивості симетричних лінійних відношень та диференціальних систем», відповідає вимогам, що пред'являються ДАК МОН України до дисертацій, а її автор безумовно заслуговує присвоєння йому вченого ступеня доктора фізико - математичних наук за спеціальністю 01.01.01 -математичний аналіз.

Офіційний опонент:
завідувач кафедри вищої та прикладної математики, проф. ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»
доктор фізико - математичних наук О.М. Холькін

Підпис Холькіна О.М.
ЗАСВІДЧУЮ
Нач. загального відділу
Т.О.
19.05.2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 02070812