

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

ГАЄВСЬКИЙ Микола Вікторович

УДК 517.5

**ЗАДАЧІ НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ТА
 $\bar{\psi}$ -ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ**

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет технологій та дизайну,
завідувач кафедри вищої математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу;

кандидат фізико-математичних наук, професор
ХАРКЕВИЧ Юрій Іліодорович,
Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки,
декан факультету "Інформаційних систем, фізики та
математики".

Захист відбудеться «31» травня 2016 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «27» квітня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Романюк А. С.

Загальна характеристика роботи

Дисертаційна робота присвячена дослідженню апроксимативних характеристик деяких класів функцій дійсної та комплексної змінної. Зокрема, встановлюються нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау, відповідно, для класів періодичних неперервних та аналітичних в крузі функцій, які визначено на основі поняття ψ -похідної, введеного О.І. Степанцем. Отримано оцінки груп відхилень на деяких класах $\bar{\psi}$ -диференційовних та аналітичних в крузі функцій, а також точні порядкові оцінки для відхилень нормальних середніх Зигмунда рядів Фабера функцій, аналітичних в обмежених областях та неперервних на їх замиканнях. Крім того, в роботі досліджуються умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, що задаються прямокутними нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій.

Актуальність теми. Найбільш природним апаратом наближення періодичних неперервних, або аналітичних в крузі функцій є частинні суми їх рядів Фур'є, або, відповідно, рядів Тейлора.

У 1909 році А. Лебег встановив таку нерівність

$$\|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_C \leq (\ln n + 3)E_n(f)_C, \quad (1)$$

де $S_n(f, \cdot)$ — частинні суми ряду Фур'є порядку n ; $E_n(f)_C$ — найкраще рівномірне наближення f тригонометричними поліномами порядку не вище n . В подальшому нерівність (1) стали називати нерівністю Лебега. Результат Лебега показує, що наближення функції частинними сумами Фур'є в $\ln n$ разів гірше за найкраще.

Нерівність (1) є точною на всьому класі неперервних функцій, але на деяких підмножинах неперервних функцій вона перестає бути точною. К.І. Осколков, встановивши співвідношення

$$\|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_C \leq K \sum_{k=0}^n \frac{E_{n+k}(f)_C}{k+1},$$

уточнив нерівність (1) і показав існування класів функцій, для яких дане співвідношення є точним.

У 1935 році А.М. Колмогоров показав, що

$$\sup_{f \in W_\infty^r} \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty, r \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Згодом результати (1) та (2) було поширено на інші важливі класи функцій.

В цій області працювали такі математики як А. Лебег, А.М. Колмогоров, С.М. Нікольський, Б. Надь, В.Т. Пінкевич, І.Г. Соколов, В.К. Дзядик, С.Б. Стечкін, О.П. Тіман, С.О. Теляковський, О.В. Єфімов, О.І. Степанець, П.В. Задерей, А.С. Романюк, Р.М. Тригуб, А.С. Сердюк та інші.

Зокрема, О.І. Степанцем та його учнями в низці робіт встановлено асимптотично непокращувані аналоги співвідношень типу (1) та (2) на класах $C^{\bar{\psi}}C$. В цих роботах послідовності ψ_1 та ψ_2 є опуклими, спадними до нуля, тому важливою задачею є послаблення умов на послідовності $\psi = (\psi_1(k), \psi_2(k))$.

Теорія сильного підсумовування рядів Фур'є започаткована в роботах Г. Харді, Дж. Літлвуда, Ю. Марцинкевича та А. Зігмунда. Зокрема, в 1941 році А. Зігмундом встановлено, що

$$\left(\sum_{k=0}^n |f(\cdot) - S_k(f, \cdot)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = o(1)$$

має місце для будь-якого $p > 0$ та довільної функції $f \in L$ майже скрізь. Пізніше почали досліджувати функціонали виду

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |f(\cdot) - S_k(f, \cdot)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{та} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |f(\cdot) - S_k(f, \cdot)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність додатних чисел.

Сильне підсумовування періодичних функцій досліджували такі математики як Г. Харді, Дж. Літлвуд, Г. Алексіс, Ю. Марцинкевич, К. Тандорі, А. Зігмунд, Д. Кралік, Л. Лейндлер, В. Тотік, В.В. Жук, К.І. Осолков, Л.Д. Гоголадзе, О.І. Степанець, Н.Л. Пачуліа, Р.А. Ласурія та інші.

На відміну від випадку неперервних функцій результатів, що стосуються встановлення оцінок типу Лебега-Ландау чи сильного підсумовування на класах аналітичних в крузі функцій, відомо менше. В даному напрямку відомі роботи таких математиків як Т. Шейк, Г. Суноїчі, Б. Сміт, М.З. Двейрін, Е.С. Белінський, Ф. Віз, О.І. Степанець, В.В. Савчук, О.М. Швецова, Р.А. Ласурія, М.В. Савчук та інші.

В теорії наближення функцій значне місце займають лінійні методи підсумовування рядів Фур'є та Тейлора. Тому однією з важливих задач є дослідження умов регулярності лінійних методів підсумовування. Цими задачами займалися такі математики як С. Сідон, Я.Д.Тамаркін, Е. Хілле, С.М. Нікольський, Й. Карамата, М. Томіч, С.Б. Стєчкін, О.В. Єфімов, С.О. Теляковський, Л.І. Баусов, Г.О. Фомін, Р.М. Тригуб, Е.С. Белінський, Я.С. Бугров, Л.В. Тайков, П.В. Задерей, В.В. Савчук, Р.В. Товкач, О.М. Пелагенко та інші.

В теорії функцій комплексної змінної актуальними є задачі наближення функцій в однозв'язних областях, обмежених спрямленими жордановими кривими, за допомогою поліномів Фабера. При різних умовах на функцію та границю області цю задачу досліджували такі математики як В.К. Дзядик, Т. Кеварі, Х. Померенке, В.В. Андрієвський, М.М. Джрбашян, О.І. Маркушевич, С.Я. Альпер, П.К. Суєтін, С.В. Елайсот, Ф.Д. Леслі, В.С. Вінге, С.Е. Варшавський, Ж. М. Андерсон, І.О. Шевчук, О.І. Степанець, В.С. Романюк, Ф.Г. Абдулаєв, П.В. Задерей, М.В. Савчук та інші.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є: отримання точних нерівностей типу Лебега на класах ψ -диференційовних функцій $C^{\bar{\psi}}C$, виражених через найкраще наближення $\bar{\psi}$ -похідної; встановлення точних нерівностей типу Лебега-Ландау на класах аналітичних в одиничному крузі функцій H_{∞}^{ψ} , виражених через найкраще наближення функції f^{ψ} ; дослідження умов регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, заданих нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій; отримання оцінок груп відхилень функцій з класів $C^{\bar{\psi}}C$ та H_{∞}^{ψ} в термінах найкращих наближень функції $f^{\bar{\psi}}$ чи, відповідно, f^{ψ} ; отримання оцінки відхилення нормальних середніх Зигмунда ряду Фабера від аналітичної функції з класу $A(\Omega)$, що виражені через найкращі наближення функції алгебраїчними поліномами.

Об'єктом дослідження є класи функцій $C^{\bar{\psi}}$, H_{∞}^{ψ} та $A(\Omega)$, лінійні методи підсумовування неперервних та аналітичних функцій.

Предметом дослідження є: величини $\rho_n(f; x)$, $H_n^p(f; x)$ та $H_n^p(f; \lambda; x)$ при $f \in C^{\bar{\psi}}C$; $\rho_n(f; z)$, $H_n^{\varphi}(f; z)$ та $H_n^{\varphi}(f; \lambda; z)$ при $f \in H_{\infty}^{\psi}$; умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора у просторі аналітичних функцій, що задані прямокутною нескінченно рядковою матрицею дійсних чисел та швидкість наближення

функцій з класу $A(\overline{\Omega})$ нормальними середніми Зигмунда, що виражені через найкращі наближення функції алгебраїчними поліномами.

Задачі дослідження:

1. Встановити нерівності типу Лебега на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, в яких норма відхилення частинних сум ряду Фур'є від функції виражена через величину найкращого наближення функції $f^{\bar{\psi}}$.
2. Встановити нерівності типу Лебега-Ландау на класі аналітичних в крузі функцій H_{∞}^{ψ} , в яких норма відхилення частинних сум ряду Тейлора від функції виражена через величину найкращого наближення функції f^{ψ} .
3. Отримати оцінки збіжності груп відхилень на класах $C^{\bar{\psi}}C$ та H_{∞}^{ψ} в термінах найкращих наближень функції $f^{\bar{\psi}}$ чи, відповідно, f^{ψ} .
4. Встановити критерій регулярності методів підсумовування рядів Тейлора, заданих нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$ та показати існування таких методів, що є регулярними в просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$ і не є регулярними у просторі неперервних функцій C .
5. Встановити швидкість наближення аналітичної в області Фабера функції нормальними середніми Зигмунда, що виражена через величину найкращого наближення функції $f \in A(\Omega)$ алгебраїчними поліномами.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи математичного та функціонального аналізу, теорії функцій дійсної та комплексної змінної у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах таких математиків, як С.Б. Стечкін, О.І. Степанець, С.О. Теляковський, О.В. Єфімов, Г.М. Голузін, Г.О. Фомін, В.В. Савчук, О.М. Швецова, М.П. Тіман, Л.В. Тайков, Й. Карамата, В. Тотік, Р.А. Ласурія та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Одержано нерівність типу Лебега для сум Фур'є на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, виражену через найкращі наближення $f^{\bar{\psi}}$ тригонометричними поліномами порядку не вище n . Показано, що отримана нерівність є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_{\varepsilon}$.
2. Одержано нерівність типу Лебега-Ландау для сум Тейлора на класі аналітичних функцій H_{∞}^{ψ} , виражену через найкращі наближення f^{ψ} алгебраїчними поліномами порядку не вище n , показано існування функції, для якої дана нерівність є точною. Встановлено

асимптотично точну оцінку для верхніх граней норми відхилення частинних сум Тейлора від функцій з класу H_∞^ψ .

3. Отримано оцінки швидкості збіжності груп відхилень функцій з класів $C^\psi C$ і H_∞^ψ , що виражені через величину найкращого наближення, відповідно, функцій f^ψ та f^ψ , а також отримано оцінки деяких функціоналів, що стосуються теорії сильного підсумовування функцій із заданих класів.

4. Встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних функцій з простору $A(\overline{D})$, що задаються нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел. Показано існування методів підсумовування, регулярних у просторі аналітичних функцій $A(D)$, і, в той же час, нерегулярних у просторі неперервних функцій C . Наведено більш прості, але достатні умови регулярності прямокутного методу підсумовування в просторі $A(\overline{D})$, що виражаються безпосередньо через елементи матриці Λ .

5. Встановлено швидкість наближення функцій $f \in A(\overline{\Omega})$, що є аналітичними в областях Фабера та неперервними на їх замиканні, нормальними середніми Зигмунда їх рядів Фабера, що виражається через величину найкращого наближення функції f алгебраїчними поліномами.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні задач наближення функцій із класів C^ψ , H_∞^ψ та $A(\overline{\Omega})$.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямків та постановка задач дослідження належать науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору П.В. Задерею. Результати робіт [1], [2], [4]-[6], що містяться в підрозділах 2.2, 2.4, 2.5, 3.1-3.3 та 4.2, отримані спільно із П.В. Задереєм, внесок обох авторів є рівноцінним. Решта результатів отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко та В. М. Радченко);

— семінарі кафедри вищої математики (Київський національний

університет технологій та дизайну; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор П. В. Задерей);

— семінарі "Математика, її застосування та викладання" (фізико-математичний факультет Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор Ю. І. Волков);

— міжнародній конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2012р., Кам'янець-Подільський, Україна;

— міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF-2013, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» 24.02-02.03.2014р., Ворохта, Україна;

— міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-ліття від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (1914 – 1968) 23 – 24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» 25 лютого-1 березня 2015 р., Ворохта, Україна.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у одинадцяти наукових публікаціях, з яких шість є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук [1 – 6], та п'ять опубліковано у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [7 – 11]. Статті [4] та [6] опубліковано у виданнях, які включені до міжнародних науково метричних баз.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційне дослідження складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 107 найменувань. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, стисло викладено зміст основної

частини роботи та наукову новизну одержаних результатів.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений огляду літератури, пов'язаної з темою дослідження. Зокрема, у підрозділі 1.1. наведено основні поняття і факти про класи $\bar{\psi}$ -диференційовних періодичних функцій $C^{\bar{\psi}}C$ та аналітичних в одиничному крузі функцій $H_{\infty}^{\bar{\psi}}$. В підрозділі 1.2 міститься огляд основних результатів, які стосуються нерівностей типу Лебега та Лебега-Ландау. В підрозділі 1.3 наведено огляд результатів про збіжність груп відхилень та сильну сумовність диференційовних та аналітичних функцій. Підрозділ 1.4 присвячено результатам, що стосуються умов регулярності лінійних методів підсумовування аналітичних та неперервних функцій. В підрозділі 1.5 містяться результати, що стосуються наближень аналітичних функцій рядами Фабера в однозв'язних областях.

Другий розділ присвячено дослідженню апроксимативних характеристик частинних сум рядів Фур'є та Тейлора на класах функцій, відповідно, $C^{\bar{\psi}}C$ та $H_{\infty}^{\bar{\psi}}$.

В підрозділі 2.1 наведено деякі оцінки, що стосуються інтегралів модулів тригонометричних рядів з дійсними та комплексними коефіцієнтами, також встановлено деякі співвідношення між числовими рядами та сумами.

Нехай L — простір 2π -періодичних сумовних за Лебегом функцій f , C — підпростір L , що складається з неперервних функцій та L_{∞} — підпростір L , що складається з істотно обмежених функцій із загально прийнятими нормами $\|f\|_1 = \|f\|_L$, $\|f\|_C$ та $\|f\|_{\infty}$.

Нехай

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \quad (3)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$; $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1, 2, \dots$ — її коефіцієнти Фур'є. Позначимо через $S_n(f; x)$ — частинну суму порядку n ряду Фур'є (3) і покладемо $\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$. Нехай далі T_n — множина тригонометричних поліномів t_n вигляду $t_n(x) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ і

$$E_n(f)_X := \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_X$$

— найкраще наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів $t_n \in T_n$, а X означає або L , або L_{∞} , або C .

Наведемо тепер поняття $\bar{\psi}$ -похідної, введеної О.І. Степанцем.

Нехай $f \in L$ з рядом Фур'є виду (3), $\bar{\psi} = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$.

Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f; x) \right)$, де $A_k(f; x) = a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$, $\tilde{A}_k(f; x) = a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назовемо $\bar{\psi}$ -похідною функції f і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Через $C^{\bar{\psi}}$ будемо позначати множину всіх неперервних функцій f , у яких існують $\bar{\psi}$ -похідні і покладемо

$$C^{\bar{\psi}} C = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C\}, \quad C^{\bar{\psi}} C_{\varepsilon} = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C_{\varepsilon}\},$$

$$C_{\varepsilon} = \{f \in C : E_k(f)_C \leq \varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

де $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$ — монотонно спадає до нуля послідовність невід'ємних чисел.

Кажуть, що послідовність α_k задовольняє умови Боаса-Теляковського, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad V(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta \alpha_k| < \infty, \quad \text{де } \Delta \alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}, \quad (4)$$

$$B(\alpha) := \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\Delta \alpha_{k-l} - \Delta \alpha_{k+l}}{l} \right| < \infty. \quad (5)$$

Послідовність α_k є квазіопуклою, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \alpha_k| < \infty.$$

Зазначимо, що при виконанні (4) і (5) для довільного $m \in \mathbb{N}$ буде скінченною величина $B_m(\alpha) := \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{\Delta \alpha_{m+i-k} - \Delta \alpha_{m+i+k}}{k} \right|$, також позначимо $V_m(\alpha) = \sum_{k=m}^{\infty} |\Delta \alpha_k|$ та $R_m(\alpha) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \alpha_k|$.

В підрозділі 2.2 встановлено таке твердження:

Теорема 2.4. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ задовольняють умови (4), (5) та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$. Тоді для будь-якої функції*

$f \in C^{\bar{\psi}}C$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$\|\rho_n(f; x)\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)}}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+3}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \\ \left. + O(1)(V_{n+1}(\psi_1) + V_{n+1}(\psi_2) + B_{n+1}(\psi_1) + B_{n+1}(\psi_2)) \right) E_n(f^{\bar{\psi}}), \quad (6)$$

Нерівність (6) є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ в тому розумінні, що для довільної монотонно спадної до нуля послідовності невід'ємних чисел $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ існує $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ така, що

$$\|\rho_n(f_*; x)\|_C = \left(\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)}}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+3}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right. \\ \left. + O(1)(V_{n+1}(\psi_1) + V_{n+1}(\psi_2) + B_{n+1}(\psi_1) + B_{n+1}(\psi_2)) \right) \varepsilon_n.$$

У підрозділі 2.3 на множині функцій $C^{\bar{\psi}}C$ досліджуються величини

$$H_n^p(f; x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(f; x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{та} \quad H_n^p(f; \lambda; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f; x)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 2.5. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та, крім того, виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$. Тоді для довільної функції $f \in C^{\bar{\psi}}C$ та довільного $0 < p < \infty$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце нерівність*

$$H_n^p(f; x) \leq K_p \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + R_n(\psi_1) + R_n(\psi_2) \right) E_n(f^{\bar{\psi}}).$$

Теорема 2.6. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та, крім того, виконується умова*

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$, λ_k — незростаюча послідовність невід’ємних чисел, і числа $\beta_k = \lambda_k \alpha_k^p$, де

$$\alpha_k = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + R_n(\psi_1) + R_n(\psi_2),$$

не зростають. Тоді для довільної функції $f \in C^{\bar{\psi}}C$ та довільного $0 < p < \infty$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце нерівність

$$H_n^p(f; \lambda; x) \leq K_p \left(n \lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\bar{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\bar{\psi}}) \right).$$

В підрозділі 2.4 знайдено оцінки відхилень сум Тейлора на класі аналітичних функцій H_{∞}^{ψ} , виражені через найкращі наближення ψ -похідних функцій, а також отримано асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень сум Тейлора функцій з цього ж класу.

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Через $A(D)$ позначимо множину аналітичних в крузі D функцій, а через H_{∞} — простір аналітичних в крузі D функцій, що задовольняють умові $\|f\|_{H_{\infty}} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty$. Надалі UH_{∞} — одинична куля в H_{∞} .

Нехай $f \in A(D)$ і $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D$ — її розклад в ряд Тейлора-Маклорена, де $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D$ є рядом Тейлора деякої функції з класу H_{∞} , то цю функцію будемо позначати f^{ψ} і називатимемо її ψ -похідною функції f . Позначимо через H_{∞}^{ψ} клас функцій з H_{∞} , у яких похідна $f^{\psi} \in UH_{\infty}$. Вперше подібний клас функцій був розглянутий Т. Шейком.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.7. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots$ — послідовність для якої виконуються умови (4) та (5). Тоді для довільної функції $f \in H_{\infty}^{\psi}$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_n(f, z)\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi) + B_n(\psi)) \right) E_n(f^{\psi}). \quad (7)$$

Крім того існує функція $\Phi(z) \in H_{\infty}^{\psi}$, така що $\Phi^{\psi}(z) = \varphi(z) \in UH_{\infty}$, для якої в (7) матиме місце рівність, тобто

$$\|\rho_n(\Phi, z)\|_{\infty} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi) + B_n(\psi)) \right) E_n(\varphi).$$

Теорема 2.8. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots$ — послідовність для якої виконуються умови (4) та (5). Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедливе співвідношення*

$$\sup_{f \in H_\infty^\psi} \|\rho_n(f, z)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi) + B_n(\psi)).$$

В підрозділі 2.5 отримано оцінки груп φ -відхилень та φ -середніх λ -методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних і обмежених в крузі функцій.

Через Φ позначимо множину неспадних і неперервних на $(0, \infty)$ функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \leq e^{bu}$, для $u \in [0, 1]$ $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$, де $a = a(\varphi)$. Природними представниками множини Φ є, наприклад, функції $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, $\varphi(u) = e^u - 1$, тощо.

В цьому підрозділі на множині функцій H_∞^ψ досліджуються величини

$$H_n^\varphi(f; z) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(|\rho_k(f; z)|) \text{ та } H_n^\varphi(f; \lambda; z) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f; z)|),$$

де p — довільне додатне число, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

Теорема 2.9. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ є квазіопуклими, спадними до 0 послідовностями. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$H_n^\varphi(f; z) \leq K\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)),$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина рівномірно обмежена по n, z та f .

Теорема 2.10. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$ $i = 1, 2$, є квазіопуклими, спадними до 0 послідовностями, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$H_n^\varphi(f; \lambda; z) \leq K \left(n\lambda_n \varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi)) \right),$$

де $K = K(\varphi)$ — деяка величина рівномірно обмежена по n, z та f .

Третій розділ роботи присвячено лінійним методам підсумовування аналітичних в крузі функцій.

Позначимо через $A(\overline{D})$, $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ — простір функцій $f(\cdot)$, аналітичних в D і неперервних в $\overline{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ з нормою

$$\|f\|_{A(\overline{D})} = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Якщо задано нескінченнорядкову матрицю $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \dots$ дійсних чисел $\lambda_k^{(n)}$, то кожній функції $f \in A(\overline{D})$ з рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in D \quad (8)$$

поставимо у відповідність послідовність рядів

$$U_n(f; \Lambda; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} c_k z^k, \quad z \in \overline{D}. \quad (9)$$

Будемо говорити, що ряд (8) підсумовується методом Λ в точці $z \in \overline{D}$ до значення $f(z)$, якщо ряди (9) є збіжними для довільного $n = 0, 1, \dots$ та має місце співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f, \Lambda, z) = f(z), \quad z \in \overline{D}. \quad (10)$$

Метод підсумовування Λ називається регулярним в просторі $A(\overline{D})$, якщо для кожної $f \in A(\overline{D})$ та довільного $z \in \overline{D}$, ряд (8) підсумовується цим методом до числа $f(z)$.

Якщо метод підсумовування є регулярним у просторі $A(\overline{D})$, то для кожної $f \in A(\overline{D})$ ряди (9) збігаються рівномірно і рівномірною буде збіжність у співвідношенні (10), тобто має місце збіжність за нормою простору $A(\overline{D})$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. Для регулярності методу підсумовування Λ в просторі $A(\overline{D})$ необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови

(A) для усіх $k = 0, 1, 2, \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^{(n)} = 1$;

(E) існувало число $M_n > 0$, що можливо залежить від n , і такий розклад $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$ на дійсні числа $\alpha_k^{(n)}$ і

$\beta_k^{(n)}$, що кожна із функцій

$$t_m^{(n)}(x) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^m (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx), n = 0, 1, \dots; m = 0, 1, \dots$$

задовольняє умові $\int_0^{2\pi} |t_m^{(n)}(x)| dx \leq M_n, n = 0, 1, \dots$, де величина M_n не залежить від m ;

(F) повна варіація функцій

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^m (\alpha_k^{(n)} \cos kt + \beta_k^{(n)} \sin kt) \right) dt = \\ &= \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\alpha_k^{(n)} \sin kx - \beta_k^{(n)} \cos kx) \end{aligned}$$

була рівномірно обмеженою на $[0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi} |dK_n(x)| \leq M$.

В підрозділі 3.2 показано існування методів підсумовування, що є регулярними в просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$, але нерегулярними у просторі неперервних функцій C .

Хоча умови теореми 3.1 є необхідними і достатніми, але перевірка їх для конкретних методів підсумовування досить часто є складною. Тому виникає задача про отримання достатніх, але більш простих умов, за яких метод підсумовування буде регулярним. Таку задачу (для трикутних матриць) вперше поставив С.М. Нікольський. В підрозділі 3.3 наведено більш прості, але достатні умови регулярності методу підсумовування, що заданий прямокутною матрицею чисел.

Теорема 3.2. Нехай числа $\lambda_k^{(n)}$ можна представити у вигляді $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, де дійсні числа $\alpha_k^{(n)}$ та $\beta_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$ задовольняють умовам

$$V(\alpha) + V(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta \alpha_k^{(n)}| + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta \beta_k^{(n)}| \leq M,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k^{(n)}|}{k} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\Delta \alpha_{\nu-k}^{(n)} - \Delta \alpha_{\nu+k}^{(n)}}{k} \right| + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\Delta \beta_{\nu-k}^{(n)} - \Delta \beta_{\nu+k}^{(n)}}{k} \right| \leq M.$$

Тоді для регулярності методу підсумовування Λ в просторі $A(\overline{D})$ необхідно і достатньо виконання умови (A) та для довільного $m \in \mathbb{N}$ виконання умов

$$(G) \quad \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_{m+k}^{(n)}| + |\beta_{m+k}^{(n)}|}{k} \leq M_n,$$

де M_n залежить, можливо, лише від n , та

$$(H) \quad \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_{m-k}^{(n)} - \alpha_{m+k}^{(n)}|}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{|\beta_{m-k}^{(n)} - \beta_{m+k}^{(n)}|}{k} \leq M.$$

Четвертий розділ роботи присвячений наближенню аналітичних функцій в однозв'язних областях Фабера середніми Зігмунда.

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, межею якої є замкнена спрямована жорданова крива Γ . За теоремою Рімана існує єдине відображення $w = \Phi(z)$, що конформно та однолистно відображає зовнішність області Ω на зовнішність одиничного круга $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) = \gamma > 0.$$

Обернене до $w = \Phi(z)$ відображення позначимо $z = \Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Нехай далі $A(\overline{\Omega})$ — множина функцій f , аналітичних в області Ω та неперервних в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Коефіцієнти Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$ обчислюються за формулами

$$a_\nu = a_\nu(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) \Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta,$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ , а ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z)$ є рядом Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Задамо на множині функцій $f \in A(\overline{D})$ оператор $T_\Omega : A(\overline{D}) \rightarrow A(\Omega)$ що діє за правилом

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in \Omega \quad (11)$$

де $T = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, $z \in \Omega$. Такий оператор називають оператором Фабера.

Оператор

$$T_{\Omega}^{-1}(f)(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\Psi(t))}{t-w} dt, \quad |w| < 1,$$

називають оберненим оператором Фабера.

Область Ω називають областю Фабера, якщо для норми оператора (11) виконується співвідношення:

$$\|T_{\Omega}\| = \sup_{\|f\|_{A(\overline{\Omega})} \leq 1} \|T_{\Omega}(f)(z)\| < \infty.$$

Зокрема, областями Фабера є опуклі області, області, які обмежені кривими Альпера, Ляпунова, Радона (обмеженого обертання), або області класу A .

Введемо такі позначення: $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} z^{\nu}$ — алгебраїчний многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами c_{ν} ; P_n — множина всіх алгебраїчних многочленів $p_n(z)$; $E_n(f) = E_n(f, \overline{\Omega})$ — найкраще рівномірне наближення функції $f \in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними многочленами

$$E_n(f, \overline{\Omega}) = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\| = \inf_{p_n \in P_n} \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z) - p_n(z)|;$$

позначимо частинну суму ряду Фабера, суму Валле Пуссена та нормальні середні Зигмунда ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$ відповідно через

$$S_n(f, z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} F_{\nu}(z), \quad V_m^n(f, z) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{\nu=m}^n S_{\nu}(f, z) \text{ та}$$

$$Z_n^k(f, z) = \sum_{\nu=0}^n \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1} \right)^k \right) a_{\nu} F_{\nu}(z).$$

Домовимося в цьому розділі під символом $\|f(\cdot)\|$ розуміти $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(\cdot)|$.

У підрозділі 4.1 встановлено деякі допоміжні твердження, що стосуються наближення аналітичних функцій сумами Валле-Пуссена.

Лема 4.1. *Нехай Ω — однозв'язна область Фабера, функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді*

$$\|f(z) - V_m^n(f, z)\| \leq M \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f, \overline{\Omega}),$$

де $0 \leq m \leq n$, $n = 1, 2, \dots$ та стала M не залежить від f та n .

У підрозділі 4.2 містяться асимптотично точні оцінки відхилень середніх Зигмунда рядів Фабера аналітичних функцій, там же показано, що отримана оцінка є точною.

Теорема 4.1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область Фабера, функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді*

$$\|f(z) - Z_n^k(f, z)\| \leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де стала M_k залежить від k і не залежить від f та n .

Наслідок 4.1. *Нехай Ω — однозв'язна область Фабера, а функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді*

$$\|f(z) - \sigma_n(f, z)\| \leq \frac{M}{n+1} \sum_{\nu=0}^n E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де $\sigma_n(f, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n S_n(f, z)$ і стала M не залежить від f та n .

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ — строго монотонно спадна до 0 числова послідовність. Позначимо через $A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ множину функцій $f \in A(\overline{\Omega})$ таких, що

$$E_n(f, \overline{\Omega}) \leq \varepsilon_{n+1}.$$

Теорема 4.2. *Якщо для області Ω оператор Фабера T_Ω і обернений оператор Фабера T_Ω^{-1} є обмеженими, то для множини $f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ існують сталі M_1 та M_2 такі, що*

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k-1} \varepsilon_{\nu+1} &\leq \sup_{f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})} \|f(z) - Z_n^k(f, z)\| \leq \\ &\leq \frac{M_2}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k-1} \varepsilon_{\nu+1} \end{aligned}$$

Висновки

1. Одержано нерівність типу Лебега для сум Фур'є на класі функцій $C^\psi C$, виражену через найкращі наближення f^ψ тригонометричними поліномами порядку не вище n . Показано, що отримана нерівність є точною на класі $C^\psi C_\varepsilon$.

2. Одержано нерівність типу Лебега-Ландау для сум Тейлора на класі аналітичних функцій H_∞^ψ , виражену через найкращі наближення f^ψ алгебраїчними поліномами порядку не вище n , показано існування функції, для якої дана нерівність є точною, отримано асимптотично точну оцінку для верхніх граней норми відхилення частинних сум Тейлора від функцій з H_∞^ψ .

3. Отримано оцінки швидкостей збіжності груп відхилення для функцій з класів $C^\psi C$ та H_∞^ψ , що виражені через величину найкращого наближення, відповідно, функцій f^ψ та f^ψ , також отримано оцінки деяких функціоналів, що стосуються теорії сильного підсумовування функцій із заданих класів.

4. Встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування, що задаються нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$. Також показано існування методів підсумовування, регулярних у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$, і, в той же час, нерегулярних у просторі неперервних функцій C . Наведено більш прості, але достатні умови регулярності прямокутного методу підсумовування в просторі $A(\overline{D})$, що виражаються безпосередньо через елементи матриці Λ .

5. Встановлено швидкість наближення функцій, що є аналітичними в областях Фабера та неперервними на їх замиканні, нормальними середніми Зигмунда рядів Фабера від функції, що виражається через величину найкращого наближення функції алгебраїчними поліномами.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Гаєвський М.В. Наближення заданих в обмеженій області аналітичних функцій нормальними середніми Зигмунда їх рядів Фабера / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — 8, №1. — С. 61 – 74.

2. Гаєвський М.В. Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту

математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 59 – 68.

3. Гаєвський М.В. Оцінка групи відхилень $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій / М.В. Гаєвський // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 56 – 70.

4. Gaevskij M. V. On regularity of linear summation methods of Taylor series / M. V. Gaevskij, P. V. Zaderey // Methods of Functional Analysis and Topology — 2015. — **1**, №21. — Р. 56 – 68.

5. Гаєвський М.В. Оцінки групи φ -відхилень аналітичних функцій / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 156 – 166.

6. Гаєвський М.В. Наближення аналітичних функцій частинними сумами їх рядів Тейлора / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №12. — С. 1602 – 1619.

7. Гаєвський М.В. О регулярности некоторых методов суммирования рядов Тейлора /М.В. Гаевский, Т.В. Гориславец, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та її застосування: тези доповідей Міжнар. конференції, присвяченої 70-річчю з дня народження член.-кор. НАН України, професора О. І. Степанця — Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 35.

8. Гаєвський М.В. Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — С. 225.

9. Гаєвський М.В. Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів Тейлора /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. — Івано-Франківськ: ПНУ ім. В. Стефаника, 2014. — С. 53.

10. Гаєвський М.В. Про лінійні методи підсумовування рядів Тейлора аналітичних функцій /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН

України Положого Георгія Миколайовича: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 46.

11. Гаєвський М.В. Збіжність групи φ -відхилень рядів Тейлора / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2015. — С. 16.

Анотації

Гаєвський М.В. Задачі наближення аналітичних та $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій.— Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертації досліджуються такі класи: неперервних періодичних функцій $C^{\bar{\psi}}C$; аналітичних в крузі функцій H_{∞}^{ψ} та аналітичних в однозв'язних областях функцій $A(\bar{\Omega})$.

Отримано нерівності типу Лебега на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, в яких норма відхилення частинних сум ряду Фур'є від функції виражена через величину найкращого наближення функції f^{ψ} та нерівності типу Лебега-Ландау на класі H_{∞}^{ψ} аналітичних в крузі функцій, в яких норма відхилення частинних сум ряду Тейлора від функції виражена через величину найкращого наближення функції f^{ψ} . Встановлено оцінки збіжності груп відхилень на класах $C^{\bar{\psi}}C$ та H_{∞}^{ψ} в термінах найкращих наближень функції $f^{\bar{\psi}}$ чи, відповідно, f^{ψ} .

Встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, заданих нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій $A(\bar{D})$ та показано існування таких методів, що є регулярними в просторі аналітичних функцій $A(\bar{D})$ і не є регулярними у просторі неперервних функцій C , наведено також більш прості, але достатні, умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора.

Встановлено швидкість наближення аналітичної в області Фабера функції нормальними середніми Зигмунда ряду Фабера, що виражена через величину найкращого наближення функції $f \in A(\bar{\Omega})$ алгебраїчними поліномами.

Ключові слова: $\bar{\psi}$ -похідна, ψ -похідна, нерівність Лебега, нерівність Лебега-Ландау, ряд Фур'є, ряд Тейлора, сума Зигмунда, лінійний метод підсумовування, оператор Фабера, область Фабера.

Гаевский Н.В. Задачи приближения аналитических и $\bar{\psi}$ -дифференцируемых функций.— Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации исследуются такие классы функций: непрерывных периодических функций $C^{\bar{\psi}}C$; аналитических в круге функций $H_{\infty}^{\bar{\psi}}$ и аналитических в односвязных областях функций $A(\bar{\Omega})$.

Получены неравенства типа Лебега на классе функций $C^{\bar{\psi}}C$, у которых норма отклонения частичных сумм ряда Фурье от функции выражена через величину наилучшего приближения функции $f^{\bar{\psi}}$ и неравенства типа Лебега-Ландау на классе аналитических в круге функций $H_{\infty}^{\bar{\psi}}$, у которых норма отклонения частичных сумм ряда Тейлора от функции выражена через величину наилучшего приближения функции $f^{\bar{\psi}}$. Установлены оценки сходимости групп отклонений на классах $C^{\bar{\psi}}C$ та $H_{\infty}^{\bar{\psi}}$ в терминах наилучших приближений функций $f^{\bar{\psi}}$ или, соответственно, f^{ψ} .

Установлен критерий регулярности линейных методов суммирования рядов Тейлора, которые задано бесконечно строчечными матрицами действительных чисел, в пространстве аналитических функций $A(\bar{D})$ и показано существования таких методов, которые есть регулярными в пространстве аналитических функций $A(\bar{D})$, однако в пространстве непрерывных функций C они уже регулярными не будут; получены также более простые, но достаточные, условия регулярности линейных методов суммирования рядов Тейлора.

Установлена скорость приближения аналитической в области Фабера функции нормальными средними Зигмунда ряда Фабера, которые выражены через величину наилучшего приближения функции $f \in A(\bar{\Omega})$ алгебраическими полиномами.

Ключевые слова: $\bar{\psi}$ -производная, ψ -производная, неравенство Лебега, неравенство Лебега-Ландау, ряд Фурье, ряд Тейлора, сумма Зигмунда, линейный метод суммирования, оператор Фабера, область Фабера.

Gaevskij M. V. Problems of approximation of analytic $\bar{\psi}$ -differentiable functions. — Manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

Investigated in the thesis are the following classes of continuous

periodic functions $C^{\bar{\psi}}C$, analytic in a circle H_{∞}^{ψ} and analytical functions in areas $A(\bar{\Omega})$.

Obtained here are estimates deviations of Fourier sums on the spaces $C^{\bar{\psi}}$ expressed in terms of the best approximation of $\bar{\psi}$ -derivatives of functions in the understanding A. I. Stepanets and the estimates deviations Taylor's sums on classes of analytic functions H_{∞}^{ψ} , expressed in terms of the best approximation ψ -derivative functions.

In this work estimates group of deviations of Fourier sums on the spaces $C^{\bar{\psi}}$ expressed in terms of the best approximation of $\bar{\psi}$ -derivatives of functions in the understanding A.I. Stepanets and estimates convergence groups φ -deviations and λ -method summation Taylor series of analytic and bounded functions in the unit circle are found.

The work specifies the necessary and sufficient conditions for the regularity of an infinite matrix of real numbers, which determines some summation method for the class of functions that are analytic on a unit disk and continuous on a closed circle.

The exact order estimates of the deviations of analytic functions, which are defined in a bounded domain and which are continuous on its closure, of their normal Zigmund averages are obtained in this manuscript.

Key words: $\bar{\psi}$ -derivative, ψ -derivative, Lebesgue inequality, Lebesgue-Landau inequality, Fourier series, Taylor series, Zigmund sums, linear summation method, Faber operators, Faber domain.

Підп. до друку 20. 04. 2016. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. 0097.

Приватне підприємство "Ексклюзив-Систем"
Свідоцтво № ДК №4470 від 17.01.2013р.

25006, м. Кіровоград, вул. Шевченка, 25
тел./факс 24-35-53