МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

На правах рукопису

ГАЄВСЬКИЙ МИКОЛА ВІКТОРОВИЧ

УДК 517.5

ЗАДАЧІ НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ТА $\overline{\psi}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико–математичних наук,
професор
ЗАДЕРЕЙ ПЕТРО ВАСИЛЬОВИЧ

Кіровоград — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\|f\|_X$ — норма функції в просторі X;

$[a]$ — ціла частина числа a;

$\rho_n(f;x)$ — відхилення сум Фур'є від функції f;

$f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ — $\bar{\psi}$-похідна функції f;

$D=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$ — одиничний круг;

$T=\{w\in\mathbb{C}:|w|=1\}$ — одиничне коло;

UH_p — одинична куля в H_p, $1\le p\le\infty$;

$H_p,\ 1\le p\le\infty$ — простір Харді аналітичних в крузі функцій;

$C(T)$, $L_\infty(T)$ і $L(T)$ — простори відповідно неперервних, істотно обмежених та сумовних на T функцій з нормами $\|f\|_{C(T)}=\max\limits_{z\in T}|f(z)|$, $\|f\|_{L_\infty(T)}=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z\in T}|f(z)|$ та $\|f\|_{L(T)}=\frac{1}{2\pi}\int_T|f(z)||dz|$;

$X(T)_+$ — множина функцій з $X(T)$, для яких коефіцієнти Фур'є з від'ємними індексами рівні 0, тобто $X(T)_+=\{f\in X(T):\widehat{f}(-k)=0,k\in\mathbb{N}\}$, а X може бути L або C;

$\Re z$ та $\Im a_k$ — дійсна та уявна частини комплексного числа z;

$E_n(f)_X$ — найкраще наближення функції f у просторі X за допомогою тригонометричних поліномів $t_n(x)=/frac\alpha_0 2+\sum_{k=1}^n(\alpha_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx))$;

P_0 — множина монотонно спадних до 0 числових послідовностей $\{\alpha\}$;

$\triangle\alpha_k=\alpha_k-\alpha_{k+1}$ — перша різниця послідовності $\{\alpha\}$;

Умови Боаса-Теляковського: $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0, V(\alpha):=\sum_{k=0}^\infty|\triangle\alpha_k|<\infty$

та $B(\alpha) := \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\alpha_{k-l} - \triangle\alpha_{k+l}}{l} \right| < \infty$;

Умови квазіопуклості: $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\alpha_k| \leq \infty$;

Φ — множина неспадних і неперервних на $(0, \infty)$ функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \leq e^{bu}$, для $u \in [0,1]$ $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$, де $a = a(\varphi)$;

$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$ — нескінченнорядкова матриця дійсних чисел, що задає деякий метод підсумовування;

$w = \Phi(z)$ — конформне та однолистне відображення зовнішності області Ω на зовнішність одиничного круга $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = \gamma > 0$;

$z = \Psi(w)$ — обернене до $w = \Phi(z)$ відображення;

$F_\nu(z)$ — многочлени Фабера для області Ω;

$T_\Omega(f)(z)$ та $T_\Omega^{-1}(f)(w)$ — прямий та обернений оператори Фабера;

$V_m^n(f, \cdot) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{\nu=m}^{n} S_\nu(f, \cdot)$ — сума Валле Пуссена функції f;

$Z_n^k(f, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) a_\nu F_\nu(z)$ — нормальні середні Зігмунда ряду Фабера функції f.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню апроксимативних характеристик деяких класів функцій дійсної та комплексної змінної. Зокрема, встановлюються нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау, відповідно, для класів періодичних неперервних та аналітичних в крузі функцій, які визначено на основі поняття ψ-похідної, введеного О.І. Степанцем. Отримано оцінки груп відхилень на деяких класах $\bar{\psi}$-диференційовних та аналітичних в крузі функцій, а також точні порядкові оцінки для відхилень нормальних середніх Зигмунда рядів Фабера функцій, аналітичних в обмежених областях та неперервних на їх замиканнях. Крім того, в роботі досліджуються умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, що задаються прямокутними нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій.

Актуальність теми.

Найбільш природним апаратом наближення періодичних неперервних, або аналітичних в крузі функцій є частинні суми їх рядів Фур'є, або, відповідно, рядів Тейлора.

У 1909 році А. Лебег встановив таку нерівність

$$\|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_C \leq (\ln n + 3)E_n(f)_C, \tag{B.1}$$

де $S_n(f,\cdot)$ — частинні суми ряду Фур'є порядку n; $E_n(f)_C$ — найкраще рівномірне наближення f тригонометричними поліномами порядку не вище n. В подальшому нерівність (B.1) стали називати нерівністю Лебега. Результат Лебега показує, що наближення функції частинними сумами Фур'є в $\ln n$ разів гірше за найкраще.

Нерівність (В.1) є точною на всьому класі неперервних функцій, але на деяких підмножинах неперервних функцій вона перестає бути точною. К.І. Осколков, встановивши співвідношення

$$\|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_C \leq K \sum_{k=0}^{n} \frac{E_{n+k}(f)_C}{k+1},$$

уточнив нерівність (В.1) і показав існування таких функцій, для яких дане співвідношення є точним.

У 1935 році А.М. Колмогоров показав, що

$$\sup_{f \in W^r_\infty} \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \ n \to \infty, r \in \mathbb{N}. \qquad (В.2)$$

Згодом результати (В.1) та (В.2) було поширено на інші важливі класи функцій.

В цій області працювало багато математиків. Зокрема А. Лебег, А.М. Колмогоров, С.М. Нікольський, Б. Надь, В.Т. Пінкевич, І.Г. Соколов, В.К. Дзядик, С.Б. Стєчкін, С.О. Теляковський, О.В. Єфімов, К.І. Осколков, О.І. Степанець, П.В. Задерей, А.С. Романюк, Р.М. Тригуб, А.С. Сердюк, О.М. Швецова та інші.

О.І. Степанцем та його учнями в низці робіт встановлено асимптотично непокращувані аналоги співвідношень типу (В.1) та (В.2) на класах $C^{\bar\psi}C$. В цих роботах послідовності ψ_1 та ψ_2 є опуклими та спадними до нуля, тому важливою задачею є послаблення умов на послідовності $\bar\psi = (\psi_1(k), \psi_2(k))$.

Теорію сильного підсумовування рядів Фур'є було започатковано в роботі англійських математиків Г. Харді та Дж. Літтлвуда, які узагальнили один результат Фейера і отримали такий результат

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|f(\cdot)-S_k(f,\cdot)|=o(1).$$

Ю. Марцинкевич та А. Зигмунд встановили більш сильний результат: для довільної $f \in L$ та будь-якого $p>0$ майже скрізь має місце співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big|(f(x)-S_m(f,x)\Big|^p=o(1).$$

В 1963 році угорськими математиками Г. Алєксичем та Д. Краліком було розглянуто наближення неперервних функцій сильними середніми Валле Пуссена, ними було отримано наступне співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=n+1}^{2n}\Big|f(x)-S_m(f,x)\Big|^p=o(1),\ p>0.$$

Згодом постановку задачі було розширено. Почали досліджувати функціонали виду

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k|f(\cdot)-S_k(f,\cdot)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda=\{\lambda_k\}$ — послідовність додатних чисел.

Сильне підсумовування періодичних функцій досліджували такі математики як Г. Харді, Дж. Літтлвуд, Г. Алєксіч, Ю. Марцинкевич, А. Зиґмунд, Д. Кралік, Л. Лейндлер, В. Тотік, В.В. Жук, К.І. Осколков, Л.Д. Гоголадзе, О.І. Степанець, Н.Л. Пачуліа, Р.А. Ласурія та інші.

На відміну від випадку неперервних функцій, результатів, що стосуються встановлення оцінок типу Лебега-Ландау чи оцінок груп відхилень на класах аналітичних в крузі функцій, відомо менше. В даному напрямку відомі роботи таких математиків як Е. Ландау, С.Б. Стєчкін, К.І. Бабенко, С. Я. Альпер, Т. Шейк, Б. Сміт, Е.А. Стороженко, М.З. Двейрін, К.І. Осколков, Е.С. Белінський, Ф. Віз, О.І. Степанець, В.В. Савчук, О.М. Швецова, Р.А. Ласурія, М.В.Савчук та інших.

В теорії наближення функцій значне місце займають лінійні методи підсумовування рядів Фур'є та Тейлора. Тому однією з важливих задач є дослідження умов регулярності лінійних методів підсумовування. Цими задачами займались такі математики як С. Сідон, Я.Д.Тамаркін, Е. Хілле, С.М. Нікольський, Й. Карамата, М. Томіч, С.Б. Стєчкін, О.В. Єфімов, С.О. Теляковський, Л.І. Баусов, Г.О. Фомін, Р.М. Тригуб, Е.С. Белінський, Я.С. Бугров, Л.В. Тайков, П.В. Задерей, В.В. Савчук, Р.В. Товкач, О.М. Пелагенко та інші.

В теорії функцій комплексної змінної актуальними є задачі наближення функцій в однозв'язних областях, обмежених спрямлюваними жордановими кривими, за допомогою поліномів Фабера. При різних умовах на функцію та границю області цю задачу досліджували такі математики як В.К. Дзядик, Т. Кеварі, Х. Померенке, В.В. Андрієвський, М.М. Джрбашян, О.І. Маркушевич, С.Я. Альпер, П.К. Суєтін, С.В. Елайсот, Ф.Д. Леслі, В.С. Вінге, С.Е. Варшавський, Ж. М. Андерсон, І.О. Шевчук, О.І. Степанець, В.С. Романюк, Ф.Г. Абдулаєв, П.В. Задерей, М.В. Савчук та інші.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконана на кафедрі математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є: отримання точних нерівностей типу Лебега на класах $\bar{\psi}$-диференційовних функцій $C^{\bar{\psi}}C$, виражених через найкраще наближення $\bar{\psi}$-похідної; встановлення точних нерівностей типу Лебега-Ландау на класах аналітичних в одиничному крузі функцій H^{ψ}_{∞}, виражених через найкраще наближення функції f^{ψ}; дослідження умов регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, заданих нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій; отримання оцінок груп відхилень функцій з класів $C^{\bar{\psi}}C$ та H^{ψ}_{∞} в термінах найкращих наближень функції $f^{\bar{\psi}}$ чи, відповідно, f^{ψ}; отримання оцінки відхилення нормальних середніх Зигмунда ряду Фабера від аналітичної функції з класу $A(\overline{\Omega})$, що виражені через найкращі наближення функції алгебраїчними поліномами.

Об'єктом дослідження є класи функцій $C^{\bar{\psi}}$, H^{ψ}_{∞} та $A(\overline{\Omega})$, лінійні методи підсумовування неперервних та аналітичних функцій.

Предметом дослідження є: величини $\rho_n(f;x)$, $H^p_n(f;x)$ та $H^p_n(f;\lambda;x)$ при $f \in C^{\bar{\psi}}C$; $\rho_n(f;z)$, $H^{\varphi}_n(f;z)$ та $H^{\varphi}_n(f;\lambda;z)$ при $f \in H^{\psi}_{\infty}$; умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора у просторі аналітичних функцій, що задані прямокутною нескінченно рядковою матрицею дійсних чисел, та швидкість наближення функцій з класу $A(\overline{\Omega})$ нормальними середніми Зигмунда, що виражені через найкращі наближення функції алгебраїчними поліномами.

Відповідно до мети дослідження визначені його *завдання*:

1. Встановити нерівності типу Лебега на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, в яких норма відхилення частинних сум ряду Фур'є від функції виражена через величину найкращого наближення функції $f^{\bar{\psi}}$.

2. Встановити нерівності типу Лебега-Ландау на класі аналітичних в крузі функцій H^{ψ}_{∞}, в яких норма відхилення частинних сум ряду Тейлора від функції виражена через величину найкращого наближення функції f^{ψ}.

3. Отримати оцінки збіжності груп відхилень на класах $C^{\bar{\psi}}C$ та H_{∞}^{ψ} в термінах найкращих наближень функції $f^{\bar{\psi}}$ чи, відповідно, f^{ψ}.

4. Встановити критерій регулярності методів підсумовування рядів Тейлора, заданих нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$ та показати існування таких методів, що є регулярними в просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$ і не є регулярними у просторі неперервних функцій C.

5. Встановити швидкість наближення аналітичної в області Фабера функції нормальними середніми Зигмунда, що виражена через величину найкращого наближення функції $f \in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними поліномами.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи математичного та функціонального аналізу, теорії функцій дійсної та комплексної змінної у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах таких математиків, як С.Б. Стєчкін, О.І. Степанець, С.О. Теляковський, О.В. Єфімов, Г.М. Голузін, Г.О. Фомін, В.В. Савчук, О.М. Швецова, М.П. Тіман, Л.В. Тайков, Й. Карамата, В. Тотік, Р.А. Ласурія та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у такому:

1. Одержано нерівність типу Лебега для сум Фур'є на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, виражену через найкращі наближення $f^{\bar{\psi}}$ тригонометричними поліномами порядку не вище n. Показано, що отримана нерівність є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_{\varepsilon}$.

2. Одержано нерівність типу Лебега-Ландау для сум Тейлора на класі аналітичних функцій H_{∞}^{ψ}, виражену через найкращі наближення f^{ψ} алгебраїчними поліномами порядку не вище n, показано існування функ-

ції, для якої дана нерівність є точною. Встановлено асимптотично точну оцінку для верхніх граней норми відхилення частинних сум Тейлора від функцій з класу H^{ψ}_{∞}.

3. Отримано оцінки швидкості збіжності груп відхилень функцій з класів $C^{\bar{\psi}}C$ і H^{ψ}_{∞}, що виражені через величину найкращого наближення, відповідно, функцій $f^{\bar{\psi}}$ та f^{ψ}, а також отримано оцінки деяких функціоналів, що стосуються теорії сильного підсумовування функцій із заданих класів.

4. Встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних функцій з простору $A(\overline{D})$, що задаються нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел. Показано існування методів підсумовування, регулярних у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$, і, в той же час, нерегулярних у просторі неперервних функцій C. Наведено більш прості, але достатні умови регулярності прямокутного методу підсумовування в просторі $A(\overline{D})$, що виражаються безпосередньо через елементи матриці Λ.

5. Встановлено швидкість наближення функцій $f \in A(\overline{\Omega})$, що є аналітичними в областях Фабера та неперервними на їх замиканні, нормальними середніми Зигмунда їх рядів Фабера, що виражається через величину найкращого наближення функції f алгебраїчними поліномами.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань наближення функцій із класів $C^{\bar{\psi}}$, H^{ψ}_{∞} та $A(\overline{\Omega})$.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямків та постановка задач дослідження належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук, професору П.В. Задерею. Результати робіт [4], [5], [7], [8] та [94], що містяться в підрозділах 2.2, 2.4, 2.5, 3.1 та 4.2 отримані спільно із П.В. Задереєм, внесок обох авторів є рівноцінним. Решта результатів отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко–математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко та В. М. Радченко);

— семінарі кафедри вищої математики (Київський національний університет технологій та дизайну; керівник семінару: професор П. В. Задерей);

— семінарі "Математика, її застосування та викладання" (фізико–математичний факультет Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка; керівник семінару: професор Ю. І. Волков);

— міжнародній конференції «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2012р., Кам'янець-Подільський, Україна;

— міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF-2013, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» 24.02-02.03.2014р., Ворохта, Україна;

— міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-ліття від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (1914 – 1968) 23 – 24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна;

— всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» 25 лютого – 1 березня 2015 р., Ворохта, Україна.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 11 наукових публікаціях, з яких 6 є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 5 опубліковано у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Статті [8] та [94] опубліковано у виданнях, які включені до міжнародних науково метричних баз.

Структура дисертації. Дисертаційне дослідження складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 107 найменувань. Повний обсяг роботи складає 128 сторінок друкованого тексту.

У першому розділі дисертації зроблено огляд літератури за темою дослідження. В підрозділі 1.1. наведено основні поняття та факти про класи $\overline{\psi}$-диференційовних періодичних функцій $C^{\overline{\psi}}C$ та аналітичних в одиничному крузі функцій H^{ψ}_{∞}. В підрозділі 1.2 міститься огляд основних результатів, які стосуються нерівностей типу Лебега та Лебега-Ландау. В підрозділі 1.3 наведено огляд результатів про збіжність груп відхилень та сильну сумовність диференційовних та аналітичних функцій. Підрозділ 1.4 присвячено результатам, що стосуються умов регулярності лінійних методів підсумовування неперервних та аналітичних функцій. В підрозділі 1.5 містяться результати, що стосуються наближень аналітичних функцій рядами Фабера в однозв'язних областях.

У другому розділі встановлено нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау на класах $\overline{\psi}$-диференційовних та аналітичних в крузі функцій, отримано оцінки груп відхилень $\overline{\psi}$-диференційовних функцій та аналітичних в крузі функцій класу H^{ψ}_{∞}. Так у підрозділі 2.1 наведено деякі допоміжні твердження, які стосуються оцінок інтегралів від модулів тригонометричних рядів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та оцінок деяких числових сум і рядів. В підрозділі 2.2 встановлено нерівність типу Лебега на класі функцій $C^{\overline{\psi}}C$. У підрозділі 2.3 отримано оцінку групи відхилень $\overline{\psi}$-диференційовних функцій, на основі якої встановлено оцінки деяких функціоналів, що стосуються теорії сильного підсумовування рядів Фур'є. У підрозділі 2.4 отримано нерівність типу Лебега-Ландау на класі аналітичних в крузі функцій H^{ψ}_{∞}, а також, отримано асимптотику верхніх граней відхилень частинних сум ряду Тейлора від функції. У підрозділі 2.5 одержано оцінку групи відхилень функцій класу H^{ψ}_{∞} та оцінки деяких функціоналів, пов'язаних із сильним підсумовуванням рядів Тейлора.

Третій розділ роботи присвячено лінійним методам підсумовування аналітичних в крузі функцій. Зокрема, у підрозділі 3.1 встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора-Маклорена аналітичних функцій, що задаються прямокутними матрицями дійсних чисел, у підрозділі 3.2 наведено приклад методу підсумовування, що є нерегулярним у просторі неперервних функцій C, але є регулярним в $A(\overline{D})$. У підрозділі 3.3 встановлено достатні умови регулярності методу підсумовування, що виражаються безпосередньо через елементи матриці Λ.

Четвертий розділ роботи присвячено наближенню аналітичних функцій в однозв'язних областях Фабера середніми Зігмунда. Так у підрозділі 4.1 встановлено деякі допоміжні твердження, що стосуються наближення аналітичних функцій сумами Валле-Пуссена. У підрозділі 4.2 містяться асимптотично точні оцінки відхилень середніх Зигмунда рядів Фабера від функції, також там же показано, що отримана оцінка є точною.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру і глибоку вдячність моєму науковому керівнику професору Задерею Петру Васильовичу за постановку задач, постійну увагу, корисні поради та зауваження.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Основні поняття та факти

Нехай L_p — простір 2π-періодичних сумовних за Лебегом функцій f з нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1,$$

для скорочення запису замість L_1 будемо писати L, C — підпростір L, що складається з неперервних функцій з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f|;$$

а L_∞ — підпростір L, що складається з істотно обмежених функцій з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_x |f(x)|.$$

Нехай

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \tag{1.1}$$

— ряд Фур'є за тригонометричною системою функції $f \in L$; $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1, 2, \dots$ — її коефіцієнти Фур'є. Позначимо через $S_n(f; x)$ — частинну суму ряду Фур'є (1.1) порядку n і покладемо $\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$. Нехай далі T_n — множина тригонометричних поліномів t_n вигляду $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big)$ і

$$E_n(f)_X := \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_X \tag{1.2}$$

— найкраще наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів $t_n \in T_n$, а X означає або L, або L_∞, або C.

Нехай далі $f \in L$ з рядом Фур'є виду (1.1). Якщо при деяких фіксованих $r > 0$ та $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \Big(a_k(f) \cos{(kx + \frac{\beta\pi}{2})} + b_k(f) \sin{(kx + \frac{\beta\pi}{2})} \Big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то цю функцію позначають $f_\beta^{(r)}$ і називають (r, β)-похідною функції f у розумінні Вейля-Надя, клас таких функцій позначають W_β^r. У випадку коли $\beta = r$, то клас W_β^r співвпадає із класом W_r^r, що складається із r разів диференційовних функцій.

У 80-90-х роках XX століття О.І. Степанець ввів поняття (ψ, β)-похідної (див., наприклад, [54]). Нехай $f \in L$ з рядом Фур'є виду (1.1), $\psi(k)$ — довільна числова послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \Big(a_k(f) \cos{(kx + \frac{\beta\pi}{2})} + b_k(f) \sin{(kx + \frac{\beta\pi}{2})} \Big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то цю функцію позначають f_β^ψ і називають (ψ, β)-похідною функції f. Множину всіх функцій $f \in L$, у яких існують (ψ, β)-похідні позначають через L_β^ψ. $C_\beta^\psi \subset L_\beta^\psi$ — підмножина неперервних функцій з L_β^ψ. Нехай далі $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій з L, множину всіх функцій $f \in L_\beta^\psi$, таких що $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$ позначають $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, аналогічно через $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають множину неперервних функцій, у яких існують (ψ, β)-похідні і $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$.

У означенні класу L_β^ψ параметр β міг приймати лише одне значення, якщо тепер взяти $\overline{\beta} = \beta(k),\ k \in \mathbb{N}$ — деяка послідовність дійсних чисел, то аналогічним чином можна ввести поняття $(\psi, \overline{\beta})$-похідної, а також класів $L_{\overline{\beta}}^\psi$ та $L_{\overline{\beta}}^\psi \mathfrak{N}$ (див., наприклад, [55], с. 33).

Якщо при заданих послідовностях $\psi = \psi(k)$ та $\overline{\beta} = \beta(k),\ k \in \mathbb{N}$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kx - \frac{\beta_k \pi}{2}\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $D_{\psi,\overline{\beta}} \in L$, то (див., наприклад, [61], с. 144) елементи f множини $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ зображаються майже скрізь у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x-t) D_{\psi,\overline{\beta}}(t) dt, \tag{1.3}$$

якщо $f \in C^{\psi}_{\overline{\beta}}$, то співвідношення (1.3) виконується для всіх x.

Наведемо тепер поняття $\overline{\psi}$-похідної, введеної О.І. Степанцем [57].

Нехай $f \in L$ з рядом Фур'є виду (1.1), $\bar{\psi} = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f;x) \right),$$

де $A_k(f;x) = a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$, $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Підмножину функцій $f \in L$, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні, позначимо через $L^{\bar{\psi}}$.

Зазначимо, що поняття $(\psi, \overline{\beta})$-похідної співпадає із поняттям $\bar{\psi}$-похідної функції в тому розумінні, що із існування однієї з них слідує існування іншої із відповідними значеннями параметрів, що їх задають (див. наприклад [61], с.152).

Аналогічним чином вводиться узагальнена похідна аналітичних в крузі функцій.

Введемо такі позначення: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Через $A(D)$ позначимо множину аналітичних в крузі D функцій, а через H_p, $1 \le p \le \infty$ — простір Харді аналітичних в крузі функцій, що задовольняють умові $\|f\|_{H_p} < \infty$, де

$$\|f\|_{H_p} = \begin{cases} \sup\limits_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|dt\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{при} \ \ 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z\in D} |f(z)|, \ \ \text{при} \ \ p = \infty. \end{cases}$$

Надалі UH_p — одинична куля в H_p, $1 \le p \le \infty$.

Нехай $f \in A(D)$ і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D \tag{1.4}$$

— її розклад в ряд Тейлора-Маклорена, де $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D \tag{1.5}$$

є рядом Тейлора деякої функції з класу H_∞, то цю функцію будемо позначати f^ψ і назвемо її ψ-похідною функції f. Позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞, у яких похідна $f^\psi \in UH_\infty$. Вперше подібний клас функцій був розглянутий Шейком [104].

Класичні результати з теорії просторів Харді містяться у монографіях та оглядах наступних авторів І.І. Привалова [45], К. Гофмана [17], С. Я. Хавінсона [81], В.П. Хавіна [80], Дж. Гарнетта [15], П. Кусіса [32], У. Рудіна [47], С.В. Шведенка [85] тощо.

Якщо $f \in H_p$, то існують недотичні кутові граничні значення $\lim\limits_{|z|\to 1} f(z)$, які будемо позначати тим же символом $f(e^{it})$.

Нехай далі $C(T)$, $L_\infty(T)$ і $L(T)$ — простори відповідно неперервних, істотно обмежених та сумовних на T функцій з нормами $\|f\|_{C(T)} =$

$\max\limits_{z\in T}|f(z)|$, $\|f\|_{L_\infty(T)} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{z\in T}|f(z)|$ та $\|f\|_{L(T)} = \frac{1}{2\pi}\int_T |f(z)||dz|$.

Якщо $X(T)$ — один з просторів $C(T)$, $L_\infty(T)$, чи $L(T)$, то позначимо через $X(T)_+$ — множину функцій з $X(T)$, для яких коефіцієнти Фур'є з від'ємними індексами рівні 0, тобто $X(T)_+ = \{f \in X(T) : \widehat{f}(-k) = 0, k \in \mathbb{N}\}$ [64, с. 261].

Множину функцій $f \in L(T)_+$, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $f^\psi \in L_\infty(T)_+$, позначимо через $L^\psi_\infty(T)_+$.

Зазначимо, що згідно теореми Голубєва-Привалова [45. с. 202] простір $L_\infty(T)_+$ є простором граничних значень аналітичних в D функцій f, що зображаються інтегралом Коші. Тому коефіцієнти Тейлора-Маклорена таких функцій співпадають з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень, тобто $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \widehat{f}(k), k = 0, 1, 2, \ldots$.

1.2. Нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау: огляд основних результатів

Оцінки відхилення функції від її частинних сум Фур'є через найкраще наближення вперше досліджував А. Лебег [101]. Ним було отримано наступний результат: для довільних $n \in \mathbb{N}$ та $f \in C$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le (L_n+1)E_n(f)_C, \tag{1.6}$$

де L_n — норма оператора $S_n : f \to S_n(f;\cdot)$, що діє з простору C в C (її ще називають константою Лебега сум Фур'є).

Як відомо (див., наприклад, [61, с. 30]) для будь-якого $n \in \mathbb{N} : L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + r_n$, де $|r_n| < 1,8$. Тому співвідношення (1.6) можна записати у вигляді

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le (\frac{4}{\pi^2}\ln n + R_n)E_n(f)_C, |R_n| < 2,8. \tag{1.7}$$

Зауважимо, що нерівність (1.7) на всьому просторі C є асимптотично точною, але вона перестає бути точною на деяких підмножинах з C.

К.І. Осколков довів [39], що для довільної $f \in C$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le K\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{n+k}(f)_C}{k+1}, \tag{1.8}$$

де $K > 0$ — деяка стала і показав, що якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ — монотонно спадна до нуля послідовність невід'ємних чисел (надалі будемо позначати множину таких послідовностей через P_0) і $C_\varepsilon = \{f \in C : E_k(f)_C \le \varepsilon_k, k = 0,1,2,\ldots\}$, то існують додатні сталі K_1 і K_2, що

$$K_1\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \le \sup_{f\in C_\varepsilon}\|\rho_n(f;x)\|_C \le K_2\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \tag{1.9}$$

У 1935 році А.М. Колмогоров (див., наприклад, [97] або [30, с. 179-185]) розглянув величину

$$\sup_{f\in W^r_\infty} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C,\ r\in\mathbb{N}$$

і показав, що

$$\sup_{f\in W^r_\infty} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),\ n\to\infty, r\in\mathbb{N}. \qquad (1.10)$$

Роботи А.Лебега [101] та А.М. Колмогорова [97] поклали початок цілого напрямку досліджень в теорії наближень. На класах функцій W^r, W^r_β та відповідних спряжених класах такі величини досліджували А.М. Колмогоров [97], В.Т. Пінкевич [43], С.М. Нікольський [36], О.В. Єфімов [22], С.Б. Стечкін [68], С.О. Теляковський [74], Р.М. Тригуб [79], О.І. Степанець (див., наприклад, [56] чи [63]), Сердюк А.С. [52] та інші.

Далі через $\mathfrak{M}$ позначимо множину опуклих донизу при $v\geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v)=0$; $\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $0<\mu(\psi,t)\leq K<\infty$, де $\mu(\psi,t)=\frac{t}{\eta(t)-t}$ та $\eta(t)=\eta(\psi,t)=\psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$; $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi\in\mathfrak{M}$, для яких $\int_1^\infty\frac{|\psi(t)|}{t}dt<\infty$.

О.І. Степанець встановив такий аналог нерівності Лебега (1.7) на класах $C^{\bar\psi}C$:

Теорема 1.1 (О.І. Степанець [58], також див. [61, стор. 216]). *Якщо $\pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}_0'$, то для довільної $f\in C^{\bar\psi}C$ та довільного $n\in\mathbb{N}$*

$$\|\rho_{n-1}(f;x)\|_C\leq$$
$$\leq\left(\frac{4}{\pi^2}\bar\psi(n)\ln n+\frac{2}{\pi}\int_n^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt+O(1)\bar\psi(n)\right)E_{n-1}(f^{\bar\psi})_C,$$

де $\bar\psi(n)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, O(1) — величина рівномірно обмежена по n та по f, запис $\pm\psi\in A$ означає, що або $\psi\in A$, або $-\psi\in A$, де $A\subset\mathfrak{M}$.

Ним показано (див., наприклад [61, с. 218, 242-244]), що $\forall\varepsilon \in P_0$ існує функція $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ така, що

$$\|\rho_{n-1}(f_*;x)\|_C = \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)\varepsilon_{n-1}.$$

Згодом Задерей П.В. та Задерей Н.М.[26] замінили множину $\mathfrak{M}$ більш широкою, а саме замість опуклості послідовностей ψ_i, $i = 1, 2$, наклали умову квазіопуклості.

О.М. Швецова отримала наступний результат:

Теорема 1.3 (Швецова О.М. [87]). *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *є локально абсолютно неперервною функцією на* $(-\infty, -n-1] \cup [n+1, \infty)$, $\psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *та* $\lim \psi(k) = 0$ *при* $|k| \longrightarrow \infty$, *а також* $\widetilde{V}_{n+1}^\infty(\psi) = \int_{n+1}^\infty vraisup_{|u|\leq t}|\psi'(t)|du < \infty$. *Припускається ще, що* $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{|\psi(k)-\psi(-k)|}{k} < \infty$ *(це і необхідно). Тоді (вважаємо, що* $\frac{0}{0} = 0$*)*

$$\sup_{f: f^\psi \in C} \frac{\|f - S_n(f;x)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} = \max_{f\in W_\infty^\psi} \frac{\|f - S_n(f;x)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} =$$

$$= \max_{f\in W_\infty^\psi} \|f - S_n(f;x)\|_\infty = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{|\psi(k+n)\psi(-k-n)|^{1/2}E(h_{k+n})}{kh_{k+n}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+2}^\infty \frac{|\psi(k+n) - \psi(-k-n)|}{k} + O(1)\widetilde{V}_{n+1}^\infty(\psi),$$

де W_∞^ψ *— клас неперервних періодичних функцій* f, *для яких тригонометричний ряд* $\sum_{k\neq 0} \frac{1}{\psi(k)}c_k(f)e^{ikx}$ *є рядом Фур'є деякої обмеженої функції* f^ψ *(*ψ*-похідна) та* $\|f^\psi\|_\infty \leq 1$,

$$h_k = \left(\left(Re\frac{\psi(k)+\psi(-k)}{2(\psi(k)\psi(-k))^{1/2}}\right)^2 + \left(Im\frac{\psi(k)-\psi(-k)}{2(\psi(k)\psi(-k))^{1/2}}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$E(h) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - h^2\sin^2(t)}dt, h \in [0,1]$$

— повний еліптичний інтеграл другого роду.

Зауважимо, що при дослідженні апроксимативних властивостей частинних сум Фур'є корисним є наступне твердження (див., наприклад, [61], с.178).

Твердження 1.1. *Якщо пара числових послідовностей* $\bar{\psi} = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ *є такою, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi(t)$*, то для довільної функції* $f \in L^{\bar{\psi}}$ *майже в кожній точці* x *має місце рівність*

$$\rho_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(x-t)F_n(\bar{\psi},t)dt, \qquad (1.11)$$

де $F_n(\bar{\psi},t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt)$.

Якщо при цьому $f \in C^{\bar{\psi}}$, $F_n(\bar{\psi},\cdot) \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $f^{\bar{\psi}} \in L_{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, *то рівність (1.11) справедлива в кожній точці* x*. Зокрема це завжди так, коли* $f^{\bar{\psi}} \in L_\infty$.

Результатів, що стосуються наближення аналітичних функцій частинними сумами рядів Тейлора, є значно менше, ніж у дійсному випадку. Деякі дослідження в цьому напрямку містяться в монографіях [91], [92] та [64]. Дослідженням цих проблем займались такі математики як Е. Ландау [100], С.Б. Стєчкін [66], К.І. Бабенко [2], С. Я. Альпер [1], Е.А. Стороженко [69], К.І. Осколков [40], О.І. Степанець [65], В.В. Савчук [48, 49], О.М. Швецова [86] та інші.

Наведемо деякі відомі результати. В 1916 році Е. Ландау [100] обчислив норму оператора частинних сум ряду Тейлора функцій аналітичних в D і таких, що $f \in UH_\infty$

$$\sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|S_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\ln n + O(1),$$

причому ним було показано, що існує функція $f \in UH_\infty$, для якої дана оцінка є асимптотично точною. Звідси слідує нерівність Лебега-Ландау

$$\|\rho_n(f,z)\|_\infty \le \Big(\frac{1}{\pi}\ln n + O(1)\Big)E_n(f).$$

С.Б. Стєчкін [67] розв'язав задачу про асимптотику наближення частинними сумами ряду Тейлора для класу функцій $H_\infty^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, які є аналітичними в D і $\|f^{(r)}\|_\infty \le 1$:

Теорема 1.4 (Стєчкін С.Б. [67]). *Нехай $r \in \mathbb{N}$, тоді для довільної функції $f \in H_\infty^{(r)}$ має місце співвідношення*

$$\sup_{f \in H_\infty^{(r)}} \|\rho_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\frac{\ln n}{n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big), n \ge r-1.$$

Нехай $\psi = \{\psi(k)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$ і $\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0$; $f \in H_\infty$ з рядом Тейлора виду (1.4), позначимо через H_∞^ψ клас функцій з H_∞ для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} a_k z^k, z \in D \tag{1.12}$$

є рядом Тейлора функції $f^\psi \in UH_\infty$. Вперше подібний клас функцій був розглянутий Шейком [104].

О.І. Степанець та В.В. Савчук на класі функцій $C_\infty^{\bar\psi}(T)_+$ отримали наступне твердження [65] (див. також [64], с. 280-290):

Теорема 1.5 (Степанець О.І., Савчук В.В. [65]). *Нехай $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, де $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1,2$, та $f \in C_\infty^{\bar\psi}(T)_+$, тоді*

$$\|\rho_n(f,z)\|_{C_\infty^{\bar\psi}(T)} \le \Big(\frac{1}{\pi}\ln n + O(1)\Big)|\psi(n)|E_n(f^\psi)_{C_\infty^{\bar\psi}(T)}$$

та

$$\sup_{f\in C^{\bar\psi}_\infty(T)_+} \|\rho_n(f,z)\|_{C^{\bar\psi}_\infty(T)} = \frac{1}{\pi}|\psi(n)|\ln n + O(1)|\psi(n)|.$$

З деякими менш загальними результатами можна ознайомитись у [49].

О.М. Швецова [86] наклавши на послідовність ψ умови слабші ніж опуклість отримала наступний результат:

Теорема 1.6 (Швецова О.М. [86]). *Якщо* $n \in \mathbb{N}$, $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ *– локально абсолютно неперервна функція на* $[n+1,\infty)$, *така що* $\psi(k) \neq 0, k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0$ *та*

$$\widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi) = \int_{n+1}^{\infty} \operatorname*{vrai\,sup}_{u\geq t} |\psi'(u)|dt < \infty,$$

то

$$\sup_{f^\psi\in H_\infty} \frac{\|\rho_n(f,z)\|_\infty}{E_n(f^\psi)} = \sup_{f\in H^\psi_\infty} \|\rho_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n)|}{k} + O\Big(\widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi)\Big).$$

У другому розділі встановлено результати, що узагальнюють наведені вище твердження, а саме отримано нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау на класах $\overline{\psi}$-диференційовних та аналітичних в крузі функцій.

1.3. Збіжність групи відхилень та сильна сумовність диференційовних та аналітичних функцій

Як відомо Л.Фейер [93] встановив, що для довільної неперервної функції в кожній точці виконується співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big(f(x)-S_m(f,x)\Big)=o(1).$$

Харді і Літтлвуд [95] встановили більш сильний результат, а саме: для довільної $f\in L$ майже скрізь має місце співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big|(f(x)-S_m(f,x)\Big|=o(1).$$

Згодом Ю. Марцинкевичем [102] та А. Зігмундом [107] було встановлено більш сильний результат: для довільної $f\in L$ та будь-якого $p>0$ майже скрізь має місце співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\Big|(f(x)-S_m(f,x)\Big|^p=o(1). \tag{1.13}$$

В 1963 році угорськими математиками Г. Алєксичем та Д. Краліком [89] було розглянуто наближення неперервних функцій сильними середніми Валле Пуссена, ними було отримано наступне співвідношення

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=n+1}^{2n}\Big|(f(x)-S_m(f,x)\Big|^p=o(1),\ \ p>0. \tag{1.14}$$

Пізніше стали досліджувати поряд з величинами (1.13) та (1.14) функціонали виду

$$\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_k(\nu)|\rho_k(f,x)|^p \qquad \text{та} \qquad \sum_{k=m}^{\infty}\alpha_k(\nu)\varphi(|\rho_k(f,x)|),$$

де $\alpha_k = \alpha_k(\nu)$ — послідовність невід'ємних функцій, що залежать від деякого параметра $\nu \in V \subset \mathbb{R}$, котра має хоча б одну граничну точку, $\varphi(u)$ — довільна невід'ємна функція, задана на $\mathbb{R}_+$.

На класі (ψ, β)-диференційовних неперервних функцій відомі результати Н. Л. Пачуліа [41, 42], для $\bar{\psi}$-диференційовних функцій О.І. Степанець [60] отримав наступні твердження.

Теорема 1.7 (Степанець О.І. [60]). *Нехай $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, тоді при кожному $p > 0$ для довільної $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ у кожній точці x справедлива нерівність*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le K_p\left(\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + |\overline{\psi}(n)|\right)E_{n-1}(f^{\overline{\psi}}).$$

Теорема 1.8 (Степанець О.І. [60]). *Нехай $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, $p > 0$, послідовність $\lambda = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ така, що $\lambda_k \ge 0$ і числа $\beta_k = \lambda_k\alpha_k^p$, де*

$$\alpha_k = \int_k^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + |\overline{\psi}(k)|,$$

не зростають при всіх $k \ge n$, тоді для довільної $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ у кожній точці x справедлива нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k|\rho_k(f;x)|^p \le K_p\left(n\lambda_n\alpha_n^pE_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\alpha_k^pE_k^p(f^{\overline{\psi}})\right).$$

Теорія сильного підсумовування рядів Фур'є за різними ортонормованими системами функцій, як було зазначено вище, бере свій початок у роботах англійських математиків Г.Харді та Дж. Літтлвуда. Сильне підсумовування періодичних функцій досліджували такі математики як Г. Харді, Дж. Літтлвуд, Г. Алєксіч, Ю. Марцинкевич, А. Зігмунд, Д. Кралік, Л. Лейндлер, В. Тотік, К.І. Осколков, О.І. Степанець, Н.Л. Пачулія, Р.А. Ласурія та багатьох інших.

Частина перших досліджень з даної тематики міститься в монографіях Н.К. Барі [3], А. Зігмунда [28], з більш пізніми результатами можна ознайомитись в огляді Л. Лейндлера [98] та монографії Р.А. Ласурії [34].

На відміну від неперервних функцій сильне підсумовування аналітичних в крузі функцій є менш дослідженим. З деякими аспектами сильного підсумовування аналітичних в крузі функцій можна ознайомитись у роботах Б. Сміта, Е.С. Белінського, Ф. Віза, Р.А. Ласурії, В.В. Савчука, М.В.Савчук та інших.

У роботі [33] Р. А. Ласурія отримав наступні твердження:

Теорема 1.9 (Ласурія Р. А. [33]). *Нехай ϕ неспадна і неперервна на $(0,\infty)$ функція $\varphi(\cdot)$ така, що $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0$, $\varphi(u)\le e^{bu}$, для $u\in[0,1]$ $\varphi(2u)\le a\varphi(u)$, де $a=a(\varphi)$, $\psi(k)\in\mathfrak{M}$. Тоді для довільної функції $f\in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справедливі співвідношення*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|)\le K\varphi(\psi(n)E_n(f^{\psi}))$$

та

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|)\le K\Big(n\lambda_n\varphi(\psi(n)E_n(f^{\psi}))+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(\psi(k)E_k(f^{\psi}))\Big).$$

де $K=K(\varphi)$ — деяка величина рівномірно обмежена по n,z,f та $\lambda=\{\lambda_k(u)\}$ — незростаюча послідовність невід'ємних функцій, заданих на деякій множині U.

У розділі 2 роботи буде отримано оцінки груп відхилень $\overline{\psi}$-диференційовних функцій та аналітичних в крузі функцій класу H^{ψ}_{∞}, що є узагальненням вищенаведених результатів.

1.4. Регулярність лінійних методів підсумовування неперервних та аналітичних функцій

Нехай L — простір сумовних $2\pi-$періодичних функцій із нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, а C — підпростір L, який складається із неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f|$. Далі $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots$ — нескінченнорядкова матриця дійсних чисел, що задає деякий метод підсумовування. Кожній функції $f \in C$ з рядом Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

поставимо у відповідність ряд

$$U_n(f; \Lambda; x) = \lambda_0^{(n)} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Будемо говорити, що ряд Фур'є функції $f \in C$ підсумовується методом Λ в точці x до значення $f(x)$, якщо в цій точці всі ряди в правій частині попереднього співвідношення збігаються і

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, \Lambda, x) = f(x).$$

Метод підсумовування Λ є регулярним у просторі C, якщо для довільної функції $f \in C$ та кожного x її ряд Фур'є підсумовується цим методом до числа $f(x)$.

Й. Карамата та М. Томіч [96] встановили таке твердження:

Теорема 1.10 (Карамата Й., Томіч М. [96]). *Метод підсумовування Λ, що задається нескінченнорядковою матрицею буде регулярним в просторі C тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови:*

(A) для усіх $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1;$$

(B) для кожного n існує таке число M_n (яке можливо залежить від n), що для всіх m

$$\int_0^\pi \Big|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(n)} \cos kx\Big| dx \le M_n;$$

(C) повна варіація функцій

$$\bar{K}_n(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^x \Big\{\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(n)} \cos kx\Big\} dx =$$

$$= \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} x + \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^{(n)}}{k} \sin kx$$

рівномірно обмежена, тобто

$$\int_0^\pi |d\bar{K}_n(x)| \le M.$$

Для трикутних матриць Λ, тобто матриць, у яких $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $n < k$ ці умови набувають більш простого вигляду [99], [37]. В цьому випадку для регулярності методу підсумовування Λ необхідно та достатньо виконання умови (A) та умови

$$(B*) \qquad \int_0^{2\pi} \Big|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kx\Big| dx \le M.$$

Хоч наведені умови є необхідними і достатніми, але перевірка їх для конкретних методів підсумовування досить часто є складною. Тому виникає задача про отримання достатніх, але більш простих умов, за яких метод підсумовування буде регулярним. Таку задачу (для трикутних матриць) вперше поставив С.М. Нікольський [37]. Деякі результати, що стосуються цієї задачі були відомі і раніше, наприклад, роботи Е. Хілле та Я.Д. Тамаркіна про метод Вороного, Р. Салема про один частинний випадок нескінченно рядкових матриць.

С.М. Нікольський [37] розглянув трикутні матриці, у яких елементи $\lambda_k^{(n)}$ для кожного n утворюють опуклу чи увігнуту послідовність чисел, і показав, що для регулярності методу підсумовування необхідно і достатньо виконання умов (A),

$$|\lambda_k^{(n)}| \leq M,\ k = 0, 1, \ldots, n$$

та

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k}\right| \leq M.$$

Після цієї роботи умови регулярності при різних припущеннях про елементи матриці досліджували такі математики як С.Б. Стєчкін, О.В. Єфімов, Й. Карамата, М. Томіч, Б. Надь, Л.І. Баусов, С.О. Теляковський, Л.В. Тайков, Г.А. Фомін, Р.М. Тригуб, П.В. Задерей, О.М. Пелагенко, Р.В.Товкач та інші.

Тут наведемо найбільш загальний результат П.В. Задерея, О.М. Пелагенко та Р.В.Товкача:

Теорема 1.11 (Задерей П.В., Пелагенко О.М., Товкач Р.В. [73]). *Припустимо, що послідовність чисел* $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ *задовольняють наступні умови:*

1) $\sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\lambda_k^{(n)}| < M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

2) для кожного n *знайдеться таке* m, *що*

$$\sum_{i=2}^{m-2}\left|\sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\triangle\lambda_{i-k}^{(n)} - \triangle\lambda_{i+k}^{(n)}}{k}\right| + \sum_{i=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\triangle\lambda_{m+i-k}^{(n)} - \triangle\lambda_{m+i+k}^{(n)}}{k}\right| \leq M,$$

де $q_{i,m} = \min([\frac{i}{2}], [\frac{m-i}{2}])$.

Тоді для того, щоб метод підсумовування Λ *був регулярним у просторі неперервних функцій* C, *необхідно і достатньо виконання умов*

1) для довільного $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1,$$

2) для кожного n *існує таке число* M_n*, що залежить лише від* n*, що для всіх* k

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_{k+m}^{(n)}|}{k} \le M_n;$$

3) для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_{m-k}^{(n)} - \lambda_{m+k}^{(n)}|}{k} \le M.$$

Позначимо через $A(\overline{D})$, $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ — простір функцій $f(\cdot)$, аналітичних в D і неперервних в $\overline{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \le 1\}$ з нормою

$$\|f\|_{A(\overline{D})} = \max_{z\in\overline{D}} |f(z)|.$$

Якщо задано нескінченнорядкову матрицю $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}, n, k = 0, 1, \ldots$ дійсних чисел $\lambda_k^{(n)}$, то кожній функції $f \in A(\overline{D})$ з рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ z \in D \tag{1.15}$$

поставимо у відповідність послідовність рядів

$$U_n(f; \Lambda; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} c_k z^k, \ z \in \overline{D}. \tag{1.16}$$

Будемо говорити, що ряд (1.15) підсумовується методом Λ в точці $z \in \overline{D}$ до значення $f(z)$, якщо ряди (1.16) є збіжними для довільного $n = 0, 1, \ldots$ та має місце співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, \Lambda, z) = f(z), \ z \in \overline{D}. \tag{1.17}$$

Метод підсумовування Λ називається регулярним в просторі $A(\overline{D})$, якщо для кожної $f \in A(\overline{D})$ та довільного $z \in \overline{D}$, ряд (1.15) підсумовується цим методом до числа $f(z)$.

Якщо метод підсумовування є регулярним у просторі $A(\overline{D})$, то для кожної $f \in A(\overline{D})$ ряди (1.16) збігаються рівномірно і рівномірною буде збіжність у співвідношенні (1.17), тобто має місце збіжність за нормою простору $A(\overline{D})$.

Для трикутних матриць в просторі $A(\overline{D})$ Л.В. Тайков [75] отримав наступний результат:

Теорема 1.12 (Тайков Л.В. [75]). *Для того щоб трикутна матриця дійсних чисел Λ була регулярною в просторі $A(\overline{D})$, необхідно і достатньо, щоб для неї виконувалися умови: (A) та*

(D) існує таке число $M > 0$ і такий розклад $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ на дійсні числа $\alpha_k^{(n)}$ і $\beta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, ..., n)$, що

$$\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx)\Big| dx \leq M \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Тайковим Л.В. також було показано, що умови регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ слабші умов регулярності в просторі C, тобто, існує такий метод підсумовування, що є регулярним в просторі $A(\overline{D})$, але не є регулярним в C.

Для нескінченнорядкових матриць умови регулярності в просторі $A(\overline{D})$ були невідомі. Такі умови встановлюються в третьому розділі цієї роботи.

1.5. Наближення аналітичних функцій рядами Фабера

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, межею якої є замкнена спрямлювана жорданова крива Γ. За теоремою Рімана існує єдине відображення $w = \Phi(z)$, що конформно та однолистно відображає зовнішність області Ω на зовнішність одиничного круга $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) = \gamma > 0.$$

Обернене до $w = \Phi(z)$ відображення позначимо $z = \Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (див., наприклад, [70, с. 52] чи [18, с. 346]).

Нехай далі $A(\overline{\Omega})$ — множина функцій f, аналітичних в області Ω та неперервних в $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$. Коефіцієнти Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$ обчислюються за формулами [70, с. 107]

$$a_\nu = a_\nu(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta, \qquad (1.18)$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ, а ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z) \qquad (1.19)$$

є рядом Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Задамо на множині функцій $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ оператор $T_\Omega : A(\overline{\mathbb{D}}) \to A(\overline{\Omega})$ що діє за правилом

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T f(w) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw, \ z \in \Omega \qquad (1.20)$$

де $T = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, $z \in \Omega$. Такий оператор називають оператором Фабера (див., наприклад, [20], [50], [70, с. 154] чи [90]).

Оператор

$$T_{\Omega}^{-1}(f)(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\Psi(t))}{t-w}dt, \ |w| < 1,$$

називають оберненим оператором Фабера.

Область Ω називають областю Фабера [50], якщо для норми оператора (1.20) виконується співвідношення:

$$\|T_{\Omega}\| = \sup_{f\in\overline{D}, \ \|f\|_{A(\overline{D})}\le 1} \|T_{\Omega}(f)(z)\| < \infty.$$

Зокрема, областями Фабера є опуклі області, області, які обмежені кривими Альпера, Ляпунова, Радона (обмеженого обертання) або області класу A ([19], також див. [70]).

В [50] отримано критерій області Фабера, зокрема, встановлено таке твердження:

Теорема 1.13 (Савчук В.В. [50]). *Для того, щоб область Ω була областю Фабера, необхідно і достатньо, щоб існувала сім'я $\{\mu_z\}_{z\in\Omega}$, $\mu_z : T \to \mathbb{C}$, функцій обмеженої варіації (дійсна та уявна частини є функціями обмеженої варіації) така, що*

$$\sup_{z\in\Omega}\int_T |d\mu_z(\zeta)| < \infty, \tag{1.21}$$

і для будь-якого $z \in \Omega$

$$\frac{\Psi'(\cdot)}{\Psi(\cdot)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{d\mu_z(\zeta)}{\zeta - \cdot}. \tag{1.22}$$

З (1.22) легко отримати наступне представлення для многочленів Фабера

$$F_{\nu}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_T \zeta^{\nu} d\mu_z(\zeta), \ \nu = 0, 1, 2 \ldots. \tag{1.23}$$

Апроксимативним властивостям многочленів Фабера присвячено монографії В.І. Смірнова та М.А. Лєбедєва [53], П.К. Суєтіна [70], В.К. Дзядика [18], Д. Гаєра [14]. Наближення аналітичних функцій, заданих рядами Фабера, досліджували такі математики як В.К. Дзядик, Т. Кеварі, Х. Померенке, В.В. Андрієвський, М.М.Джрбашян, А.І. Маркушевич, С.Я. Альпер, П.К. Суєтін, С.В. Елайсот, Ф.Д Леслі, В.С. Вінге, С.Е. Варшавський, Ж. М. Андерсон, О.І. Степанець, В.С. Романюк, В.В. Савчук, Ф. Абдулаєв, П.В. Задерей та інші.

У четвертому розділі роботи встановлено асимптотично точні оцінки відхилень середніх Зигмунда рядів Фабера аналітичних функцій, також там же показано, що отримана оцінка є точною.

РОЗДІЛ 2

Нерівності типу Лебега та Лебега-Ландау на класах $\overline{\psi}$-диференційовних та аналітичних в крузі функцій

2.1. Деякі допоміжні твердження

Даний розділ присвячено дослідженню апроксимативних характеристик частинних сум Фур'є та Тейлора у просторах відповідно $C^{\overline{\psi}}$ та $H_{\infty}^{\overline{\psi}}$.

В цьому підрозділі наведемо деякі оцінки, що стосуються інтегралів модулів тригонометричних рядів з дійсними та комплексними коефіцієнтами, а також наведемо деякі співвідношення між числовими рядами та сумами.

Кажуть, що послідовність α_k задовольняє умови Боаса-Теляковського, якщо

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \tag{2.1}$$

$$V(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\alpha_k| < \infty, \text{ де } \triangle\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}, \tag{2.2}$$

$$B(\alpha) := \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\alpha_{k-l} - \triangle\alpha_{k+l}}{l} \right| < \infty. \tag{2.3}$$

Зазначимо, що при виконанні (2.2) и (2.3) для довільного $m \in \mathbb{N}$ будуть скінченними наступні величини

$$B_1^m(\alpha) := \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\triangle\alpha_{i-k}^{(n)} - \triangle\alpha_{i+k}^{(n)}}{k} \right|,$$

$$B_m(\alpha) := \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\triangle\alpha_{m+i-k}^{(n)} - \triangle\alpha_{m+i+k}^{(n)}}{k} \right|,$$

де $q_{i,m} = \min([\frac{i}{2}], [\frac{m-i}{2}])$ [73, с. 73].

Має місце наступне твердження:

Теорема 2.1. (Теляковський С.О., [73, с. 73]). *Нехай коефіцієнти ряду*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

прямують до нуля і задовольняють умови Боаса-Теляковського, крім того $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty$*. Тоді для інтегралу*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \Big| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Big| dx$$

має місце рівномірна відносно $m = 0, 1, 2, \ldots$ *оцінка*

$$\big| I - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{k} + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \big| \leq$$

$$\leq M(V(a) + B_1^m(a) + B_m(a) + V(b) + B_1^m(b) + B_m(b)),$$

де

$$\xi_k = \xi\big(b_k, \sqrt{(a_{m-k} - a_{m+k})^2 + (b_{m-k} - b_{m+k})^2}\big),$$

а функція $\xi(t, u)$ *визначена наступним співвідношенням*

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}|t|, & \text{при } |u| \leq |t|, \\ |t| \arcsin \left|\frac{t}{u}\right| + \sqrt{u^2 - t^2}, & \text{при } |t| < |u|. \end{cases}$$

З теореми 2.1 слідують наступні наслідки:

Наслідок 2.1. *Якщо коефіцієнти ряду* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, a_k \in \mathbb{R}$ *задовольняють умови (2.1)-(2.3), то для довільного* $m \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$\left| \int_0^{\pi} \Big| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \cos kx \Big| dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_{m+k}|}{k} \right| \leq O(1)\Big(V_m(\alpha) + B_m(a)\Big), \quad (2.4)$$

де

$$V_m(\alpha) = \sum_{k=m}^{\infty} |\triangle \alpha_k|.$$

Наслідок 2.2. *Якщо коефіцієнти ряду* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, a_k \in \mathbb{R}$ *задовольняють умови (2.1)-(2.3), то має місце оцінка*

$$\int_0^{\pi} \Big|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\Big| dx \le O(1)\Big(V(a) + B(a)\Big). \tag{2.5}$$

Зазначимо, що теорема 2.1 допускає уточнення для довільного відрізку $[c_1, c_2] \subset [-\pi, \pi]$.

Теорема 2.2. (Теляковський С.О., [73, с. 84]). *Нехай коефіцієнти ряду*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ \ a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

прямують до нуля і задовольняють умови Боаса-Теляковського, крім того $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty$. *Тоді має місце рівномірна відносно* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *та* $c \in [0, \pi]$ *оцінка*

$$\Big| \int_c^{\pi} \Big|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big| dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m_*} \frac{\xi_k}{k} + \sum_{k=2m+1}^{\infty_*} \frac{|b_k|}{k} \Big| \le$$

$$\le M(V(a) + B_1^m(a) + B_m(a) + V(b) + B_1^m(b) + B_m(b)),$$

де числа ξ_k *означені вище, а* $\overset{*}{\sum}$ *означає, що в цій сумі взято лише ті доданки, для яких* $c \le \frac{\pi}{k}$.

Наступне твердження є узагальненням одного результату С.О. Теляковського [72] і отримано з використанням його методу. Дійсно провівши міркування аналогічно [72] і вважаючи, що коефіцієнти a_k є комплексними та використавши нерівність $\frac{|\Re a_k| + |\Im a_k|}{2} \le |a_k| \le |\Re a_k| + |\Im a_k|$ отримаємо:

Теорема 2.3. (Теляковський С.О., [72]). *Якщо коефіцієнти ряду* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, a_k \in \mathbb{C}$ *задовольняють умови (2.1)-(2.3), тоді цей ряд є збіжним і має місце оцінка для довільного* $s \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2s+1}}^{\pi} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \Big| dx - \sum_{k=1}^{s} \frac{|a_k|}{k} \right| \le O(1)\Big(V(a) + B(a)\Big). \tag{2.6}$$

Наступне твердження стосується співвідношень між деякими числовими сумами та рядами.

Лема 2.1. *Якщо послідовність чисел* $a = \{a_k\}$ *задовольняє умови (2.1)-(2.3) і послідовності* b, c *та* d *задані наступним чином:*

$$b = \{b_k\} = \begin{cases} 0, & \text{коли } k \in [0, n] \bigcup [2n+2, \infty), \\ \left(\frac{k}{n+1} - 2\right) a_k, & \text{коли } k \in [n+1, 2n+1], \end{cases}$$

$$c = \{c_k\} = \begin{cases} 0, & \text{коли } k \in [0, n], \\ \left(\frac{k}{n+1} - 1\right) a_k, & \text{коли } k \in [n+1, 2n+1], \\ a_k, & \text{коли } k \ge 2n+2, \end{cases}$$

та

$$d = \{d_k\} = \begin{cases} \left(\frac{k}{n+1} - 1\right) a_k, & \text{коли } k \in [0, n], \\ 0, & \textit{коли } k > n. \end{cases}$$

Тоді мають місце співвідношення

$$B_n(b) \le M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big), \tag{2.7}$$

$$B_n(c) \le M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big), \tag{2.8}$$

та

$$B_n(d) \le M\Big(V_n(a) + B_n(a)\Big). \tag{2.9}$$

Доведення. Доведемо спочатку співвідношення (2.7). Для скорочення запису позначимо

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases} 0, & \textit{коли } k\in[0,n]\bigcup[2n+2,\infty),\\ 2-\frac{k}{n+1}, & \textit{коли } k\in[n+1,2n+1],\end{cases}$$

тоді $b_k=-\lambda_k^{(n)}a_k$ та

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle b_{n+k-\nu}-\triangle b_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|=$$

$$=\sum_{k=2}^{2n+2}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})-\triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}a_{n+k+\nu})}{\nu}\Big|=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})-\triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}a_{n+k+\nu})}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n+2}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})}{\nu}\Big|=:\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Оцінимо спочатку Σ_2, застосувавши перетворення Абеля, отримаємо

$$\Sigma_2:=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})}{\nu}\Big|=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu}}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu+1}^{(n)}a_{n+k-\nu+1}}{\nu}\Big|=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu}}{\nu}-\sum_{\nu=0}^{[k/2]-1}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu}}{\nu+1}\Big|=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\Big|\frac{\lambda_{n+k-[k/2]}^{(n)}a_{n+k-[k/2]}}{[k/2]}-\lambda_{n+k}^{(n)}a_{n+k}+\sum_{\nu=1}^{[k/2]-1}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu}}{\nu(\nu+1)}\Big|\le$$

$$\le\max_{n+1\le k\le 2n+2}\lambda_k^{(n)}|a_k|\sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{[k/2]}+\lambda_{2n+1}^{(n)}|a_{2n+1}|+$$

$$+\max_{n+1\le k\le 2n+2}|a_k|\sum_{k=n+1}^{2n+2}\sum_{\nu=1}^{[k/2]-1}\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\Big(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\Big). \qquad (2.10)$$

Розглянемо суму

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2}\sum_{m=1}^{[k/2]-1}\lambda_{n+k-m}^{(n)}\Big(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\Big)=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{2n+2}\sum_{m=k-[k/2]+1}^{k-1}\lambda_{n+m}^{(n)}\Big(\frac{1}{k-m}-\frac{1}{k-m+1}\Big)=$$

$$=\sum_{k=n+2}^{2n+2}\sum_{m=k-[k/2]+1}^{k-1}\lambda_{n+m}^{(n)}\Big(\frac{1}{k-m}-\frac{1}{k-m+1}\Big)+$$

$$+\sum_{m=n-[(n+1)/2]+2}^{n}\lambda_{n+m}^{(n)}\Big(\frac{1}{n+1-m}-\frac{1}{n+2-m}\Big)\le$$

$$\le\sum_{m=n+2-[n/2]}^{n+1}\sum_{k=2m}^{2n+2}\Big(2-\frac{n+m}{n+1}\Big)\Big(\frac{1}{k-m}-\frac{1}{k-m+1}\Big)+$$

$$+\max_{n+1\le m\le 2n}\lambda_m^{(n)}\sum_{m=n+2-[(n+1)/2]}^{n}\Big(\frac{1}{n+1-m}-\frac{1}{n+2-m}\Big)\le M.$$

Згідно співвідношення (2.1) має місце нерівність $|a_n|\le V_n(a)$, тому остаточно з (2.10) отримаємо оцінку

$$\Sigma_2\le MV_n(a).$$

Оцінимо тепер Σ_1. Зауважимо, що при $k\ge n$ будуть виконуватись наступні співвідношення

$$\triangle\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}-1, & \text{коли } k=n,\\ \frac{1}{n+1}, & \text{коли } k\in[n+1,2n+1],\\ 0, & \text{коли } k\in[2n+2,\infty),\end{cases}$$

та

$$\triangle^2\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} -1-\frac{1}{n+1}, & \text{коли } k=n, \\ \frac{1}{n+1}, & \text{коли } k=2n+1, \\ 0, & \text{при всіх інших } k>n, \end{cases}$$

тоді

$$\Sigma_1 = \sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle(\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}a_{n+k-\nu})-\triangle(\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}a_{n+k+\nu})}{\nu}\Big| \le$$

$$\le \sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{a_{n+k-\nu}\triangle\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-a_{n+k+\nu}\triangle\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big| =: \Sigma_1^1+\Sigma_1^2.$$

Для оцінки Σ_1^1 використаємо нерівність ([73], лема 1)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\alpha_{k-m}-\triangle\alpha_{k+m}}{m}\Big| \le M\sum_{k=1}^{\infty}k\triangle^2|\alpha_{k-1}|, \tag{2.11}$$

в якій покладемо $\triangle\alpha_k = a_{n+k}\triangle\lambda_{n+k}^{(n)}$, тому

$$\triangle^2\alpha_k = \triangle a_{n+k}\triangle\lambda_{n+k}^{(n)} + a_{n+k+1}\triangle^2\lambda_{n+k+1}^{(n)} =$$

$$= \begin{cases} -\triangle a_n, & \text{коли } k=0, \\ \frac{\triangle a_{n+k}}{n+1}, & \text{коли } k\in[1,n], \\ \frac{\triangle a_{2n+1}}{n+1}+\frac{a_{2n+1}}{n+1}, & \text{коли } k=n+1, \\ 0, & \text{при } k\ge n+2. \end{cases}$$

Отже,

$$\Sigma_1^1 \le |\triangle a_n| + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+1}|\triangle a_{n+k}| + |a_{2n+1}| \le MV_n(a).$$

Оцінимо Σ_1^2

$$\Sigma_1^2=\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|\le$$

$$\le\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k-\nu}-\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\Big|.$$

Оцінимо другий доданок останнього співвідношення, для цього помітимо, що при $k\ge n$ справедливе співвідношення

$$\lambda_k^{(n)}=2-\frac{\min\{k,2n+2\}}{n+1},$$

тому

$$\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\Big|\le$$

$$\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{n+k+\nu,2n+2\}-\min\{n+k-\nu,2n+2\}}{\nu}\le$$

$$\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{n+k+\nu,2n+2\}-n-k+\nu}{\nu}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\frac{\min\{2\nu,n-k+\nu+2\}}{\nu}.$$

Оскільки величина

$$\frac{\min\{2\nu,n-k+\nu+2\}-n+k-\nu}{\nu}$$

при заданих значеннях параметрів n, k та ν є обмеженою, то будемо мати остаточно

$$\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\triangle a_{n+k+\nu}\frac{\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}-\lambda_{n+k+\nu}^{(n)}}{\nu}\Big|\le\frac{M}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\sum_{\nu=1}^{[k/2]}|\triangle a_{n+k+\nu}|\le MV_n(a).$$

Отже,

$$\Sigma_1^2\le\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\lambda_{n+k-\nu}^{(n)}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+MV_n(a)=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\Big(2-\frac{n+k-\nu}{n+1}\Big)\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+MV_n(a)\le$$

$$\le\sum_{k=2}^{n}\Big(2-\frac{n+k}{n+1}\Big)\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\nu}{n+1}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+MV_n(a)\le$$

$$\le M\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{\nu}\Big|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{[k/2]}\frac{\triangle a_{n+k-\nu}-\triangle a_{n+k+\nu}}{n+1}\Big|+MV_n(a)\le M\Big(V_n(a)+B_n(a)\Big).$$

Склавши отримані оцінки разом отримаємо співвідношення (2.7) леми. Співвідношення (2.8) слідує із (2.7), дійсно, легко бачити

$$B_n(c)-B_n(a)\le B_n(b).$$

Оцінка співвідношення (2.9) проводиться за схемою оцінювання величини Σ_1.

Лему доведено.

2.2. Нерівність типу Лебега на класі диференційовних функцій $C^{\bar{\psi}}C$

В цьому підрозділі буде встановлено нерівність типу Лебега класі диференційовних функцій $C^{\bar{\psi}}C$, коли послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ задовольняють умови Боаса-Теляковського.

Теорема 2.4. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ задовольняють умови (2.1) – (2.3) і $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$. Тоді для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+O(1)(V_{n+1}(a)+V_{n+1}(b)+B_{n+1}(a)+B_{n+1}(b))\Bigg)E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \qquad (2.12)$$

Окрім того, нерівність (2.12) є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ в тому розумінні, що $\forall \varepsilon \in P_0$ існує $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ така, що

$$\|\rho_n(f_*;x)\|_C = \Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+O(1)(V_{n+1}(a)+V_{n+1}(b)+B_{n+1}(a)+B_{n+1}(b))\Bigg)\varepsilon_n. \qquad (2.13)$$

Доведення. Як відомо [73], умови теореми на послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ забезпечують те, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції з простору L і для $\rho_n(f;x)$, $f \in C^{\bar{\psi}}C$ згідно твердження 1.1 має місце інтегральне представлення (див. [61, с. 178])

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(u)F_n(\bar{\psi};x-u)du, x \in [-\pi,\pi],$$

де $F_n(\bar{\psi};x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx)$.

Нехай $t_n^*\in T_n$ — поліном найкращого наближення функції $f^{\bar{\psi}}$. Тоді, очевидно,

$$\rho_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\bar{\psi}}(u)-t_n^*(u))F_n(\bar{\psi};x-u)du$$

і

$$\|\rho_n(f;x)\|_C\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f^{\bar{\psi}}(u)-t_n^*(u)\|_C|F_n(\bar{\psi};x-u)|du=$$
$$=\frac{1}{\pi}E_n(f^{\bar{\psi}})_C\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du. \qquad (2.14)$$

Аналогічно як і в [61, с.312], використовуючи формулу С.О. Теляковського [73, теорема 1] (див. також [61, с.56]) покладаючи в ній $a_k=b_k=0$ при $k\leq n$; $a_k=\psi_1(k)$, $b_k=\psi_2(k)$ при $k>n$ та $m=n+1$ отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du=$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$
$$+O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big). \qquad (2.15)$$

Об'єднуючи (2.14) та (2.15) отримуємо (2.12).

Для доведення другої частини теореми достатньо для заданого $\varepsilon\in P_0$ вказати функції $\widetilde{\varphi}\in C_\varepsilon$, $f_*\in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$, такі, що $(f_*)^{\bar{\psi}}=\widetilde{\varphi}$, $E_n(\widetilde{\varphi})_C=\varepsilon_n$ і

$$\|\rho_n(f_*;x)\|_C\geq\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$
$$+O(1)\big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\big)\Bigg)\varepsilon_n.$$

З цією метою розглянемо функцію

$$g_n(-x)=signF_n(\bar{\psi};x),|x|\leq\frac{\pi}{2}.$$

Позначимо через $\widetilde{g}_n(-x), |x| \le \frac{\pi}{2}$ неперервну функцію, що співпадає з $g_n(-x)$ при $|x| \le \frac{\pi}{2}$, за винятком неперетинних δ-околів точки 0 та точок розриву x_k, де вона лінійна та її графік сполучає точки $(-\delta, g_n(-\delta))$ і $(\delta, g_n(\delta))$, а також $(x_k - \delta, g_n(x_k - \delta))$ та $(x_k + \delta, g_n(x_k + \delta))$.

Продовжимо функцію $\widetilde{g}_n(-x)$ неперервно на $[-\pi, \pi]$ так, щоб $\widetilde{g}_n(-\pi) = \widetilde{g}_n(\pi)$, $|\widetilde{g}_n(-x)| \le 1$ і на $[-\pi, \pi]$ було не менше $2n$ точок c_i, в яких $|\widetilde{g}_n(-c_i)| = 1$, в цих точках функція $\widetilde{g}_n(-x)$ почергово змінює знак і щоб при цьому мала місце рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}_n(-x)dx = 0.$$

Тоді $\widetilde{\varphi} \in C$, і оскільки згідно з теоремою Чебишова [61, с. 68] поліном найкращого наближення порядку n функції $\widetilde{g}_n(-x)$ є тотожним нулем, то $E_n(\widetilde{\varphi})_C = \varepsilon_n$, тобто $\widetilde{\varphi} \in C_\varepsilon$. Нехай далі $\Phi_n(-x)$ — $\bar{\psi}$-інтеграл функції $\widetilde{\varphi}(n; -x)$, тобто $\big(\Phi_n(-x)\big)^{\bar{\psi}} = \widetilde{\varphi}(n; -x)$. Покладемо $f_* = \Phi_n$. Тоді, зрозуміло, що $f_* \in C^{\bar{\psi}} C_\varepsilon$ і

$$\begin{aligned} \|\rho_n(f^*; x)\|_C = \|\rho_n(\Phi_n; x)\|_C \ge \\ \ge |\rho_n(\Phi_n; 0)| = \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}(n; -u) F_n(\bar{\psi}; u) du \right| \ge \\ \ge \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F_n(\bar{\psi}; u)| du - \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{\pi/2 \le |u| \le \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du = \\ = \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du - \frac{2\varepsilon_n}{\pi} \int\limits_{\pi/2 \le |u| \le \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Отже,

$$\|\rho(f_*; x)\|_C \ge \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du + O\left(\varepsilon_n \int_{\pi/2 \le |u| \le \pi} |F_n(\bar{\psi}; u)| du \right). \tag{2.17}$$

Для оцінки $\int_{\pi/2\le u\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du$ використаємо один результат С.О. Теляковського [73, теорема 2], пов'язаний з оцінкою інтегралу $\int_c^\pi|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)|dx$, де $c\in[0,\pi]$ в якому слід покласти $a_k=b_k=0$ при $k\le n$; $a_k=\psi_1(k), b_k=\psi_2(k)$ при $k>n$ та $m=n$.

Тоді

$$\int_{\pi/2\le u\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}{}^{*}\frac{\xi_k}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}{}^{*}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big),$$

де

$$\xi_k=\xi\big(\psi_2(k),\sqrt{(\psi_1(n-k)-\psi_1(n+k))^2+(\psi_2(n-k)-\psi_2(n+k))^2}\big),$$

функція $\xi(t,u)$ визначається рівностями

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|t|, & \text{при } |u|\le|t|,\\ |t|\arcsin\left|\frac{t}{u}\right|+\sqrt{u^2-t^2}, & \text{при } |t|<|u|.\end{cases}$$

а Σ^* означає, що в цій сумі взяті лише ті доданки, для яких $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{k}$,

Тому

$$\int_{\pi/2}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du=O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big). \tag{2.18}$$

Аналогічним способом отримуємо

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2}|F_n(\bar{\psi};u)|du=$$

$$=O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big). \tag{2.19}$$

Нарешті, із (2.17) з урахуванням (2.15), (2.18) і (2.19) отримуємо шукану оцінку знизу для $\|\rho_n(f_*;x)\|_C$.

Теорему доведено.

Зауваження. У випадку, коли ψ_1, ψ_2 є опуклими донизу функціями, як встановлено О.І. Степанцем (див., наприклад, [61, с.27]) рівність (2.13), є асимптотично точною, тобто залишковий член має порядок менший від порядку головного члена. Асимптотично точною формула (2.13) буде, зокрема, і у випадку монотонно спадних до 0 послідовностей, тобто коли $\psi_1(k) \geq \psi_1(k+1)$,$\psi_2(k) \geq \psi_2(k+1)$ за умов $\lim \psi_1(k) = 0$, $\lim \psi_2(k) = 0$, $k \longrightarrow \infty$. Дійсно, тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\triangle\psi_1(k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \triangle\psi_1(k) = \psi_1(n+1)$$

та має місце оцінка (доведення див. [24, с. 102])

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi_1(k+n+1-l) - \triangle\gamma(k+n+1+l)}{l} \right| \leq M\psi_1(n+1).$$

Аналогічні нерівності справедливі і для ψ_2. Прикладами таких послідовностей є наступні: $\psi(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\left|\sin k\frac{\pi}{2}\right|$, [24, с. 104]; або $\triangle\psi(2^s) = \frac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k) = 0, k \neq 2^s$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\psi(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \triangle\psi(k)$ [84, с. 217].

2.3. Оцінка групи відхилень $\overline{\psi}$-диференційовних функцій

У цьому підрозділі на множині функцій $C^{\bar{\psi}}C$ будуть досліджуватись величини

$$H_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ та } H_n^p(f;\lambda;x) = \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k|\rho_k(f;x)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda = \{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 2.5. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та, крім того, виконується $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$. Тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C$ та довільного $0 < p < \infty$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце нерівність*

$$H_n^p(f;x) \leq M_p\left(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)| + |\triangle^2\psi_2(k)|)\right)E_n(f^{\overline{\psi}}). \qquad (2.20)$$

Доведення. Нехай t_n — тригонометричний поліном найкращого наближення порядку не вище n функції $f^{\overline{\psi}}$. Будемо спочатку вважати, що $2 \leq p < \infty$. Враховуючи твердження 1.1 та ортогональність тригонометричної системи функцій отримаємо наступне співвідношення

$$H_n^p(f;x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\overline{\psi}}(x+t) - t_n(x+t))\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t + \psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далі скориставшись нерівностями

$$|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p), p \geq 1$$

та

$$|a+b|^p \le \big(|a|^p + |b|^p\big), 0 \le p \le 1,$$

отримаємо

$$H_n^p(f;x) \le M_p \Bigg(\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f^{\overline{\psi}}(x+t)-t_n(x+t))\times$$

$$\times \sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t + \psi_2(\nu)\sin\nu t)dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f^{\overline{\psi}}(x-t)-t_n(x-t)\big)\times$$

$$\times \sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t - \psi_2(\nu)\sin\nu t)dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg) = M_p(H_+(\overline{\psi}) + H_-(\overline{\psi})). \tag{2.21}$$

Оцінимо спочатку перший доданок у правій частині рівності (2.21)

$$H_+(\overline{\psi}) \le$$

$$\le M_p\Bigg(\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{k}}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t + \psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_1(\nu)\cos\nu t dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_2(\nu)\sin\nu t dt\Big|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg) =$$

$$= M_p(I_1(\overline{\psi}) + I_2(\overline{\psi}) + I_3(\overline{\psi})),$$

де

$$\Delta_n(f) = \Delta_n(f^{\overline{\psi}}, t_n, x, t) = f^{\overline{\psi}}(x+t) - t_n(x+t).$$

Для оцінки величини $I_1(\overline{\psi})$ скористаємося співвідношенням, що є наслідком теорем 2.1 та 2.2 [73]

$$\Big|\int_0^{\frac{\pi}{m}}\Big|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kt+b_k\sin kt\big)\Big|dt-\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}\Big|\leq$$
$$\leq M\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}(|\triangle^2 a_{k-1}|+|\triangle^2 b_{k-1}|)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=m}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2 a_k|+|\triangle^2 b_k|)\right). \qquad (2.22)$$

Тоді

$$I_1(\overline{\psi})\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\big(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t\big)dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq E_n(f^{\overline{\psi}})\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}}\Big|\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\psi_1(\nu)\cos\nu t+\psi_2(\nu)\sin\nu t)\Big|dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, поклавши в (2.22) $m=k$ та $a_\nu=b_\nu=0$ при $\nu\leq k$; $a_\nu=\psi_1(\nu)$, $b_\nu=\psi_2(\nu)$ при $\nu>k$, отримаємо

$$I_1(\overline{\psi})\leq M_pE_n(f^{\overline{\psi}})\left(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|\big)\right).$$

Для оцінки I_2 до суми під інтегралом двічі застосуємо перетворення Абеля:

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_1(\nu)\cos\nu t=$$

$$=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)F_\nu(t)-(k+1)\triangle\psi_1(k+1)F_k(t)-\psi_1(k+1)D_k(t),$$

де

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin{(k+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

та

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{\sin^2 kt}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Тоді

$$I_2(\overline{\psi}) \le M_p\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)D_k(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}\Delta_n(f)D_k(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{(k+1)\triangle\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)F_k(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\Delta_n(f)\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)F_\nu(t)dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Враховуючи, що мають місце наступні нерівності та співвідношення

$$F_\nu(t) \ge 0, t\in[-\pi,\pi] \text{ та } \int_{\frac{\pi}{\nu}}^{\pi}F_\nu(t)dt \le \int_{-\pi}^{\pi}F_\nu(t)dt = \pi,$$

$$(n+1)|\triangle\psi_1(n+1)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)|,$$

$$|\psi_1(n+1)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)|,$$

$$D_k(t) = \frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}}+\frac{\cos kt}{2},$$

$$|D_k(t)| \le \frac{K}{t}, t\in\left[\frac{\pi}{k},\pi\right], \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}|D_k(t)|dt \le \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{K}{t}dt \le K,$$

а також те, що функція $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{t}$ є обмеженою при $t\in\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$, остаточно отримаємо

$$I_2(\overline{\psi}) \le M_p\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+E_n(f^{\overline{\psi}})\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_1(k)|\Bigg).$$

Аналогічно проводиться оцінка $I_3(\overline{\psi})$:

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\psi_2(\nu)\sin\nu t=\sum_{\nu=k+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi_1(\nu)\triangle^2\psi_1(\nu)\overline{F}_\nu(t)-$$

$$-(k+1)\triangle\psi_1(k+1)\overline{F}_k(t)-\psi_1(k+1)\overline{D}_k(t),$$

де

$$\overline{D}_k(t)=-\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}+\sum_{\nu=1}^{k}\sin\nu t=-\frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

та

$$\overline{F}_k(t)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\overline{D}_\nu(t)=-\frac{\sin(k+1)t}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Також, зауважимо, що мають місце наступні співвідношення

$$\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\left|\overline{F}_k(t)\right|dt\le M\int_{\frac{\pi}{k}}^{\pi}\frac{1}{4(k+1)t^2}dt\le K,$$

$$\overline{D}_k(t)=\frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\cos kt}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin kt}{2},$$

$$|\overline{D}_k(t)|\le\frac{K}{t},t\in\left[\frac{\pi}{k},\pi\right],\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}|\overline{D}_k(t)|dt\le\int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{K}{t}dt\le K,$$

тому

$$I_3(\overline{\psi})\le M_p\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\frac{\psi_2(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$+E_n(f^{\overline{\psi}})\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi_2(k)|\Bigg).$$

Об'єднавши оцінки величин $I_1(\overline{\psi})$, $I_2(\overline{\psi})$ та $I_3(\overline{\psi})$, отримаємо

$$H_+(\overline{\psi})\le M_p\Bigg(E_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|\big)\Bigg)+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{\psi_1(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{\psi_2(k+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg)\leq$$

$$\leq M_p\Bigg(E_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\Bigg)+$$

$$+\max_{n+1\leq k\leq 2n}|\psi_1(k)|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\max_{n+1\leq k\leq 2n}|\psi_2(k)|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg)\leq$$

$$\leq M_pE_n(f^{\overline{\psi}})\Bigg(\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\Bigg)+$$

$$+M_p\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)(|\triangle^2\psi_1(k)|+|\triangle^2\psi_2(k)|)\right)\times$$

$$\times\Bigg(\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg).$$

Далі позначимо через S суму двох доданків

$$S=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\sin kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\Delta_n(f)\frac{\cos kt}{t}dt\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

і для її оцінки при фіксованих x та n покладемо

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{\Delta_n(f)}{t} & \text{при } t\in[\frac{\pi}{n},\pi],\\ 0, & \text{при інших значеннях } t.\end{cases}$$

Коефіцієнти Фур'є цієї функції позначимо через $\alpha_k=\alpha_k(\varphi_n)$ та $\beta_k=\beta_k(\varphi_n)$, тоді

$$S=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\beta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оскільки $1<p'\leq 2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, то можемо використати теорему Хаусдорфа–Юнга [27, с. 153], згідно з якою

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\|\varphi_n\|_{p'}\leq\frac{1}{\pi n^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{|\Delta_n(f)|^{p'}}{t^{p'}}dt\right)^{\frac{1}{p'}}\leq$$

$$\leq M_pE_n(f^{\overline{\psi}})n^{-\frac{1}{p}}n^{\frac{p'-1}{p'}}=M_pE_n(f^{\overline{\psi}})n^{1-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}=M_pE_n(f^{\overline{\psi}}).$$

Аналогічно

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\beta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq M_pE_n(f^{\overline{\psi}}).$$

Отже,

$$S \leq M_p E_n(f^{\overline{\psi}})$$

і тому

$$H_+(\overline{\psi}) \leq M_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} \quad + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right).$$

Оцінка величини $H_-(\overline{\psi})$ із співвідношення (2.21) проводиться аналогічно і має місце нерівність

$$H_-(\overline{\psi}) \leq M_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} \quad + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right),$$

тому з (2.21) слідує

$$H_n^p(f; x) \leq M_p E_n(f^{\overline{\psi}}) \left(\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} \quad + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)(|\triangle^2 \psi_1(k)| + |\triangle^2 \psi_2(k)|) \right),$$

У випадку $2 \leq p < \infty$ теорема доведена.

Оцінка (2.20) у випадку $0 < p < 2$ слідує з доведеного, для цього слід використати наслідок з нерівності Гельдера [82, c. 41], тобто

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(f; x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |\rho_k(f; x)|^s \right)^{\frac{1}{s}},$$

де $0 < p \leq s$.

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо в умові теореми 1 послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ є опуклими, то співвідношення (2.20) раніше було встановлено О. І. Степанцем (див., наприклад, [60] чи [61], с. 369).

Теорема 2.6. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що прямують до нуля, є квазіопуклими та крім того виконується співвідношення $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$, λ_k — незростаюча послідовність невід'ємних чисел, і числа $\beta_k = \lambda_k \alpha_k^p$, де*

$$\alpha_k = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\big(|\triangle^2\psi_1(k)| + |\triangle^2\psi_2(k)|\big),$$

не зростають. Тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C$ та довільного $0 < p < \infty$ у всіх точках $x \in [-\pi, \pi]$ має місце нерівність

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq M_p \left(n\lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right).$$

Доведення. Покладемо $n_0 = n$, $n_1 = 2n_0, \ldots, n_i = 2n_{i-1}, \ldots$ Тоді

$$H_n^p(f;\lambda;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{n_i} \sum_{k=n_i}^{2n_i-1} |\rho_k(f;x)|^p.$$

Для оцінки останнього виразу застосуємо теорему 1 і отримаємо

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq M_p \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{n_i} n_i \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}).$$

Оскільки за умовою теореми справедлива нерівність $\lambda_k \alpha_k^p \geq \lambda_{k+1} \alpha_{k+1}^p$, то для всіх k таких, що $n_{i-1} \leq k \leq 2n_{i-1} - 1 < n_i$ буде мати місце $\lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \leq \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}})$, а значить

$$\lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) = \frac{1}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}),$$

тоді

$$H_n^p(f;\lambda;x) \leq$$

$$\leq M_p \left(\lambda_{n_0} n_0 \alpha_{n_0}^p E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{n_{i-1}} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_{n_i} \alpha_{n_i}^p E_{n_i}^p(f^{\overline{\psi}}) \right) \leq$$

$$\leq M_p \left(\lambda_{n_0} n_0 \alpha_{n_0}^p E_{n_0}^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right) \leq$$

$$\leq M_p \left(n\lambda_n \alpha_n^p E_n^p(f^{\overline{\psi}}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^p E_k^p(f^{\overline{\psi}}) \right).$$

Теорему доведено.

Якщо в теоремі 2 покласти $n = 0$ і задати послідовність λ_k так

$$\lambda_k = \lambda_k^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m+1}, & \text{при } k \in [0,m], \\ 0, & \text{при } k \geq m+1, \end{cases}$$

то отримаємо такий наслідок

Наслідок. 2.3. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ є квазіопуклими та виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$, тоді для довільної функції $f \in C^{\overline{\psi}}C$ та довільного $0 < p < \infty$ має місце така нерівність*

$$\sum_{k=0}^{m} |\rho_k(f;x)|^p \leq M_p \alpha_0^p \sum_{k=0}^{m} E_k^p(f^{\overline{\psi}}).$$

2.4. Нерівність типу Лебега-Ландау на класі аналітичних в крузі функцій H^{ψ}_{∞}

В цьому підрозділі знайдено оцінки відхилень сум Тейлора на класах аналітичних функцій $H^{\psi}_{\infty} = \{f(z) \in H_{\infty}, |f^{\psi}(z)| \leq 1, z \in D\}$, виражені через найкращі наближення ψ-похідних функцій, а також отримано асимптотичні рівності для точних верхніх граней відхилень сум Тейлора від функцій з цих же класів.

Має місце наступна лема:

Лема 2.2. *Якщо послідовність комплексних чисел* $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ *є такою, що для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *тригонометричний ряд*

$$2\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kx + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k\psi(k)}{n+1}\cos kx-$$

$$-i\sum_{k=n+1}^{2n+1}\Big(2-\frac{k}{n+1}\Big)\psi(k)\sin kx + 2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kx$$

є рядом Фур'є деякої сумовної 2π*-періодичної функції* $\Psi_1(x)$*, то клас* H^{ψ}_{∞} *складається з аналітичних в* D *і неперервних в* $\overline{D}$ *функцій* f*, граничні значення яких на колі* T *зображаються у вигляді згортки*

$$f(e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\theta)dt,$$

де $f^{\psi} \in L_{\infty}(T)_{+}$ *і* $\|f^{\psi}\|_{L_{\infty}(T)} \leq 1$.

Доведення. За означенням клас H^{ψ}_{∞} складається з функцій $f \in A(D)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, z \in D$$

і таких, що ψ-похідна $f^{\psi} \in UH_{\infty}$, тому майже скрізь на колі існують недотичні граничні значення, які будемо позначати також через f^{ψ} і

$f^\psi \in\ L_\infty(T)_+$, а значить, для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливе співвідношення (див., наприклад, [16], стор. 394)

$$\int_T f^\psi(w) w^k dw = 0.$$

Крім того, має місце представлення

$$a_k = \frac{\psi(k)}{2\pi i} \int_T \frac{f^\psi(w)}{w^{k+1}} dw,$$

підставивши яке у формулу (1.4), отримаємо

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_T f^\psi(w) \sum_{k=1}^\infty \psi(k)(z\overline{w})^k \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_T f^\psi(w) \Bigg(\sum_{k=1}^\infty \psi(k)(z\overline{w})^k + \sum_{k=1}^\infty \mu(k)(\overline{z}w)^k \Bigg) \frac{dw}{w},\ z \in D,$$

де послідовність $\mu(k)$ вибрано наступним чином

$$\mu(k) = \begin{cases} \psi(k), & \text{при } k \in [1, n], \\ \Big(-1 + \frac{k}{n+1} \Big) \psi(k), & \text{при } k \in [n+1, 2n+1], \\ \psi(k), & \text{при } k \geq 2n+2. \end{cases}$$

Покладемо $z = re^{i\theta}, r \in [0, 1)$ та $w = e^{it}$ і спростимо вираз в дужках під інтегралом

$$\sum_{k=1}^\infty \psi(k)(z\overline{w})^k + \sum_{k=1}^\infty \mu(k)(\overline{z}w)^k = \sum_{k=1}^\infty \psi(k) r^k e^{-ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^\infty \mu(k) r^k e^{ik(t-\theta)} = \sum_{k=1}^\infty \psi(k) r^k e^{-ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \psi(k) r^k e^{ik(t-\theta)} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1 + \frac{k}{n+1}) \psi(k) r^k e^{ik(t-\theta)} +$$

$$+ \sum_{k=2n+2}^\infty \psi(k) r^k e^{ik(t-\theta)} =: \Psi_r(t-\theta).$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо

$$\Psi_r(t-\theta) = 2\sum_{k=1}^{n}\psi(k)r^k\cos k(t-\theta) + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k}{n+1}\psi(k)r^k\cos k(t-\theta) -$$

$$-i\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)r^k\sin k(t-\theta) +$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)r^k\cos k(t-\theta),\ 0<r<1.$$

Оскільки за умовою теореми $\Psi_1 \in L$, то згідно [17, с. 54]

$$\Psi_r(t-\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1(t-\tau)P_r(\theta-\tau)d\tau,$$

де

$$P_r(\theta-\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos k(\theta-\tau) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2)}.$$

Тому

$$f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{it})\Psi_r(t-\theta)dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\tau)P_r(\theta-\tau)d\tau dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2}d\tau, \tag{2.23}$$

де

$$F(\tau) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{it})\Psi_1(t-\tau)dt.$$

Відомо (див. наприклад [61, с.138]), що функція F як згортка двох $2\pi-$періодичних функцій $f^{\psi}(e^{it}) \in L_{\infty}(T)$ та $\Psi_1(t) \in L_1(T)$ є $2\pi-$періодичною та неперервною на $[0, 2\pi)$ функцією. Тому інтеграл (2.23) є інтегралом Пуассона неперервної функції і за теоремою Фату він має некутові граничні значення, отже, функція f неперервно продовжується в замкнений круг $\overline{D}$ і буде виконуватись $f(e^{it}) = \lim_{z\to e^{it}} f(z) = F(t)$.

Лему 2.2 доведено.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.7. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \ldots$ — послідовність для якої виконуються умови (2.1)–(2.3) та $\psi(k) \neq 0$. Тоді для довільної функції $f \in H^{\psi}_{\infty}$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_n(f, z)\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big)\right)E_n(f^{\psi}). \tag{2.24}$$

Крім того існує функція $\Phi(z) \in H^{\psi}_{\infty}$, така що $\Phi^{\psi}(z) = \varphi(z) \in UH_{\infty}$, для якої в (2.24) матиме місце рівність, тобто

$$\|\rho_n(\Phi, z)\|_{\infty} = \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi) + B_n(\psi)\Big)\right)E_n(\varphi), \tag{2.25}$$

де $O(1)$ — величина рівномірно обмежена по n та f,

$$V_n(\psi) = \sum_{k=n}^{\infty}|\triangle\psi(k)|$$

та

$$B_n(\psi) = \sum_{k=2}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi(n+k-m) - \triangle\psi(n+k+m)}{m}\Big|.$$

Доведення. З леми 2.2 згідно принципу максимуму модуля слідуватиме співвідношення

$$\|f(z) - S_n(f, z)\|_{\infty} = \|f(e^{it}) - S_n(f, e^{it})\|_{L_{\infty}(T)}.$$

Отже задача отримання нерівності типу Лебега-Ландау на класі H^{ψ}_{∞} зводиться до отримання аналогічних нерівностей на класі $L^{\psi}_{\infty}(T)_{+}$.

Для $f \in H_{\infty}^{\psi}$ граничні значення будемо позначати тим самим символом $f(e^{i\theta})$, $f \in L_{\infty}^{\psi}(T)_{+}$. З урахуванням леми 2.2 можемо записати

$$f(e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\Big(2\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kt-$$

$$-2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt, \qquad (2.26)$$

Аналогічно

$$S_n(f,e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kt dt,$$

тому

$$\rho_n(f,e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\Big(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt, \qquad (2.27)$$

Нехай $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k$ — поліном степеня не вище n, який є поліномом найкращого наближення функції f^{ψ}. Легко перевірити, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(e^{i(t+\theta)})\Big(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos k+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt = 0,$$

тому

$$\rho_n(f,e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) - p_n(e^{i(t+\theta)}))\cdot$$

$$\cdot\Big(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt, \tag{2.28}$$

Тоді з (2.28) отримаємо

$$\|\rho_n(f,e^{i\theta})\|_\infty \le E_n(f^\psi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos ktdt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\Big|dt+E_n(f^\psi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big|dt, \tag{2.29}$$

До дійсної та уявної частин підінтегральної функції першого доданку останнього співвідношення застосуємо (2.4) взявши $m=n$. Врахувавши (2.8) та нерівність $\frac{|\Re z|+|\Im z|}{2}\le |z|\le |\Re z|+|\Im z|$ отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt\Big|dt=O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

Таким чином з (2.29) будемо мати

$$\|\rho_n(f,e^{i\theta})\|_\infty \le E_n(f^\psi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-ikt}\Big|dt+$$

$$+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))\Big) \tag{2.30}$$

Згідно співвідношень (2.5) та (2.9) має місце оцінка

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\cos kt\Big|dt\le O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)),$$

з урахуванням якої (2.30) матиме вигляд

$$\|\rho_n(f,e^{i\theta})\|_\infty \le E_n(f^\psi)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\sin kt\Big|dt+$$

$$+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))\Big) \qquad (2.31)$$

До інтегралу в правій частині (2.31) застосуємо оцінки (2.6) та (2.9), отже,

$$\int_{0}^{\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\sin kt\Big|dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(1-\frac{k}{n+1})|\psi(k+n+1)|+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}|\psi(k+n+1)|+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)) \qquad (2.32)$$

З урахуванням (2.32) остаточно отримаємо

$$\|\rho_n(f,z)\|_\infty \le \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big)\right)E_n(f^\psi).$$

Першу частини теореми доведено. Для доведення другої частини теореми досить отримати для деякої функції $\Phi\in H_\infty^\psi$ оцінку знизу, тобто нам слід показати існування такої функції $\varphi\in UH_\infty$, що $\Phi^\psi(\cdot)=\varphi(\cdot)$ та

$$\|\rho_n(\Phi,z)\|_\infty \ge \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k}+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

Використавши нерівність $|\rho_n(\Phi,1)|\le\|\rho_n(\Phi,z)\|_\infty$ з співвідношення (2.27) та (2.8), отримаємо

$$|\rho_n(\Phi,e^{i0})|=\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\Big(2\sum_{k=n+1}^{2n+1}(\frac{k}{n+1}-1)\psi(k)\cos kt+$$

$$+2\sum_{k=2n+2}^{\infty}\psi(k)\cos kt+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}\Big)dt\Bigg| =$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=n+2}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}dt\right|+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)). \tag{2.33}$$

Проведемо наступні перетворення інтегралу

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=n+2}^{2n+1}(2-\frac{k}{n+1})\psi(k)e^{-ikt}dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(e^{it})\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-i(k+n+1)t}dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{-ikt}dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\Big(2\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\cos kt-$$

$$-i\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\sin kt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\cos kt\Big)dt=$$

$$=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)\cos kt dt-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{ikt}dt.$$

Використавши оцінки (2.5) та (2.9) з останнього співвідношення та (2.33) отримаємо наступну оцінку

$$|\rho_n(\Phi,e^{i0})|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)e^{ikt}dt\right|+$$

$$+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)). \tag{2.34}$$

Розглянемо поліном $P_n(z)=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)z^k$, за його коефіцієнтами можемо побудувати многочлен $Q_{2n}(z)$ порядку $2n$ та функцію φ з нижче вказаними властивостями.

Як відомо [16, с. 489, теорема 6] існує єдиний многочлен $Q_{2n}(z)$ виду

$$Q_{2n}(z)=(\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu)^2(\beta_0+\ldots+\beta_{n-\nu}z^{n-\nu})(\overline{\beta}_{n-\nu}+\ldots+\overline{\beta}_0 z^{n-\nu}),$$

де $\nu\le n$, $\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu\ne 0$ при $|z|\le 1$; α та β пов'язані наступним співвідношенням

$$Q_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\psi(k+n+1)z^k+\sum_{k=n+1}^{2n}\varrho_k z^k.$$

Причому поліном $Q_{2n}(z)$ серед всіх аналітичних в одиничному крузі функцій f, для яких $S_n(f,z)=P_n(z)$, $z\in D$, дає найменше значення для величини

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{it}|dt.$$

Покладемо тепер

$$\varphi(z)=\varepsilon\frac{\overline{\alpha}_\nu+\ldots+\overline{\alpha}_0 z^\nu}{\alpha_0+\ldots+\alpha_\nu z^\nu},\ |\varepsilon|=1,$$

причому функція $\varphi(z)$ буде мати наступні властивості [16, с. 491-492]:

1) майже скрізь $|\varphi(z)|\le 1$ та $\varphi(z)$ є аналітичною при $z\le 1$;

2) $\arg\frac{\varphi(z)P_{2n}(z)}{z^n}=\mathrm{const}$ майже скрізь на $|z|=1$ і як наслідок має місце рівність

$$\Big|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}dt\Big|=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(e^{it})Q_{2n}(e^{it})|dt=\int_{-\pi}^{\pi}|Q_{2n}(e^{it})|dt.$$

Отже, враховуючи сказане вище, (2.34) запишемо

$$|\rho_n(\Phi,e^{i0})|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{it})}{e^{i(n+1)t}}Q_{2n}(e^{it})dt\right|+O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Q_{2n}(e^{it})|dt + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

Оскільки $Q_{2n}(z)$ належить простору Харді, то до останнього інтегралу застосуємо нерівність Харді-Літтлвуда [27, с. 454]. Отримаємо

$$|\rho_n(\Phi, e^{i0})| \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-\frac{k}{n+1})|\psi(k+n+1)|}{k}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{|\varrho_k|}{k} + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)).$$

З урахуванням нерівності $E_n(f) \leq \|f\|_\infty \leq 1, f \in UH_\infty$ можемо записати

$$\|\rho_n(\Phi, z)\|_\infty \geq |\rho_n(\Phi, z=1)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi)) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)(V_n(\psi)+B_n(\psi))\right)E_n(\varphi).$$

Другу частину теореми доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2.8. *Нехай $\psi(k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \ldots$ — послідовність для якої виконуються умови (2.1)—(2.3). Тоді для довільної функції $f \in H^\psi_\infty$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедливе співвідношення*

$$\sup_{f\in H^\psi_\infty}\|\rho_n(f,z)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n+1)|}{k} + O(1)\Big(V_n(\psi)+B_n(\psi)\Big). \quad (2.35)$$

Оцінка зверху величини $\sup_{f\in H^\psi_\infty}\|\rho_n(f,z)\|_\infty$ слідує з теореми 1 та нерівності $E_n(f) \leq \|f\|_\infty \leq 1, f \in UH_\infty$. Оцінка знизу отримана в другій частині доведення теореми 1.

2.5. Оцінка групи φ-відхилень аналітичних в крузі функцій

Отримано оцінки збіжності груп φ-відхилень та φ-середніх λ-методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних і обмежених в крузі функцій.

Через Φ позначимо множину неспадних і неперервних на $(0,\infty)$ функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)>0$, $\varphi(u)\le e^{bu}$, для $u\in[0,1]$ $\varphi(2u)\le a\varphi(u)$, де $a=a(\varphi)$. Природними представниками множини Φ є, наприклад, функції $\varphi(u)=u^p, p>0$, $\varphi(u)=e^u-1$ тощо.

У даній роботі на множині функцій H_∞^ψ будуть досліджуватись величини

$$H_n^\varphi(f;z)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|) \text{ та } H_n^\varphi(f;\lambda;z)=\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|),$$

де p — довільне додатне число, $\lambda=\{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

З роботи [51, с. 210] слідує наступне твердження:

Лема 2.3. *Якщо послідовність комплексних чисел $\psi=\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$ є такою, що тригонометричний ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kx$$

є рядом Фур'є деякої сумовної $2\pi-$періодичної функції $\Psi(x)$, то клас H_∞^ψ складається з аналітичних в D і неперервних в $\overline{D}$ функцій f, граничні значення яких на колі T зображаються у вигляді згортки

$$f(e^{i\theta})=C+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^\psi(e^{it})\Psi(t-\theta)d\theta,$$

де $f^\psi\in L_\infty(T)_+$, $\|f^\psi\|_{L_\infty(T)}\le 1$ і C — деяка комплексна стала.

Наступна лема є поширенням на випадок квазіопуклих послідовностей $\{\psi\}$ одного результату Р.А. Ласурії [33, с. 700], отриманого для опуклих послідовностей і який є узагальненням одного твердження В. Тотіка [105, теорема 4].

Лема 2.4. *Нехай* $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, *причому* $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ *є квазіопуклими, спадними до нуля послідовностями,* $n \leq \ldots \leq k_i < k_{i+1} \leq \ldots \leq 2n-1$, $1 \leq i \leq r$. *Тоді для довільної функції* $f \in H^{\psi}_{\infty}$ *та будь-якого* $p > 0$ *справедлива нерівність*

$$h^p_{n,r}(f,z) := \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M_p R_n(\psi) E_n(f^{\psi}) \ln\frac{2n}{r}, \qquad (2.36)$$

де $R_n(\psi) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|$, M_p *— деяка абсолютна величина, що залежить лише від* p.

Доведення. Оскільки величина

$$\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

монотонно зростає по p (див., наприклад, [82, с. 41]), то достатньо розглянути випадок $p \geq 2$.

Нехай $p_n(z)$ — поліном найкращого наближення порядку не вище n функції $f^{\psi}(z)$. Позначимо $\Delta_n(f,\theta,t) := \Delta_n(f^{\psi}, p_n, \theta, t) = = f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) - p_n(e^{i(t+\theta)})$. Функція $h^p_{n,r}(f,z)$ є субгармонічною, тому за принципом максимуму модуля [44, с. 39] вона приймає максимальне значення на колі T. Отже, з леми 1 випливає співвідношення

$$h^p_{n,r}(f,z) = \sup_{z\in D}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\rho_{k_j}(f;z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{vraisup}_{\theta}\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}\psi(\nu)\cos\nu t dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поклавши

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$F_k(t)=\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}D_\nu(t)=\frac{\sin^2 kt}{4(k+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

та двічі застосувавши до суми під інтегралом перетворення Абеля, отримаємо нерівність

$$h^p_{n,r}(f,z)\le$$

$$\le \operatorname{vraisup}_\theta\Bigg(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\Big(\sum_{\nu=k_j+1}^{\infty}(\nu+1)\triangle^2\psi(\nu)F_\nu(t)-$$

$$-(k_j+1)\triangle\psi(k_j+1)F_{k_j}(t)-\psi(k_j+1)D_{k_j}(t)\Big)dt|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Враховуючи такі співвідношення

$$|a+b|^p\le 2^p(|a|^p+|b|^p), p\ge 1,$$

$$F_\nu(t)\ge 0, t\in[-\pi,\pi],$$

$$(n+1)|\triangle\psi(n+1)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|,$$

$$|\psi(n+1)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)|\triangle^2\psi(k)|,$$

$$D_k(t)=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}}+\frac{\cos kt}{2},$$

отримаємо

$$h^p_{n,r}(f,z)\le\operatorname{vraisup}_\theta\Bigg(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+M_pR_n(\psi)E_n(f^\psi)\le$$

$$\leq \mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{|t|\leq\frac{\pi}{k_j}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\leq|t|\leq\frac{\pi}{r}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{r}\leq|t|\leq\pi}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+M_pR_n(\psi)E_n(f^\psi)=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+M_pR_n(\psi)E_n(f^\psi).$$

Оцінимо кожен із доданків

$$\Sigma_1=\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{|t|\leq\frac{\pi}{k_j}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq M_p\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}|\psi(k_j+1)|^pE_n(f^\psi)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq M_pE_n(f^\psi)\max_j|\psi(k_j+1)|\leq$$

$$\leq M_pR_n(\psi)E_n(f^\psi).$$

$$\Sigma_2=\mathrm{vraisup}_\theta\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left|\frac{\psi(k_j+1)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\leq|t|\leq\frac{\pi}{r}}\Delta_n(f,\theta,t)\frac{\sin k_j t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq M_p\left(\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\Big(\frac{|\psi(k_j+1)|E_n(f^\psi)}{\pi}\int_{\frac{\pi}{k_j}\leq|t|\leq\frac{\pi}{r}}\frac{1}{t}dt\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq M_pR_n(\psi)\ln\frac{2n}{r}E_n(f^\psi).$$

Для оцінки Σ_3 розглянемо функцію

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\frac{\Delta_n(f,\theta,t)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{при } \frac{\pi}{r}\leq|t|\leq\pi,\\ 0 & \text{при інших значеннях } t,\end{cases}$$

косинус-коефіцієнти Фур'є цієї функції позначимо через $\alpha_k = \alpha_k(\varphi_n)$. Оскільки $1 < q \le 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то можемо використати теорему Хаусдорфа–Юнга [28, с. 153], згідно з якою

$$\Sigma_3 = \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \left| \frac{\psi(k_j+1)}{\pi} \int_{\frac{\pi}{r} \le |t| \le \pi} \Delta_n(f,\theta,t) \frac{\sin k_j t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} |\psi(k_j+1)\alpha_{k_j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \max_j |\psi(k_j+1)| \mathrm{vraisup}_\theta \left(\frac{1}{r} \sum_{\nu} |\alpha_{k_j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le M_p \max_j |\psi(k_j+1)| r^{-1/p} \|\varphi\|_q \le$$

$$\le M_p R_n(\psi) r^{-1/p} \left(\int_{\frac{\pi}{r} \le |t| \le \pi} \frac{|\Delta_n(f,\theta,t)|^q}{t^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le M_p R_n(\psi) r^{-1/p} r^{1-1/q} E_n(f^\psi) \le M_p R_n(\psi) E_n(f^\psi).$$

Об'єднавши оцінки для Σ_1, Σ_2 та Σ_3 отримаємо нерівність (2.36).

Лему доведено.

Теорема 2.9. *Нехай $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, причому $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ є квазіопуклими, спадними до 0 послідовностями. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$H_n^\varphi(f; z) \le M\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)),$$

де $M = M(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена по n, z та f.

Доведення. Будемо дотримуватись схеми роботи [106]. Покладемо

$$B_{n,\alpha}(z) = \{k \in [n, 2n-1] :$$

$$(\alpha - 1)R_n(\psi)E_n(f^\psi) \le |\rho_k(f,z)| \le \alpha R_n(\psi)E_n(f^\psi), \alpha \in \mathbb{N}\},$$

$\mu_{n,\alpha}(z)$ — кількість всіх елементів множини $B_{n,\alpha}(z)$. Враховуючи, що коли $B_{n,\alpha}(z) = \emptyset$, то й $\Sigma_{B_{n,\alpha}(z)} = 0$, отримаємо

$$H_n^{\varphi}(f; z) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \varphi(|\rho_k(f; z)|) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{k \in B_{n,\alpha}(z)} \varphi(|\rho_k(f; z)|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(\alpha R_n(\psi) E_n(f^{\psi})) \mu_{n,\alpha}(z).$$

Оцінимо величину $\mu_{n,\alpha}(z)$ в тому випадку, коли вона додатна, для цього використаємо співвідношення (2.36), в якому покладемо $r = \mu_{n,\alpha}(z)$, $q = 1$. Отримаємо

$$\mu_{n,\alpha}(z) \leq n e^{1-\alpha/M_p},$$

де M_p — величина із співвідношення (2.36).

Використавши нерівність (див. [106, с. 108])

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(\alpha u) e^{-\alpha/K_p} \leq M\varphi(u) \text{ для довільного } u \in \left(0, \frac{1}{2aM_p}\right)$$

та враховуючи, що n є таким, для якого має місце $R_n(\psi) E_n(f^{\psi})) \in \left(0, \frac{1}{2aK_p}\right)$, отримаємо

$$H_n^{\varphi}(f; z) \leq \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(\alpha R_n(\psi) E_n(f^{\psi})) \mu_{n,\alpha}(z) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(\alpha R_n(\psi) E_n(f^{\psi})) n e^{1-\alpha/M_p} \leq$$

$$\leq M \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi(\alpha R_n(\psi) E_n(f^{\psi})) e^{-\alpha/M_p} \leq M\varphi(R_n(\psi) E_n(f^{\psi})).$$

Теорему доведено.

Теорема 2.10. *Нехай* $\varphi \in \Phi$, $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, *причому* $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ *є квазіопуклими спадними до нуля послідовностями,* $\lambda = \{\lambda_k\}$ —

незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ та будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$H_n^\varphi(f;\lambda;z) \le M\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi))\Big),$$

де $M = M(\varphi)$ — деяка величина, рівномірно обмежена по n, z та f.

Доведення. Покладемо $n_0 = n$, $n_1 = 2n_0, \ldots, n_i = 2n_{i-1}, \ldots$ Тоді

$$H_n^\varphi(f;\lambda;z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{n_i}\frac{n_i}{n_i}\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|).$$

Для оцінки останнього виразу застосуємо теорему 2.9 і отримаємо

$$H_n^\varphi(f;\lambda;z) \le M\sum_{i=0}^{\infty}n_i\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^\psi)) \le$$

$$\le M\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)) + \sum_{i=1}^{\infty}n_i\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^\psi))\Big).$$

За умовами теореми справедлива наступна нерівність

$$\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi)) \le \lambda_m\varphi(R_m(\psi)E_m(f^\psi)) \text{ при } k \ge m,$$

тому для $n_{i-1} \le k \le 2n_{i-1} - 1 < n_i$ буде

$$\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^\psi)) \le \lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi)),$$

а значить

$$\lambda_{n_i}\varphi(R_{n_i}(\psi)E_{n_i}(f^\psi)) \le \frac{1}{n_{i-1}}\sum_{k=n_{i-1}}^{2n_{i-1}-1}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi)),$$

тоді

$$H_n^\varphi(f;\lambda;z) \le M\Big(n\lambda_n\varphi(R_n(\psi)E_n(f^\psi)) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(R_k(\psi)E_k(f^\psi))\Big).$$

Теорему доведено.

Наслідок 2.4. *Нехай* $f \in H^{\psi}_{\infty}$ *та* $\psi(k) = \psi_1(k) + i\psi_2(k)$, *причому* $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$ *є квазіопуклими спадними до 0 послідовностями, тоді має місце співвідношення*

$$\sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f;z)|^p \leq M_p \sum_{k=0}^{n} E_k^p(f^{\psi}) \ 0 < p < \infty.$$

Дане твердження слідує з теореми 2.10, якщо взяти $\varphi(u) = |u|^p$ та покласти $n = 0$ і задати послідовність λ_k так

$$\lambda_k = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{при } k \in [0, n], \\ 0, & \text{при } k \geq n+1. \end{cases}$$

Висновки до розділу 2

В цьому розділі отримано нерівності типу Лебега на класі $\overline{\psi}$-диференційовних функцій та типу Лебега-Ландау на класі аналітичних в крузі функцій, крім того, на тих же класах функцій знайдено оцінки групи відхилень функції.

Так, в підрозділі 2.2 отримано нерівність типу Лебега на класі $C^{\overline{\psi}}C$ та показано існування функції, для якої дана нерівність є точною.

В підрозділі 2.3 на множині функцій $C^{\overline{\psi}}C$ досліджено величини

$$H_n^p(f;x)=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ та } H_n^p(f;\lambda;x)=\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k|\rho_k(f;x)|^p,$$

де p — довільне додатне число, $\lambda=\{\lambda_k\}$ — послідовність дійсних чисел.

В підрозділі 2.4 знайдено оцінки відхилень сум ряду Тейлора від функції на класах аналітичних функцій H_∞^ψ, виражені через найкращі наближення ψ-похідних функцій, а також отримано асимптотичні рівності для точних верхніх граней відхилень сум ряду Тейлора від функцій з цих же класів.

В підрозділі 2.5 отримано оцінки збіжності груп φ-відхилень та φ-середніх λ-методів підсумовування рядів Тейлора аналітичних і обмежених в крузі функцій:

$$H_n^\varphi(f;z)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\varphi(|\rho_k(f;z)|) \text{ та } H_n^\varphi(f;\lambda;z)=\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;z)|).$$

Основні результати, які висвітлено в даному розділі, опубліковано в [5], [6],[7], [8], [9], [11], [12] та [13].

РОЗДІЛ 3

Лінійні методи підсумовування аналітичних в крузі функцій

3.1. Регулярність лінійних методів підсумовування рядів Тейлора-Маклорена аналітичних функцій

В цьому розділі ми розглянемо умови регулярності методу підсумовування Λ, що задається нескінченнорядковою матрицею дійсних чисел, в просторі $A(\overline{D})$. Також покажемо, що умови регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ слабші умов регулярності в просторі C.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Для регулярності методу підсумовування Λ в просторі $A(\overline{D})$ необхідно та достатнъо, щоб виконувалися умови (A) (див. стор. 31) та*

(E) існувало число $M_n > 0$, що можливо залежить від n, і такий розклад

$$\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}, k = 1, 2, \ldots$$

на дійсні числа $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$, що кожна із функцій

$$t_m^{(n)}(x) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx), n = 0, 1, \ldots; m = 0, 1, \ldots$$

задовольняє умові

$$\int_0^{2\pi} |t_m^{(n)}(x)| dx \le M_n, n = 0, 1, \ldots,$$

де величина M_n *не залежить від* m;

(F) повна варіація функцій

$$K_n(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^x \big(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^m (\alpha_k^{(n)} \cos kt + \beta_k^{(n)} \sin kt)\big) dt =$$

$$= \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} x + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} (\alpha_k^{(n)} \sin kx - \beta_k^{(n)} \cos kx)$$

була рівномірно обмеженою на $[0, 2\pi]$*:*

$$\int_0^{2\pi} |dK_n(x)| = \int_0^{2\pi} \big| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx) \big| dx \le M.$$

Доведення. Необхідність. Нехай метод Λ є регулярним в $A(\overline{D})$, тобто для кожної $f \in A(\overline{D})$ та довільного $z \in \overline{D}$ ряди в (1.16) є збіжними, а також виконується співвідношення (1.17). Покажемо, що мають місце співвідношення (A), (E) и (F).

Покладемо для кожної $f \in A(\overline{D})$

$$U_{m,n}(f) = U_{m,n}(f; \Lambda; z) = \sum_{k=0}^m \lambda_k^{(n)} c_k z^k =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} f(t) \left(\sum_{k=0}^m \lambda_k^{(n)} \frac{z^k}{t^{k+1}} + \sum_{k=1}^m \mu_k^{(n)} \frac{t^{k-1}}{z^k} \right) dt,$$

$$U_n(f) = \lim_{m\to\infty} U_{m,n}(f).$$

Тут $\mu_k^{(n)}, k = 1, 2, \ldots, m; n = 0, 1, \ldots$ — довільні комплексні числа.

При фіксованому $z = e^{i\tau}$ останні вирази є лінійними функціоналами, що задані на $A(\overline{D})$ і які можна представити у вигляді

$$U_{m,n}(f; \Lambda; e^{i\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)}) b_m^{(n)}(\theta) d\theta, \tag{3.1}$$

де

$$b_m^{(n)}(\theta) = \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^m \left(\lambda_k^{(n)} e^{-ik\theta} + \mu_k^{(n)} e^{ik\theta} \right);$$

$$U_n(f;\Lambda;e^{i\tau}) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})b_m^{(n)}(\theta)d\theta. \tag{3.2}$$

Ф. Рісс [103] показав, що існують комплексні числа $\bar{\mu}_k^{(n)}, k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 0, 1, \ldots,$ для яких має місце

$$\|U_{m,n}\| = \sup_{\|f\|_{A(\overline{D})}=1} \|U_{m,n}(f;\Lambda;e^{i\tau})\|_{A(\overline{D})} =$$

$$= \min_{\mu_k^{(n)}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |b_m^{(n)}(\theta)|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\bar{b}_m^{(n)}(\theta)|d\theta, \tag{3.3}$$

де

$$\bar{b}_m^{(n)}(\theta) = \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{m}\Big(\lambda_k^{(n)}e^{-ik\theta} + \bar{\mu}_k^{(n)}e^{ik\theta}\Big).$$

Тоді функціонали $U_{m,n}(f)$ и $U_n(f)$ можемо записати в наступному вигляді

$$U_{m,n}(f;\Lambda;e^{i\tau}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\bar{b}_m^{(n)}(\theta)d\theta, \tag{3.4}$$

$$U_n(f;\Lambda;e^{i\tau}) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\bar{b}_m^{(n)}(\theta)d\theta. \tag{3.5}$$

Збіжність рядів (1.16) для кожної $f \in A(\overline{D})$ у фіксованій точці $z \in \overline{D}$ є збіжністю функціоналів (3.1) до неперервного функціоналу (3.2). На основі теореми Банаха-Штейнгауза [29, с.266], щоб послідовність $\{U_{m,n}(f)\}$ була збіжною на $A(\overline{D})$ при $m \to \infty$ до неперервного функціоналу $U_n(f)$, необхідно і достатньо, щоб

а) норми $U_{m,n}(f)$ були обмежені в сукупності:

$$\|U_{m,n}\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\bar{b}_m^{(n)}(\theta)|d\theta \le M_n,$$

де величина M_n залежить, можливо, від n, але не залежить від m;

б) послідовність $\{U_{m,n}(e^{i\nu\tau})\}$ була збіжною $U_n(e^{i\nu\tau})$ для довільного $\nu = 0, 1, \ldots$ (лінійні комбінації функцій $e^{i\nu\tau}, \nu = 0, 1, \ldots$ були щільними в $A(\overline{D})$)

$$\lim_{m\to\infty} U_{m,n}(e^{i\nu\tau}) = \lim_{m\to\infty} \lambda_\nu^{(n)} e^{i\nu\tau} = \lambda_\nu^{(n)} e^{i\nu\tau} = U_n(e^{i\nu\tau}). \tag{3.6}$$

Якщо $\bar{\mu}_k^{(n)} = \bar{\eta}_k^{(n)} + i\bar{\bar{\eta}}_k^{(n)}$, то

$$\bar{b}_m^{(n)}(x) = Re\bar{b}_m^{(n)}(x) + iIm\bar{b}_m^{(n)}(x) =$$

$$= \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^{(n)} + \bar{\eta}_k^{(n)})\cos kx - \sum_{k=1}^{m}\bar{\bar{\eta}}_k^{(n)}\sin kx -$$

$$-i\Big(\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k^{(n)} - \bar{\eta}_k^{(n)})\sin kx - \sum_{k=1}^{m}\bar{\bar{\eta}}_k^{(n)}\cos kx\Big). \tag{3.7}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Im\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx\right) \tag{3.8}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(-x)|dx,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Im\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Im\bar{b}_m^{(n)}(-x)|dx,$$

то

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx + \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx + \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(-x)|dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Re\bar{b}_m^{(n)}(x) + Re\bar{b}_m^{(n)}(-x)|dx. \tag{3.9}$$

Аналогічно будемо мати

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|Im\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx \geq \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|Im\bar{b}_m^{(n)}(x) - Im\bar{b}_m^{(n)}(-x)|dx. \tag{3.10}$$

Так як

$$\frac{1}{4}\Big(Re\bar{b}_m^{(n)}(x)+Re\bar{b}_m^{(n)}(-x)\Big)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(\lambda_k^{(n)}+\bar{\eta}_k^{(n)})\cos kx,$$
$$\frac{1}{4}\Big(Im\bar{b}_m^{(n)}(x)-Im\bar{b}_m^{(n)}(-x)\Big)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(\lambda_k^{(n)}-\bar{\eta}_k^{(n)})\sin kx, \tag{3.11}$$

то, поклавши

$$\frac{1}{2}(\lambda_k^{(n)}+\bar{\eta}_k^{(n)})=\alpha_k^{(n)} \text{ и } \frac{1}{2}(\lambda_k^{(n)}-\bar{\eta}_k^{(n)})=\beta_k^{(n)}, \tag{3.12}$$

$$t_m^{(n)}(x)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}\Big(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx\Big), \tag{3.13}$$

із співвідношень (3.3) и (3.8)—(3.11) знайдемо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|t_m^{(n)}(x)|dx\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^{(n)}\cos kx\Big|dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=1}^{m}\beta_k^{(n)}\sin kx|dx\le\|U_{m,n}\|. \tag{3.14}$$

Таким чином із збіжності рядів (1.16) слідує обмеженість норм (3.3), а значить, відповідно до (3.14) і виконання умови (E). Рівність (1.17) в силу (3.6) забезпечує виконання умови (A).

Враховуючи співвідношення (3.7), (3.12) та (3.13), легко отримати рівність

$$\bar{b}_m^{(n)}(x)=2\bar{\bar{b}}_m^{(n)}(x)+i\sum_{k=1}^{m}\bar{\bar{\eta}}_k^{(n)}e^{ikx}, \tag{3.15}$$

де

$$\bar{\bar{b}}_m^{(n)}(x)=\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^{(n)}\cos kx-i\sum_{k=1}^{m}\beta_k^{(n)}\sin kx=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(t_m^{(n)}(x)+t_m^{(n)}(-x)\Big)-\frac{i}{2}\Big(t_m^{(n)}(x)-t_m^{(n)}(-x)\Big). \tag{3.16}$$

Оскільки $f \in A(\overline{D})$, то $\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)}) \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{\eta}}_k^{(n)} e^{ik\theta} d\theta = 0$. Тоді функціонали (3.4) та (3.5) запишемо у вигляді

$$U_{m,n}(f;\Lambda;e^{i\tau}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\overline{\overline{b}}_m^{(n)}(\theta)d\theta, \tag{3.17}$$

$$U_n(f;\Lambda;e^{i\tau}) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\overline{\overline{b}}_m^{(n)}(\theta)d\theta. \tag{3.18}$$

Представимо $\overline{\overline{b}}_m^{(n)}(x)$ у формі

$$\overline{\overline{b}}_m^{(n)}(x) = \frac{1-i}{2}t_m^{(n)}(x) + \frac{1+i}{2}t_m^{(n)}(-x),$$

тоді функціонали $U_{m,n}(f)$ і $U_n(f)$ будуть мати вигляд

$$U_{m,n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\Big(\frac{1-i}{2}t_m^{(n)}(\theta) + \frac{1+i}{2}t_m^{(n)}(-\theta)\Big)d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau+\theta)})\frac{1-i}{2}t_m^{(n)}(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(\tau-\theta)})\frac{1+i}{2}t_m^{(n)}(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\tau(\theta)t_m^{(n)}(\theta)d\theta,$$

де

$$g_\tau(\theta) = (1-i)f(e^{i(\tau+\theta)}) + (1+i)f(e^{i(\tau-\theta)}),$$

$$U_n(f) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\tau(\theta)t_m^{(n)}(\theta)d\theta.$$

Очевидно, що коли $f \in A(\overline{D})$, то й $g_\tau \in A(\overline{D})$.

Відомо [46, с. 125], що лінійний функціонал у просторі неперервних функцій можна представити у виді інтеграла Стільтьєса, тому функціонали (3.17) и (3.18) запишемо у виді

$$U_{m,n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\tau(\theta)dB_m^{(n)}(\theta),$$

$$U_n(f) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\tau(\theta)dB_m^{(n)}(\theta),$$

де

$$\left(B_m^{(n)}(\theta)\right)' = \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}\theta + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\alpha_k^{(n)}\sin k\theta - \beta_k^{(n)}\cos k\theta\right)\right)' = t_m^{(n)}(\theta).$$

В силу збіжності рядів (1.16), а значить рівномірної обмеженості норм $\|U_{m,n}\|$ функції $B_m^{(n)}(\theta)$ мають відповідно (3.14) рівномірно обмежену варіацію.

Згідно теореми Хеллі про граничний перехід під знаком інтеграла Стільтєса [31, с. 366] отримаємо вид функціонала $U_n(f)$:

$$U_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\tau(\theta)dK_n(\theta), \tag{3.19}$$

де функції

$$K_n(\theta) = \lim_{m\to\infty} B_m^{(n)}(\theta) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2}\theta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\alpha_k^{(n)}\sin k\theta - \beta_k^{(n)}\cos k\theta\right)$$

мають рівномірно обмежену варіацію, тобто

$$\int_0^{2\pi} |dK_n(\theta)| \leq M.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай мають місце умови (A), (E) и (F). Покажемо, що в кожній точці $z \in \overline{D}$ ряди (1.16) є збіжними та виконується рівність (1.17).

Дійсно із співвідношень (3.3), (3.13) та (3.15)—(3.16) будемо мати

$$\|U_{m,n}\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\bar{b}_m^{(n)}(x)|dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\bar{\bar{b}}_m^{(n)}(x)|dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} |t_m^{(n)}(x) + t_m^{(n)}(-x) - i(t_m^{(n)}(x) - t_m^{(n)}(-x))|dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |t_m^{(n)}(x)|dx. \tag{3.20}$$

З умови (E) слідує, згідно (3.20), обмеженість норм $\|U_{m,n}\|$. Послідовність $\{U_{m,n}(e^{i\nu\tau})\}$ збігається до $U_n(e^{i\nu\tau})$ для довільного $\nu = 0, 1, \ldots$ в силу умови (A), тобто на всюди щільній множині многочленів в просторі $A(\overline{D})$. Тому згідно теореми Банаха-Штейнгауза ряди (1.16) збігаються в кожній точці $z \in \overline{D}$. І крім того, функція $K_n(x)$ має обмежену варіацію. А значить, в силу (3.19) функціонали $U_n(f)$, що задані на $A(\overline{D})$ мають норми

$$\|U_n\| \leq M \int_0^{2\pi} |dK_n(\theta)|.$$

Враховуючи умову (F), послідовність норм функціоналів $U_n(f)$ рівномірно обмежена і рівність (1.17) виконуються відповідно до (A) для довільного полінома. Тому рівність (1.17), в силу теореми Банаха-Штейнгауза, справедлива для довільної $f \in A(\overline{D})$.

Теорема доведена.

3.2. Приклад методу підсумовування нерегулярного у просторі C і регулярного в $A(\overline{D})$

Покажемо тепер, що умови регулярності методу Λ в просторі $A(\overline{D})$ слабші умов регулярності в просторі C.

Відомо (див., наприклад, [23]), що сума тригонометричного ряду

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\ln \nu},$$

є інтегровна функція, яку позначимо f таким чином $f \in L$ і

$$\int_0^{2\pi} |S_n(f,x)| dx = \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\cos \nu x}{\ln \nu} \Big| dx = O(1).$$

Також, функція $\varphi(x) = \frac{1}{2}\Big(f\big(x+\frac{\pi}{2}\big) - f\big(x-\frac{\pi}{2}\big)\Big) \in L$ та

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \sin{(2\nu+1)x}}{\ln{(2\nu+1)}},$$

крім того, має місце оцінка

$$\int_0^{2\pi} |S_n(\varphi,x)| dx = \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu+1} \sin{(2\nu+1)x}}{\ln{(2\nu+1)}} \Big| dx = O(1).$$

В той же час для ряду

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \cos{(2\nu+1)x}}{\ln{(2\nu+1)}}$$

частинні суми не обмежені в L.

Дійсно,

$$S_{[\frac{n+1}{2}]}(x) = \sum_{\nu=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{(-1)^{\nu+1} \cos{(2\nu+1)x}}{\ln{(2\nu+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin \nu(x-\frac{\pi}{2})}{\ln \nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin \nu(x+\frac{\pi}{2})}{\ln \nu},$$

і

$$\int_0^{2\pi} |S_{[\frac{n+1}{2}]}(x)|dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x-\frac{\pi}{2})}{\ln\nu} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x+\frac{\pi}{2})}{\ln\nu}\right| dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu x}{\ln\nu} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x-\pi)}{\ln\nu}\right| dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu x}{\ln\nu} - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right| dx =$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu x}{\ln\nu}\right| dx + O\Big(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right| dx\Big).$$

Оскільки послідовність $\{\frac{1}{\ln\nu}\}$ є опуклою і при $|x| \le \frac{\pi}{2}$ для спряженого ядра Фейера $\widetilde{F}_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\big(1-\frac{\nu}{n+1}\big)\sin\nu x$ справедлива оцінка

$$|\widetilde{F}_n(x+\pi)| = \left|\frac{(n+1)\sin(x+\pi) - \sin(n+1)(x+\pi)}{4(n+1)\sin^2\frac{x+\pi}{2}}\right| \le$$

$$\le \frac{n+2}{4(n+1)\sin^2\frac{\pi}{4}} < 1,$$

тоді за допомогою перетворення Абеля нескладно отримати оцінку

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu(x+\pi)}{\ln\nu}\right| dx \le M.$$

Тоді

$$\int_0^{2\pi} |S_{[\frac{n+1}{2}]}(x)|dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\sin\nu x}{\ln\nu}\right| dx + M.$$

Необмеженність частинних сум ряда $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\ln\nu}$ слідує із результатів работи [24]:

Нехай коефіцієнти ряду $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu x$ задовольняють умові

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\triangle a_\nu| + \sum_{\nu=2}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\triangle a_{\nu-k} - \triangle a_{\nu+k}}{k}\Big| < \infty, \text{ \textit{где} } \triangle a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1}.$$

Тоді частинні суми ряду обмеженні в метриці L тоді і тільки тоді, коли для довільного $m \in \mathbb{N}$ виконуються

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|a_{m+k}|}{k} \leq M$$

та

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_\nu|}{\nu} < \infty.$$

Остання умова для даного ряду не виконується. Відмітимо, що для обмеженості частинних сум ряду $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$ ця умова відсутня.

Визначимо матрицю $\Lambda = \{\lambda_\nu^{(n)}\}$ наступним чином

$$\lambda_\nu^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{\nu}{n+1}, & \text{при } \nu \leq n, \\ 0, & \text{якщо } \nu > n \text{ і } \nu = 2k, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\ln \nu}, & \text{якщо } \nu > n \text{ і } \nu = 2k+1. \end{cases}$$

Відмітимо, що поліном $\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \cos \nu x := F_n(x)$ є ядром Фейера і для нього має місце співвідношення $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |F_n(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_n(x) dx = 1.$

Очевидно, що $\lambda_\nu^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$ та для довільного фіксированого ν. Покажемо, що умови (B) теореми Карамати та Томіча не виконуються. Нехай $m > n$

$$\int_0^{2\pi} \Big| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \Big| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) \cos kx + \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \Big| dx \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^{(n)} \cos kx \Big| dx - \int_0^{2\pi} |F_n(x)| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{2l+1=n+1}^{m} \lambda_{2l+1}^{(n)} \cos (2l+1)x \Big| dx - M =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{l=[\frac{n}{2}]}^{[\frac{m-1}{2}]} \frac{(-1)^l}{\ln(2l+1)} \cos(2l+1)x \Big| dx - M \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi} \Big| S_{[\frac{m-1}{2}]}(x) \Big| dx - \int_0^{2\pi} \Big| S_{[\frac{n}{2}]}(x) \Big| dx - M \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Тепер покладемо $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, де

$$\alpha_\nu^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{\nu}{n+1}, & \text{при } \nu \leq n, \\ 0, & \text{если } \nu > n \end{cases}$$

и

$$\beta_\nu^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \nu \leq n \text{ или } \nu > n \text{ и } \nu = 2k, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\ln \nu}, & \text{если } \nu > n \text{ и } \nu = 2k+1, \end{cases}$$

терер перевіримо виконання умов (E) та (F).

Нехай $m > n$, тоді

$$\int_0^{2\pi} \Big| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x \right) \Big| dx \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \Big| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x \Big| dx + \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{\nu=n}^{m} \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x \Big| dx \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \Big| \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (1 - \frac{\nu}{n+1}) \cos \nu x \Big| dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |S_m(\varphi, x)| dx + \int_0^{2\pi} |S_n(\varphi, x)| dx = O(1).$$

Отже, умова (E) теореми виконується.

Оскільки для довільного m значення

$$\int_0^{2\pi} \Big| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} \left(\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x \right) \Big| dx = O(1),$$

то умова (F) теореми також має місце.

3.3. Умови регулярності, виражені безпосередньо через елементи матриці Λ

Перевірка умов (E) та (F) теореми 3.1, тобто, перевірка обмеженості інтегралів від модулів функцій, викликає в багатьох випадках певні труднощі. Тому в цьому розділі наведемо більш прості, але достатні умови регулярності методу підсумовування, що задаються прямокутною матрицею чисел. Тут ми замінимо оцінки інтегралів перевіркою скінченності деяких сум, що є значно простішим.

Теорема 3.2. *Нехай числа $\lambda_k^{(n)}$ можна представити у вигляді $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, де дійсні числа $\alpha_k^{(n)}$ та $\beta_k^{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$ задовольняють умовам*

$$V(\alpha) + V(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\alpha_k^{(n)}| + \sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\beta_k^{(n)}| \le M, \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k^{(n)}|}{k} \le M \tag{3.22}$$

та

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\triangle\alpha_{\nu-k}^{(n)} - \triangle\alpha_{\nu+k}^{(n)}}{k} \Big| + \sum_{\nu=2}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{[\nu/2]} \frac{\triangle\beta_{\nu-k}^{(n)} - \triangle\beta_{\nu+k}^{(n)}}{k} \Big| \le M. \tag{3.23}$$

Тоді для регулярності методу підсумовування Λ в просторі $A(\overline{D})$ необходідно та достатньо виконання умов (A) та для довільного $m \in \mathbb{N}$

$$(G) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_{m+k}^{(n)}| + |\beta_{m+k}^{(n)}|}{k} \le M_n,$$

де M_n залежить, можливо, лише від n,

$$(H) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{|\alpha_{m-k}^{(n)} - \alpha_{m+k}^{(n)}|}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{|\beta_{m-k}^{(n)} - \beta_{m+k}^{(n)}|}{k} \le M,$$

Для доведення використаємо теорему 3.1. Відмітимо, що при виконанні умов (3.21) та (3.23) для довільного $m \in \mathbb{N}$ будуть скінченними наступні величини (див. [73, с. 73])

$$B_1^m(\alpha) + B_1^m(\beta) = \sum_{i=2}^{m-2} \left(\left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\triangle\alpha_{i-k}^{(n)} - \triangle\alpha_{i+k}^{(n)}}{k} \right| + \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\triangle\beta_{i-k}^{(n)} - \triangle\beta_{i+k}^{(n)}}{k} \right| \right),$$

$$B_m(\alpha) + B_m(\beta) = \sum_{i=2}^{\infty} \left(\left| \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\triangle\alpha_{m+i-k}^{(n)} - \triangle\alpha_{m+i+k}^{(n)}}{k} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \frac{\triangle\beta_{m+i-k}^{(n)} - \triangle\beta_{m+i+k}^{(n)}}{k} \right| \right),$$

де $q_{i,m} = \min([\frac{i}{2}], [\frac{m-i}{2}])$.

Необхідність. Нехай метод підсумовування Λ є регулярним в просторі $A(\overline{D})$. Тоді мають місце умови *(A)*,*(E)* та *(F)*, покажемо, що із цих умов при виконанні (3.21)-(3.23) слідують умови *(G)* та *(H)*.

Із умови *(E)* слідує [27, с. 453], що

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(n)} = 0 \text{ та } \lim_{k\to\infty} \beta_k^{(n)} = 0. \qquad (3.24)$$

Згідно (3.21)-(3.24) отримаємо, що ряд

$$\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x)$$

є рядом Фур'є [71]. З умови *(E)* слідує, що його частинні суми є обмеженими в просторі L, в [24] показано, що умова *(G)* в цьому випадку є необхідною і достатньою. Звідси слідує необхідність умови *(G)* теореми 3.2.

Розглянемо тепер умову *(F)*, згідно [73, теорема 1] при виконанні

(3.21)-(3.24) для довільного $m \in \mathbb{N}$ будемо мати

$$\Big|\int_0^{2\pi}|\frac{\lambda_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu^{(n)}\cos\nu x+\beta_\nu^{(n)}\sin\nu x)|dx-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}-2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|\beta_k^{(n)}|}{k}\Big|\leq$$

$$\leq M(V(\alpha)+V(\beta)+B_1^m(\alpha)+B_1^m(\beta)+B_m(\alpha)+B_m(\beta)),$$

де

$$\xi_k=\xi\big(\beta_k^{(n)},\sqrt{(\alpha_{m-k}^{(n)}-\alpha_{m+k}^{(n)})^2+(\beta_{m-k}^{(n)}-\beta_{m+k}^{(n)})^2}\big),$$

а функція $\xi(t,u)$ визначена наступним співвідношенням

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|t|, & \text{при } |u|\leq|t|,\\ |t|\arcsin\left|\frac{t}{u}\right|+\sqrt{u^2-t^2}, & \text{при } |t|<|u|.\end{cases}$$

Звідси отримаємо необхідність умови

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}\leq M.$$

Із [73, лема 5] для функції $\xi(t,u)$ слідує справедливість нерівності

$$|u|\leq\xi(t,u)\leq\frac{\pi}{2}|t|+|u|\leq M_2(|t|+|u|). \tag{3.25}$$

Враховуючи нерівність (3.25) і

$$\frac{1}{2}|t|+\frac{1}{2}|u|\leq\sqrt{t^2+u^2},$$

отримаємо

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}\geq\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{(\alpha_{m-k}^{(n)}-\alpha_{m+k}^{(n)})^2+(\beta_{m-k}^{(n)}-\beta_{m+k}^{(n)})^2}}{k}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{|\alpha_{m-k}^{(n)}-\alpha_{m+k}^{(n)}|+|\beta_{m-k}^{(n)}-\beta_{m+k}^{(n)}|}{k}.$$

Необхідність умови *(H)* доведено.

Достатність. Нехай мають місце умови (3.21)-(3.23), *(G)* та *(H)*. Покажемо, що будуть виконуватися умови теореми 3.1.

Із умови *(G)* слідує співвідношення (3.24), а із (3.21)-(3.24) слідує, що ряд (див. [71])

$$\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x)$$

є рядом Фур'є сумовної функції. Умова *(G)* гарантує обмеженість його частинних сум в метриці L (див. [24]), тобто,

$$\int_0^{2\pi} |\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx)| dx \leq M_n,$$

а це є умова *(E)*.

Оскільки ряд

$$\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x)$$

є рядом Фур'є, то його можна проінтегрувати по довільному проміжку з відрізка $[0, 2\pi)$, отже, існує функція обмеженої варіації

$$K_n(x) = \int_0^x \left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu t + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu t) \right) dt =$$

$$= \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (\alpha_\nu^{(n)} \sin \nu x - \beta_\nu^{(n)} \cos \nu x).$$

Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$ на основі [73, теорема 1] і нерівності (3.25) отримаємо

$$\int_0^{2\pi} |dK_n(x)| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu^{(n)} \cos \nu x + \beta_\nu^{(n)} \sin \nu x) \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\xi_\nu}{\nu} + 2 \sum_{\nu=2m+1}^{\infty} \frac{|\beta_\nu^{(n)}|}{\nu} +$$

$$+M(V(\alpha)+V(\beta)+B_1^m(\alpha)+B_1^m(\beta)+B_m(\alpha)+B_m(\beta))\leq$$
$$\leq M_1\sum_{k=1}^{m}\frac{|\alpha_{m-k}^{(n)}-\alpha_{m+k}^{(n)}|+|\beta_{m-k}^{(n)}-\beta_{m+k}^{(n)}|}{k}+M_2+$$
$$+M(V(\alpha)+V(\beta)+B_1^m(\alpha)+B_1^m(\beta)+B_m(\alpha)+B_m(\beta)).$$

Як бачимо, при виконанні умов (3.21)-(3.23) та *(H)* буде мати місце умова *(F)*.

Теорема доведена.

Висновки до розділу 3

В даному розділі розглянуто умови регулярності методів підсумовування рядів Тейлора функцій аналітичних в крузі та неперервних на його замиканні $A(\overline{D})$.

Так, в підрозділі 3.1 встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора-Маклорена аналітичних функцій, що задані нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел.

В підрозділі 3.2 побудовано приклад методу підсумовування нерегулярного у просторі неперевних функцій і регулярного в $A(\overline{D})$.

В підрозділі 3.3 наведено більш прості, але достатні умови регулярності методу підсумовування, що заданий прямокутною матрицею чисел, а саме оцінки інтегралів замінено на перевірку скінченності деяких сум, що є значно простішим.

Основні результати, що висвітлені в даному розділі, опубліковано в [94] та [9].

РОЗДІЛ 4

Наближення аналітичних функцій в однозв'язних областях середніми Зігмунда

4.1. Деякі допоміжні твердження

Введемо такі позначення: $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$ — алгебраїчний многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами c_ν; P_n — множина всіх алгебраїчних многочленів $p_n(z)$; $E_n(f) = E_n(f,\overline{\Omega})$ — найкраще рівномірне наближення функції $f \in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними многочленами

$$E_n(f,\overline{\Omega}) = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\| = \inf_{p_n \in P_n} \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z) - p_n(z)|;$$

$$S_n(z) = S_n(f,\overline{\Omega},z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu F_\nu(z)$$

— частинна сума ряду Фабера (1.19) функції $f \in A(\overline{\Omega})$;

$$V_m^n(f,z) = V_m^n(f,\bar{\Omega},z) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{\nu=m}^{n} S_\nu(f,z)$$

— сума Валле Пуссена ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$;

$$Z_n^k(f,z) = Z_n^k(f,\Omega,z) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) a_\nu F_\nu(z)$$

— нормальні середні Зігмунда ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$. Домовимося в цьому розділі під символом $\|f(\cdot)\|$ розуміти $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$.

В роботах [76, 77, 78] М.П.Тіманом отримано порядок відхилення нормальних середніх Зігмунда ряду Фур'є 2π-періодичних неперервних функцій, а саме справедливе таке твердження

Теорема 4.1 (М.П.Тіман [76]). *Нехай* $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $Z_n^k(f,x) = \sum_{\nu=0}^n \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) A_\nu(f,x)$ $k > 0$ — *її нормальні середні Зігмунда. Тоді*

$$\|f(x) - Z_n^k(f,x)\|_{L_p} \leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f)_{L_p},$$

де стала M_k *залежить від* k *і не залежить від* f *та* n.

Там же показано існування таких функцій, для яких дана оцінка є точною по порядку.

В даному розділі отримано для областей Фабера Ω оцінку для відхилень нормальних середніх Зігмунда ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$, яка залежить від поведінки послідовності найкращих наближень $E_n(f)$.

Сформулюємо допоміжні твердження. Для областей Фабера має місце таке твердження.

Лема 4.1. *Нехай* Ω — *однозв'язна область Фабера, а функція* $f \in A(\overline{\Omega})$. *Тоді*

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| \leq M \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f, \overline{\Omega}), \tag{4.1}$$

де $0 \leq m \leq n$, $n = 1, 2, \ldots$, *стала* M *не залежить від* f *та* n.

Доведення. Нехай $p_n(z)$ — поліном степеня не вище n, який найкраще наближає функцію $f \in A(\overline{\Omega})$ в рівномірній метриці. Тоді

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| = \frac{1}{n-m+1} \Big\| \sum_{k=m}^{n} \Big(f(z) - \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu F_\nu(z)\Big) \Big\| =$$

$$= \frac{1}{n-m+1} \Big\| \sum_{k=m}^{n} [f(z) - p_m(z) - S_k(f - p_m, \overline{\Omega}, z)] \Big\| \leq$$

$$\leq E_m(f, \overline{\Omega}) + \frac{1}{n-m+1} \Big\| \sum_{k=m}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu (f - p_m) \cdot F_\nu(z) \Big\|.$$

Використаємо теорему 1.13 та аналітичність в одиничному крузі функцій $(f(\Psi(t)) - p_m(\Psi(t)))t^k, k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| \le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)}\times$$

$$\times\Big\|\int_{|t|=1}\int_{\mathbb{T}}\sum_{k=m}^{n}(f(\Psi(t)) - p_m(\Psi(t)))\left(\frac{1}{t} + \sum_{\nu=1}^{k}\Big(\frac{\zeta^\nu}{t^{\nu+1}} + \frac{t^{\nu-1}}{\zeta^\nu}\Big)\right)dt d\mu_z(\zeta)\Big\| =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)}\Big\|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=m}^{n}(f(\Psi(e^{i\varphi})) - p_m(\Psi(e^{i\varphi})))\times$$

$$\times\left(1 + \sum_{\nu=1}^{k}(e^{i\nu(\tau-\varphi)} + e^{i\nu(\varphi-\tau)})\right)d\varphi d\mu_z(e^{i\tau})\Big\| \le$$

$$\le E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{E_m(f,\overline{\Omega})}{2\pi^2(n-m+1)}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=m}^{n}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu\varphi\Big)\Big|d\varphi\int_0^{2\pi}|d\mu_z(e^{i\tau})|.$$

Відомо [84], що

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Big(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu\varphi\Big)\Big|d\varphi \le M(n+1),\ |\alpha_k| \le 1,$$

тоді, врахувавши (1.21), остаточно матимемо

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| \le M\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f,\overline{\Omega}).$$

Лему доведено.

4.2. Наближення рядів Фабера аналітичних функцій в однозв'язних областях середніми Зігмунда

Теорема 4.1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область Фабера, функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді*

$$\|f(z) - Z_n^k(f,z)\| \leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де стала M_k залежить від k і не залежить від f та n.

Доведення. На основі умов теореми маємо розклад $f \in A(\overline{\Omega})$ в ряд Фабера

$$f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z).$$

Легко бачити, що

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu F_\nu(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k (f(z) - S_{\nu-1}(z) - f(z) + S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)^k (f(z) - S_\nu(z)) - \sum_{\nu=0}^{n} \nu^k (f(z) - S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big((\nu+1)^k - \nu^k\Big)(f(z) - S_\nu(z)) - n^k (f(z) - S_n(z)).$$

Тому

$$\|f(z) - Z_n^k(f,z)\| = \|f(z) - \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) a_\nu F_\nu(z)\| \leq$$

$$\leq \left\| f(z) - S_n(z) + \frac{1}{(n+1)^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu F_\nu(z) \right\| \leq$$

$$\leq \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right) \|f(z) - S_n(z)\| +$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\left\|\sum_{\nu=0}^{n-1}((\nu+1)^k-\nu^k)(f(z)-S_\nu(z))\right\|. \tag{4.2}$$

Оскільки послідовність найкращих рівномірних наближень є монотонною, то справедлива така нерівність:

$$E_n(f,\overline{\Omega}) \le \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega}),$$

де M_k — стала, що залежить лише від k.

Тоді з урахуванням цієї нерівності, того, що $V_n^n(f,z)=S_n(z)$, та (4.1) для першого доданку правої частини співвідношення (4.2) матимемо

$$\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right)\|f(z)-S_n(z)\| \le$$

$$\le M\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right)(n+1)E_n(f,\overline{\Omega}) \le M_kE_n(f,\overline{\Omega}) \le$$

$$\le \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega}). \tag{4.3}$$

Для зручності покладемо $A_\nu=(\nu+1)^k-\nu^k$, виберемо $m\in N$ таке, що $2^m \le n < 2^{m+1}$. Представимо другий доданок правої частини співвідношення (4.2) у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu(f(z)-S_\nu(z)) = f(z)-S_0(z)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}A_\nu(f(z)-S_\nu(z))+\sum_{\nu=2^m}^{n-1}A_\nu(f(z)-S_\nu(z)). \tag{4.4}$$

Оскільки

$$S_m(z)=(n-m+1)V_m^n(f,z)-(n-m)V_{m+1}^n(f,z),$$

то після перетворення Абеля матимемо

$$\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu(f(z)-S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu\Big((2^{\mu+1}-\nu)(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z))-$$

$$-\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu(2^{\mu+1}-\nu-1)\Big(f(z)-V_{\nu+1}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)-$$

$$-\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1} A_{\nu-1}(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) =$$

$$= 2^\mu A_{2^\mu}\Big(f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)+$$

$$+\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big). \tag{4.5}$$

Аналогічні перетворення виконаємо в сумі

$$\sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu(f(z)-S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu\Big((n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z))-(n-\nu)(f(z)-V_{\nu+1}^n(f,z))\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z))-$$

$$-\sum_{\nu=2^m+1}^{n} A_{\nu-1}(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)) =$$

$$= A_{2^m}(n-2^m+1)(f(z)-V_{2^m}^n(f,z))-A_{n-1}(f(z)-V_n^n(f,z))+$$

$$+\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)). \tag{4.6}$$

З урахуванням (4.5) та (4.6) рівність (4.4) запишеться так:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu(f(z)-S_\nu(z))=f(z)-S_0(z)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m-1}2^\mu A_{2^\mu}\Big(f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)$$

$$+A_{2^m}(n-2^m+1)(f(z)-V_{2^m}^n(f,z))-A_{n-1}(f(z)-V_n^n(f,z))+$$

$$+\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)).$$

З останнього співвідношення отримаємо наступну нерівність

$$\frac{1}{(n+1)^k}\left\|\sum_{\nu=0}^{n-1}A_\nu(f(z)-S_\nu(z))\right\|\leq\frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-S_0(z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^\mu A_{2^\mu}\|f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\|f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}A_{2^m}(n-2^m+1)\|f(z)-V_{2^m}^n(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}A_{n-1}\|f(z)-V_n^n(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(n-\nu+1)\|f(z)-V_\nu^n(f,z)\|=$$

$$=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6. \tag{4.7}$$

Оцінимо кожен з доданків суми (4.7), врахувавши монотонність послідовності найкращих рівномірних наближень $E_\nu(f,\overline{\Omega})$ та лему 4.1:

$$d_1 = \frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-S_0(z)\| = \frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-V_0^0(f,z)\| \leq$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)^k}E_0(f,\overline{\Omega}) \leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_2 = \frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^\mu\left((2^\mu+1)^k-2^{\mu k}\right)\|f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\| \leq$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^{(\mu+1)k+1}E_{2^\mu}(f,\overline{\Omega}) \leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_3 \leq \frac{M}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\frac{2^{\mu+1}}{2^{\mu+1}-\nu}E_\nu(f,\overline{\Omega}) \leq$$

$$\leq \frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^{\mu k}E_{2^\mu}(f,\overline{\Omega}) \leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_4 \leq \frac{M}{(n+1)^k}((2^m+1)^k-2^{mk})(n-2^m+1)\frac{n+1}{n-2^m+1}E_{2^m}(f,\overline{\Omega}) \leq$$

$$\leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega}) \leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_5 \leq \frac{M}{(n+1)^k}(n^k-(n-1)^k)(n+1)E_n(f,\overline{\Omega}) \leq M\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-1}E_n(f,\overline{\Omega}) \leq$$

$$\leq \frac{M_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

при оцінці d_6 слід врахувати, що $n < 2\nu$, $\nu > 2^m$,

$$d_6 \leq \frac{M}{(n+1)^k} \sum_{\nu=2^m+1}^{n-1} (A_\nu - A_{\nu-1})(n-\nu+1) \frac{n+1}{n-\nu+1} E_\nu(f, \overline{\Omega}) \leq$$

$$\leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}).$$

З оцінок для d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 та d_6 випливає оцінка і для

$$\frac{1}{(n+1)^k} \left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} ((\nu+1)^k - \nu^k)(f(z) - S_\nu(z)) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}). \tag{4.8}$$

З (4.2) та (4.8) отримуємо, що

$$\|f(z) - Z_n^k(f, z)\| \leq \frac{M_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \bar{\Omega})$$

Теорему доведено.

Наслідок 4.1. Нехай Ω — однозв'язна область Фабера, а функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді

$$\|f(z) - \sigma_n(f, z)\| \leq \frac{M}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де $\sigma_n(f, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_n(z)$ і стала M не залежить від f та n.

Для областей Радона дану оцінку отримано в роботі [88].

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — строго монотонно спадна до 0 числова послідовність. Позначимо через $A_\epsilon(\overline{\Omega})$ множину функцій $f \in A(\overline{\Omega})$ таких, що

$$E_n(f, \overline{\Omega}) \leq \varepsilon_{n+1},$$

а через $Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega}))$ — верхню грань

$$Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega})) = \sup_{f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})} \left\| f(z) - Z_n^k(f, z) \right\|.$$

Теорема 4.2. *Якщо для області Ω оператор Фабера T_Ω і обернений оператор Фабера T_Ω^{-1} є обмеженими, то для множини $f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ існують сталі M_1 та M_2 такі, що*

$$\frac{M_1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}\varepsilon_{\nu+1} \le Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega})) \le \frac{M_2}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}\varepsilon_{\nu+1}. \tag{4.9}$$

Доведення. Права частина нерівності (4.9) випливає з теореми 1.

Доведемо ліву частину цієї нерівності. Для цього побудуємо функцію $f^* \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ таку, що

$$\left\|f^*(z) - Z_n^k(f,z)\right\| \ge \frac{M_1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}\varepsilon_{\nu+1}.$$

Покладемо

$$f_1(w) = \frac{\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})w^\nu,\ |w| \le 1, \tag{4.10}$$

де

$$K = \frac{1}{2}\sup_{z\in\Omega}\int_{\mathbb{T}}|d\mu_z(\zeta)| < \infty,$$

$\{\mu_z\}_{z\in\Omega}$, $\mu_z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$— функція обмеженої варіації.

За допомогою оператора Фабера одержимо таку функцію:

$$f^*(z) = T_\Omega(f_1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_1(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}d\zeta, z \in G.$$

Внаслідок збіжності ряду (4.10) маємо розклад в ряд Фабера функції $f^*(z)$, рівномірно збіжний в замкненій області $\overline{\Omega}$

$$f^*(z) = \frac{\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})F_\nu(z).$$

За допомогою оберненого оператора Фабера знайдемо

$$f_1(w) = T_\Omega^{-1}(f^*)(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f^*(\Psi(t))}{t-w}dt, |w| \le 1. \tag{4.11}$$

Відомо, що оператор (4.11) існує за умови (див. [70] с. 154)

$$\int_{|t|=1} |f^*(\Psi(t))|\,|dt| = \int_{\Gamma} |f^*(\zeta)|\,|\Phi(\zeta)||d\zeta| < \infty.$$

З (4.10) при $|w| \le 1$ отримуємо

$$|f_1(w)| \le \frac{\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \le \frac{\pi\varepsilon_0}{K}.$$

З (1.21), (1.23) та останньої рівності випливає

$$\|f^*(z)\| = \|T_\Omega(f_1)(z)\| = \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\mathbb{T}} f_1(\zeta)d\mu_z(\zeta)\right\| \le M\|T_\Omega\|\varepsilon_0,$$

тобто умова існування оператора (4.11) виконується. Тоді

$$\left\|f_1(w) - Z_n^k(f_1, w)\right\| = \|T_\Omega^{-1}(f_1 - Z_n^k(f_1))(w)\| \le$$

$$\le \|T_\Omega^{-1}\| \cdot \|f^*(z) - Z_n^k(f^*, z)\|.$$

Отже,

$$\left\|f^*(z) - Z_n^k(f^*, z)\right\| \ge M\left\|f_1(w) - Z_n^k(f_1, w)\right\|$$

Врахувавши, що $\|f_1(z)\| \ge |f_1(z_0)|$, та поклавши $z_0 = 1$, матимемо

$$\left\|f^*(\Psi(w)) - Z_n^k(f^*, \Psi(w))\right\| \ge$$

$$\ge \frac{M\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) - \frac{M\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right)(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) =$$

$$= \frac{M\pi}{K}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) + \frac{M\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) =$$

$$= \frac{M\pi}{K}\varepsilon_{n+1} + \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) =$$

$$= \frac{M\pi}{K}\varepsilon_{n+1} + \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_\nu - \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_{\nu+1} =$$

$$= \frac{M\pi}{K}\varepsilon_{n+1} + \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_\nu - \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n+1}(\nu-1)^k\varepsilon_\nu \geq$$

$$\geq \frac{M\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^k-(\nu-1)^k\right)\varepsilon_\nu \geq$$

$$\geq \frac{Mk\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu-1)^{k-1}\varepsilon_\nu.$$

Звідси випливає, що існує така стала M_1, що

$$\left\|f^*(\Psi(w)) - Z_n^k(f^*,\Psi(w))\right\| \geq \frac{M_1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}\varepsilon_{\nu+1}.$$

Покажемо тепер, що $f(z) \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$. Дійсно,

$$E_n(f^*,\overline{\Omega}) \leq \frac{\pi}{2K}\left\|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})F_\nu(z)\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2K}\left\|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})\int_{\mathbb{T}}\zeta^\nu d\mu_z(\zeta)\right\| \leq \varepsilon_{n+1}.$$

Теорему доведено.

Висновки до розділу 4

У даному підрозділі одержано порядкові оцінки для відхилень нормальних середніх Зигмунда ряду Фабера аналітичних в обмеженій області та неперервних на її замиканні функцій, виражені через найкращі наближення.

Так, в підрозділі 4.1 досліджено наближення аналітичної в області Ω та неперервної на її замиканні функції середніми Валле Пуссена в термінах найкращих наближень функції f.

В підрозділі 4.2 отримано для області Фабера Ω оцінку для відхилень нормальних середніх Зігмунда ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$, яка залежить від поведінки послідовності найкращих наближень $E_n(f)$. Крім того, показано, що за деяких умов на область дана оцінка є точною за порядком.

Основні результати, що висвітлені в даному розділі, опубліковано в [4].

ВИСНОВКИ

1. Одержано нерівність типу Лебега для сум Фур'є на класі функцій $C^{\bar{\psi}}C$, виражену через найкращі наближення $f^{\bar{\psi}}$ тригонометричними поліномами порядку не вище n. Показано, що отримана нерівність є точною на деякому класі в $C^{\bar{\psi}}C$.

2. Одержано нерівність типу Лебега-Ландау для сум Тейлора на класі аналітичних функцій H^{ψ}_{∞}, виражену через найкращі наближення f^{ψ} алгебраїчними поліномами порядку не вище n, показано існування функції, для якої дана нерівність є точною, отримано асимптотично точну оцінку для верхніх граней норми відхилень частинних сум ряду Тейлора від функції.

3. Отримано оцінки швидкостей збіжності груп відхилень функцій з класів $C^{\bar{\psi}}C$ та H^{ψ}_{∞}, що виражені через величину найкращого наближення відповідно функцій $f^{\bar{\psi}}$ та f^{ψ}, також отримано оцінки деяких функціоналів, що стосуються теорії сильного підсумовування функцій із заданих класів.

4. Встановлено критерій регулярності лінійних методів підсумовування Λ, що задаються нескінченно рядковими матрицями дійсних чисел, у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$. Також показано існування нерегулярних методів підсумовування у просторі неперервних функцій C, але регулярних у просторі аналітичних функцій $A(\overline{D})$. Наведено більш прості, але достатні умови регулярності прямокутного методу підсумовування в просторі $A(\overline{D})$, що виражаються безпосередньо через елементи матриці Λ.

5. Встановлено швидкість наближення функцій, що є аналітичними в областях Фабера та неперервними на їх замиканні нормальними середніми Зигмунда їх рядів Фабера, що виражається через величину найкращого наближення цих функцій алгебраїчними поліномами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альпер С. Я. О наилучшем приближении функций, представимых лакунарными рядами Фурье и Тейлора / С. Я. Альпер // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1963. — Т.27, №4. — С. 747–760.

2. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций / К. И. Бабенко // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1958. — Т. 22, №5. С. 631–640.

3. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.

4. Гаєвський М.В. Наближення заданих в обмеженій області аналітичних функцій нормальними середніми Зігмунда їх рядів Фабера / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, №1. — С. 61 – 74.

5. Гаєвський М.В. Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$-диференційовних функцій / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, №1. — С. 59 – 68.

6. Гаєвський М.В. Оцінка групи відхилень $\bar{\psi}$-диференційовних функцій / М.В. Гаєвський // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, №3. — С. 56 – 70.

7. Гаєвський М.В. Оцінки групи φ-відхилень аналітичних функцій / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та су-

міжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, №4. — С. 156 – 166.

8. Гаєвський М.В. Наближення аналітичних функцій частинними сумами їх рядів Тейлора / М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, №12. — С. 1602 – 1619.
9. Гаєвський М.В. О регулярности некоторых методов суммирования рядов Тейлора / М.В. Гаевский, Т.В. Гориславец, П.В. Задерей // Теорія наближення функцій та її застосування: тези доповідей Міжнар. конференції, присвяченої 70-річчю з дня народження член.-кор. НАН України, професора О. І. Степанця — Київ: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 35.
10. Гаєвський М.В. Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$-диференційовних функцій /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — С. 225.
11. Гаєвський М.В. Наближення аналітичних функцій лінійними методами підсумовування їх рядів Тейлора /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. — Івано-Франківськ: ПНУ ім. В. Стефаника, 2014. — С. 53.
12. Гаєвський М.В. Про лінійні методи підсумовування рядів Тейлора аналітичних функцій /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислюваль-

на математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 46.

13. Гаєвський М.В. Збіжність групи φ-відхилень рядів Тейлора /М.В. Гаєвський, П.В. Задерей // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. — Івано-Франківськ: ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника”, 2015. — С. 16.

14. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер — М.: Мир, 1986. — 216 с.

15. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. — М.: Мир, 1984.— 469 с.

16. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. / Г. М. Голузин. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

17. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. / К. Гофман. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 331 с.

18. Дзядик В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. / Дзядык В.К. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

19. Дынькин Е. М. О равномерном приближении многочленами в комплексной области. / Е. М. Дынькин // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1974. — Т. 47. — С. 164–165.

20. Дынькин Е. М. О равномерном приближении функций в жордановых областях. / Е. М. Дынькин // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 4. — С. 775–786.

21. Ефимов А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1958. — Т.22, №1. С. 81–116.

22. Ефимов А. В. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1960. — Т.24, №2. С. 243–296.

23. Ефимов А. В. Оценка интеграла от модуля многочлена на единичной окружности./ А. В. Ефимов // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, №4. — С. 215–218.

24. Задерей П. В. Об уклонении $(\psi, \bar{\beta})$-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье. / П. В. Задерей. // Preprint Institute of mathematics Polish Academy of Sciences, XXXIV semester in Banach center theory of real functions; 482. — 1990. — Варшава. — С. 96–110.

25. Задерей П. В. О сходимости в пространстве L_1 рядов Фурье. / П. В. Задерей, Б. А. Смаль // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №5. — С. 639–646.

26. Задерей Н. М. Про нерівність Лебега на класах $\overline{\psi}$-диференційовних функцій / Н. М. Задерей, П. В. Задерей // Укр. мат. журн.. - 2013. - 65, № 6. - С. 844–849.

27. Зигмунд А.Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. 615 с.

28. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.

29. Канторович Л. В. Функциональный анализ. / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов — М.: Наука, 1984. — 752 с.

30. Колмогоров А. Н. Избр. труды. Математика и механика. / А.Н. Колмогоров — М.: Наука, 1985. — С. 179–185.

31. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. /А. Н. Колмогоров,С. В. Фомин — М.: Наука, 1976. — 543 с.

32. Кусис П. Введение в теорию пространств H_p (с приложением доказательства Волффа теоремы о короне) / П. Кусис. — М.: Наука, 1984. — 368 с.

33. Ласурия Р. А. Оценки группы φ-отклонений и сильная суммируемость рядов Тейлора функций классов $A^{\psi}H_{\infty}(D)$. /Р. А. Ласурия // Матем. заметки — 2008. — Т.83, №5. — С. 696–704.

34. Ласурия Р. А. Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций /Р. А. Ласурия — Сухум: АГУ, 2010. — 260с.

35. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т.1. / А. И. Маркушевич — М.: Наука, 1984. — 368 с.

36. Никольский С. М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье / С. М. Никольский // ДАН СССР — 1941. — Т. 32, №6. — С. 386–389.

37. Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье. /С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1948. — Т. 12, №3. — С. 259-–278.

38. Никольский С. М. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1949. — Т.13, №6. — С. 513–532.

39. Осколков К. И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры. /К. И. Осколков // Мат. заметки. — 1975. — Т. 18, №4. — С.515-526.

40. Осколков К. И. О частных суммах ряда Тейлора ограниченной аналитической функции / К. И. Осколков // Теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР. — 1981. — Т. 157. — С 153–160.

41. Пачулиа Н. Л. О поведении группы уклонений на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / Н. Л. Пачулиа, А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1988. — Т. 40, № 1. — С.101–105.

42. Пачулиа Н. Л. Сильная суммируемость рядов Фурье на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций / Н. Л. Пачулиа, А. И. Степанец // Матем. заметки — 1988. — Т.44, №4. — С. 506 – 516.

43. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я. / В. Т. Пинкевич // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — Т.4,№6. — С. 521–528.

44. Привалов И. И. Субгармонические функции. / И. И. Привалов — М.: ОНТИ, 1937. — 201 с.

45. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. / И. И. Привалов — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 336 с.

46. Рис Ф. Лекции по функциональному анализу. / Ф. Рис, Б. Сёкефальфи-Надь — М.: Мир, 1979. — 587 с.

47. Рудин У. Теория функций в поликруге / У. Рудин . — М.: Мир, 1974. — 160 с.

48. Савчук В.В. Асимптотика залишку ряду Тейлора для аналітичних функцій / В.В. Савчук // Ряди Фур'є: теорія і застосування/ Праці Ін-ту математики НАН України. — 1998. — Т. 20. — С .263–279.

49. Савчук В. В. Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій. / В. В. Савчук // Укр. матем. журн. — 1998. — Т.50, №7. — С. 1001–1003.

50. Савчук В. В. Області Фабера і задача О. І. Степанця. / В. В. Савчук // Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України, 2002. — Т. 35. — С. 151–163.

51. Савчук В. В. Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена /В. В. Савчук,М. В. Савчук, С. О. Чайченко // Мат. студії. — 2010. — Т.34, № 2. — С. 207 − 219.

52. Сердюк А.С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці. / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — Т.57, № 8. — С.1079–1096.

53. Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И.Смирнов, Н.А.Лебедев — М: Наука, 1964. — 440 с.

54. Степанец А. И. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье. / А. И. Степанец // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1986. — Т.50., №1. — С. 101–136.

55. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. / А. И. Степанец — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

56. Степанец А. И. К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций. / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1989. — Т.41, № 4. — С.499–510.

57. Степанец А. И. Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. / А. И. Степанец // Препр. АН Украины. Ин-т математики; 96.11 — Киев, 1996. — 70 с.

58. Степанец А. И. Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №2. — С. 274-291.

59. Степанец А. И. Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т.50, №3. — С. 388-400.

60. Степанец А. И. Скорость сходимости группы отклонений на множествах $\overline{\psi}$-интегралов / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, №12. — С. 1673 – 1693.

61. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2-х т. / А. И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 427 с.

62. Степанец А.И. Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций. / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // - Укр. мат. журн. — 2000. — Т.52, №3. — С.375–395.

63. Степанець О. І. Наближення сумами Фур'є класів згорток: нові результати. / О. І. Степанець // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, № 5.

— С.581—602.

64. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2-х т. / А. И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.

65. Степанец А. И. Приближения интегралов типа Коши. / А. И. Степанец, В. В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №5. — С. 706 – 740.

66. Стечкин С. Б. К проблеме множителей для тригонометрических полиномов. / С. Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.75, №2. — С. 165-–168

67. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1953 — Т.17, №5. — С. 461–472.

68. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.

69. Стороженко Э. А. Приближение функций класса Hp, $0<p<1$ / Э. А. Стороженко // Матем. сб. — 1978.— Т. 105, №4. — С. 601–621.

70. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. / П. К. Суетин — М.: Наука, 1984. — 336 с.

71. Теляковский С. А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье. / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т.28, №6. — С. 1209 – 1236.

72. Теляковский С. А. Асимптотическая оценка интеграла от модуля функции, заданной рядом из синусов. / С. А. Теляковский // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т.8, №6. — С. 1416–1422.

73. Теляковский С. А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. / С. А. Теляковский // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР. — 1971. — Т.109. — С. 65-97.

74. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Матем. заметки. — 1968. — Т. 4, №3. С. 291–300.

75. Тайков Л. В. О методах суммирования рядов Тейлора. /Л. В. Тайков // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1962. — Т.26, №4. — С. 625–630.

76. Тиман М. Ф. Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение. / М. Ф. Тиман. // Докл. АН СССР. — 1962. — т. 145, № 4. – С. 741–743.

77. Тиман М. Ф. Наилучшее приближение и линейные методы суммирования рядов Фурье. / М. Ф. Тиман. // Изв. АН СССР, сер. Математика. — 1965. — Т. 29. — С. 587-604.

78. Тиман М. Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций. / М. Ф. Тиман — К.: Наукова думка, 2009. — 376 с.

79. Тригуб Р. М. Приближение непрерывных периодических функций с ограниченной производной полиномами. /Р. М. Тригуб // Теория отображений и приближение функций. — 1989. — Киев: Наукова думка. — С. 185–195.

80. Хавин В. П. Пространства аналитических функций. /В. П. Хавин // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. — 1964. — М.: ВИНИТИ, 1966. — С. 76–164.

81. Хавинсон С. Я. Аналитические функции ограниченного вида (граничные и экстремальные свойства) / С. Я. Хавинсон // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1963. — М.: ВИНИТИ, 1965. — С. 5–80.

82. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

83. Фомин Г. А. О линейных методах суммирования рядов Фурье. / Г. А. Фомин // Матем. сб. — 1964. — Т.65, №107. — С. 144–152.

84. Фомин Г. А. Об одном классе тригонометрических рядов. / Г. А. Фомин // Мат. заметки. — 1978. — Т.23, №2. — С. 213–222.

85. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре / С. В. Шведенко // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 23, ВИНИТИ АН СССР., М. — 1985. — Т. 23 — С. 3 – 124.

86. Швецова А. М. Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций, аналитических в единичном круге. / А. М. Швецова // Вiсник Харкiв. нац. ун–ту. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". — 2000. — Т.475. — С. 208–217.

87. Швецова А. М. Приближение частными суммами Фурье и наилучшее приближение некоторых классов функций / А. М. Швецова // Analysis Mathematica — 2001. — V.27. — P. 212-222.

88. Abdullayev F. On the approximation of analytic functions by Fejer sums of Faber polynomials. /F. Abdullayev,N. Zaderey,P. Zaderey // Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"—- 2011. —Sofia. — P. 13–18.

89. Alexits G. Über den Annaherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen / G. Alexits, D. Králik // Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Kozl. — 1963. — V. 8. — P. 317–327.

90. Anderson J.M. The Faber operator. / J.M. Anderson // Rational Approximation and Interpolation — Berlin: Springer Lecture Notes in Mathematics, V. 1105 , 1984. — P. 1–10.

91. Dienes P. The Taylor series. / P. Dienes — New York: Dover Publ., 1957. — 552 p.

92. Duren P. Theory of H_p Spaces / P. Duren — New York: Academic Press, 1970. — 258 p.

93. Fejer L. Untersushungen uber Fouriesche Reihe / L. Fejer // Ann. Math. — 1904. — V. 58. — P. 501–569.

94. Gaevskij M. V. On regularity of linear summation methods of Taylor series / M. V. Gaevskij, P. V. Zaderey // Methods of Functional Analysis and Topology — 2015. — V. 1, №21. — P. 56 – 68.

95. Hardi G. The strong summability of Fourier series / G. Hardi, J. Littlewood // Fund. Math. — 1935. — V. 25. — P. 162–189.

96. Karamata J. Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues. /J. Karamata,M. Tomić // Publications de l'Institut Mathe'matique. — 1955. — V. 8. — P. 123–138.

97. Kolmogorov A. Zur Grossenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. / A. Kolmogorov // Ann. of Math. — 1935. — V. 36, №2. — P. 521–526.

98. Leindler L. A survey of certain results on strong approximation by orthogonal series / L. Leindler // Central European Journal of Mathematics — 2004.— V.2, №3 — P. 448–477.

99. Lozinski S. On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes. / S. Lozinski // Матем. сб. — 1944. — T.14, №3. — C. 175–268.

100. Landau E. Darstellung und Begrundung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie. / E. Landau — Berlin, 1916. — S. 128.

101. Lebesgue H. Sur la représentation trigonometrique approcheé des founctions satisfaisant a une condition de Lipschitz. /H. Lebesgue // Bull. Soc. Math. France — 1910. — V.38. — P. 184–210.

102. Marcinkievicz J. Sur la summability forte des series de Fourier / J. Marcinkievicz J. // J. London. Math. Soc. — 1939. — V. 14. — P. 162–168.

103. Riesz F. Über Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern. /F. Riesz // Acta Math. — 1920. — V.. 42. — P. 145–171.

104. Scheik J. T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk. / J. T. Scheik // Proc. Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 17, №6. —

P. 1238–1243.

105. Totik V. On the strong approximation of Fourier series. / V. Totik // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1980. — V.35, №1–2. — P. 151–172.

106. Totik V. Notes on Fourier series: strong approximation. / V. Totik // Journal of Approximation Theory — 1985. —- V.43, №2. — P. 105–111.

107. Zygmund A. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence / A. Zygmund // Proc. London. Math. Soc. — 1941. — V. 47. — P. 326-350.