НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович

УДК 517.5

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ТА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННИХ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі математики Державного вищого навчального закладу "Донбаський державний педагогічний університет" Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
САВЧУК Віктор Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
МОТОРНИЙ Віталій Павлович,
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара МОН України, професор
кафедри математичного аналізу і теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет
ім. Івана Франка МОН України, професор
кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет технологій
та дизайну МОН України, завідувач кафедри
вищої математики.

Захист відбудеться " 21 " червня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Україна, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано " 17 " травня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А.С.**

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних, а саме: розв'язанню на заданому класі голоморфних функцій задачі про найкращі лінійні методи наближення, які будуються на основі розвинення в ряд Фур'є по заданій ортонормованій системі; задачі Колмогорова-Нікольського про знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена та інших агрегатів наближення на класах функцій дійсної та комплексної змінних; задачі про отримання нерівностей типу Бернштейна для тригонометричних поліномів, прямих та обернених теорем теорії наближення у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича; задач про обчислення точних значень величин найкращих наближень та поперечників множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей. Перелічені задачі є основними задачами сучасної теорії наближення.

Систематичні дослідження, пов'язані з можливістю наближеного зображення функцій за допомогою більш простих агрегатів (у ролі яких виступають алгебраїчні многочлени, тригонометричні поліноми чи раціональні функції), беруть свій початок у 50-их роках XIX сторіччя в класичних працях П.Л. Чебишева. Уже з перших кроків свого розвитку, від фундаментальних теорем К. Вейєрштраса (1885 р.) й К. Рунге (1885 р.), теорія наближення розгалужується на два напрями (дійсний і комплексний), які розвиваються пліч-о-пліч, доповнюючи й збагачуючи один одного новими методами та результатами.

Наближення функцій дійсної змінної, як теорія, сформувалися у повноцінний розділ математичного аналізу на початку XX-го сторіччя у працях Д. Джексона, С.Н. Бернштейна та Ш. Валле Пуссена. Примітно, що у цих працях головну увагу було приділено дослідженням питань апроксимації індивідуальних функцій. Починаючи з 30-их років XX-го століття з розвитком функціонального аналізу в теорії наближення стали актуальними дослідження апроксимаційних процесів як лінійних операторів на класах функцій у тих чи інших функціональних просторах. У цьому напрямку основоположні результати отримали А.М. Колмогоров, Ж. Фавар, Б. Надь, М.Г. Крейн, Н.І. Ахієзер та С.М. Нікольський.

Так, зокрема, завдяки працям А.М. Колмогорова (1935 р.) і С.М. Нікольського (1940 р.) постала одна з важливих задач теорії наближення — задача про знаходження асимптотичних рівностей вигляду

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \quad n \to \infty,$$

для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_n(f; \cdot)\|_X,$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас 2π-періодичних функцій, $U_n(f;x)$ — тригонометричні поліноми, що породжуються даним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є, а X — лінійний нормований простір. Сьогодні цю задачу називають задачею Колмогорова-Нікольського.

У комплексному випадку аналогічні проблеми вперше піддалися дослідженню лише в другій половині минулого століття в працях С.Б. Стєчкіна (1953), К.І. Бабенка (1958 р.), Л.В. Тайкова (1963 р., 1967 р.), Дж.Т. Шейка (1966 р.) і В.І. Білого (1967 р.).

У подальшому значний внесок у розвиток проблематики, пов'язаної з розв'язанння задачі Колмогорова-Нікольського, внесли В.К. Дзядик, О.В. Єфімов, П.В. Задерей, М.П. Корнєйчук, В.П. Моторний, Б. Надь, В.І. Рукасов, В.В. Савчук, А.С. Сердюк, О.І. Степанець, С.Б. Стєчкін, С.О. Теляковський, О.П. Тіман, Р.М. Тригуб та інш.

Напрям сучасної теорії наближення цілими функціями експоненційного типу сформувався завдяки працям С.Н. Бернштейна (1910 р.) і був розвинений у 30 – 50-их роках минулого сторіччя Н. Вінером, Н. Пелі, Н.І. Ахієзером, М.В. Кєлдишем та С.М. Нікольським. Реалізовуючи ідею С.Н. Бернштейна про побудову теорії наближення функцій, заданих на дійсній осі, як теорію, що включає і теорію наближення періодичних функцій, О.І. Степанець розробив метод розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського для операторів Фур'є (які діють у підпростір цілих функцій експоненційного типу, а кожній 2π-періодичній функції ставлять у відповідність її частинну суму ряду Фур'є) у просторах локально інтегровних за Лебегом на дійсній осі функцій.

У працях В.В. Савчука (1998 – 2013 р.) вдало поєднано методи дослідження наближень періодичних функцій дійсної змінної з суто комплексними методами і застосовано їх до розв'язання екстремальних задач для класів аналітичних функцій, які зображуються інтегралами типу Коші. Зокрема, розв'язано задачу Колмогорова-Нікольського для частинних сум Тейлора, Фейєра та Абеля-Пуассона.

Задача Колмогорова-Нікольського і дотепер перебуває у колі наукових інтересів провідних фахівців із теорії наближення, що залишає її актуальною, як і раніше. Зокрема, важливими видаються досліджeня нерозв'язаних проблем щодо апроксимаційних властивостей класичних і нових методів наближення на класах ψ-диференційовних 2π-періодичних та локально інтегровних за Лебегом на дійсній осі функцій, а також функцій, голоморфних в одиничному крузі.

Результати С.М. Нікольського (1946 р.), С.Я. Хавінсона (1949 – 1963 р.), А. Макінтайра й В. Рогозинського (1950 р.), В. Рогозинського й Г. Шапіро (1953 р.), В.В. Савчука (2007 – 2009 р.) уможливлюють розгляд з єдиної точки зору різних за постановкою екстремальних задач для функцій, аналітичних у крузі. Згідно з цими результатами важливі екстремальні задачі теорії апроксимації зводяться до обчислення норми певного функціонала, що, у свою чергу, зводиться до обчислення величини найкращого наближення конкретної функції (твірного ядра) певним підпростором голоморфних функцій. Тому, актуальною також є задача про побудову найкращого методу наближення просторів аналітичних функцій в областях комплексної площини, відмінних від круга, зокрема, у верхній півплощині.

Останнім часом спостерігається значний інтерес до досліджень, у тому числі і в теорії наближення, що проводяться у просторах Лебега зі змінним показником та у просторах Орлича. На думку фахівців (як це відображено у багатьох монографіях) такий інтерес обумовлено, насамперед, важливими застосуваннями цих просторів у теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів та варіаційному численні.

Простори Лебега зі змінним показником та простори Орлича були запроваджені В. Орличем у 30-их роках минулого сторіччя. У працях Х. Накано (1950 – 1953 р.) їх використовували як приклади так званих модулярних просторів, що, так само, досліджувалися декількома науковими центрами, найважливіші з яких були зосереджені у Польщі (W. Orlicz, X.W. Birnbaum), в Японії (H. Nakano), у СРСР (М.О. Красносельський, Я.Б. Рутицький) та у Нідерландах (W.A.I. Luxemburg, A.C. Zaanen). Суттєвий внесок у розвиток теорії просторів Лебега зі змінним показником та просторів Орлича зробили D.W. Boyd, L. Diening, O. Kováčik, В. Кокілашвілі, M. Krbes, J. Lindenstrauss, J. Musielak, A. Nekvinda, J. Rakósník, M.M. Rao, Z.D. Ren, L. Tzafriri, П.Л. Ульянов, І.І. Шарапудінов та ін.

Сучасні дослідженння багатьох математиків (зокрема, R. Akgün, Р.А. Бандалієв, A. Guven, L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, D.M. Israfilov, M. Khabazi, M. Ružička, S.G. Samko та ін.) з теорії наближення у цих просторах слід розцінювати як "паралельне перенесення" класичної теорії наближення в "некласичні" простори Лебега та простори Орлича. У цьому напрямку досягнуто значного прогресу, але не повної завершеності. Тому актуальною є задача систематизації теорії наближення у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на основі більш загальної класифікації періодичних функцій, що використовує поняття ψ-похідної та ψ-інтеграла. Крім того, важливим та актуальним є питання дослідження властивостей дискретних аналогів просторів зі змінним показником та просторів Орлича.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі математики Державного вищого навчального закладу "Донбаський державний педагогічний університет" у межах фундаментального наукового дослідження "Конструктивні методи аналізу нетерових крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень" (номер державної реєстрації 0115U003182). Результати досліджень також включено в анотовані звіти про виконання фундаментальних науково-дослідних робіт, що фінансувалися за кошти державного бюджету України: "Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії крайових задач" (номер державної реєстрації 0101U000750), "Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії нелінійних коливань" (номер державної реєстрації 0106U001360), "Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії крайових задач" (номер державної реєстрації 0109U000381), "Теорія нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь" (номер державної реєстрації 0112U000372) та звіту про виконання Німецько-українського наукового проекту (реєстраційний номер GZ: 436 UKR 113/103/0-1), що фінансувався Німецьким фондом наукових досліджень (DFG).

Мета і завдання дослідження. Основна мета дисертаційної роботи полягає в розробці методу побудови найкращого лінійного наближення заданого класу голоморфних у верхній півплощині функцій на основі розвинення в ряд Фур'є по заданій ортонормованій системні раціональних функцій, систематизації теорії наближення в просторах Лебега зі змінним показником підсумовування та просторах Орлича на основі більш загальної класифікації періодичних функцій, що використовує поняття ψ-похідної та ψ-інтеграла, а також обчисленні точних значень найкращих наближень і поперечників множин образів діагональних операторів у просторах Орлича числових послідовностей.

Об'єктом дослідження є ряди по системах Такенаки-Мальмквіста, класи функцій дійсної та комплексної змінних, класичні та спеціальні методи наближення, діагональні оператори.

Предметом дослідження є збіжність рядів Фур'є по системах раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі, найкращий лінійний метод наближення, точні верхні межі відхилень класичних та спеціальних методів наближення на класах функцій, прямі та обернені теореми теорії наближення, нерівності типу Бернштейна, норми мультиплікаторів рядів Фур'є, нерівності типу Чебишева, найкращі наближення та поперечники.

Завдання дослідження:

1. Знайти достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності на дійсній осі рядів Фур'є по системах Такенаки-

Мальмквіста.

2. Обчислити точне значення величини найкращого наближення підпросторами голоморфних функцій ядра Коші у верхній півплощині комплексної площини. Побудувати найкращий лінійний метод поточкового й рівномірного наближення класів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ голоморфних у верхній півплощині функцій.

3. Знайти асимптотичні рівності для величин точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках сум Валле Пуссена, а також тригонометричних поліномів $U^*_{n-1}(f;x)$ спеціального вигляду на класах 2π-періодичних функцій.

4. Обчислити величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші.

5. Дослідити раціональні наближення класів 2π-періодичних функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0,2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста.

6. Дослідити властивості оператора-решета $\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)$ на множинах голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

7. Дослідити асимптотичну поведінку норм відхилень операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах функцій, локально інтегровних за Лебегом на дійсній осі. Знайти розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

8. Знайти умови вкладення множин ψ-диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником підсумовування $L^{p(\cdot)}$ та просторах Орлича L_M. Обчислити порядки наближення сумами Фур'є на цих множинах.

9. Довести нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Отримати прямі та обернені теореми теорії наближення на класах ψ-диференційовних і $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.

10. Одержати нові інтегральні нерівності типу Чебишева.

11. Обчислити точні значення найкращих наближень, базисних і колмогорівських поперечників множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей зі змінним показником $l_{\mathbf{p}}$, а також дискретних просторах Орлича l_M.

12. Обчислити точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль цих просторів.

Методи дослідження. Використано апарат математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, теорії двоїстості екстремальних задач, а також новий метод побудови твірних ядер і відповідних їм елементів найкращого наближення.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими й полягають у такому.

1. Знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності на дійсній осі $\mathbb{R}$ рядів Фур'є по системах Такенаки-Мальмквіста.

2. Обчислено точне значення величини $E\,(z, \mathfrak{A})$ найкращого наближення ядра Коші $\mathcal{C}(\cdot, z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi}^{n\perp}$ та в явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення й доведено його єдиність.

3. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового та рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$. Показано, що такий метод є найкращим інтерполяційним методом наближення.

4. Для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум Валле Пуссена на класах L_1^{ψ} і $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0'$ знайдено асимптотичні рівності, які в багатьох важливих випадках дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського.

5. Обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій, що зображуються інтегралами типу Коші.

6. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами на класах функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0, 2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста.

7. Встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках тригонометричних поліномів $U_{n-1}^*(f; x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій, визначених згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера.

8. Описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

9. Для точних верхніх меж відхилень у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ отримано асимптотичні нерівності. Показано, що у випадку, коли $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, усі отримані нерівності перетворюються в асимптотичні рівності, які дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Цю задачу також розв'язано для операторів $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$, $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ у метриці простору $\widehat{L}_1$.

10. Знайдено умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та $L^{\psi}L_M$ в L_N, а також обчислено порядки наближення сумами Фур'є.

11. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах ψ-диференційовних функцій. Зазначено випадки, коли порядки наближення сумами Фур'є збігаються з порядками величин найкращих наближень у цих просторах.

12. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Доведено (зокрема і в термінах аналогів модулів неперервності дробового порядку) обернені теореми теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.

13. Отримано низку інтегральних нерівностей типу Чебишева.

14. Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M.

15. Отримано точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, зображених у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль $U^+_M(\mathbb{A})$ цих просторів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати мають практичне значення в конструктивній теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних, а також вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях із дійсного та комплексного аналізу, механіки, математичної фізики, теорії пружності, теорії диференціальних операторів, варіаційного числення та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямків досліджень належить науковому консультанту В.В. Савчуку. Усі результати, що виносяться на захист, отримано самостійно. Результати, опубліковані в сумісних статтях [2 – 7, 9, 18, 22], отримано особисто, а співавторам належить обговорення та аналіз постановок задач; у сумісних статтях [8, 16, 17, 20, 21] внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);

— International Conference on the occasion of the 150th birthday of A.M. Lyapunov (Kharkiv, Ukraine, June 24 - 30, 2007);

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (Мелітополь, 16 – 21 червня 2008 р.);

— International conference "Mathematical analysis, differential equations and their applications" (Famagusta, North Cyprus, September 12–15, 2008);

— Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.);

— Міжнародній науковій конференції "Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів", присвяченій пам'яті В.К. Дзядика (1919–1998) (Волинська область, Україна, 22–26 серпня 2009 р.);

— Українському математичному конгресі – 2009 до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова (Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 р.);

— Міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу", присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (Чернівці, 30 вересня – 3 жовтня 2010 р.);

— International Conference "Smoothness, Approximation, Function Spaces" (Oppurg, Thuringia, Germany, October 10 – 16, 2010);

— International conference "Approximation Theory and Applications", in memory of N.P. Korneichuk (Ukraine, Dnepropetrovsk, june 14 – 17, 2010);

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942 – 2007) (Кам'янець-Подільський, Україна, 28 травня – 3 червня 2012 р.);

— Міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка

А.М.Самойленка (Слов'янськ, Україна, 12 – 14 червня 2013 р.);

— Міжнародній математичній конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка (Севастополь, Україна, 23 – 30 червня 2013 р.);

— International conference Complex analysis and related topics (Lviv, Ukraine, September 23 – 28, 2013);

— IV Міжнародній ганській конференції, присвяченій 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, Україна, 30 червня – 5 липня, 2014 р.);

— Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces", Dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel (Hasenwinkel, March 16 – 20, 2015);

— Third Conference Mathematics for Life Sciences (Rivne, September 15 – 19, 2015);

— International conference "Approximation Theory and its Applications", dedicated to 75th anniversary of professor V.P. Motornyi (Dnepropetrovsk, Ukraine, October 8-11, 2015);

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівники семінару — член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор О.І. Степанець, доктор фізико-математичних наук А.С. Романюк);

— семінарах із теорії просторів функцій в університеті Фрідріха Шиллера, м. Йєна, Німеччина (керівники семінару — професори H. Triebel та H.-J. Schmeisser);

— семінарі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 30 листопада 2015 року (керівники семінару "Сучасний аналіз" — доктори фізико-математичних наук, професори І.О. Шевчук, О.О. Курченко, В.М. Радченко);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 17 грудня 2015 року (керівники семінару — доктори фізико-математичних наук, професори А.А. Кондратюк, О.Б. Скасків);

— об'єднаному семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань і відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 18 січня 2016 року (керівники семінару — академік НАН України А.М. Самойленко, доктор фізико-математичних наук А.С. Романюк)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 23 наукових публікаціях [1 – 23], із яких — 1 монографія [1] і 22 статті [2 – 23] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, 8 із яких [6, 9, 10, 15, 18, 20, 21, 23] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 284 найменування. Повний обсяг роботи становить 335 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У **першому розділі** дано огляд літератури за темою дисертаційної роботи та сформульовано відомі результати щодо розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського на класах функцій дійсної та комплексної змінних, наближення раціональними функціями, а також теорій просторів Лебега зі змінним показником та просторів Орлича.

У **другому розділі** знайдено достатні умови збіжності рядів Фур'є по системах раціональних функцій, що визначаються фіксованими послідовностями своїх полюсів і є ортонормованими на дійсній осі, а також розв'язано екстремальну задачу про обчислення величини найкращого поточкового наближення ядра Коші та побудовано найкращий інтерполяційний метод наближення.

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k > 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді

$$\Phi_0^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_0}}{z - \overline{a}_0},\ \Phi_n^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_n}}{z - \overline{a}_n} B_n^+(z),\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$B_0^+(z) := 1,\ B_n^+(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \chi_k^+ \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k},\ \chi_k^+ := \frac{|1 + a_k^2|}{1 + a_k^2},\ n = 1, 2, \ldots .$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках a_k, $k = 0, 1, \ldots n-1$.

Нехай далі $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} b_k < 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у нижній півплощині $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$. Тоді

$$\Phi_1^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_1}}{z - \overline{b}_1},\ \Phi_n^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_n}}{z - \overline{b}_n} B_n^-(z),\ n = 2, 3, \ldots,$$

$$B_1^-(z) := 1,\ B_n^-(z) := \prod_{k=1}^{n-1} \chi_k^- \frac{z - b_k}{z - \overline{b}_k},\ \chi_k^- := \frac{|1 + b_k^2|}{1 + b_k^2},\ n = 2, 3, \ldots .$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках b_k, $k = 1, 2, \ldots n-1$.

Позначимо тепер

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \Phi_n^+(z), & n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \Phi_{-n}^-(z), & n = -1, -2, \ldots . \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) є ортонормованою на дійсній осі $\mathbb{R}$.

Вважаючи, що відповідні члени послідовностей $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ є взаємо спряженими, тобто $b_k = \bar{a}_{k-1}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, у підрозділі 2.1 знайдено умови збіжності частинних сум

$$S_n(f; \mathbf{a}; x) = \sum_{k=-(n+1)}^{n} c_k \Phi_k(x), \quad c_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Phi_k(x)} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ряду Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$ по системі (1).

Теорема 2.1.1. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2} = +\infty. \qquad (2)$$

Тоді для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *її ряд Фур'є за системою (1) збігається до цієї функції в метриці простору* $L_p(\mathbb{R})$, *тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - S_n(f; \mathbf{a}; x)|^p dx = 0, \quad 1 < p < \infty.$$

Позначимо $\sigma_n = \sigma_n(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}$, $\varsigma_n = \varsigma_n(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2}$.

Теорема 2.1.2. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і має обмежену варіацію на* $\mathbb{R}$. *Нехай далі послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (2) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \leq \mathrm{const}$.

Тоді в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; \mathbf{a}; x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}. \qquad (3)$$

Теорема 2.1.3. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і в точці* x_0 *існують граничні значення* $f(x_0 - 0)$ *і* $f(x_0 + 0)$. *Тоді якщо існують інтеграли* $\int_0^{\delta} \frac{f(x_0 \pm y) - f(x_0 \pm 0)}{y} dy$, *а послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє всім умовам теореми 2.1.2, то в кожній точці* $x_0 \in \mathbb{R}$ *має місце рівність (3).*

Нехай $H_p = H_p(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, — простір Гарді, який складається з функцій f, голоморфних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Відомо, що кожна функція f з простору H_p має майже скрізь на дійсній осі $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}_+$ недотичні граничні значення (за якими залишимо те саме позначення f), які належать простору $L_p(\mathbb{R})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_p := \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Ядром Коші для комплексної площини $\mathbb{C}$ називається функція $\mathcal{C} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, визначена рівністю

$$\mathcal{C}(t,z) := \frac{-1}{2i(t-\overline{z})}, \quad t, z \in \mathbb{C},\ t \neq \overline{z}.$$

Нехай $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і B_n^+ — n-добуток Бляшке системи Φ^+. Означимо функцію $\mathcal{C}_{p,n,\Phi}$ правилом

$$\mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\zeta, z) := (i/2)^{2/p} \,(\operatorname{Im} z)^{1-2/p} B_n^+(\zeta)\overline{B_n^+(z)}\frac{(\overline{\zeta}-z)^{2/p}}{|\zeta-\overline{z}|^2}.$$

Наслідок 2.2.2. *Нехай* $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$. *Якщо функція* $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$, $2 \le p < \infty$, *то для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справджується формула*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n,p}(z)\widehat{f}(k)\Phi_k^+(z) + \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle \quad \forall\ z \in \mathbb{C}_+,$$

$$\lambda_{k,n,p}(z) = 1 - \frac{1}{\Phi_k^+(z)}\langle \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(\cdot, z)\rangle, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{4}$$

Покладемо

$$\mathfrak{A}_{n,p} := \left\{ f \in H_p(\mathbb{C}_+) : \langle f, \Phi_k^+\rangle = 0, \quad k = \overline{0,n} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\mathfrak{A}_{n,p}^{\perp} := \left\{ g \in L_q(\mathbb{R}) : \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{A}_{n,p} \right\}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

Теорема 2.2.3. *Нехай* $2 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$ *і* B_n^+ — n*-добуток Бляшке системи* Φ^+. *Тоді для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$ *справджується рівність*

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right) := \inf_{g \in \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}} \|\mathcal{C}(z,\cdot) - g(\cdot)\|_q = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}},$$

а елементом найкращого наближення з підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}$ *є едина функція* $g_z(t) = \mathcal{C}(t,z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(t,z)$.

Розглянемо оператор $U_{n,p,\Phi}$, визначений на $H_p(\mathbb{C}_+)$ формулою

$$U_{n,p,\Phi}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\lambda_{k,n,p}\Phi_k^+,$$

де величини $\lambda_{k,n,p}(z)$ визначаються формулою (4).

Оператор $U_{n,p,\Phi}$ породжує найкращий лінійний метод наближення в такому розумінні. Нехай $\mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ — множина лінійних операторів I_n, визначених на $H_p(\mathbb{C}_+)$ правилом $I_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)\varphi_j(z)$, де φ_j — довільні функції, визначені та неперервні в $\mathbb{C}_+$. Нехай далі

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) := \inf\left\{\max\left\{|f(z) - I_n(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\right\} : I_n \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)\right\}$$

— найкраще наближення в точці $z \in \mathbb{C}_+$ одиничної кулі простору Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ образами операторів I_n.

Теорема 2.2.4. *Нехай* $2 \le p < \infty$, $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— послідовність різних точок* $a_k \in \mathbb{C}_+$ *і* $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$. *Тоді* $U_{n,p,\Phi} \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ *і в кожній точці* $z \in \mathbb{C}_+$ *справджується рівність*

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) = \max\{|f(z) - U_{n,p,\Phi}(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\} = \frac{|B_n^+(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського на класах функцій дійсної та комплексної змінних, а також дослідженню питань найкращого наближення функцій простору Гарді в одиничному крузі.

Нехай f — 2π-періодична інтегрована за Лебегом функція $(f \in L)$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\ kx + b_k \sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Нехай далі $\psi(k) = (\psi_1;\psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Якщо ряд

$$A + \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)A_k(f,x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f,x)),$$

де A — деяке число, $\tilde{A}_k(f,x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, для функції f і пари ψ є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$, то, наслідуючи О.І. Степанця, функцію F називають ψ-інтегралом функції f і позначають $F = \mathcal{J}^{\psi}(f)$. Функцію f при цьому називають ψ-похідною функції F і використовують позначення $f = F^{\psi}$. Множину ψ-інтегралів усіх функцій із L позначають L^{ψ}. Якщо $\mathfrak{N} \subset L$, то через $L^{\psi}\mathfrak{N}$ позначають множини ψ-інтегралів функцій із $\mathfrak{N}$.

Нехай

$$S_1^0 = \{\varphi \in L : \quad \|\varphi\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\, dt \le 1,\ \varphi \perp 1\}$$

і $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності. Тоді $L_1^{\psi} := L^{\psi}S_1^0$, а через $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$ позначають множину ψ-інтегралів функцій із

$$H_{\omega_1}^0 := \{\varphi \in L : \quad ||\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)||_1 \le \omega(t),\ \varphi \perp 1\}.$$

Множину всіх неперервних опуклих при $t \ge 1$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умову $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0$, позначатимемо $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{M}'$ — підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які задовольняють умову $\int_1^{\infty}\psi(t)/t\, dt < \infty$.

Нехай

$$\rho_{n,p}(f;x) := f(x) - V_{n,p}(f;x)$$

де $V_{n,p}(f;x) := \frac{1}{p}\sum\limits_{k=n-p}^{n-1}\sum\limits_{i=0}^{k} A_i(f,x)$ — суми Валле Пуссена. Покладемо

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\Big(\frac{1}{2}\psi(t)\Big),\quad \mu(t)=\mu(\psi;t):=\frac{t}{\eta(t)-t},\quad t\geq 1;$$

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi:\psi\in\mathfrak{M},\quad 0<\mu(\psi;t)\leq K<\infty\},\ K=K(\psi)=\mathrm{const}.$$

Основний результат підрозділу 3.1 міститься в такому твердженні.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0' := \mathfrak{M}_0\cap\mathfrak{M}'$ *і* $0\leq \lim_{n\to\infty} p/n < 1$. *Тоді при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\infty};V_{n,p})_1 := \sup_{f\in L^{\psi}_1}\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_1 = \frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{|\psi_2(v)|}{v}\,dv+\frac{4}{\pi^2}\,\psi(n)\,\ln\frac{n}{p}+\mathcal{O}(1)\psi(n),$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1 := \sup_{f\in L^{\psi}H^0_{\omega_1}}\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_1 = \theta_{\omega_1}\Big[\frac{1}{\pi}|\int_0^1\omega(\frac{2t}{n})\int_1^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt|+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\,\psi(n)\ln\frac{n}{p}\int_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\,dt\Big]+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}),\quad \psi(n):=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)},$$

де $\theta_{\omega_1}\in[\frac{1}{2};1]$, *причому* $\theta_{\omega_1}=1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $\mathcal{O}(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* n *і* p.

Основним результатом підрозділу 3.2 є таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай* K_{∞} *— клас аналітичних в одиничному крузі* $\mathbb{D}$ *функцій* f, *що зображуються інтегралами типу Коші*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(w)}{1-\overline{w}z}\frac{dw}{w},\quad z\in\mathbb{D},$$

зі щільностями φ, *для яких* $\operatorname{ess\,sup}_{w\in\mathbb{T}}|\varphi(w)|\leq 1$.

Тоді для будь-яких $p,n\in\mathbb{N}$, $p\leq n$, *і* $z\in\mathbb{D}$ *виконується рівність*

$$R_{n,p}(K_{\infty};z) := \sup_{f\in K_{\infty}}|f(z)-V_{n,p}(f)(z)| = \frac{2}{\pi p}|z|^{n-p+1}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p),$$

де $\mathbf{K}(\rho) := \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ *— повний еліптичний інтеграл першого роду.*

Якщо

$$\psi_1(k)=\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2},\quad \psi_2(k)=\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2},\quad \beta\in\mathbb{R},$$

то поняття ψ-похідної збігається з поняттям $(\psi;\beta)$-похідної, а для класів L^{ψ} використовується позначення L^{ψ}_{β}. Через C^{ψ}_{β} позначають підмножину неперервних функцій із L^{ψ}_{β}. Узявши в ролі $\mathfrak{N}$ одиничні кулі просторів L_p, $1\leq p\leq\infty$:

$$U^0_p=\{\varphi\in L^0_p:\ \|\varphi\|_p\leqslant 1\},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

покладатимемо $C^\psi_\beta U^0_p = C^\psi_{\beta,p}$.

Нехай $\mathcal{D}_q$ — множина послідовностей $\psi(k) > 0,\ k \in \mathbb{N}$, що задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \qquad q \in [0;1).$$

Кожній функції f із класу $L^\psi_\beta \mathfrak{N}$ поставимо у відповідність тригонометричні поліноми $U^*_{n-1}(f;x) = U^*_{n-1}(\psi;\beta;f;x)$ вигляду

$$U^*_{n-1}(f;x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \Big\{ \lambda^{(n)}_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu^{(n)}_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \Big\},$$

де $a_k = a_k(f^\psi_\beta)$, $b_k = b_k(f^\psi_\beta)$, $k = 1, 2, ...$ — коефіцієнти Фур'є функції f^ψ_β, а числа $\lambda^{(n)}_k = \lambda^{(n)}_k(\psi;\beta)$ і $\nu^{(n)}_k = \nu^{(n)}_k(\psi;\beta)$, $k = 1, ..., n-1, n \in \mathbb{N}$ означено рівностями

$$\lambda^{(n)}_k = (\psi(k) - \psi(2n-k) - \psi(2n+k)) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \quad k = \overline{1, n-1};$$

$$\nu^{(n)}_k = (\psi(k) - \psi(2n-k) + \psi(2n+k)) \sin \frac{\beta\pi}{2}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Основним результатом підрозділу 3.3 є таке твердження.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,p}; U^*_{n-1})_C := \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \max_{x\in[0;2\pi]} |f(x) - U^*_{n-1}(f,x)| =$$

$$= \psi(n) \Big(\frac{2^{1/p} \|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}} M_{q,p'} + \mathcal{O}(1) \Big(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \Big) \Big),$$

де

$$M_{q,p'} = \frac{1-q^2}{2} \Big\| \frac{1}{1 - 2q\cos t + q^2} \Big\|_{p'}, \qquad p' = \frac{p}{p-1},$$

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & 1 \le p < \infty; \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \Big| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \Big|,$$

а $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, q, ψ, p *і* β.

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ — послідовність комплексних чисел $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, причому $a_k = 0$ при $k = 0$, $k \ge n+1$. Розглянемо системи раціональних функцій

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_k(z) = \sqrt{\frac{1-|a_k|^2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \overline{a}_k z} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}, \quad k \in \mathbb{N}; \qquad (5)$$

$$\rho_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \rho_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\ \varphi_k(e^{it}),\ \tau_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Im}\ \varphi_k(e^{it}),\ k \in \mathbb{N}, \qquad (6)$$

Системи (5) і (6) є ортонормованими на одиничному колі й на відрізку $[0; 2\pi]$ відповідно.

Розглянемо клас 2π-періодичних функцій, які можуть бути поданими у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int_0^{2\pi} g(t) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)]\ dt, \quad g \in L_p, \qquad (7)$$

де $\psi(k)$ — довільна незростаюча нуль-послідовність, $L_p = L_p(0; 2\pi]$, $p \geq 1$ — простори Лебега вимірних 2π-періодичних функцій g, які мають скінченну норму

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \begin{cases} (\int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0;2\pi]} |g(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Через Θ_p позначимо множину послідовностей $\psi(n)$, кожна з яких задовольняє такі умови:

1) $\psi(n)$, $n = 1, 2, \dots$, монотонно не зростає;

2) знайдеться число $\varepsilon > 0$ і додатна стала C такі, що для всіх натуральних $k_1 > k_2 \geq 1$ виконується нерівність $k_1^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_1) \leq C k_2^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_2)$.

Основний результат підрозділу 3.4 міститься в такому твердженні.

Теорема 3.4.1. *Нехай $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ і $\psi \in \Theta_p$. Тоді згортка вигляду (7) є неперервною періодичною функцією та виконується нерівність*

$$R_n(f) := \inf_{\alpha_k, \beta_k} \sup_{x \in [0;2\pi]} \Big| f(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \rho_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau_k(x) \Big) \Big| \leq C\psi(n) n^{1/p},$$

$a_k \in \mathbb{D}$, $k = 1, 2, \dots, n$ — набір чисел, які визначають систему (5), а α_k, β_k — дійсні коефіцієнти.

Нехай H_p — простір Гарді голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f із нормою

$$\|f\|_p := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \Big(\int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \Big)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

і нехай UH_p — одинична куля в H_p.

Зафіксуємо числа $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, й розглянемо перетворення $\mathcal{W}_{r,s}(f)$ як лінійний оператор, визначений на множині всіх голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій правилом

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j, \quad r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0,$$

де при $js + r < 0$ покладаємо $\widehat{f}_{js+r} = 0$.

Дію оператора $\mathcal{W}_{r,s}$ на голоморфну функцію, запозичуючи термінологію з аналітичної теорії чисел, природно назвати *просіюванням* коефіцієнтів її ряду Тейлора, а сам оператор — *решетом* порядку r із розміром вічка s.

Нормою оператора $\mathcal{W}_{r,s}$, як оператора, що діє з H_p в H_p, є число

$$\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} := \sup\{\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p : f \in UH_p\}.$$

Основний результат підрозділу 3.5 міститься в такому твердженні.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $r \in \mathbb{Z}_+$ *і* $s \in \mathbb{N}$. *Тоді:*
1) для того, щоб $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$, *необхідно й достатньо, щоб* $s \geq r + 1$;
2) якщо $s \geq r + 1$, *то* $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} = 1$ *для будь-яких* $p \geq 1$.

Теорему 3.5.2 було застосовано до знаходження найкращих наближень.

Теорема 3.5.3. *Нехай* $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$. *Тоді*

$$E_n(f)_p \geq \sup\left\{\left\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\right\|_p : r \geq n, s \geq r + 1\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

При даному $n \in \mathbb{N}$ *в (8) має місце рівність, якщо*

$$z^{r^*}\mathcal{W}_{r^*,s^*}(f)(z^{s^*}) = f(z) - S_{n-1}(f)(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

де r^*, s^* *– фіксовані,* $r^* \geq n$, $s^* \geq r^* + 1$. *При цьому супремум у правій частині досягається при* $r = r^*$ *і* $s = s^*$, *а* $E_n(f)_p = \|f - S_n(f)\|_p$.

Четвертий розділ дисертації присвячено розв'язанню задачі Колмогорова-Нікольського на класах функцій, локально інтегровних за Лебегом на дійсній осі, які були запроваджені О.І. Степанцем у такий спосіб.

Нехай $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$ — множина функцій φ, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup_{a\in\mathbb{R}}(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p\ dt)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Якщо тепер $\psi(v)$ — функція, неперервна при всіх $v \geq 0$, і β — фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\ dv, \tag{9}$$

то через $\widehat{L}^\psi_\beta$ позначається множина функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати рівністю

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t)\ dt, \tag{10}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцію φ у зображенні (10) називають $(\psi;\beta)$-похідною f і позначають $\varphi = f^{\psi}_{\beta}$.

У ролі агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо використовувати оператори вигляду

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c})(t;\beta)\,dt, \quad \lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c, \\ \frac{\sigma-v}{\sigma-c}, & c \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma, \end{cases}$$

де $(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c})(t;\beta)$ перетворення вигляду (9) функції $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$ і $c \in [0;\sigma)$.

У випадку, якщо

$$\psi(v) = \psi_{\alpha}(v) := \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0;1], \\ e^{-\alpha v}, & v > 1, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$ — довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi_1'(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$, і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$ і $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$, множини $\widehat{L}^{\psi_\alpha}_{\beta}$ позначаються $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ ($f^{\psi_\alpha}_{\beta} := f^{\alpha}_{\beta}$).

Основний результат підрозділу 4.1 міститься в такому твердженні.

Теорема 4.1.1. *Нехай $f \in \widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in [1;\infty]$. Тоді при $\sigma \to \infty$ справджується асимптотична нерівність*

$$\|f - V_{\sigma,c}(f)\|_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big]E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}},$$

де $\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) := \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt$, $E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}$ — найкраще наближення в просторі $\widehat{L}_p$ функції f^{α}_{β} за допомогою цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує c, а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по α, β, σ, c, p і f.

Позначимо $\widehat{S}_p = \{f \in \widehat{L}_p : \ \|f\|_{\widehat{p}} \le 1\}$ і $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{S}_p := \widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}$.

Наслідок 4.1.2. *Нехай виконано всі умови теореми 4.1.1 і $\lim_{\sigma\to\infty} c(\sigma) = \lim_{\sigma\to\infty}(\sigma - c(\sigma)) = \infty$. Тоді при $\sigma \to \infty$ справджується асимптотична нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}; V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} := \sup_{f\in\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}} \|f - V_{\sigma,c}(f)\|_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big],$$

яка при $p = \infty$ перетворюється в асимптотичну рівність.

Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0;1)$ так, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0; \infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Нехай далі $\mathfrak{A}^*$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, у яких, починаючи з деякого v_0, існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$. Тоді покладемо

$$\mathcal{D}_\alpha := \{\psi \in \mathfrak{A}^* : \quad \lim_{v\to\infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha,\ \alpha > 0\}.$$

Наслідок 4.2.2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\lim_{\sigma\to\infty} c(\sigma) = \lim_{\sigma\to\infty} (\sigma - c(\sigma)) = \infty$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,p}; V_{\sigma,c})_{\hat{p}} := \sup_{f\in\widehat{L}^\psi_{\beta,p}} \|f - V_{\sigma,c}(f)\|_{\hat{p}} \leq \frac{\psi(c)}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\ c} + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\Big)\Big],$$

$\varepsilon_c = \max\{\varepsilon_c^{(1)}, \varepsilon_c^{(2)}\}$, $\varepsilon_c^{(1)} = \sup_{t\geq c} |\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} + \alpha|$, $\varepsilon_c^{(2)} = \sup_{t\geq c} |\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} - \alpha^2|$, *яка при* $p = \infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність.*

Нехай

$$F^*_\sigma(f;x) = A_0 + \int_{\mathbb{R}} f^\psi_\beta(x+t)(\widehat{\psi\lambda_\sigma})(t;\beta)dt,\ \lambda_\sigma(v) = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq \sigma - 1, \\ 1 - \frac{(v-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & \sigma - 1 \leq v \leq \sigma, \\ 0, & \sigma \leq v. \end{cases}$$

де $(\widehat{\psi\lambda_\sigma})(t;\beta)$ перетворення вигляду (9) функції $\psi(v)\lambda_\sigma(v)$.

Наслідок 4.3.2. *Для довільного класу* $\widehat{L}^\psi_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}, p \in [1;\infty)$ *при* $\sigma \to \infty$ *виконується співвідношення*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^\psi_{\beta,p}; F^*_\sigma)_{\hat{p}} \leq \frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}(I(\alpha) + \mathcal{O}(1)[\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma} + \frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma]),$$

яке при $p = \infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність.*

Нехай $\psi_j(v)$, $j = 1, 2$, — функції, задані й неперервні при $v \geq 0$, $\psi_{1+}(v)$ і $\psi_{2-}(v)$, $v \in (-\infty; \infty)$ — їх парне й непарне продовження, відповідно, і для функції $\psi(v) := \psi_{1+}(v) + i\psi_{2-}(v)$ майже в кожній точці $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є

$$\widehat{\psi}(t) := \widehat{\psi}_{1+}(t) + i\widehat{\psi}_{2-}(t), \quad \widehat{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \psi(v)e^{-ivt}dv.$$

Через $\widehat{L}^\psi$ позначають множини функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже для всіх x можна подати згорткою:

$$f(x) = A_0 + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t)\ dt := A_0 + \varphi * \widehat{\psi}\ (x), \quad \varphi \in \widehat{L}_1,$$

де A_0 — деяка стала, а інтеграл розуміємо в сенсі головного значення. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}$ і $\varphi \in \widehat{S}_1$, то вважають $f \in \widehat{L}^{\psi}\widehat{S}_1 = \widehat{L}^{\psi}_1$. У ролі агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}$ використовуються оператори вигляду

$$\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + f^{\psi} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\psi}\ (x), \quad \lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le \frac{c}{\sigma}, \\ \frac{(1-|t|)}{\sigma - c}\sigma, & \frac{c}{\sigma} \le |t| \le 1, \\ 0, & 1 \le |t|. \end{cases}$$

Нехай $\mathfrak{A}_0$ і $\mathfrak{A}_0'$ — підмножини з $\mathfrak{A}$, що складаються з елементів, звуження яких на проміжок $[1;\infty)$ належать до $\mathfrak{M}_0$, а числа $c = c(\sigma) < \sigma$ вибрані так, що границя $\lim_{\sigma\to\infty}(\sigma - c)/\sigma$ існує, дорівнює Θ і $0 \le \Theta < 1$. Основний результат підрозділу 4.4 міститься в такому твердженні.

Теорема 4.3.2. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0'$ і $0 \le \Theta < 1$. Тоді при $\sigma \to \infty$*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_1; \mathbb{V}_{\sigma,c}) := \sup_{f \in \widehat{L}^{\psi}_1} \|f - \mathbb{V}_{\sigma,c}(f)\|_{\widehat{1}} = \frac{2}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}|\psi(\sigma)|\ln\frac{\sigma}{\sigma - c} + \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|,$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ.

У **п'ятому розділі** дисертації знайдено умови вкладення, а також отримано прямі та обернені теореми теорії наближення на множинах ψ-диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.

Нехай $p = p(x)$ — 2π-періодична вимірна й істотно обмежена функція ($\underline{p} := \operatorname{ess\,inf}_x |p(x)| \ge 1$ і $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}_x |p(x)| < \infty,$) і $L^{p(\cdot)}$ — простір вимірних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які мають скінченну норму

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{f(x)}{\alpha}\Big|^{p(x)}dx \le 1\Big\}.$$

У подальшому вважатимемо, що показник інтегрованості $p = p(x)$ задовольняє умову Діні-Ліпшиця порядку γ, тобто:

$$\sup_{x_1,x_2 \in [-\pi;\pi]}\Big\{|p(x_1) - p(x_2)| : \quad |x_1 - x_2| \le \delta\Big\}(\ln\frac{1}{\delta})^{\gamma} \le K, \quad 0 < \delta < 1. \quad (11)$$

Множину 2π-періодичних показників $p = p(x) > 1$, $\bar{p} < \infty$, які на періоді задовольняють умову (11), позначимо $\mathcal{P}^{\gamma}$, а через $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ — множини ψ-інтегралів функцій із просторів $L^{p(\cdot)}$.

Вважатимемо, що пара $\psi = (\psi_1;\psi_2)$ систем чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$ належить множині Υ_{α}, $\alpha \ge 0$, якщо скінченними є величини:

$$\varsigma_{\alpha}(\psi_i) := \sup_{k\in\mathbb{N}}|\psi_i(k)|k^{\alpha}, \ \ \sigma_{\alpha}(\psi_i) := \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\psi_i(k+1)(k+1)^{\alpha} - \psi_i(k)k^{\alpha}|, \ i = 1,2.$$

Теорема 5.1.2. *Якщо* $\psi \in \Upsilon_0$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, *то* $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

Теорема 5.1.4. *Нехай* $\psi \in \Upsilon_\alpha$, *де* $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $p(x) \le s(x)$, $x \in [0; 2\pi]$. *Тоді* $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

Як наслідки з теорем 5.1.2 і 5.1.4 отримано умови вкладення множин $L^\psi_\beta L^{p(\cdot)}$ та $W^r_\beta L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$.

При кожному фіксованому $\alpha \ge 0$ через $\Upsilon_{\alpha,n}$ позначимо підмножину пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ з Υ_α таких, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умови:

$$\varsigma_\alpha(\psi_i; n) = \sup_k |\psi_{i,n}(k)| k^\alpha \le C\nu_i(n) n^\alpha, \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma_\alpha(\psi_i; n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_{i,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{i,n}(k) k^\alpha| \le C\nu_i(n) n^\alpha, \quad i = 1, 2,$$

$$\psi_{i,n}(k) := \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi_i(k), & k \ge n; \end{cases} \qquad \nu_i(n) = \nu(\psi_i; n) := \sup_{k \ge n} |\psi_i(k)|, \ i = 1, 2;$$

а через Υ^*_α підмножину пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ з Υ_α таких, що числа $|\psi_i(k)| k^\alpha$, $i = 1, 2$, $\alpha \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$ не зростають.

Нехай

$$E_n(f)_{p(\cdot)} := \inf \{ \|f - t_{n-1}\|_{p(\cdot)} : \quad t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1} \},$$

— найкраще наближення в просторі $L^{p(\cdot)}$ функції f за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вищого за $n-1$, і $S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f; x)$ — частинні суми Фур'є порядку n функції f. Покладемо $L^\psi_{p(\cdot)} := L^\psi U_{p(\cdot)}$, де $U_{p(\cdot)} := \{\varphi \in L^{p(\cdot)} : \ \|\varphi\|_{p(\cdot)} \le 1\}$ — одинична куля простору $L^{p(\cdot)}$.

Одним з основних результатів підрозділу 5.2 є таке твердження.

Теорема 5.2.3. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *на періоді* $x \in [0; 2\pi]$ *пов'язані одним зі співвідношень* $p(x) < s(x)$ *або* $p(x) \ge s(x)$, *і пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить до множини* $\Upsilon_{\alpha,n}$, *де* $\alpha = 0$, *якщо* $p(x) \ge s(x)$, *і* $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, *якщо* $p(x) < s(x)$. *Тоді*

$$E_n(L^\psi_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \le \mathcal{E}(L^\psi_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} \le C_{p,s} \nu(n) n^\alpha, \tag{12}$$

Зокрема, якщо пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить множині* Υ^*_α, *то*

$$E_n(L^\psi_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \le \mathcal{E}(L^\psi_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} \le C_{p,s} \psi(n) n^\alpha, \tag{13}$$

$$E_n(L^\psi_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^\psi_{p(\cdot)}} E_n(f)_{s(\cdot)}, \quad \mathcal{E}(L^\psi_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^\psi_{p(\cdot)}} \|f - S_n(f)\|_{s(\cdot)}.$$

Показано також, що у випадку, коли $\alpha = 0$ (тобто, якщо $p(x) \ge s(x)$, $x \in [0; 2\pi]$), оцінки (12) і (13) є точними за порядком.

Результати підрозділів 5.1 і 5.2 були поширені на випадок просторів Орлича, які визначаються в такий спосіб. Неперервна опукла функція $M = M(x)$ називається *функцією Юнга (N-функцією)*, якщо M є парною та задовольняє умови: $\lim_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$.

Кажуть, що функція M задовольняє умову Δ_2 $(M \in \Delta_2)$, якщо існує така стала $c > 0$, що $M(2x) \le c\, M(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Нехай функція Юнга $M \in \Delta_2$. Через L_M позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних функцій $f : [0; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення $\int_0^{2\pi} M(\lambda|f(t)|)\, dt < \infty$ при довільному $\lambda > 0$. Споряджений нормою

$$\|f\|_M := \sup\Big\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\, dt : \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{M}(|g(t)|)\, dt \le 1 \Big\},$$

де $\widetilde{M}(y) := \max_{x\ge 0}\{x|y| - M(x)\}$ функція, *додаткова* до функції M у сенсі Юнга, простір L_M стає банаховим простором, який називають *простором Орлича*, породженим функцією M.

Функції Юнга $M(x)$ і $N(x)$ називаються *еквівалентними* $(M \sim N)$, якщо існують такі додатні сталі k_1, k_2 і x_0, що для всіх $x \ge x_0$ одночасно справджуються нерівності

$$N(k_1 x) \le M(x) \tag{14}$$

$$M(x) \le N(k_2 x). \tag{15}$$

Відомо, що необхідною та достатньою умовою поелементного збігу двох просторів Орлича L_M і L_N є умова еквівалентності функцій Юнга, що їх визначають, тобто $L_M = L_N \Leftrightarrow M(x) \sim N(x)$. У випадку, коли виконано лише нерівність (14), то для відповідних класів Орлича L_M і L_N має місце включення $L_M \subset L_N$, якщо ж виконано лише нерівність (15), то $L_N \subset L_M$.

Позначимо через $\mathscr{Y}$ множину функцій Юнга $M \in \Delta_2$, які задовольняють таким додатковим умовам: існують два числа p_1 і p_2 $(1 < p_1 < p_2 < \infty)$ такі, що для деяких констант $\varepsilon, \delta > 0$ $p_1 + \varepsilon < p_2 - \delta$ функція $M(u)u^{-(p_1+\varepsilon)}$ не спадає, а функція $M(u)u^{-(p_2-\delta)}$ не зростає при $u \to \infty$.

Наслідок 5.3.1. *Якщо $M, N \in \mathscr{Y}$, $\psi \in \Upsilon_0$ й виконано умову (14), то має місце включення $L^\psi L_M \subset L_N$.*

Нехай $M^{-1} : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ — функція, обернена до M, і нехай

$$h(t) := \limsup_{x\to\infty} \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0.$$

Числа β_M і γ_M, які визначаються так: $\beta_M := \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln h(t)}{\ln t}$, $\gamma_M := \lim_{t\to 0+} -\frac{\ln h(t)}{\ln t}$, називаються, відповідно, нижнім і верхнім індексами Бойда простору Орлича L_M.

Позначимо через $\mathscr{Y}_*$ підмножину функцій $M \in \mathscr{Y}$, у яких $0 < \beta_M \le \gamma_M < 1$, і виберемо числа $q = q(M)$, $p = p(N)$ так, щоб індекси Бойда функцій M і N задовольняли нерівності

$$1 < q < \frac{1}{\gamma_M} \le \frac{1}{\beta_M} < \infty, \quad 1 < \frac{1}{\gamma_N} \le \frac{1}{\beta_N} < p < \infty. \tag{16}$$

Теорема 5.3.2. *Нехай $M, N \in \mathscr{Y}_*$ і виконано умову (15). Тоді, якщо $\psi \in \Upsilon_\alpha$, де $\alpha = 1/q - 1/p$ і числа $q = q(M)$, $p = p(N)$ вибрані відповідно до (16), то $L^\psi L_M \subset L_N$.*

Нехай

$$E_n(f)_N := \inf\{\|f - t_{n-1}\|_N : \quad t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\}.$$

Теорема 5.3.2. *Нехай функції $M, N \in \mathscr{Y}_*$ пов'язані співвідношеннями (14) та/або (15) і $\psi \in \Upsilon^*_\alpha$. Тоді, якщо $f \in L^\psi L_M$, то, починаючи з деякого натурального n_0, виконується нерівність*

$$E_n(f)_N \le \|f - S_n(f)\|_N \le c_1 \psi(n) n^\alpha \|f^\psi - S_n(f^\psi)\|_M \le c_2 \psi(n) n^\alpha E_n(f^\psi)_M,$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, c_1, c_2 — константи, що не залежать від f.

У підрозділі 5.4 отримано низку прямих й обернених теорем теорії наближення в просторах Лебега зі змінним показником.

Теорема 5.4.1. *Нехай показники $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ задовольняють нерівності $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$ і пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить до множини Υ^*_0.*

Тоді для довільної функції $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$ має місце оцінка

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le K_{p,s} \psi(n) E_n(f^\psi)_{p(\cdot)}, \quad \psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)},$$

де K_p — константа, що залежить лише від функцій $p = p(x)$ і $s = s(x)$.

Для отримання обернених теорем було доведено співвідношення, що є аналогом класичної нерівності С.Н. Бернштейна для максимуму модуля похідної тригонометричного поліному.

Нехай $\mathfrak{M}^*$ — це множина незростаючих послідовностей дійсних чисел $\psi(k) > 0$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, що прямують до нуля, тобто:

$$\mathfrak{M}^* = \{\psi(k) : \quad \psi(k) - \psi(k+1) \ge 0, \ \lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 5.4.2. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^*$ і $p \in \mathcal{P}^\gamma$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку, не вищого за n, виконується нерівність*

$$\|D^\psi_\beta T_n\|_{p(\cdot)} \le \frac{K_p}{\psi(n)} \|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

де $1/\psi(0) := 0$, а K_p — величина, що залежить лише від $p = p(x)$.

Теорема 5.4.4. *Нехай $p \in \mathcal{P}^\gamma$. Тоді для довільної функції $f \in L^{p(\cdot)}$:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1} < \infty$, *то існує похідна* f_β^ψ :

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \leq C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|k\psi(k)|^{-1} < \infty$, *то існує похідна* f_β^ψ :

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \leq C_2 \Big(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|k\psi(k)|^{-1} \Big), \quad n \in \mathbb{N};$$

3. Якщо $\psi \in F := \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \eta'(\psi;t) \leq K\}$, $\eta(\psi;t) - t \geq K > 0$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} < \infty$, *то існує похідна* f_β^ψ :

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \leq C_3 \Big(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} \Big), \quad n \in \mathbb{N};$$

де C_i, $i = 1, 2, 3$, *— величини, що залежать лише від* $p = p(x)$ *і* $\psi = \psi(k)$.

У цьому підрозділі отримано також низку обернених теорем у термінах величин $\Omega_\alpha(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1})_{p(\cdot)}$, що є аналогами модулів неперервності дробового порядку в просторах $L^{p(\cdot)}$.

У підрозділі 5.5 одержано прямі та обернені теореми теорії наближення для ψ-диференційовних функцій у вагових просторах Орлича. Невід'ємна функція $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга M^* і така стала $c > 1$, що виконується нерівність

$$M^*(x) \leq M(x) \leq M^*(cx), \quad \forall x \geq 0.$$

Нехай $\mathcal{Q}_2^\theta$ — множина функцій $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $M \in \Delta_2$, для кожної з яких при деякому $\theta \in (0;1)$ функція M^θ є квазіопуклою.

Тоді через $L_{M,\omega}$ позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних за Лебегом функцій f, які для довільного числа $c > 0$ задовольняють умову $\int_0^{2\pi} M(c|f(x)|)\omega(x)dx < \infty$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, де $\omega(x)$ — 2π-періодична вимірна й майже скрізь додатна функція (вага). Одна з еквівалентних норм у цьому просторі може бути визначена співвідношенням

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup \Big\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\, dt : \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\, dt \leq 1 \Big\}.$$

Якщо вагова функція $\omega = \omega(t)$ належить класу Макенхаупа A_p, $1 < p < \infty$, тобто, якщо ω є 2π-періодичною і

$$\Big(\frac{1}{b-a} \int_a^b \omega(t)\, dt \Big) \Big(\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\, dt \Big)^{p-1} \leq c = \mathrm{const},$$

де $[a, b]$ довільний відрізок з $[0, 2\pi]$, і показник $p = p(M)$ визначається співвідношенням: $\frac{1}{p} := \inf\{\theta : \quad \theta > 0,\ M \in \mathcal{Q}_2^\theta\}$, то $L_{M,\omega} \subset L$ стає банаховим простором із нормою Орлича. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називається *ваговим простором Орлича.*

Теорема 5.5.1. *Нехай пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить до множини Υ_0^*. Тоді, якщо $f \in L^\psi L_{M,\omega}$, причому $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_p$, то для довільного натурального числа n виконується нерівність*

$$E_n(f)_{M,\omega} \le K\psi(n) E_n(f^\psi)_{M,\omega}, \quad \psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)},$$

де K — константа, що не залежить від n і функції f.

Модулі неперервності дробового порядку визначаються співвідношенням

$$\Omega_\alpha(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{h_i, h<\delta} \Big\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma_h^\beta(f) \Big\|_{M,\omega}, \quad \beta = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma_h^\beta(f) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} \dots \int_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^k u_k) \prod_{j=1}^k du_k, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!},\ k > 1; \quad \binom{\beta}{1} := \beta; \quad \binom{\beta}{0} := 1,$$

де f_{h_i} — оператор Стєклова функції f.

Теорема 5.5.5. *Нехай $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_p$ і $\alpha > 0$. Тоді для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\sum_{k=1}^\infty E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)|^{-1} < \infty$, то існує похідна f_β^ψ :

$$\Omega_\alpha(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1})_{M,\omega} \le c_1 \Big(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)} \Big);$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^\infty E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1} < \infty$, то існує похідна f_β^ψ :

$$\Omega_\alpha(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1})_{M,\omega} \le c_2 \Big(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{k\psi(k)} \Big);$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \ge K > 0$ і $\sum_{k=1}^\infty E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} < \infty$ то існує похідна f_β^ψ :

$$\Omega_\alpha(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1})_{M,\omega} \le c_3 \Big(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)(\eta(k)-k)} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)(\eta(k)-k)} \Big);$$

де c_i, $i = 1, 2, 3$, – величини, які не залежать від $n \in \mathbb{N}$ і функції f.

У **шостому розділі** обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим множин образів діагональних операторів у просторах Орлича числових послідовностей, а також точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$.

Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір усіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченною нормою Люксембурга:

$$||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{p}}} := \inf \Big\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \frac{x_k}{\alpha} \Big|^{p_k} \le 1 \Big\}.$$

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, таких що

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0, \tag{18}$$

і $T : \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to T\mathbf{x} = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *діагональний оператор*, заданий на просторі $l_{\mathbf{p}}$. Нехай далі $B_{l_{\mathbf{p}}} := \{\mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}} : \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{p}} \le 1\}$ — одинична куля простору $l_{\mathbf{p}}$ і $\mathbf{e}_i = \{e_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, де $e_k^{(i)} = \begin{cases} 0, & k \ne i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$ система одиничних ортів простору $l_{\mathbf{p}}$.

Теорема 6.1.1. *Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності (17), а їх компоненти пов'язані співвідношеннями $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Тоді для будь-якої послідовності додатних чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, що задовольняють умову (18), і для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) := \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}} \inf_{a_i} ||T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}||_{l_{\mathbf{p}}} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

Величину $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ називають *найкращим наближенням* у просторі $l_{\mathbf{p}}$ множини $T(B_{l_{\mathbf{q}}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів P_{γ_n}.

Наслідок 6.1.1. *В умовах теореми 6.1.1 справджується рівність*

$$D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B_{l_{\mathbf{q}}}), l_{\mathbf{p}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \bar{\lambda}_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка чисел λ_k.

Величину $D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B_{l_{\mathbf{q}}}), l_{\mathbf{p}})$ називають *базисним поперечником* множини $T(B_{l_{\mathbf{q}}})$ у просторі $l_{\mathbf{p}}$.

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (18). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність усіх значень величин λ_k, упорядковану за незростанням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ — систему множин $g_n = g_n(\lambda) = \{k \in \mathbb{N} : \ \lambda_k \geq \varepsilon_n\}$, а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Нехай далі X та Y — лінійні нормовані простори, B_X — замкнена одинична куля простору X і $T : X \to Y$ — обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(T : X \to Y) := d_n(T(B_X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{u \in F_n} ||Tx - u||_Y$$

де $\mathcal{F}_n$ — множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають *поперечником за Колмогоровим* множини $T(B_X)$ у просторі Y.

Теорема 6.1.3. *Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють нерівності (17), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (18).*

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \ldots =$$
$$= d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = E_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n,$$

в яких δ_s і ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — елементи характеристичних послідовностей $\delta(\lambda)$ та $\varepsilon(\lambda)$ послідовності λ, а $\delta_0 = 0$.

У підрозділі 6.2 отримано низку співвідношень, які в літературі називаються нерівностями типу Чебишева. Одержані результати мають допоміжне значення, але й не позбавлені самостійного інтересу.

Теорема 6.2.1. *Нехай $g : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ та $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровані функції, такі, що добуток $p \cdot g$ також є інтегрованою на $[a, b]$ функцією. Нехай далі $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ — незростаюча функція.*

Тоді для довільної опуклої функції $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, такої, що $M(0) = 0$, справджується така нерівність:

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \leq \sup_{s \in (a,b]} \left\{ M\Big(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\Big) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\},$$

а для довільної увігнутої функції $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$, справджується така нерівність:

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \geq \inf_{s \in (a,b]} \left\{ M\Big(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\Big) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\}.$$

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орлича, тобто неспадна опукла функція така, що $M(0)=0$ і $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Простором Орлича l_M, що визначається даною функцією $M(t)$, називають лінійний простір усіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} M(x_k) < \infty$. Простір l_M є банаховим із нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_M} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) \leq 1\Big\}.$$

Теорема 6.3.1. *Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення $0 < N(t) \leq M(t), \quad t \in [0,1]$, і*

$$\inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \leq 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \leq 1\}. \tag{19}$$

Нехай далі $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова (18). Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) := \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_M}} \inf_{a_i} ||T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}||_{l_N} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k,$$

де B_{l_M} — одинична куля простору l_M.

Із теореми 6.3.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.3.1. *В умовах теореми 6.3.1 справджуються рівності*

$$D_n(T : l_M \to l_N) = D_n(T(B_{l_M}), l_N) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – незростаюча перестановка чисел λ_k.

Для поперечників за Колмогоровим справджується таке твердження.

Теорема 6.3.2. *Нехай $M(t)$ — довільна функція Орлича, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова (18). Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_M \to l_M) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_M \to l_M) = \ldots =$$

$$= d_{\delta_n - 1}(T : l_M \to l_M) = E_n(T : l_M \to l_M) = \varepsilon_n, \tag{20}$$

в яких δ_s і ε_s, $s = 1, 2, \ldots$, — елементи характеристичних послідовностей $\delta(\lambda)$ та $\varepsilon(\lambda)$ послідовності λ, а $\delta_0 = 0$.

Нехай $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, d\mu)$, $m \geq 1$, — m-вимірний евклідовий простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a — скінченне число, або ж $a = +\infty$:

$$\mu(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}|_\mu = a, \quad a \in (0; +\infty],$$

і $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орлича, тобто неспадна опукла функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Позначимо через $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ множину всіх функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, які для довільного числа $C > 0$ задовольняють умову: $\int_{\mathbb{A}} M(C|f(\mathbf{x})|)\, d\mu < +\infty.$

Лінійний простір $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ є банаховим із нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L_M(\mathbb{A};\, d\mu)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M(|f(\mathbf{x})|/\alpha)\, d\mu \leq 1\right\}$$

і називається простором Орлича.

Позначимо через $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$, де σ — деяке фіксоване додатне число, множину всіх μ-вимірних підмножин γ_σ з $\mathbb{A}$, μ-міра яких дорівнює σ. Тоді для довільної функції $f \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ і будь-якої фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ природно розглянути величини

$$E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)},$$

де $\chi_{\gamma_\sigma} = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ — характеристична функція множини γ_σ, яка набуває значення 1 при $\mathbf{x} \in \gamma_\sigma$ і значення 0 при $\mathbf{x} \notin \gamma_\sigma$.

Нехай далі $U_M(\mathbb{A}) = \{y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) :\ ||y||_{L_M(\mathbb{A},d\mu)} \leq 1\}$, — одинична куля простору $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$, а $U_M^+(\mathbb{A})$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_M(\mathbb{A})$, і γ_σ — деяка фіксована множина з Γ_σ.

Розглянемо величини $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ для функцій $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а y — довільна функція з множини $U_M^+(\mathbb{A})$. У цьому випадку вони будуть мати вигляд

$$E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Основним результатом підрозділу 6.5 є таке твердження.

Теорема 6.5.1. *Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і M — довільна функція Орлича. Тоді для довільних $\sigma \in (0, a)$ та $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ має місце рівність*

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \sup\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} :\ y \in U_M^+(\mathbb{A})\} = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+),$$

де $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ — незростаюча перестановка функції

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A \setminus \gamma_\sigma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma; \end{cases}$$

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \inf\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} :\ \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\} = \bar{\varphi}(\sigma+),$$

де $\bar{\varphi}$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому в Γ_σ міститься множина γ_σ^*, для якої виконується рівність

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

Зокрема, у ролі γ_σ^* *можна взяти довільну вимірну підмножину множини* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}: \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ*-міри* σ*, яка містить множину* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}: \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

Висновки

У дисертаційній роботі розроблено метод розв'язання низки екстремальних задач теорії наближення. У процесі розробки методу розв'язано проблеми, які представляють значний самостійний інтерес, а саме:

1. Знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})(p > 1)$ та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах $\{\Phi_n(t)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, виражені в термінах обмежень на послідовності полюсів цих систем. Обчислено точне значення величини $E\left(z, \mathfrak{A}\right)$ найкращого наближення ядра Коші $\mathcal{C}(\cdot, z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi^+}^{n\perp}$ та в явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення та доведено його єдиність. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового та рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$.

2. Для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум $V_{n,p}(f;x)$ на класах L_1^{ψ} і $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0'$ знайдено асимптотичні рівності, які в багатьох важливих випадках дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського. Обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій, які зображуються інтегралами типу Коші. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами для функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0, 2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста. Встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках тригонометричних поліномів $U_{n-1}^*(f;x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій, визначених згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера. Описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

3. Для точних верхніх меж відхилень у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ отримано асимптотичні нерівності. Показано, що у випадку, коли $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, усі отримані нерівності перетворюються в асимптотичні рівності, що дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Цю задачу також розв'язано для операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{L}_{\beta,1}^{\psi}, \psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_0'$ у просторі $\widehat{L}_1$.

4. Знайдено умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та

$L^{\psi}L_M$ в L_N, а також обчислено порядки наближення сумами Фур'є. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах ψ-диференційовних функцій. Зазначено випадки, коли порядки наближення сумами Фур'є збігаються з порядками величин найкращих наближень на цих множинах у просторах Лебега зі змінним показником підсумовування та просторах Орлича. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Доведено (зокрема і в термінах аналогів модулів неперервності дробового порядку) обернені теореми теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.

5. Отримано низку інтегральних нерівностей типу Чебишева. Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим певних множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M. Отримано точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A};d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль $U_M^+(\mathbb{A})$ цих просторів.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Степанец А.И. Приближения суммами Валле Пуссена / А.И. Степанец, В.И. Рукасов, С.О. Чайченко. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 386 с.

2. Рукасов В.И. Приближение периодических функций малой гладкости суммами Валле-Пуссена в интегральной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-ту математики НАН України, 2004. — С. 270 – 281.

3. Рукасов В.І. Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т.2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 228 – 237.

4. Рукасов В.І. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 4, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 284 – 301.

5. Рукасов В.І. Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 5, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 297 – 308.

6. Рукасов В.І. Наближення операторами Валле Пуссена на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 7. — С. 968 – 978.

7. Рукасов В.І. Наближення $\bar{\psi}$-інтегралів локально сумовних на дійсній осі функцій за допомогою операторів Валле Пуссена в інтегральній метриці / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко, Д.С. Волковницький // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 7, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — С. 221 – 234.

8. Савчук В.В. Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / В.В. Савчук, М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Математичні студії. — 2010. — Т. 34, № 2. — С. 207 – 219.

9. Сердюк А.С. Наближення класів аналітичних функцій лінійним методом спеціального вигляду / А.С. Сердюк, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 1. — С. 102 – 109.

10. Чайченко С.О. Наилучшие приближения периодических функций в обобщенных пространствах Лебега / С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 9. — С. 1249 – 1265.

11. Чайченко С.О. Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орлича / С.О. Чайченко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — Випуск № 2, 2013. — С. 33 – 40.

12. Чайченко С.О. Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій / С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 10, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 296 – 303.

13. Чайченко С.О. Обернені теореми теорії наближення у вагових просторах Орлича / С.О. Чайченко // Буковинський математичний журнал. — Т. 1, № 3 – 4. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. — С. 148 – 157.

14. Чайченко С.О. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L_M$ і наближення сумами Фур'є / С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 11, № 3. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. — С. 270 – 286.

15. Чайченко С.О. Приближения суммами Фурье на множествах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ / С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 6. — С. 835 – 846.

16. Шидліч А.Л. Деякі екстремальні задачі в просторах Орлича / А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко // Математичні Студії. — 2014. — Т. 42, № 1. — С. 21 – 32

17. Шидліч А.Л. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$ / А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Інституту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2014. — Т. 11, № 4.— С. 399 – 412.

18. Савчук В.В. Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі / В.В. Савчук, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 11. — С. 1540 – 1549.

19. Чайченко С.О. Приближение периодических функций в весовых пространствах Орлича / С.О. Чайченко // Вісник Одеського нац. ун-ту. — 2014. — Т. 19, вип. 4(24). — С. 32 – 44.

20. Shidlich A.L. On some inequalities of Chebyshev type / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Math. Ineq. and Appl. — 2015. — T. 18, № 3. — P. 1313 – 1320.

21. Shidlich A.L. Approximative Properties of Diagonal Operators in Orlicz Spaces / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2015. — T. 36. — P. 1339 – 1352.

22. Савчук В.В. Доповненя до теореми Ф. Вінера про решето / В.В. Савчук, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 12, № 4. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 262 – 272.

23. Чайченко С.О. Збіжність на дійсній осі рядів Фур'є по системі раціональних функцій / С.О. Чайченко // Укр. мат. вісн. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 403 – 426.

24. Рукасов В.І. Апроксимативні властивості операторів Валле Пуссена на класах інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Міжнародна наукова конференція “Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування”, Ужгород, 18 – 23 вересня 2006 р.: Тези доповідей. — К: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 189

25. Rukasov V.I. Approximation the Poussin integrals of functions, which define on real axis / V.I. Rukasov, S.O. Chaichenko // Lyapunov memorial conference: International conference on the occasion of the 150th birthday of A.M. Lyapunov, june 24 – 30, 2007, Kharkiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Kharkiv, 2007. — P. 129 – 130.

26. Рукасов В.І. Наближення класів аналітичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнародна наукова конференція з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Мелітополь, 16 – 21 червня, 2008 р.: Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 99 – 101.

27. Rukasov V.I. Approximation of the classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ by De La Valle-Poussin operators / V.I. Rukasov, S.O. Chaichenko // International conference “Mathematical analysis, differential equations and their applications”, Famagusta, North Cyprus, September 12–15, 2008: Abstracts. — Famagusta, 2008. — P. 50 – 51.

28. Рукасов В.И. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}^{\bar{\psi}}_{1}$ / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко, Д.С. Волковницкий // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.: Тезисы докладов. — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. — С. 352.

29. Рукасов В.І. Про наближення на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Міжнародна наукова конференція “Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів”, присвячена пам’яті В.К. Дзядика, с. Світязь, 22 – 26 серпня 2009 р.: Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 79.

30. Сердюк А.С. Наближення аналітичних функцій лінійним методом спеціального вигляду / А.С. Сердюк, С.О. Чайченко // Міжнародна конференція “Сучасні проблеми аналізу”, присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, Чернівці, 30 вересня – 3

жовтня 2010 р.: Тези доповідей. — Чернівці: Книги — XXI, 2010. — С. 139 – 140.

31. Chaichenko S.O. Approximation by Valleé Poussin operators // International Conference "Smoothness, Approximation, Function Spaces" (Oppurg, Thuringia, Germany, October 10 – 16, 2010): Abstracts. — Jena, 2010.— P. 6

32. Савчук В.В. Приближение голоморфних функций суммами Валле Пуссена / В.В. Савчук, С.О. Чайченко // International conference "Approximation Theory and Applications", in memory of N.P. Korneichuk, Ukraine, Dnepropetrovsk, june 14 – 17, 2010: Abstracts. — Dnepropetrovsk, 2010. — P. 82.

33. Чайченко С.О. Нерівність типу Бернштейна для норм $(\psi;\beta)$-похідних тригонометричних поліномів в узагальнених просторах Лебега / С.О. Чайченко // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942 – 2007), Кам'янець-Подільський, Україна, 28 травня – 3 червня 2012 р.: Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — С. 108 – 109.

34. Чайченко С.О. Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій / С.О. Чайченко // Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Слов'янськ, Україна, 12 – 14 червня 2013 р.: Тези доповідей. — Слов'янськ: ДДПУ, 2013. — С. 39.

35. Чайченко С.О. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ / С.О. Чайченко // Міжнародна математична конференція "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка, Севастополь, Україна, 23 – 30 червня 2013 р.: Тези доповідей. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 279.

36. Chaichenko S.O. Approximation by Fourier sums on the sets $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ / S.O. Chaichenko // International conference Complex analysis and related topics, Lviv, Ukraine, September 23 – 28, 2013: Abstract. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2013. — P. 16.

37. Шидліч А.Л. Апроксимативні властивості діагональних операторів в просторах Орлича / А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 30 червня – 5 липня, 2014 р.: Тези доповідей. —

Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2014. — С. 216 – 217.

38. Shidlich A.L. Approximative Characteristics of Diagonal Operators in Orlicz sequence Spaces / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Mecklenburg Workshop “Approximation Methods and Function Spaces”, Dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel, Hasenwinkel, Germany, March 16 – 20, 2015: Abstract. — Hasenwinkel, 2015. — P. 17 – 18.

39. Shidlich A.L. Some extremal problems in Orlicz spaces / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Third Conference Mathematics for Life Sciences, Rivne, Ukraine, September 15 – 19, 2015: Abstract. — Rivne, 2015. — P. 40 – 41.

40. Savchuk V.V. Addendum to F. Wiener's Theorem About Sieve / V.V. Savchuk, S.O. Chaichenko // International conference "Approximation Theory and its Applications dedicated to 75th anniversary of professor V.P. Motornyi, Dnepropetrovsk, Ukraine, October 8-11, 2015: Abstract. — Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk, 2015. — P. 64.

АНОТАЦІЇ

Чайченко С.О. Екстремальні задачі теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертацію присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних.

У дисертації знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах Такенаки-Мальмквіста, виражені в термінах послідовностей полюсів цих систем. Обчислено точне значення величини найкращого наближення ядра Коші в метриці $L_q(\mathbb{R})$ певними підпросторами з $L_q(\mathbb{R})$ та в явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення й доведено його єдиність. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового й рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$. Показано, що такий метод є найкращим інтерполяційним методом наближення.

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень: в інтегральній метриці сум Валле Пуссена на класах згорток з ядрами, коефіцієнти яких є повільно спадними; у рівномірній та інтегральній метриках тригонометричних поліномів $U^*_{n-1}(f;x)$ спеціального вигляду на класах періодичних

функцій, які визначаються згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера; у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $p = \infty$. Усі отримані рівності дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Також обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій, які зображуються інтегралами типу Коші; знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами для функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0, 2\pi]$ із фіксованими ядрами, що задані у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста; описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких норма оператора-решета Ф. Вінера $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty}$ дорівнює одиниці, та застосовано одержані результати до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

Одержано умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та $L^{\psi}L_M$ в L_N, а також обчислено порядки наближення сумами Фур'є. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах та класах ψ-диференційовних функцій. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Доведено низку обернених теорем теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.

Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим множин образів діагональних операторів у просторах Орлича числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M. Отримано низку інтегральних нерівностей типу Чебишева. Обчислено точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функцій з одиничних куль цих просторів.

Ключові слова: найкраще наближення, твірне ядро, лінійний метод наближення, система Такенаки-Мальмквіста, простори Гарді, задача Колмогорова-Нікольського, оператор Валле Пуссена, ψ-похідна, простори Лебега зі змінним показником, простори Орлича, базисний поперечник, поперечник за Колмогоровим, нерівність Бернштейна, нерівність Чебишева.

Чайченко С.О. Экстремальные задачи теории приближения функций действительной и комплексной переменных. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию экстремальных задач теории приближения функций действительной и комплексной переменных.

В диссертации найдены достаточные условия сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ $(p>1)$ и поточечной сходимости рядов Фурье по системам Такенаки-Мальмквиста, выраженные в терминах последовательностей полюсов этих систем. Вычислено точное значение величины наилучшего приближения ядра Коши в метрике $L_q(\mathbb{R})$ определенными подпространствами из $L_q(\mathbb{R})$, в явном виде для этих подпространств построен элемент наилучшего приближения и доказана его единственность. Построен наилучший линейный метод поточечного и равномерного приближения функций из единичных шаров пространств Харди $H_p(\mathbb{C}_+)$.

Найдены асимптотические равенства для точных верхних границ отклонений: в интегральной метрике сумм Валле Пуссена на классах сверток с ядрами, коэффициенты которых медленно убывают; в равномерной и интегральной метриках тригонометрических полиномов $U^*_{n-1}(f;x)$ специального вида на классах периодических функций, определяемых свертками с ядрами, коэффициенты которых удовлетворяют условию Даламбера; в пространствах локально суммируемых функций операторов Валле Пуссена и модифицированных операторов Фурье на классах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, $p=\infty$. Все полученные равенства дают решение соответствующей задачи Колмогорова-Никольского. Также получены значения точных верхних границ поточечных отклонений сумм Валле Пуссена на классе аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, которые представляются интегралами типа Коши; найдены порядковые оценки для величин наилучших равномерных рациональных приближений с фиксированными полюсами для функций, которые представляются свертками функций из $L_p(0,2\pi]$ с фиксированными ядрами, заданными в виде суммы ряда по системе Такенаки-Мальмквиста; описаны все случаи соотношений между числами r и s, при которых норма оператора-решета Ф. Винера $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty}$ равна единице.

Получены условия, обеспечивающие вложения множеств $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ и $L^{\psi}L_M$ в L_N, а также найдены порядки приближения суммами Фурье. Найдены порядки наилучших приближений в пространствах Лебега с переменным показателем и пространствах Орлича на множествах и классах ψ-дифференцируемых функций. Получен ряд прямых и обратных теорем теории приближения на множествах $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций в обобщенных пространствах Лебега и пространствах Орлича.

Вычислены точные значения наилучших приближений, базисных поперечников и поперечников по Колмогорову множеств образов диагональных операторов в пространствах Орлича числовых последовательностей $l_{\mathbf{p}}$ и l_M. Получен ряд интегральных неравенств типа Чебышева. Вычислены точные значения аналогов наилучших приближений и базисных поперечников в пространствах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ классов неотрицательных функций, которые представляются в виде произведения некоторой фиксированной функции и функций из единичных шаров этих пространств.

Ключевые слова: наилучшее приближение, производящее ядро, линейный метод приближения, система Такенаки-Мальмквиста, пространства Харди, задача Колмогорова-Никольского, сумма и оператор Валле Пуссена, ψ-производная, пространства Лебега с переменным показателем, пространства Орлича, базисный поперечник, поперечник по Колмогорову, неравенство Бернштейна, неравенство Чебышева.

Chaichenko S.O. Extremal Problems of Theory of Approximation of Functions of Real and Complex Variables. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences by Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of the extremal problems of the theory of approximation of the functions of real and complex variables.

In the thesis there are found the sufficient conditions for the convergence in the spaces $L_p(\mathbb{R})(p > 1)$ and the pointwise convergence of Fourier series on the Takenaka-Malmquist systems expressed in the terms of the sequences of the poles of these systems. We calculated the exact value of the best approximation of the Cauchy kernel in the metric of $L_q(\mathbb{R})$ by certain subspaces of $L_q(\mathbb{R})$, and we constructed in the explicit form for these spaces the element of the best approximation and proved the uniqueness of its. It is also constructed the best linear method of pointwise and uniform approximation of the functions in the unit ball of the Hardy spaces $H_p(\mathbb{C}_+)$. It is shown that this method is the best interpolation method of the approximation.

There are found the asymptotic equalities for the exact upper bounds of the deviations of Vallee Poussin sums and some special trigonometric polynomials on the classes ψ-differentiable functions. All received equality provide the solution of the Kolmogorov-Nikol'skii problem. Also, it is calculated the value of the least upper bound pointwise deviation of Vallee Poussin sums on the class of analytic in the unit disk functions that are represented by the Cauchy integrals; there are found the order estimates for the value of the best uniform rational approximation with the fixed poles for the functions from the classes of 2π-periodic functions that are represented by the convolutions of the functions from $L_p(0, 2\pi]$ and fixed kernels, given as the sum of a series on the Takenaka-Malmquist system; there are described all the relationships between the numbers r and s, when the norm $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty}$ of the operator-sieve of F.Wiener that is equivalent to 1 and we have

used these results to find the best approximations of the functions of Hardy spaces $H_p(\mathbb{D})$.

There are obtained the conditions of the embedding for $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ in $L^{q(\cdot)}$ and $L^{\psi}L_M$ in L_N, and we calculated the order of the approximation by Fourier sums. There are found the orders of the best approximations in Lebesgue spaces with variable exponent and Orlicz spaces on the sets and the classes ψ-differentiable functions. We have proved Bernstein type inequalities for the norm of $(\psi;\beta)$-derivative of the trigonometric polynomial in the spaces $L^{p(\cdot)}$ and L_M. We have also proved some inverse theorems of the approximation theory on the sets $(\psi;\beta)$-differentiable functions in Lebesgue spaces with variable exponent and Orlicz spaces.

There are calculated the exact values of the best approximations, the base widths and the Kolmogorov widths of the sets of the images of the diagonal operators in the sequences Orlicz spaces $l_{\mathbf{p}}$ and l_M. Some Chebyshev type integral inequalities are proved. We also calculated the exact values of the analogues of the best approximations and the base widths in Orlicz spaces $L_M(\mathbb{A};d\mu)$ of the classes of non-negative functions, which are represented as the product of a fixed function and the functions from the unit balls of these spaces.

Key words: the best approximations, reproduction kernel, linear method of approximation, Takenaka-Malmquist system, Hardy spaces, Kolmogorov-Nikol'skii problem, ψ-derivative, Vallee Poussin sums and operators , Lebesgue spaces with variable exponent, Orlicz spaces, base and Kolmogorov wight, Bernstein inequality, Chebyshev inequality.

Підписано до друку 28. 03. 2016. Формат $60 \times 84/16$. Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 2,5. Ум. друк. арк. 2,3. Тираж 120 пр. Зам. 877.

Видавництво Б.І. Маторіна

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.

Тел.: +38 06262 3-20-99; +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.