Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Донбаський державний педагогічний університет"

На правах рукопису

ЧАЙЧЕНКО СТАНІСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

УДК 517.5

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДІЙСНОЇ ТА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННИХ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант
САВЧУК Віктор Васильович
доктор фізико-математичних наук

Слов'янськ — 2016

Зміст

Перелік умовних позначень 6
Вступ 8

Розділ 1. Огляд літератури **20**
1.1. Задача Колмогорова-Нікольського та історія її розв'язання в інтегральній метриці 20
1.2. Наближення голоморфних функцій сумами Валле Пуссена 29
1.3. Апроксимаційні властивості операторів Фур'є і Валле Пуссена на множинах $\widehat{L}_{\beta}^{\psi}$ 34
1.4. Раціональні функції як апарат наближення 41
1.5. Простори Лебега зі змінним показником 48
1.6. Простори Орлича 55

Розділ 2. Ряди Фур'є по системах раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі **63**
2.1. Збіжність на дійсній осі рядів Фур'є по системах раціональних функцій 63
2.1.1. Система $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі 64
2.1.2. Зображення ядра системи $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на дійсній осі 69
2.1.3. Ознаки збіжності на дійсній осі рядів Фур'є по системі $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 71
2.1.4. Допоміжні твердження 75
2.1.5. Доведення теорем 2.1.1 – 2.1.3 85
2.2. Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі 88
2.2.1. Інтегральні зображення функцій простору Гарді 89
2.2.2. Екстремальні задачі 93

2.2.3. Інтерполяція функцій з простору $H_p(\mathbb{C}_+)$ 96
2.3. Висновки до розділу 2 99

Розділ 3. Розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського на класах ψ-диференційованих функцій 100

3.1. Наближення ψ-інтегралів періодичних функцій сумами Валле-Пуссена у просторі L 101
3.1.1. Постановка задачі і формулювання результатів підрозділу . . 101
3.1.2. Інтегральні зображення величин $\rho_{n,p}(f;x)$ 105
3.1.3. Асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(L_1^{\psi};V_{n,p})_1$ і $\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1$ 118
3.1.4. Наслідки з теореми 3.1.1 122
3.2. Наближення сумами Валле Пуссена аналітичних в крузі функцій 124
3.2.1. Постановка задачі та формулювання результатів 124
3.2.2. Доведення теорем 3.2.1 і 3.2.3 131
3.3. Наближення лінійним методом спеціального вигляду класів аналітичних функцій 138
3.4. Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій 147
3.5. Доповнення до теореми Ф. Вінера про решето 154
3.6. Висновки до розділу 3 165

Розділ 4. Наближення у просторах функцій, локально сумовних на дійсній осі 167

4.1. Наближення операторами Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$ 170
4.2. Наближення операторами Валле Пуссена на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$ 181
4.3. Наближення модифікованими операторами Фур'є на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$ 191
4.4. Наближення операторами $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{1}$ 198
4.5. Висновки до розділу 4 210

Розділ 5. Наближення періодичних функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича 211

5.1. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ 211
5.1.1. Умови вкладення $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ у випадку $s(x) \le p(x)$ . . . 212

5.1.2. Умови вкладення $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ у випадку $p(x) \le s(x)$ . . . 214
5.1.3. Наслідки з теорем 5.1.2 і 5.1.4 . . . 216
5.2. Наближення сумами Фур'є функцій з множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ . . . 217
5.3. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L_M$ та наближення сумами Фур'є . . . 225
5.4. Найкращі наближення періодичних функцій у просторах Лебега зі змінним показником . . . 234
5.4.1. Прямі теореми теорії наближення на множинах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ . . . 234
5.4.2. Нерівність типу Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної у метриці просторів $L^{p(\cdot)}$ . . . 236
5.4.3. Обернені теореми теорії наближення для $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій у просторах $L^{p(\cdot)}$ . . . 243
5.5. Прямі та обернені теореми теорії наближення у вагових просторах Орлича . . . 251
5.6. Висновки до розділу 5 . . . 261

Розділ 6. Апроксимаційні властивості діагональних операторів у просторах числових послідовностей 262
6.1. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів у просторах $l_{\mathbf{p}}$ . . . 262
6.1.1. Точні значення найкращих наближень $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ та базисних поперечників $D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ . . . 263
6.1.2. Точні значення поперечників за Колмогоровим $d_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}})$ . . . 266
6.2. Нерівності типу Чебишева . . . 270
6.2.1. Формулювання основних результатів підрозділу . . . 271
6.2.2. Дискретний аналог теореми 6.2.1 . . . 274
6.2.3. Доведення теореми 6.2.1 . . . 277
6.3. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів у просторах Орлича l_M . . . 280
6.3.1. Точні значення найкращих наближень $E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N)$ і базисних поперечників $D_n(T : l_M \to l_N)$ . . . 281

6.3.2. Точні значення поперечників за Колмогоровим $d_n(T : l_M \to l_M)$ 285
6.4. Деякі екстремальні задачі у просторах Орлича 287
6.4.1. Постановка задачі та основний результат підрозділу 287
6.4.2. Точні значення величин $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ 292
6.5. Висновки до розділу 6 307
Висновки 308
Список використаних джерел 310

Перелік умовних позначень [1]

Числові множини

$\mathbb{N}$ 21
$\mathbb{R}$ 23
$\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ 29
$\overline{\mathbb{D}}$ 30
$\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ 43
$\mathbb{Z}$ 68
$\mathbb{Z}_+$ 89
$(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, d\mu)$ 287

Функції

$\eta(\psi, t)$, $\mu(\psi; t)$ 27
$\Omega_\alpha(f;\delta)_{p(\cdot)}$ 52
$\Phi_n^+(z)$, $B_n^+(z)$, ... 64
$\Phi_n^-(z), B_n^-(z)$ 64
$\Phi_n(z)$ 68
$\mu_n(y; x)$ 75
$\mathbf{K}(\rho)$ 125
$\varphi_k(z)$, $\rho_k(t)$, $\tau_k(t)$ 148
$\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)$ 171
$\Omega_\alpha(f;\delta)_{M,\omega}$ 257

Простори

C, $L = L_1$ 23
$H_p(\mathbb{D})$ 29
$\widehat{L}_\beta^\psi$, $\widehat{L}_\beta^\psi\mathfrak{N}$ 36
$H_p(\mathbb{C}_+)$ 43
$L^{p(\cdot)}$ 49
$l_{\mathbf{p}}$ 54
L_M 56
$L_{M,\omega}$ 59
$C(\mathbb{T})$, $L_\infty(\mathbb{T})$, $L(\mathbb{T})$ 127
L_p 138
l_M 280
$L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ 288

Множини і класи функцій

W^r, $W^r H^\alpha$ 21
H_ω, H_{ω_1} 23
W_β^r, $W_\beta^r H_\omega$ 23
$W_{\beta,1}^r$, $W_\beta^r H_{\omega_1}$ 23
L^ψ, $\bar{L}^\psi$ 25
$L^\psi\mathfrak{N}$, $C^\psi\mathfrak{N}$ 26
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_0', F$ 27
$UH_p(\mathbb{D})$ 29
H_∞^r, H_∞^ψ 30
$\mathscr{E}_\sigma$ 34
$\widehat{L}_p$, $p \geq 1$ 36
$\widehat{L}_\beta^\psi$, $\widehat{L}_\beta^\psi\mathfrak{N}$ 36
$\widehat{C}_\beta^\psi$, $\widehat{C}_\beta^\psi\mathfrak{N}$ 36
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$, $\bar{F}$ 39
W_σ^2 40
$\widehat{L}_{\beta,p}^\alpha$ 40
$\mathcal{P}^\gamma$ 50
$\mathcal{Q}_2^\theta$ 59
A_p 59
$H_p^\perp(\mathbf{a}_n)$, $H_{p,\Phi^+}^{n\perp}$ 89
S_1^0, $H_{\omega_1}^0$ 102
$L_1^\psi, L^\psi H_{\omega_1}^0$ 102
$\mathfrak{M}_C$ 123
K_∞ 125

[1] Праворуч позначень вказано номери сторінок, на яких вони вводяться

$L^{\psi}(\mathbb{T})_+,\ C^{\psi}(\mathbb{T})_+,\ C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+$ 129
$L^{\psi}_{\beta,p},\ C^{\psi}_{\beta,p}$ 138
$\mathcal{D}_q$ 138
Θ_p 150
$\mathcal{D}_{\alpha}$ 182
$\widehat{L}^{\psi}$ 198
$\mathfrak{A}_C$ 200
Υ_{α} 212
$L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ 212
$L^{\psi}_{\beta}L^{p(\cdot)}$ 216
$W^r_{\beta}L^{p(\cdot)}$ 217
$\Upsilon_{\alpha,n}$ 220
Υ^*_{α} 222
$\mathscr{Y}$ 227
$\mathscr{Y}_*$ 229
$\mathfrak{M}^*$ 236

Ядра та перетворення

$\mathcal{C}(t,z)$ 46
$D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t)$ 69
$D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x;t)$ 73
$H(f;x)$ 86
$\langle g,h\rangle$ 89
$\mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\zeta,z)$ 91
$P^q_{\beta}(t)$ 139
$P_{q,\beta}(m;t)$ 145
$K_{\psi}(x;t)$ 149
$\mathcal{W}_{r,s}$ 154
$W^*_{r,s}$ 157

Апроксимаційні агрегати

$S_k(f;x)$ 21
$S_k(f)(z)$ 29
$V_{n,p}(f)(z)$ 29
$V_{\sigma,c}(f;x),$ 37
$F^*_{\sigma}(f;x)$ 37
$S_{n,m}(f;\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ 72
$S_{n,n+1}(f;\mathbf{a};x)$ 73
$U_{n,p,\Phi^+}(f)$ 96
$V_{n,p}(f;x)$ 103
$U^*_{n-1}(f;x)$ 139
$\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ 199

Апроксимаційні характеристики

$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_n)_X$ 22
$E_{\sigma}(\varphi)_{\widehat{p}}$ 40
$E_n(\varphi)_{p(\cdot)}$ 51
$E_n(\varphi)_{M,\omega}$ 60
$E\left(z,\mathfrak{A}\right)$ 63
$e(\mathbf{a}_n,p,z)$ 96
$\rho_{n,p}(f;x)$ 103
$\rho^*_{n,p}(f;x),\ \Delta_{n,p}(f;x)$ 105
$R_{n,p}(K_{\infty};z)$ 125
$R_n(f;a_1,a_2,...,a_n)$ 149
$\rho_{\sigma,c}(f;x)$ 168
$\rho_{\sigma}(f;x)$ 169
$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)}$ 223
$E_{\gamma_n}(T:l_{\mathbf{q}}\to l_{\mathbf{p}})$ 264
$D_n(T:l_{\mathbf{q}}\to l_{\mathbf{p}})$ 266
$d_n(T:X\to Y)$ 268
$E_{\gamma_n}(T:l_M\to l_N)$ 282
$D_n(T:l_M\to l_N)$ 284
$E_{\gamma_{\sigma}}(\varphi,M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ 289
$D_{\sigma}(\varphi,M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ 289
$e_{\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ 292

Вступ

Актуальність теми. Роботу присвячено дослідженню екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних, а саме: розв'язанню на заданому класі голоморфних функцій задачі про найкращі лінійні методи наближення, які будуються на основі розвинення в ряд Фур'є по заданій ортонормованій системі; задачі Колмогорова-Нікольського про знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена та інших агрегатів наближення на класах функцій дійсної та комплексної змінних; задачі про отримання нерівностей типу Бернштейна для тригонометричних поліномів, прямих та обернених теорем теорії наближення у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича; задач про обчислення точних значень величин найкращих наближень та поперечників множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей. Перелічені задачі є основними задачами сучасної теорії наближення.

Систематичні дослідження, пов'язані з можливістю наближеного зображення функцій за допомогою більш простих агрегатів (у ролі яких виступають алгебраїчні многочлени, тригонометричні поліноми чи раціональні функції), беруть свій початок у 50-их роках XIX сторіччя в класичних працях П.Л. Чебишева. Уже з перших кроків свого розвитку, від фундаментальних теорем К. Вейєрштраса (1885 р.) й К. Рунге (1885 р.), теорія наближення розгалужується на два напрями (дійсний і комплексний), які розвиваються пліч-о-пліч, доповнюючи й збагачуючи один одного новими методами та результатами.

Наближення функцій дійсної змінної, як теорія, сформувалися у повноцінний розділ математичного аналізу на початку XX-го сторіччя у працях Д. Джексона, С.Н. Бернштейна та Ш. Валле Пуссена. Примітно, що у цих працях головну увагу було приділено дослідженням питань апроксимації ін-

дивідуальних функцій. Починаючи з 30-их років XX-го століття з розвитком функціонального аналізу в теорії наближення стали актуальними дослідження апроксимаційних процесів як лінійних операторів на класах функцій у тих чи інших функціональних просторах. У цьому напрямку основоположні результати отримали А.М. Колмогоров, Ж. Фавар, Б. Надь, М.Г. Крейн, Н.І. Ахієзер та С.М. Нікольський.

Так, зокрема, завдяки працям А.М. Колмогорова (1935 р.) і С.М. Нікольського (1940 р.) постала одна з важливих задач теорії наближення — задача про знаходження асимптотичних рівностей вигляду

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_n)_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \quad n \to \infty,$$

для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_n)_X := \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_n(f;\cdot)\|_X,$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас 2π-періодичних функцій, $U_n(f;x)$ — тригонометричні поліноми, що породжуються даним лінійним методом підсумовування рядів Фур'є, а X — лінійний нормований простір. Сьогодні цю задачу називають задачею Колмогорова-Нікольського.

У комплексному випадку аналогічні проблеми вперше піддалися дослідженню лише в другій половині минулого століття в працях С.Б. Стєчкіна (1953), К.І. Бабенка (1958 р.), Л.В. Тайкова (1963 р., 1967 р.), Дж.Т. Шейка (1966 р.) і В.І. Білого (1967 р.).

У подальшому значний внесок у розвиток проблематики, пов'язаної з розв'язаннням задачі Колмогорова-Нікольського, внесли В.К. Дзядик, О.В. Єфімов, П.В. Задерей, М.П. Корнєйчук, В.П. Моторний, Б. Надь, В.І. Рукасов, В.В. Савчук, А.С. Сердюк, О.І. Степанець, С.Б. Стєчкін, С.О. Теляковський, О.П. Тіман, Р.М. Тригуб та інш.

Напрям сучасної теорії наближення цілими функціями експоненційного типу сформувався завдяки працям С.Н. Бернштейна (1910 р.) і був розвинений у 30 – 50-их роках минулого сторіччя Н. Вінером, Н. Пелі, Н.І. Ахієзером, М.В. Кєлдишем та С.М. Нікольським. Реалізовуючи ідею С.Н. Бернштейна про побудову теорії наближення функцій, заданих на дійсній осі, як теорію,

що включає і теорію наближення періодичних функцій, О.І. Степанець розробив метод розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського для операторів Фур'є (які діють у підпростір цілих функцій експоненційного типу, а кожній 2π-періодичній функції ставлять у відповідність її частинну суму ряду Фур'є) у просторах локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі функцій.

У працях В.В. Савчука (1998 – 2013 р.) вдало поєднано методи дослідження наближень періодичних функцій дійсної змінної з суто комплексними методами і застосовано їх до розв'язання екстремальних задач для класів аналітичних функцій, які зображуються інтегралами типу Коші. Зокрема, розв'язано задачу Колмогорова-Нікольського для частинних сум Тейлора, Фейєра та Абеля-Пуассона.

Задача Колмогорова-Нікольського і дотепер перебуває у колі наукових інтересів провідних фахівців із теорії наближення, що залишає її актуальною, як і раніше. Зокрема, важливими видаються дослідженя нерозв'язаних проблем щодо апроксимаційних властивостей класичних і нових методів наближення на класах ψ-диференційовних 2π-періодичних та локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі функцій, а також функцій, голоморфних в одиничному крузі.

Результати С.М. Нікольського (1946 р.), С.Я. Хавінсона (1949 – 1963 р.), А. Макінтайра й В. Рогозинського (1950 р.), В. Рогозинського й Г. Шапіро (1953 р.), В.В. Савчука (2007 – 2009 р.) уможливлюють розгляд з єдиної точки зору різних за постановкою екстремальних задач для функцій, аналітичних у крузі. Згідно з цими результатами важливі екстремальні задачі теорії апроксимації зводяться до обчислення норми певного функціонала, що, у свою чергу, зводиться до обчислення величини найкращого наближення конкретної функції (твірного ядра) певним підпростором голоморфних функцій. Тому, актуальною також є задача про побудову найкращого методу наближення просторів аналітичних функцій в областях комплексної площини, відмінних від круга, зокрема, у верхній півплощині.

Останнім часом спостерігається значний інтерес до досліджень, у тому числі і в теорії наближення, що проводяться у просторах Лебега зі змінним показником та у просторах Орлича. На думку фахівців (як це відображено у багатьох монографіях) такий інтерес обумовлено, насамперед, важливими

застосуваннями цих просторів у теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів та варіаційному численні.

Простори Лебега зі змінним показником та простори Орлича були запроваджені В. Орличем у 30-их роках минулого сторіччя. У працях Х. Накано (1950 – 1953 р.) їх використовували як приклади так званих модулярних просторів, що, так само, досліджувалися декількома науковими центрами, найважливіші з яких були зосереджені у Польщі (W. Orlicz, X.W. Birnbaum), в Японії (H. Nakano), у СРСР (М.О. Красносельський, Я.Б. Рутицький) та у Нідерландах (W.A.I. Luxemburg, A.C. Zaanen). Суттєвий внесок у розвиток теорії просторів Лебега зі змінним показником та просторів Орлича зробили D.W. Boyd, L. Diening, O. Kováčik, В. Кокілашвілі, M. Krbes, J. Lindenstrauss, J. Musielak, A. Nekvinda, J. Rakósník, M.M. Rao, Z.D. Ren, L. Tzafriri, П.Л. Ульянов, І.І. Шарапудінов та ін.

Сучасні дослідженння багатьох математиків (зокрема, R. Akgün, Р.А. Бандалієв, A. Guven, L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, D.M. Israfilov, M. Khabazi, M. Ružička, S.G. Samko та ін.) з теорії наближення у цих просторах слід розцінювати як "паралельне перенесення" класичної теорії наближення в "некласичні" простори Лебега та простори Орлича. У цьому напрямку досягнуто значного прогресу, але не повної завершеності. Тому актуальною є задача систематизації теорії наближення у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на основі більш загальної класифікації періодичних функцій, що використовує поняття ψ-похідної та ψ-інтеграла. Крім того, важливим та актуальним є питання дослідження властивостей дискретних аналогів просторів зі змінним показником та просторів Орлича.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі математики Державного вищого навчального закладу "Донбаський державний педагогічний університет" у межах фундаментального наукового дослідження "Конструктивні методи аналізу нетерових крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень" (номер державної реєстрації 0115U003182). Результати досліджень також включено в анотовані звіти про виконання фундаментальних науково-дослідних робіт, що фінансувалися за кошти державного бюджету України:

"Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії крайових задач" (номер державної реєстрації 0101U000750), "Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії нелінійних коливань" (номер державної реєстрації 0106U001360), "Класифікаційні методи теорії наближення функцій і теорії крайових задач" (номер державної реєстрації 0109U000381), "Теорія нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь" (номер державної реєстрації 0112U000372) та звіту про виконання Німецько-українського наукового проекту (реєстраційний номер GZ: 436 UKR 113/103/0-1), що фінансувався Німецьким фондом наукових досліджень (DFG).

Мета, об'єкт, предмет і завдання дослідження. Основна мета дисертаційної роботи полягає в розробці методу побудови найкращого лінійного наближення заданого класу голоморфних у верхній півплощині функцій на основі розвинення в ряд Фур'є по заданій ортонормованій системні раціональних функцій, систематизації теорії наближення в просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на основі більш загальної класифікації періодичних функцій, що використовує поняття ψ-похідної та ψ-інтеграла, а також обчисленні точних значень найкращих наближень і поперечників множин образів діагональних операторів у просторах Орлича числових послідовностей.

Об'єктом дослідження є ряди по системах Такенаки-Мальмквіста, класи функцій дійсної та комплексної змінних, класичні та спеціальні методи наближення, діагональні оператори.

Предметом дослідження є збіжність рядів Фур'є по системах раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі, найкращий лінійний метод наближення, точні верхні межі відхилень класичних та спеціальних методів наближення на класах функцій, прямі та обернені теореми теорії наближення, нерівності типу Бернштейна, норми мультиплікаторів рядів Фур'є, нерівності типу Чебишева, найкращі наближення та поперечники.

Завдання дослідження:

1. Знайти достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності на дійсній осі рядів Фур'є по системах Такенаки-

Мальмквіста.

2. Обчислити точне значення величини найкращого наближення підпросторами голоморфних функцій ядра Коші у верхній півплощині комплексної площини. Побудувати найкращий лінійний метод поточкового й рівномірного наближення класів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ голоморфних у верхній півплощині функцій.

3. Знайти асимптотичні рівності для величин точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках сум Валле Пуссена, а також тригонометричних поліномів $U^*_{n-1}(f;x)$ спеціального вигляду на класах 2π-періодичних функцій.

4. Обчислити величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші.

5. Дослідити раціональні наближення класів 2π-періодичних функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0,2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста.

6. Дослідити властивості оператора-решета $\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)$ на множинах голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

7. Дослідити асимптотичну поведінку норм відхилень операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах функцій, локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі. Знайти розв'язки відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

8. Знайти умови вкладення множин ψ-диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником $L^{p(\cdot)}$ та просторах Орлича L_M. Обчислити порядки наближення сумами Фур'є на цих множинах.

9. Довести нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Отримати прямі та обернені теореми теорії наближення на класах ψ-диференційовних і $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.

10. Одержати нові інтегральні нерівності типу Чебишева.

11. Обчислити точні значення найкращих наближень, базисних і колмогорівських поперечників множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей зі змінним показником $l_{\mathbf{p}}$, а також дискретних просторах Орлича l_M.

12. Обчислити точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль цих просторів.

Методи дослідження. Використано апарат математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, теорії двоїстості екстремальних задач, а також новий метод побудови твірних ядер і відповідних їм елементів найкращого наближення.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими й полягають у такому.

1. Знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності на дійсній осі $\mathbb{R}$ рядів Фур'є по системах Такенаки-Мальмквіста.

2. Обчислено точне значення величини $E(z, \mathfrak{A})$ найкращого наближення ядра Коші $\mathcal{C}(\cdot, z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi}^{n\perp}$ та в явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення й доведено його єдиність.

3. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового та рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$. Показано, що такий метод є найкращим інтерполяційним методом наближення.

4. Для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум Валле Пуссена на класах L_1^{ψ} і $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0'$ знайдено асимптотичні рівності, які в багатьох важливих випадках дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського.

5. Обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій, що зображуються інтегралами типу Коші.

6. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами на класах функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0, 2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста.

7. Встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках тригонометричних поліномів $U^*_{n-1}(f; x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій, визначених згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера.

8. Описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

9. Для точних верхніх меж відхилень у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ отримано асимптотичні нерівності. Показано, що у випадку, коли $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, усі отримані нерівності перетворюються в асимптотичні рівності, які дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Цю задачу також розв'язано для операторів $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f; x)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}, \psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ у просторі $\widehat{L}_1$.

10. Знайдено умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та $L^{\psi}L_M$ в L_N, а також обчислено порядки наближення сумами Фур'є.

11. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах ψ-диференційовних функцій. Зазначено випадки, коли порядки наближення сумами Фур'є збігаються з порядками величин найкращих наближень у цих просторах.

12. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi; \beta)$-похідної триго-

нометричного полінома в просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Доведено (зокрема і в термінах аналогів модулів неперервності дробового порядку) обернені теореми теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.

13. Отримано низку інтегральних нерівностей типу Чебишева.

14. Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим певних множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M.

15. Отримано точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A};d\mu)$ класів невід'ємних функцій, зображених у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль $U_M^+(\mathbb{A})$ цих просторів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати мають практичне значення в конструктивній теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних, а також вони можуть бути використані в теоретичних дослідженнях із дійсного та комплексного аналізу, механіки, математичної фізики, теорії пружності, теорії диференціальних операторів, варіаційного числення та обчислювальної математики.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямків досліджень належить науковому консультанту В.В. Савчуку. Усі результати, що виносяться на захист, отримано самостійно. Результати, опубліковані в сумісних статтях [175–180, 189, 190, 199], отримано особисто, а співавторам належить обговорення та аналіз постановок задач; у сумісних статтях [188, 266–269] внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18–23 вересня 2006 р.);

— International Conference on the occasion of the 150th birthday of A.M. Lyapunov (Kharkiv, Ukraine, June 24 - 30, 2007);

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка (Мелітополь, 16 – 21 червня 2008 р.);

— International conference "Mathematical analysis, differential equations and their applications" (Famagusta, North Cyprus, September 12–15, 2008);

— Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г.);

— Міжнародній науковій конференції "Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів", присвяченій пам'яті В.К. Дзядика (1919–1998) (Волинська область, Україна, 22–26 серпня 2009 р.);

— Українському математичному конгресі – 2009 до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова (Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 р.);

— Міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу", присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (Чернівці, 30 вересня – 3 жовтня 2010 р.);

— International Conference "Smoothness, Approximation, Function Spaces" (Oppurg, Thuringia, Germany, October 10 – 16, 2010);

— International conference "Approximation Theory and Applications", in memory of N.P. Korneichuk (Ukraine, Dnepropetrovsk, june 14 – 17, 2010);

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942 – 2007) (Кам'янець-Подільський, Україна, 28 травня – 3 червня 2012 р.);

— Міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка (Слов'янськ, Україна, 12 – 14 червня 2013 р.);

— Міжнародній математичній конференції "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М.Самойленка (Севастополь, Україна, 23 – 30 червня 2013 р.);

— International conference Complex analysis and related topics (Lviv,

Ukraine, September 23 – 28, 2013);

— IV Міжнародній ганській конференції, присвяченій 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, Україна, 30 червня – 5 липня, 2014 р.);

— Mecklenburg Workshop "Approximation Methods and Function Spaces", Dedicated to the 60th birthday of Winfried Sickel (Hasenwinkel, March 16 – 20, 2015);

— Third Conference Mathematics for Life Sciences (Rivne, September 15 – 19, 2015);

— International conference "Approximation Theory and its Applications", dedicated to 75th anniversary of professor V.P. Motornyi (Dnepropetrovsk, Ukraine, October 8-11, 2015);

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівники семінару — член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор О.І. Степанець, доктор фізико-математичних наук А.С. Романюк);

— семінарах із теорії просторів функцій в університеті Фрідріха Шиллера, м. Йєна, Німеччина (керівники семінару — професори H. Triebel та H.-J. Schmeisser);

— семінарі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 30 листопада 2015 року (керівники семінару "Сучасний аналіз" — доктори фізико-математичних наук, професори І.О. Шевчук, О.О. Курченко, В.М. Радченко);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 17 грудня 2015 року (керівники семінару — доктори фізико-математичних наук, професори А.А. Кондратюк, О.Б. Скасків);

— об'єднаному семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань і відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 18 січня 2016 року (керівники семінару — академік НАН України А.М. Самойленко, доктор фізико-математичних наук А.С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 23 публікаціях. Із них: 1 монографія [224] і 22 статті [175–180, 188–190, 199, 266–277] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-

математичних наук, 8 із яких [179, 189, 199, 268–270, 275, 277] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 284 найменування. Повний обсяг роботи становить 335 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю щиру подяку науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику В.В. Савчуку та співавторам опублікованих статей.

Розділ 1

Огляд літератури

Твердження, які увійшли в даний огляд і на які є посилання в тексті дисертації, занумеровано як теореми чи наслідки із зазначенням авторства і відповідним посиланням на джерело, всі інші ж твердження формулюються лише із зазначенням авторства і першоджерела.

1.1. Задача Колмогорова-Нікольського та історія її розв'язання в інтегральній метриці

Відправною віхою виникнення теорії наближення функцій вважається результат П.Л. Чебишева, отриманий ним у 1854 році, який встановлював критерій для полінома найкращого наближення. Завдяки подальшим працям П.Л. Чебишова [278], а також Є.І. Золотарьова [84], К. Вейєрштрасса [38], А. Лебега [105] та інших, тригонометричні поліноми почали систематично використовуватись як апарат наближення 2π-періодичних функцій. При цьому на перших етапах розвитку теорії наближення проводились дослідження питань найкращої апроксимації для індивідуальних функцій.

Згодом, в працях С.Н. Бернштейна [22], Д. Джексона [66], Ш. Валле Пуссена [36, 36], Л. Фейєра [283] були проведені фундаментальні дослідження проблем характеру зв'язку між структурними і диференціальними властивостями функцій та швидкістю наближення їх поліномами. Відтоді починається вивчення наближення не тільки індивідуальних функцій, а й класів функцій. Із 30-их років XX-го століття завдяки працям А.М. Колмогорова, Ж. Фавара, Н.І. Ахієзера, М.Г. Крейна, Б. Надя, С.М. Нікольського основну увагу в теорії наближень зміщено в бік вивчення апроксимаційних характеристик

для класів функцій, що мають певні диференціально-різницеві чи гладкісні властивості.

Нехай

$$\mathcal{E}(W^r;S_n)_C=\sup_{f\in W^r}\max_{x\in[0;2\pi]}|f(x)-S_n(f;x)|,$$

де W^r $(r=1,2,\dots,)$ — клас 2π-періодичних функцій $f(x)$, у яких $(r-1)$-а похідна $f^{(r-1)}(x)$ локально абсолютно неперервна на $[-\pi;\pi]$, а $f^{(r)}(x)$ майже скрізь задовольняє умову $|f^{(r)}(x)|\le 1$,

$$S_n(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k(f)\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1.1}$$

— частинна сума порядку n ряду Фур'є функції f. Має місце наступне твердження.

А.М. Колмогоров (1935 р.) [94] *Якщо* $r\in\mathbb{N}:=\{1,2,\dots,\}$, *то при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(W^r;S_n)_C=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+\mathcal{O}(1)n^{-r}, \tag{1.2}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n *і* f.

Наступний істотний крок у цій проблематиці належить С.М. Нікольському [136–143], який поширив результати А.М. Колмогорова на класи

$$W^rH^\alpha=\big\{f:\quad |f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')|\le|x-x'|^\alpha,\quad 0<\alpha\le 1,\ r\ge 0\big\},$$

де під $f^{(r)}$ розуміють дробову похідну в розумінні Вейля, а також на більш загальні класи W^rH_ω, що задаються мажорантою $\omega(t)$ модулів неперервності похідних $\omega(f^{(r)};t)$.

С.М. Нікольський (1945 р.) [140] *Якщо* $r\ge 0$ *і* $0<\alpha\le 1$, *то при* $n\to\infty$ *справджується рівність*

$$\mathcal{E}(W^rH^\alpha;S_n)_C=\frac{2^{\alpha+1}\ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\ dt+\mathcal{O}(1)n^{-(r+\alpha)}, \tag{1.3}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n *і* f.

Результати А.М. Колмогорова і С.М. Нікольського поширювалися на більш загальні класи функцій, а також на випадки, коли у ролі агрегату наближення виступали тригонометричні поліноми $U_n(f;x)$, що породжуються різноманітними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є або тими чи іншими інтерполяційними процесами. Задача про знаходження асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_n)_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_n(f;\cdot)\|_X,$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас 2π-періодичних функцій, X — лінійний нормований простір, стала упродовж багатьох десятиріч однією з найважливіших в теорії наближення функцій. Наслідуючи О.І. Степанця, цю задачу називатимемо *задачею Колмогорова-Нікольського*. Значний внесок у розвиток даної і суміжної проблематики внесли В.К. Дзядик, О.В. Єфімов, М.П. Корнєйчук, В.П. Моторний, Б. Надь, В.Т. Пінкевич, А.С. Романюк, В.І. Рукасов, В.В. Савчук, А.С. Сердюк, О.І. Степанець, С.Б. Стєчкін, С.О. Теляковський, О.П. Тіман, М.П. Тіман, Р.М. Тригуб та інші (див. бібліографію в книгах [216, 217, 224]).

Зупинимося більш детально на історії розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського у просторі L. Насамперед зазначимо, що встановленням асимптотичних рівностей вигляду (1.2) і (1.3) для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах Вейля-Надя в інтегральній метриці вперше займався С.М. Нікольський.

Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які мають скінченну норму

$$\|f\|_C := \max_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|,$$

а $L = L_1$ — простір 2π-періодичних сумовних функцій $f(x)$, таких що

$$\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 := \int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty.$$

Нехай далі $f \in C$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \qquad (1.4)$$

— її ряд Фур'є. Якщо при даних фіксованих $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (де, як звичайно, $\mathbb{R}$ — це множина дійсних чисел) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \big(a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2})\big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ $(\varphi \in L_1)$, то цю функцію називають (r,β)-похідною в розумінні Вейля-Надя функції $f(x)$ і позначають $\varphi = f_\beta^{(r)}$. Класи Вейля-Надя визначаються співвідношеннями:

$$W_\beta^r := \big\{f \in C: \quad \operatorname{ess\,sup} |f_\beta^{(r)}| \le 1\big\}, \qquad W_\beta^r H_\omega := \big\{f \in C: \quad f_\beta^{(r)} \in H_\omega\big\},$$

де

$$H_\omega := \big\{\varphi \in C:\ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le \omega(|t_1 - t_2|), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\big\},$$

і

$$W_{\beta,1}^r = \big\{f \in C: \quad \|f_\beta^{(r)}\|_{L_1} \le 1\big\}, \qquad W_\beta^r H_{\omega_1} = \big\{f \in C: \quad f_\beta^{(r)} \in H_{\omega_1}\big\}.$$

де

$$H_{\omega_1} := \big\{\varphi \in L_1:\ \|\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)\|_{L_1} \le \omega(t)\big\},$$

а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Має місце наступне твердження.

Якщо $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то при $n \to \infty$ справджуються асимптотичні рівності:

С.М. Нікольський (1946 р.) [142]

$$\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; S_n)_{L_1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + \mathcal{O}(1)\frac{1}{n^r};$$

В.І. Бердишев (1965 р.) [20]

$$\mathcal{E}(H_{\omega_1};S_n)_{L_1}=\frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\ln n\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt+\mathcal{O}(1)\omega(\frac{1}{n});$$

О.Г. Демченко (1973 р.) [63]

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H_{\omega_1};S_n)_{L_1}=\frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt+\mathcal{O}(1)n^{-r}\omega(\frac{1}{n});$$

де $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності,* $\theta_\omega\in[1/2;1]$, *причому* $\theta_\omega=1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $\mathcal{O}(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* n,β *і* f.

В подальшому було з'ясовано, що для низки лінійних методів наближення верхні межі відхилень у метриці L і відповідні верхні межі відхилень у метриці C по певних класах функцій співпадають або асимптотично рівні.

Для будь-якого Λ*-метода виконуються співвідношення:*

С.М. Нікольський (1946 р.) [142]

$$\mathcal{E}\left(W^r_1;U_n(\Lambda)\right)_{L_1}\le\mathcal{E}\left(W^r;U_n(\Lambda)\right)_C,\qquad r\in\mathbb{N};$$

С.Б. Стєчкін і С.О. Теляковський (1967 р.) [239]

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,1};U_n(\Lambda)\right)_{L_1}\le\mathcal{E}\left(W^r_\beta;U_n(\Lambda)\right)_C,\quad\forall r>0,\ \beta\in\mathbb{R};$$

В.П. Моторний (1974 р.) [126]

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta H_{\omega_1};U_n(\Lambda)\right)_{L_1}\le\mathcal{E}\left(W^r_\beta H_\omega;U_n(\Lambda)\right)_C,\quad\forall r>0,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

У 80–90-их роках XX-го сторіччя у працях О.І. Степанця та його учнів були розроблені методи дослідження апроксимаційних характеристик на класах ψ-диференційованих функцій, які визначаються у такий спосіб [210].

Означення 1.1.1. *Нехай f — 2π-періодична інтегрована за Лебегом на періоді функція ($f \in L$) і (1.4) — ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\psi(k) = (\psi_1; \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \dots$. Розглянемо ряд*

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k) A_k(f, x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(f, x)), \tag{1.5}$$

де A — деяке число і

$$\tilde{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Якщо ряд (1.5) для функції f і пари ψ є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$, то функцію F називають ψ-інтегралом функції f і позначають $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}(f; \cdot)$. Множину ψ-інтегралів усіх функцій із L позначають L^{ψ}.

Означення 1.1.2. *Нехай $f \in L$, (1.4) — її ряд Фур'є і пара $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ задовольняє умову*

$$\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f; x) \right) \tag{1.7}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ називають ψ-похідною функції f і позначають $\varphi(\cdot) = D^{\psi}(f; \cdot) = f^{\psi}(\cdot)$. Підмножину функцій $f \in L$, у яких існують ψ-похідні, позначають $\bar{L}^{\psi}$.

Зв'язок між ψ-інтегралами та ψ-похідними встановлює таке твердження.

Лема 1.1.1 (О.І.Степанець (1997 р.) [210]). *Якщо $f \in L$, ряд (1.4) — її ряд Фур'є і виконується умова (1.6), то функція $\mathcal{J}^{\psi}(f; x)$ має ψ-похідну*

і справджується рівність

$$D^{\psi}(\mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Якщо ж $f \in \bar{L}^{\psi}$, *і ряд (1.4) — її ряд Фур'є, то у функції* $D^{\psi}(f;x)$ *існує* ψ*-інтеграл і при цьому*

$$\mathcal{J}^{\psi}(D^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) + A,$$

де A *— деяка стала.*

У роботі [210] показано, що для будь-яких пар $\psi = (\psi_1;\psi_2)$, які задовольняють умову (1.6), виконується рівність $\bar{L}^{\psi} = L^{\psi}$, тобто множина ψ-інтегралів всіх функцій $f \in L$ співпадає з множиною функцій, що мають ψ-похідні.

Якщо $f \in L^{\psi}$ і при цьому $f^{\psi} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N} \subset L$, то цей факт позначають $f \in L^{\psi}\mathfrak{N}$. Підмножину неперервних функцій $f \in L^{\psi}$ позначимо через C^{ψ}, а через $C^{\psi}\mathfrak{N}$ — клас функцій $f \in C^{\psi}$, у яких $f^{\psi} \in \mathfrak{N}$.

Класи $L^{\psi}\mathfrak{N}$ стали природним узагальненням класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ [203].

Означення 1.1.3. *Нехай* $f \in C$ *і (1.4) — її ряд Фур'є. Нехай далі* $\psi(k)$ *— довільна функція натурального аргументу і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Припустимо, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\Big(a_k \cos\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big) + b_k \sin\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big)\Big)$$

є рядом Фур'є деякої функції з L. *Цю функцію позначимо через* $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ *і назвемо* $(\psi;\beta)$*-похідною функції* $f(\cdot)$, *а множину функцій* $f(\cdot)$, *що задовольняють таку умову, позначимо через* L^{ψ}_{β}. *Тоді, якщо* $f \in L^{\psi}_{\beta}$ *і в той же час* $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, *то будемо казати, що* $f(\cdot)$ *належить класу* $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Зазначимо, що при

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

множини L^{ψ} переходять в множини L^{ψ}_{β}. Якщо ще $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то множини L^{ψ} збігаються з множинами функцій, диференційованих в розумінні Вейля-Надя W^{r}_{β}.

Введені вище класи функцій визначаються функціями натурального аргументу $\psi(k)$, які, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Однак для одержання конкретних результатів на них природно накладати певні обмеження. Зручно вважати, що члени послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, є значеннями деякої опуклої донизу при всіх $v \geq 1$ функції $\psi(v)$ неперервного аргументу.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина всіх опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Нехай, далі, $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ — функція, пов'язана з $\psi(\cdot)$ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Звідси на підставі строгої монотонності функцій $\psi(t)$, однозначно визначаються при всіх $t \geq 1$ функції

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}. \tag{1.8}$$

Тоді [210] (див., також, [216])

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad 0 < \mu(\psi; t) \leq K, \quad \forall t \geq 1\},$$

$$F := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \eta'(\psi; t) \leq K\}.$$

Отримані О.І. Степанецем та його учнями результати узагальнили відповідні класичні твердження про наближення диференційованих функцій і, при цьому, розкрили низку нових ефектів.

О.І. Степанець, Н.І. Степанець (1996 р.) [231] *Якщо* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$, *то при* $n \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_1; S_n)_{L_1} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{n}^{\infty} \frac{|\psi_2(v)|}{v}\, dv + \frac{4}{\pi^2}\, \psi(n)\, \ln n + \mathcal{O}(1)\psi(n),$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H_{\omega_1};S_n)_{L_1}=\theta_{\omega_1}\Big[\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^1\omega(\frac{2t}{n})\int\limits_1^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\ dv\ dt\Big|+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\ \psi(n)\ln n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt\Big]+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}).$$

Якщо ж $\pm\psi_1,\ \pm\psi_2\in F$ *і, крім того, існують сталі* K_1 *і* K_2 *такі, що* $\forall t\geq 1$

$$0<K_1\leq\frac{\eta(\psi_1;t)-t}{\eta(\psi_2;t)-t}\leq K_2<\infty,$$

то при $n\to\infty$ *справджуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(L_1^{\psi};S_n)_{L_1}=\frac{4\psi(n)}{\pi^2}\ln^{+}(\eta(n)-n)+\mathcal{O}(1)\psi(n),$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};S_n)_{L_1}=\frac{\psi(n)}{\pi^2}\theta_{\omega_1}\ln^{+}(\eta(n)-n)\int\limits_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}),$$

де $\psi=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}$, $\eta(n)=\eta(\psi_1;n)=\psi_1^{-1}(\frac{1}{2}\psi_1(n))$, *або* $\eta(n)=\eta(\psi_2;n)=\psi_2^{-1}(\frac{1}{2}\psi_2(n))$, $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n *і* $\theta_{\omega_1}\in[1/2;1]$, *причому* $\theta_{\omega_1}=1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності.*

На класах $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій такі результати отримані в роботі [223]. Відзначимо, також, що в рівномірній метриці відповідні рівності для сум Фур'є отримані О.І. Степанцем [203] (див., також, [204]), а для сум Валле Пуссена — в роботах [167, 170, 171] (див., також, [224]).

Асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень в рівномірній і інтегральних метриках сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона $L_{\beta}^{\psi_q}\mathfrak{N}$, $\psi_q(k)=q^k$, $q\in[0;1)$, $k\in\mathbb{N}$ (означення яких наведене, наприклад, у книзі [216, с. 301]) отримані в роботах С.М. Нікольського [142], С.Б. Стєчкіна [238] (який передовів іншим методом рівність, одержану С.М. Нікольським, уточнивши залишковий член) та О.І. Степанця [213]. Використовуючи ці результати, в праці О.І. Степанця і А.С. Сердюка [226] аналогічні рівності були отримані у випадку, коли елементами множин $L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ є 2π-періодичні фун-

кції, що можуть бути регулярно продовженими у смугу комплексної площини $|\mathrm{Im}\ z| \le \ln 1/q$. В подальшому, результати роботи [226] були поширені В.І. Рукасовим на випадок наближення сумами Валле Пуссена на класах аналітичних функцій [165].

1.2. Наближення голоморфних функцій сумами Валле Пуссена

Нехай $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z : |z| = 1\}$, f — функція аналітична в крузі $\mathbb{D}$ і

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \tag{1.9}$$

— її розвинення в ряд Тейлора–Маклорена.

Сумою Валле Пуссена функції f називається алгебраїчний многочлен вигляду

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f)(z),$$

де $p, n \in \mathbb{N}, p \le n$ і

$$S_k(f)(z) := \sum_{l=0}^{k} (f^{(l)}(0)/l!) z^l$$

— частинна сума порядку k ряду (1.9).

Нехай, далі, $H_p = H_p(\mathbb{D})$ – простір Гарді голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho z)|^p \, dz \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

і

$$UH_p := \big\{ f \in H_p : \quad \|f\|_{H_p} \le 1 \big\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

— одинична куля простору H_p.

С.Б. Стечкін, Л.В. Тайков (1962 р.) [241]: *Нехай* $q = 1, \infty$. *Тоді*

$$\sup_{f \in UH_q} \|V_{n,p}(f)\|_{H_q} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n}{p} + \mathcal{O}(1), \ p \le n, \ n \to \infty. \tag{1.10}$$

А.А. Пекарський (2006 р.) [152]:

$$\sup_{f \in UH_\infty} \|V_{2n,n}(f)\|_{H_\infty} = \frac{5}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $r \in \mathbb{N}$ і

$$H_\infty^r := \Big\{ f : \quad f - \text{аналітична в } \ \mathbb{D}, \quad \big\|f^{(r)}\big\|_{H_\infty} \le 1 \Big\},$$

де $f^{(r)}(z)$ — r-та похідна функції f.

Л.В. Тайков (1962 р.) [241]: *Для будь-якої функції* $f \in H_\infty^r, r \in \mathbb{N}$, *рівномірно відносно* $z \in \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = -\frac{z^r}{n^r} V_{n-r,p}(f^{(r)})(z) + O(n^{-r}), \quad n - p \ge r; \tag{1.11}$$

Для будь-якого $r \in \mathbb{N}$ *при* $n \to \infty$ *і* $p/n \to 0$

$$\sup_{f \in H_\infty^r} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi n^r} \ln \frac{n}{p} + O(n^{-r}); \tag{1.12}$$

Нехай $\{\psi_k\}$ — послідовність комплексних чисел і

$$H_\infty^\psi := \left\{ f \in \mathscr{H}_+ : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{g}_k, \ g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_k z^k \in UH_\infty \right\},$$

де $\mathscr{H}_+$ — множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$.

В.В. Савчук (1998 р.) [183]: *Для будь-якої функції* $f \in H_\infty^\psi$,

$\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, *рівномірно відносно* $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$f(z) - V_{n,1}(f)(z) = -\psi(n)V_{n,1}(f^{\psi})(z) + \mathcal{O}(1)\psi(n), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{1.13}$$

О.М. Швецова (2000 р.) [264]: *Якщо клас* H^{ψ}_{∞} *породжується функцією* ψ *такою, що* $\psi(k) \neq 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0$, ψ *є локально абсолютно неперервною на* $[n_0, \infty)$ *для деякого* $n_0 \geq 2$ *і*

$$\widetilde{V}^{\infty}_{n}(\psi) := \int_{n}^{\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{u\geq t} |\psi'(u)|dt < \infty \quad \forall\ n \geq n_0,$$

то для будь-якого натурального $n \geq n_0$

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}} \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=p}^{n}\frac{|\psi(k+n-1)|}{k} + \mathcal{O}(1)\widetilde{V}^{\infty}_{n}(\psi).$$

В усіх наведених вище співвідношеннях $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно f і n.

Зауважимо, що історія задачі про наближення класів H^{ψ}_{∞}, $\psi \in \mathfrak{M}_0$, тим чи іншими лінійним методом, містить в собі історію аналогічної задачі для класів H^{r}_{∞}. Підтвердженням цьому є наступні міркування.

Нехай $r \geq 0$ і

$$H^{r}_{\infty} := \Big\{ f : f - \text{аналітична в } \mathbb{D}, \quad \big\|f^{(r)}\big\|_{H_\infty} \leq 1 \Big\},$$

де

$$f^{(r)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+r+1)}{\Gamma(k+1)}\widehat{f}(k)z^k,$$

— дробова похідна в розумінні Рімана–Ліувілля, $[r]$ — ціла частина числа r.

Якщо в означенні класу H^{ψ}_{∞} взяти послідовність ψ, яка породжується функцією $\psi_\Gamma(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$, де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція, то класи H^{ψ}_{∞} і H^{r}_{∞} стануть пов'язаними між собою так $H^{r}_{\infty} = \mathcal{P}_{[r]-1} + z^{[r]}H^{\psi_\Gamma}_{\infty}$, де $\mathcal{P}_{[r]-1}$ — множина алгебраїчних многочленів степеня $\leq [r]-1$. Тобто будь-

яку функцію $f \in H^r_\infty$ можна зобразити у вигляді

$$f(z) = P_{[r]-1}(z) + z^{[r]}g(z),$$

де $P_{[r]-1} \in \mathcal{P}_{[r]-1}$, а g — деяка функція з класу $H^{\psi_\Gamma}_\infty$.

Важливо зауважити, що $\psi_\Gamma \in \mathfrak{M}_0$ при $r > 0$. Дійсно, оскільки (див., наприклад, [18, с. 37])

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+k)^2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\},$$

то

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\ln\Gamma(t+1) - \frac{d^2}{dt^2}\ln\Gamma(t+r+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+k+r+1)^2} \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

З другого боку

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi(t) = \frac{\psi''(t)\psi(t) - (\psi'(t))^2}{(\psi(t))^2}.$$

Отже, $\psi''(t)\psi(t) - (\psi'(t))^2 \geq 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$, звідки і випливає, що $\psi'' \geq 0$. Тому функція $\psi(\cdot)$ є опуклою і до того ж $\psi(t) \to 0, t \to \infty$, тобто $\psi \in \mathfrak{M}$.

Далі, використовуючи розвинення (див. [18, с. 30])

$$\frac{d}{dt}\ln\Gamma(t) = -\gamma - \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t}{k(t+k)},$$

де γ — стала Ейлера–Маскероні, легко довести рівність

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = -\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} = -t\frac{d}{dt}\ln\psi(t) =$$

$$= rt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+1+k)(t+r+1+k)}, \quad \forall\, t \geq 1.$$

Звідси отримуємо низку співвідношень

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = rt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(t+1+k)(t+r+1+k)} \leq rt\int_1^{\infty}\frac{dx}{(t+x)(t+r+x)} =$$

$$= t \ln \frac{t+r+1}{t+1} \le (t+1) \ln \left(1 + \frac{r}{t+1}\right) \le r, \quad \forall\, t \ge 1.$$

Згідно з теоремою 12.1 [216, с. 161] нерівність $\sup_{t\ge 1} t|\psi'(t)|/\psi(t) < \infty$ є рівносильною включенню $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

Співвідношення (1.11) і (1.13) становлять певний інтерес і з точки зору побудови лінійного методу, який наближає клас H^{ψ}_{∞} зі швидкістю найкращого наближення. Наприклад, у співвідношенні (1.13)

$$\psi(n) V_{n,1}(f^{\psi})(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} \widehat{f}(k) z^k.$$

Тому

$$V_{n,1}(f)(z) - \psi(n) V_{n,1}(f^{\psi})(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}\right) \widehat{f}(k) z^k =: U_n(f)(z), \quad (1.14)$$

а наведений результат В.В. Савчука (співвідношення (1.13)) при цьому рівносильні такому.

В.В. Савчук (1998 р.) [183]: *Для будь-якої функції* $f \in H^{\psi}_{\infty}$, $\operatorname{Re}\psi, \operatorname{Im}\psi \in \mathfrak{M}_0$, *рівномірно відносно* $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$f(z) - U_n(f)(z) = \mathcal{O}(1)\psi(n). \quad (1.15)$$

З другого боку, як добре відомо, для величини

$$E_n(H^{\psi}_{\infty}; C(\mathbb{T})) := \sup_{f \in H^{\psi}_{\infty}} E_n(f)_{C(\mathbb{T})}$$

найкращого наближення класу H^{ψ}_{∞}, де

$$E_n(f)_{C(\mathbb{T})} := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - P\|_{C(\mathbb{T})},$$

справджується нерівність

$$E_n(H^{\psi}_{\infty}; C(\mathbb{T})) \ge \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f_n - P\|_{C(\mathbb{T})} = |\psi(n)|,$$

де $f_n(z) = \psi(n)z^n$.

Таким чином, лінійний метод наближення, який означається формулою (1.14) наближає клас H^{ψ}_{∞} зі швидкістю найкращого наближення, тобто

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}} \|f - U_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \asymp E_n(H^{\psi}_{\infty}; C(\mathbb{T})) \asymp |\psi(n)| \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо нарешті, що основоположний результат, отриманий С.Б. Стєчкіним [236] для сум Тейлора (співвідношення (1.11) і (1.12) при $p = 1$), став аналогом класичного результату А.М. Колмогорова [94] про асимптотичну поведінку верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах $W^r, r \in \mathbb{N}$, 2π–періодичних функцій.

1.3. Апроксимаційні властивості операторів Фур'є і Валле Пуссена на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$

Природно, що за агрегати наближення для періодичних функцій, як правило, використовуються тригонометричні поліноми заданого степеня n і, зокрема, поліноми, що будуються для даної функції за допомогою лінійних процесів підсумовування рядів Фур'є. У випадку наближення функцій, визначених на дійсній осі і не обов'язково періодичних, природним апаратом наближення є цілі функції експоненційного типу σ. Множина функцій, експоненційний тип яких не перевищує σ, позначається через $\mathscr{E}_{\sigma}$. Тригонометричні поліноми порядку n $(n \le \sigma)$, як добре відомо, належать до $\mathscr{E}_{\sigma}$.

Початок сучасної теорії наближення цілими функціями експоненційного типу покладено у відомих роботах С.Н. Бернштейна, які відносяться до початку минулого сторіччя, де він висунув ідею побудови теорії наближення функцій, заданих на дійсній осі, як теорію, що включає і періодичний випадок. Розвиток гілки теорії апроксимації, що використовує в якості апарату наближення цілі функції, пов'язаний з роботами Н. Вінера, Н. Пелі (див. бібліографію в [39]), Н.І. Ахієзера [12], М.В. Кєлдиша [90], С.М. Нікольського [144], опублікованими в 30 – 50-их роках минулого сторіччя.

Н. Вінер, Н. Пелі (1934 р.) [39] *Множина $\mathscr{E}_{\sigma}$ всіх цілих функцій*

$f(x)$ експоненціного типу, що не перевищує σ, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty,$$

співпадає з множиною функцій $f(z)$, що дозволяють зображення

$$f(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(u) e^{izu} \, du, \quad \varphi \in L_2(-\sigma, \sigma).$$

В подальшому, ця тематика отримала розвиток і знайшла відображення у працях О.П. Тімана [243], В.М. Тіхомірова [245], Г.Г. Магарил-Ільяєва [113, 114], І.І. Ібрагімова [86, 87], С.Б. Вакарчука [30, 32, 33] і багатьох інших. Запровадження Г.Г. Магарил-Ільяєвим поняття середньої розмірності і визначення на цій основі поняття середнього поперечника дозволило розв'язувати на прямій екстремальні задачі оптимізаційного характеру. Виявилось, що в багатьох випадках екстремальними в зазначеному вище сенсі є простори цілих функцій скінченого ступеня.

Інший тип задач стосується вивчення апроксимаційних характеристик цілих трансцендентних функцій у випадку, коли вони використовуються в якості об'єкту поліноміальної апроксимації. Завдяки роботам А.В. Батирєва [17], І.І. Ібрагімова [88], A.R. Reddy [158, 159], С.Б. Вакарчука [29, 31, 34, 35] і інших було встановлено зв'язок між характеристиками росту цілих трансцендентних функцій і швидкістю прямування до нуля послідовностей їх найкращих поліноміальних наближень в деяких банахових просторах аналітичних в крузі функцій.

Наприкінці минулого сторіччя у серії праць О.І. Степанця [205–208] була запроваджена нова класифікація функцій, локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі (і не обов'язково періодичних) і розв'язано ряд екстремальних задач, пов'язаних зі знаходженням асимптотичних рівностей для верхніх меж відхилень операторів типу Фур'є (які діють у простір цілих функцій експоненційного типу), отриманням оцінок для величин найкращих наближень та інших проблем на введених класах.

Нехай $\widehat{L}_p,\ p \geq 1$ — множина функцій φ, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \Big(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Якщо тепер $\psi(v)$ — функція, неперервна при всіх $v \geq 0$ і β — фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \, dv, \tag{1.16}$$

то через $\widehat{L}_\beta^\psi$ [205] (див., також монографію [216]) позначається множина функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати рівністю

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t) \, dt, \tag{1.17}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміємо як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}_\beta^\psi$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\widehat{L}_\beta^\psi$ і $\widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають відповідно $\widehat{C}_\beta^\psi$ і $\widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (1.17) називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$.

Зв'язок між множинами $\hat{L}_\beta^\psi$ і множинами L_β^ψ, (див. підрозділ 1.1), встановлює таке твердження.

О.І. Степанець (1988 р.) [205] (див., також, [216, с. 169]) *Нехай функція $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і перетворення $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t,\beta)$ вигляду (1.16) інтегроване на всій осі $(\hat{\psi} \in L(\mathbb{R}))$:*

$$\int\limits_{-\infty}^\infty |\hat{\psi}(t)| \, dt = K < \infty. \tag{1.18}$$

Тоді

$$\hat{L}_\beta^\psi L_1^0 = L_\beta^\psi,$$

де $L_1^0 := \left\{\varphi \in L_1 : \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\right\}$. *Крім того, якщо* $\mathfrak{N}$ *— деяка підмножина з* L_1^0, *то*

$$\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N} = L_\beta^\psi \mathfrak{N}, \quad \hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N} = C_\beta^\psi \mathfrak{N}. \tag{1.19}$$

Зі співвідношення (1.19), зокрема, випливає, що при виконанні умови (1.18) будь-яке твердження, доведене для класів $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$, буде автоматично поширюватись і на класи $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Отже запропонована класифікація повністю реалізовувала концепцію, висловлену С.Н. Бернштейном.

В ролі агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ в роботах О.І. Степанця використовувались оператори вигляду

$$V_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}\right)(t;\beta)\, dt, \tag{1.20}$$

де $\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}\right)(t;\beta)$ перетворення вигляду (1.17) функції $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$, в якому

$$\lambda_{\sigma,c}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c, \\ \frac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma. \end{cases} \tag{1.21}$$

і c — деяке число з проміжку $[0;\sigma)$, а також модифікації цих операторів вигляду

$$F_\sigma^*(f;x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma}\right)(t;\beta)\, dt, \tag{1.22}$$

де $\left(\widehat{\psi\lambda_\sigma}\right)(t;\beta)$ перетворення вигляду (4.1) функції $\psi(v)\lambda_\sigma(v)$, при чому

$$\lambda_\sigma(v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le\sigma-1,\\ 1-(v-\sigma+1)\frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & \sigma-1\le v\le\sigma,\\ 0, & \sigma\le v.\end{cases}$$

О.І. Степанець (1990 р.) [205] (див., також, [216, с. 181], [224, с. 319]) *Якщо $f\in L^\psi_\beta$ і $\psi(\cdot)$ — функція, неперервна при всіх $v\ge 0$ і $\hat\psi(\cdot;\beta)\in L(\mathbb{R})$, то при довільних $c<\sigma$*

$$V_{\sigma,c}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k<\sigma}\lambda_{\sigma,c}(k)(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

де a_0, a_k і b_k, $k=1,2,\ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(\cdot)$. Зокрема: якщо $n\in N$ і $c\in[n-1;n)$ то

$$V_{n,c}(f;x)=F^*_\sigma(f;x)=S_{n-1}(f;x);\tag{1.23}$$

якщо $\sigma=n\in N$ і $c=n-p$, $p\in N$, $p<n$, то

$$V_{\sigma,c}(f;x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x),\tag{1.24}$$

де $S_k(f;x)$, $k=0,1,\ldots,n-1,$ — частинні суми порядку k ряду Фур'є функції $f(x)$.

Звідси, зокрема, випливає, що оператори $F^*_\sigma(f;x)$ і $V_{\sigma,c}(f;x)$ (при певному виборі параметру $c\in[0;\sigma)$) кожній періодичній функції $f(x)$ ставлять у відповідність її частинну суму Фур'є або ж суму Валле Пусена. Отже, у періодичному випадку $F^*_\sigma(f;x)$ і $V_{\sigma,c}(f;\cdot)$ є тригонометричними поліномами. Якщо ж $f\in\widehat{L}^\psi_\beta$, то при досить загальних припущеннях можна показати, що $F^*_\sigma(f;x)$ і $V_{\sigma,c}(f;x)$ — цілі функції експоненційного типу, що не перевищує σ.

Апроксимаційні властивості операторів $F^*_\sigma(f;x)$ і $V_{\sigma,c}(f;x)$ на множи-

нах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, при різних умовах на параметри, що визначають клас і метод наближення, досліджувались в роботах О.І. Степанця та його учнів. Для формулювання відповідних результатів наведемо необхідні означення з книги [217, с. 193].

Нехай, як і раніше, $\mathfrak{M}$ — множина опуклих донизу при всіх $v \geq 1$ і зникаючих на нескінченності функцій $\psi(v)$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0, 1)$ так, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v + 0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0, \infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Підмножини з $\mathfrak{A}$, що складаються з елементів, у яких звуження на множину $v \geq 1$ належать до однієї з множин $\mathfrak{M}_0$ і F (дивись означення з розділу 1.1) позначаються через $\mathfrak{A}_0$ і $\bar{F}$ відповідно.

У випадку $c = \sigma - 1$ (наближення операторами Фур'є) О.І. Степанецем, зокрема, були отримані наступні твердження.

О.І. Степанець (1990 р.) [206, 207] *Якщо* $\psi \in \bar{F}$, *то* $\forall \beta \in \mathbb{R}$ *при* $\sigma \to \infty$ *справджуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,\sigma-1})_C = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\,|\ln \eta(\sigma) - \sigma| + \mathcal{O}(1)\psi(\sigma),$$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; V_{\sigma,\sigma-1})_C = \frac{2\theta_{\omega}}{\pi^2}\psi(\sigma)\,|\ln \eta(\sigma) - \sigma| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\frac{2t}{\sigma}) \sin t dt + \mathcal{O}(1)\psi(\sigma)\omega(\frac{1}{\sigma});$$

якщо $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то при* $\sigma \to \infty$ *виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{0,\infty}; V_{\sigma,\sigma-1})_C = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\sigma + \mathcal{O}(1)\psi(\sigma),$$

$$\mathcal{E}(\widehat{C}^{\psi}_{0} H_{\omega}; V_{\sigma,\sigma-1})_C = \frac{2\theta_{\omega}}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\sigma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\frac{2t}{\sigma}) \sin t \; dt + \mathcal{O}(1)\psi(\sigma)\omega(\frac{1}{\sigma}),$$

де $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} := \{f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta} : \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f^{\psi}_{\beta}(t)| \leq 1\}$, $\eta(\sigma) = \eta(\sigma;\psi) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, $\theta_{\omega} \in [2/3; 1]$, *причому* $\theta_{\omega} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності, а* $\mathcal{O}(1)$ — *величина, рівномірно обмежена щодо* σ *і* β.

Для операторів Валле Пуссена ($c = \sigma - h$, $h \geq 1$,) аналогічні результати

отримано в роботах [163, 164].

Наближення операторами $F_\sigma^*(f;x)$ на множинах $\widehat{L}_\beta^{\psi_\alpha}\widehat{L}_p$, де

$$\psi_\alpha(v) := \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0;1], \\ e^{-\alpha v}, & v > 1, \end{cases}$$

$\alpha > 0$ — довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi_1'(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$, і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$ і $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$ були розглянуті в роботі [230].

Теорема 1.3.1 (О.І. Степанець, І.В. Соколенко (2004 р.) [230]). *Для довільної функції $f \in \widehat{L}_\beta^{\psi_\alpha}\widehat{L}_p$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при довільному $p \in [1;\infty]$ виконується асимптотична (при $\sigma \to \infty$) нерівність*

$$\|\rho_\sigma(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{4e^{-\alpha\sigma}}{\pi^2}\Big(I(\alpha) + \mathcal{O}(1)\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma}\Big)E_{\sigma-1}(f_\beta^{\psi_\alpha})_{\widehat{p}},$$

де

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{\Big(\frac{1-\cos t}{t^2} + \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}\Big)^2 + \Big(\frac{t-\sin t}{t^2} - \frac{t}{t^2+\alpha^2}\Big)^2}, \tag{1.25}$$

$$E_\sigma(\varphi)_{\widehat{p}} := \inf_{u\in W_\sigma^2}\|\varphi(\cdot) - u(\cdot)\|\widehat{p}, \quad W_\sigma^2 := \{u \in \mathscr{C}_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u(t)|^2}{1+|t|^2}dt < \infty\},$$

а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно σ, p, α, ψ і β.

Нехай

$$\widehat{S}_p = \Big\{f \in \widehat{L}_p : \quad \|f\|_{\widehat{p}} \le 1\Big\}, \qquad \widehat{L}_\beta^{\psi_\alpha}\widehat{S}_p := \widehat{L}_{\beta,p}^{\alpha}.$$

Теорема 1.3.2 (О.І. Степанець, І.В. Соколенко (2004 р.) [230]). *Для довільного класу $\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi_\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при довільному $p \in [1;\infty]$ виконує-*

ться асимптотична (при $\sigma \to \infty$*) нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} := \sup_{f\in\widehat{L}^{\psi_\alpha}_{\beta,p}} \|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{4e^{-\alpha\sigma}}{\pi^2}\Big(I(\alpha)+\mathcal{O}(1)\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma}\Big),$$

яка при $p=\infty$ *перетворюється у рівність, де* $I(\alpha)$ *визначається співвідношенням (1.25), а* $\mathcal{O}(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена по параметрах* σ, p, α, ψ *і* β*.*

У праці [220] був запропонований більш загальний підхід до класифікації функцій, локально інтегровних за Лебегом на дійсній осі, і досліджено апроксимаційні властивості операторів $V_{\sigma,\sigma-1}$ на введених класах. У випадку наближення операторами $F^*_\sigma(f;x)$ аналогічні результати одержано в [228, 229]. Апроксимаційні властивості операторів Валле Пуссена $V_{\sigma,c}$ в цьому випадку розглянуто у працях [168, 169]. У працях [200–202] вивчалися питання наближення операторами спеціального вигляду.

1.4. Раціональні функції як апарат наближення

С точки зору обчислювальної математики, раціональні функції є об'єктом, не набагато складнішим від поліномів, що обумовлює їх використання як апарату наближення. Дослідження, пов'язані з апроксимаційними властивостями раціональних функцій, зараз складають окрему гілку теорії функцій. Фундатором напрямку досліджень, пов'язаних із наближення за допомогою раціональних функцій, вважається П.Л. Чебишев. У класичних працях П.Л. Чебишева [281, с. 148 – 237] та Є.І. Золотарьова [84, с. 130 – 166] отримано низку важливих результатів щодо найкращого наближення на відрізку функцій дійсної змінної за допомогою раціональних функцій заданого порядку, зокрема: встановлено характеристичну властивість дійсної раціональної функції найкращого наближення, знайдено точні вирази для найкращих раціональних наближень певних функцій.

Екстремальні задачі про наближення на дійсній осі за допомогою раціональних функцій з фіксованими полюсами беруть свій початок з робіт

С.Н. Бернштейна. Спираючись на теорію П.Л. Чебишева, ним було доведено твердження, яке є аналогом відомої теореми К. Вейєрштрасса і з якого випливає, що довільну неперервну функцію (границі якої на нескінченності є скінченними і співпадають), можна як завгодно точно наблизити за допомогою раціональних функцій.

С.Н. Бернштейн (1924 р.) [21]: *Нехай f — довільна неперервна на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ функція, що задовольняє умову*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c, \quad c = \text{const}.$$

Тоді, якщо послідовність многочленів $Q_n(x)$ степеня n має властивість, що для довільного $M > 0$ при достатньо великому n виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\theta_k}{r_k} + \sum_{k=1}^{n} q_k \sin\vartheta_k \geq M,$$

де

$$r_k e^{\pm\theta_k} = \alpha_k + i\beta_k,\ |\alpha_k + i\beta_k| \geq 1, \quad q_k e^{\pm\vartheta_k} = \alpha_k + i\beta_k,\ |\alpha_k + i\beta_k| < 1,$$

і $Q_n(\alpha_k + i\beta_k) = 0,\ k = 1, \ldots, n$, то яким би малим не було число $\varepsilon > 0$, можна побудувати поліном P_n так, щоб

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| < \varepsilon,$$

в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Крім того С.Н. Бернштейном побудовано раціональну функцію, що найменше відхиляється від нуля на дійсній осі $\mathbb{R}$, а також вперше наведено розв'язок задачі щодо наближення в рівномірній метриці функцій, за допомогою раціональних дробів, знаменники яких задані і не змінюють знака на дійсній осі, а чисельники — поліноми фіксованого степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Досліджуючи проблеми інтерполяції функцій простору Гарді в одинич-

ному крузі, С. Такенака [242] і Ф. Мальмквіст [115] (див., також, [253, с. 369]) вперше почали займатися розкладами в ряди Фур'є по системах раціональних функцій, ортонормованих на одиничному колі комплексної площини $\mathbb{C}$. Ці питання, а також питання наближення раціональними функціями в точках множин комплексної площини (як обмежених, так і таких, що розширюються до нескінченності) викладено у книзі Дж. Уолша [253], якому також належить низка важливих результатів у цьому напрямку.

Питання, пов'язані з дослідженням умов повноти систем вигляду

$$\frac{1}{z-\bar{a}_0}, \quad \frac{1}{z-\bar{b}_1}, \quad \frac{1}{z-\bar{a}_1}, \quad \frac{1}{z-\bar{b}_1}, \ldots, \tag{1.26}$$

де

$$\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \ (\operatorname{Im} a_k > 0), \quad \mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty}, \ (\operatorname{Im} b_k < 0)$$

— довільні послідовності комплексних чисел, які лежать, відповідно, у верхній $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ і нижній $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ півплощинах комплексної площини $\mathbb{C}$, а також умови збіжності у різних метриках агрегатів наближення, побудованих за цими системами, розглядались у працях [92, 93].

Нехай $H_p = H_p(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, — простір Гарді, який складається з функцій f, голоморфних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Відомо [103, теорема 2] (див. також [117, с. 291]), що кожна функція f із простору $H_p(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на дійсній осі $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}_+$ недотичні граничні значення (за якими залишимо те саме позначення f), які належать простору $L_p(\mathbb{R})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_p := \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Теорема 1.4.1 (**H. Kober (1944 р.) [93]:**). *Система (1.26) є замкненою*

відносно простору $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли ряди*

$$\sigma(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1+|a_k|^2}, \quad \sigma(\mathbf{b}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} b_k|}{1+|b_k|^2},$$

розбігаються.

Початок систематичних досліджень, пов'язаних з апроксимацією раціональними функціями (з вільними полюсами), припадає на другу половину 50-их років минулого сторіччя і пов'язаний з появою фундаментальних робіт А.О. Гончара і Є.П.Долженка (огляд результатів наведено в [54]), де досліджувалась залежність структурних властивостей функції від швидкості спадання до нуля величин найкращих раціональних наближень цих функцій. З цих результатів, зокрема, випливають наступні висновки: існують функції, порядок раціональних наближень яких не перевищує порядку поліноміального наближення (тобто розширення апроксимуючої множини з многочленів до раціональних функцій не дозволяє покращити прямі теореми про найкраще наближення на всьому класі неперервних функцій); водночас, існують функції, найкращі поліноміальні наближення яких прямують до нуля як завгодно повільно, а їх найкращі раціональні наближення спадають до нуля як завгодно швидко (достатньо широкі класи неперервних функцій, на яких раціональна апроксимація має переваги в порівнянні з поліноміальною описані у працях О.П. Буланова, В.М. Русака, Е.А. Ровби, А.А. Пекарського).

Різним питанням раціональної апроксимації на замкнених множинах комплексної площини присвячено праці А.О. Гончара [50–53], С.Н. Мергеляна [121]. У працях В.М. Русака (див. монографію [181]) у термінах мажоруючих функцій, що залежать від полюсів, були доведені нерівності для похідних раціональних функцій у різних метриках, а також досліджено швидкість наближення раціональними операторами типу Фейєра, Валле-Пуссена та Джексона.

В.М. Русак (1965 р.) [181]: *Нехай дано алгебраїчний дріб (у ча-*

стинному випадку — раціональна функція):

$$R_n(x) := \frac{p_n(x)}{\sqrt{h_{2n}(x)}}, \quad h_{2n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \left[(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2\right],$$

де $p_n(x)$ *— поліном з комплексними коефіцієнтами.*

Тоді, якщо $|R_n(x)| \le 1, \ -\infty < x < \infty,$ *то справджується нерівність*

$$|R_n'(x)| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Важливий напрямок в теорії раціональної апроксимації формують дослідження, пов'язані з наближеннями раціональними функціями з фіксованими полюсами. В серії робіт М.М. Джрбашяна [67–69] досліджено питання розкладу аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій, що належать простору Гарді $H_2(\mathbb{D})$, в ряд Фур'є за ортонормованою на одиничному колі $\mathbb{T}$ системою раціональних функцій, що визначається фіксованою системою полюсів (яку в літературі називають системою Такенаки-Мальмквіста), проблеми розкладу аналітичних функцій у ряди по більш загальним системам, а також знайшов умови збіжності таких рядів. Зокрема було встановлено, що ознаки Жордана і Діні-Липшиця збіжності рядів Фур'є за тригонометричною системою справджуються і для ряду Фур'є за системою Такенаки-Мальмквіста за умови, що послідовності полюсів цієї системи не мають граничних точок на одиничному колі.

Зазначені дослідження М.М. Джрбашяня продовжено у працях О.М. Лукацького [109], Г.Ц. Тумаркіна [247, 248] Е.А. Ровби [160], H. Akcay [2, 3] (де, зокрема, наведено застосування одержаних результатів у задачах моделювання фізичних систем). У праці В.В. Савчука [185] побудовано найкращий лінійний метод наближення функцій простору Гарді на компактних підмножинах одиничного круга.

М.М. Джрбашяном, також, був розвинений метод, що дозволив отримати розв'язання екстремальних задач про найкращі раціональні наближення

ядра Коші $\mathcal{C} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{C}(t,z) := \frac{-1}{2i(t-\overline{z})}, \quad t,z \in \mathbb{C},\ t \neq \overline{z}.$$

на всій дійсній осі $-\infty < t < \infty$ як у рівномірній, так і в середньо квадратичній метриці. Запропонований метод базувався на використанні певних ортогональної та біортогональних на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ систем раціональних функцій із фіксованими полюсами.

Нехай $\mathbf{a}_n := \{a_k\}_{k=0}^{n-1}$ — відрізок довжини n послідовність точок $\mathbf{a}$ і $\mathcal{R}(\mathbf{a}_n)$ — сім'я раціональних функцій R_n вигляду

$$R_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{(t-\overline{a}_k)^{s_k}}, \quad d_k \in \mathbb{C},$$

де $s_k,\ 1 \le s_k \le k,$ — кратність появи точки a_k у відрізку $\{a_j\}_{j=0}^{k-1}$ послідовності $\mathbf{a}$.

У випадку, коли $s_k \equiv 1$, справджується таке твердження.

М.М. Джрбашян (1974 р.) [70] (див., також, Н.І. Ахієзер [12, с. 280]: *В кожній точці $z \in \mathbb{C}_+$ виконується рівність:*

$$\min\{\|\mathcal{C}(z,\cdot) - R_n(\cdot)\|_2 : R_n \in \mathcal{R}(\mathbf{a}_n)\} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im} z}} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\frac{z-a_k}{z-\overline{a}_k}\right|, \tag{1.27}$$

в якій мінімум досягається для функції $R_n^*(t) = \mathcal{S}_n(t,z)$, де

$$\mathcal{S}_n(t,z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) \frac{1}{t-\overline{a}_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{t-a_j}{t-\overline{a}_j},\ c_k(z) = \frac{\operatorname{Im} a_k}{\overline{z}-a_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\overline{z}-\overline{a}_j}{\overline{z}-a_j},$$

(добуток $\prod_{j=0}^{-1}$ покладається рівним одиниці).

Окрім великого значення в теорії раціонального наближення голоморфних функцій з $H_2(\mathbb{C}_+)$ цей результат є важливим ще й в теорії інтерполяції. А саме, з рівності (1.27) випливає, що функція $\mathcal{S}_n(t,\cdot)$ у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ інтерполює ядро Коші $\mathcal{C}(t,\cdot)$ в точках послідовності $\mathbf{a}_n$, тобто $\mathcal{S}_n(t,a_k) = \mathcal{C}(t,a_k)$.

Таким чином лінійний оператор U_n, який діє з $H_2(\mathbb{C}_+)$ в $\mathcal{R}(\mathbf{a}_n)$ за правилом $U_n(f)(z) = \langle f, \mathcal{S}_n(\cdot, z)\rangle$ є інтерполяційним, тобто $U_n(f)(a_k) = f(a_k)$, $k = \overline{0, n-1}$, для будь-якої функції $f \in H_2(\mathbb{C}_+)$. До того ж згідно з (1.27) мають місце рівності

$$\max\{|f(z) - U_n(f)(z)| : f \in H_2(\mathbb{C}_+), \|f\|_2 \le 1\} =$$

$$= \|\mathcal{C}(\cdot, z) - \mathcal{S}_n(\cdot, z)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im} z}} \prod_{k=0}^{n-1} \left|\frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k}\right| \quad \forall\ z \in \mathbb{C}_+,$$

де максимум (при фіксованому $z \in \mathbb{C}_+$) досягається для функції

$$f^*(\zeta) = \frac{\mathcal{C}(\zeta, z) - \mathcal{S}_n(\zeta, z)}{\|\mathcal{C}(\cdot, z) - \mathcal{S}_n(\cdot, z)\|_2}.$$

Н.І. Ахієзер [12], досліджуючи задачі вагового поліноміального наближення, вперше встановив точні величини найкращих вагових наближень на дійсні осі ядер

$$\frac{Ax + D}{x^2 + \lambda}, \quad (\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} D = 0,\ \lambda > 0). \tag{1.28}$$

Використовуючи метод М.М. Джрбашяна, А.А. Восканян в роботі [41] передовів результат Н.І. Ахієзера, а також розв'язав аналогічні екстремальні задачі для ядер (1.28) в середньо квадратичній метриці.

Н.І. Ахієзер (1956 р.) [12], А.А. Восканян [41] (1979 р.): *Для довільних дійсних A, B і $\lambda > 0$ справджується рівність:*

$$\min_{C_k} \max_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{|P_n(x)|}\left|\frac{A + Bx}{x^2 + \lambda^2} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2 + \lambda^2 B^2}}{2\lambda^2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|P_n(x)|}{x^2 + \lambda^2} dx\right\},$$

де

$$P_n(x) = P_n(0) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{c_k}\right), \quad (\operatorname{Im} c_k \ne 0)$$

— алгебраїчний многочлен порядку n.

1.5. Простори Лебега зі змінним показником

Множини функцій, інтегровані за Лебегом зі змінним показником, були запроваджені В. Орличем в 1931 році. Ним доведено таке твердження.

W. Orlicz (1931 р.) [146] *Нехай послідовності дійсних чисел*

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{p_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad (p_k > 1,\ k \in \mathbb{N}),$$

задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty. \tag{1.29}$$

Тоді для того, щоб ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ *збігався, необхідно й достатньо, щоб знайшлось таке число* $\lambda,\ 0 < \lambda < 1,$ *що*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda y_k|^{p_k'} < \infty, \qquad \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k'} = 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Фактично, отриманий результат є аналогом нерівності Гельдера у просторах числових послідовностей, що задовольняють умову (1.29). У зазначеній роботі В. Орлича у такий же спосіб були введені до розгляду множини функцій інтегрованих за Лебегом зі змінним показником і розглянуто деякі властивості цих множин.

До певного часу простори функцій, інтегровані зі змінним показником, в математичній літературі відігравали роль екзотичних прикладів так званих модулярних просторів, які досліджувались в роботах Х. Накано [130, 130], В. Орлича та Й. Муселяка [127, 128]. Відправною віхою на шляху самостійного розвитку просторів функцій, інтегрованих за Лебегом зі змінним показником, стало доведення того, що топологія цих просторів може бути нормованою. Для одновимірного періодичного випадку відповідний результат може бути сформульовано так.

І.І. Шарапудінов (1979 р.) [258] (див., також, [101]) *Нехай* $p = p(x)$ *—* 2π*-періодична вимірна і істотно обмежена функція і* $L^{p(\cdot)}$ *—*

простори вимірних 2π*-періодичних функцій* f *таких, що*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty. \tag{1.30}$$

Тоді, якщо $p(x) \geq 1$, *то простір* $L^{p(\cdot)}$ *є банаховим із нормою, що можна визначити формулою:*

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}. \tag{1.31}$$

Крім того, якщо

$$\underline{p} := \operatorname{ess\,inf}_x |p(x)| > 1,$$

то простір $L^{q(\cdot)}$, *де* $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, *є спряженим до* $L^{p(\cdot)}$ *і для довільних функцій* $f \in L^{p(\cdot)}$ *і* $g \in L^{q(\cdot)}$ *виконується нерівність*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)|\, dx \leq r_{p,q}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}, \quad r_{p,q} \leq 1/\underline{p} + 1/\underline{q}. \tag{1.32}$$

Звідси, зокрема, випливає включення $L^{p(\cdot)} \subset L$, де L — простір 2π-періодичних інтегрованих за Лебегом функцій. Зрозуміло, що у випадку $p = p(x) = \text{const} > 0$, простори $L^{p(\cdot)}$ співпадають з просторами Лебега L_p функцій, інтегрованих на періоді в p-му ступені ($p > 0$), а нерівність (1.32) при $p \geq 1$ перетворюється у класичну нерівність Гельдера. Зважаючи на це, простори $L^{p(\cdot)}$ називають *просторами Лебега зі змінним показником* або *узагальненими просторами Лебега.*

Наступний етап у розвитку теорії просторів Лебега $L^{p(\cdot)}$ пов'язаний із введенням додаткових обмежень на змінний показник $p = p(x)$. Ключову роль тут відіграє відома умова Діні-Ліпшиця, яка накладається на показник і полягає в тому, що функція $p = p(x)$ повинна задовольняти нерівності

$$\omega(p;\delta)\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\gamma} \leq K, \quad 0 < \delta < 1, \tag{1.33}$$

де

$$\omega(p;\delta)=\sup_{x_1,x_2\in[-\pi;\pi]}\Big\{|p(x_1)-p(x_2)|:\quad |x_1-x_2|\le\delta\Big\}.$$

Вперше, в контексті застосувань у теорії просторів Лебега зі змінним показником, ця умова (з $\gamma=1$) з'явилась у праці І.І. Шарапудінова [259], і її подальше використання дало можливість отримання для $L^{p(\cdot)}$ аналогів класичних результатів, відомих у випадку $p=\mathrm{const}$.

Позначимо через $\mathcal{P}^\gamma$ множину 2π-періодичних показників $p=p(x)>1$, що задовольняють умову Діні-Ліпшиця (1.33) порядку $\gamma\ge 1$.

Теорема 1.5.1 (І.І. Шарапудінов (2007 р.) [262]). *Якщо $p\in\mathcal{P}^\gamma$, то для довільної функції $f\in L^{p(\cdot)}$ виконуються оцінки*

$$\|\tilde f\|_{p(\cdot)}\le C_p\|f\|_{p(\cdot)},\tag{1.34}$$

$$\|S_n(f)\|_{p(\cdot)}\le K_p\|f\|_{p(\cdot)},\tag{1.35}$$

де $\tilde f(\cdot)$ — функція, тригонометрично спряжена до $f(\cdot)$, $S_n(f;x)$, $n=0,1,\dots,$ — частинні суми Фур'є порядку n функції f, а C_p, K_p — сталі, що залежить тільки від показника $p=p(x)$.

Іншими словами, теорема 1.5.1 констатує факт обмеженості оператора тригонометричного спряження та оператора Фур'є у просторах Лебега зі змінним показником. З цієї теореми, зокрема, випливає, що для довільної функції $f\in L^{p(\cdot)}$, за умови $p\in\mathcal{P}^\gamma$, суми Фур'є збігаються до цієї функції у метриці просторів $L^{p(\cdot)}$, тобто

$$\|f-S_n(f)\|_{p(\cdot)}\to 0,\quad n\to\infty,\tag{1.36}$$

а також, що справджується співвідношення

$$E_n(f)_{p(\cdot)}\le\|f-S_{n-1}(f)\|_{p(\cdot)}=\mathcal{O}(1)E_n(f)_{p(\cdot)}=\mathcal{O}(1)E_n(\tilde f)_{p(\cdot)},\tag{1.37}$$

в якому

$$E_n(\varphi)_{p(\cdot)} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{p(\cdot)}, \quad \varphi \in L^{p(\cdot)}, \tag{1.38}$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вищого за $n-1$, а $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені по n. При цьому умова на показник $p \in \mathcal{P}^\gamma$, є непокращуваною.

За тих же обмежень на показник $p = p(x)$ І.І. Шарапудіновим було доведено базисність системи Хаара [260] і тригонометричної системи у просторах $L^{p(\cdot)}$ [262], а також показано рівномірну обмеженість у цих просторах деяких родин операторів згортки [261]. Одержані результати, зокрема, охоплюють відомі оператори Фейєра, Валле-Пуссена, Абеля, Стєклова та інш.

Суттєвий вклад у теорію просторів $L^{p(\cdot)}$ був зроблений в роботах [71, 72], де, зокрема, було показано обмеженість максимального оператора Гарді-Літллвуда, а також (за деяких додаткових умов) відомого оператора Кальдерона-Зигмунда. Отже, зв'язок умови Діні-Липшиця для змінного показника $p(x)$ та рівномірна обмеженість в $L^{p(\cdot)}$ родин класичних операторів виявився характерним при побудові теорії інтегральних операторів у просторах $L^{p(\cdot)}$. Численні нещодавні результати (викладення яких і бібліографію з цього питання можна знайти у книзі [73]) свідчать про те, що аналогічна ситуація виникає і при побудові теорії диференціальних рівнянь у просторах Соболева зі змінним показником.

Властивості сингулярних інтегральних операторів та мультиплікаторів в просторах Лебега зі змінним показником було досліджено в роботах [97–99, 191–194]. Зокрема, було одержано аналог добре відомої леми Марцинкевича для мультиплікаторів [116].

Лема 1.5.1 (V. Kokilashvili and S. Samko (2009 р.) [99]). *Нехай послідовність* $\mu(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *задовольняє умовам*

$$\varsigma_0 = \varsigma_0(\mu) = \sup_k |\mu(k)| \le C, \qquad \sigma_0 = \sigma_0(\mu) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\mu(k+1) - \mu(k)| \le C, \tag{1.39}$$

де $C > 0$ *— величина, що не залежить від* k *і* m.

Тоді, якщо $p \in \mathcal{P}^\gamma$, *то для даної функції* $f \in L^{p(\cdot)}$ *існує функція* $F \in L^{p(\cdot)}$ *така, що ряд*

$$\frac{\mu(0)a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx)$$

є рядом Фур'є функції F *і справджується оцінка*

$$\|F\|_{p(\cdot)} \le K\lambda\|f\|_{p(\cdot)}, \quad \lambda = \max\{\varsigma_0, \sigma_0\}, \tag{1.40}$$

де величина K *не залежить від функції* f.

Подальше вивчення більш тонких структурних властивостей функцій із просторів Лебега зі змінним показником здійснювалось за допомогою певних аналогів модулів неперервності, запроваджених І.І. Шарапудіновим у праці [262]. Оскільки зсув $f_h(x) = f(x+h)$ функції $f \in L^{p(\cdot)}$, не обов'язково належить до $L^{p(\cdot)}$, то в основу конструкції модулів неперервності було покладено оператори Стєклова

$$f_h(x) := \frac{1}{h}\int\limits_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\ dt, \quad 0 < h < 1,\ x \in [0; 2\pi],$$

які за умови $p \in \mathcal{P}^\gamma$ є рівномірно обмеженими у просторах $L^{p(\cdot)}$. Розвиваючи цю ідею, до розгляду були введені модулі неперервності дробового порядку [6]:

$$\Omega_\alpha(f;\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{h_i, h<\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i})\sigma_h^\varrho(f) \right\|_{p(\cdot)}, \quad \varrho = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma_h^\varrho(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\varrho}{k} \frac{1}{h^k} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \dots \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k, \quad 0 < \varrho < 1,$$

$$\binom{\varrho}{k} := \frac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-k+1)}{k!},\ k > 1; \quad \binom{\varrho}{1} := \varrho; \quad \binom{\varrho}{0} := 1.$$

Використовуючи означені характеристики, в термінах величин найкращих наближень (1.38) у працях [4–6, 9, 59, 60, 254] було отримано ряд прямих

і обернених теорем теорії наближення у просторах Лебега $L^{p(\cdot)}$.

Теорема 1.5.2 (R. Akgün (2011 р.) [6]). *Якщо* $\alpha > 0$ *і* $f \in L_{p(\cdot)}$, *де* $p \in \mathcal{P}^{\gamma}, \gamma \geq 1$, *то для* $n = 0, 1, \ldots,$ *справджуються нерівності*

$$E_k(f)_{p(\cdot)} \leq c_1 \Omega_{\alpha}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)}, \tag{1.41}$$

$$\Omega_{\alpha}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)_{p(\cdot)} \leq \frac{c_2}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} E_k(f)_{p(\cdot)}, \tag{1.42}$$

де c_1 *і* c_2 *— додатні сталі, що залежить тільки від* α *і* $p = p(x)$.

Крім того, у зазначених працях було доведено прямі і обернені теореми на класах функцій, у яких r-та звичайна або дробова похідної в розумінні Вейля належить $L^{p(\cdot)}$. При цьому, ключову роль у доведенні обернених теорем відіграло одержання нерівності для норми r-ї дробової похідної тригонометричного полінома в просторах Лебега зі змінним показником, яка є аналогом класичної нерівності Бернштейна [22]. Всі згадані результати мають форму відповідних тверджень для класичних просторів Лебега і отримані за умови, що показник $p = p(x)$ задовольняє умову Діні-Липшиця і $\underline{p} > 1$.

Випадок, коли $\underline{p} \geq 1$, був розглянутий у праці І.І. Шарапудінова [263]. Застосувавши новий підхід, який не використовує обмеженість максимального оператора, у припущенні, що в деяких точках функція $p = p(x)$ може дорівнювати 1 ($\underline{p} \geq 1$), автор отримує нерівність типу Бернштейна для звичайної похідної, за допомогою якої доводить аналог першої теореми Джексона. Умови вкладення просторів Лебега зі змінним показником при $p(x) \geq 1$, а також властивості цих просторів у випадку $0 < p(x) < 1$ досліджувались Р.А. Бандалієвим [13–15].

Як вже зазначалося, праця В. Орлича [146] стала основоположною для цілої теорії просторів зі змінним показником, яку математики розробляли в різних напрямках. При цьому, на нашу думку, дещо більша увага приділялася теорії функціональних просторів Лебега зі змінним показником. Наведемо в завершенні цього огляду окремі результати стосовно дослідження властивостей просторів послідовностей, що задовольняють умову (1.29).

Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.43}$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга:

$$||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{p}}} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \le 1\right\}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\mathbf{p}$ є сталою: $p_k{=}p$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_{\mathbf{p}}$ збігаються зі звичайними просторами l_p з нормою

$$||\mathbf{x}||_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p},$$

якщо ж $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (1.43), то як показано в [77] (лема 2.6), має місце рівність

$$l_{\mathbf{p}} = \left\{\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k} < \infty\right\},$$

Для просторів $l_{\mathbf{p}}$ ми будемо також використовувати назву *простори послідовностей зі змінним показником.*

Останнім часом теорія просторів послідовностей зі змінним показником збагатилась новими результатами. Так в праці [133] були знайдені необхідні та достатні умови еквівалентності норм у просторах $l_{\mathbf{p}}$ і $l_{\mathbf{q}}$ та умови обмеженості операторів зсуву, в [134] досліджували властивості оператора усереднення та максимального оператора, в [135] знайдено умови вкладення для просторів $l_{\mathbf{p}}$.

Зазначимо нарешті, що узагальнені простори Лебега зі змінним показником мають застосування в теорії пружності, механіці, теорії диференціальних операторів, варіаційному численні [71, 162, 194].

1.6. Простори Орлича

З того часу, коли теорія інтегрування за Лебегом посіла головне місце в конкретних задачах аналізу, природно виникла потреба запровадження більш широких класів просторів, ніж L_p. Можна вважати, що формальний початок теорії просторів, які в подальшому отримали назву просторів Орлича, був покладений Ш. Валле Пуссеном.

Ch. de la Vallée Poussin (1915 р.) *Нехай* (Ω, Σ, μ) *— простір зі скінченною мірою,* $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \Omega \to \mathbb{R},\ \alpha \in I\}$ *— довільна родина вимірних функцій на* Ω*. Тоді наступні властивості еквівалентні:*

1. *Родина функцій* $\mathcal{F}$ *є рівномірно інтегровною, тобто*

$$\sup_\alpha \int_\Omega |f_\alpha| d\mu \le C < \infty,$$

і рівномірно по $\alpha \in I$

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_\alpha| d\mu = 0.$$

2. *Рівномірно по* $\alpha \in I$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{(|f_\alpha|>\lambda)} |f_\alpha| d\mu = 0.$$

3. *Існує опукла донизу функція* $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, яка задовольняє умовам*

$$M(0) = 0, \quad M(x) = M(-x), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty, \tag{1.44}$$

і така, що

$$\sup_\alpha \int_\Omega M(|f_\alpha|) d\mu < \infty.$$

Передумовою появи теорії просторів Орлича були, також, дослідження В. Юнга та І. Йєнсена [284] початку XX-го сторіччя, присвячені вивченню властивостей опуклих функцій.

Визначення просторів Орлича послідовностей і функцій, а також перші

результати стосовно цих просторів були отримані на початку 1930-х років в роботах В. Орлича і З. Бірнбаума [23, 148, 149] у зв'язку з дослідженнями проблем ортогональних розкладів.

Неперервна опукла вниз функція $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ називається функцією Юнга (N-функцією), якщо вона задовольняє умовам (1.44). Через L_M позначають лінійний простір вимірних функцій $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення

$$\int_a^b M(\lambda|f(t)|)\, dt < \infty$$

при довільному $\lambda > 0$.

Функція $\widetilde{M} = \widetilde{M}(y)$, яка визначається співвідношенням

$$\widetilde{M}(y) := \max_{x \geq 0}\{x|y| - M(x)\}$$

називається додатковою до функції M в сенсі Юнга. Споряджений нормою

$$\|f\|_M := \sup\left\{ \int_a^b |f(t)g(t)|\, dt : \quad \int_a^b \widetilde{M}(|g(t)|)\, dt \leq 1 \right\},$$

де $\widetilde{M}$ — функція, додаткова до M в сенсі Юнга, простір L_M стає банаховим простором, який називають *простором Орлича*, породженим функцією M.

З цього часу починаються систематичні вивчення просторів Орлича і до середини XX-го сторіччя формуються основні наукові центри з цієї та суміжної проблематики, на чолі з: W. Orlicz (Poland), H.Nakano (Sapporo, Japan), М.О. Красносельським та Я.Б. Рутицьким (Вороніж, СРСР), а також W.A.I. Luxemburg та A.C. Zaanen (Leyden, The Netherlands).

Школою H.Nakano була розвинута загальна теорія так званих модулярних просторів (*modular spaces*). В цій теорії простори Орлича розглядались в якості конкретних реалізацій модулярних просторів, які в подальшому стали називати просторами Накано. Основні положення теорії модулярних просторів викладено в двох фундаментальних монографіях H. Nakano [130, 130].

Вороніжська математична школа розвинула в основному проблематику, пов'язану з застосуванням теорії просторів Орлича для розв'язання ін-

тегральних рівнянь. Вплив цієї групи дослідників на подальший розвиток всієї теорії належить також великій кількості фактів, викладених в книзі М.О. Красносельського та Я.Б. Рутицького [102], яка була першою монографією на тему просторів Орлича. В цій монографії знайшли відображення основні результати, посилання та коментарі, станом на 1958 рік. В роботах Ю.І.Грибанова [56, 57] деякі результати М.О. Красносельського та Я.Б. Рутицького поширено на випадок дискретних просторів Орлича, а також вивчено властивості лінійних операторів в цих просторах.

Дослідження Лейденської наукової школи були спрямовані в більш загальному напрямку банахових функціональних просторів. Теорія таких просторів була розвинута В. Люксембургом в його докторській дисертації [110] та продовжена в серії робіт [111, 112]. Систематичну трактовку просторів Олича було дано в 1960 році A.C. Zaanen в книзі [81]. В подальшому розвинення в напрямку банахових функціональних просторів було здійснено в [82, 83], а згодом, простори Орлича послідовностей і функцій досліджувались с точки зору існування базису та ізоморфізму в книгах J. Lindenstrauss та L. Tzafriri [106–108].

В багатьох випадках дослідження властивостей просторів Орлича відбувалось у напрямку поширення на ці простори результатів, відомих для L_p. Наступне твердження є аналогом в просторах L_M відомої леми Марцинкевича для мультиплікаторів [116].

Позначимо через $\mathscr{Y}$ множину функцій Орлича, які задовольняють таким додатковим умовам: існують два числа p_1 і p_2 $(1 < p_1 < p_2 < \infty)$ такі, що для деяких констант $\varepsilon, \delta > 0$ $p_1 + \varepsilon < p_2 - \delta$ функція $M(u)u^{-(p_1+\varepsilon)}$ не спадає, а функція $M(u)u^{-(p_2-\delta)}$ не зростає при $u \to \infty$.

Лема 1.6.1 (**В.Г. Пономаренко (1965 р.) [154]**). *Нехай послідовність* $\mu(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *задовольняє умовам (1.39). Тоді, якщо* $M \in \mathscr{Y}$, *то для даної* 2π*-періодичної функції* $f \in L_M$ *існує функція* $F \in L_M$ *така, що ряд*

$$\frac{\mu(0)a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx)$$

є рядом Фур'є функції F і справджується оцінка

$$\int_0^{2\pi} M(|F(x)|)\,dx \le K_M \int_0^{2\pi} M(\lambda|f(x)|)\,dx, \quad \lambda = \max\{\nu_0, \sigma_0\},$$

в якій величина K_M залежить тільки від функції M.

Випадок, коли функція M є не обов'язково опуклою для просторів функцій і послідовностей розглядався в роботах [89, 118, 119], а загальна теорія просторів L_M в цьому випадку була розвинена в [120]. Основні результати польської математичної школи, а також бібліографію з цього питання можна знайти в книгах J. Musielak [128] і W. Orlicz [150]. Властивості мультиплікаторів в просторах Орлича числових послідовностей досліджувались в [75].

Відзначимо в цьому огляді також серію робіт П.Л. Ульянова [249–252], який досліджував вплив властивостей функції M на структуру класів Орлича, зокрема: можливість зображення рядами функцій з цих класів, умови сепарабельності та питання збіжності в середньому.

П.Л. Ульянов (1971 р.) [252] *Нехай функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ є скінченною, не спадає на проміжку $[0;\infty)$ і задовольняє умовам: $\varphi(0+) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Тоді для того, щоб з умов*

$$\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)dx < \infty, \quad \int_a^b \varphi\big(f_n(x)\big)dx < \infty,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi\big(f(x) - f_n(x)\big)dx = 0,$$

випливало співвідношення

$$\lim_{n>m\to\infty} \int_a^b \varphi\big(f_n(x) - f_m(x)\big)dx = 0,$$

необхідно і достатньо виконання умов:

1. $\varphi(x) > 0$ *при* $x > 0$;
2. $\varphi(2x) = \mathcal{O}\big(\varphi(x)\big)$, *при* $x \to \infty$.

Дослідженню властивостей максимального оператора (в тому числі

дробового порядку), потенціалу Рісса, а також сингулярних інтегралів у вагових просторах Орлича присвячено монографії [45, 96]. Для формулювання деяких важливих фактів наведемо визначення *вагових просторів Орлича.*

Невід'ємна функція $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга M^* і така стала $c > 1$, що виконується нерівність

$$M^*(x) \le M(x) \le M^*(cx), \quad \forall x \ge 0.$$

Нехай $\mathcal{Q}_2^\theta$ — множина функцій $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, для кожної з яких при деякому $\theta \in (0;1)$ функція M^θ є квазіопуклою і які задовольняють умову Δ_2 $(M \in \Delta_2)$: існує стала $c > 0$ така, що

$$M(2x) \le c\, M(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тоді через $L_{M,\omega}$ позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних за Лебегом функцій f, які для довільного числа $c > 0$ задовольняють умову

$$\int_0^{2\pi} M(c|f(x)|)\omega(x)dx < \infty, \quad M \in \mathcal{Q}_2^\theta,$$

де $\omega(x)$ — 2π-періодична вимірна і майже скрізь додатна функція (вага). Одна з еквівалентних норм в цьому просторі може бути визначена співвідношенням

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\ dt : \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\ dt \le 1 \right\}.$$

Якщо вагова функція $\omega = \omega(t)$ належить класу Макенхаупа A_p, $1 < p < \infty$, тобто якщо ω є 2π-периодичною і

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \omega(t)\ dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\ dt\right)^{p-1} \le c = \text{const},$$

де $[a,b]$ довільний відрізок з $[0,2\pi]$, і показник $p = p(M)$ визначається співвідношенням [47]:

$$\frac{1}{p} := \inf\left\{\theta : \quad \theta > 0,\ M \in \mathcal{Q}_2^\theta\right\}, \tag{1.45}$$

то $L_{M,\omega} \subset L$ стає банаховим простором з нормою Орлича. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називається *ваговим простором Орлича.*

Теорема 1.6.1 (**[45, с. 278]**). *Якщо* $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$ *і* $\omega \in A_p$, *де показник* $p = p(M)$ *визначається у співвідношенні (1.45). Тоді для довільної функції* $f \in L_{M,\omega}$ *виконуються нерівності*

$$\int_0^{2\pi} M(|S_n(f;t)|)\omega(t)\ dt \le C \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \tag{1.46}$$

і

$$\int_0^{2\pi} M(|\tilde{f}(t)|)\omega(t)\ dt \le C \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \tag{1.47}$$

в яких $\tilde{f}(\cdot)$ *— функція, тригонометрично спряжена з* $f(\cdot)$ *і* C *— додатна стала, що не залежить від* f.

З теореми 1.6.1, зокрема, випливає, що оператор Фур'є і оператор тригонометричного спряження є обмеженими в просторах $L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, тобто

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}, \tag{1.48}$$

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}. \tag{1.49}$$

Позначимо через

$$E_n(\varphi)_{M,\omega} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{M,\omega}, \quad \varphi \in L_{M,\omega},$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вищого за $n-1$. Відповідно до результатів роботи [91] (див. лему 3), для даної функції $f \in L_M$ і довільного $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться тригонометричний поліном $T(x)$, для якого

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\ dx < \varepsilon.$$

внаслідок чого справджуються співвідношення:

$$\|f - T\|_{M,\omega} < \varepsilon,$$

і

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.50}$$

На підставі нерівностей (1.48), (1.49) і (1.50) приходимо до висновку, що в умовах теореми 1.6.1, виконуються співвідношення

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.51}$$

і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{M,\omega}, \tag{1.52}$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені по n.

Енциклопедичне викладення теорії просторів Орлича, різноманітні застосування цієї теорії, а також коментарі та відповідну бібліографію наведено в книгах M.M. Rao, Z.D. Ren [156, 157].

Наведемо в цьому огляді ще одне твердження, яке є дотичним до результатів, отриманих в дисертації.

Нехай $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int\limits_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\, dt, \quad 0 < h < 1,\ x \in [0; 2\pi],$$

оператор Стєклова функції f. В роботі [45] було показано рівномірну обмеженість оператора Стєклова в просторах $L_{M,\omega}$, за умови $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$ і $\omega \in A_p$, тобто

$$\int_0^{2\pi} M(|f_h(t)|)\omega(t)\, dt \le c \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\, dt, \quad \forall f \in L_{M,\omega}, \tag{1.53}$$

де c — деяка додатна стала.

Враховуючи цей факт, в роботі [7] були введені до розгляду модулі не-

перервності дробового порядку

$$\Omega_\alpha(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{h_i,h<\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma_h^\beta(f) \right\|_{M,\omega}, \quad \beta = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma_h^\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} \dots \int_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!},\ k > 1; \quad \binom{\beta}{1} := \beta; \quad \binom{\beta}{0} := 1,$$

і для цих величин було доведено наступне твердження.

Теорема 1.6.2 (R. Akgün (2009 р.) [7]). *Нехай $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$ і $\omega \in A_p$. Тоді якщо $\alpha > 0$ і $f \in L_{M,\omega}$, то для $n = 0, 1, \dots,$ виконується нерівність*

$$\Omega_\alpha\Big(f; \frac{\pi}{n+1}\Big)_{M,\omega} \le \frac{c}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} E_k(f)_{M,\omega}, \tag{1.54}$$

де c – деяка додатна стала, яка залежить тільки від M і α.

Відзначимо, нарешті, що в останній час теорія просторів Орлича швидко розвивається і щороку поповнюється великою кількістю різноманітних за тематикою результатів, з якими (а також бібліографією) можна ознайомитись, зокрема, в роботах [8, 58, 61, 64, 65].

Розділ 2

Ряди Фур'є по системах раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі

Цей розділ присвячено одержанню достатніх умов збіжності рядів Фур'є по певних системах раціональних функцій, що визначаються фіксованими послідовностями своїх полюсів і є ортонормованими на дійсній осі, а також розв'язанню екстремальної задачі про обчислення величини

$$E\left(z,\mathfrak{A}\right):=\inf\left\{\left\|\mathcal{C}(z,\cdot)-g(\cdot)\right\|_q : g\in\mathfrak{A}\right\},\quad \mathfrak{A}\subset L_q(\mathbb{R}),\ z\in\mathbb{C}_+,$$

яка називається найкращим поточковим наближенням ядра Коші в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$ і побудова для цих підпросторів в явному вигляді елемента найкращого наближення.

2.1. Збіжність на дійсній осі рядів Фур'є по системах раціональних функцій

В цьому підрозділі розглядаються ортонормовані на дійсній осі $\mathbb{R}$ системи раціональних функцій $\{\Phi_n(z)\},\ n\in\mathbb{Z}$, які визначаються фіксованими наборами точок $\mathbf{a}:=\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k>0)$ і $\mathbf{b}:=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} b_k<0)$. Наводиться компактний вигляд аналогів ядер Діріхле систем $\{\Phi_n(t)\},\ n\in\mathbb{Z}$, на дійсній осі $\mathbb{R}$, а також досліджуються питання збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R}),\ p>1$, та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах $\{\Phi_n(t)\},\ n\in\mathbb{Z}$, за умови виконання певних обмежень на послідовності полюсів цих систем. Отримуються твердження, які є аналогами класичних ознак Жордана-Діріхле та

Діні-Ліпшиця збіжності рядів Фур'є за тригонометричною системою.

Зазначимо, що аналогічні задачі для систем раціональних функцій, ортонормованих на одиничному колі розв'язано в працях [70, 109].

2.1.1. Система $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ раціональних функцій, ортонормованих на дійсній осі

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty},\ (\operatorname{Im} a_k > 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді

$$\Phi_0^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_0}}{z - \overline{a}_0},\ \Phi_n^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_n}}{z - \overline{a}_n} B_n^+(z),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

де

$$B_0^+(z) := 1,\ B_n^+(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \chi_k^+ \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k},\ \chi_k^+ := \frac{|1 + a_k^2|}{1 + a_k^2},\ n = 1, 2, \ldots.$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках $a_k,\ k = 0, 1, ...n - 1$.

Систему функцій $\{\Phi_n^+(z)\}_0^{\infty}$ запровадив М.М. Джрбашян [70] за аналогією, як це зробили С. Такенака і Ф. Мальмквіст (див. [115, 242]) у випадку простору Гарді $H_2(\mathbb{D})$ в одиничному крузі. Зокрема, в [70] показано, що система $\{\Phi_n^+(z)\}_0^{\infty}$ є ортонормованою на дійсній осі $\mathbb{R}$, тобто

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^+(x) \overline{\Phi_m^+(x)} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Нехай далі $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty},\ (\operatorname{Im} b_k < 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у нижній півплощині $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$. Тоді

$$\Phi_1^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_1}}{z - \overline{b}_1},\ \Phi_n^-(z) := \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_n}}{z - \overline{b}_n} B_n^-(z),\ n = 2, 3, \ldots,$$

де

$$B_1^-(z) := 1,\ B_n^-(z) := \prod_{k=1}^{n-1} \chi_k^- \frac{z - b_k}{z - \overline{b}_k},\ \chi_k^- := \frac{|1 + b_k^2|}{1 + b_k^2},\ n = 2, 3, \ldots.$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках $b_k,\ k = 1, 2, ...n-1$.

Лема 2.1.1. *Система функцій* $\{\Phi_n^-(z)\}_1^\infty$ *є ортонормованою на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *тобто*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n, m = 1, 2, \ldots.$$

Доведення. Відзначимо спочатку, що

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^-(x)\overline{\Phi_n^-(x)}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi_n^-(x)|^2dx =$$

$$= \frac{-\operatorname{Im} b_n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x-\bar{b}_n|^2} = 1, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Покладаючи тепер, що $1 \leq m \leq n-1,\ (n \geq 2)$, розглянемо інтеграли

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} b_n \operatorname{Im} b_m}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}(x-b_k)\chi_k^-}{\prod\limits_{k=m}^{n}(x-\bar{b}_k)}dx.$$

В цій рівності праворуч під знаком інтегралу стоїть раціональний дріб із полюсами в точках $\bar{b}_k,\ k = m, m+1, \ldots, n$, які лежать у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ комплексної площини. При цьому очевидно, що при $|z| \to \infty,\ z \in \mathbb{C}$, цей дріб має порядок $\mathcal{O}(|z|^{-2})$, що гарантує збіжність інтегралу. Тому застосовуючи інтегральну теорему Коші для нижньої півплощини $\mathbb{C}_-$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^-(x)\overline{\Phi_m^-(x)}dx = 0.$$

Нарешті, перейшовши до спряжених значень, переконуємося в тому, що остання рівність виконується для довільних натуральних $n \neq m$.

Лему доведено.

Лема 2.1.2. *Для довільних* $z, \zeta \in \mathbb{C},\ z \neq \overline{\zeta}\ i\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots,$ *справджуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\Phi_k^+(\zeta)}\Phi_k^+(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)}\left[1 - \overline{B_n^+(\zeta)}B_n^+(z)\right], \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \overline{\Phi_k^-(\zeta)}\Phi_k^-(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)}\left[\overline{B_m^-(\zeta)}B_m^-(z) - 1\right], \tag{2.3}$$

де $\sum_{k=0}^{-1} = \sum_{k=1}^{0} = 0.$

Рівності (2.2) і (2.3) є аналогами формули Христофеля–Дарбу для ортогональних многочленів. Вони також відомі в літературі під назвою тотожності М.М. Джрбашяна. Доведення рівності (2.2), наведено у праці [70], є громіздким і технічно складним. Тому викликає певний інтерес, насамперед з методичної точки зору, наведення елементарного доведення. Для того, щоб переконатися у справедливості рівностей (2.2) і (2.3), скористаємося методом, запропонованим в [185].

Доведення. Розглянемо тотожність

$$(1 - x_0) + (1 - x_1)x_0 + (1 - x_2)x_0x_1 + \ldots + (1 - x_{n-1})x_0x_1 \cdots x_{n-2} =$$

$$1 - x_0x_1 \cdots x_{n-1}, \tag{2.4}$$

яка справджується для будь-яких комплексних чисел $x_0, x_1 \ldots, x_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$

Покладемо

$$x_k = \frac{(z - a_k)(\overline{\zeta} - \overline{a}_k)}{(z - \overline{a}_k)(\overline{\zeta} - a_k)}.$$

Тоді

$$1 - x_k = \frac{(z - \overline{a}_k)(\overline{\zeta} - a_k) - (z - a_k)(\overline{\zeta} - \overline{a}_k)}{(z - \overline{a}_k)(\overline{\zeta} - a_k)} = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,a_k}{(z - \overline{a}_k)(\overline{\zeta} - a_k)}(\overline{\zeta} - z)$$

і згідно з (2.4)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)\prod_{j=0}^{k-1} x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2i\,\mathrm{Im}\,a_k}{(z - \overline{a}_k)(\overline{\zeta} - a_k)}(\overline{\zeta} - z)\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(z - a_j)(\overline{\zeta} - \overline{a}_j)}{(z - \overline{a}_j)(\overline{\zeta} - a_j)} =$$

$$= 1 - \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)}.$$

Розділивши обидві частини рівності на $2i(\overline{\zeta}-z)$ і врахувавши те, що

$$\prod_{j=0}^{k-1} \frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)} = \prod_{j=0}^{k-1} \chi_j \frac{z-a_j}{z-\overline{a}_j} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \overline{\chi}_j \frac{\overline{\zeta}-\overline{a}_j}{\overline{\zeta}-a_j} = B_k(z)\overline{B_k(\zeta)}$$

і

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Im} a_k}{(z-\overline{a}_k)(\overline{\zeta}-a_k)} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(z-a_j)(\overline{\zeta}-\overline{a}_j)}{(z-\overline{a}_j)(\overline{\zeta}-a_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_k}}{z-\overline{a}_k} B_k(z) \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_k}}{\overline{\zeta}-a_k} \overline{B_k(\zeta)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^+(z)\overline{\Phi_k^+(\zeta)},$$

одержимо (2.2).

Аналогічно, покладемо

$$x_k = \frac{(z-b_k)(\overline{\zeta}-\overline{b}_k)}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)}.$$

Тоді

$$1 - x_k = \frac{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k) - (z-b_k)(\overline{\zeta}-\overline{b}_k)}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)} = \frac{2i \operatorname{Im} b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)}(\overline{\zeta}-z)$$

і згідно з (2.4)

$$\sum_{k=1}^{m-1}(1-x_k)\prod_{j=1}^{k-1} x_j = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2i \operatorname{Im} b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-b_k)}(\overline{\zeta}-z) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)} =$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{m-1} \frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)}.$$

Розділивши обидві частини рівності на $2i(\overline{\zeta}-z)$ і врахувавши те, що

$$\prod_{j=1}^{k-1} \frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-b_j)} = \prod_{j=1}^{k-1} \chi_j^- \frac{z-b_j}{z-\overline{b}_j} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \overline{\chi}_j{}^- \frac{\overline{\zeta}-\overline{b}_j}{\overline{\zeta}-b_j} = B_k^-(z)\overline{B_k^-(\zeta)}$$

$b_k \in \mathbb{C}_-$ і

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\operatorname{Im} b_k}{(z-\overline{b}_k)(\overline{\zeta}-d_k)} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{(z-b_j)(\overline{\zeta}-\overline{b}_j)}{(z-\overline{b}_j)(\overline{\zeta}-a_j)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_k}}{z-\overline{b}_k} B_k(z) \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_k}}{\overline{\zeta}-b_k} \overline{B_k(\zeta)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m-1} \Phi_k^-(z) \overline{\Phi_k^-(\zeta)},$$

одержимо (2.3).

Лему доведено.

Позначимо тепер

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \Phi_n^+(z), & n = 0, 1, 2, \dots, \\ \Phi_{-n}^-(z), & n = -1, -2, \dots. \end{cases} \tag{2.5}$$

Лема 2.1.3. *Система функцій* $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots,\}$ *є ортонормованою на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *тобто*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Доведення. Якщо $n, m = 0, 1, 2, \dots,$ або $n, m = -1, -2, \dots,$ то рівність (2.6) випливає з ортонормованості систем функцій $\{\Phi_n^+(z)\}_0^\infty$ і $\{\Phi_k^-(z)\}_1^\infty$. Нехай тепер $n = -1, -2, \dots,$ $m = 0, 1, 2, \dots$. Тоді

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) \overline{\Phi_m(x)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{-n}^-(x) \overline{\Phi_m^+(x)} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_{-n} \operatorname{Im} a_m}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-\overline{b}_{-n}} \prod_{j=1}^{-n-1} \chi_j^- \frac{x-b_j}{x-\overline{b}_j} \cdot \overline{\frac{1}{x-\overline{a}_m} \prod_{l=0}^{m-1} \chi_l^+ \frac{x-a_l}{x-\overline{a}_l}} \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{-\operatorname{Im} b_{-n} \operatorname{Im} a_m}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \overline{b}_{-n}} \prod_{j=1}^{-n-1} \chi_j^- \frac{x - b_j}{x - \overline{b}_j} \cdot \frac{1}{x - a_m} \prod_{l=0}^{m-1} \chi_l^+ \frac{x - \overline{a}_l}{x - a_l}\, dx. \quad (2.7)$$

У рівності (2.7) під знаком інтегралу стоїть раціональний дріб із полюсами в точках $\overline{b}_j$, $j = 1, 2, \ldots, -n$, та a_l, $l = 0, 1, \ldots, m$, які лежать в верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ комплексної площини. При цьому очевидно, що при $|z| \to \infty$, $z \in \mathbb{C}$, цей дріб має порядок $\mathcal{O}(|z|^{-2})$, що гарантує збіжність інтегралу. Тому застосовуючи інтегральну теорему Коші для нижньої півплощини $\mathbb{C}_-$, отримуємо

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{-n}^-(x) \overline{\Phi_m^+(x)} dx = 0, \quad n = -1, -2, \ldots, \; m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Міркуючи аналогічно у випадку $m = -1, -2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, остаточно переконуємося в справедливості рівності (2.6).

Лему доведено.

Із формул (2.2) і (2.3), отримуємо рівність

$$\sum_{k=-m+1}^{n-1} \overline{\Phi_k(\zeta)} \Phi_k(z) = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)} \left[\prod_{k=1}^{m-1} \frac{z - b_k}{z - \overline{b}_k} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\overline{\zeta} - \overline{b}_k}{\overline{\zeta} - b_k} - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{\zeta} - \overline{a}_k}{\overline{\zeta} - a_k} \right] = \frac{1}{2i(\overline{\zeta} - z)} \left[B_m^-(z) \overline{B_m^-(\zeta)} - B_n^+(z) \overline{B_n^+(\zeta)} \right].$$

2.1.2. Зображення ядра системи $\{\Phi_n(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ на дійсній осі

Позначимо через

$$D_{n,m}(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x; t) := \sum_{k=-m+1}^{n-1} \overline{\Phi_k(x)} \Phi_k(t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

— ядро системи $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}$ на дійсній осі $\mathbb{R}$.

Отримаємо зручне для подальших досліджень зображення для величи-

ни $D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t)$. Має місце наступне твердження.

Лема 2.1.4. *Нехай* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k > 0)$ *і* $\mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} b_k < 0)$ *— довільні послідовність комплексних чисел, які лежать, відповідно, у верхній* $\mathbb{C}_+$ *та у нижній* $\mathbb{C}_-$ *півплощинах комплексної площини.*

Тоді для довільних $x, t \in \mathbb{R}$ *і* $m, n \in \mathbb{N}$ *справджується формула*

$$D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t) = \frac{1}{2i(t-x)}\Bigg[\exp\Bigg(-2i\int\limits_x^t \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\operatorname{Im} b_k\ du}{(u-\operatorname{Re} b_k)^2+(\operatorname{Im} b_k)^2}\Bigg) -$$

$$-\exp\Bigg(-2i\int\limits_x^t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Im} a_k\ du}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg)\Bigg]. \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай $b_k = \beta_k + i\gamma_k$, $\beta_k \in \mathbb{R}, \gamma_k < 0$. Виконуючи перетворення, з урахуванням того, що $x, t \in \mathbb{R}$, знаходимо

$$B_m^-(x)\overline{B_m^-(t)} = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{x-b_k}{x-\overline{b}_k} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{t-\overline{b}_k}{t-b_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(x-\beta_k)-i\gamma_k}{(x-\beta_k)+i\gamma_k} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(t-\beta_k)+i\gamma_k}{(t-\beta_k)-i\gamma_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(x-\beta_k)-i\gamma_k}{(x-\beta_k)+i\gamma_k} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(t-\beta_k)+i\gamma_k}{(t-\beta_k)-i\gamma_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})}{\sqrt{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{(t-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}{\sqrt{(t-\beta_k)^2+\gamma_k^2}(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})}{(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k} + i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k})(\cos \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - i \sin \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m-1} \exp\Bigg[2i\Bigg(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t-\beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x-\beta_k}\Bigg)\Bigg].$$

Помітивши, що

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{\cdot - \beta_k} \right)' = -\frac{\gamma_k}{(\cdot - \beta_k)^2 + \gamma_k^2},$$

отримуємо

$$\prod_{k=1}^{m-1} \frac{x - b_k}{x - \overline{b}_k} \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \frac{t - \overline{b}_k}{t - b_k} = \prod_{k=1}^{m-1} \exp\left[2i \left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t - \beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x - \beta_k} \right) \right] =$$

$$= \exp\left[2i \sum_{k=1}^{m-1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{t - \beta_k} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_k}{x - \beta_k} \right) \right] =$$

$$= \exp\left[-2i \sum_{k=1}^{m-1} \int_x^t \frac{\gamma_k du}{(u - \beta_k)^2 + \gamma_k^2} \right].$$

Використовуючи аналогічні міркування для величини $B_n^+(z)\overline{B_n^+(\zeta)}$ отримуємо рівність (2.8).

Лему доведено.

2.1.3. Ознаки збіжності на дійсній осі рядів Фур'є по системі $\{\Phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Нехай, як і раніше,

$$\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty},\ (\operatorname{Im} a_k > 0), \quad \mathbf{b} := \{b_k\}_{k=1}^{\infty},\ (\operatorname{Im} b_k < 0)$$

— довільні послідовності комплексних чисел, які лежать, відповідно, у верхній $\mathbb{C}_+$ і нижній $\mathbb{C}_-$ півплощинах комплексної площини $\mathbb{C}$.

Відповідно до теореми 1.4.1 система раціональних функцій

$$\frac{1}{z - \bar{a}_0}, \quad \frac{1}{z - \bar{b}_1}, \quad \frac{1}{z - \bar{a}_1}, \quad \frac{1}{z - \bar{b}_1}, \ldots, \tag{2.9}$$

буде замкненою відносно простору $L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, тоді і тільки тоді, коли ряди

$$\sigma(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2}, \quad \sigma(\mathbf{b}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} b_k|}{1 + |b_k|^2},$$

розбігаються. Ортогоналізація системи (2.9) на дійсній осі $\mathbb{R}$ приводить до системи $\{\Phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}},\ x\in\mathbb{R}$, тому довільній функції $f\in L_2(\mathbb{R})$ можна поставити у відповідність її ряд Фур'є за системою $\{\Phi_n(x)\}$:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\Phi_k(x),\quad x\in\mathbb{R},\tag{2.10}$$

де

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\Phi_k(x)}dx,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

частинні суми якого

$$S_{n,m}(f;\mathbf{a};\mathbf{b};x)=\sum_{k=-m+1}^{n-1}c_k\Phi_k(x),$$

за умови розбіжності рядів $\sigma(\mathbf{a})$ і $\sigma(\mathbf{b})$ збігаються в середньо квадратичному до функції $f(x)$, тобто

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-S_{n,m}(f;x)|^2dx=0.$$

Проте формальний ряд Фур'є вигляду (2.10) може бути записаний для довільної функції $f\in L_p(\mathbb{R}),\ p\geq1$ і для частинних сум цього ряду будемо мати

$$S_{n,m}(f;\mathbf{a};\mathbf{b};x)=\sum_{k=-m}^{n}c_k\Phi_k(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\Bigg[\sum_{k=-m}^{n}\overline{\Phi_k(t)}\Phi_k(x)\Bigg]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)D_{n,m}(\mathbf{a};\mathbf{b};x;t)\ dt.\tag{2.11}$$

Наша мета — дослідити питання збіжності у метриках просторів $L_p(\mathbb{R})$, $p>1$, а також поточкової збіжності частинних сум $S_{n,m}(f;\mathbf{a};\mathbf{b};x)$ ряду Фур'є (2.10) до відповідної функції f при $m,n\to\infty$.

Для спрощення міркувань, в цьому підрозділі будемо вважати, що від-

повідні члени послідовностей $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ є взаємо спряженими, тобто $b_k = \bar{a}_{k-1},\ (k = 1, 2, \ldots)$. Тоді, зображення спектральної функції (2.8) і частинної суми (2.11) у випадку $m = n + 1$ приймають вигляд

$$D_{n,n+1}(\mathbf{a}; \bar{\mathbf{a}}; x; t) = \frac{1}{(t-x)} \sin\left(\int_x^t \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2 \operatorname{Im} a_k}{(u - \operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2} \right] du \right), \quad (2.12)$$

і

$$S_{n,n+1}(f; \mathbf{a}; \bar{\mathbf{a}}; x) := S_n(f; \mathbf{a}; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_{n,n+1}(\mathbf{a}; \bar{\mathbf{a}}; x; t)\ dt,$$

де $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\bar{\mathbf{a}} = \{\bar{a}_{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$.

Сформулюємо основні результати підрозділу.

Теорема 2.1.1. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє умову*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2} = +\infty. \quad (2.13)$$

Тоді для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R}),\ 1 < p < \infty$, *її ряд Фур'є за системою (2.5) збігається до цієї функції у метриці простору* $L_p(\mathbb{R})$, *тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_n(f; \mathbf{a}; x)|^p dx = 0, \quad 1 < p < \infty.$$

Позначимо

$$\sigma_n = \sigma_n(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2}, \quad \varsigma_n = \varsigma_n(\mathbf{a}) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^2}. \quad (2.14)$$

Теорема 2.1.2. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і має обмежену варіацію на* $\mathbb{R}$. *Нехай далі послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (2.13) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$.

Тоді в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ *справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Наслідок 2.1.1. *Якщо виконано всі умови теореми 2.1.2 і* x_0 *— точка неперервності функції* f*, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = f(x_0).$$

Теорема 2.1.3. *Нехай функція* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *і в точці* x_0 *існують граничні значення* $f(x_0-0)$ *і* $f(x_0+0)$*. Тоді якщо існують інтеграли*

$$\int_0^\delta \frac{f(x_0-y)-f(x_0-0)}{y}dy, \quad \int_0^\delta \frac{f(x_0+y)-f(x_0+0)}{y}dy, \tag{2.15}$$

а послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$*, задовольняє умову (2.13) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\mathbf{a};x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Зауваження 2.1.1. *Якщо для послідовності* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *знайдуться додатні сталі* C_1 *і* C_2*, які не залежать від* k *і такі, що* $0 < C_1 \le |a_k| \le C_2,\ k \in \mathbb{N}$*, то очевидно, що така послідовність задовольняє умовам теорем 2.1.2 і 2.1.3. Відзначимо також, що умови цих теорем можуть виконуватись і для послідовностей, у яких* $|a_k| \to \infty,\ n \to \infty$*. Наприклад, якщо для дійсної та уявної частин* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *при* $n \to \infty$ *справджуються рівності*

$$|\operatorname{Re} a_k| = \mathcal{O}(k^\alpha),\ 0 \le \alpha \le \frac{3}{4}, \quad |\operatorname{Im} a_k| = \mathcal{O}(k^\beta),\ \frac{1}{2} < \beta \le 1,$$

то, як нескладно переконатися, послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (2.13) і* $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$.

2.1.4. Допоміжні твердження

Отримаємо спочатку зручне інтегральне зображення для частинних сум $S_n(f;\mathbf{a};x)$ ряду Фур'є за системою (2.5). Має місце наступне твердження.

Лема 2.1.5. *Якщо* $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, *то для довільного* $x \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x-y)\frac{\sin y\mu_n(-y;x)}{y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x+y)\frac{\sin y\mu_n(y;x)}{y}\,dy, \tag{2.16}$$

де

$$\mu_n(y;x) := \frac{1}{y}\int\limits_x^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im} a_k}{(u-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\right]du. \tag{2.17}$$

Доведення. Розіб'ємо інтеграл по всій осі на два інтеграли по проміжках $(-\infty;x)$ і $(x;\infty)$, після чого виконаємо заміну змінних. Беручи до уваги (2.12), знаходимо

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};t;x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{\infty}\Big)f(t)D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};t;x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x-y)D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x-y;x)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x+y)D_{n,n+1}(\mathbf{a};\bar{\mathbf{a}};x+y;x)\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f(x-y)}{y}\sin\left(\int\limits_{x-y}^{x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{(u-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]du\right)dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)}{y}\sin\left(\int\limits_{x}^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{(u-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]du\right)dy.$$

Звідси, враховуючи позначення (2.17), отримуємо рівність (2.16). Лему доведено.

Лема 2.1.6. *При кожних фіксованих $x\in\mathbb{R}$ і $y>0$ справджуються оцінки:*

$$\left|[y\mu_n(\pm y;x)]'_y\right|\geq\frac{1}{1+(|x|+y)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im}a_k|}{1+|a_k|^2},\tag{2.18}$$

$$|\mu_n(\pm y;x)|\geq\frac{1}{1+(|x|+y)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\operatorname{Im}a_k|}{1+|a_k|^2},\tag{2.19}$$

Доведення. На підставі співвідношення (2.17) знаходимо

$$[y\mu_n(y;x)]'_y=\frac{d}{dy}\int\limits_x^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{(u-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]du=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([y+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}.\tag{2.20}$$

Звідси, враховуючи нерівність

$$(1+(|x|+y)^2)(1+(\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2)\geq([t+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2,\tag{2.21}$$

яка виконується для довільних $x\in\mathbb{R}$, $y>0$ і $0\leq t\leq y$, отримуємо оцінку (2.18) для величини $[y\mu_n(y;x)]'_y$. Величина $|[y\mu_n(-y;x)]'_y|$ оцінюється аналогічно.

Оскільки

$$\mu_n(y;x)=\frac{1}{y}\int\limits_x^{x+y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{(u-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]du=$$

$$=\frac{1}{y}\int\limits_0^{y}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([t+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]dt,$$

то знову застосовуючи нерівність (2.21) одержуємо оцінку (2.19) для величини $\mu_n(y;x)$. Величина $\mu_n(-y;x)$ оцінюється аналогічно.

Лему доведено.

Лема 2.1.7. *Рівномірно відносно $x\in\mathbb{R}$ і $y>0$ виконуються оцінки:*

$$\left|[y\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^2},\tag{2.22}$$

$$\left|[\mu_n(\pm y;x)]'_{y}\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^2},\tag{2.23}$$

$$\left|[\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}\right|\le\frac{8}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^3}.\tag{2.24}$$

Доведення. На підставі співвідношення (2.20) знаходимо

$$[y\mu_n(y;x)]''_{y^2}=\frac{d}{dy}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([x+y]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\right]=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4\operatorname{Im}a_k([y+x]-\operatorname{Re}a_k)}{\left(([y+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2\right)^2}.$$

Звідси, беручи до уваги очевидні нерівності

$$\frac{2\operatorname{Im}a_k(v-\operatorname{Re}a_k)}{(v-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\le 1,\tag{2.25}$$

і

$$\frac{1}{(v-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\le\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^2},\tag{2.26}$$

при $v=t+x$, отримуємо нерівність (2.22) для величини $|[y\mu_n(y;x)]''_{y^2}|$. Величина $|[y\mu_n(-y;x)]''_{y^2}|$ оцінюється аналогічно.

Для доведення оцінки (2.23) слід зауважити, що

$$[\mu_n(y;x)]'_y=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([y+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([t+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\Bigg]dt=$$

$$=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k(t-y)[(y+x-\operatorname{Re}a_k)+(t+x-\operatorname{Re}a_k)]}{[(y+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2][(t+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2]}=$$

$$=\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y(t-y)\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[\frac{2\operatorname{Im}a_k(y+x-\operatorname{Re}a_k)}{(y+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\cdot\frac{1}{(t+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}+$$

$$+\frac{2\operatorname{Im}a_k(t+x-\operatorname{Re}a_k)}{(t+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\cdot\frac{1}{(y+x-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}\Bigg]dt.$$

Звідси, знову використовуючи нерівності (2.25) – (2.26) при $v=t+x$ і $v=y+x$, отримуємо

$$\left|[\mu_n(y;x)]'_y\right|\le 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^2}\cdot\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y(y-t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im}a_k)^2},$$

що і доводить оцінку (2.23) для $[\mu_n(y;x)]'_y$. Модуль величини $[\mu_n(-y;x)]'_y$ оцінюється аналогічно.

Далі знаходимо

$$[\mu_n(y;x)]''_{y^2}=\frac{d}{dy}\Bigg[\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\operatorname{Im}a_k}{([y+x]-\operatorname{Re}a_k)^2+(\operatorname{Im}a_k)^2}-$$

$$-\frac{1}{y^2}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k\ dt}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\Bigg] =$$

$$=\frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k\ dt}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2} -$$

$$-\frac{2}{y^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}$$

$$-\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4\operatorname{Im} a_k(x+y-\operatorname{Re} a_k)}{([t+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2},$$

звідки, виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$[\mu_n(y;x)]''_{y^2} = \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y (y-t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\operatorname{Im} a_k}{(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{y+t+2x-2\operatorname{Re} a_k}{(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2} - \frac{2(y+x-\operatorname{Re} a_k)}{([y+x]-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2}\right]dt =$$

$$=\frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[\frac{4\operatorname{Im} a_k(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2}{[(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]^2} +$$

$$+\frac{4\operatorname{Im} a_k(y+x-\operatorname{Re} a_k)(t+x-\operatorname{Re} a_k)}{[(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]^2} -$$

$$-\frac{2\operatorname{Im} a_k}{[(y+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2][(t+x-\operatorname{Re} a_k)^2+(\operatorname{Im} a_k)^2]}\Bigg](y-t)^2dt.$$

Нарешті, використовуючи нерівності (2.25) – (2.26) при $v=t+x$ і $v=y+x$, отримуємо

$$|[\mu_n(y;x)]''_{y^2}| \le \frac{2}{y^3}\int\limits_0^y \sum_{k=0}^{n-1}\frac{4(y-t)^2}{(\operatorname{Im} a_k)^3}\ dt = \frac{8}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^3},$$

що і доводить оцінку (2.24) для $[\mu_n(y;x)]''_{y^2}$. Величина $[\mu_n(-y;x)]''_{y^2}$ оцінюється аналогічно.

Лему доведено.

Лема 2.1.8. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$, *задовольняє умову (2.13) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \mathrm{const}$.

Тоді, якщо функція $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \varphi(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy = 0. \tag{2.27}$$

Доведення. Зафіксуємо число $\varepsilon > 0$. Очевидно, що для довільної функції $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, завжди існує число $\theta = \theta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\int_{\theta}^{\infty} |\varphi(y)|dy \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.28}$$

За теоремою Вейєрштрасса на відрізку $[0;\theta]$ можна знайти поліном $P(y) = P(\varphi; y)$, який забезпечує оцінку

$$\int_0^{\theta} |\varphi(y) - P(y)|dy \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.29}$$

Зі співвідношень (2.28) і (2.29) випливає

$$\left| \int_0^{\infty} \varphi(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy \right| = \left| \int_0^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\theta}^{\infty} \varphi(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy + \int_0^{\theta} [\varphi(y) - P(y)] \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy \right| \le$$

$$\le \left| \int_0^{\theta} P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)]dy \right| + \frac{2\varepsilon}{3},$$

при цьому рівномірно по $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отже, для завершення доведення леми залишилось показати, що існує натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх натуральних $n > n_0$

виконується нерівність

$$\left| \int_0^\theta P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right| \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.30}$$

Нехай

$$M_1 = \max_{0 \le y \le \theta} |P(y)|, \quad M_2 = \max_{0 \le y \le \theta} |P'(y)|.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^\theta P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy = -\frac{P(y)}{[y\mu_n(\pm y; x)]'_y} \cos[y\mu_n(\pm y; x)] \Big|_0^\theta +$$

$$+ \int_0^\theta \frac{P'(y)}{[y\mu_n(\pm y; x)]'_y} \cos[y\mu_n(\pm y; x)] dy -$$

$$- \int_0^\theta \frac{P(y)[y\mu_n(\pm y; x)]''_{y^2}}{([y\mu_n(\pm y; x)]'_y)^2} \cos[y\mu_n(\pm y; x)] dy.$$

Застосуємо під знаками інтегралів з правої частини одержаної рівності оцінки (2.18) – (2.22). Враховуючи позначення (2.14), отримуємо

$$\left| \int_0^\theta P(y) \sin[y\mu_n(\pm y; x)] dy \right| \le \frac{2M_1(1 + (|x| + \theta)^2)}{\sigma_n} +$$

$$+ \frac{M_2\theta(1 + (|x| + \theta)^2)}{\sigma_n} + \frac{M_1\theta(1 + (|x| + \theta)^2)^2 \varsigma_n}{\sigma_n^2}.$$

Звідси, при виконанні (2.13) і умови $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$ випливає співвідношення (2.30).

Лему доведено.

Лема 2.1.9. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *не має граничних точок на дійсній осі* $\mathbb{R}$*, задовольняє умову (2.13) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$.

Тоді для довільного $\delta > 0$ *при кожному фіксованому* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y; x)]}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \tag{2.31}$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і число $\delta > 0$. Маємо рівність

$$\int_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y; x)]}{y} dy = \int_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y; x)]}{y\mu_n(\pm y; x)} d[y\mu_n(\pm y; x)] -$$

$$- \int_0^\delta \sin[y\mu_n(\pm y; x)] \frac{[\mu_n(\pm y; x)]'}{\mu_n(\pm y; x)} dy := I_1(n; x) - I_2(n; x). \tag{2.32}$$

Позначивши $v = y\mu_n(\pm y; x)$, отримуємо

$$I_1(n; x) = \int_0^{\delta\mu_n(\pm\delta; x)} \frac{\sin v}{v} dv. \tag{2.33}$$

Скориставшись нерівністю (2.21), знаходимо

$$y\mu_n(\pm y; x) = \int_0^y \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2 \operatorname{Im} a_k}{([t \pm x] - \operatorname{Re} a_k)^2 + (\operatorname{Im} a_k)^2} \right] dt \geq$$

$$\geq \frac{y}{1 + (|x| + y)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2}, \quad y > 0,$$

звідки випливає, що при виконанні умови (2.13) справджується співвідношення

$$\delta\mu_n(\pm\delta; x) \geq \frac{\delta}{1 + (|x| + \delta)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im} a_k|}{1 + |a_k|^2} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Беручи до уваги цей факт, знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n; x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta\mu_n(\pm\delta; x)} \frac{\sin v}{v} dv = \int_0^\infty \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}. \tag{2.34}$$

Далі, інтегруючи частинами, знаходимо

$$|I_2(n;x)| = \frac{[\mu_n(\pm y;x)]'_y \cos[y\mu_n(\pm y;x)]}{\mu_n(\pm y;x)[y\mu_n(\pm y;x)]'_y}\Big|_0^\delta -$$

$$-\int_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y;x)]\frac{[\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}}{\mu_n(\pm y;x)[y\mu_n(\pm y;x)]'_y}dy+$$

$$+\int_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y;x)]\frac{\Big([\mu_n(\pm y;x)]'_y\Big)^2}{[\mu_n(\pm y;x)]^2[y\mu_n(\pm y;x)]'_y}dy+$$

$$+\int_0^\delta \cos[y\mu_n(\pm y;x)]\frac{[\mu_n(\pm y;x)]'_y[y\mu_n(\pm y;x)]''_{y^2}}{\mu_n(\pm y;x)([y\mu_n(\pm y;x)]'_y)^2}dy. \tag{2.35}$$

За умовою теореми послідовність $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ не має граничних точок на дійсній осі $\mathbb{R}$, отже

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\operatorname{Im} a_k)^3} \le C\varsigma_n.$$

Беручи до уваги цей факт і застосовуючи в правій частині співвідношення (2.35) нерівності (2.18) – (2.19), а також (2.22) – (2.24), знаходимо

$$|I_2(n;x)| \le C\Big(\frac{\varsigma_n}{\sigma_n^2}[1+(|x|+\delta)^2]+\frac{\varsigma_n}{\sigma_n^2}[1+(|x|+\delta)^2]^2\delta+\frac{\varsigma_n^2}{\sigma_n^3}[1+(|x|+\delta)^2]^3\delta\Big), \tag{2.36}$$

де ς_n і σ_n — послідовності, визначені співвідношеннями (2.14).

Оскільки за умовою леми $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$, то при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} |I_2(n;x)| = 0. \tag{2.37}$$

Поєднуючи тепер рівності (2.32), (2.34) і (2.37), отримуємо твердження леми.

Лему доведено.

Нарешті доведемо лему.

Лема 2.1.10. *Нехай послідовність* $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ *задовольняє умову (2.13) і рівномірно по* $n \in \mathbb{N}$ *виконується співвідношення* $\varsigma_n/\sigma_n \le \text{const}$.

Тоді якщо функція $g(y) \in L(\mathbb{R}_+)$ *і монотонно зростає на проміжку* $[0;\infty)$, *то для довільного числа* $\delta > 0$ *при кожному фіксованому* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta g(y)\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy = \frac{\pi}{2}g(+0). \tag{2.38}$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ і число $\delta > 0$. Оскільки справджується рівність

$$\int_0^\delta g(y)\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy =$$

$$= g(+0)\int_0^\delta \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy + \int_0^\delta [g(y)-g(+0)]\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy,$$

то на підставі леми 2.1.9 достатньо довести, що другій інтеграл з правої частини цієї рівності прямує до нуля при $n \to \infty$.

Для доведення цього факту візьмемо $\varepsilon > 0$, виберемо $h < \delta$ так, щоб

$$0 \le g(y) - g(+0) < \varepsilon, \quad 0 < y \le h,$$

і розіб'ємо цей інтеграл на два:

$$i_1(x;n) + i_2(x;n) := \Big(\int_0^h + \int_h^\delta\Big)[g(y)-g(+0)]\frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy.$$

Враховуючи обмеженість інтегралів вигляду

$$\int_0^h \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy, \quad h > 0,$$

що є наслідком леми 2.1.9, та застосовуючи другу теорему про середнє, при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$|i_1(x;n)| = [g(h)-g(+0)]\left|\int_\theta^h \frac{\sin[y\mu_n(\pm y;x)]}{y}dy\right| \le \varepsilon C_1(x), \tag{2.39}$$

при цьому рівномірно відносно $n \in \mathbb{N}$.

Покладемо

$$\varphi(y) := \begin{cases} 0, & 0 \le y < h, \\ \frac{g(y)-g(+0)}{y}, & h \le y. \end{cases}$$

Очевидно, що $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$. Враховуючи це, на підставі леми 2.1.8 отримуємо оцінку

$$|i_2(x;n)| < \varepsilon C_2(x), \quad n > n_0(\varepsilon). \tag{2.40}$$

Зі співвідношень (2.39) – (2.40) випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty} (i_1(x;n) + i_2(x;n)) = 0,$$

що і доводить лему.

Лему доведено.

2.1.5. Доведення теорем 2.1.1 – 2.1.3

Одержимо тепер основні твердження щодо збіжності рядів Фур'є за ортонормованою системою (2.5).

Доведення теореми 2.1.1. Покажемо спочатку, що для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{R}),\ p > 1,$ виконується нерівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_n(f;\mathbf{a};x)|^p dx \le M_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx.$$

На підставі леми 2.1.5 зображення частинної суми ряду Фур'є за системою $\Phi_n(z),\ n \in \mathbb{Z},$ може бути записане у вигляді

$$S_n(f;\mathbf{a};x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(x+y) - g(x-y)}{y} dy \tag{2.41}$$

де

$$g(x \pm y) = f(x \pm y) \sin\big(\pm y\mu_n(\pm y;x)\big),$$

а величини $\mu_n(\pm y;x)$ визначаються рівністю (2.17).

В книзі [246, с. 149] доведено, що для довільної функції $\varphi \in L_p(\mathbb{R}),\ p > 1,$ формула (яку називають перетворенням Гільберта)

$$H(f;x) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t} dt,$$

майже скрізь визначає функцію $H(f) \in L_p(\mathbb{R})$ і виконується нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(f;x)|^p dx \le M_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx,$$

де M_p — додатна стала, яка залежить тільки від p.

Використовуючи факт обмеженості перетворення Гільберта в просторах $L_p(\mathbb{R})$ при $p > 1,$ з урахуванням того, що функція $g \in L_p(\mathbb{R})$, на підставі співвідношення (2.41) отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |S_n(f;\mathbf{a};x)|^p dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(g;x)|^p dx \le M_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx,$$

що і треба було довести.

Перейдемо тепер до доведення твердження теореми. Оскільки за умовою $f \in L_p(\mathbb{R}),$ то з результатів роботи [93] випливає, що функція f може бути як завгодно точно наближена за допомогою дробів вигляду (2.9). Тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує скінченна лінійна комбінація

$$T_{n_0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} A_k (x - \bar{a}_k)^{-1} + \sum_{k=1}^{n_0} B_k (x - a_k)^{-1},$$

така, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - T_{n_0}(x)|^p dx \le \varepsilon.$$

Оскільки система (2.5) є результатом ортогоналізації системи (2.9), то

$$T_{n_0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} A'_k \Phi_k^+(x) + \sum_{k=1}^{n_0} B'_k \Phi_k^-(x),$$

і

$$S_n(T_{n_0};x)=T_{n_0}(x),\quad n_0\le n.$$

Відзначив це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-S_n(f;x)|^p dx\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-T_{n_0}(x)|^p dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|S_n(f-T_{n_0};x)|^p dx\le(1+C_p)\varepsilon.$$

Теорему доведено.

Доведення теореми 2.1.2. Враховуючи факт сумовності функції f на $\mathbb{R}$, з леми 2.1.8 випливає, що зображення (2.16) може бути подане у вигляді

$$S_n(f;\mathbf{a};x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0-y)\frac{\sin y\mu_n(-y;x_0)}{y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0+y)\frac{\sin y\mu_n(y;x_0)}{y}\,dy+o(1),\quad n\to\infty,\tag{2.42}$$

де δ — довільне додатне число.

За умовою теореми функція $f(\cdot)$ має обмежену варіацію на $\mathbb{R}$, отже може бути поданою у вигляді різниці двох монотонно зростаючих функцій. Застосовуючи лему 2.1.10 до кожної монотонної складової функції f, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;\mathbf{a};x_0)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]=\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)],$$

що і треба було довести.

Теорему доведено.

Доведення теореми 2.1.3. З теореми 2.1.1 випливає, що

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}f(x_0-0)\frac{\sin y\mu_n(-y;x_0)}{y}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} f(x_0+0)\frac{\sin y\mu_n(y;x_0)}{y}\,dy+o(1),\quad n\to\infty, \tag{2.43}$$

де δ — довільне додатне число.

Зі співвідношень (2.42) і (2.43) отримуємо

$$S_n(f;\mathbf{a};x_0)-\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{f(x_0)-f(x_0-0)}{y}\sin y\mu_n(-y;x_0)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{f(x_0+y)f(x_0+0)}{y}\sin y\mu_n(y;x_0)\,dy+o(1),\quad n\to\infty,$$

звідки, внаслідок збіжності інтегралів (2.15) на підставі леми 2.1.8 випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

2.2. Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі

Нехай $H_p=H_p(\mathbb{C}_+)$, $p\geq 1$, — простір Гарді, який складається з функцій f, голоморфних у верхній півплощині $\mathbb{C}_+:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, для яких

$$\|f\|_{H_p}:=\sup_{y>0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}<\infty.$$

Відомо [103, теорема 2] (див. також [117, с. 291]), що кожна функція f з простору H_p має майже скрізь на дійсній осі $\mathbb{R}=\partial\mathbb{C}_+$ недотичні граничні значення (за якими залишимо те ж саме позначення f), які належать простору $L_p(\mathbb{R})$, причому

$$\|f\|_{H_p}=\|f\|_p:=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Ядром Коші для комплексної площини $\mathbb{C}$ називається функція

$\mathcal{C} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, визначена рівністю

$$\mathcal{C}(t,z) := \frac{-1}{2i(t-\overline{z})}, \quad t,z \in \mathbb{C},\ t \neq \overline{z}.$$

Добре відомо [103, теорема 14], що функція $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t,z)$ є твірним ядром простору $H_p,\ 1 \leq p < \infty$, тобто в будь-якій точці $z \in \mathbb{C}_+$

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, z)\rangle \quad \forall f \in H_p, \tag{2.44}$$

де

$$\langle g, h\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{h(x)}dx.$$

В цьому підрозділі обчислено точні значення найкращих наближень ядра Коші на дійсній осі $\mathbb{R}$ фіксованими підпросторами з $L_q(\mathbb{R})$. Наведено застосування отриманого результату до обчислення точних верхніх меж поточкових відхилень функцій з одиничної кулі простору Гарді H_p, $2 \leq p < \infty$, від певних інтерполяційних операторів з вузлами інтерполяції в заданій системі точок верхньої півплощини і певних лінійних середніх рядів Фур'є за системою Такенаки–Мальмквіста.

Зазначимо, аналогічні задачі для просторів Гарді в одиничному крузі розв'язано в роботі [185].

2.2.1. Інтегральні зображення функцій простору Гарді

Означимо підпростори $H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n)$ і $H_{p,\Phi}^{n\perp}, n \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$, таким чином

$$H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) := \{g \in L_q(\mathbb{R}) : \langle f, g\rangle = 0\ \forall f \in H_p(\mathbf{a}_n)\}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

$$H_{p,\Phi}^{n\perp} := \left\{g \in L_q(\mathbb{R}) : \langle f, g\rangle = 0\ \forall f \in H_{p,\Phi}^{n}\right\}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

де

$$H_p(\mathbf{a}_n) := \{f \in H_p : f(a_k) = 0,\ k = \overline{0,n}\}, \quad n \in \mathbb{N},\ H_p(\mathbf{a}_0) := H_p,$$

$$H_{p,\Phi}^{n} := \left\{f \in H_p : \langle f, \Phi_k^+\rangle = 0,\ k = \overline{0,n}\right\}, \quad H_{p,\Phi}^{-1} := H_p,\ n \in \mathbb{Z}_+$$

і $\Phi^+ := \{\Phi_k^+\}_{k=0}^\infty$ — ортонормована система Такенаки–Мальмквіста, яка означається співвідношеннями (2.1).

Множину всіх систем Такенаки–Мальмквіста вигляду (2.1) будемо позначати через $TM(\mathbb{C}_+)$. Відправною точкою в наших дослідженнях є таке твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_n$ *— система* n *точок в* $\mathbb{C}_+$ *і* $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$ *— система, породжена будь-якою точковою послідовністю вигляду* $\mathbf{a}_n \cup \{d_k\}_{k=n}^\infty$, *де* $\{d_k\}_{k=n}^\infty$ *— довільна послідовність точок в* $\mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$H_p(\mathbf{a}_n) = H_{p,\Phi^+}^{n-1}.$$

З огляду на це твердження скрізь далі будемо використовувати єдині позначення $\mathfrak{A}_{n,p} = H_p(\mathbf{a}_n) = H_{p,\Phi^+}^{n-1}$ і $\mathfrak{A}_{n,p}^\perp = H_p(\mathbf{a}_n)^\perp = H_{p,\Phi^+}^{n-1\perp}$ (при цьому передбачається, що в цьому підрозділі $\mathbf{a}_n$ і Φ^+ є такими, як в теоремі 2.2.1).

Позначимо

$$\mathcal{C}_{n,\Phi^+}(\zeta, z) := -\frac{B_n^+(\zeta)\overline{B_n^+(z)}}{2i(\zeta - \overline{z})}.$$

З означення підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}$, формули (2.44) і леми 2.1.2 випливає таке твердження.

Наслідок 2.2.1. *За умов теореми 2.2.1 для будь-якої функції* $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$, $1 \le p < \infty$, *справджується рівність*

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}_{n,\Phi^+}(\cdot, z)\rangle = \frac{B_n^+(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\overline{B_n^+(t)}}{t - z}dt \quad \forall z \in \mathbb{C}_+. \tag{2.45}$$

Доведення теореми 2.2.1. Оскільки $B_n^+(a_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то включення $H_{p,\Phi^+}^{n-1} \subset H_p(\mathbf{a}_n)$ — це безпосередній наслідок з формули (2.45).

Позначимо

$$\widehat{f}(j) := \langle f, \Phi_j^+\rangle, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Для доведення включення $H_p(\mathbf{a}_n) \subset H_{p,\Phi^+}^{n-1}$ скористаємося формулою

(2.44), тотожністю (2.2) і рівністю $\Phi_j^+(a_k) = 0\,,\ j = k+1, \ldots, n-1$:

$$\forall\ f \in H_p(\mathbf{a}_n) \quad 0 = f(a_k) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, a_k)\rangle =$$

$$= \left\langle f, \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j^+(\cdot)\overline{\Phi_j^+(a_k)} \right\rangle + B_n(a_k)\langle f, \mathcal{C}_{n,\Phi^+}(\cdot, a_k)\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, \Phi_j^+\rangle \Phi_j^+(a_k) = \sum_{j=0}^{k} \widehat{f}(j)\Phi_j^+(a_k).$$

Звідси послідовно для кожного $k = 0, 1, \ldots, n-1$ одержимо $\widehat{f}(k) = 0$. Отже, $f \in H^{n-1}_{p,\Phi^+}$.

Теорему доведено.

Наслідок 2.2.1, зокрема, показує, що ядра $\mathcal{C}$ і $\mathcal{C}_{n,\Phi^+}$ мають властивість відтворення по відношенню до функцій простору H^{n-1}_{p,Φ^+}, але вони у відомому сенсі не єдині такі твірні ядра. Наприклад, ядро Пуассона

$$P(\zeta, z) := \frac{\operatorname{Im} z}{|\zeta - z|^2},$$

також є твірним ядром для простору $H_p,\ 1 \le p \le \infty,$ (див., наприклад, [117, p. 364–366]).

Нашою найближчою метою є побудова інших твірних ядер, наділених певними екстремальними властивостями. Нехай $1 \le p \le \infty\,,\ n \in \mathbb{Z}_+$ і B_n^+ — n-добуток Бляшке системи Φ^+. Означимо функцію $\mathcal{C}_{p,n,\Phi^+}$ правилом

$$\mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\zeta, z) := \left(\frac{i}{2}\right)^{2/p} (\operatorname{Im} z)^{1-2/p} B_n^+(\zeta)\overline{B_n^+(z)}\frac{(\overline{\zeta} - z)^{2/p}}{|\zeta - \overline{z}|^2}. \tag{2.46}$$

Покажемо, що функція $\mathcal{C}_{p,n,\Phi^+}$ є твірним ядром простору $\mathfrak{A}_{n,p}$ при $p \ge 2$.

Теорема 2.2.2. *Нехай $2 \le p < \infty\,,\ n \in \mathbb{Z}_+$ і $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$. Якщо функція $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$, то в кожній точці $z \in \mathbb{C}_+$ має місце зображення*

$$f(z) = \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z)\rangle. \tag{2.47}$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in \mathbb{C}_+$ і розглянемо функцію g, визначену правилом

$$g(\zeta) = \left(\frac{2i \operatorname{Im} z}{\zeta - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(\zeta).$$

Зрозуміло, що при $p \geq 2$ функція g належить до H_p. Оскільки згідно з теоремою 2.2.1 для будь-якої функції $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$ виконуються рівності

$$f(a_k) = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

то

$$g(a_k) = \left(\frac{2i \operatorname{Im} z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(a_k) = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

а це згідно з тією ж таки теоремою 2.2.1 рівносильне тому, що і $g \in \mathfrak{A}_{n,p}$.

Застосувавши до функції $g(z)$ формулу (2.45), одержимо

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2i \operatorname{Im} z}{t - \overline{z}}\right)^{1-2/p} f(t) \frac{B_n^+(z)\overline{B_n^+(t)}}{t - z} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{C_{p,n,\Phi^+}(t, z)} dt = \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \rangle.$$

Теорему доведено.

Наслідок 2.2.2. *Нехай $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$. Якщо функція $f \in H_p$, $2 \leq p < \infty$, то для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ справджується формула*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n,p}(z) \widehat{f}(k) \Phi_k^+(z) + \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \rangle \quad \forall\ z \in \mathbb{C}_+, \tag{2.48}$$

де

$$\lambda_{k,n,p}(z) = 1 - \frac{1}{\Phi_k^+(z)} \langle \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \rangle, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{2.49}$$

Доведення. Функція $f - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \Phi_k^+ \in \mathfrak{A}_{h,p}$, тому за теоремою 2.2.2

$$\langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \rangle =$$

$$= \left\langle f - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \right\rangle =$$

$$= f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\Phi_k^+(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \left\langle \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \right\rangle,$$

що й потрібно було довести.

Наслідок доведено.

2.2.2. Екстремальні задачі

Наша найближча мета — обчислення величини

$$E(z, \mathfrak{A}) := \inf \left\{ \|\mathcal{C}(z, \cdot) - g(\cdot)\|_q : g \in \mathfrak{A} \right\}, \quad \mathfrak{A} \subset L_q(\mathbb{R}),\ z \in \mathbb{C}_+,$$

яка називається найкращим наближеннями ядра $\mathcal{C}(\cdot, z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^\perp(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi^+}^{n\perp}$ і побудова для цих підпросторів в явному вигляді елемента найкращого наближення.

Розглянемо лінійний функціонал $F_z(f) := f(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, визначений на $H_p(\mathbb{C}_+)$. Для його норми

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| := \sup\{|f(z)| : f \in \mathfrak{A}_{n,p}, \|f\|_p \le 1\}$$

на підпросторі $\mathfrak{A}_{n,p}$ справджується таке твердження.

Наслідок 2.2.3. *Нехай $2 \le p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ і $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді в кожній точці $z \in \mathbb{C}_+$ справджується рівність*

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| = \|\mathcal{C}_{p,n,\Phi^+}(\cdot, z)\|_q = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Доведення. Справді, з формули (2.47) за нерівністю Гельдера маємо оцінку зверху

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| \le \|\mathcal{C}_{p,n,\Phi^+}(\cdot, z)\|_q = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}}, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Для оцінки знизу візьмемо функцію

$$f^*(\zeta) = e^{-i \arg B_n^+(z)} B_n^+(\zeta) \frac{(-\operatorname{Im} z)^{1/p}}{(\zeta - \overline{z})^{2/p}},$$

яка, очевидно, є голоморфною в $\mathbb{C}_+$, задовольняє рівностям $f^*(a_0) = \cdots = f(a_{n-1}) = 0$ і

$$\|f^*\|_p^p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(t)|^p dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z}{|t-\overline{z}|^2} dt = 1.$$

Отже, $f^* \in \mathfrak{A}_{n,p}$ і тому

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| \geq f^*(z) = \frac{|B_n^+(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Наслідок доведено.

Зауважимо, що згідно зі співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [43]) справджується рівність

$$\|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\| = E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right). \tag{2.50}$$

Таким чином згідно з (2.50) і наслідком 2.2.3 нашу мету в частині обчислення величини $E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right)$ досягнуто.

Повний розв'язок поставленої задачі міститься в такому твердженні.

Теорема 2.2.3. *Нехай* $2 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$ *і* B_n^+ — *n-добуток Бляшке системи* Φ^+. *Тоді для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$ *справджується рівність*

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right) = \frac{|B_n^+(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}, \tag{2.51}$$

а елементом найкращого наближення з підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}$ *є єдина функція*

$$g_z(t) = \mathcal{C}(t,z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(t,z). \tag{2.52}$$

Доведення. Як зазначалося вище, рівність (2.51) випливає з (2.50) за наслідком 2.2.3. Доведемо екстремальність функції $g_z(t)$. Насамперед зауважимо, що $\sup_{t\in\overline{\mathbb{C}_+}} |g_z(t)| < \infty$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_z(t)|^q dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{((t-x)^2+y^2)^q} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2-q}}{(t-x)^2+y^2} dt < \infty, \quad z = x+iy,$$

тобто звуження $g_z|_{\mathbb{R}}$ функції $g_z(t)$ на дійсну вісь $\mathbb{R}$ належить до $L_q(\mathbb{R})$,

$1/p + 1/q = 1$.

Далі, згідно з (2.44) і (2.47) для будь-якої функції $f \in \mathfrak{A}_{n,p}$ справджуються рівності

$$\langle f, g_z \rangle = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, z) \rangle - \langle f, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z) \rangle = f(z) - f(z) = 0. \tag{2.53}$$

Отже, функція $g_z \in \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}$ і для неї виконується рівність

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right) = \|\mathcal{C}(\cdot, z) - g_z(\cdot)\|_q = \|\mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z)\|_{L_q} = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

що і доводить (2.51).

Нарешті, переконаємося що побудована екстремальна функція (2.52) єдина. Нехай h_z — будь-яка інша функція, яка задовольняє рівність

$$\|C(\cdot, z) - g_z(\cdot)\|_q = E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^{\perp}\right).$$

Тоді за нерівністю Гельдера

$$\frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}} = f^*(z) = \langle f^*, \mathcal{C}(\cdot, z) - h_z \rangle \le \|f^*\|_p \|\mathcal{C}(\cdot, z) - h_z\|_q =$$

$$= \|\mathcal{C}(\cdot, z) - h_z\|_q = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Отже, скрізь у цих співвідношеннях мають виконуватися тільки рівності, а це рівносильне тому, що

$$h_z(t) = \mathcal{C}(t, z) - \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}} f^*(t) \, |f^*(t)|^{p-2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$\frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}} f^*(t) \, |f^*(t)|^{p-2} = \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(t, z) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

то $h_z \equiv g_z$, що й доводить єдиність екстремальної функції g_z.

Теорему доведено.

2.2.3. Інтерполяція функцій з простору $H_p(\mathbb{C}_+)$

Застосуємо тепер отримані результати до обчислення точних верхніх меж поточкових відхилень функцій з одиничної кулі простору H_p, $2 \le p < \infty$, у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$ від певних інтерполяційних операторів з вузлами інтерполяції $\mathbf{a}_n$ і певних лінійних середніх рядів Фур'є за системою Такенаки–Мальмквіста, яка відповідає послідовності $\mathbf{a}_n$.

Для цього розглянемо оператор U_{n,p,Φ^+}, визначений на $H_p(\mathbb{C}_+)$ правилом

$$U_{n,p,\Phi^+}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\lambda_{k,n,p}\Phi_k^+,$$

де величини $\lambda_{k,n,p}(z)$ визначаються формулою (2.49).

Оператор U_{n,p,Φ^+} є інтерполяційним на просторі H_p, $2 \le p < \infty$, з вузлами інтерполяції $\mathbf{a}_n$, де $\mathbf{a}_n$ — відрізок послідовності $\mathbf{a}$ точок в $\mathbb{C}_+$, що породжують систему $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$, тобто для кожної функції $f \in H_p$, $2 \le p < \infty$ виконуються інтерполяційні умови

$$U_{n,p,\Phi^+}(f)(a_k) = f(a_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.54}$$

Покажемо, що оператор U_{n,p,Φ^+} породжує найкращий лінійний метод наближення в такому розумінні. Нехай $\mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ — множина лінійних операторів I_n, визначених на $H_p(\mathbb{C}_+)$ правилом

$$I_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)\varphi_j(z),$$

де φ_j — довільні функції, визначені та неперервні в $\mathbb{C}_+$. Нехай, далі,

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) := \inf\left\{\max\left\{|f(z) - I_n(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\right\} : I_n \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)\right\}$$

— найкраще наближення в точці $z \in \mathbb{C}_+$ одиничної кулі простору Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ образами операторів I_n.

Теорема 2.2.4. *Нехай $2 \le p < \infty$, $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність різних точок $a_k \in \mathbb{C}_+$ і Φ^+ — система Такенаки–Мальмквіста, породжена послі-*

довністю $\mathbf{a}$. *Тоді* $U_{n,p,\Phi^+} \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ *і в кожній точці* $z \in \mathbb{C}_+$ *справджується рівність*

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) = \max\{|f(z) - U_{n,p,\Phi^+}(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\} = \frac{|B_n^+(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}. \tag{2.55}$$

Доведення. Згідно з рівністю (2.48), в кожній точці $z \in \mathbb{C}_+$ будемо мати

$$U_{n,p,\Phi^+}(f)(z) = \langle f, \mathcal{C}(\cdot, z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{t-z}\left(1 - \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{t-\overline{z}}\right)^{1-2/p} B_n^+(z)\overline{B_n^+(t)}\right)dt.$$

При кожному фіксованому $z \in \mathbb{C}_+$ підінтегральну функцію можна розглядати як граничні значення на $\mathbb{R}$ функцій

$$F(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(1 - \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{\zeta - \overline{z}}\right)^{1-2/p} B_n^+(z)\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\chi}_j^+\frac{\zeta - \overline{a}_j}{\zeta - a_j}\right),$$

яка є мероморфною в $\mathbb{C}_+$ з простими полюсами $\zeta_0 = z,\ \zeta_k = a_{k-1},\ k = \overline{1,n}$.

Тому за теоремою про лишки (див., наприклад, [76, с. 150, 227]), знаходимо

$$U_{n,p,\Phi^+}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n}\operatorname*{res}_{\zeta=\zeta_k} F(\zeta) = \sum_{k=0}^{n}\lim_{\zeta\to\zeta_k}(\zeta - \zeta_k)F(\zeta) =$$

$$= f(z)\left(1 - \prod_{j=0}^{n-1}\chi_j^+\frac{z-a_j}{z-\overline{a}_j}\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\chi}_j^+\frac{z-\overline{a}_j}{z-a_j}\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p}\prod_{\substack{j=0,\\ j\ne k}}^{n-1}\frac{z-a_j}{a_k-a_j}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{a_k-\overline{a}_j}{z-\overline{a}_j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\varphi_k(z),$$

де

$$\varphi_k(z) = \left(\frac{2i\operatorname{Im} z}{a_k - \overline{z}}\right)^{1-2/p}\prod_{\substack{j=0,\\ j\ne k}}^{n-1}\frac{z-a_j}{a_k-a_j}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{a_k-\overline{a}_j}{z-\overline{a}_j}.$$

Отже, запроваджений оператор U_{n,p,Φ^+} належить до множини $\mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$. Враховуючи цей факт і наслідок 2.2.2, одержуємо оцінку

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) \le \sup\{|f(z) - U_{n,p,\Phi^+}(f)(z)| : \|f\|_p \le 1\} \le \|\mathcal{C}_{n,p,\Phi^+}(\cdot, z)\|_q.$$

З другого боку

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) \ge \sup\left\{|f(z)| : \|f\|_p \le 1, f(a_k) = 0, k = \overline{0, n-1}\right\} = \|F_z|\ \mathfrak{A}_{n,p}\|.$$

Тому рівності (2.55) випливають з цих співвідношень за наслідком 2.2.3.

Теорему доведено.

2.3. Висновки до розділу 2

В цьому розділі:

1. Знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах $\{\Phi_n(t)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, виражені в термінах обмежень на послідовності полюсів цих систем.

2. Обчислено точне значення величини

$$E\left(z, \mathfrak{A}\right) := \inf\left\{\left\|\mathcal{C}(z,\cdot) - g(\cdot)\right\|_q : g \in \mathfrak{A}\right\}, \quad \mathfrak{A} \subset L_q(\mathbb{R}),\ z \in \mathbb{C}_+,$$

найкращого наближеннями ядра Коші $\mathcal{C}(\cdot, z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A} = H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n) \vee H_{p,\Phi^+}^{n\perp}$.

3. В явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення і доведено його єдиність.

4. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового і рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$. Показано, що такий метод є найкращим інтерполяційним методом наближення.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [189, 277].

Розділ 3

Розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського на класах ψ-диференційованих функцій

Цей розділ присвячено розв'язанню *задачі Колмогорова-Нікольського* про знаходження асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_n)_X = \sup\left\{\|f(\cdot)-U_n(f;\cdot)\|_X : \quad f\in\mathfrak{N}\right\},$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас 2π-періодичних функцій, X — лінійний нормований простір. Розглянуто випадок, коли у ролі $\mathfrak{N}$ виступає один із класів L^{ψ}_1, $L^{\psi}H^0_{\omega_1}$ або $C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_+$, $\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\psi_1\in\mathfrak{M}'_0$, і $L^{\psi}_{\beta,p}$ $1\le p\le\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_q$; у ролі агрегатів наближення використано суми Валле Пуссена та спеціальні тригонометричні поліноми $U^*_{n-1}(f;x)$; $X=C$ або $X=L_p$, $1\le p\le\infty$.

Також знайдено оцінки найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами для функцій, які зображуються згортками із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста і досліджено властивості оператора-решета Ф. Вінера, який визначається на множині всіх голоморфних у крузі $\mathbb{D}$ функцій правилом

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{f}_{js+r}z^j,\quad r,s\in\mathbb{Z},s\neq 0,$$

де при $js+r<0$ покладено $\widehat{f}_{js+r}=0$.

3.1. Наближення ψ-інтегралів періодичних функцій сумами Валле-Пуссена у просторі L

У цьому підрозділі вивчаються апроксимаційні властивості сум Валле-Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ на класах ψ-диференційованих періодичних функцій в інтегральній метриці. Розглядається випадок, коли множини L^{ψ} визначаються повільно спадними послідовностями $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$.

3.1.1. Постановка задачі і формулювання результатів підрозділу

Наведемо поняття ψ-інтегралу і ψ-похідної з книги [216].

Означення 3.1.1. *Нехай f — 2π-періодична інтегрована за Лебегом на періоді функція ($f \in L$) і*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\ kx + b_k \sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{3.1}$$

— ряд Фур'є функції f. Нехай далі $\psi(k) = (\psi_1;\psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Розглянемо ряд

$$A + \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)A_k(f,x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f,x)), \tag{3.2}$$

де A — деяке число і

$$\tilde{A}_k(f,x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Якщо ряд (3.1) для даної функції f і пари ψ є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$, то функцію F називають ψ-інтегралом функції f і позначають $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)$. Множину ψ-інтегралів усіх функцій із L позначають L^{ψ}.

Означення 3.1.2. *Нехай $f \in L$, (3.1) — її ряд Фур'є і пара $\psi = (\psi_1, \psi_2)$*

задовольняє умову

$$\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \right) \tag{3.4}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, *то* φ *називають* ψ*-похідною функції* f *і позначають* $\varphi(\cdot) = D^{\psi}(f;\cdot) = f^{\psi}(\cdot)$. *Підмножину функцій* $f \in L$, *у яких існують* ψ*-похідні, позначають* $\bar{L}^{\psi}$.

У праці [210] показано, що для будь-яких пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$, що задовольняють умову (3.3), виконується рівність $\bar{L}^{\psi} = L^{\psi}$, тобто множина ψ-інтегралів всіх функцій $f \in L$ збігається з множиною функцій, що мають ψ-похідні.

Якщо $\mathfrak{N} \subset L$, то через $L^{\psi}\mathfrak{N}$ позначають множини ψ-інтегралів функцій з $\mathfrak{N}$. Нехай

$$S_1^0 = \left\{ \varphi \in L : \quad \|\varphi\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\, dt \leq 1,\ \varphi \perp 1 \right\}$$

і $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності. Тоді

$$L_1^{\psi} := L^{\psi} S_1^0,$$

а через $L^{\psi} H_{\omega_1}^0$ будемо позначати множину ψ-інтегралів функцій з

$$H_{\omega_1}^0 = \left\{ \varphi \in L : \quad ||\varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot)||_1 \leq \omega(t),\ \varphi \perp 1 \right\}.$$

Системи чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, зручно вважати значеннями при $t = k$ неперервних при всіх $t \geq 1$ функцій $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$, відповідно. Множину всіх неперервних опуклих донизу при $t \geq 1$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умову

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0,$$

позначимо $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{M}'$ позначимо підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які задовольняють умову

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Розглянемо задачу про вивчення асимптотичної поведінки при $n \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}(L_1^\psi; V_{n,p})_1 := \sup_{f \in L_1^\psi} \|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_1,$$

і

$$\mathcal{E}(L^\psi H^0_{\omega_1}; V_{n,p})_1 := \sup_{f \in L^\psi H^0_{\omega_1}} \|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_1,$$

де

$$\rho_{n,p}(f;x) := f(x) - V_{n,p}(f;x),$$

і

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} A_i(f,x)$$

— суми Валле Пуссена функції f.

Метод розв'язання цієї задачі залежить від швидкості спадання до нуля функцій $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ при $t \to \infty$. Тому нам знадобиться наступне означення.

У відповідності з [216, с. 159] через $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ позначимо функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Звідси, внаслідок строгої монотонності і спадання до нуля ψ, функція $\eta(t)$ для всіх $t \geq 1$ визначається однозначно

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{3.5}$$

де ψ^{-1} — функція, обернена до ψ. Далі, кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність її модуль півроспаду

$$\mu(t) = \mu(\psi;t) := \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \geq 1. \tag{3.6}$$

Тоді

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}, \quad 0 < \mu(\psi; t) \le K < \infty\}, \tag{3.7}$$

де $K = K(\psi) = \text{const}$.

Покладемо $\Theta := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n}$ і сформулюємо основний результат підрозділу.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 := \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$ *справджуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\infty}; V_{n,p})_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_n^{\infty} \frac{|\psi_2(v)|}{v}\, dv + \frac{4}{\pi^2}\, \psi(n)\, \ln\frac{n}{p} + \mathcal{O}(1)\psi(n), \tag{3.8}$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi} H^0_{\omega_1}; V_{n,p})_1 = \theta_{\omega_1} \left[\frac{1}{\pi}\Big| \int\limits_0^1 \omega(\frac{2t}{n}) \int\limits_1^{\infty} \psi_2(nv) \sin vt\, dv\, dt\Big| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2}\, \psi(n) \ln\frac{n}{p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n}) \sin t\, dt\right] + \mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}), \tag{3.9}$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, $\theta_{\omega_1} \in [\frac{1}{2}; 1]$, *причому* $\theta_{\omega_1} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності,* $\mathcal{O}(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно* n *і* p.

Зауваження 3.1.1. *Відзначимо, що аналогічні результати в рівномірній метриці отримані у праці [171]. У випадку наближення сумами Фур'є відповідні рівності в інтегральній метриці одержано у праці [231], а в рівномірній метриці таку задачу розв'язано в [211, 212].*

Метод доведення теореми 3.1.1 спирається на методи, які використовувались в роботах [171, 211, 212] для дослідження асимптотичної поведінки точних верхніх меж відхилень в рівномірній метриці сум Фур'є і Валле Пуссена на класах ψ-диференційованих функцій.

3.1.2. Інтегральні зображення величин $\rho_{n,p}(f;x)$

Відштовхуючись від зображення

$$\rho_{n,p}(f;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(x-\frac{t}{n})\widehat{\nu}_{n,p}(t)\ dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(x-\frac{t}{n})\widehat{\mu}_{n,p}(t)\ dt:=$$

$$:=\rho^{*}_{n,p}(f;x)+\Delta_{n,p}(f;x), \tag{3.10}$$

де

$$\widehat{\nu}_{n,p}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big(\nu_1(v)\cos vt+\nu_2(v)\sin vt\Big)\ dv,$$

$$\nu_i(p;x):=\begin{cases}0, & 0\le x<\frac{n-p}{n},\\ \frac{nx-n+p}{p}\ \psi_i(n), & \frac{n-p}{n}\le x<1,\\ \psi_i(nx), & 1\le x, \quad i=1,2,\end{cases} \tag{3.11}$$

$$\widehat{\mu}_{n,p}(t):=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Big(\mu_1(v)\cos vt+\mu_2(v)\sin vt\Big)\ dv,$$

$$\mu_i(p;x):=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac{n-p}{n}]\cup(1,\infty),\\ \frac{nx-n+p}{p}\ \big[\psi_i(nx)-\psi_i(n)\big], & x\in(\frac{n-p}{n},1], \quad i=1,2,\end{cases}$$

яке було отримане в роботі [173], покажемо, що справджується рівність

$$\rho_{n,p}(f;x)=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{a/n\le|t|\le\frac{\pi}{p}}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{t}\ dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\delta(x;t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt+\mathcal{O}(1)\psi(n)\xi_{\omega}, \tag{3.12}$$

в якій: $\psi(n)=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}$, $\gamma_n=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)}$ і

$$\delta(x;\frac{t}{n})=f^{\psi}(x-\frac{t}{n}), \quad \zeta_{\omega}=1,$$

якщо $f \in L_1^{\psi}$, та

$$\delta(x;\frac{t}{n}) = f^{\psi}(x-\frac{t}{n}) - f^{\psi}(x), \quad \zeta_{\omega} = \omega(\frac{1}{n-p}),$$

якщо $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$.

Має місце наступне твердження.

Лема 3.1.1. *Нехай* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, n *і* $p = p(n)$ *— довільні натуральні числа,* $p < n$ *і* a *— будь-яке число з проміжку* $(0;\pi]$.

Тоді майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\rho^*_{n,p}(f;x) = -\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{\cos t}{t}\,dt +$$

$$+\int\limits_{|t|\le a} \delta(x;\frac{t}{n})\int\limits_1^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt + O(1)\psi(n)\zeta_{n,p}, \tag{3.13}$$

в якій: якщо $f \in L_1^{\psi}$, *то*

$$\delta(x;\frac{t}{n}) = f^{\psi}(x-\frac{t}{n}), \quad \zeta_{n,p} = 1;$$

якщо $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$, *то*

$$\delta(x;\frac{t}{n}) = f^{\psi}(x-\frac{t}{n}) - f^{\psi}(x), \quad \zeta_{n,p} = \omega(\frac{1}{n-p});$$

$\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}$, *а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n *і* p.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$. При цьому фактично буде розглянуто і випадок, коли $f \in L_1^{\psi}$. Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\nu}_{n,p}(t)\,dt = 0,$$

то

$$\rho^*_{n,p}(f;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x;\frac{t}{n})\widehat{\nu}_{n,p}(t)\;dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x;\frac{t}{n})\int\limits_{0}^{\infty}\nu_1(p;v)\cos vt\;dv\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x;\frac{t}{n})\int\limits_{0}^{\infty}\nu_2(p;v)\sin vt\;dv\;dt:=R^{(1)}_{n,p}(f;x)+R^{(2)}_{n,p}(f;x),\qquad(3.14)$$

де

$$\delta(x;\frac{t}{n})=\begin{cases}f^{\psi}(x-\frac{t}{n})-f^{\psi}(x), & f\in L^{\psi}H^0_{\omega_1},\\ f^{\psi}(x-\frac{t}{n}), & f\in L^{\psi}_1.\end{cases}$$

Нехай a — деяке число, $0<a\le\pi$. Інтегруючи частинами, з урахуванням рівності (3.11) і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$R^{(1)}_{n,p}(f;x)=\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\;dt+b^{\psi_1}_{n,p}(a;f;x),\qquad(3.15)$$

де

$$b^{\psi_1}_{n,p}(a;f;x)=\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\;dt+$$

$$+\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{n\pi}{p}}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\;dt-\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x;\frac{t}{n})\int\limits_{1}^{\infty}\psi_1'(nv)\frac{\sin vt}{t}\;dv\;dt.\qquad(3.16)$$

Аналогічно

$$R^{(2)}_{n,p}(f;x)=\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\sin t-\sin\frac{n-p}{n}t}{t^2}\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\;dv\;dt+b^{\psi_2}_{n,p}(a;f;x),\qquad(3.17)$$

де

$$b_{n,p}^{\psi_2}(a;f;x)=\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a}\delta(x;\frac{t}{n})\left[\frac{-\cos t}{t}+\frac{n}{p}\frac{\sin t-\sin\frac{n-p}{n}t}{t^2}\right]\,dt+$$

$$+\frac{\psi_2(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{n\pi}{p}}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\sin t-\sin\frac{n-p}{n}t}{t^2}\,dt+\int\limits_{|t|\ge a}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{\pi}\int\limits_1^\infty\psi_2'(nv)\frac{\cos vt}{t}\,dv\,dt. \tag{3.18}$$

Покажемо спочатку, що для будь-якої функції $f\in L^\psi H^0_{\omega_1}$, довільних натуральних чисел n і p, $p<n$, майже в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\left\|b_{n,p}^{\psi_1}(a;f;\cdot)\right\|_1\le K|\psi_1(n)|\omega(\frac{1}{n-p}). \tag{3.19}$$

Дійсно, оскільки

$$\left|\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\right|\le 1,\quad \forall t\in\mathbb{R},\ n,p\in\mathbb{N},$$

то для довільної функції $f\in L^\psi H^0_{\omega_1}$ отримуємо

$$\left\|\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\,dt\right\|_1\le K|\psi_1(n)|\omega(\frac{1}{n}). \tag{3.20}$$

Для оцінки другого доданку із співвідношення (3.16) будемо використовувати наступне допоміжне твердження з книги [216, с. 212].

Лема 3.1.2. *Нехай $\varphi(t)$ — сумовна на множині $\mathcal{I}$ функція. Тоді, якщо $\mathcal{I}=\{x: b\le x\le d\}$ і x_k, $k=1,2,\dots,N$, $b\le x_1<x_2<\dots<x_N<d$ — деякий набір точок, для яких*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)\,dt=0,\qquad x_k,\ k=1,2,\dots,N-1, \tag{3.21}$$

$\varphi>0$ ($\varphi<0$) майже скрізь на $(x_k;c_k)$, $\varphi<0$ ($\varphi>0$) майже скрізь на

$(c_k; x_{k+1}),\ c_k \in (x_k; x_{k+1}),\ то\ \forall f \in H^0_{\omega_1}$

$$\left\| \int_b^d f(t)\varphi(t)\ dt \right\|_1 \le \left\| \int_b^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\ dt \right\|_1 +$$

$$+\frac{\omega(\Delta)}{2} \int_{x_1}^{x_N} |\varphi(t)|\ dt + \left\| \int_{x_N}^d f(x+t)\varphi(t)\ dt \right\|_1.$$

Якщо $\mathcal{I} = \{x : x \ge b\}$, *а* $x_k,\ k = 1, 2, \ldots,\ b \le x_1 < x_2 < \ldots$ — *деякий набір точок, для яких умова (3.21) виконана для довільного натурального* $k,\ то\ \forall f \in H^0_{\omega_1}$

$$\left\| \int_b^\infty f(t)\varphi(t)\ dt \right\|_1 \le \left\| \int_b^{x_1} f(x+t)\varphi(t)\ dt \right\|_1 + \omega(\Delta) \int_{x_1}^\infty |\varphi(t)|\ dt.$$

При цьому $\Delta = \sup\limits_k (x_{k+1} - x_k)$.

Нехай

$$I_{n,p}(f; x; \beta) := \int\limits_{\frac{n\pi}{p}}^\infty \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{n}{p} \frac{\cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n-p}{n}t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\ dt.$$

Оскільки функція

$$\varphi_1(t) = \frac{\cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}$$

на проміжках $(s_k; s_{k+1}),\ s_k = \frac{\pi}{2}(2k + 1 + \beta),\ k = 0, 1, \ldots,$ зберігає свій знак, чергуючи його з кожною зміною номера k і при цьому числа

$$\alpha_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(t)\ dt$$

строго спадають зі збільшенням номера k, то то функція

$$\Phi_1(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\ dt,$$

на кожному проміжку $(s_k; s_{k+1}),\ s_k = \frac{\pi}{2}(2k + 1 + \beta),\ k = 0, 1, \ldots,$ буде мати єдиний простий нуль $x_k^{(1)}$. Нехай $x_{k'}^{(1)}$ — найближчий праворуч від точки $t = \frac{n\pi}{p}$ такий нуль. Звідси випливає, що функція $\varphi_1(t)$ задовольняє всі умови

леми 3.1.2.

Аналогічними міркуваннями переконуємося, що функція

$$\Phi_2(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\cos\left(\frac{n-p}{n}t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\, dt, \qquad p < n,$$

на кожному проміжку $(t_k; t_{k+1})$, $t_k = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{n-p}(2k+1) + \beta\right)$, $k = 0, 1, \ldots,$ буде мати єдиний простий нуль $x_k^{(2)}$, а підінтегральна функція — задовольняти всі умови леми 3.1.2. Позначивши через $x_{k''}^{(2)}$ найближчий праворуч від точки $t = \frac{n\pi}{p}$ такий нуль, застосуємо лему 3.1.2 в частині, що стосується нескінченного проміжку інтегрування при $b = \frac{n\pi}{p}$. Отримуємо

$$\|I_{n,p}(f; x; \beta)\|_1 \le \frac{n}{p}\left(\left\| \int\limits_{\frac{n\pi}{p}}^{x_{k'}^{(1)}} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{\cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\, dt \right\|_1 +\right.$$

$$+\frac{1}{2}\omega(\frac{\triangle_1}{n}) \int\limits_{x_{k'}^{(1)}}^\infty \left|\frac{\cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\right| dt + \left\| \int\limits_{\frac{n\pi}{p}}^{x_{k''}^{(2)}} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{\cos\left(\frac{n-p}{n}t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\, dt \right\|_1 +$$

$$\left. +\frac{1}{2}\omega(\frac{\triangle_2}{n}) \int\limits_{x_{k''}^{(2)}}^\infty \left|\frac{\cos\left(\frac{n-p}{n}t - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\right| dt \right) \le$$

де

$$\Delta_1 := \max\left(x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}\right) < 2\pi, \qquad x_{k'}^{(1)} - \frac{n\pi}{p} < 2\pi,$$

і

$$\Delta_2 := \max\left(x_{k+1}^{(2)} - x_k^{(2)}\right) < \frac{2\pi n}{n-p}, \qquad x_{k''}^{(2)} - \frac{n\pi}{p} < \frac{2\pi n}{n-p}.$$

Звідси, виконуючи елементарні оцінки і враховуючи нерівність

$$\frac{p}{n}\ \omega(\frac{1}{p}) \le 2\omega(\frac{1}{n}), \tag{3.22}$$

яка справджується для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ і довільних

натуральних чисел p і n, $p \le n$, знаходимо

$$\|I_{n,p}(f;x;\beta)\|_1 \le K\omega(\frac{1}{n-p}).$$

Зрозуміло, що аналогічна оцінка буде виконуватись і для від'ємних t, отже остаточно отримуємо

$$\left\| \int\limits_{|t|\ge\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{n-p}{n}t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t^2}\,dt\right\|_1 \le K\omega(\frac{1}{n-p}). \qquad (3.23)$$

Поклавши у співвідношенні (3.23) $\beta = 0$, одержуємо оцінку

$$\left\|\frac{\psi_1(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos t-\cos\frac{n-p}{n}t}{t^2}\,dt\right\|_1 \le K|\psi_1(n)|\omega(\frac{1}{n-p}),$$

яка виконується для будь-якої функції $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$, довільних натуральних чисел n і p, $p < n$, майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Отже, для завершення доведення оцінки (3.19) залишається переконатися, що

$$\left\|\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x;\frac{t}{n})\int\limits_{1}^{\infty}\psi_1'(nv)\frac{\sin vt}{t}\,dv\,dt\right\|_1 \le K|\psi_1(n)|\omega(\frac{1}{n}). \qquad (3.24)$$

Оскільки функція

$$\Phi_3(x) = \int\limits_x^{\infty}\frac{1}{t}\int\limits_1^{\infty}\psi_1'(nv)\sin vtdv,$$

на кожному проміжку $(x_k;x_{k+1})$, $k = 0,1,2,\ldots$, де x_k — нулі інтегрального синуса, занумеровані у зростаючому порядку, приймає значення нуль в деякій точці $\bar{x}_k$

$$k\pi+\pi/2 < \bar{x}_k < (k+1)\pi+2\pi/3,$$

(див. пропозицію V.4.1 з монографії [216, с. 224]), то знову застосовуючи лему

3.1.2, отримуємо

$$\left\| \frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{1}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi_1'(nv) \sin vt \, dv \, dt \right\|_1 \le \frac{n}{\pi} \left\| \int\limits_0^{\overline{x}_1} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{1}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi_1'(nv) \sin vt \, dv \, dt \right\|_1 +$$

$$+ \frac{n}{2\pi} \omega(\frac{\Delta}{n}) \int\limits_{\overline{x}_1}^{\infty} \left| \frac{1}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi_1'(nv) \sin vt \, dv \right| dt, \tag{3.25}$$

де

$$\pi + \pi/2 < \overline{x}_1 < 2\pi + 2\pi/3, \quad \Delta = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k) \le \pi.$$

Зрозуміло, що аналогічна оцінка буде виконуватись і для інтеграла по проміжку $t < 0$. Беручи до уваги цей факт, а також використовуючи нерівність

$$\int\limits_0^{\infty} \left| \frac{1}{t} \int\limits_1^{\infty} \psi_1'(nv) \sin vt \, dv \right| \le K \psi_1(n),$$

одержану в книзі [216, с. 223]) для довільної функції $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, переконуємося в справедливості (3.24).

Аналізуючи хід доведення співвідношення (3.19), бачимо, що у випадку, коли функція $f \in L_1^{\psi}$ для довільних натуральних чисел n і p, $p < n$, майже всюди на $\mathbb{R}$ має місце оцінка

$$\left\| b_{n,p}^{\psi_1}(a; f; \cdot) \right\|_1 \le K |\psi_1(n)|. \tag{3.26}$$

Одержимо тепер оцінку для величини $b_{n,p}^{\psi_2}(a; f; x)$ зі співвідношення (3.18). Виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$\int\limits_{|t| \le a} \delta(x; \frac{t}{n}) \left[-\frac{\cos t}{t} + \frac{n}{p} \frac{\sin t - \sin \frac{n-p}{n} t}{t^2} \right] dt =$$

$$= \int\limits_{|t| \le a} \delta(x; \frac{t}{n}) \left[\cos t \, \frac{\frac{n}{p} \sin \frac{p}{n} t - t}{t^2} + \sin t \, \frac{\frac{p}{2n} \sin^2 \frac{p}{2n} t}{t^2} \right] dt. \tag{3.27}$$

Оскільки функції

$$y_{n,p}(t)=\frac{n}{p}\frac{\sin\frac{p}{n}t-t}{t^2}\quad i\quad g_{n,p}(t)=\frac{\frac{p}{2n}\sin^2\frac{p}{2n}t}{t^2}$$

обмежені одиницею на відрізку $[-a;a],\ 0<a\le\pi,$ і $f^{\psi}\in H^0_{\omega_1}$, то зі співвідношення (3.27) випливає, що

$$\Big\|\int\limits_{|t|\le a}\delta(x;\frac{t}{n})\Big[-\frac{\cos t}{t}+\frac{n}{p}\frac{\sin t-\sin\frac{n-p}{n}t}{t^2}\Big]\,dt\Big\|_1\le 4a\omega(\frac{a}{n})\le K\omega(\frac{1}{n}).\quad(3.28)$$

Скориставшись міркуваннями, застосованими для доведення нерівності (3.24), з урахуванням пропозиції V.4.2 і оцінки

$$\frac{n}{\pi}\int\limits_a^{\infty}\Big|\int\limits_1^{\infty}\psi_2'(nv)\frac{\cos vt}{t}\,dv\Big|dt\le K\psi_2(n),$$

з книги [216, с. 227–228], отримуємо

$$\Big\|\int\limits_{|t|\ge a}\delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{\pi}\int\limits_1^{\infty}\psi_2'(nv)\frac{\cos vt}{t}\,dv\,dt\Big\|_1\le K|\psi_2(n)|\omega(\frac{1}{n}),\qquad(3.29)$$

Покладаючи тепер $\beta=1$ у нерівності (3.23), а також беручи до уваги оцінки (3.28) і (3.29) на основі співвідношення (3.18) для будь-якої функції $f\in L^{\psi}H^0_{\omega_1},\ \pm\psi_2\in\mathfrak{M}'_0$, отримуємо

$$\|b^{\psi_2}_{n,p}(a;f;\cdot)\|_1\le K|\psi_2(n)|\omega(\frac{1}{n}).\qquad(3.30)$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $f\in L_1^{\psi}$ для довільних натуральних n і $p,\ p<n,$ майже в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\|b^{\psi_2}_{n,p}(a;f;\cdot)\|_1\le K|\psi_2(n)|.\qquad(3.31)$$

Нехай

$$J_{n,p}(f;x;a;\beta) := \int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{n}{p}\frac{\cos(t-\frac{\beta\pi}{2})-\cos(\frac{n-p}{n}t-\frac{\beta\pi}{2})}{t^2}\,dt =$$

$$= -\int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{t}\,dt + \int\limits_{a\le|t|\le\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\Bigg[\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}+$$

$$+\cos\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\frac{\frac{2n}{p}\sin^2\frac{p}{2n}t}{t^2}\Bigg]\,dt. \tag{3.32}$$

Беручи до уваги добре відому нерівність

$$\operatorname{tg} x \ge x, \qquad \forall x\in[0;\frac{\pi}{2}),$$

можна стверджувати, що похідна

$$y'_{n,p}(t) = 2\cos\frac{p}{2n}t\;\frac{\frac{2n}{p}\sin\frac{p}{2n}t - t\cos\frac{p}{2n}t}{t^3}$$

функції

$$y_{n,p}(t) = \frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}$$

на інтервалі $(a;\frac{n\pi}{p})$ додатна, отже функція $y_{n,p}(t)$ на вказаному інтервалі монотонно зростає. Цей факт дозволяє скористатися пропозицією V.1.1 з монографії [216, 207], з якої випливає, що функція

$$\Phi_1^{\beta}(x) = \int\limits_a^x \sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\;\frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}\,dt$$

на кожному проміжку $[\alpha_k;\alpha_{k+1})$, $k=k_0,k_0+1,\dots,m$, де α_k — нулі функції $\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\alpha_{k_0}<a<\alpha_{k_0+1}$, $\alpha_m<\frac{n\pi}{p}<\alpha_{m+1}$, буде мати нуль x_k, що дає право нам знову скористатись лемою 3.1.2. Застосовуючи цю лему, виконуючи елементарні оцінки з урахуванням нерівності (3.22) знаходимо

$$\left\|\int\limits_a^{\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\;\sin\left(t-\frac{\beta\pi}{2}\right)\;\frac{t-\frac{n}{p}\sin\frac{p}{n}t}{t^2}\,dt\right\|_1 \le K\omega(\frac{1}{n}). \tag{3.33}$$

Аналогічно, беручи до уваги монотонність функції

$$g_{n,p}(t) = \frac{\frac{2n}{p}\ \sin^2 \frac{p}{2n}t}{t^2}$$

на інтервалі $(a; \frac{n\pi}{p})$, отримуємо

$$\left\| \int\limits_a^{\frac{n\pi}{p}} \delta(x; \frac{t}{n})\ \cos\left(t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\ \frac{\frac{2n}{p}\sin^2 \frac{p}{2n}t}{t^2}\ dt \right\|_1 \leq K\omega(\frac{1}{n}). \tag{3.34}$$

Співставлення співвідношень (3.33), (3.34) і їм аналогічних для від'ємних t дозволяє стверджувати, що $\forall f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$, довільних натуральних чисел n і p, $p < n$, майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$J_{n,p}(f; x; a; \beta) = -\int\limits_{a \leq |t| \leq \frac{n\pi}{p}} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{\sin(t - \frac{\beta\pi}{2})}{t}\ dt + \mathcal{O}(1)\omega(\frac{1}{n}). \tag{3.35}$$

Якщо ж $f \in L^{\psi}_1$, то

$$J_{n,p}(f; x; a; \beta) = -\int\limits_{a \leq |t| \leq \frac{n\pi}{p}} \delta(x; \frac{t}{n}) \frac{\sin(t - \frac{\beta\pi}{2})}{t}\ dt + \mathcal{O}(1). \tag{3.36}$$

Покладаючи у співвідношеннях (3.35) і (3.36) по черзі $\beta = 0$, $\beta = 1$, з урахуванням рівностей (3.14), (3.15), (3.17) і оцінок (3.19), (3.26), (3.30) – (3.31) та (3.35) – (3.36), отримуємо співвідношення (3.13).

Лему доведено.

Відзначимо, нарешті, що необхідна нам оцінка величини $\Delta_{n,p}(f; x)$ із співвідношення (3.10) на класах $f \in L^{\psi}_1$ і $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$ була отримана в роботі [173]: якщо $f \in L^{\psi}_1$, то

$$\|\Delta_{n,p}(f; \cdot)\|_1 \leq K \sum_{i=1}^{2} |\psi_i(n-p) - \psi_i(n)|; \tag{3.37}$$

якщо ж $f \in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$, то

$$\|\Delta_{n,p}(f;\cdot)\|_1 \le K\omega(\frac{1}{n-p})\sum_{i=1}^{2}|\psi_i(n-p)-\psi_i(n)|. \tag{3.38}$$

Співставлення співвідношень (3.10), (3.13) та (3.37) – (3.38) переконує нас в справедливості (3.12).

З метою подальшого спрощення інтегрального зображення (3.12) покладемо

$$x_k = (k\pi+\gamma_n)/n, \quad t_k = x_k - \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots, n \in \mathbb{N} \tag{3.39}$$

і виберемо числа $k_i,\ i = \overline{0,3}$ з умов

$$t_{k_0-1} < \frac{a}{n} \le t_{k_0}, \qquad t_{k_1} \le \frac{\pi}{p} < t_{k_1+1}, \tag{3.40}$$

$$t_{k_2} \le -\frac{a}{n} < t_{k_2+1}, \qquad t_{k_3-1} < -\frac{\pi}{p} \le t_{k_3}. \tag{3.41}$$

Розглянемо функцію

$$l_{n,p}(t) = x_k, \quad t \in [t_k; t_{k+1}],$$

$$k = k_3, k_3+1, \dots, k_2-1, k_0, k_0+1, \dots, k_1-1. \tag{3.42}$$

Оскільки справджується рівність

$$\int_a^{\frac{n\pi}{p}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin(t-\gamma_n)}{t}\,dt = \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\,dt =$$

$$= (\int_a^{t_{k_0}} + \int_{t_{k_1}}^{\frac{n\pi}{p}})\delta(x;\frac{t}{n})\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\,dt + \int_{t_{k_0}}^{t_{k_1}} \delta(x;\frac{t}{n})\frac{l_{n,p}(t)-t}{tl_{n,p}(t)}\sin(nt-\gamma_n)\,dt$$

а також їй аналогічна для $t<0$, і при цьому функція

$$r_{n,p}(t) := \frac{l_{n,p}(t)-t}{tl_{n,p}(t)}\sin(nt-\gamma_n)$$

на проміжках $(t_k;t_{k+1})$, $k=k_3,k_3+1,\dots,k_2-1,k_0,k_{0+1},\dots,k_1-1$, зберігає знак, чергуючи його з кожною зміною номера k, а числа

$$d_k=\int_{t_k}^{t_{k+1}} r_{n,p}(t)dt$$

спадають за абсолютною величиною, то знову застосовуючи лему 3.1.2, виконуючи елементарні оцінки і враховуючи співвідношення

$$\psi(n-p)\le K\psi(n),\quad \omega(\frac{1}{n-p})\le K\omega(\frac{1}{n}),$$

які виконуються для довільної функції $\psi\in\mathfrak{M}_0$ якщо $0\le\Theta<1$, отримуємо таке твердження.

Лема 3.1.3. *Нехай* $\pm\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2\in\mathfrak{M}'_0$, $0\le\Theta<1$ *і* a *— довільне число з проміжку* $(0;\pi/2]$. *Тоді:*

якщо $f\in L_1^{\psi}$, *то майже в кожній точці* $x\in\mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\rho_{n,p}(f;x)=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})} f^{\psi}(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n} f^{\psi}(x-t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\;dv\;dt+\mathcal{O}(1)\psi(n);\qquad(3.43)$$

якщо $f\in L^{\psi}H^0_{\omega_1}$, *то майже в кожній точці* $x\in\mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\rho_{n,p}(f;x)=-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})}(f^{\psi}(x-t)-f^{\psi}(x))\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}(f^{\psi}(x-t)-f^{\psi}(x))\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\;dv\;dt+$$

$$+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}).\qquad(3.44)$$

В рівностях (3.43) та (3.44)

$$\psi(n)=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)},\quad \gamma_n=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)},$$

числа $t_{k_i}, i=\overline{0,3}$, *визначені співвідношенням (3.39) – (3.41),* $l_{n,p}(t)$ *— функція з (3.42) і* $\mathcal{O}(1)$ *— величини, що не залежать від* n,p *і* f.

3.1.3. Асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(L_1^{\psi};V_{n,p})_1$ і $\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1$

Отримаємо тепер асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум Валле Пуссена на класах ψ-диференційованих функцій.

Доведення теореми 3.1.1. Маємо

$$\mathcal{E}(L_1^{\psi};V_{n,p})_1=\sup_{\varphi\in S_1^0}\Bigg\|-\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})}f^{\psi}(x-t)\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l^{(1)}_{n,p}(t)}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}f^{\psi}(x-t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\;dv\;dt\Bigg\|_1+\mathcal{O}(1)\psi(n)\le$$

$$\le\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l^{(1)}_{n,p}(t)}\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\left|\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\;dv\right|dt+\mathcal{O}(1)\psi(n).\tag{3.45}$$

Переконаємося, що у співвідношенні (3.45) строгої нерівності бути не може. Для цього будемо використовувати таке твердження з [216, 254].

Лема 3.1.4. *Нехай функція* $K(t)\in L(-\pi;\pi)$ *і* $K(-\pi)=K(\pi)$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(K)=\sup_{\varphi\in S_1^0}\Big\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\;dt\Big\|_1\ge\frac{1}{2}\max_{|h|\le\pi}\|K^*(x)-K^*(x+h)\|_1,$$

де $K^*(\cdot)$ *— 2π-періодичне продовження функції* $K(t)$.

Покладемо

$$K(t)=K_{n,p}(t)=\begin{cases}\frac{\psi(n)}{\pi}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l^{(1)}_{n,p}(t)}\right|, & t\in(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1}),\\ \frac{1}{\pi}\int\limits_n^\infty \psi_2(v)\sin vt\ dv, & |t|\le a/n,\\ 0, & t\in[-\pi;\pi]\backslash e_{n,p},\end{cases}$$

де $e_{n,p}=(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})\cup[-a/n;a/n]$, і нехай $K^*(t)$ — 2π-періодичне продовження функції $K(t)$.

Тоді, беручи до уваги лему 3.1.4, одержуємо

$$\mathcal{E}(L^\psi_1;V_{n,p})_1\ge\frac{1}{2}\|K^*(t)-K^*(t+\frac{\pi}{n})\|+\mathcal{O}(1)\psi(n)=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l^{(1)}_{n,p}(t)}\right|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\left|\int\limits_n^\infty\psi_2(v)\sin vt\ dv\right|\,dt+\mathcal{O}(1)\psi(n).$$

Отже, для завершення доведення формули (3.8) залишилося скористатися рівностями

$$\int\limits_{(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1})}\left|\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\right|\,dt=\frac{4}{\pi}\ln\frac{n}{p}+\mathcal{O}(1),\tag{3.46}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\left|\int\limits_n^\infty\psi_2(v)\sin vt\ dv\right|\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_n^\infty\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt+\mathcal{O}(1)\psi_2(n),\tag{3.47}$$

отриманими в роботах [173] і [216, с. 236], відповідно.

Для доведення формули (3.9) будемо виходити з рівності (3.44). Зауваживши, що

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\sin(nt-\gamma_n)}{l_{n,p}(t)}\,dt=0,\qquad\int\limits_{|t|\le a/n}\int\limits_n^\infty\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt=0\tag{3.48}$$

на підставі (3.44), знаходимо

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1 \le \sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}}\Big\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\varphi(x-t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt\Big\|_1+$$

$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\Big(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}}\Big\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(x-t)\sin(nt-\gamma_n)\ dt\Big\|_1+$$

$$+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}}\Big\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(x-t)\sin(nt-\gamma_n)\ dt\Big\|_1\Big)+$$

$$+O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{3.49}$$

Беручи до уваги рівності (3.39), $\forall\varphi\in H^0_{\omega_1}$ знаходимо

$$\Big\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a/n}\varphi(x-t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt\Big\|_1\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^{a/n}\omega(2t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt\Big| \tag{3.50}$$

і

$$\sup_{\varphi\in H^0_{\omega_1}}\Big\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(x-t)\sin(nt-\gamma_n)\ dt\Big\|_1\le$$

$$\le\int\limits_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\ dt. \tag{3.51}$$

Тому, згідно зі співвідношеннями (3.48) – (3.51),

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1\le\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^{a/n}\omega(2t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt\Big|+$$

$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\ dt\Big(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\Big)+$$

$$+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{3.52}$$

Переконаємося, що у випадку, коли $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, співвідношення (3.52) стає рівністю. Для цього достатньо показати, що у класі $H^0_{\omega_1}$ знайдеться функція $\varphi^*(t)=\varphi^*_\omega(t)$, для якої

$$\Big\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi^*(x-t)K(t)\Big\|_1=\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_0^{a/n}\omega(2t)\int\limits_n^{\infty}\psi_2(v)\sin vt\ dv\ dt\Big|+$$

$$\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2n}\omega(2t)\sin nt\ dt\Big(\sum_{k=k_3}^{k_2-1}\frac{1}{|x_k|}+\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\frac{1}{x_k}\Big)+$$

$$+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{3.53}$$

Будемо використовувати екстремальну функцію $\varphi^*(t)\in H^0_{\omega_1}$, побудовану в [216, с. 258]. Покладемо

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}\omega(2t), & t\in[0;\frac{\pi}{2n}),\\ -\frac{1}{4}\omega(2|t|), & t\in(-\frac{\pi}{2n};0],\\ 0 & \frac{\pi}{2n}\le|t|\le\pi,\end{cases}$$

і через $\varphi_2(t)$ позначимо 2π-періодичне продовження функції $\varphi_1(t)$. Шукана функція $\varphi^*(t)$ тоді буде задана рівністю $\varphi^*(t)=\varphi_2'(t)-\omega(\pi/n)/2$.

Залишилось показати, що для цієї функції виконується рівність (3.52). Нехай

$$\Phi(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi^*(x-t)K(t)\ dt.$$

На проміжках $(-\pi;t_{k_3}-\pi/2n)$, $(x_{k_2};-(a/n+\pi/2n))$, $(a/n+\pi/2n;t_{k_0}-\pi/2n)$ та $(x_{k_1};\pi)$ функція $\Phi(x)$ тотожно дорівнює нулю; на проміжках $(t_{k_3}-\pi/2n;x_{k_3})$, $(x_{k_3};x_{k_3+1}),\dots,(x_{k_2};x_{k_2+1})$, і на проміжках $(t_{k_0}-\pi/2n;x_{k_0})$,

$(x_{k_0}; x_{k_0+1})$, ..., $(x_{k_1-1}; x_{k_1})$ функція $\Phi(x)$ зберігає знак, змінюючи його почергово. На проміжках $(-(a/n+\pi/2n); 0)$ й $(0; a/n+\pi/2n)$ має місце рівність

$$\operatorname{sign} \Phi(x) = \operatorname{sign} K(x).$$

Беручи до уваги цю інформацію і виконуючи необхідні розрахунки, приходимо до співвідношення (3.53).

Таким чином, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то співвідношення (3.51) є рівністю. Якщо ж $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, то як добре відомо, співвідношення (3.51) буде рівністю, якщо його праву частину помножити на деяку величину $\theta_{\omega_1} \in [1/2; 1]$.

Теорему доведено.

3.1.4. Наслідки з теореми 3.1.1

Якщо компоненти $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ підібрані відповідно до рівностей

$$\psi_1(k) = \psi(k) \cos\frac{\beta\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k) \sin\frac{\beta\pi}{2}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.54}$$

то поняття ψ-похідної (див. означення 3.1.2) збігається з поняттям $(\psi;\beta)$-похідної [204, с. 25].

Означення 3.1.3. *Нехай $f \in L$ і (3.1) — її ряд Фур'є. Нехай далі $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і $\beta \in \mathbb{R}$. Припустимо, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\beta\frac{\pi}{2}}{\psi(k)} A_k(f;x) - \frac{\sin\beta\frac{\pi}{2}}{\psi(k)} \tilde{A}_k(f;x) \tag{3.55}$$

є рядом Фур'є деякої функції з L. Цю функцію позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ (або $(D^{\psi}_{\beta} f)(\cdot)$) і називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}.

Позначивши через $L^{\psi}_{\beta,1} := L^{\psi}_{\beta} S^0_1$ і $L^{\psi}_{\beta} H^0_{\omega_1}$ класи $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій, $(\psi;\beta)$-похідні яких належать до множин

S_1^0 і $H_{\omega_1}^0$ відповідно, з теореми 3.1.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.1.1. *Нехай* $\pm\psi \in \mathfrak{M}'_0,\ \beta \in \mathbb{R}\ i\ 0 \le \Theta < 1\,.$

Тоді при $n \to \infty$ *справджуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; V_{n,p})_1 = \frac{2|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi}\ \int\limits_n^{\infty} \frac{|\psi(v)|}{v}\ dv + \frac{4}{\pi^2}\ \psi(n)\ \ln\frac{n}{p} + \mathcal{O}(1)\psi(n), \quad (3.56)$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta} H^0_{\omega_1}; V_{n,p})_1 = \theta_{\omega_1}\left[\frac{|\sin\frac{\beta\pi}{2}|}{\pi}\Big|\int\limits_0^1 \omega(\frac{2t}{n}) \int\limits_1^{\infty} \psi(nv)\sin vt\ dv\ dt\Big| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2}\ \psi(n)\ln\frac{n}{p}\ \int\limits_0^{\pi/2} \omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt\right] + \mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}), \quad (3.57)$$

$\theta_{\omega_1} \in [\frac{1}{2}; 1]$, *причому* $\theta_{\omega_1} = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності,* $\mathcal{O}(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно* n *і* p.

Нехай

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}: \quad 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 < \infty\}\,,$$

де $K_1 = K_1(\psi) = \text{const},\ K_2 = K_2(\psi) = \text{const}\,,\ \mu(\psi; t)$ — функція зі співвідношення (3.6).

Оскільки для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_C$ [216]

$$\int\limits_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\ dt = \mathcal{O}(1)\psi(n), \quad n \to \infty, \quad (3.58)$$

то з теореми 3.1.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.1.2. *Нехай* $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0,\ \pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_C\ i\ 0 \le \Theta < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\infty}; V_{n,p})_1 = \frac{4}{\pi^2}\ \psi(n)\ \ln\frac{n}{p} + \mathcal{O}(1)\psi(n), \quad (3.59)$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}H^0_{\omega_1};V_{n,p})_1=\frac{2\theta_{\omega_1}}{\pi^2}\ \psi(n)\ \ln\frac{n}{p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\ dt+\mathcal{O}(1)\psi(n)\omega(\frac{1}{n}),\quad(3.60)$$

де $\psi(n)=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}$, $\theta_{\omega_1}\in[1/2;1]$, *причому* $\theta_{\omega_1}=1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності.*

Якщо $\Theta=0$, то рівності (3.59) і (3.60) дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для сум Валле Пуссена на класах L^{ψ}_{∞} і $L^{\psi}H^0_{\omega_1}$ відповідно.

Зауважимо, що в деяких випадках у формулах (3.8) і (3.9) (а також, у формулах (3.56) і (3.57)), на відміну від рівностей (3.59) і (3.60), головним членом правої частини може бути і перший доданок.

3.2. Наближення сумами Валле Пуссена аналітичних в крузі функцій

У цьому підрозділі досліджено апроксимаційні властивості сум Валле Пуссена на класах $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ аналітичних у крузі функцій. Розглянуто випадок, коли елементи послідовностей $\psi(k)$, які визначають клас, що наближується, мають не більш ніж степеневий порядок прямування до нуля.

3.2.1. Постановка задачі та формулювання результатів

Нехай $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $\mathbb{T}:=\{z:|z|=1\}$, f — функція аналітична у крузі $\mathbb{D}$ і

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\qquad(3.61)$$

— її розвинення в ряд Тейлора–Маклорена.

Сумою Валле Пуссена функції f називається алгебраїчний многочлен вигляду

$$V_{n,p}(f)(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f)(z),$$

де $p, n \in \mathbb{N}, p \le n$ і $S_k(f)(z) := \sum_{l=0}^{k} (f^{(l)}(0)/l!) z^l$ — частинна сума порядку k ряду (3.61).

У цьому підрозділі роботі досліджуються наближення аналітичних функцій сумами $V_{n,p}$. Основним результатом підрозділу є таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай K_∞ — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{1 - \overline{w} z} \frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.62}$$

зі щільностями φ, для яких $\operatorname{ess\,sup}_{w \in \mathbb{T}} |\varphi(w)| \le 1$.

Тоді для будь-яких $p, n \in \mathbb{N}$, $p \le n$, і $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність

$$R_{n,p}(K_\infty; z) := \sup_{f \in K_\infty} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{2}{\pi p} |z|^{n-p+1} \frac{1 - |z|^{2p}}{1 - |z|^2} \mathbf{K}(|z|^p), \tag{3.63}$$

де

$$\mathbf{K}(\rho) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 - \rho e^{it}|}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

Зокрема, якщо $p = 1$, то $V_{n,1}(f) = S_{n-1}(f)$ і

$$\sup_{f \in K_\infty} \max_{|z| = \rho} |f(z) - S_{n-1}(f)(z)| = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\rho) \rho^n \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}.$$

З другого боку, функція $f_*(z) = z^n$ належить класові K_∞ і для неї, як добре відомо,

$$\inf_{a_k} \max_{\zeta : |\zeta| = \rho} \left| f_*(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k \right| = \rho^n \quad \forall\, \rho \in [0, 1). \tag{3.64}$$

Таким чином, суми Валле Пуссена тільки при кожному фіксованому значенні параметра p здійснюють наближення класу K_∞ в крузі $\mathbb{D}$ зі швидкістю, яка за порядком збігається зі швидкістю найкращого наближення алгебраїчними многочленами, зокрема частинними сумами рядів Тейлора.

Теорема 3.2.1 достатньо повно описує наближення, здійснювані сумами

Валле Пуссена всередині круга $\mathbb{D}$. Однак рівність (3.63) нічого не говорить про наближення в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ функцій, які є аналітичними в $\mathbb{D}$ і неперервними в $\overline{\mathbb{D}}$. В цьому підрозділі також досліджено суми Валле Пуссена на інших класах аналітичних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій на предмет того, якими апроксимаційними можливостями вони володіють в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ в порівнянні з частинними сумами рядів Тейлора і многочленами найкращого наближення.

На завершення коментарів до теореми 3.2.1 наведемо ще один цікавий факт.

З основного результату роботи [195] випливає таке твердження.

Теорема 3.2.2. *Нехай P_∞ — множина дійснозначних гармонічних функцій в крузі $\mathbb{D}$, які зображуються інтегралами Пуассона*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \varphi(w)\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\frac{dw}{w},$$

де φ — дійснозначна функція, для якої $\operatorname{ess\,sup}\limits_{w\in\mathbb{T}} |\varphi(w)| \le 1$ і нехай

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\left(\sum_{l=-k}^{k}\widehat{\varphi}(l)e_l(z)\right),$$

— сума Валле Пуссена функції f, де $e_l(z) := |z|^{|l|}e^{il\arg z}$ і

$$\widehat{\varphi}(l) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{it})e^{-ilt}dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції φ.

Тоді при $n-p\to\infty$ виконується асимптотична рівність

$$R_{n,p}(P_\infty; z) := \sup_{f\in P_\infty}|f(z) - V_{n,p}(f)(z)| =$$

$$= \frac{|z|^{n-p+1}}{p}\left(\frac{8}{\pi^2 p}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p) + \mathcal{O}(1)\frac{|z|}{(1-|z|)^3(n-p+1)}\right) \quad \forall\, z\in\mathbb{D},$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n, p і z.

Зіставляючи останнє співвідношення з рівністю (3.63), отримаємо, що

$$\lim_{(n-p)\to\infty} \frac{R_{n,p}(P_\infty; z)}{R_{n,p}(K_\infty; z)} = \frac{4}{\pi} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Порівнюючи результат, наведений нижче (теорема 3.2.3), з його відомим аналогами в дійсному випадку (див. [224, гл. 3]), бачимо, що останнє співвідношення є невипадковим.

Нехай $C(\mathbb{T})$, $L_\infty(\mathbb{T})$ і $L(\mathbb{T})$ — простори функцій φ, відповідно, неперервних, істотно обмежених та інтегрованих за Лебегом на $\mathbb{T}$, з нормами

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|, \ \|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|, \ \|\varphi\|_{L(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|\, dt.$$

Якщо $X(\mathbb{T})$ — один з просторів $C(\mathbb{T})$, $L(\mathbb{T})$, або $L_\infty(\mathbb{T})$, то позначатимемо

$$X(\mathbb{T})_+ = \left\{ f \in X(\mathbb{T}) : \widehat{f}(-k) = 0, \ k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Принагідно зауважимо, що згідно з теоремою Голубєва–Привалова [155, с. 202] кожен з просторів $X(\mathbb{T})_+$ являє собою простір граничних значень аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами Коші. Тому коефіцієнти Тейлора–Маклорена таких функцій f збігаються з коефіцієнтами Фур'є їх граничних значень на $\mathbb{T}$, тобто

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Нехай $\psi := \{\psi(k)\}_{k=0}^\infty$ $(\psi(0) = 1)$ — задана послідовність комплексних чисел і H_∞^ψ — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, які можна зобразити у вигляді інтеграла

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \left(\sum_{k=0}^\infty \psi(k)(\overline{w}z)^k \right) \frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.65}$$

у якому φ — деяка функція з $L_\infty(\mathbb{T})_+$ така, що $\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \le 1$.

Зокрема, якщо $\psi(k) = 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то H_∞^ψ — це клас H_∞, який складається з аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$.

Справді, внаслідок рівності

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(w) w^k dw = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.66}$$

маємо, що

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \left(\frac{1}{1 - \overline{w}z} + \frac{w\overline{z}}{1 - w\overline{z}} \right) \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} \frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тому

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\varphi(w)| \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} |dw| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2} |dw| = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Твердження 3.2.1. *Якщо послідовність комплексних чисел* $\psi = \{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\psi(0) = 1$, *є такою, що тригонометричний ряд*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt \tag{3.67}$$

є рядом Фур'є деякої інтегрованої за Лебегом 2π*–періодичної функції* Ψ, *то клас* H_{∞}^{ψ} *складається з аналітичних в* $\mathbb{D}$ *і неперервних в* $\overline{\mathbb{D}}$ *функцій* f, *граничні значення яких на колі* $\mathbb{T}$ *зображуються у вигляді згортки*

$$f(e^{it}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \Psi(t - \theta) d\theta, \tag{3.68}$$

де φ *— деяка функція з* $L_{\infty}(\mathbb{T})_+$ *і* $\|\varphi\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \le 1$.

Справді, внаслідок умови (3.66) і теореми Фубіні інтеграл (3.65) можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \varphi(w) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) (\overline{w}z)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) (w\overline{z})^k \right) \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \rho^k \cos k(t - \theta) \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(t-\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(t-\tau)+\rho^2}d\tau, \tag{3.69}$$

де $z=\rho e^{it}$ і

$$F(\tau) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})\Psi(\tau-\theta)d\theta.$$

Згідно з відомим твердженням (див., наприклад, [216, с.138]) функція F є неперервною на дійсній осі 2π–періодичною функцією. Тому інтеграл (3.69) є інтегралом Пуассона неперервної функцій, а за теоремою Фату (див., наприклад, [16, с. 154]) має границю $F(t)$, коли точка $z=\rho e^{i\theta}$ прямує до e^{it} в крузі будь-яким шляхом. Отже, функція f неперервно продовжується в замкнений круг $\overline{\mathbb{D}}$ і до того ж $f(e^{it}) := \lim_{z\to e^{it}} f(z) = F(t)$, тобто виконується (3.68).

Наведемо тепер означення класів $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$. Якщо для даної послідовності комплексних чисел $\psi=\{\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $(\psi(0)=1)$ і функції $f\in L(\mathbb{T})_+$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)\widehat{f}(k)e^{ikt}$$

є рядом Фур'є деякої функції $g\in L(\mathbb{T})_+$, то g називають ψ-інтегралом функції f і позначають $\mathcal{J}^{\psi}(f)$ [225] (див., також, книгу [217, с. 261]). Множина ψ-інтегралів всіх функцій $f\in L(\mathbb{T})_+$ позначається через $L^{\psi}(\mathbb{T})_+$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина $L(\mathbb{T})_+$, то символом $L^{\psi}\mathfrak{N}(\mathbb{T})_+$ позначається множина ψ-інтегралів всіх функцій з $\mathfrak{N}$. Покладемо $C^{\psi}(\mathbb{T})_+ = L^{\psi}(\mathbb{T})_+\cap C(\mathbb{T})$.

Якщо для заданої функції $F\in L^{\psi}(\mathbb{T})_+$ вказано таку функцію $f\in L(\mathbb{T})_+$, що майже скрізь на $\mathbb{T}$ виконується рівність $F(e^{it})=\mathcal{J}^{\psi}f(e^{it})$, то функцію f називають ψ-похідною функції F і позначають $f=F^{\psi}$.

В цьому підрозділі послідовність ψ береться такою, що послідовності $\psi_1 := \{\operatorname{Re}\psi(k)\}_{k=0}^{\infty}$ і $\psi_2 := \{\operatorname{Im}\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ є додатними, опуклими і спадними до нуля (множину всіх таких функцій ψ_i згідно з [216] позначатимемо через $\mathfrak{M}$). За таких обмежень згідно з відомим твердженням (див., наприклад, [16, с. 100]) дійсна і уявна частини ряду (3.67) будуть рядами Фур'є деяких

невід'ємних інтегрованих за Лебегом функцій, а отже, ψ задовольнятиме умови твердження 3.2.1.

Згідно з твердженням 3.2.1 клас $C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}$ складається з функцій, які є звуженням функцій з класу H^{ψ}_{∞} на $\mathbb{T}$, тобто $C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+} = H^{\psi}_{\infty}|_{\mathbb{T}}$. Тому за принципом максимуму справджується рівність

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}} \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| =$$

$$= \sup_{f\in C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}} \|f - V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} =: R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}), \tag{3.70}$$

де

$$C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+} := \left\{ f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+} : \quad \|f^{\psi}\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \le 1 \right\}.$$

Таким чином, задача, яка полягає у знаходженні верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класі H^{ψ}_{∞}, зводиться до знаходження величини $R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+})$ в правій частині рівності (3.70).

Має місце таке твердження.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тоді:*

1) для довільної функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+}$ *і будь-якого многочлена* $P \in \mathcal{P}_{n-p}$ *в кожній точці кола* $\mathbb{T}$, *при* $n, p \in \mathbb{N}, p < n$

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^{\psi} - P)(e^{it}) + \mathcal{O}(1)\psi(n)\|f^{\psi} - P\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{3.71}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* n, p *і* f;

2) якщо існує границя $\Theta := \lim_{n\to\infty} p/n,\ 0 \le \Theta < 1$, *то при* $n \to \infty$

$$R_{n,p}(C^{\psi}_{\infty}(\mathbb{T})_{+}) = \frac{1}{\pi}|\psi(n)| \ln \frac{n}{p} + \mathcal{O}(1)|\psi(n)|, \tag{3.72}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* p *і* n.

З теореми 3.2.3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $\psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$ *і* $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+}$. *Тоді*

для того щоб

$$\|f - V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} = \mathcal{O}(1)|\psi(n)|E_{n-p}(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} \quad \forall\ p, n \in \mathbb{N},\ n > p,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\|V_{n,p}(f^{\psi})\|_{C(\mathbb{T})} = \mathcal{O}(1) \quad \forall\ p, n \in \mathbb{N},\ n > p. \tag{3.73}$$

Зокрема, (3.73) справджується для будь-якої функції $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_{+}$, *якщо* $\inf_{n\in\mathbb{N}} p/n > 0$.

3.2.2. Доведення теорем 3.2.1 і 3.2.3

Для **доведення теореми 3.2.1** зауважимо, що згідно з формулою Коші для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ маємо рівність

$$f(z) - S_k(f)(z) = \frac{z^{k+1}}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)}{w^{k+1}(1-\bar{w}z)}\frac{dw}{w}. \tag{3.74}$$

Застосовуючи p разів формулу (3.74), отримаємо рівності:

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = f(z) - \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f)(z) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}(f(z) - S_k(f)(z)) = \frac{1}{2\pi i p}\int_{\mathbb{T}} f(w)\sum_{k=n-p}^{n-1}\overline{w}^{k+1}z^{k+1}\frac{1}{1-\overline{w}z}\frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{z^{n-p+1}}{2\pi i p}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(w)}{w^{n-p+1}}\frac{1-\overline{w}^{p}z^{p}}{(1-\overline{w}z)^{2}}\frac{dw}{w}. \tag{3.75}$$

Звідси випливає оцінка

$$|f(z) - V_{n,p}(f)(z)| \le \frac{|z|^{n-p+1}}{2\pi p}\int_{\mathbb{T}}\frac{|1-\overline{w}^{p}z^{p}|}{|1-\overline{w}z|^{2}}|dw|.$$

Для функції f_z, яка зображується інтегралом типу Коші (3.62), в якому

$$\varphi_z(w) := w^{n-p+1}\exp\left(-i\arg\left(\frac{1-\overline{w}^{p}z^{p}}{(1-\overline{w}z)^{2}}\right)\right),$$

при даному фіксованому $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність

$$f_z(z) - V_{n,p}(f_z)(z) = \frac{z^{n-p+1}}{2\pi ip} \int_{\mathbb{T}} \frac{|1-\overline{w}^p z^p|}{|1-\overline{w}z|^2} \frac{dw}{w} = \\ = \frac{z^{n-p+1}}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2} dt.$$

Отже,

$$R_{n,p}(K_\infty; z) = \frac{|z|^{n-p+1}}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2} dt.$$

Для аналізу інтеграла в правій частині останньої рівності застосуємо такі міркування (див. доведення леми в [187]).

Добре відомо, що

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \forall\, x \in \mathbb{D}, \tag{3.76}$$

де

$$\alpha_k := \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

За допомогою тотожності

$$\frac{\sqrt{1-x^p}}{1-x} = \frac{1-x^p}{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x^p}}$$

і рівності (3.76) отримуємо розвинення $\forall\, x \in \mathbb{D}$:

$$\frac{\sqrt{1-x^p}}{1-x} = \frac{1-x^p}{1-x} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{pk}\right) =$$

$$= \frac{1-x^p}{1-x} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{1-x^p}{1-x} x^{pk} = \sum_{\nu=0}^{p-1} x^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{\nu=pk}^{p(k+1)-1} x^\nu.$$

Отже, використовуючи рівність Парсеваля, одержуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|1-(|z|e^{-it})^p|}{|1-|z|e^{-it}|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-|z|^p e^{ipt}}}{1-|z|e^{it}} \frac{\sqrt{1-|z|^p e^{-ipt}}}{1-|z|e} dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p-1} |z|^{2\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \sum_{\nu=pk}^{p(k+1)-1} |z|^{2\nu} = \frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 |z|^{2pk} \right) =$$

$$= \frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-|z|^p e^{-it}|} dt == \frac{2}{\pi} \frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2} \mathbf{K}(|z|^p).$$

Теорему доведено.

Далі нам знадобляться наступні факти.

Лема 3.2.1. *Якщо* $n \to \infty$ *і* $0 \le \theta < 1$, *то*

$$\sup \left\{ \|V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} : f \in H_\infty \right\} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n}{p} + O(1), \tag{3.77}$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно* p *і* n.

Це твердження при $p = 1$ доведене Е. Ландау, а при $1 \le p < n$ — С.Б. Стєчкіним (див. виноску в [241]).

Лема 3.2.2. *Нехай* $n, p \in \mathbb{N}$, $p < n$ *і функція* $\lambda_{n,p}(v)$ *визначається формулою*

$$\lambda_{n,p}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le n-p, \\ (n-v)/p, & n-p \le v \le n, \\ 0, & v \ge n. \end{cases} \tag{3.78}$$

Тоді, якщо $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *і* ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}$, *то для довільної функції* $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ *в кожній точці кола* $\mathbb{T}$

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \widehat{\tau}_{n,p}(\theta)\, d\theta, \tag{3.79}$$

де

$$\widehat{\tau}_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \lambda_{n,p}(v)) \psi(v) \cos \theta v \, dv$$

— *косинус–перетворення Фур'є функції* $\tau_{n,p}(v) := (1 - \lambda_{n,p}(v))\psi(v)$.

Доведення цього твердження зводиться до перевірки сумовності функції $\widehat{\tau}_{n,p}$ на $\mathbb{R}$ і застосування теореми з [225] і [217, с. 281]. Але, згідно з [224, с. 88] включення $\widehat{\tau}_{n,p} \in L(\mathbb{R})$ має місце для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$.

Лема 3.2.3. *Нехай функцій f є аналітичною і обмеженою в $\mathbb{D}$. Тоді*

$$V_{n,p}(f)(z) = \frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ze^{i\theta})(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} \quad \forall\ z \in \overline{\mathbb{D}},$$

де при $z \in \mathbb{T}$ під знаком інтеграла розуміються кутові граничні значення функції f.

Доведення. Інтегруючи частинами, легко довести рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} = k\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta\cos(n-p)\theta\ \frac{d\theta}{\theta} +$$

$$+(n-p)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(n-p)\theta\cos k\theta\ \frac{d\theta}{\theta} - k\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta\cos n\theta\ \frac{d\theta}{\theta} -$$

$$-n\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin n\theta\cos k\theta\ \frac{d\theta}{\theta} = -\begin{cases} \pi p, & 0 \le k \le n-p, \\ \pi(n-k), & n-p \le k \le n, \\ 0, & n \le k. \end{cases}$$

Використовуючи останній факт і очевидну рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} = 0,$$

отримаємо формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\ \frac{d\theta}{\theta^2} = -\begin{cases} \pi p, & 0 \le k \le n-p, \\ \pi(n-k), & n-p < k < n, \\ 0, & n \le k. \end{cases} \qquad (3.80)$$

Звідси для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ze^{i\theta})(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)z^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}(\cos n\theta - \cos(n-p)\theta)\ \frac{d\theta}{\theta^2} = V_{n,p}(f)(z).$$

Отримаємо нарешті асимптотичні рівності (3.71) і (3.72). Використані нижче міркування належать В.В. Савчуку та М.В. Савчук і були опубліковані в спільній роботі [188].

Доведення теореми 3.2.3. Покладемо

$$\lambda^*_{n,p}(v) := \begin{cases} 1, & 0 \le v < n-p, \\ 1 - \frac{v-n+p}{p} \cdot \frac{\psi(n)}{\psi(v)}, & n-p \le v < n, \\ 0, & n \le v, \end{cases} \tag{3.81}$$

$$\tau^*_{n,p}(v) := (1 - \lambda^*_{n,p}(v))\psi(v),$$

і

$$\mu_{n,p}(v) := \tau_{n,p}(v) - \tau^*_{n,p}(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0; n-p] \cup [n; \infty), \\ \frac{v-n+p}{p}\ (\psi(v) - \psi(n)), & v \in [n-p; n]. \end{cases}$$

Тоді формулу (3.79) можна переписати у вигляді

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = r^*_{n,p}(f)(e^{it}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)\ d\theta, \tag{3.82}$$

де

$$r^*_{n,p}(f)(e^{it}) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)\ d\theta. \tag{3.83}$$

Покажемо, що

$$r^*_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi)(e^{it}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi(e^{i(t+\theta)}) \int\limits_{n}^{\infty} \psi'(v)\sin\theta v\, dv\, \frac{d\theta}{\theta}. \quad (3.84)$$

Для цього розглянемо рівність

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \tau^*_{n,p}(v)\cos\theta v\, dv =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi p}\int\limits_{n-p}^{n}(v-n+p)\cos\theta v\, dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\psi(v)\cos\theta v\, dv.$$

Інтегруючи частинами кожен з інтегралів і виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta) = \frac{\psi(n)}{\pi p}\frac{\cos n\theta - \cos(n-p)\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\pi\theta}\int\limits_{n}^{\infty}\psi'(v)\sin\theta v\, dv. \quad (3.85)$$

Підставляючи знайдене значення $\widehat{\tau}^*_{n,p}(\theta)$ в (3.83) і використовуючи лему 3.2.3, отримуємо (3.84).

Покладемо

$$I_1 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}_{n,p}(\theta)|\, d\theta,\ I_2 := \int\limits_{0}^{\infty}\left|\int\limits_{n}^{\infty}\psi'(v)\sin\theta v\, dv\right|\frac{d\theta}{\theta}.$$

Тоді формулу (3.82) з урахуванням (3.84) можна записати у вигляді співвідношення

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi)(e^{it}) + O(1)(I_1 + I_2). \quad (3.86)$$

Для оцінки I_1 зауважимо, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і $0 < \varepsilon \le 1$ виконується нерівність $\psi(\varepsilon\sigma) \le K\psi(\sigma), \quad \sigma \ge 1/\varepsilon$, (див. [216, с. 175]). Тому на підставі співвідношення (3.1.51) з [224, с. 135] одержуємо оцінку

$$I_1 \le C(\psi_1(n) + \psi_2(n)) \le 2M|\psi(n)|,$$

де C — константа, залежна тільки від ψ.

Оцінка величини I_2 знайдена в [216, с. 223]:

$$I_2 \le K(\psi_1(n) + \psi_2(n)) \le 2K|\psi(n)|,$$

де K — константа, залежна тільки від ψ.

З урахуванням цих фактів співвідношення (3.86) набуває вигляду

$$f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it}) = -\psi(n)V_{n,p}(f^\psi)(e^{it}) + O(1)\psi(n),$$

що й доводить (3.71) для випадку, коли $P = 0$.

Загальний випадок випливає з доведеного на підставі таких міркувань. Нехай

$$P(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-p} a_k e^{ikt} \in \mathcal{P}_{n-p}.$$

Тоді функція

$$F(e^{it}) := \frac{f(e^{it}) - \sum_{k=0}^{n-p} \psi(k) a_k e^{ikt}}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}}$$

належить класові $C^\psi(\mathbb{T})_+$ і тому для неї виконується (3.71). До того ж,

$$F(e^{it}) - V_{n,p}(F)(e^{it}) = \frac{f(e^{it}) - V_{n,p}(f)(e^{it})}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}}$$

і

$$V_{n,p}(F^\psi)(e^{it}) = \frac{V_{n,p}(f^\psi - P)(e^{it})}{\|f^\psi - P\|_{C(\mathbb{T})}}.$$

Тут покладається $0/0 = 0$.

Друга частина теореми є наслідком співвідношень (3.71) і (3.77).

Справді,

$$R_{n,p}(C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)| \sup_{f \in C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+} \|V_{n,p}(f^\psi; \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} + O(1)|\psi(n)|, \qquad (3.87)$$

а згідно з лемою 3.2.1 при $n \to \infty$

$$\sup_{f \in C^\psi_\infty(\mathbb{T})_+} \|V_{n,p}(f^\psi; \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} =$$

$$= \sup\left\{\|V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})} : f \in H_\infty\right\} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{n}{p} + O(1). \tag{3.88}$$

Тому, об'єднавши співвідношення (3.87) і (3.88) отримуємо формулу (3.72).

Теорему доведено.

3.3. Наближення лінійним методом спеціального вигляду класів аналітичних функцій

Нехай $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ — множини $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій $f \in L$, визначені у підрозділі 3.1.4 (див. означення 3.1.3). Нехай далі L_p, $1 \leq\leq \infty$ — простори 2π-періодичних інтегрованих за Лебегом функцій $f(x)$, які мають скінченну норму

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \begin{cases} \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Узявши в ролі $\mathfrak{N}$ одиничні кулі просторів L_p, $1 \leq p \leq \infty$:

$$U_p^0 = \{\varphi \in L_p^0 : \ \|\varphi\|_p \leqslant 1\}, \ \ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

покладемо $L_\beta^\psi U_p^0 = L_{\beta,p}^\psi$ $(C_\beta^\psi U_p^0 = C_{\beta,p}^\psi)$.

В [216, с. 135] показано, що у випадку, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi_\beta(t)$, то функції $f(x)$ з множини L_β^ψ майже при всіх x можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\beta^\psi(x-t)\Psi_\beta(t)\ dt. \tag{3.89}$$

У цьому підрозділі будемо вважати, що послідовності $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$

і задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q,\qquad q\in[0;1). \tag{3.90}$$

Множину таких послідовностей будемо позначати через $\mathcal{D}_q$ [226]. У цьому випадку елементами множин C^{ψ}_{β} є 2π-періодичні функції $f(x)$, які можуть бути регулярно продовжені у смугу $|\mathrm{Im}\ z|\le \ln 1/q$ комплексної площини (див. [216, с. 289]).

Важливим прикладом ядер, послідовності коефіцієнтів $\psi(k)$ яких належать множині $\mathcal{D}_q$, є ядра Пуассона:

$$P^{q}_{\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\qquad q\in(0;1),\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{3.91}$$

У цьому випадку (коли $\psi(k)=q^k,\ k\in\mathbb{N},\ q\in(0;1)$) для зручності покладають $L^{\psi}_{\beta,p}=L^{q}_{\beta,p}$ $(C^{\psi}_{\beta,p}=C^{q}_{\beta,p})$.

Кожній функції f із класу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ поставимо у відповідність тригонометричні поліноми $U^{*}_{n-1}(f;x)=U^{*}_{n-1}(\psi;\beta;f;x)$ вигляду

$$U^{*}_{n-1}(f;x)=A_0+\sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\lambda^{(n)}_k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+$$

$$+\nu^{(n)}_k(a_k\sin kx-b_k\cos kx)\Big\}, \tag{3.92}$$

де $a_k=a_k(f^{\psi}_{\beta})$, $b_k=b_k(f^{\psi}_{\beta})$, $k=1,2,...$ — коефіцієнти Фур'є функції f^{ψ}_{β}, а числа $\lambda^{(n)}_k=\lambda^{(n)}_k(\psi;\beta)$ і $\nu^{(n)}_k=\nu^{(n)}_k(\psi;\beta)$, $k=1,...,n-1,n\in\mathbb{N}$ означено рівностями

$$\lambda^{(n)}_k=(\psi(k)-\psi(2n-k)-\psi(2n+k))\cos\frac{\beta\pi}{2},\quad k=\overline{1,n-1};$$

$$\nu^{(n)}_k=(\psi(k)-\psi(2n-k)+\psi(2n+k))\sin\frac{\beta\pi}{2},\quad k=\overline{1,n-1}.$$

Зауваження 3.3.1. *Поліноми (3.92) задають лінійний метод наближення, що визначається системами чисел* $\lambda^{(n)}_k$ *і* $\nu^{(n)}_k$, $k=1,...,n-1,n\in\mathbb{N}$.

Цей метод було запроваджено у [196]. У [196] і [197] досліджено певні апроксимаційні властивості вказаного методу на класах $(\psi;\beta)$*-диференційованих функцій. Зокрема, у [197] знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень поліномів* $U^*_{n-1}(f;x)$ *на класах інтегралів Пуассона* $L^q_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, *у рівномірній і інтегральній метриках.*

У цьому підрозділі встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для величин

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p};U^*_{n-1})_C = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(x) - U^*_{n-1}(f,x)\|_C, \tag{3.93}$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};U^*_{n-1})_{L_s} = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}} \|f(x) - U^*_{n-1}(f,x)\|_s, \tag{3.94}$$

для довільних $1 \le p,s \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що при отриманні асимптотичних рівностей для величин (3.93) – (3.94) будуть використані результати роботи [197].

Теорема 3.3.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p};U^*_{n-1})_C = \psi(n)\left(\frac{2^{1/p}\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}}M_{q,p'} + \right.$$

$$\left. + \mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{3.95}$$

де

$$M_{q,p'} = \frac{1-q^2}{2}\left\|\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}\right\|_{p'}, \qquad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{3.96}$$

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & 1 \le p < \infty; \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{3.97}$$

а $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, q, ψ, p *і* β.

Доведення. Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою 2 роботи [196, с. 302] для будь-якої функції $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$, майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце зображення

$$f(x) - U_{n-1}^*(f;x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\Psi_n^*(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t)\Psi_{n,\beta}^*(t)\,dt, \tag{3.98}$$

у якому

$$\Psi_n^*(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\psi(n)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi(n+k)\cos kt$$

і

$$\Psi_{n,\beta}^*(t) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty}\psi(k+2n)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

а функція φ майже скрізь збігається з f_β^ψ.

Зрозуміло, що якщо $f \in C_{\beta,p}^\psi$, то рівність (3.98) виконується для усіх $x \in \mathbb{R}$. Покажемо, що для будь-якої послідовності $\psi \in \mathcal{D}_q$ і $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\Psi_n^*(t) = \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k\cos kt + r_{q,n}^*(t)\right), \tag{3.99}$$

$$|r_{q,n}^*(t)| \le \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)}. \tag{3.100}$$

$$\Psi_{n,\beta}^*(t) = \psi(3n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_{q,\beta,n}^*(t)\right), \tag{3.101}$$

$$|r_{q,\beta,n}^*(t)| \le \frac{\varepsilon_{3n}}{(1-q)(1-q-\varepsilon_{3n})},$$

де величина ε_n визначається співвідношенням (3.97). Для цього використаємо міркування, що застосовувались при доведенні леми 1 роботи [226].

Виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$\Psi_n^*(t) = \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(n+k)}{\psi(n)} \cos kt\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)} \cos kt\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt + r_{q,n}^*(t)\right), \tag{3.102}$$

де

$$r_{q,n}^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)} - q^k\right] \cos kt.$$

Переконаємося у справедливості оцінки (3.100). Очевидно, що

$$|r_{q,n}^*(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{q}_k - q^k|, \quad \tilde{q}_k \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\psi(n+j+1)}{\psi(n+j)}. \tag{3.103}$$

Якщо, наприклад, $\tilde{q}_k - q^k \ge 0$, то

$$|\tilde{q}_k - q^k| = \tilde{q}_k - q^k \le \prod_{j=0}^{k-1}(q+\varepsilon_n) - q^k = (q+\varepsilon_n)^k - q^k.$$

Якщо ж $\tilde{q}_k - q^k < 0$, то внаслідок опуклості функції $t^k, k = 1, 2, ...,$

$$|\tilde{q}_k - q^k| = q^k - \tilde{q}_k \le q^k - \prod_{j=0}^{k-1}(q-\varepsilon_n) = q^k - (q-\varepsilon_n)^k \le (q+\varepsilon_n)^k - q^k.$$

Отже, завжди

$$|\tilde{q}_k - q^k| \le (q+\varepsilon_n)^k - q^k. \tag{3.104}$$

Оскільки послідовність ε_n монотонно спадає до нуля, то починаючи з деякого номера n_0 буде виконуватись нерівність $\varepsilon_n < 1 - q$. Отже, враховуючи співвідношення (3.103) і (3.104), для $n \ge n_0$ отримуємо

$$|r_{q,n}^*(t)| \le \sum_{i=1}^{\infty} (q+\varepsilon_n)^k - q^k = \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)},$$

і оцінка (3.100), а разом з нею і співвідношення (3.99), доведені. Співвідношення (3.101) доводиться аналогічно.

Рівності (3.99) і (3.101), разом з очевидною оцінкою

$$\frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)} = O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2},$$

дозволяють переписати зображення (3.98) у вигляді

$$f(x) - U^*_{n-1}(f;x) = \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt-$$

$$-\frac{\psi(3n)}{\pi q^n}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x-t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt + \mathcal{O}(1)\frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2}, \tag{3.105}$$

де

$$\mathcal{P}_q(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k\cos kt, \quad \mathcal{P}_{q,\beta,n}(t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

Звідси, внаслідок інваріантості множини U^0_p відносно зсуву аргументу, для довільного $1 \le p \le \infty$ маємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p};U^*_{n-1})_C = \frac{2\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U^0_p}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_C +$$

$$+\mathcal{O}(1)\left(\frac{\psi(3n)}{\pi q^n}\sup_{\varphi\in U^0_p}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_C + \frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{3.106}$$

Для завершення доведення теореми 3.3.1 залишилось скористатися результатами роботи [197, с. 978 – 980], згідно з якими

$$\sup_{\varphi\in U^0_p}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)-\lambda\right\|_{p'} =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\|\mathcal{P}_q(t)\|_{p'} + \mathcal{O}(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}}, \tag{3.107}$$

де

$$\sigma(p)=\begin{cases}1, & p=\infty,\\ 2, & 1\le p<\infty;\end{cases}$$

і

$$\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_C=\mathcal{O}(1)\frac{q^n}{1-q}.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.3.2. *Нехай* $1\le p\le\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_q$, $0<q<1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді при* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};U^*_{n-1})_{L_p}=\psi(n)\left[\frac{2^{1-1/p}\|\cos t\|_p}{\pi^{1+1/p}}M_{q,p}+\right.$$

$$\left.+\mathcal{O}(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right],\tag{3.108}$$

де величини $M_{q,p}$ *та* $\sigma(p)$ *визначаються за допомогою формул (3.96), а величина* $\mathcal{O}(1)$ *рівномірно обмежена по* n,q,ψ,p *і* β.

Доведення. Виходячи із зображення (3.105), для довільного $1\le s\le\infty$ можемо записати рівність

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};U^*_{n-1})_{L_p}=\frac{2\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\Big(nt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p+$$

$$+\mathcal{O}(1)\left(\frac{\psi(3n)}{\pi q^n}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_p+\frac{\psi(n)\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right).\tag{3.109}$$

Використовуючи тепер результати роботи [197, с. 981 – 982], згідно з якими

$$\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\Big(nt-\frac{\beta\pi}{2}\Big)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p=$$

$$=\frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\|\mathcal{P}_q(t)\|_p+\mathcal{O}(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p')}},\tag{3.110}$$

і

$$\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\;dt\right\|_p=\mathcal{O}(1)\frac{q^n}{1-q},$$

переконуємося у справедливості формули (3.108).

Теорему доведено.

Нехай

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

— оператор Лапласа в полярних координатах і $\Delta^m:=\Delta(\Delta^{m-1})$. Як зазначено в монографії [244, с. 256 – 257], розв'язок диференціального рівняння $\Delta^m U(q;x)=0,$ із заданими граничними умовами

$$U(q;x)\Big|_{q=1}=f(x),\qquad \frac{\partial^k}{\partial q^k}U(q;x)\Big|_{q=1}=0,\quad k=1,2,\ldots,m-1,$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, для довільного натурального числа m може бути поданий у вигляді

$$U(q;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)P_{q,\beta}(m;t)\;dt.$$

Тут

$$P_{q,\beta}(m;t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_m(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),$$

$$\psi_m(k)=q^k\sum_{j=0}^{m-1}(1-q^2)^j\prod_{l=0}^{j-1}(k+2l),\tag{3.111}$$

Величини $P_{q,\beta}(m;t)$ називають полігармонічними ядрами Пуассона. Для коефіцієнтів $\psi(k)=\psi_m(k),\ m=2,3,\ldots,$ вигляду (3.111) можемо записати

$$\varepsilon_k=\sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi_m(k+1)}{\psi_m(k)}-q\right|=$$

$$= q \sup_{k\geq n} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!2^j} \prod\limits_{l=0}^{j-1}(k+2l)\left(\prod\limits_{l=0}^{j-1} \frac{k+1+2l}{k+2l} - 1\right)}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!2^j} \prod\limits_{l=0}^{j-1}(k+2l)} \leq$$

$$\leq q \sup_{k\geq n} \left(\prod_{l=0}^{m-2} \frac{k+1+2l}{k+2l} - 1 \right) \leq \frac{(2m-3)q}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.112}$$

При $m = 1$ маємо $\psi_m(k) = q^k$ і, отже,

$$\varepsilon_n \equiv 0, \quad m = 1. \tag{3.113}$$

З теорем 3.3.1 та 3.3.2 і співвідношень (3.112) – (3.113) одержуємо таке твердження.

Наслідок 3.3.1. *Нехай $1 \leq p \leq \infty$ і класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ породжуються послідовностями $\psi(k) = \psi_m(k)$ (3.111). Тоді при $n \to \infty$ виконуються асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,p}; U^*_{n-1})_C = q^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!2^j} \prod_{l=0}^{j-1}(n+2l)\times$$

$$\times \left(\frac{2^{1/p} \| \cos t \|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}} M_{q,p'} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{mq}{n(1-q)^{\sigma(p';m)}} \right) \right), \tag{3.114}$$

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; U^*_{n-1})_C = q^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(1-q^2)^j}{j!2^j} \prod_{l=0}^{j-1}(n+2l)\times$$

$$\times \left(\frac{2^{1-1/p} \| \cos t \|_{p}}{\pi^{1+1/p}} M_{q,p} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{mq}{n(1-q)^{\sigma(p;m)}} \right) \right), \tag{3.115}$$

в яких $p' = p/(p-1)$,

$$\sigma(p;m) = \begin{cases} 1, & m = 1,\ p = 1, \\ 2, & m = 1,\ 1 < p \le \infty, \\ 2, & m = 2, 3, \dots,\ 1 \le p \le \infty, \end{cases}$$

$M_{q,p}$ *та* $M_{q,p'}$ *визначаються рівністю (3.96), а* $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

При $m = 1$ формули (3.114) і (3.115) одержано у праці [197, с. 977, 980, 981].

3.4. Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій

Традиційно для наближення 2π-періодичних функцій дійсної чи комплексної змінних використовуються агрегати, які будуються на основі частинних сум рядів Фур'є за тригонометричною системою або ж прямокутні лінійні середні рядів Фур'є. Вибір у ролі базису тригонометричної системи $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ є цілком природнім і виправданим. Для багатьох класів 2π–періодичних функцій, як це засвідчують результати про поперечник, такий базис є найкращим в тому розумінні, що лінійна оболонка, натягнута на нього є екстремальним підпростором для колмогорівського поперечника (див., наприклад, [153, 245]).

У випадку наближення аналітичних функцій класу Гарді ситуація мало чим відрізняється від 2π-періодичного випадку. Тут природно у ролі базису брати систему степенів $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, яка на одиничному колі $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ збігається з тригонометричною системою $\{e^{ikt}\}_{k=0}^{\infty}$. Але у випадку наближення аналітичних чи гармонічних функцій на компактних множинах всередині одиничного круга апроксимативні властивості степеневої системи погіршуються. Як показано в [185, 186] в такому випадку оптимальною системою в сенсі колмогоровського поперечника є система Такенаки–Мальмквіста раціональних функцій з полюсами зовні одиничного кола. З огляду на цей та інші

відомі факти дослідження апроксимативних властивостей системи Такенаки-Мальмквіста як для класів аналітичних так і 2π–періодичних функцій представляє значний науковий інтерес.

В цьому підрозділі досліджено раціональні наближення класів 2π-періодичних функцій, які зображуються згортками функцій з $L_p(0, 2\pi]$ з фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенака-Мальмквіста. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень з фіксованими полюсами для функцій із зазначених класів. Наші дослідження у цьому напрямку стали поширенням ідей і методів роботи [182].

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, причому $a_k = 0$ при $k = 0,\ k \geq n+1$. Розглянемо систему раціональних функцій

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_k(z) = \sqrt{\frac{1-|a_k|^2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\overline{a}_k z} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-a_j}{1-\overline{a}_j z}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.116)$$

Система вигляду (3.116) була побудована у працях [115, 242]. Як показано в [67], ця система є ортонормованою на одиничному колі, тобто

$$\int\limits_{|\xi|=1} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi}_m(\xi)\ |d\xi| = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

При цьому, також, виконуються рівності

$$\int\limits_{|\xi|=1} \varphi_k(\xi)\varphi_m(\xi)\ |d\xi| = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots\ .$$

У свою чергу, система тригонометричних раціональних функцій [182]

$$\rho_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \rho_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\ \varphi_k(e^{it}),\ \tau_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Im}\ \varphi_k(e^{it}),\ k \in \mathbb{N}, \quad (3.117)$$

також буде ортонормованою на $[0;2\pi]$, тобто

$$\int\limits_0^{2\pi} \rho_k(t)\rho_m(t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} \tau_k(t)\tau_m(t)\ dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Визначимо ядро

$$K_\psi(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)], \tag{3.118}$$

де $\psi(k)$ — довільна незростаюча нуль-послідовність, і розглянемо клас 2π-періодичних функцій, які можуть бути поданими у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \int\limits_0^{2\pi} g(t)K_\psi(x;t)\ dt, \quad g \in L_p, \tag{3.119}$$

де, як звичайно, $L_p = L_p(0;2\pi]$, $p \geq 1$ — простір Лебега вимірних 2π-періодичних функцій g із нормою

$$||g||_{L_p} = ||g||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |g(t)|^p\ dt \right)^{1/p}.$$

Через $C = C(0;2\pi]$ позначимо простір неперервних дійснозначних 2π-періодичних функцій із нормою

$$||f||_C = \sup_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|$$

і покладемо

$$R_n(f) = R_n(f; a_1, a_2, ..., a_n) :=$$

$$= \inf_{\alpha_k,\beta_k} \left\| f(\cdot) - \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\rho_k(\cdot) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\tau_k(\cdot) \right) \right\|_C, \tag{3.120}$$

де $a_k \in \mathbb{D},\ k = 1, 2, \ldots, n$ — набір чисел, які визначають систему (3.116), а α_k, β_k — дійсні коефіцієнти. Величина $R_n(f)$ називається найкращим рівномірним раціональним наближенням.

Через Θ_p позначимо множину послідовностей $\psi(n)$, кожна з яких за-

довольняє такі умови:

1. $\psi(n),\ n = 1, 2, \ldots,$ монотонно не зростає;

2. знайдеться число $\varepsilon > 0$ і додатна стала C такі, що для всіх натуральних $k_1 > k_2 \geq 1,$ виконується нерівність $k_1^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_1) \leq Ck_2^{\frac{1}{p}+\varepsilon}\psi(k_2)$;

Основним результатом підрозділу є наступне твердження.

Теорема 3.4.1. *Нехай $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ і $\psi \in \Theta_p$. Тоді згортка вигляду (3.119) є неперервною періодичною функцією й виконується нерівність*

$$R_n(f) \leq K\psi(n)n^{1/p}.$$

Доведення. Покладемо у співвідношенні (3.117) $k = n + m$ і представимо ортогональні функції у вигляді

$$\rho_k(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{e^{it}-a_j}{1-\overline{a}_j e^{it}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}\left(\prod_{j=0}^{n}\frac{e^{it}-a_j}{1-\overline{a}_j e^{it}}\cdot e^{imt}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\Phi_n(t) + mt\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.121}$$

і аналогічно

$$\tau_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\Phi_n(t) + mt\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.122}$$

де

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{n}\frac{1-|a_j|^2}{1-2|a_j|\cos(\theta - \operatorname{arctg} a_j) + |a_j|^2}\,d\theta.$$

Нехай $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді, враховуючи співвідношення (3.121) – (3.122) і застосовуючи нерівність Мінковського для довільного $m \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$I = \left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n+m}^{\infty}\psi(k)\Big(\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)\Big)\right|^q dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\Phi_n(t) + jt) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\Phi_n(x) + jx) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\Phi_n(t) + jt) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\Phi_n(x) + jx) \right] \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos(\Phi_n(x) - \Phi_n(t) + j(x-t)) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos(\Phi_n(x) - \Phi_n(t)) \cos j(x-t) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sin(\Phi_n(x) - \Phi_n(t)) \sin j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q}.$$

Оскільки $\Phi_n(x) - \Phi_n(t)$ не залежить від m, то

$$I \le \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \sin j(x-t) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \cos jt \right|^q dt \right)^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=m}^{\infty} \psi(n+j) \sin jt \right|^q dt \right)^{1/q} = J_1 + J_2. \tag{3.123}$$

Беручи до уваги рівність

$$\cos jy = D_j(y) - D_{j-1}(y),$$

де

$$D_j(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{j} \cos ky = \frac{\sin \frac{2j+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

— ядро Дірихле порядку j, і застосовуючи перетворення Абеля, знаходимо

$$\sum_{j=m}^{\infty}\psi(n+j)\cos jt = -\psi(n+m)\cdot D_{m-1}(t)+$$

$$+\sum_{j=m}^{\infty}(\psi(n+j)-\psi(n+j+1))D_j(t). \tag{3.124}$$

Використовуючи відому оцінку норми ядра Дірихле (див., наприклад, [217, с. 43])

$$||D_j(\cdot)||_q \le Kj^{1/p},$$

на основі рівності (3.124) отримуємо співвідношення

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\left\|\sum_{j=m}^{\infty}\psi(n+j)\cos jt\right\|_q \le$$

$$\le K\left(\sum_{j=m}^{\infty}\Delta\psi(n+j)j^{\frac{1}{p}}+\psi(n+m)m^{\frac{1}{p}}\right),$$

в якому $1<q\le\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Звідси, беручи до уваги нерівність

$$\sum_{j=m}^{\infty}\Delta\psi(n+j)j^{\frac{1}{p}} < \psi(m+n)m^{\frac{1}{p}},$$

одержану в роботі [198], знаходимо

$$J_1 \le K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \tag{3.125}$$

Враховуючи властивості спряженого ядра Дірихле і використовуючи аналогічні міркування, отримуємо

$$J_2 \le K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \tag{3.126}$$

Підставляючи оцінки (3.125) і (3.126) у співвідношення (3.123), отриму-

ємо нерівність

$$\Big\| \sum_{k=n+m}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(x)\rho_k(t) + \tau_k(x)\tau_k(t)] \Big\|_q \le K\psi(n+m)(n+m)^{1/p}. \qquad (3.127)$$

З нерівності (3.127) з урахуванням означення множини Θ_p (умова 3) випливає, що L_q норма залишку ядра (3.118) може бути зробленою як завгодно малою рівномірно відносно x, і тому з (3.119) і співвідношення

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \int_0^{2\pi} |g(t)||K_\psi(x_1;t) - K_\psi(x_2;t)|\, dt \le$$

$$\le \|g\|_p \|K_\psi(x_1;\cdot) - K_\psi(x_2;\cdot)\|_q,$$

отримуємо, що $f \in C$.

Беручи до уваги визначення найкращого наближення (3.120), використовуючи нерівність Гельдера і оцінку (3.127), знаходимо

$$R_n(f) \le \Big\| \int_0^{2\pi} g(t) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(\cdot)\rho_k(t) + \tau_k(\cdot)\tau_k(t)]\, dt \Big\|_C \le$$

$$\le K\|g\|_p \psi(n+1)(n+1)^{1/p} \le K\psi(n)n^{1/p}, \qquad (3.128)$$

і у випадку $1 < p < \infty$ теорему доведено.

Якщо ж $p = 1$, то використовуючи аналогічні міркування і враховуючи при цьому елементарні нерівності

$$|D_j(\cdot)| \le \frac{1}{2} + j, \quad |\tilde{D}_j(\cdot)| \le j,$$

одержуємо

$$\Big\| \sum_{k=n+m}^{\infty} \psi(k)[\rho_k(\cdot)\rho_k(t) + \tau_k(\cdot)\tau_k(t)] \Big\|_C \le K(n+m)\psi(n+m),$$

звідки випливає, що оцінка (3.128) буде виконуватись і у випадку $p = 1$.

Теорему доведено.

3.5. Доповнення до теореми Ф. Вінера про решето

Теорема Ф. Вінера про решето стверджує, що норма оператора

$$\mathcal{W}_{r,s} : f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j z^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j$$

на просторі обмежених голоморфних в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій дорівнює одиниці, якщо $r < s$. В цьому підрозділі показано, що умова $r < s$ в теоремі Ф. Вінера є остаточною та наведено застосування даної теореми до задач найкращого наближення функцій простору Гарді H_p.

Нехай H_p – простір Гарді голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f із нормою

$$\|f\|_p := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{it})|^p \dfrac{dt}{2\pi} \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

і нехай UH_p — одинична куля в H_p.

Добре відомо, що функції з H_p мають майже у кожній точці кола $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ недотичні граничні значення, які утворюють функцію з $L_p(\mathbb{T})$. Залишивши за граничними значеннями функції $f \in H_p$ те ж саме позначення f, у силу відомих теорем, будемо мати рівність $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$, де $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{T})}$ — стандартна L_p-норма.

Нехай далі $\{\widehat{f}_j\}_{j=0}^{\infty}$ — послідовність коефіцієнтів Тейлора голоморфної в $\mathbb{D}$ функції f, тобто $\widehat{f}_j := f^{(j)}(0)/(j!)$.

Г. Бор [25] в своїх міркуваннях використав елегантний прийом, авторство якого приписав Ф. Вінеру (див. історичні коментарі в [24]): *якщо* f — *функція з* UH_∞, *то функція*

$$F(z) := \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} f(e^{i2\pi k/s} z^{1/s}) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js} z^j, \quad s \in \mathbb{N},$$

також належить UH_∞.

Згодом О. Сас [240, s. 172] розвинув прийом Вінера, зауваживши, що для функції $f \in UH_\infty$ функція

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) := \frac{1}{sz^{r/s}} \sum_{k=0}^{s-1} e^{i2\pi k(s-r)/s} f(e^{i2\pi k/s} z^{1/s}) = \tag{3.129}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+, s \neq 0,$$

за умови $r < s$ також належить UH_∞.

Зафіксуємо числа $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, і розглянемо перетворення $\mathcal{W}_{r,s}(f)$ як лінійний оператор, визначений на множині всіх голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій правилом

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j, \quad r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0,$$

де при $js + r < 0$ покладаємо $\widehat{f}_{js+r} = 0$.

Дію оператора $\mathcal{W}_{r,s}$ на голоморфну функцію, запозичуючи термінологію з аналітичної теорії чисел, природно назвати *просіюванням* коефіцієнтів її ряду Тейлора, а сам оператор — *решетом* порядку r з розміром вічка s.

Нормою оператора $\mathcal{W}_{r,s}$, як оператора, що діє з H_p в H_p, є число

$$\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} := \sup\{\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p : f \in UH_p\}.$$

Неважко зрозуміти, що по суті Ф. Вінер і О. Сас довели таке твердження.

Теорема 3.5.1. *Для будь-яких* $r, s \in \mathbb{Z}_+$ *таких, що* $s \geq r+1$ *справджується рівність*

$$\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1. \tag{3.130}$$

Далі описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність (3.130). А саме, ми покажемо, що умова $s \geq r + 1$ в теоремі 3.5.1 є не тільки достатньою, а й необхідною.

Слід зазначити, що перетворення типу оператора $\mathcal{W}_{r,s}$ (решето) було

відоме ще задовго до роботи Г. Бора [25]. Вперше в явному вигляді воно з'явилося, мабуть, в 1837 році у роботі Г. Діріхле [74, s. 315 – 342] про розподіл простих чисел в арифметичній прогресії (див. сучасний виклад в [125, ch. 4]).

Стосовно ж голоморфних функцій теорема Вінера про норму $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty}$ найчастіше використовується в задачах про оцінки коефіцієнтів Тейлора функцій з UH_∞ (див. бібліографію в [24]).

Ми помітили, що норми операторів $\mathcal{W}_{r,s}$ на просторах голоморфних функцій в крузі $\mathbb{D}$ за тих чи інших співвідношень між числами r і s збігаються з основними константами в багатьох екстремальних задачах теорії наближень. Відтак обчислення таких норм становить певний інтерес, зокрема, для теорії наближень.

В підтвердження сказаного наведемо зараз декілька прикладів у вигляді відомих тверджень, а в другій частині наведемо декілька нових застосувань теореми Ф. Вінера до задачі про найкращі наближення алгебраїчними многочленами в крузі $\mathbb{D}$.

Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $S_r(f)(z) := \sum_{j=0}^{r} \widehat{f}_j z^j$ — частинна сума ряду Тейлора функції f. Тоді

$$\mathcal{W}_{r,-1}(f)(z) = z^r S_r(f)\left(\frac{1}{z}\right)$$

і

$$\mathcal{W}_{r,1}(f)(z) = z^{-r}(f(z) - S_{r-1}(f)(z)).$$

Таким чином

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_p} = \sup\{\|S_r(f)\|_p : f \in UH_p\}$$

тобто $\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_p}$ — це відомі константи Лебега–Ландау, а $\|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_p}$ — це точні константи в нерівності Лебега:

$$\|f - S_{r-1}(f)\|_p \le \|\mathcal{W}_{r,r+1}\|_{H_p} E_r(f)_p,$$

де $E_r(f)_p := \inf\{\|f - P\|_p : P \in \mathcal{P}_{r-1}\}$ — найкраще наближення функції $f \in H_p$ множиною $\mathcal{P}_{r-1}$ алгебраїчних многочленів степеня $\le r-1$, $E_0(f)_p := \|f\|_p$.

Твердження 3.5.1. *[104] Нехай* $r \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_\infty} = 1 + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \right)^2 .$$

При $r \to \infty$ *справджуються асимптотичні рівності*

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_\infty} = \|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty} + O(1) = \frac{1}{\pi} \ln r + O(1) \quad (r \to \infty).$$

З твердження 3.5.1, зокрема, випливає, що послідовності $\{\|\mathcal{W}_{r-1,-1}\|_{H_\infty}\}_{r=1}^{\infty}$ і $\{\|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty}\}_{r=1}^{\infty}$ при $r \to \infty$ зростають з однаковою швидкістю. Однак певна комбінація операторів $\mathcal{W}_{r-1,-1}$ і $\mathcal{W}_{r,1}$ може мати норму 1, як це показує наступне твердження.

Нехай $\mathcal{W}^*_{r,s}$ — лінійний оператор, який діє за правилом $\mathcal{W}^*_{r,s}(f)(z) = \overline{z}\mathcal{W}_{r,s}(f)(\overline{z})$.

Твердження 3.5.2. *[48, 49] Для кожного* $r \in \mathbb{N}$

$$\|\mathcal{W}^*_{r-1,-1} + \mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty} = 1.$$

З твердження 3.5.2 випливає такий важливий факт: *для будь-яких* $f \in UH_\infty$, $z \in \mathbb{D}$ *і* $r \in \mathbb{N}$

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} (1 - |z|^{2(r-j)}) \widehat{f}_j z^j \right| =$$

$$= |z|^r \left| \left(\mathcal{W}^*_{r-1,-1} + \mathcal{W}_{r,1} \right)(f)(z) \right| \le |z|^r,$$

причому рівність досягається для функції $f(z) = z^r$.

Звідси у свою чергу випливає, що для всіх z таких, що $|z| = \rho$ при фіксованому $\rho \in [0, 1)$, і кожному $r \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$\inf \left\{ \sup \left\{ \left| f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_{j,r} \widehat{f}_j z^j \right| : f \in UH_\infty \right\} : \lambda_{j,r} \in \mathbb{C} \right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|f(z) - \sum_{j=0}^{r-1}(1-\rho^{2(r-j)})\widehat{f}_j z^j\right| : f \in UH_\infty\right\} = \rho^r,$$

тобто, нескінченна нижньотрикутна числова матриця $A^* = \left(1-\rho^{2(r-j)}\right)$, $r \in \mathbb{N}, j = 0,1,\ldots,r-1$ породжує найкращий лінійний метод рівномірного наближення класу UH_∞ на концентричних колах радіуса $\rho \in [0,1)$.

Основний результат цього підрозділу міститься в такому твердженні.

Теорема 3.5.2. *Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$ і $s \in \mathbb{N}$. Тоді:*

1) для того, щоб $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$, необхідно і достатньо, щоб $s \geq r+1$;

2) якщо $s \geq r+1$, то $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} = 1$ для будь-яких $p \geq 1$.

Доведення. *1) Необхідність.* Оскільки для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-irt}\left(1 + e^{-its}z + e^{-it2s}z^2 + \cdots\right)\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{e^{-irt}}{1-e^{-its}z}\frac{dt}{2\pi}, \tag{3.131}$$

то

$$1 = \|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} \geq \sup\{|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)| : f \in UH_\infty\} =$$

$$= M_{r,s}(|z|) \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

де

$$M_{r,s}(\rho) := \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{e^{-irt}}{1-e^{-its}\rho}\frac{dt}{2\pi}\right| : f \in UH_\infty\right\}.$$

З другого боку за теоремою двоїстості (див., наприклад, [43, с. 188])

$$M_{r,s}(\rho) = \min\left\{\left\|\frac{1}{1-e^{-its}\rho} + e^{irt}g(\rho,e^{it})\right\|_{L_1} : g(\rho,\cdot) \in H_1^0\right\},$$

де L_1–норма береться по e^{it}, а мінімум досягається для деякої, але єдиної функції $e^{it} \mapsto g^*(\rho,e^{it})$, $t \in [0,2\pi]$, з простору $H_1^0 := \{f \in H_1 : \widehat{f}_0 = 0\}$.

Тому

$$1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 - e^{-its}\rho} + e^{irt} g^*(\rho, \cdot) \right) \frac{dt}{2\pi} \leq M_{r,s}(\rho) \quad \forall\ \rho \in [0,1).$$

Отже, $M_{r,s}(\rho) = 1$ для всіх $\rho \in [0,1)$.

Звідси випливає, що для будь-якого $\rho \in [0,1)$

$$\min \left\{ \left\| \frac{1}{1 - e^{-its}\rho} + g\left(\rho, e^{it}\right) \right\|_{L_1} : g(\rho, \cdot) \in H_1^0 \right\} = 1,$$

де мінімум досягається для єдиної функцій $e^{it} \mapsto e^{irt} g^*(\rho, e^{it})$. Але остання рівність згідно з теоремою 2 в [184] тягне за собою той факт, що екстремальна функція, яка реалізує мінімум має вигляд

$$e^{irt} g^*(\rho, e^{it}) = \frac{1}{1 - e^{its}\rho} - 1,$$

тобто

$$g^*(\rho, e^{it}) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j e^{ij(s-r)t}. \tag{3.132}$$

Оскільки $g^*(\rho, \cdot) \in H_1^0$, тобто ряд Фур'є її граничних значень має додатний спектр, то в розкладі (3.132) необхідно має бути $s \geq r + 1$.

Достатність. Якщо $s \geq r + 1$ то функція $w \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j w^{ij(s-r)}$ належить H_1^0 для будь-якого $z \in \mathbb{D}$. Тому рівність (3.131) для будь-якої функції $f \in UH_\infty$ і будь-якого $z \in \mathbb{D}$ можна переписати у вигляді

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-irt} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-ijs} + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j e^{ijs} \right) \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-irt} \left(\frac{1}{1 - ze^{-is}} + \frac{\overline{z} e^{is}}{1 - \overline{z} e^{is}} \right) \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-irt} \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-is}|^2} \frac{dt}{2\pi}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)| \le \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-is}|^2}\frac{dt}{2\pi} = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{3.133}$$

2) Аналогічно, якщо $f \in H_p$, $p \ge 1$, то за нерівністю Гельдера

$$|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)|^p \le \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-is}|^2}\frac{dt}{2\pi} \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

звідки інтегруванням по концентричних колах радіуса $\rho = |z|$, $\rho \in [0,1)$, одержуємо

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{W}_{r,s}(f)(\rho e^{ix})|^p \frac{dx}{2\pi} \le 1 \quad \forall\, \rho \in [0,1). \tag{3.134}$$

Легко бачити, що співвідношення (3.133) і (3.134) перетворюються в рівності для функції $f(z) = z^r$.

Отже, $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} = 1$ для всіх $p \in [1,\infty]$, що разом доводить достатність умов у пункті 1) і пункт 2).

Теорему доведено.

Зауваження 3.5.1. *За рівністю Парсеваля* $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_2 = 1$ *для будь-яких* $r \in \mathbb{Z}_+$ *і* $s \in \mathbb{N}$.

Зауваження 3.5.2. *При* $r = 0$ *твердження пункту 2) теореми 3.5.2 залишиться правильним при формальній заміні простору* H_p *на будь-який інший банахів простір* X *голоморфних в* $\mathbb{D}$ *функцій з нормою* $\|f\|_X$, *інваріантною відносно повороту аргументу, тобто такою, що* $\|f(e^{i\alpha}\cdot)\|_X = \|f\|_X$ *для будь-якого* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Справді, згідно з (3.129)

$$\|\mathcal{W}_{0,s}(f)\|_X \le \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} \left\| f(e^{i2\pi k/s}\cdot)\right\|_X = \|f\|_X,$$

а рівність у цих співвідношеннях досягається, зокрема, для функції $f(z) = z^s$.

Застосуємо тепер одержані результати до знаходження найкращих наближень.

Теорема 3.5.3. *Нехай* $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді для будь-якого натурального* n

$$E_n(f)_p \ge \sup\left\{\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p : r \ge n, s \ge r+1\right\}. \tag{3.135}$$

При даному $n \in \mathbb{N}$ *в (3.135) має місце рівність, якщо*

$$z^{r^*}\mathcal{W}_{r^*,s^*}(f)(z^{s^*}) = f(z) - S_{n-1}(f)(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.136}$$

де r^*, s^* *– фіксовані,* $r^* \ge n$, $s^* \ge r^*+1$. *При цьому супремум в правій частині досягається при* $r = r^*$ *і* $s = s^*$, *а*

$$E_n(f)_p = \|f - S_n(f)\|_p.$$

Доведення. Візьмемо довільні r і s такі, що $r \ge n$ і $s \ge r+1$. Тоді враховуючи, що $\mathcal{W}_{r,s}(P) = 0$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, згідно з теоремою 3.5.2 одержимо співвідношення

$$\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p = \|\mathcal{W}_{r,s}(f-P)\|_p \le \|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} E_n(f)_p \le E_n(f)_p. \tag{3.137}$$

Беручи супремум в лівій частині цього співвідношення, одержимо нерівність (3.135).

Якщо має місце (3.136), де $r^* \ge n$, $s^* \ge r^*+1$, то згідно з (3.137) маємо:

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_p = \|\mathcal{W}_{r^*,s^*}(f)\|_p \le E_n(f)_p \le \|f - S_{n-1}(f)\|_p,$$

що й доводить непокращуваність оцінки (3.135).

Приклад 3.5.1. *Нехай* $h_r(z,N)$ *– r–та гіперболічна функція порядку*

$N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, *(див., наприклад, [55, p. 57])* тобто

$$h_r(z, N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{jN+r-1}}{(jN+r-1)!}.$$

Тоді, якщо $r \le N$, *то для всіх* $p \in [1, \infty]$

$$E_n(h_r(\cdot, N))_p = \|h_r(\cdot, N)\|_p, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Приклад 3.5.2. *Нехай* $f(z) = e^z$ *і* $1 \le p \le \infty$. *Тоді для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|h_{n+1}(\cdot, n+1)\|_p \le E_n(f)_p \le \|h_{n+1}(\cdot, 1)\|_p.$$

Зокрема,

$$E_n(f)_2 = \|h_{n+1}(\cdot, 1)\|_2$$

і

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(3n+2)!} + \cdots \le E_n(f)_\infty \le$$
$$\le \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots.$$

В наступному твердженні йдеться про те, що многочлен найкращого наближення інваріантного елемента оператора $\mathcal{W}_{r,s}$, тобто такої функції, що $\mathcal{W}_{r,s}(f) = f$ також є інваріантним елементом.

Теорема 3.5.4. *Нехай* $f \in H_p$, $1 < p \le \infty$, *і* $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{js+r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$. *Якщо* $s \ge r+1$, *то послідовність* $\{P_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ *многочленів найкращого наближення функції* f *в просторі* H_p *має вигляд*

$$P_n^*(z) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \ldots, r-1, \ r \in \mathbb{N}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{[(n-r)/s]} c_j z^{js+r}, & n \ge r, \ r \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

де $[\cdot]$ *означає цілу частину числа.*

Зазначимо, що доведення того факту, що $P_n^*(z) = c_0 = \text{const}$ при $r = 0$ і $n = 0, 1, \ldots, s-1$ належить М.З. Двейріну [62].

Доведення. Оскільки $f = \mathcal{W}_{r,s}(f)$, то за теоремою 2 $E_n(f)_p = \|f\|_p$ при $n = 1, 2, \ldots, r$, у випадку коли $r \in \mathbb{N}$. Якщо ж $r \in \mathbb{Z}_+$ і $n \geq r+1$, то згідно з теоремою 3.5.2

$$E_n(f)_p \geq \|\mathcal{W}_{r,s}(f - P_{n-1}^*)\|_p = \|f - \mathcal{W}_{r,s}(P_{n-1}^*)\|_p.$$

З другого боку в силу того, що $\mathcal{W}_{r,s}(P_{n-1}^*) \in \mathcal{P}_{n-1}$ маємо:

$$E_n(f)_p \leq \|f - \mathcal{W}_{r,s}(P_{n-1}^*)\|_p.$$

Отже, многочлен $\mathcal{W}_{r,s}(P_{n-1}^*)$ також є многочленом найкращого наближення функції f. Але оскільки многочлен найкращого наближення в H_p при $1 < p \leq \infty$ є єдиним, то $P_n^* = \mathcal{W}_{r,s}(P_n^*)$.

Наведемо ще одне цікаве застосування теореми 3.5.3 в задачі про побудову многочленів найкращого наближення голоморфної функції, яка має лакунарний ряд Тейлора.

Наступне твердження належить С.Я. Альперу [11]. Тут ми пропонуємо елементарне доведення.

Теорема 3.5.5. *Нехай* $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu}$, *де* $a_\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *а* n_ν *— натуральні числа, такі, що для кожного* $\nu \in \mathbb{N}$ *всі члени числової послідовності* $\{n_{\nu+\mu} - n_{\nu+\mu-1}\}_{\mu=1}^{\infty}$ *мають спільний дільник* $d_\nu \geq n_\nu + 1$. *Тоді якщо* $f \in H_1$, *то при кожному* $p \geq 1$ *многочлен* $S_n(f)$ *степеня* n, $n_{k-1} \leq n < n_k$, *є многочленом найкращого наближення функції* f *в метриці* H_p, *тобто*

$$\|f - S_n(f)\|_p = E_{n+1}(f)_p, \quad \forall\, n \in [n_{k-1}, n_k),\ k \in \mathbb{N},\ n_0 = 1. \tag{3.138}$$

Доведення. Нехай $n_{\nu+\mu} - n_{\nu+\mu-1} = c_{\nu,\mu} d_\nu$, де $(c_{\nu,\mu}), \nu, \mu \in \mathbb{N}$ — нескін-

ченна прямокутна матриця натуральних чисел. Тоді

$$n_{\nu+\mu} = n_\nu + d_\nu \sum_{j=1}^{\mu} c_{\nu,j}, \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}. \tag{3.139}$$

Далі, зафіксувавши довільне число $k \in \mathbb{N}$, при кожному $n \in [n_{k-1}, n_k)$ з урахуванням (3.139) переконуємося в виконанні умови (3.136) при $r^* = n_k$ і $s^* = d_k$:

$$z^{n_k} \mathcal{W}_{n_k,d_k}(f)(z^{d_k}) =$$

$$= a_k z^{n_k} + a_{k+1} z^{c_{k,1}d_k+n_k} + a_{k+2} z^{(c_{k,1}+c_{k,2})d_k+n_k} + \cdots =$$

$$= \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu} = f(z) - S_n(f)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

З огляду на те, що $d_k \geq n_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, а функція f внаслідок умов теореми належить всім просторам H_p, $p \geq 1$, (див., наприклад, [16, с. 690]), за теоремою 3.5.3 одержуємо рівності (3.138).

3.6. Висновки до розділу 3

В цьому розділі:

1. Для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум $V_{n,p}(f;x)$ на класах L_1^{ψ} і $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0'$ знайдено асимптотичні рівності, головні члени яких складаються з двох доданків.

2. Відзначено випадки, коли одержані рівності забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

3. Обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_{∞} аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, які зображуються інтегралами типу Коші.

4. Показано, що задача, яка полягає у знаходженні точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах H_{∞}^{ψ} в замкненому крузі $z \in \overline{\mathbb{D}}$, зводиться до знаходження величини:

$$R_{n,p}(C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+) = \sup_{f \in C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+} \|f - V_{n,p}(f)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

5. Для величини $R_{n,p}(C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+)$, за умови, що послідовності $\{\psi_j(k)\}$, $j = 1, 2$, мають не більш ніж степеневий порядок прямування до нуля, знайдено асимптотичну рівность, яка забезпечує розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для сум Валле Пуссена на класах $C_{\infty}^{\psi}(\mathbb{T})_+$.

6. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень з фіксованими полюсами для функцій із класів 2π-періодичних функцій, які зображуються згортками функцій з $L_p(0, 2\pi]$ з фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста.

7. Встановлено асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для точних верхніх меж відхилень в рівномірній та інтегральних метриках тригонометричних поліномів $U_{n-1}^*(f;x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій,

які визначаються згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера.

8. Описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [175, 188, 190, 199, 224, 274].

Розділ 4

Наближення у просторах функцій, локально сумовних на дійсній осі

Нехай $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$ — множина функцій φ, заданих на дійсній осі $\mathbb{R}$ (і не обов'язково періодичних), які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \Big(\int\limits_a^{a+2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Якщо тепер $\psi(v)$ — функція, неперервна при всіх $v \geq 0$ і β — фіксоване дійсне число, для яких майже при всіх $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \, dv, \tag{4.1}$$

то через $\widehat{L}_\beta^\psi$ [217] позначається множина функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна подати рівністю

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t) \, dt, \tag{4.2}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}_\beta^\psi$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $\widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій з $\widehat{L}_\beta^\psi$ і $\widehat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначають відповідно $\widehat{C}_\beta^\psi$ і $\widehat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

Функцію $\varphi(\cdot)$ у зображенні (4.2) називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $\varphi(\cdot)=f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

У ролі агрегатів наближення для функцій $f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо використовувати оператори вигляду

$$V_{\sigma,c}(f;x)=A_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{4.3}$$

де $\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma,c}\right)(t;\beta)$ перетворення вигляду (4.1) функції $\psi(v)\lambda_{\sigma,c}(v)$, в якому

$$\lambda_{\sigma,c}(v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le c,\\ \frac{\sigma-v}{\sigma-c}, & c\le v\le\sigma,\\ 0, & v\ge\sigma,\end{cases} \tag{4.4}$$

і c — число з проміжку $[0;\sigma)$.

Поряд з $V_{\sigma,c}(f;x)$ будемо також використовувати модифіковані оператори

$$F^{*}_{\sigma}(f;x)=A_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma}\right)(t;\beta)\,dt, \tag{4.5}$$

де $\left(\widehat{\psi\lambda}_{\sigma}\right)(t;\beta)$ перетворення вигляду (4.1) функції $\psi(v)\lambda_{\sigma}(v)$, при чому

$$\lambda_{\sigma}(v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le\sigma-1,\\ 1-(v-\sigma+1)\frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & \sigma-1\le v\le\sigma,\\ 0, & \sigma\le v.\end{cases}$$

Зважаючи на співвідношення (1.23) – (1.24), величини $V_{\sigma,c}(f;x)$ будемо називати *операторами Валле Пуссена* функції $f(x)$, а для величин $F^{*}_{\sigma}(f;x)$ використовувати назву *модифіковані оператори Фур'є* функції $f(x)$.

У цьому розділі знаходяться оцінки норм величин

$$\rho_{\sigma,c}(f;x):=f(x)-V_{\sigma,c}(f;x),\qquad f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta}, \tag{4.6}$$

і

$$\rho_\sigma(f;x) := f(x) - F^*_\sigma(f;x), \qquad f \in \widehat{L}^\psi_\beta, \tag{4.7}$$

в просторах $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$, у випадку, коли функції ψ, що визначають клас $\widehat{L}^\psi_\beta$, прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії.

Зауваження 4.0.1. *Поведінка величин (4.7) на відповідних класах періодичних функцій вперше розглядалась в роботі С.М. Нікольського [142], де ним для верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона в рівномірній метриці були знайдені асимптотичні рівності. Згодом, залишкові члени цих рівностей були уточнені С.Б. Стечкіним [238]. У спільній роботі О.І. Степанця і А.С. Сердюка [227] для величин (4.7) у випадку наближення сумами Фур'є інтегралів Пуассона знайдені оцінки типу Лебега, О.І. Степанець [213] поширив згадані результати Нікольського-Стєчкина на класи $C^q_\beta H_\omega$, $q = e^{-\alpha}$, $H_\omega = \{f \in C : \omega(f;\cdot) \leq \omega(\cdot)\}$, де $\omega(f;\cdot)$ — модуль неперервності функції f, $\omega(\cdot)$ — довільний фіксований модуль неперервності.*

Зауваження 4.0.2. *В періодичному випадку, коли класи $\widehat{L}^\alpha_\beta$ співпадають з множинами L^q_β, $q = e^{-\alpha}$, інтегралів Пуассона (див. монографію [216, с. 301]), поведінка величин верхніх меж відхилень сум Валле-Пуссена на цих множинах вивчалася в роботах [166, 172]. Зокрема, у випадку, коли одночасно $n \to \infty$ і $n - p \to \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, де $p = p(n)$ — параметр методу Валле Пуссена, для цих величин отримано асимптотичні рівності. Для довільних значень параметру p відповідні рівності у рівномірній і інтегральній метриках були одержані А.С. Сердюком [195].*

Результати наступних підрозділів є розвитком ідей і методів із зазначених вище робіт О.І. Степанця і А.С. Сердюка з періодичного випадку на випадок наближення модифікованими операторами Фур'є і операторами Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^\psi_\beta$.

4.1. Наближення операторами Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$

У цьому підрозділі досліджується задача, стосовно оцінки норм величин (4.6) відхилень операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ у випадку, коли

$$\psi(v) = \psi_{\alpha}(v) := \begin{cases} \psi_1(v), & v \in [0;1], \\ e^{-\alpha v}, & v > 1, \end{cases} \tag{4.8}$$

де $\alpha > 0$ — довільне дійсне число, $\psi_1(v)$ — деяка абсолютно неперервна функція, що має похідну $\psi_1'(v)$ обмеженої варіації на відрізку $[0;1]$, і така, що $\psi_1(0)\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$ і $\psi_1(1) = e^{-\alpha}$. В такому разі перетворення (4.1) сумовне і, як показано в [217] (див., також, [224]), $V_{\sigma,c}(f;x)$ належить множині $\mathscr{E}_{\sigma}$ — цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує σ. У цьому випадку $f^{\psi_{\alpha}}_{\beta} := f^{\alpha}_{\beta}$, а для множини $\widehat{L}^{\psi_{\alpha}}_{\beta}$ будемо використовувати позначення $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$.

Нехай

$$W^2 := \Big\{u : \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{(1+|t|)^2}\, dt < \infty\Big\}, \quad W^2_{\sigma} = \{u \in \mathscr{E}_{\sigma} : \quad u \in W^2\},$$

і

$$E_{\sigma}(\varphi)_{\widehat{p}} = \inf_{u \in W^2_{\sigma}} \|\varphi(\cdot) - u(\cdot)\|_{\widehat{p}} \tag{4.9}$$

— величина найкращого наближення функції φ за допомогою цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує σ. Нехай далі

$$E_{\sigma}(\mathfrak{N})_{\widehat{p}} = \sup_{\varphi \in \mathfrak{N}} E_{\sigma}(\varphi)_{\widehat{p}}.$$

З загальних тверджень роботи [217, с. 209], зокрема, випливає, що

$$E_{\sigma}(\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p})_{\widehat{p}} \le Ke^{-\alpha\sigma}, \tag{4.10}$$

де $\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p} = \{f : \ f \in \widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p, \ f^{\alpha}_{\beta} \in W^2, \ \|f^{\alpha}_{\beta}\|_{\hat{p}} \le 1\}$. Співвідношення (4.10) дає оцінку зверху величини найкращого наближення класу $\widehat{L}^{\alpha,1}_{\beta,p}$ за допомогою цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує σ.

Основний результат підрозділу міститься у такому твердженні.

Теорема 4.1.1. *Нехай* $f \in \widehat{L}_\beta^\alpha \widehat{L}_p$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p \in [1;\infty]$. *Тоді, при* $\sigma \to \infty$ *справджується асимптотична нерівність*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big] E_c(f_\beta^\alpha)_{\widehat{p}}, \tag{4.11}$$

де

$$\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) := \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{1 - 2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2 + t^2}\ dt, \tag{4.12}$$

$E_c(f_\beta^\alpha)_{\widehat{p}}$ *визначається співвідношенням (4.9), а* $\mathcal{O}(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена по параметрах* α, β, σ, c, p *і* f.

Доведення. Для довільної функції $f \in \widehat{L}_\beta^\alpha$ отримуємо

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^\infty f_\beta^\alpha(x-t)\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t)\ dt, \tag{4.13}$$

де

$$\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t) = \widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_{\sigma,c}(v)\cos\Big(vt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dv, \tag{4.14}$$

$$\tau_{\sigma,c}(v) = [1 - \lambda_{\sigma,c}(v)]e^{-\alpha v} = \begin{cases} 0, & 0 \le v < c, \\ \frac{v-c}{\sigma-c}\ e^{-\alpha v}, & c \le v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \le v. \end{cases}$$

Для оцінки величин $\rho_{\sigma,c}(f;x)$ будемо використовувати наступне твердження, яке є наслідком теореми 4.1 з [217, с. 187].

Лема 4.1.1. *Для довільних* $\sigma > 0$, $0 \le c < \sigma$, $\forall f \in \widehat{L}_\beta^\alpha \widehat{L}_p$, $p \in [1,\infty]$, *і* $\forall \beta \in \mathbb{R}$ *справджується нерівність*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} \le E_c(f_\beta^\alpha)_{\hat{p}} \|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1, \tag{4.15}$$

в якій величина $E_c(f_\beta^\alpha)_{\hat{p}}$ *визначається співвідношенням (4.9), а*

$$\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)|\ dt, \tag{4.16}$$

де $\hat{\tau}_{\sigma,c}(\cdot)$ *— функція з (4.14).*

Одержимо оцінку величини (4.16). Маємо

$$\pi\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \int\limits_{0}^{\infty} \tau_{\sigma,c}(v)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dv =$$

$$= \int\limits_{c}^{\sigma} \frac{v-c}{\sigma-c}\ e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dv +$$

$$+ \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dv := I^{(1)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t;c) + I^{(2)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t). \tag{4.17}$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$I^{(1)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t;c) = -\int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dv +$$

$$+\frac{1}{\sigma-c}\int\limits_{c}^{\sigma}\int\limits_{v}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\Big(xt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dx\ dv =$$

$$= -I^{(2)}_{\sigma,\alpha,\beta}(t) + \frac{1}{\sigma-c}\int\limits_{c}^{\sigma}\int\limits_{v}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\Big(xt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dx\ dv. \tag{4.18}$$

Співставлення співвідношень (4.17) і (4.18), дає право записати

$$\pi\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\sigma-c}\int\limits_{c}^{\sigma}\int\limits_{v}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\Big(xt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\ dx\ dv :=$$

$$:= \frac{1}{\sigma-c}\int\limits_{c}^{\sigma} P_{\alpha,\beta}(v;t)\ dv. \tag{4.19}$$

Двічі інтегруючи частинами і виконуючи елементарні перетворення, знаходимо

$$P_{\alpha,\beta}(v;t) = \int\limits_{v}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos\Big(xt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dx =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\alpha^2+t^2}\Big[\alpha\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big) - t\sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Big[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big) - \frac{t}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha v}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(vt+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big), \qquad \theta(\alpha;t) = \operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}. \tag{4.20}$$

Підставивши (4.20) в (4.19), одержуємо

$$\widehat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta) = \frac{1}{\pi(\sigma-c)\sqrt{\alpha^2+t^2}}\int\limits_{c}^{\sigma} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv.$$

Отже, для величини $\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1$ справджується зображення

$$\|\hat{\tau}_{\sigma,c}(t;\beta)\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi(\sigma-c)\sqrt{\alpha^2+t^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\int\limits_{c}^{\sigma} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big|\,dt :=$$

$$:= \frac{1}{\pi(\sigma-c)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)|}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\,dt. \tag{4.21}$$

Приведемо функцію $\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)$ до більш зручного для подальших досліджень вигляду. Маємо

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t) = \int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv -$$

$$-\int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv =$$

$$= \int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v}\Big[\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos\theta(\alpha;t) - \sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\theta(\alpha;t)\Big]\,dv -$$

$$- \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\Big[\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos\theta(\alpha;t) - \sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\theta(\alpha;t)\Big]\,dv =$$

$$= \cos\theta(\alpha;t)\Big(\int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big) - \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\Big(\int\limits_{c}^{\infty} e^{-\alpha v}\sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big) - \int\limits_{\sigma}^{\infty} e^{-\alpha v}\sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big) =$$

$$= \cos\theta(\alpha;t)\Big(P_{\alpha,\beta}(c;t) - P_{\alpha,\beta}(\sigma;t)\Big) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\Big(P_{\alpha,\beta-1}(c;t) - P_{\alpha,\beta-1}(\sigma;t)\Big). \tag{4.22}$$

Застосовуючи тепер формулу (4.20) до кожної з функцій з правої частини співвідношення (4.22), знаходимо

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t) = \cos\theta(\alpha;t)\Big[\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big) -$$

$$- \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big] -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\Big[\frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\sin\Big(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big) -$$

$$- \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\sin\Big(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Big[\cos\theta(\alpha;t)\cos\Big(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\sin\Big(ct+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big] -$$

$$- \frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Big[\cos\theta(\alpha;t)\cos\Big(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big) -$$

$$- \sin\theta(\alpha;t)\sin\Big(\sigma t+\theta(\alpha;t)+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big].$$

Виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t) = \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(ct + 2\theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2}\Big) -$$

$$-\frac{e^{-\alpha\sigma}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\cos\Big(\sigma t + 2\theta(\alpha;t) + \frac{\beta\pi}{2}\Big) =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Bigg\{\Big[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos 2\theta(\alpha;t) - \sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin 2\theta(\alpha;t)\Big] -$$

$$-e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big) -$$

$$-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big]\Bigg\} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Bigg\{\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big[\cos 2\theta(\alpha;t) -$$

$$-e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big] -$$

$$-\sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Big[\sin 2\theta(\alpha;t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big)\Big]\Bigg\} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha c}}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\Big[\cos\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)G_{\alpha,\sigma-c}(t) - \sin\Big(ct+\frac{\beta\pi}{2}\Big)H_{\alpha,\sigma-c}(t)\Big], \qquad (4.23)$$

де

$$G_{\alpha,\sigma-c}(t) := \cos 2\theta(\alpha;t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big), \qquad (4.24)$$

$$H_{\alpha,\sigma-c}(t) := \sin 2\theta(\alpha;t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\sin\Big((\sigma-c)t+2\theta(\alpha;t)\Big). \qquad (4.25)$$

Далі будемо використовувати наступну лему, яка є аналогом відомої леми Фейєра-Стєчкіна для функцій, заданих на дійсній осі і була одержана у праці [230].

Лема 4.1.2 ([230]). *Нехай $g(t)$ і $h(t)$ — абсолютно інтегровані на дійсній*

осі функції обмеженої варіації:

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) < \infty, \qquad \bigvee_{-\infty}^{\infty} h(t) < \infty,$$

σ і γ — довільні дійсні числа. Покладемо

$$\varphi(t) = g(t)\cos(\sigma t + \gamma) + h(t)\sin(\sigma t + \gamma),$$

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}, \qquad K = \bigvee_{-\infty}^{\infty} g(t) + \bigvee_{-\infty}^{\infty} h(t).$$

Тоді

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\, dt + \mathcal{O}(1) K \sigma^{-1},$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ.

З цією метою покладемо

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)} \frac{\mathcal{P}_{\sigma,c,\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}, \tag{4.26}$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)} \frac{e^{-\alpha c}}{\alpha^2 + t^2} G_{\alpha,\sigma-c}(t),$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi(\sigma - c)} \frac{e^{-\alpha c}}{\alpha^2 + t^2} H_{\alpha,\sigma-c}(t), \quad \gamma = \frac{\beta\pi}{2},$$

де $G_{\alpha,\sigma-c}(t)$ і $H_{\alpha,\sigma-c}(t)$ — функції, визначені в співвідношеннях (4.24) і (4.25) відповідно. Легко бачити, що функції $g(t)$ і $h(t)$ задовольняють умову цієї леми.

Виходячи з рівності (4.23), застосуємо лему 4.1.2. Отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c} \left[\frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{G^2_{\alpha,\sigma-c}(t) + H^2_{\alpha,\sigma-c}(t)}}{\alpha^2 + t^2}\, dt + \right.$$

$$\left. + \mathcal{O}(1) \Big(\bigvee_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2 + t^2} + \bigvee_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2 + t^2} \Big) \frac{1}{c} \right]. \tag{4.27}$$

Відповідно до співвідношень (4.24) і (4.25) справджується рівність

$$\sqrt{G^2_{\alpha,\sigma-c}(t)+H^2_{\alpha,\sigma-c}(t)}=$$

$$=\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t+e^{-2\alpha(\sigma-c)}}. \tag{4.28}$$

Підрахуємо варіації функцій із залишкового члена формули (4.27). Згідно співвідношенню (4.20) має місце рівність $\theta(\alpha;t)=\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}$, тому

$$\frac{\cos 2\theta(\alpha;t)}{\alpha^2+t^2}=\frac{\alpha^2-t^2}{(\alpha^2+t^2)^2}:=g_\alpha(t), \tag{4.29}$$

$$\frac{\sin 2\theta(\alpha;t)}{\alpha^2+t^2}=\frac{2\alpha t}{(\alpha^2+t^2)^2}:=h_\alpha(t). \tag{4.30}$$

Функції $g_\alpha(t)$ і $h_\alpha(t)$ абсолютно інтегровані і мають обмежену варіацію на $\mathbb{R}$, оскільки самі вони та модулі їх похідних

$$g'_\alpha(t)=2t\frac{t^2-3\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3},\qquad h'_\alpha(t)=2\alpha\frac{3t^2-\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3},$$

в околі точки $t=0$ обмежені, а при $t\to\infty$ мають порядки $O(t^{-3})$ і $O(t^{-4})$ відповідно. При цьому справджуються співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_\alpha(t)|\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha^2-t^2|}{(\alpha^2+t^2)^2}\,dt\le 2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dt}{(\alpha^2+t^2)^2}=\frac{\pi}{\alpha}, \tag{4.31}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h_\alpha(t)|\,dt=4\alpha\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{(\alpha^2+t^2)^2}=\frac{2}{\alpha}, \tag{4.32}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g'_\alpha(t)|\,dt=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|t\frac{t^2-3\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3}\Big|\,dt\le\frac{4}{\alpha^2}, \tag{4.33}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h'_\alpha(t)|\,dt=2\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{3t^2-\alpha^2}{(\alpha^2+t^2)^3}\Big|\,dt\le\frac{6\pi}{\alpha^2}. \tag{4.34}$$

Беручи до уваги співвідношення (4.29) – (4.30), на основі рівностей

(4.24) і (4.25) отримуємо

$$\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = g_\alpha(t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big(g_\alpha(t)\cos(\sigma-c)t - h_\alpha(t)\sin(\sigma-c)t\Big), \qquad (4.35)$$

$$\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = h_\alpha(t) - e^{-\alpha(\sigma-c)}\Big(g_\alpha(t)\sin(\sigma-c)t + h_\alpha(t)\cos(\sigma-c)t\Big). \qquad (4.36)$$

Враховуючи тепер співвідношення (4.31) – (4.36), знаходимо

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty}\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big|\Big(\frac{G_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}\Big)'\Big|\,dt = \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\Big) \qquad (4.37)$$

і

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty}\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big|\Big(\frac{H_{\alpha,\sigma-c}(t)}{\alpha^2+t^2}\Big)'\Big|\,dt = \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\Big). \qquad (4.38)$$

Отже, співставлення співвідношень (4.27), (4.28), (4.37) і (4.38) дає право записати

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma-c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big], \qquad (4.39)$$

де

$$\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha) = \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2+t^2}\,dt.$$

Нарешті зі співвідношень (4.15), (4.21), (4.26) і (4.39) отримуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

Відзначимо, що на певних підмножинах функцій нерівність (4.11) є точною. Дійсно, нехай

$$\widehat{S}_p = \Big\{f\in\widehat{L}_p:\quad \|f\|_{\widehat{p}}\le 1\Big\}, \qquad \widehat{L}^\alpha_\beta\widehat{S}_p := \widehat{L}^\alpha_{\beta,p},$$

і

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} := \sup_{f\in\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}} \|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\widehat{p}}.$$

Тоді на основі теореми 4.1.1 отримуємо таке твердження.

Теорема 4.1.2. *Нехай* $p\in[1;\infty]$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді при* $\sigma\to\infty$ *справджується асимптотична нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma-c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)+\mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big], \tag{4.40}$$

яка при $p=\infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,\infty};V_{\sigma,c})_{\widehat{\infty}} = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma-c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)+\mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big].$$

Тут $\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)$ *визначається співвідношенням (4.12), а* $\mathcal{O}(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* α, β, p, σ *і* c.

Доведення. Якщо $f\in\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}$, то $\|f^{\alpha}_{\beta}\|_{\widehat{p}}\le 1$. Звідси випливає, що $E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}\le 1$. Розглянувши верхні межі обох частин співвідношення (4.11) на множинах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}$, одержуємо нерівність (4.40).

Позначимо через $f^*(x)$ функцію, $(\psi_\alpha;\beta)$-похідна якої $f^{\psi_\alpha}_{\beta}(x)$ задана рівністю

$$f^{\psi_\alpha}_{\beta}(x) = \operatorname{sign}\widehat{r}_{\sigma,c}(-x;\beta),$$

де $\psi_\alpha(\cdot)$ визначається співвідношеннями (4.8). Зрозуміло, що така функція $f^*(x)$ завжди існує і належить класу $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,\infty}$. Тоді, враховуючи співвідношення (4.13), отримуємо

$$\rho_{\sigma,c}(f^*;0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{r}_{\sigma,c}(t;\beta)|\,dt. \tag{4.41}$$

Зі співвідношень (4.21), (4.26) і (4.39) випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{r}_{\sigma,c}(t;\beta)|\,dt = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma-c}\Big[\frac{4}{\pi^2}\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)+\mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big], \tag{4.42}$$

де $\mathcal{J}_{\sigma,c}(\alpha)$ визначається співвідношенням (4.12).

Отже, співставлення (4.41) і (4.42) переконує нас, що у випадку $p = \infty$ співвідношення (4.40) є рівністю.

Теорему доведено.

Зауваження 4.1.1. *Співставлення асимптотичної нерівності (4.40) з оцінкою (4.10) дозволяє стверджувати, що за виконання умови* $0 < K_1 \le \sigma - c \le K_2 < \infty$, *де* K_1 *і* K_2 *— деякі абсолютні константи, оператори* $V_{\sigma,c}(f;x)$ *на множинах* $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$ *дають наближення, яке за порядком співпадає з величиною найкращого наближення.*

Зауваження 4.1.2. *У випадку, якщо* $p = \infty$ *і при* $\sigma \to \infty$ *одночасно* $c = c(\sigma) \to \infty$ *і* $\sigma - c \to \infty$, *то співвідношення (4.40) є рівністю, яка дає розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.*

Розглянемо тепер апроксимаційні властивості операторів Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}\widehat{L}_p$ у випадку, якщо параметр $c = c(\sigma)$ вибрано таким чином, що

$$\lim_{\sigma\to\infty} c(\sigma) = \lim_{\sigma\to\infty} \big(\sigma - c(\sigma)\big) = \infty. \tag{4.43}$$

Зважаючи на очевидні співвідношення

$$1 - e^{-\alpha(\sigma-c)} \le \sqrt{1 - 2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}} \le 1 + e^{-\alpha(\sigma-c)},$$

з урахуванням (4.43) отримуємо

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 - 2e^{-\alpha(\sigma-c)}\cos(\sigma-c)t + e^{-2\alpha(\sigma-c)}}}{\alpha^2 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} + \mathcal{O}(1)\frac{e^{-\alpha(\sigma-c)}}{\alpha}, \quad \sigma \to \infty. \tag{4.44}$$

Отже, з теорем 4.1.1 і 4.1.2 одержуємо такі наслідки.

Наслідок 4.1.1. *Нехай виконані всі умови теореми 4.1.1 і параметр* $c = c(\sigma)$ *задовольняє співвідношенням (4.43). Тоді при* $\sigma \to \infty$ *справджує-*

ться нерівність

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\left[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\right)\right] E_c(f^{\alpha}_{\beta})_{\widehat{p}}, \tag{4.45}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена по* $\alpha,\ \beta,\ \sigma,\ c,\ p$ *і* f*.*

Наслідок 4.1.2. *Нехай виконані всі умови теореми 4.1.2 і параметр* $c = c(\sigma)$ *задовольняє співвідношенням (4.43). Тоді при* $\sigma \to \infty$ *справджується нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}; V_{\sigma,c})_{\widehat{p}} \le \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big], \tag{4.46}$$

яка при $p = \infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c})_{\widehat{\infty}} = \frac{e^{-\alpha c}}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{1+\alpha}{\alpha^2\ c}\Big)\Big].$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* $\alpha,\ \beta,\ p,\ \sigma$ *і* c*.*

4.2. Наближення операторами Валле Пуссена на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta},\ \psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$

Використовуючи результати попереднього підрозділу 4.1, тут отримуються оцінки норм величин (4.6) відхилень операторів Валле Пуссена у просторах $\widehat{L}_p,\ 1 \le p \le \infty$, на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ у випадку, коли функції ψ належать до множини $\mathcal{D}_{\alpha}$, яка визначається у такий спосіб.

Нехай, як і раніше (див. підрозділ 3.1.1), $\mathfrak{M}$ — множина неперервних опуклих донизу при всіх $v \ge 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0;1)$ так, щоб отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(\cdot)$) була неперервною при всіх $v \ge 0,\ \psi(0) = 0$ і її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0;\infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Нехай, далі, $\mathfrak{A}^*$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{A}$ у яких, починаючи з деякого

v_0, існує скінченна похідна другого порядку $\psi''(v)$. Тоді покладемо

$$\mathcal{D}_\alpha := \Big\{\psi \in \mathfrak{A}^* : \quad \lim_{v\to\infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha,\ \alpha > 0\Big\}.$$

Зазначимо, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то внаслідок правила Лопіталя

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\psi'(v)}{\psi(v)} = \lim_{v\to\infty} \frac{\psi''(v)}{\psi'(v)} = -\alpha, \quad \alpha > 0. \tag{4.47}$$

Зазначимо також, що якщо $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то послідовність $\psi(k),\ k = 1, 2, \ldots,$ задовольняє так звану умову Даламбера і є елементом множини D_q [226]:

$$D_q = \Big\{\psi(k) : \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q = e^{-\alpha},\ \alpha > 0\Big\}.$$

Дійсно, застосовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла і враховуючи співвідношення (4.47), знаходимо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}} = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} \frac{\psi'(v)}{\psi(v)}\, dv} = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^{1} \frac{\psi'(v+k)}{\psi(v+k)}\, dv} = e^{-\alpha} = q.$$

Основний результат цього підрозділу міститься у такому твердженні.

Теорема 4.2.1. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ і виконуються співвідношення (4.43). Тоді для довільної функції $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, при $\sigma \to \infty$*

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\hat{p}} = \psi(c)\Big[e^{\alpha c}\|\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}_\beta^\alpha(f_\beta^\psi);\cdot)\|_{\hat{p}} + \mathcal{O}(1)\frac{(\alpha^2+1)\varepsilon_c}{\alpha^3(\sigma-c)}E_c(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}\Big], \tag{4.48}$$

де

$$\varepsilon_c = \max\{\varepsilon_c^{(1)}, \varepsilon_c^{(2)}\},\ \varepsilon_c^{(1)} = \sup_{t\ge c}\Big|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} + \alpha\Big|,\ \varepsilon_c^{(2)} = \sup_{t\ge c}\Big|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} - \alpha^2\Big|, \tag{4.49}$$

а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $\sigma, c, p, \alpha, \psi, \beta$ і f.

Зауваження 4.2.1. *Теорема 4.2.1 встановлює зв'язок між нормами у просторах $\widehat{L}_p$ величин $\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)$, $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, означених у спів-*

відношенні (4.6), та величин $\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}_\beta^{\psi_\alpha}(f_\beta^\psi);\cdot)$. *Ця теорема є поширенням результатів робіт [165] і [226] (в яких досліджувались питання наближення на відповідних класах періодичних функцій) на випадок наближення в просторах* $\widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$. *При цьому слід зазначити, що форма залишкового члена формули (4.48) відрізняється від форми залишкових членів відповідних співвідношень з робіт [165] і [226].*

Доведення теореми 4.2.1 суттєво базується на наступній лемі.

Лема 4.2.1. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $\lambda_{\sigma,c}(v)$ *— функція, визначена у співвідношенні (4.4). Тоді для довільних чисел* $\sigma > 0$ *і* $c \in [0;\sigma)$ *виконується рівність*

$$\int_c^\infty (1-\lambda_{\sigma,c}(v))\psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv =$$

$$= \psi(c)\left[e^{\alpha c}\int_c^\infty (1-\lambda_{\sigma,c}(v))e^{-\alpha v}\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv + r_{\sigma,c}(t)\right], \tag{4.50}$$

причому, для величини $r_{\sigma,c}(t) = r_{\sigma,c}(\psi;\alpha;\beta;t)$, *починаючи з деякого* c_0, *справедливі оцінки*

$$|r_{\sigma,c}(t)| \le \frac{2\varepsilon_c}{\alpha(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.51}$$

$$|r_{\sigma,c}(t)| \le \frac{1}{t^2}\frac{(6\alpha+1)\varepsilon_c}{(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)}, \quad |t|>0, \tag{4.52}$$

де величина ε_c *означена у співвідношеннях (4.49).*

Доведення. Маємо

$$\int_c^\infty [1-\lambda_{\sigma,c}(v)]\psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv =$$

$$= \int_0^\infty [1 - \lambda_{\sigma,c}(v+c)]\psi(v+c)\cos((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2})\, dv =$$

$$= \psi(c)\Big(\int_0^\infty [1 - \lambda_{\sigma,c}(v+c)]e^{-\alpha v}\cos((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2})\, dv + r_{\sigma,c}(t)\Big),$$

де

$$r_{\sigma,c}(t) = \int_0^\infty [1 - \lambda_{\sigma,c}(v+c)]\Big(\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\Big)\cos((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2})\, dv. \quad (4.53)$$

Покажемо тепер, що справджується оцінка (4.51). Оскільки для довільного $v \geq 0$ виконується нерівність

$$0 \leq [1 - \lambda_{\sigma,c}(v+c)] \leq \frac{v}{\sigma - c}, \quad 0 < c < \sigma, \quad (4.54)$$

то

$$|r_{\sigma,c}(t)| \leq \frac{1}{\sigma - c}\int_0^\infty v\Big|\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\Big|\, dv. \quad (4.55)$$

Якщо $\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} \geq 0$, то

$$\Big|\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\Big| = \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} = e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\, dx} - e^{-\alpha v} \leq e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v} < 0$, то беручи до уваги опуклість функції $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\Big|\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\Big| = e^{-\alpha v} - \frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} = e^{-\alpha v} - e^{\int_c^{c+v} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\, dx} \leq$$

$$\leq e^{-\alpha v} - e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} \leq e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}.$$

Отже, завжди

$$\Big|\frac{\psi(v+c)}{\psi(c)} - e^{-\alpha v}\Big| \leq e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v}, \quad v \geq 0. \quad (4.56)$$

Внаслідок співвідношень (4.47) і (4.49), за умови виконання (4.43) величина $\varepsilon_c^{(1)} > 0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого $c_0 = c(\sigma_0)$, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_c^{(1)} < 0,\ \forall c \geq c_0$. Тому, враховуючи оцінки (4.55) і (4.56), знаходимо

$$|r_{\sigma,c}(t)| \leq \frac{1}{\sigma - c} \int\limits_0^\infty v(e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} - e^{-\alpha v})\, dv =$$

$$= \frac{1}{\sigma - c}\left(\frac{1}{(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \leq \frac{2\varepsilon_c^{(1)}}{\alpha(\alpha - \varepsilon_c^{(1)})^2(\sigma - c)},$$

і, оскільки $\varepsilon_c^{(1)} < \varepsilon_c$, то нерівність (4.51) виконується.

Переконаємося нарешті у справедливості нерівності (4.52). Двічі інтегруючи частинами і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$r_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{(\sigma - c)t^2}\left[\left(\frac{\psi(\sigma)}{\psi(c)} - e^{-\alpha(\sigma-c)}\right)\cos(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}) - \right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^{\sigma-c}\left(\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\right)\cos\left((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\, dv\right] -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty [1 - \lambda(v+c)]\left(\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\right)\cos((v+c)t + \frac{\beta\pi}{2})\, dv. \qquad (4.57)$$

Беручи до уваги нерівність (4.54) і співвідношення

$$\left|\left(\frac{\psi(\sigma)}{\psi(c)} - e^{-\alpha(\sigma-c)}\right)\cos(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2})\right| =$$

$$= \left| - \cos(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}) \int\limits_{\sigma-c}^\infty \left(\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\right)\, dv\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\sigma-c}^\infty \left|\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\right|\, dv,$$

з (4.57) отримуємо

$$|r_{\sigma,c}(t)| \le \frac{2}{(\sigma-c)t^2}\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\Big|\,dv +$$

$$+\frac{1}{(\sigma-c)t^2}\int\limits_0^\infty v\Big|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big|\,dv. \qquad (4.58)$$

Знайдемо оцінки для інтегралів з правої частини співвідношення (4.58). Якщо $\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} \ge 0$, то враховуючи (4.49) і опуклість функції $e^{\lambda t}$, одержуємо

$$\Big|\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\Big| = \frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} =$$

$$= \alpha e^{-\alpha v} + \frac{\psi'(v+c)}{\psi(v+c)}\, e^{\int\limits_c^{c+v}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx} \le \alpha e^{-\alpha v} - (\alpha-\varepsilon_c^{(1)})e^{-(\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v} \le$$

$$\le (\alpha+\varepsilon_c^{(1)})e^{-(\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v} < 0$, то міркуючи аналогічно, будемо мати

$$\Big|\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\Big| = -\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} - \alpha e^{-\alpha v} =$$

$$= -\frac{\psi'(v+c)}{\psi(v+c)}\, e^{\int\limits_c^{c+v}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx} - \alpha e^{-\alpha v} \le (\alpha+\varepsilon_c^{(1)})e^{-(\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}.$$

Як вже зауважувалося раніше, починаючи з деякого c_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha+\varepsilon_c^{(1)} < 0$. Отже

$$\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi'(v+c)}{\psi(c)} + \alpha e^{-\alpha v}\Big|\,dv \le \int\limits_0^\infty [(\alpha+\varepsilon_c^{(1)})e^{-(\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v} - \alpha e^{-\alpha v}]\,dv = \frac{2\varepsilon_c^{(1)}}{\alpha-\varepsilon_c^{(1)}}, \qquad (4.59)$$

і необхідну оцінку для першого доданку з правої частини співвідношення (4.58) отримано.

Розглянемо тепер другий доданок із правої частини співвідношення (4.58). Оскільки $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \alpha^2$. Дійсно, враховуючи (4.47), зна-

ходимо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=\alpha^2. \tag{4.60}$$

Тепер якщо $\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}\geq 0,$ то беручи до уваги (4.49), одержуємо

$$\Big|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}\Big|=\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}=$$

$$=\frac{\psi''(v+c)}{\psi(v+c)}e^{\int\limits_c^{v+c}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx}-\alpha^2e^{-\alpha v}\leq(\alpha^2+\varepsilon_c^{(2)})e^{(-\alpha+\varepsilon_c^{(1)})v}-\alpha^2e^{-\alpha v}\leq$$

$$\leq(\alpha^2+\varepsilon_c)e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v}-\alpha^2e^{-\alpha v}.$$

Якщо ж $\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}<0,$ то беручи до уваги опуклість функції $e^{\lambda t}$, отримуємо

$$\Big|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}\Big|=\alpha^2e^{-\alpha v}-\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}=$$

$$=\alpha^2e^{-\alpha v}-\frac{\psi''(v+c)}{\psi(v+c)}e^{\int\limits_\sigma^{v+c}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx}\leq\alpha^2e^{-\alpha v}-(\alpha^2-\varepsilon_c^{(2)})e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v}=$$

$$=\alpha^2(e^{-\alpha v}-e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v})+\varepsilon_c^{(2)}e^{(-\alpha-\varepsilon_c^{(1)})v}\leq(\alpha^2+\varepsilon_c)e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v}-\alpha^2e^{-\alpha v}.$$

Отже, завжди

$$\Big|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}\Big|\leq(\alpha^2+\varepsilon_c)e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v}-\alpha^2e^{-\alpha v},\quad v\geq 0. \tag{4.61}$$

Внаслідок співвідношень (4.43), (4.47), (4.49) і (4.60) величина $\varepsilon_c>0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma\to\infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого c_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha+\varepsilon_c<0$. Беручи до уваги співвідношення (4.61), знаходимо

$$\int\limits_0^\infty v\Big|\frac{\psi''(v+c)}{\psi(c)}-\alpha^2e^{-\alpha v}\Big|\,dv\leq\int\limits_0^\infty v[(\alpha^2+\varepsilon_c)e^{(-\alpha+\varepsilon_c)v}-\alpha^2e^{-\alpha v}]\,dv=$$

$$=\frac{\alpha^2+\varepsilon_c}{(\alpha-\varepsilon_c)^2}-1=\frac{(2\alpha+1)\varepsilon_c-\varepsilon_c^2}{(\alpha-\varepsilon_c)^2}. \tag{4.62}$$

Зіставляючи тепер співвідношення (4.58), (4.59) і (4.62), переконуємося,

що, починаючи з деякого c_0, виконується оцінка (4.52).

Лему доведено.

Перейдемо тепер до **доведення теореми 4.2.1.** Нехай $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$. Зі співвідношень (4.2) і (4.3) випливає, що майже скрізь

$$\rho_\sigma(f;x) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t)\,dt, \tag{4.63}$$

де

$$\widehat{d}_{\sigma,c}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d_{\sigma,c}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dv,$$

$$d_{\sigma,c}(v) = (1-\lambda_{\sigma,c}(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c, \\ \frac{v-c}{\sigma-c}\psi(v), & c < v < \sigma, \\ \psi(v), & \sigma \le v. \end{cases}$$

Оскільки для довільної функції $\varphi \in W_\tau^2$, $\tau \le c$ виконується співвідношення (див. монографію [217, с. 186])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t) \equiv 0,$$

то, покладаючи $h(x-t) = f_\beta^\psi(x-t) - \varphi(x-t)$, $\forall \varphi \in W_\tau^2$, $\tau \le c$, зображення (4.63) запишемо у вигляді

$$\rho_{\sigma,c}(f;\cdot) = f(x) - V_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t)\,dt. \tag{4.64}$$

Нехай тепер

$$\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty q_{\alpha,\sigma,c}(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)\,dv,$$

$$q_{\alpha,\sigma,c}(v) = (1 - \lambda_{\sigma,c}(v))\ e^{-\alpha v} = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le c, \\ \frac{v-c}{\sigma-c}\ e^{-\alpha v}, & c < v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \le v. \end{cases}$$

На підставі співвідношень (4.50) і (4.64) отримуємо, що майже для всіх x

$$\rho_{\sigma,c}(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(c)\Big[e^{\alpha c}\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t) + \frac{1}{\pi}r_{\sigma,c}(t)\Big]h(x-t)\ dt =$$

$$= \psi(c)\Big(e^{\alpha c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{q}_{\alpha,\sigma,c}(t)\ dt + R_{\sigma,c}(f;x)\Big) =$$

$$= \psi(c)\Big(e^{\alpha c}\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}_\beta^\alpha;x) + R_{\sigma,c}(f;x)\Big), \tag{4.65}$$

де

$$R_{\sigma,c}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_{\sigma,c}(t)\ dt,$$

а функція $r_{\sigma,c}(t)$ визначається формулою (4.53).

Застосовуючи нерівність Мінковського, отримуємо

$$\|R_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}}\Big(\int\limits_a^{a+2\pi} \Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_{\sigma,c}(t)\ dt\Big|^p\ dx\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_{\sigma,c}(t)| \sup_{a\in\mathbb{R}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(x+a-t)|^p\ dx\Big)^{1/p}\ dt = \frac{1}{\pi}\|h\|_{\hat{p}}\|r_{\sigma,c}\|_1,$$

де

$$\|h\|_{\hat{p}} = \|f_\beta^\psi - \varphi\|_{\hat{p}}, \quad \|r_{\sigma,c}\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_{\sigma,c}(t)|\ dt.$$

Розглядаючи тепер нижню межу при $\varphi \in W_c^2$, одержуємо

$$\|R_{\sigma,c}(f;x)\|_{\hat{p}} \le \frac{1}{\pi}E_c(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}\|r_{\sigma,c}\|_1. \tag{4.66}$$

Використовуючи співвідношення (4.51) і (4.52), знаходимо

$$\|r_{\sigma,c}\|_1 = \int\limits_{|t|\le 1} |r_{\sigma,c}(t)|\,dt + \int\limits_{|t|\ge 1} |r_{\sigma,c}(t)|\,dt \le$$

$$\le \frac{4\varepsilon_c}{\alpha(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)} + \frac{(12\alpha+2)\varepsilon_c}{(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)} = \frac{12\alpha^2+2\alpha+4}{\alpha(\alpha-\varepsilon_c)^2(\sigma-c)}\varepsilon_c, \qquad (4.67)$$

де величина ε_c визначається в (4.49).

Зі співвідношень (4.65) – (4.67), з урахуванням очевидної рівності

$$\frac{1}{\alpha-\varepsilon_c} = O(1)\frac{1}{\alpha}, \quad \sigma\to\infty,$$

отримуємо формулу (4.48).

Теорему доведено.

Розглядаючи точні верхні межі обох частин формули (4.48) по класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$ і враховуючи, що

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\hat p} := \sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}} \|\rho_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\hat p} = \sup_{\|\varphi\|_{\hat p}\le 1} \|\rho_{\sigma,c}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi);\cdot)\|_{\hat p},$$

одержуємо таке твердження.

Теорема 4.2.2. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, $1\le p\le\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$ і виконуються співвідношення (4.43). Тоді при $\sigma\to\infty$ справджується асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\hat p} = \psi(c)\Big(e^{\alpha c}\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p};V_{\sigma,c})_{\hat p} + \mathcal{O}(1)\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3(\sigma-c)}\varepsilon_c\Big),$$

де величина ε_c означена у співвідношеннях (4.49), а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів $\sigma, c, p, \alpha, \psi$ і β.

Одержимо деякі наслідки зі встановлених у цьому підрозділі результатів. Співставлення наслідку 4.1.1 і теореми 4.2.1 переконує нас у справедливості такого твердження.

Наслідок 4.2.1. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_\alpha$, $\beta\in\mathbb{R}$ і виконуються співвідношення*

(4.43). Тоді для довільної функції $f \in \widehat{L}_{\beta}^{\psi}\widehat{L}_p,\ 1 \le p \le \infty,\ при\ \sigma \to \infty$

$$\|\rho_{\sigma,c}(f;x)\|_{\widehat{p}} \le \frac{\psi(c)}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\ c} + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\Big)\Big]E_c(f_{\beta}^{\psi})_{\widehat{p}}, \tag{4.68}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно параметрів* $\sigma, c, p, \alpha, \psi, \beta$ *і* f.

Аналогічно, співставлення твердження наслідку 4.1.2 і теореми 4.2.2 переконує нас у справедливості наступного твердження.

Наслідок 4.2.2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha},\ 1 \le p \le \infty,\ \beta \in \mathbb{R}$ *і виконуються співвідношення (4.43). Тоді при* $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична нерівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}; V_{\sigma,c})_{\hat{p}} \le \frac{\psi(c)}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\ c} + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\Big)\Big], \tag{4.69}$$

яка при $p = \infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{\sigma,c})_{\widehat{\infty}} = \frac{\psi(c)}{\sigma - c}\Big[\frac{2}{\pi\alpha} + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha^2\ c} + \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\varepsilon_c\Big)\Big], \tag{4.70}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, що рівномірно обмежена відносно* $\sigma, c, p, \alpha, \psi$ *і* β.

4.3. Наближення модифікованими операторами Фур'є на множинах $\widehat{L}_{\beta}^{\psi},\ \psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$

У цьому підрозділі викладено результати стосовно оцінок норм величин (4.7) відхилень у просторах $\widehat{L}_p,\ 1 \le p \le \infty$, модифікованих операторів Фур'є на множинах $\widehat{L}_{\beta,p}^{\psi}$ у випадку, коли функції ψ належать до множини $\mathcal{D}_{\alpha}$.

Спочатку доведемо твердження, яке має допоміжний характер і в подальшому буде використане для встановлення зв'язку між нормами у просторах $\widehat{L}_p$ величин $\rho_{\sigma}(f;\cdot)$, означених у співвідношенні (4.7), та величин $\rho_{\sigma}(\mathcal{J}_{\beta}^{\psi_{\alpha}}(f_{\beta}^{\psi});\cdot)$, у випадку $f \in \widehat{L}_{\beta}^{\psi}\widehat{L}_p,\ \psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$. Це дасть змогу скористатися результатами роботи [230], де вивчались апроксимаційні властивості опера-

торів $F^*_\sigma(t)$ на класах $\widehat{L}^{\psi_\alpha}_\beta$, де $\psi_\alpha(\cdot)$ — функція, визначена рівностями (4.8), і отримати для норм відхилень (4.7) асимптотичні формули.

Лема 4.3.1. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$. Тоді для довільного числа $\sigma > 0$ виконується рівність*

$$\int\limits_\sigma^\infty \psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv = \psi(\sigma)\left[e^{\alpha\sigma}\int\limits_\sigma^\infty e^{-\alpha v}\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv + r_\sigma(t)\right], \quad (4.71)$$

причому, для величини $r_\sigma(t) = r_\sigma(\psi;\alpha;\beta;t)$, починаючи з деякого σ_0, справедливі оцінки

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.72)$$

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{1}{t^2}\frac{(2\alpha+1)\varepsilon_\sigma}{\alpha-\varepsilon_\sigma}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.73)$$

де

$$\varepsilon_\sigma = \max\{\varepsilon^{(1)}_\sigma, \varepsilon^{(2)}_\sigma\},\ \varepsilon^{(1)}_\sigma = \sup_{t\ge\sigma}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}+\alpha\right|,\ \varepsilon^{(2)}_\sigma = \sup_{t\ge\sigma}\left|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}-\alpha^2\right|. \quad (4.74)$$

Доведення. Будемо дотримуватись схеми доведення леми 4.2.1. Маємо

$$\int\limits_\sigma^\infty \psi(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv = \int\limits_0^\infty \psi(v+\sigma)\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\,dv =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\alpha v}\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\,dv + r_\sigma(t)\Big),$$

де

$$r_\sigma(t) = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big)\cos((v+\sigma)t+\frac{\beta\pi}{2})\,dv. \quad (4.75)$$

Покажемо тепер, що виконується нерівність (4.72). Використовуючи

оцінку (4.56) при $c = \sigma$, одержуємо

$$|r_\sigma(t)| \le \int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi(v+\sigma)}{\psi(\sigma)} - e^{-\alpha v}\Big|\, dv \le \int\limits_0^\infty (e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma^{(1)})v} - e^{-\alpha v})\, dv. \tag{4.76}$$

Внаслідок співвідношень (4.47) і (4.74) величина $\varepsilon_\sigma^{(1)} > 0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma \to \infty$. Звідси випливає, що, починаючи з деякого σ_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_\sigma^{(1)} < 0$. Тому, інтегруючи в (4.76), знаходимо

$$|r_\sigma(t)| \le \frac{\varepsilon_\sigma^{(1)}}{\alpha(\alpha - \varepsilon_\sigma^{(1)})},$$

і, оскільки $\varepsilon_\sigma^{(1)} < \varepsilon_\sigma$, то нерівність (4.72) справджується.

Переконаємося нарешті у справедливості нерівності (4.73). Двічі інтегруючи частинами, отримуємо

$$r_\sigma(t) = \frac{1}{t^2}\Big(\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)} + \alpha\Big)\cos(\sigma t + \frac{\beta\pi}{2}) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \Big(\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big)\cos((v+\sigma)t + \frac{\beta\pi}{2})\, dv \le$$

$$\le \frac{1}{t^2}\Big|\frac{\psi'(\sigma)}{\psi(\sigma)} + \alpha\Big| + \frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big|\, dv. \tag{4.77}$$

Розглянемо другий доданок із правої частини співвідношення (4.77). Враховуючи, що починаючи з деякого σ_0, буде виконуватися нерівність $-\alpha + \varepsilon_\sigma < 0$ (оскільки, внаслідок співвідношень (4.47), (4.60) і (4.74) величина $\varepsilon_\sigma > 0$ монотонно прямує до нуля при $\sigma \to \infty$), а також беручи до уваги оцінку (4.61) (при $c = \sigma$), отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \Big|\frac{\psi''(\sigma+v)}{\psi(\sigma)} - \alpha^2 e^{-\alpha v}\Big|\, dv \le \int\limits_0^\infty [(\alpha^2 + \varepsilon_\sigma)e^{(-\alpha+\varepsilon_\sigma)v} - \alpha^2 e^{-\alpha v}]\, dv =$$

$$= -\frac{\alpha^2 + \varepsilon_\sigma}{-\alpha + \varepsilon_\sigma} - \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha - \varepsilon_\sigma}\varepsilon_\sigma. \tag{4.78}$$

Зіставляючи тепер співвідношення (4.77) і (4.78), переконуємося, що, починаючи з деякого σ_0, виконується оцінка (4.73).

Лему доведено.

Використовуючи тепер лему 4.3.1 одержуємо таке твердження.

Теорема 4.3.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ *і величина* ε_σ *означена у співвідношеннях (4.74). Тоді для довільної функції* $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\|\rho_\sigma(f;\cdot)\|_{\hat{p}} = \psi(\sigma)\Big[e^{\alpha\sigma}\|\rho_\sigma(\mathcal{J}_\beta^\alpha(f_\beta^\psi);\cdot)\|_{\hat{p}} +$$

$$+O(1)\frac{(2\alpha^2+\alpha+2)\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}}\Big], \tag{4.79}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ, p, α, ψ *і* β.

Доведення. Нехай $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$, $1 \le p \le \infty$. Зі співвідношень (4.2) і (4.5) випливає, що майже скрізь

$$\rho_\sigma(f;\cdot) = f(x) - F_\sigma^*(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x-t)\widehat{d}_\sigma(t)\,dt, \tag{4.80}$$

де

$$\widehat{d}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d_\sigma(v)\cos(vt+\frac{\beta\pi}{2})\,dv,$$

$$d_\sigma(v) = (1-\lambda_\sigma(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \sigma-1, \\ (v-\sigma+1)\psi(\sigma), & \sigma-1 < v < \sigma, \\ \psi(v), & \sigma \le v. \end{cases}$$

Оскільки для довільної функції $\varphi \in W_\tau^2$, $\tau \le \sigma-1$ справджується тотожність (див. [217, с. 186])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\widehat{d}_\sigma(t) \equiv 0,$$

то, покладаючи $h(x-t) = f_\beta^\psi(x-t) - \varphi(x-t)$, $\forall\varphi \in W_\tau^2$, $\tau \le \sigma-1$,

співвідношення (4.79) запишемо у вигляді

$$\rho_\sigma(f;\cdot) = f(x) - F_\sigma^*(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{d}_\sigma(t)\ dt. \tag{4.81}$$

Нехай тепер

$$\widehat{q}_\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} q_\sigma(v)\cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\ dv,$$

$$q_\sigma(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \sigma - 1, \\ (v-\sigma+1)e^{-\alpha\sigma}, & \sigma - 1 < v < \sigma, \\ e^{-\alpha v}, & \sigma \le v. \end{cases}$$

На підставі співвідношень (4.71) і (4.81) отримуємо, що майже для всіх x

$$\rho_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\Big[e^{\alpha\sigma}\widehat{q}_\sigma(t) + r_\sigma(t)\Big]h(x-t)\ dt =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\widehat{q}_\sigma(t)\ dt + R_\sigma(f;x)\Big) =$$

$$= \psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma}\rho_\sigma(\mathcal{J}_\beta^\alpha;x) + R_\sigma(f;x)\Big), \tag{4.82}$$

де

$$R_\sigma(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_\sigma(t)\ dt,$$

а функція $r_\sigma(t)$ визначається формулою (4.75).

Застосовуючи нерівність Мінковського, отримуємо

$$\|R_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} = \sup_{a\in\mathbb{R}}\Big(\int\limits_a^{a+2\pi}\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)r_\sigma(t)\ dt\Big|^p\ dx\Big)^{1/p} \le$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_\sigma(t)| \sup_{a\in\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(x+a-t)|^p \, dx \Big)^{1/p} \, dt = \|h\|_{\hat{p}} \|r_\sigma\|_1,$$

де

$$\|h\|_{\hat{p}} = \|f_\beta^\psi - \varphi\|_{\hat{p}}, \quad \|r_\sigma\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r_\sigma(t)| \, dt.$$

Розглядаючи тепер нижню межу при $\varphi \in W^2_{\sigma-1}$, одержуємо

$$\|R_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} \leq E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}} \|r_\sigma\|_1. \tag{4.83}$$

Використовуючи співвідношення (4.72) і (4.73), знаходимо

$$\|r_\sigma\|_1 = \int\limits_{|t|\leq 1} |r_\sigma(t)| \, dt + \int\limits_{|t|\geq 1} |r_\sigma(t)| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{2\varepsilon_\sigma}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)} + \frac{(2\alpha+1)\varepsilon_\sigma}{\alpha-\varepsilon_\sigma} \leq \frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma, \tag{4.84}$$

де величина ε_σ визначається співвідношеннями (4.74).

Зі співвідношень (4.82) – (4.84) одержуємо формулу (4.79).

Теорему доведено.

Використовуючи тепер теорему 1.3.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.3.1. *Для довільної функції* $f \in \widehat{L}_\beta^\psi \widehat{L}_p$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *при довільному* $p \in [1;\infty]$ *виконується асимптотична (при* $\sigma \to \infty$*) нерівність*

$$\|\rho_\sigma(f;x)\|_{\hat{p}} \leq \psi(\sigma)\Big(\frac{4}{\pi^2} I(\alpha) + \mathcal{O}(1)\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma} + \frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_\sigma)}\varepsilon_\sigma\Big)\Big) E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)_{\hat{p}},$$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\Big(\frac{1-\cos t}{t^2} + \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}\Big)^2 + \Big(\frac{t-\sin t}{t^2} - \frac{t}{t^2+\alpha^2}\Big)^2}, \tag{4.85}$$

а $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ, p, α, ψ *і* β.

Розглядаючи верхні межі обох частин формули (4.79) по класах $\widehat{L}_{\beta,p}^\psi$ і

враховуючи, що

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};F^{*}_{\sigma})_{\hat{p}}:=\sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}}\|\rho_{\sigma}(f;\cdot)\|_{\hat{p}}=\sup_{\|\varphi\|_{\hat{p}}\le 1}\|\rho_{\sigma}(\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi);\cdot)\|_{\hat{p}},$$

отримуємо таке твердження.

Теорема 4.3.2. *Нехай* $1\le p\le\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_{\alpha}$ *і величина* ε_{σ} *означена у співвідношеннях (4.74). Тоді при* $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};F^{*}_{\sigma})_{\hat{p}}=\psi(\sigma)\Big(e^{\alpha\sigma}\mathcal{E}(\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p};F^{*}_{\sigma})_{\hat{p}}+\mathcal{O}(1)\frac{(2\alpha^2+\alpha+2)}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{\sigma})}\varepsilon_{\sigma}\Big),$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ,p,α,ψ *і* β.

Скориставшись тепер теоремою 1.3.2, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 4.3.2. *Для довільного класу* $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi\in\mathcal{D}_{\alpha}$, $\beta\in\mathbb{R},p\in[1;\infty)$ *при* $\sigma\to\infty$ *виконується співвідношення*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p};F^{*}_{\sigma})_{\hat{p}}\le\frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\Big(I(\alpha)+\mathcal{O}(1)\Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma}+\frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{\sigma})}\varepsilon_{\sigma}\Big]\Big),$$

яке при $p=\infty$ *перетворюється в асимптотичну рівність*

$$\mathcal{E}(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,\infty};F^{*}_{\sigma})_{\widehat{\infty}}=\frac{4\psi(\sigma)}{\pi^2}\Big(I(\alpha)+\mathcal{O}(1)\Big[\frac{\alpha+1}{\alpha\sigma}+\frac{2\alpha^2+\alpha+2}{\alpha(\alpha-\varepsilon_{\sigma})}\varepsilon_{\sigma}\Big]\Big),$$

де величина $I(\alpha)$ *визначається співвідношенням (4.85), а* $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ,p,α,ψ *і* β.

Зауваження 4.3.1. *Для величини* $I(\alpha)$ *мають місце оцінки*

$$\max\{\pi;\ln\frac{\alpha^2+1}{\alpha}-0,65903\}<I(\alpha)<3,72695+\ln\frac{\alpha^2+1}{\alpha}.$$

4.4. Наближення операторами $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}_1^{\psi}$

Метод отримання асимптотичної рівності (3.8) може бути використаний і для дослідження питань наближення на класах функцій, які є локально інтегрованими за Лебегом на дійсній осі (і не обов'язково періодичними). В цьому підрозділі для точних верхніх меж відхилень операторів $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}_1^{\psi}$, $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, в інтегральній метриці знайдено асимптотичну рівність, яка дає розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ (див. [217, с. 193]) множину всіх неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють таким умовам:

1. $\psi(v) \geq 0$, $v \geq 0$ $\psi(0) = 0$, $\psi(v)$ зростає на відрізку $[0;1]$;
2. $\psi \in \mathfrak{M}$ на $[1;\infty)$, тобто $\psi(v)$ опукла донизу при $v \geq 1$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$;
3. $\psi'(v) := \psi'(v+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0;\infty)$;

а через $\mathfrak{A}'$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty$.

Нехай $\psi_j(v)$, $j = 1, 2$, — функції, задані й неперервні при $v \geq 0$, $\psi_{1+}(v)$ і $\psi_{2-}(v)$, $v \in (-\infty;\infty)$ — їх парне й непарне продовження, відповідно, і для функції $\psi(v) := \psi_{1+}(v) + i\psi_{2-}(v)$ майже в кожній точці $t \in \mathbb{R}$ існує перетворення Фур'є

$$\widehat{\psi}(t) := \widehat{\psi}_{1+}(t) + i\widehat{\psi}_{2-}(t), \tag{4.86}$$

яке розуміється у сенсі

$$\widehat{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(v) e^{-ivt} dv.$$

Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$ і $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то (як випливає з твердження 10 роботи [205]) перетворення Фур'є (4.86) інтегроване на всій дійсній осі.

Через $\widehat{L}^{\psi}$ позначають множини функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже для всіх x можна подати згорткою (див. роботу [220]):

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\widehat{\psi}(t)\, dt := A_0 + \varphi * \widehat{\psi}\,(x), \quad \varphi \in \widehat{L}_1, \tag{4.87}$$

де A_0 — деяка стала, інтеграл розуміється як границя інтегралів по проміжках, що симетрично розширюються. Функцію $\varphi(\cdot)$ в рівності (4.87) називають ψ-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $\varphi(\cdot) = f^{\psi}(\cdot)$. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}$ і $\varphi \in \widehat{S}_1 = \{f \in \widehat{L}_1 : \|f\|_{\widehat{1}} \le 1\}$, то вважають $f \in \widehat{L}^{\psi}\widehat{S}_1 = \widehat{L}_1^{\psi}$.

У ролі агрегатів наближення для функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}$ використовуються оператори вигляду

$$\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x) = A_0 + f^{\psi} * \widehat{\lambda_{\sigma,c}\psi}\,(x), \tag{4.88}$$

де при $\sigma > c \ge 1$

$$\lambda_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le |t| \le \frac{c}{\sigma}, \\ \frac{(1-|t|)}{\sigma - c}\sigma, & \frac{c}{\sigma} \le |t| \le 1, \\ 0, & 1 \le |t|. \end{cases} \tag{4.89}$$

Поряд із $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ використовуються також оператори $\mathbb{V}^*_{\sigma,c}(f;x)$, які визначаються функцією вигляду

$$\lambda^*_{\sigma,c}(t) = \begin{cases} \lambda_{\sigma,c}(t), & |t| \in [0;c/\sigma]\bigcup[1;\infty), \\ 1 - \frac{\sigma(1-|t|)}{\sigma-c}\frac{\psi(\sigma\operatorname{sign}(t))}{\psi(\sigma t)}, & c/\sigma \le |t| \le 1. \end{cases} \tag{4.90}$$

Відзначимо, що у випадку, коли $\psi_1(t) = \psi(t)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(t) = \psi(t)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, множини $\widehat{L}^{\psi}$, збігаються із $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, а оператори $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ — з операторами $V_{\sigma,c}(f;x)$ (див. визначення на стор. 167 – 168).

Цей підрозділ присвячено знаходженню асимптотичних при $\sigma \to \infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi};\mathbb{V}_{\sigma,c}) = \sup\left\{\|f(\cdot) - \mathbb{V}_{\sigma,c}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}}, \quad f \in \widehat{L}_1^{\psi}\right\}, \tag{4.91}$$

за умови, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, де $\mathfrak{A}_0$ і $\mathfrak{A}'_0$ — підмножини з $\mathfrak{A}$, що складаються з елементів, звуження яких на проміжок $[1;\infty)$ належать до $\mathfrak{M}_0$ (дивись означення на сторінці 104).

Нехай числа $c = c(\sigma) < \sigma$ вибрані так, що границя $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{\sigma-c}{\sigma}$ існує, дорівнює Θ і $0 \le \Theta < 1$. Основний результат підрозділу міститься в такому твердженні.

Теорема 4.4.1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi}; \mathbb{V}_{\sigma,c}) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\psi_2(t)}{t}\, dt + \frac{4}{\pi^2}|\psi(\sigma)| \ln \frac{\sigma}{\sigma - c} + \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|,$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Нехай $\mathfrak{A}_C$ — підмножина функцій з $\mathfrak{A}$, що складається з елементів, звуження яких на проміжок $[1; \infty)$ належать до $\mathfrak{M}_C$ (дивись означення на сторінці 123).

Враховуючи співвідношення (3.58), із теореми 4.4.1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.4.1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}_C$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi}; \mathbb{V}_{\sigma,c}) = \frac{4}{\pi^2}|\psi(\sigma)| \ln \frac{\sigma}{\sigma - c} + \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|, \tag{4.92}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* σ.

Твердження теореми 4.4.1 і наслідку 4.4.1 доповнюють результати роботи [169], а також поширюють результати роботи [171] з періодичного випадку на випадок наближення на класах $\widehat{L}_1^{\psi}$.

Доведення теореми грунтується на наступній лемі, яка дає зручний для подальшого дослідження вигляд інтегральних зображень відхилень

$$\rho_{\sigma,c}(f; x) = f(x) - \mathbb{V}_{\sigma,c}(f; x). \tag{4.93}$$

Лема 4.4.1. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, a *— деяке число з проміжку* $(0; \pi/2)$ *і* $0 \le \Theta < 1$. *Тоді для довільної функції* $f \in \widehat{L}_1^{\psi}$ *майже в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$\rho_{\sigma,c}(f; x) = \frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{\sigma - c}} f^{\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin t}{t}\, dt +$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{\sigma-c}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\int\limits_{0}^{\infty}\psi_2(\sigma s)\sin st\;ds\;dt+\mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|, \tag{4.94}$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена відносно* c *і* σ*.*

Доведення справедливості асимптотичної рівності (4.94) проводиться за схемою доведення (3.12). Нехай

$$\rho^{*}_{\sigma,c}(f;x):=f(x)-\mathbb{V}^{*}_{\sigma,c}(f;x).$$

Тоді

$$\rho_{\sigma,c}(f;x)=\rho^{*}_{\sigma,c}(f;x)+\Delta_{\sigma,c}(f;x), \tag{4.95}$$

де

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x):=V^{*}_{\sigma,c}(f;x)-\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$$

Зі співвідношень (4.88) – (4.90) випливає, що майже в кожній точці $x\in\mathbb{R}$ має місце зображення

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}(x+t)\widehat{d}_{\sigma,c}(t)\;dt,$$

в якому

$$\widehat{d}_{\sigma,c}(t)=\frac{1}{2(\sigma-c)\pi}\int\limits_{c}^{\sigma}(s-c)[(\psi(s)-\psi(\sigma))e^{-ist}+$$

$$+(\psi(-s)-\psi(-\sigma))e^{ist}]\;ds,$$

Беручи до уваги співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{d}_{\sigma,c}(t)|\;dt=\mathcal{O}(1)\sum_{i=1}^{2}[\psi_i(c)-\psi_i(\sigma)],$$

отримуємо

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) \le \|f^{\psi}(\cdot)\|_{\widehat{1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{d}_{\sigma,c}(t)|\, dt \le K \sum_{i=1}^{2} [\psi_i((1-\Theta)\sigma) - \psi_i(\sigma)].$$

Звідси, враховуючи нерівність

$$\psi(\varepsilon\sigma) \le K\psi(\sigma), \quad \sigma \ge 1/\varepsilon,$$

яка виконується для довільної функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$ і $0 < \varepsilon \le 1$ (див. [216, с. 175]) одержуємо

$$\Delta_{\sigma,c}(f;x) = \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|, \quad \sigma \to \infty. \tag{4.96}$$

Розглянемо тепер величину

$$\rho^{*}_{\sigma,c}(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(x+t) \int\limits_{|v| \ge \frac{c}{\sigma}} \lambda^{*}_{\sigma,c}(v)\psi(v)e^{-ivt}\, dv\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(x+t) \int\limits_{\frac{c}{\sigma} \le |v| \le 1} \frac{(1-|v|)\sigma}{\sigma - c} \frac{\psi(\sigma \operatorname{sign}(v))}{\psi(\sigma v)} \psi(v) e^{-ivt}\, dv\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(x+t) \int\limits_{|v| \ge 1} \psi(v) e^{-ivt}\, dv\, dt.$$

зі співвідношення (4.95). Нехай $c = \sigma - h$ і $a \in (0; \pi/2)$. Інтегруючи частинами і виконуючи елементарні перетворення знаходимо, що для довільної функції $f \in \widehat{L}_1^{\psi}$ майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\rho^{*}_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{2\sigma \sin \frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma} \sin \frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\psi_2(\sigma)}{\pi} \int\limits_{a \le |t| \le \frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x + \frac{t}{\sigma}\Big) \frac{2\sigma \cos \frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma} \sin \frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\, dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2(\sigma s)\sin st\ ds\ dt+$$

$$+b^{\psi_1}_{\sigma,h}(f;x)+b^{\psi_2}_{\sigma,h}(f;x), \tag{4.97}$$

де

$$b^{\psi_1}_{\sigma,h}(f;x)=-\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}dt-$$

$$-\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\sin\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}dt-$$

$$-\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_1'(\sigma s)\sin st\ ds\ dt \tag{4.98}$$

і

$$b^{\psi_2}_{\sigma,h}(f;x)=\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\ dt+$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{2\sigma\cos\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma}\sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\ dt-$$

$$-\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\ dt+$$

$$+\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{|t|\ge a}\frac{f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2'(\sigma s)\cos st\ ds\ dt. \tag{4.99}$$

Повторюючи міркування, які використовувалися при доведенні оцінок (3.26) і (3.31), застосовуючи у відповідних містах замість нерівностей

$$\Big\|\int\varphi(x+t)K(t)\ dt\Big\|_1\le\|\varphi(x)\|_1\int|K(t)|\ dt,$$

нерівності вигляду

$$\Big\| \int \varphi(\cdot + t) K(t)\, dt \Big\|_{\widehat{1}} \le \|\varphi(\cdot)\|_{\widehat{1}} \int |K(t)|\, dt,$$

отримуємо

$$\|b^{\psi_1}_{\sigma,h}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}} + \|b^{\psi_2}_{\sigma,h}(f;\cdot)\|_{\widehat{1}} \le K|\psi(\sigma)|. \tag{4.100}$$

Нехай

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) := \int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big) \frac{-2\sigma \sin\Big(\frac{(2\sigma-h)t}{2\sigma} - \frac{\beta\pi}{2}\Big) \sin\frac{ht}{2\sigma}}{ht^2}\, dt.$$

Виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) = -\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin\,(t-\frac{\beta\pi}{2})}{t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big) \Big[\frac{\frac{ht}{\sigma} - \sin\frac{ht}{\sigma}}{\frac{ht^2}{\sigma}} \sin\,(t-\frac{\beta\pi}{2}) +$$

$$+ \frac{1-\cos\frac{ht}{\sigma}}{\frac{ht^2}{\sigma}} \cos\,(t-\frac{\beta\pi}{2}) \Big]\, dt,$$

звідки з урахуванням неперервності і монотонності на проміжку $(0;\pi]$ функцій

$$\tau_1(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}, \quad \tau_2(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

знаходимо, що для довільної функції $f \in \widehat{L}^{\psi}_1$ майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$I^{\beta}_{\sigma,h}(f;x) = -\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big) \frac{\sin(t-\frac{\beta\pi}{2})}{t}\, dt + \mathcal{O}(1), \tag{4.101}$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо σ, h і β.

Застосуємо співвідношення (4.101) для спрощення формули (4.97). Покладаючи в (4.101) спочатку $\beta = 0$, а потім $\beta = 1$, на підставі рівності (4.97),

з урахуванням (4.100), отримуємо

$$\rho^*_{\sigma,\sigma-h}(f;x)=\frac{-\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\sin t}{t}\,dt+$$

$$+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le a} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\int\limits_1^{\infty}\psi_2(\sigma s)\sin st\;ds\;dt+\mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|. \tag{4.102}$$

Поєднуючи тепер (4.95), (4.96) і (4.102), переконуємося у справедливості твердження леми.

Лему доведено.

Виконаємо подальше спрощення величини $\rho^*_{\sigma,c}(f;x)$. Користуючись рівністю

$$-a\sin\alpha+b\cos\alpha=-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha-\gamma),\quad \gamma=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

можемо записати

$$-\frac{\psi_1(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\sin t}{t}\,dt+\frac{\psi_2(\sigma)}{\pi}\int\limits_{a\le|t|\le\frac{\pi\sigma}{h}} f^{\psi}\Big(x+\frac{t}{\sigma}\Big)\frac{\cos t}{t}\,dt=$$

$$=-\frac{|\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{\frac{a}{\sigma}\le|t|\le\frac{\pi}{h}} f^{\psi}(x+t)\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{t}\,dt,\quad \gamma_\sigma=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}. \tag{4.103}$$

Нехай

$$x_k=\frac{k\pi+\gamma_\sigma}{\sigma},\quad t_k=x_k-\frac{\pi}{2\sigma},\quad k\in\mathbb{Z},\quad \gamma_\sigma,\sigma\in\mathbb{R}.$$

Через k_0 позначимо те значення k, для якого t_{k_0} є найближча праворуч від точки $\frac{a+\pi}{\sigma}$ точка, в якій $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)=1$, а через k_1 — найбільше зі значень k, таких, що $t_k<\frac{\pi}{h}$. Далі, через k_2 позначимо таке число, щоб точка t_{k_2} була найближчою ліворуч від точки $-\frac{a+\pi}{\sigma}$ серед тих, в яких $\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)=-1$, а через k_3 — найменше з тих значень, що задовольняють умову $t_k>-\frac{\pi}{h}$, і

покладемо

$$l_{\sigma,h}(t) = x_k, \quad t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = k_0, ..., k_1 - 1,$$

$$k = k_3, k_3 + 1, ..., k_2 - 1, \quad i_{3,1} = [t_{k_3}; t_{k_2}] \cup [t_{k_0}; t_{k_1}].$$

Повторюючи міркування, використані при отриманні асимптотичної рівності (3.43), знаходимо

$$\int\limits_{\frac{a}{\sigma} \le |t| \le \frac{\pi}{h}} f^{\psi}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t}\, dt = \int\limits_{i_{3,1}} f^{\psi}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\, dt + \mathcal{O}(1), \quad (4.104)$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величина, обмежена відносно h і σ.

Поєднуючи лему 4.4.1 і рівності (4.103) – (4.104), одержуємо таке твердження.

Лема 4.4.2. *Нехай* $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$, $0 \le \Theta < 1$. *Тоді для довільної функції* $f \in \widehat{L}_1^{\psi}$ *майже в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$

$$\rho_{\sigma,\sigma-h}(f;x) = -\frac{|\psi(\sigma)|}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} f^{\psi}(x+t) \frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \le \frac{a}{\sigma}} f^{\psi}(x+t) \int\limits_{\sigma}^{\infty} \psi_2(s) \sin st\, ds\, dt + \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|. \quad (4.105)$$

де $a \in (0; \pi)$, $\gamma_\sigma = \operatorname{arctg} \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $\mathcal{O}(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* h *і* σ.

Для знаходження асимптотичних рівностей для величини (4.91) нам знадобиться таке твердження.

Лема 4.4.3. *Нехай* $K(t)$ — *функція, сумовна на* $[-\pi; \pi]$ *і* ζ — *довільне число з відрізку* $[-\pi; \pi]$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(K) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{y \in \widehat{S}_1} \left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t-x) K(t)\, dt \right\|_{\widehat{1}} \ge$$

$$\geq \frac{1}{2}\max_{|\zeta|\leq\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx, \tag{4.106}$$

де $K^*(\cdot)$ — 2π*-періодичне продовження функції* $K(\cdot)$.

Доведення. Нехай $y\in\widehat{S}_1$ і $\zeta\in[-\pi;\pi]$, $\zeta\neq 0$. Припустимо спочатку, що функція $K(t)$ є неперервною на відрізку $[-\pi;\pi]$ і такою, що $K(-\pi)=K(\pi)$. Тоді, повторюючи міркування, які використовувалися під час доведення леми 8.2 книги [216, с. 254], будемо мати

$$\mathcal{E}(K)\geq\frac{1}{2}\max_{|\zeta|\leq\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx.$$

Нехай тепер $K(t)$ — довільна сумовна на $[-\pi;\pi]$ функція. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon>0$ і знайдемо неперервну функцію $K_\varepsilon(t)$, для якої $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K(t)-K_\varepsilon(t)|\,dt\leq\varepsilon$ (існування функції $K_\varepsilon(t)$ випливає з відомої властивості щільності неперервних функцій у просторі інтегрованих функцій). При цьому, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $K_\varepsilon(\pi)=K_\varepsilon(-\pi)$. Тоді

$$\mathcal{E}(K)=\sup_{y\in\widehat{S}_1}\Big\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}[K(t)+K_\varepsilon(t)-K_\varepsilon(t)]y(t-x)\,dt\Big\|_{\widehat{1}}\geq$$

$$\geq\sup_{y\in\widehat{S}_1}\Big\|\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_\varepsilon(t)y(t-x)\,dt\Big\|_{\widehat{1}}-\varepsilon.$$

Враховуючи тепер справедливість твердження леми для неперервних функцій, одержуємо

$$\mathcal{E}(K)\geq\frac{1}{2}\max_{|\zeta|\leq\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_\varepsilon^*(x)-K_\varepsilon^*(x+\zeta)|dx-\varepsilon\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\max_{|\zeta|\leq\pi}\Big[\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx-\int\limits_{-\pi}^{\pi}[K_\varepsilon^*(x)-K^*(x)+$$

$$+K_\varepsilon^*(x+\zeta)-K^*(x+\zeta)]\,dx\Big]-\varepsilon\geq\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K^*(x)-K^*(x+\zeta)|\,dx-\frac{3\varepsilon}{2}.$$

Лему доведено.

Як відомо, класи функцій $\widehat{L}_1^{\psi}$ є інваріантними відносно зсуву аргументу. Враховуючи цей факт, на підставі співвідношення (4.105) отримуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi};\mathbb{V}_{\sigma,\sigma-h})\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\frac{a}{\sigma}}\Big|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\;ds\Big|\;dt+$$

$$+\frac{|\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\Big|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\Big|\;dt+\mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|. \tag{4.107}$$

Нехай $K_\sigma(t)$ — функція, яка на проміжку $[-\pi;\pi]$ визначається формулою

$$K_\sigma(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_\sigma^\infty\psi_2(s)\sin st\;ds, & t\in[-\frac{a}{\sigma};\frac{a}{\sigma}],\\ \frac{|\psi(\sigma)|}{\pi}\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t\in(t_{k_3};t_{k_2})\cup(t_{k_0};t_{k_1}),\\ 0, & t\in[-\pi;\pi]\backslash\{[-\frac{a}{\sigma};\frac{a}{\sigma}]\bigcup(t_{k_3};t_{k_2})\bigcup(t_{k_0};t_{k_1})\}.\end{cases}$$

Через $K_\sigma^*(t)$ позначимо 2π-періодичне продовження функції $K_\sigma(t)$. Тоді, користуючись лемою 3 і враховуючи співвідношення (4.105), знаходимо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi};\mathbb{V}_{\sigma,\sigma-h})\geq\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_\sigma^*(x)-K_\sigma^*(x+\frac{\pi}{\sigma})|\;dx+\mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|. \tag{4.108}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_\sigma^*(x)-K_\sigma^*(x+\frac{\pi}{\sigma})|\;dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_\sigma(x)|\;dx=$$

$$=\frac{|\psi(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{i_{3,1}}\Big|\frac{\sin(\sigma t-\gamma_\sigma)}{l_{\sigma,h}(t)}\Big|\;dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\frac{a}{\sigma}}\Big|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\psi_2(s)\sin st\;ds\Big|\;dt,$$

то, покладаючи в рівностях (3.46) – (3.47) $n=\sigma$, $p=h$, на підставі нерівності

(4.108) одержуємо

$$\mathcal{E}(\widehat{L}_1^{\psi};\mathbb{V}_{\sigma,\sigma-h}) \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}\,dt + \frac{4}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + \mathcal{O}(1)|\psi(\sigma)|. \tag{4.109}$$

Поєднуючи співвідношення (3.46) – (3.47) і (4.107) – (4.109), переконуємося у справедливості твердження теореми.

Теорему доведено.

4.5. Висновки до розділу 4

В цьому розділі:

1. Для точних верхніх меж відхилень в просторах локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі функцій операторів Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta,p}$ знайдено асимптотичні нерівності.

2. Розвинено метод (який є модифікацією відповідного методу, застосованого О.І. Степанцем та А.С. Сердюком для одержання асимптотичних рівностей на класах періодичних функцій), що дозволив поширити результати, отримані на множинах $\widehat{L}^{\alpha}_{\beta}$, на випадок наближення на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$.

3. Знайдено оцінки норм відхилень у просторах локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі функцій операторів Валле Пуссена і модифікованих операторів Фур'є на множинах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ у випадку, коли функції ψ належать до множини $\mathcal{D}_{\alpha}$.

4. Для точних верхніх меж відхилень в просторах локально інтегрованих за Лебегом на дійсній осі функцій операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha}$ отримано асимптотичні нерівності.

5. Показано, що у випадку, якщо $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, всі отримані нерівності перетворюються у рівності, що дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

6. Для точних верхніх меж відхилень операторів $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{1}$, $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, в інтегральній метриці знайдено асимптотичну рівність, яка дає розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [176–180, 224].

Розділ 5

Наближення періодичних функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича

Цей розділ присвячено знаходженню умов вкладення, а також доведенню прямих та обернених теорем теорії наближення на множинах ψ-диференційованих функцій у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.

5.1. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$

Нехай $p = p(x)$ — 2π-періодична вимірна і істотно обмежена функція і $L^{p(\cdot)}$ — множина вимірних 2π-періодичних функцій $f(x)$ таких, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty. \tag{5.1}$$

Якщо $\underline{p} := \operatorname{ess\,inf}\limits_{x} |p(x)| \geq 1$ і $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}\limits_{x} |p(x)| < \infty$, то множини $L^{p(\cdot)}$ є банаховими просторами [258] (див., також, [101]) з нормою, яка може бути задана формулою

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

При цьому простори $L^{p'(\cdot)}$, де $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, є спряженим до $L^{p(\cdot)}$ і для довільних функцій $f \in L^{p(\cdot)}$ і $g \in L^{p'(\cdot)}$ справджується аналог класичної нерівності Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)|\, dx \le r\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}, \quad r \le 1/\underline{p} + 1/\underline{q}. \tag{5.2}$$

Визначені у такий спосіб простори $L^{p(\cdot)}$ називають *просторами Лебега зі змінним показником* або *узагальненими просторами Лебега.*

У подальшому будемо вважати, що показник $p = p(x)$ задовольняє умову Діні-Ліпшиця порядку γ, тобто:

$$\omega(p;\delta)\Big(\ln\frac{1}{\delta}\Big)^{\gamma} \le K, \quad 0 < \delta < 1, \tag{5.3}$$

де

$$\omega(p;\delta) = \sup_{x_1,x_2\in[-\pi;\pi]} \Big\{ |p(x_1) - p(x_2)| : \quad |x_1 - x_2| \le \delta \Big\}.$$

Множину 2π-періодичних показників $p = p(x) > 1$, $\bar{p} < \infty$, які на періоді задовольняють умову Діні-Ліпшиця порядку $\gamma \ge 1$, будемо позначати $\mathcal{P}^{\gamma}$.

Позначимо через $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ множини ψ-інтегралів (див. означення 3.1.1) функцій із просторів $L^{p(\cdot)}$ і одержимо умови вкладення $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ для різних співвідношень між показниками $p = p(x)$ і $s = s(x)$.

5.1.1. Умови вкладення $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ у випадку $s(x) \le p(x)$

Будемо вважати, що пара $\psi = (\psi_1;\psi_2)$ систем чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$ належить множині Υ_{α}, $\alpha \ge 0$, якщо величини

$$\varsigma_{\alpha}(\psi_i) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_i(k)|k^{\alpha}, \quad i = 1,2,$$

$$\sigma_{\alpha}(\psi_i) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{2^m}^{2^{m+1}} |\psi_i(k+1)(k+1)^{\alpha} - \psi_i(k)k^{\alpha}|, \quad i = 1,2,$$

є скінченними.

Розглянемо спочатку випадок $p(x) \equiv s(x),\ x \in [0; 2\pi]$.

Теорема 5.1.1. *Якщо* $\psi \in \Upsilon_0$ *і* $p \in \mathcal{P}^\gamma$, *то* $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{p(\cdot)}$.

Доведення. Беручи до уваги зв'язок між ψ-інтегралом і ψ-похідною (див. лему 1.1.1), для довільної функції $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$ можна записати рівність

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \Lambda(f^\psi)(x) + \tilde{\Lambda}(\tilde{f}^\psi)(x), \tag{5.4}$$

де $\tilde{f}^\psi$ — функція, тригонометрично спряжена з f^ψ, а Λ і $\tilde{\Lambda}$ — оператори-мультиплікатори, що визначаються формулами

$$\Lambda = \{\lambda(k) = \psi_1(k), \quad k = 1, 2, \ldots\},$$

$$\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}(k) = \psi_2(k), \quad k = 1, 2, \ldots\}.$$

Оскільки за умовою теореми пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить до множини Υ_0, то з леми 1.5.1 випливає, що оператори-мультиплікатори Λ і $\tilde{\Lambda}$ діють з $L^{p(\cdot)}$ в $L^{p(\cdot)}$. Умова ж $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$ дає включення $f^\psi \in L^{p(\cdot)}$. Отже, згідно теореми 1.5.1 (нерівність (1.34)) будемо мати $\tilde{f}^\psi \in L^{p(\cdot)}$. Беручи до уваги ці факти, на підставі співвідношення (5.4) знаходимо

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|\frac{a_0(f)}{2} + \Lambda(f^\psi) + \tilde{\Lambda}(\tilde{f}^\psi)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq \|\frac{a_0(f)}{2}\|_{p(\cdot)} + \|\Lambda(f^\psi)\|_{p(\cdot)} + \|\tilde{\Lambda}(\tilde{f}^\psi)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq \|\frac{a_0(f)}{2}\|_{p(\cdot)} + K\|f^\psi\|_{p(\cdot)} + K\|\tilde{f}^\psi\|_{p(\cdot)} \leq K,$$

тобто функція f належить до $L^{p(\cdot)}$, що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

В роботі [260] показано, що у випадку $1 \le s(x) \le p(x) \le \bar{p} < \infty$, для довільної функції $f \in L^{p(\cdot)}$ справджується оцінка

$$\|f\|_{s(\cdot)} \le K_{s,p}\|f\|_{p(\cdot)}. \tag{5.5}$$

Враховуючи цей факт і теорему 5.1.1 отримуємо таке твердження.

Теорема 5.1.2. *Якщо* $\psi \in \Upsilon_0$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, *то* $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

5.1.2. Умови вкладення $L^\psi L^{p(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ у випадку $p(x) \le s(x)$

Розглянемо тепер випадок, коли в кожній точці періоду $[0; 2\pi]$ показники $p = p(x)$ і $s = s(x)$ задовольняють нерівності $p(x) \le s(x)$. Будемо використовувати наступну теорему Гарді-Літтлвуда.

Теорема 5.1.3. ***[G. Hardy, J. Littlewood [255]]*** *Нехай* $1 < p < s < \infty$, $p, s = \text{const}$, $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$ *і*

$$D_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos kt.$$

Тоді для довільної функції $\varphi \in L_p$ *згортка*

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) D_\alpha(t)\, dt$$

належить до L_s, *причому*

$$\|\Phi_\alpha\|_s \le C_{s,p}\|\varphi\|_p,$$

де $C_{s,p}$ *— величина, що залежить тільки від* s *і* p.

Зазначимо, якщо $\varphi \in L_p$ і $S[\varphi] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(\varphi; x)$, то

$$S[\Phi_\alpha] = \sum_{k=0}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(\varphi; x),$$

тобто $\Phi_\alpha = \mathrm{M}_\alpha(\varphi)$, де M_α — оператор-мультиплікатор, що визначається послідовністю $\mu_\alpha(k) = k^{-\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і діє з L_p в L_s, де показники $1 < p < s < \infty$, $p, s = \mathrm{const}$, пов'язані співвідношенням $p^{-1} - s^{-1} = \alpha$.

Теорема 5.1.4. *Нехай* $\psi \in \Upsilon_\alpha$, *де* $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $p(x) \le s(x)$, $x \in [0; 2\pi]$. *Тоді* $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

Доведення. Позначимо через Λ_α і $\tilde{\Lambda}_\alpha$ мультиплікатори, що породжуються послідовностями $k^\alpha \psi_1(k)$ і $k^\alpha \psi_2(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, відповідно. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \psi_1(k) \left[k^{-\alpha} A_k(f^\psi; x) \right] =$$

$$= \Lambda_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(f^\psi; x) \right) = \Lambda_\alpha \left(S \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x+t) D_\alpha(t)\, dt \right] \right), \qquad (5.6)$$

де $D_\alpha(t)$ — функція, визначена в теоремі 5.1.3.

Оскільки $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$, то $f^\psi \in L^{p(\cdot)}$, і тим більше $f^\psi \in L^{\underline{p}}$. На підставі теореми 5.1.3 робимо висновок, що згортка

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x+t) D_\alpha(t)\, dt$$

знаходиться в $L^{\overline{s}}$, і тим більше $g_\alpha \in L^{s(\cdot)}$. З умови $\psi \in \Upsilon_\alpha$ на підставі леми 1.5.1 випливає, що оператор-мультиплікатор Λ_α діє з $L^{s(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ для довільного $s \in \mathcal{P}^\gamma$. Тому зі співвідношення (1.36) і рівності (5.6) отримуємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) \right\|_{s(\cdot)} = \| \Lambda_\alpha(S[g_\alpha]) \|_{s(\cdot)} \le K \| g_\alpha \|_{s(\cdot)} \le C_{p,s}, \qquad (5.7)$$

де величина $C_{p,s}$ залежить тільки від функцій $p = p(x)$ і $s = s(x)$.

Аналогічно знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \psi_2(k) \left[k^{-\alpha} \tilde{A}_k(f^\psi; x) \right] =$$

$$= \tilde{\Lambda}_\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\tilde{A}_k(f^\psi;x)\right) = \tilde{\Lambda}_\alpha(S[\tilde{g}_\alpha]). \tag{5.8}$$

Оскільки оператор-мультиплікатор $\tilde{\Lambda}_\alpha$ діє з $L^{s(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ для довільного $s \in \mathcal{P}^\gamma$, а функція $\tilde{g}_\alpha \in L^{s(\cdot)}$, то на підставі співвідношення (1.36), рівності (5.8) і леми 1.5.1 будемо мати

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^\psi;\cdot)\right\|_{s(\cdot)} = \|\tilde{\Lambda}_\alpha(S[\tilde{g}_\alpha])\|_{s(\cdot)} \le K_{p,s}. \tag{5.9}$$

Співставлення співвідношень (5.4), (5.7) і (5.9) переконує нас в справедливості твердження теореми.

Теорему доведено.

5.1.3. Наслідки з теорем 5.1.2 і 5.1.4

Відповідно до означення 3.1.3, позначимо через $L^\psi_\beta L^{p(\cdot)}$ множини $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій $f \in L$, у яких $f^\psi_\beta \in L^{p(\cdot)}$ і умовимося вважати, що пара $(\psi;\beta)$ належить множині Υ_α, якщо цій множині належить пара $\psi = (\psi_1;\psi_2)$, з компонентами, що визначаються формулами (3.54).

З теорем 5.1.2 і 5.1.4 отримуємо такі наслідки.

Наслідок 5.1.1. *Якщо* $(\psi;\beta) \in \Upsilon_0$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0;2\pi]$, *то* $L^\psi_\beta L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

Наслідок 5.1.2. *Нехай* $(\psi;\beta) \in \Upsilon_\alpha$, *де* $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $p(x) \le s(x)$, $x \in [0;2\pi]$. *Тоді* $L^\psi_\beta L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.

В свою чергу (див., наприклад [204]), якщо у рівностях (3.54) послідовність $\psi(k)$ вибрати відповідно до рівності

$$\psi_r(k) = \frac{1}{k^r}, \quad r > 0,\ k \in \mathbb{N},$$

то визначення $(\psi;\beta)$-похідної співпадає з означенням відомої $(r;\beta)$-похідної в розумінні Вейля-Надя (для позначення якої будемо використовувати позначення $D^r_\beta(\cdot) := D^{\psi_r}_\beta(\cdot)$). Для класів $(r;\beta)$-диференційованих функцій

$W^r_\beta L^{p(\cdot)}$ умови вкладення приймають вигляд.

Наслідок 5.1.3. *Якщо* $(\psi_r;\beta)\in\Upsilon_0,\ p,s\in\mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $s(x)\le p(x),\ x\in[0;2\pi]$, *то* $W^r_\beta L^{p(\cdot)}\subset L^{s(\cdot)}$.

Наслідок 5.1.4. *Нехай* $(\psi_r;\beta)\in\Upsilon_\alpha$, *де* $\alpha=1/\underline{p}-1/\overline{s},\ p,s\in\mathcal{P}^\gamma$ *і виконується нерівність* $p(x)\le s(x),\ x\in[0;2\pi]$. *Тоді* $W^r_\beta L^{p(\cdot)}\subset L^{s(\cdot)}$.

5.2. Наближення сумами Фур'є функцій з множин $L^\psi L^{p(\cdot)}$

Нехай

$$E_n(f)_{p(\cdot)}:=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f-t_{n-1}\|_{p(\cdot)},$$

— найкраще наближення в просторі $L^{p(\cdot)}$ функції f за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вищого за $n-1$,

$$S_n(f;x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx+b_k(f)\sin\ kx),\quad n=0,1,\dots,\qquad(5.10)$$

— частинні суми Фур'є порядку n функції f і

$$\rho_n(f;x):=f(x)-S_{n-1}(f;x).$$

Знайдемо порядкові оцінки для величин $E_n(f)_{s(\cdot)}$ і $\|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)}$, за умови $f\in L^\psi L^{p(\cdot)},\ p,s\in\mathcal{P}^\gamma$. При цьому будемо вважати, що пари $\psi=(\psi_1;\psi_2)$ належать до множини $\Upsilon_\alpha,\ \alpha=1/\underline{p}-1/\overline{s}$ і задовольняють деяким додатковим умовам.

Переконаємося, що справджується таке допоміжне твердження.

Лема 5.2.1. *Нехай показники* $p,s\in\mathcal{P}^\gamma$ *на періоді* $x\in[0;2\pi]$ *пов'язані одним із співвідношень* $p(x)<s(x)$ *або* $p(x)\ge s(x)$. *Нехай далі*

$$\alpha=\begin{cases}\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\overline{s}}, & p(x)<s(x),\\ 0, & p(x)\ge s(x).\end{cases}\qquad(5.11)$$

$\Lambda_\alpha^{(n)}$ *і* $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}$ *— оператори-мультиплікатори, визначені послідовностями*

$$\lambda_\alpha^{(n)} = \lambda_\alpha^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^\alpha \psi_1(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{5.12}$$

і

$$\tilde{\lambda}_\alpha^{(n)} = \tilde{\lambda}_\alpha^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^\alpha \psi_2(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{5.13}$$

і такі, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ *і довільної функції* $f \in L^{s(\cdot)}$ *виконуються включення*

$$\Lambda_\alpha^{(n)}(f) \in L^{s(\cdot)}, \quad \tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}(f) \in L^{s(\cdot)}.$$

Тоді, якщо $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$, *то для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *справджується співвідношення*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} \leq K_{p,s}^{(n)} \|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq C_{p,s}^{(n)} E_n(f^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{5.14}$$

де $K_{p,s}^{(n)}$, $C_{p,s}^{(n)} > 0$ *— величини, що не залежать від функції* f.

Доведення. Використовуючи співвідношення (5.4), знаходимо

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} = \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f;\cdot) \Big\|_{s(\cdot)} \leq$$

$$\leq \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;\cdot) \Big\|_{s(\cdot)} + \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\lambda}(k) \tilde{A}_k(f^\psi;\cdot) \Big\|_{s(\cdot)}, \tag{5.15}$$

де $\lambda(k)$ і $\tilde{\lambda}(k)$ — послідовності, визначені рівностями

$$\lambda(k) = \psi_1(k), \quad \tilde{\lambda}(k) = \psi_2(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай спочатку показники $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ в кожній точці $x \in [0; 2\pi]$ задовольняють нерівності $s(x) > p(x)$. В цьому випадку з урахуванням співвід-

ношення (5.6) будемо мати

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda(k)A_k(f^{\psi};x)=\sum_{k=n}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f^{\psi};x)=$$

$$=\Lambda_{\alpha}^{(n)}\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};x+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right]\right),\tag{5.16}$$

де $\Lambda_{\alpha}^{(n)}$ — оператор-мультиплікатор, що визначається послідовністю (5.12) при $\alpha=\frac{1}{\underline{p}}-\frac{1}{\bar{s}}$. Звідси на підставі леми 1.5.1 і теореми 5.1.3 отримуємо

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\lambda(k)A_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)}=\left\|\Lambda_{\alpha}^{(n)}\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right]\right)\right\|_{s(\cdot)}\leq$$

$$\leq K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right\|_{s(\cdot)}\leq K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right\|_{\bar{s}}\leq$$

$$\leq K_{n,s}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_{\underline{p}}\leq K_{n,s}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_{p(\cdot)}.\tag{5.17}$$

Використовуючи аналогічні міркування, з урахуванням нерівності (1.34) знаходимо

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{\lambda}(k)\tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)}=\left\|\tilde{\Lambda}_{\alpha}^{(n)}U\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right]\right)\right\|_{s(\cdot)}\leq$$

$$\leq K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^{\psi};\cdot+t)D_{\alpha}(t)\,dt\right\|_{s(\cdot)}\leq K_{n,s}\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_{p(\cdot)},\tag{5.18}$$

де U — оператор тригонометричного спряження.

Поєднуючи співвідношення (5.15) – (5.18), отримуємо проміжну оцінку в співвідношенні (5.14) і для завершення доведення леми у випадку $s(x)>p(x)$, залишається скористатись нерівністю (1.37).

Якщо $s(x)\leq p(x)$, то $\alpha=0$ і тоді при $k\geq n$ будемо мати

$\lambda_\alpha^{(n)}(k) = \lambda_0^{(n)}(k) = \psi_1(k)$. Тому

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi;\cdot) \Big\|_{s(\cdot)} = \Big\| \Lambda_0^{(n)}(\rho_n(f^\psi;\cdot)) \Big\|_{s(\cdot)} \le K_{n,s} \|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{s(\cdot)}. \quad (5.19)$$

Аналогічно, враховуючи співвідношення (1.34), знаходимо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi;\cdot) \Big\|_{s(\cdot)} \le K_{n,s} \|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{s(\cdot)}. \quad (5.20)$$

Співставлення співвідношень (5.15) і (5.19) – (5.20), дозволяє записати оцінку

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} \le K_{p,s}^{(n)} \|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{s(\cdot)}.$$

Якщо тепер $s(x) \equiv p(x)$, то для одержання (5.14) достатньо застосувати оцінку (1.37). Якщо ж в деякій частині періоду $[0; 2\pi]$ виконується строга нерівність $s(x) < p(x)$, то попередньо потрібно скористатися нерівністю (5.5).

Лему доведено.

При кожному фіксованому $\alpha \ge 0$ через $\Upsilon_{\alpha,n}$ позначимо підмножину пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ з Υ_α таких, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умовам

$$\varsigma_\alpha(\psi_i; n) = \sup_k |\psi_{i,n}(k)| k^\alpha \le C\nu_i(n) n^\alpha, \quad i = 1, 2, \quad (5.21)$$

$$\sigma_\alpha(\psi_i; n) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_{i,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{i,n}(k) k^\alpha| \le$$
$$\le C\nu_i(n) n^\alpha, \quad i = 1, 2, \quad (5.22)$$

де

$$\psi_{i,n}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi_i(k), & k \ge n, \quad i = 1, 2; \end{cases}$$

$\nu_i(n) = \nu(\psi_i; n) = \sup\limits_{k\ge n} |\psi_i(k)|$, $i = 1, 2$, C — константа, рівномірно обмежена по n, і переконаємося в справедливості такого твердження.

Лема 5.2.2. *Якщо $\psi \in \Upsilon_{\alpha,n}$, то мультиплікатори $\Lambda_\alpha^{(n)}$ і $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}$, що визначаються послідовностями (5.12) і (5.13) діють з $L^{p(\cdot)}$ в $L^{p(\cdot)}$ при до-*

вільному $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, *причому*

$$\|\Lambda_{\alpha}^{(n)}(f)\|_{p(\cdot)} \le C_{p,\alpha}\nu_1(n)n^{\alpha}\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{5.23}$$

і

$$\|\tilde{\Lambda}_{\alpha}^{(n)}(f)\|_{p(\cdot)} \le C_{p,\alpha}\nu_2(n)n^{\alpha}\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{5.24}$$

де $C_{p,\alpha} > 0$ *— величина, що не залежить від* f.

Доведення цієї леми випливає з леми 1.5.1. Дійсно, згідно зі співвідношеннями (5.21) і (5.22) справджуються оцінки:

$$\varsigma_0(\lambda_{n,\alpha}) = \sup_{k}|\lambda_{n,\alpha}(k)| = \sup_{k\ge n}|\psi_1(k)|k^{\alpha} \le C\nu_1(n)n^{\alpha};$$

$$\sigma_0(\lambda_{n,\alpha}) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}|\psi_{1,n}(k+1)(k+1)^{\alpha} - \psi_{1,n}(k)(k)^{\alpha}| \le C\nu_1(n)n^{\alpha}.$$

Звідси, оскільки для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\nu_1(n)n^{\alpha} = \sup_{k\ge n}|\psi_1(k)|n^{\alpha} \le \sup_{k\in\mathbb{N}}|\psi_1(k)|k^{\alpha},$$

то внаслідок включення $\psi \in \Upsilon_{\alpha}$, величини $\nu_1(n)n^{\alpha}$ є скінченними. Отже, для довільного показника $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$ і $f \in L^{p(\cdot)}$ виконується включення $\Lambda_{\alpha}^{(n)}(f) \in L^{p(\cdot)}$. До того ж, в цьому випадку

$$\lambda = \lambda(\lambda_{n,\alpha}) \le \nu_1(n)n^{\alpha},$$

тому нерівність (5.23) випливає з оцінки (1.40).

Очевидно, що аналогічні міркування можуть бути використаними і для доведення справедливості співвідношень (5.24).

Лему доведено.

Використовуючи в ході доведення леми 5.2.1 нерівності (5.23) – (5.24) і враховуючи при цьому співвідношення

$$\frac{1}{2}(\nu_1(n) + \nu_2(n)) \le \nu(n) \le (\nu_1(n) + \nu_2(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.25}$$

де $\nu(n) = \sup\limits_{k\geq n}\psi(k)$, $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, отримуємо таке твердження.

Теорема 5.2.1. *Нехай показники $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ на періоді $x \in [0; 2\pi]$ пов'язані одним із співвідношень $p(x) < s(x)$ або $p(x) \geq s(x)$, і пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить до множини $\Upsilon_{\alpha,n}$, де число α визначається формулою (5.11).*

Тоді, якщо $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\nu(n)n^\alpha\|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq K_{p,s}\nu(n)n^\alpha E_n(f^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{5.26}$$

де $\nu(n) = \sup\limits_{k\geq n}\psi(k)$, $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, $C_{p,s}, K_{p,s}$ — величини, рівномірно обмежені по n і f.

Відзначимо один важливий частинний випадок теореми 5.2.1. Позначимо через Υ_α^* підмножину пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ з Υ_α таких, що числа $|\psi_i(k)|k^\alpha$, $i = 1, 2$, $\alpha \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, не зростають. Тоді пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить множині $\Upsilon_{\alpha,n}$ і при цьому

$$\varsigma_\alpha(\psi_i; n) = |\psi_i(n)|n^\alpha, \quad \sigma_\alpha(\psi_i; n) \leq 2|\psi_i(n)|n^\alpha, \quad i = 1, 2.$$

Отже $\nu_1(n) = |\psi_1(n)|$, $\nu_2(n) = |\psi_2(n)|$, $\nu(n) = \psi(n)$ і справджується така теорема.

Теорема 5.2.2. *Нехай показники $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$ на періоді $x \in [0; 2\pi]$ пов'язані одним із співвідношень $p(x) < s(x)$ або $p(x) \geq s(x)$, і пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ належить множині Υ_α^*, де число α визначається формулою (5.11).*

Тоді, якщо $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\psi(n)n^\alpha\|\rho_n(f^\psi;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq K_{p,s}\psi(n)n^\alpha E_n(f^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{5.27}$$

де $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, $K_{p,s}, C_{p,s}$ — величини, рівномірно обмежені по

n *і* f.

Нехай $U_{p(\cdot)} := \{\varphi \in L^{p(\cdot)} : \ \|\varphi\|_{p(\cdot)} \le 1\}$ — одинична куля простору $L^{p(\cdot)}$ і $L^{\psi}_{p(\cdot)} := L^{\psi}U_{p(\cdot)}$. Тоді

$$E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)} \le \|f^{\psi} - 0\|_{p(\cdot)} \le \|f^{\psi}\|_{p(\cdot)} \le 1, \quad \forall f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}. \tag{5.28}$$

Враховуючи цей факт, на підставі теорем 5.2.1 і 5.2.2 отримуємо таке твердження.

Теорема 5.2.3. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ *на періоді* $x \in [0; 2\pi]$ *пов'язані одним із співвідношень* $p(x) < s(x)$ *або* $p(x) \ge s(x)$, *і пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить до множини* $\Upsilon_{\alpha,n}$, *де число* α *визначається формулою (5.11). Тоді*

$$E_n\big(L^{\psi}_{p(\cdot)}\big)_{s(\cdot)} \le \mathcal{E}\big(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n\big)_{s(\cdot)} \le C_{p,s}\nu(n)n^{\alpha}, \tag{5.29}$$

Зокрема, якщо пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить множині* Υ^{*}_{α}, *то*

$$E_n\big(L^{\psi}_{p(\cdot)}\big)_{s(\cdot)} \le \mathcal{E}\big(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n\big)_{s(\cdot)} \le C_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}, \tag{5.30}$$

де

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} \inf_{T_n \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - T_n\|_{s(\cdot)}$$

— найкраще наближення класу $L^{\psi}_{p(\cdot)}$ *за допомогою підпростору* $\mathcal{T}_{2n-1}$ *тригонометричних поліномів, порядку не вищого за* n;

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} \|f - S_n(f)\|_{s(\cdot)}$$

— верхня межа відхилення сум Фур'є на класі $L^{\psi}_{p(\cdot)}$ *в просторі* $L_{s(\cdot)}$.

Відзначимо, що у випадку, коли $\alpha = 0$ (тобто, якщо $p(x) \ge s(x)$, $x \in [0; 2\pi]$) оцінки (5.29) і (5.30) є точними за порядком. Дійсно, нехай для даної функції $\psi(k)$ і числа $n \in \mathbb{N}$ існує натуральне число

k_n, для якого справджується рівність

$$\nu(n) = \sup_{k\geq n} |\psi(k)| = \psi(k_n). \tag{5.31}$$

Розглянемо функцію

$$f_n(x) = \|\cos k_n x\|_{p(\cdot)}^{-1}\big(\psi_1(k_n)\cos k_n x + \psi_2(k_n)\sin k_n x\big). \tag{5.32}$$

Оскільки

$$D^{\psi}(f_n(x)) = \frac{\cos k_n x}{\|\cos k_n x\|_{p(\cdot)}},$$

і $\|D^{\psi}(f_n)\|_{p(\cdot)} = 1$, то функція $f_n \in L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}$. Беручи до уваги нерівність (5.5), будемо мати

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} \geq \|\rho_n(f_n;\cdot)\|_{s(\cdot)} = \frac{\psi(k_n)}{\|\cos k_n x\|_{p(\cdot)}}\|\cos\big(k_n x - \gamma_{n_k}\big)\|_{s(\cdot)} \geq$$

$$\geq \psi(k_n)\frac{\|\cos x\|_{\underline{s}}}{\|\cos x\|_{\bar{p}}} = C_{p,s}\nu(n), \quad \gamma_{n_k} := \operatorname{arctg}\frac{\psi_2(k_n)}{\psi_1(k_n)}.$$

Якщо ж для даної функції $\psi(k)$ і числа $n \in \mathbb{N}$ не існує натурального числа k_n, для якого справджується рівність (5.31), то внаслідок обмеженості множини $\{|\psi(k)|\}$ значень функції $\psi(k)$ будемо мати

$$\nu(n) = \sup_{k\geq n} |\psi(k)| = \sup_{k\geq n}\{|\psi(k)|\}.$$

При цьому існує послідовність k_j, $j \in \mathbb{N}$ така, що $k_j \geq n$ і числа $\psi(k_j)$ не спадаючи прямують до $\nu(n)$. Позначимо через $\mathscr{A} = \cup_j f_j(x)$ множину, яка складається з усіх функцій $f_j(x)$ вигляду (5.32). Оскільки $f_j \in L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}$ при довільному $j \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p(\cdot)}} \|f - S_n(f)\|_{s(\cdot)} \geq \sup_{f\in\mathscr{A}} \|f - S_n(f)\|_{s(\cdot)} =$$

$$= \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\psi(k_j)}{\|\cos k_j x\|_{p(\cdot)}}\|\cos\big(k_j x - \gamma_{n_j}\big)\|_{s(\cdot)} \geq \frac{\|\cos x\|_{\underline{s}}}{\|\cos x\|_{\bar{p}}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \psi(k_j) = C_{p,s}\nu(n).$$

Аналогічно до того, як це було зроблено в підрозділі 5.1.3, з теорем

5.2.1 – 5.2.3 можно отримати наслідки у випадках наближень сумами Фур'є на множинах $L^{\psi}_{\beta}L^{p(\cdot)}$ і $W^{r}_{\beta}L^{p(\cdot)}$. Запишемо, наприклад, наслідок з теореми 5.2.1 для множин $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій.

Наслідок 5.2.1. *Нехай показники $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ на періоді $x \in [0; 2\pi]$ пов'язані одним із співвідношень $p(x) < s(x)$, або $p(x) \geq s(x)$, і пара $(\psi;\beta)$ належить множині Υ^{*}_{α}, де число α визначається формулою (5.11).*

Тоді, якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}L^{p(\cdot)}$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}\|\rho_n(f^{\psi}_{\beta};\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq K_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}E_n(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)},$$

де $K_{p,s}, C_{p,s}$ — величини, рівномірно обмежені по n, β і f.

5.3. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L_M$ та наближення сумами Фур'є

Результати попередніх підрозділів розділу 5 можуть бути поширеними на випадок просторів Орлича. У цьому підрозділі отримано відповідні твердження щодо умов вкладення множин $L^{\psi}L_M$, а також знайдено порядкові оцінки наближень сумами Фур'є функцій з цих множин у просторах Орлича.

Наведемо необхідні означення з теорії просторів Орлича (див., наприклад, [45, 102]).

Неперервна опукла вниз функція $M = M(x)$ називається *функцією Юнга (N-функцією)*, якщо M є парною і задовольняє умовам

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x} = \infty.$$

Кажуть, що функція M задовольняє умову Δ_2 $(M \in \Delta_2)$, якщо існує така стала $c > 0$, що

$$M(2x) \leq c\, M(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нехай функція Юнга $M \in \Delta_2$. Через L_M позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних функцій $f : [0; 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення

$$\int_0^{2\pi} M(\lambda|f(t)|)\, dt < \infty$$

при довільному $\lambda > 0$. Споряджений нормою

$$\|f\|_M := \sup\left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\, dt : \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{M}(|g(t)|)\, dt \le 1 \right\},$$

де

$$\widetilde{M}(y) := \max_{x \ge 0}\{x|y| - M(x)\}$$

функція, *додаткова* до функції M в сенсі Юнга, простір L_M стає банаховим простором, який називають *простором Орлича*, породженим функцією M.

Для довільної пари функцій $u(x) \in L_M$ і $v(x) \in L_{\widetilde{M}}$, де $\widetilde{M}$ — функція, додаткова до M в сенсі Юнга, справджується нерівність [102, с. 91]:

$$\int_0^{2\pi} |u(x)v(x)|\, dx \le \|u\|_M \|v\|_{\widetilde{M}},$$

яку називають нерівністю Гельдера. Звідси, зокрема, випливає, що кожна функція з L_M є сумовною (тобто $L_M \subset L$, де L — простір сумовних на періоді функцій).

Функції Юнга $M(x)$ і $N(x)$ називаються *еквівалентними* ($M \sim N$) (див. [102, с. 132]), якщо існують такі додатні сталі k_1, k_2 і x_0, що для всіх $x \ge x_0$ одночасно справджуються нерівності

$$N(k_1 x) \le M(x) \tag{5.33}$$

і

$$M(x) \le N(k_2 x). \tag{5.34}$$

Відомо, що необхідною і достатньою умовою поелементного збігу двох просторів Орлича L_M і L_N є умова еквівалентності функцій Юнга, що їх визначають, тобто

$$L_M = L_N \Leftrightarrow M(x) \sim N(x).$$

У випадку, коли виконана тільки нерівність (5.33), то для відповідних класів Орлича L_M і L_N має місце включення $L_M \subset L_N$ і (див. [102, с. 132]) існує така додатна стала K, що

$$\|u\|_N \le K\|u\|_M, \quad u(x) \in L_M. \tag{5.35}$$

Якщо ж виконана тільки нерівність (5.34), то $L_N \subset L_M$.

Простори Орлича добре відомі як узагальнення просторів Лебега L_p функцій, сумовних в степені p, $1 < p < \infty$. В окремому випадку простори Орлича, породжені функціями вигляду $M_p(x) = x^p/p$, $1 < p < \infty$, є ізоморфними просторам Лебега L_p.

Позначимо через $\mathscr{Y}$ множину функцій Юнга $M \in \Delta_2$, які задовольняють наступним додатковим умовам: існують два числа p_1 і p_2 $(1 < p_1 < p_2 < \infty)$ такі, що для деяких констант $\varepsilon, \delta > 0$ $p_1 + \varepsilon < p_2 - \delta$ функція $M(u)u^{-(p_1+\varepsilon)}$ не спадає, а функція $M(u)u^{-(p_2-\delta)}$ не зростає при $u \to \infty$.

Розглянемо спочатку випадок $M \sim N$. Справджується наступне твердження.

Теорема 5.3.1. *Нехай $M \sim N \in \mathscr{Y}$ і $\psi \in \Upsilon_0$, де Υ_0 — множина, визначена у підрозділі 5.1.1. Тоді має місце вкладення $L^\psi L_M \subset L_N$.*

Доведення теореми 5.3.1 проводиться за схемою доведення теореми 5.1.1. Дійсно, застосовуючи лему 1.6.1 замість леми 1.5.1, а також теорему 1.6.1 (при $\omega(t) \equiv 1$) замість теореми 1.5.1 і використовуючи нерівності вигляду

$$\int_0^{2\pi} M(f_1(x) + f_2(x))dx \le c\Big(\int_0^{2\pi} M(f_1(x))dx + \int_0^{2\pi} M(f_2(x))dx\Big),$$

для довільної функції $f \in L^\psi L_M$ отримуємо

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x)|)\, dx \le c.$$

Звідси випливає, що $f \in L_M$ і, внаслідок того, що простори L_M і L_N складаються з одних і тих же функцій, то $f \in L_N$.

Теорему доведено.

Оскільки при виконанні умови (5.33) матиме місце вкладення $L_M \subset L_N$, то з теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5.3.1. *Якщо* $M, N \in \mathscr{Y}$, $\psi \in \Upsilon_0$ *і виконана умова (5.33), то має місце вкладення* $L^{\psi}L_M \subset L_N$.

Далі нам знадобляться наступні відомості з теорії просторів Орлича [26–28] (див., також, [19]). Нехай $M^{-1} : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ — функція, обернена до M і нехай

$$h(t) := \lim_{x\to\infty} \sup \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0.$$

Числа β_M і γ_M, які визначаються наступним чином:

$$\beta_M := \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln h(t)}{\ln t}, \quad \gamma_M := \lim_{t\to 0+} -\frac{\ln h(t)}{\ln t},$$

називаються, відповідно, нижнім і верхнім індексами Бойда (lower and upper Boyd indices) простору Орлича L_M.

Відомо, що якщо M є функцією Юнга, то індекси Бойда завжди існують і задовольняють нерівності

$$0 \le \beta_M \le \gamma_M \le 1,$$

і, крім того, для них справджуються рівності

$$\beta_M + \gamma_{\widetilde{M}} = 1, \quad \beta_{\widetilde{M}} + \gamma_M = 1,$$

де M і $\widetilde{M}$ — додаткові в сенсі Юнга функції. Відомо також, що простір Орлича L_M є рефлексивним тоді і тільки тоді, коли $0 < \beta_M \le \gamma_M < 1$ і, якщо

$$1 \le q < \frac{1}{\gamma_M} \le \frac{1}{\beta_M} < p \le \infty,$$

то мають місце вкладення $L_p \subset L_M \subset L_q$.

Позначимо через $\mathscr{Y}_*$ підмножину функцій $M \in \mathscr{Y}$ у яких

$$0 < \beta_M \le \gamma_M < 1,$$

і отримаємо умови вкладення для множин $L^{\psi}L_M$ у випадку, коли функції

$M, N \in \mathscr{Y}_*$ задовольняють умові (5.34), і отже для відповідних просторів Орлича виконується вкладення $L_N \subset L_M$. Виберемо числа $q = q(M)$, $p = p(N)$ так, щоб виконувалися нерівності

$$1 < q < \frac{1}{\gamma_M} \le \frac{1}{\beta_M} < \infty, \quad 1 < \frac{1}{\gamma_N} \le \frac{1}{\beta_N} < p < \infty. \tag{5.36}$$

Очевидно, що в цьому випадку будуть мати місце вкладення

$$L_p \subset L_N \subset L_M \subset L_q, \tag{5.37}$$

і виконуватися нерівності для норм

$$\|f\|_q \le c_1\|f\|_M \le c_2\|f\|_N \le c_3\|f\|_p, \quad f \in L_p, \tag{5.38}$$

де c_i, $i = 1, 2, 3$, — додатні сталі.

Теорема 5.3.2. *Нехай $M, N \in \mathscr{Y}_*$ і виконано умову (5.34). Тоді якщо $\psi \in \Upsilon_\alpha$, де $\alpha = 1/q - 1/p$ і числа $q = q(M)$, $p = p(N)$ вибрані відповідно до (5.36), то $L^\psi L_M \subset L_N$.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.1.4. Оскільки $f \in L^\psi L_M$, то $f^\psi \in L_M$, і тим більше $f^\psi \in L_q$. На підставі теореми 5.1.3 робимо висновок, що згортка

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x+t)D_\alpha(t)\,dt$$

в якій $D_\alpha(t)$ — функція, визначена в теоремі 5.1.3, знаходиться в L_p, і тим більше $g_\alpha \in L_N$. З умови $\psi \in \Upsilon_\alpha$ на підставі леми 1.6.1 випливає, що оператор-мультиплікатор Λ_α, породжений послідовністю $\{k^\alpha\psi_1(k)\}_{k=1}^\infty$, діє з L_N в L_N для довільного $N \in \mathscr{Y}$. Тому зі співвідношення (1.51), рівності (5.6) і леми 1.6.1 одержуємо

$$\int_0^{2\pi} N\Big(\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f^\psi;x)\Big|\Big)\,dx = \int_0^{2\pi} N\Big(\Big|\Lambda_\alpha\{S(g_\alpha;x)\}\Big|\Big)\,dx \le$$

$$\le K\int_0^{2\pi} N(|g_\alpha(x)|)\,dx \le K, \tag{5.39}$$

і після аналогічних міркувань отримуємо оцінку

$$\int_0^{2\pi} N\Big(\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^{\psi};x)\Big|\Big)\,dx \le K, \tag{5.40}$$

де константа K не залежить від функції f.

Зіставляючи тепер співвідношення (5.4), (5.39) і (5.40) переконуємося в справедливості твердження теореми.

Теорему доведено.

Знайдемо тепер порядкові оцінки для величин $E_n(f)_M$ і $\|\rho_n(f)\|_M$, де

$$\rho_n(f) = \rho_n(f;x) := f(x) - S_{n-1}(f;x), \quad f \in L^{\psi}L_M,$$

за умови, що $M \in \mathscr{Y}_*$, пари ψ належать до множини Υ_α і підпорядковані деяким додатковим умовам.

В подальшому будемо вважати, що показник α вибраний за правилом: $\alpha = 0$, якщо виконується нерівність (5.33) (тобто $M \sim N$); якщо ж для функцій M і N справджується нерівність (5.34), то $\alpha = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, де числа $q = q(M)$, $p = p(N)$ вибрано відповідно до (5.36). Переконаємося спочатку у справедливості наступного допоміжного твердження.

Лема 5.3.1. *Нехай функції $M, N \in \mathscr{Y}_*$ і пов'язані співвідношеннями (5.33) та/або (5.34). Нехай, далі, $\psi \in \Upsilon_\alpha$ і $\Lambda_\alpha^{(n)}$ та $\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}$ — оператори-мультиплікатори, задані послідовностями (5.12) і (5.13) відповідно, і такі, що при кожному $n = 1, 2, \ldots$, для довільної функції $f \in L_N$ справджуються включення*

$$\Lambda_\alpha^{(n)}\{S(f;\cdot)\} \in L_N, \quad \tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}\{S(f)\} \in L_N.$$

Тоді, якщо $f \in L^{\psi}L_M$, то для довільного натурального n має місце співвідношення

$$E_n(f)_N \le \|\rho_n(f)\|_N \le c_1\|\rho_n(f^{\psi})\|_M \le c_2 E_n(f^{\psi})_M, \tag{5.41}$$

де c_1, c_2 *— додатні сталі, що не залежать від функції* f.

Доведення. Використовуючи співвідношення (5.4), знаходимо

$$E_n(f)_N \le \|\rho_n(f)\|_N = \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f;\cdot)\Big\|_N \le$$

$$\le \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;\cdot)\Big\|_N + \Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde\lambda(k) \tilde A_k(f^\psi;\cdot)\Big\|_N, \tag{5.42}$$

де $\lambda(k)$ і $\tilde\lambda(k)$ — послідовності, визначені рівностями

$$\lambda(k) = \psi_1(k), \quad \tilde\lambda(k) = \psi_2(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай спочатку функції M і N задовольняють нерівності (5.34). Використовуючи лему 1.6.1, на підставі співвідношення (5.16) отримуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} N\Big(\Big| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi; x)\Big|\Big)\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} N\Big(\Big|\Lambda_\alpha^{(n)}\Big\{S\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^\psi; x+t) D_\alpha(t)\, dt\Big]\Big\}\Big|\Big)\, dx \le$$

$$\le c \int_{-\pi}^{\pi} N\Big(\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^\psi; x+t) D_\alpha(t)\, dt\Big|\Big)\, dx,$$

де c — константа, що не залежить від f.

Звідси випливає нерівність для норм

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;\cdot)\Big\|_N \le c \Big\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^\psi;\cdot + t) D_\alpha(t)\, dt\Big\|_N. \tag{5.43}$$

Скориставшись тепер співвідношеннями (5.38) і застосовуючи теорему 5.1.3, з оцінки (5.43) одержуємо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(k) A_k(f^\psi;\cdot)\Big\|_N \le c_1 \Big\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^\psi;\cdot + t) D_\alpha(t)\, dt\Big\|_p \le$$

$$\le c_2 \|\rho_n(f^\psi)\|_q \le c_3 \|\rho_n(f^\psi)\|_M. \tag{5.44}$$

Проводячи аналогічні міркування, з урахуванням нерівності (1.49) (при $\omega(t) \equiv 1$), знаходимо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\lambda}(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; \cdot) \Big\|_N = \Big\| \tilde{\Lambda}_{\alpha}^{(n)} U \Big\{ S\Big[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; \cdot + t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big] \Big\} \Big\|_N \leq$$

$$\leq c_1 \Big\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi}; \cdot + t) D_{\alpha}(t)\, dt \Big\|_N \leq c_2 \|\rho_n(f^{\psi}; \cdot)\|_M, \tag{5.45}$$

де U — оператор тригонометричного спряження.

Співставлення нерівностей (5.42) і (5.44) – (5.45), переконує нас в справедливості проміжної оцінки у співвідношенні (5.41), і для завершення доведення леми в розглянутому випадку залишається скористатися (1.52).

Якщо виконана умова (5.33), то $\alpha = 0$ і тоді при $k \geq n$ матимемо $\lambda_{\alpha}^{(n)}(k) = \lambda_0^{(n)}(k) = \psi_1(k)$. Тому

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; \cdot) \Big\|_N = \Big\| \Lambda_0^{(n)} \{\rho_n(f^{\psi})\} \Big\|_N \leq c \|\rho_n(f^{\psi})\|_N. \tag{5.46}$$

Аналогічно, враховуючи співвідношення (1.49), знаходимо

$$\Big\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; \cdot) \Big\|_N \leq c \|\rho_n(f^{\psi}; \cdot)\|_N. \tag{5.47}$$

Зіставляючи співвідношення (5.42) і (5.46) – (5.47), одержуємо

$$E_n(f)_N \leq \|\rho_n(f; \cdot)\|_N \leq K_{N,M}^{(n)} \|\rho_n(f^{\psi}; \cdot)\|_N.$$

Якщо тепер $N(x) \sim M(x)$, то для отримання (5.41) досить застосувати (1.52). Якщо ж виконується тільки умова (5.33), то попередньо слід скористатися нерівністю (5.35).

Лему доведено.

Лема 5.3.2. *Якщо $\psi \in \Upsilon_{\alpha}^{*}$, то мультиплікатори $\Lambda_{\alpha}^{(n)}$ і $\tilde{\Lambda}_{\alpha}^{(n)}$, що породжуються послідовностями (5.12) і (5.13) діють з L_M в L_M при довільному $M \in \mathscr{Y}$, причому якщо починаючи з деякого натурального n_0*

виконується нерівність $\psi_i(n)n^\alpha \le 1$, *то для всіх* $n \ge n_0$

$$\|\Lambda_\alpha^{(n)}\{f\}\|_M \le c_1\psi_1(n)n^\alpha\|f\|_M, \tag{5.48}$$

і

$$\|\tilde{\Lambda}_\alpha^{(n)}\{f\}\|_M \le c_2\psi_2(n)n^\alpha\|f\|_M, \tag{5.49}$$

де c_1, c_2 *— константи, що не залежать від функції* f.

Доведення леми випливає з леми 1.6.1 і нерівності

$$M(\mu t) \le \mu M(t), \quad 0 \le \mu \le 1,$$

яка виконується для довільної функції Юнга.

Використовуючи в ході доведення леми 5.3.1 нерівності (5.48) – (5.49) та враховуючи при цьому співвідношення (5.25) дійдемо до такого твердження.

Теорема 5.3.3. *Нехай функції* $M, N \in \mathscr{Y}_*$ *пов'язані співвідношеннями (5.33) та/або (5.34) і* $\psi \in \Upsilon_\alpha^*$. *Тоді, якщо* $f \in L^\psi L_M$, *то починаючи з деякого натурального* n_0 *виконується нерівність*

$$E_n(f)_N \le \|\rho_n(f)\|_N \le c_1\psi(n)n^\alpha\|\rho_n(f^\psi)\|_M \le$$

$$\le c_2\psi(n)n^\alpha E_n(f^\psi)_M,$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, c_1, c_2 *— константи, що не залежать від функції* f.

Нехай $L_M^\psi := L^\psi U_M$, де $U_M = \{f \in L_M : \quad \|f\|_M \le 1\}$. Тоді

$$E_n(f^\psi)_M \le \|f^\psi - 0\|_M \le \|f^\psi\|_M \le 1, \quad \forall f \in L_M^\psi.$$

Враховуючи цей факт, з теореми 5.3.3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5.3.2. *В умовах теореми 5.3.3 справджуються оцінки*

$$E_n(L_M^\psi)_N \le \mathcal{E}(L_M^\psi; S_n)_N \le c\psi(n)n^\alpha,$$

де

$$E_n(L_M^{\psi})_N := \sup_{f\in L_M^{\psi}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_N$$

— найкраще наближення класу L_M^{ψ} *за допомогою підпростору* $\mathcal{T}_{2n-1}$ *тригонометричних поліномів, порядку не вищого за* $n-1$;

$$\mathcal{E}(L_M^{\psi}; S_n)_N = \sup_{f\in L_M^{\psi}} \|f - S_n(f)\|_N$$

— верхня межа відхилення сум Фур'є на класі L_M^{ψ} *в метриці просторів* L_N.

5.4. Найкращі наближення періодичних функцій у просторах Лебега зі змінним показником

У цьому підрозділі отримано прямі теореми теорії наближення у просторах Лебега зі змінним показником на множинах ψ-диференційованих функцій, а також доведено нерівність типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома, за допомогою якої одержано низку обернених теорем теорії наближення функцій.

5.4.1. Прямі теореми теорії наближення на множинах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$

Теорема 5.2.2 дає можливість оцінити порядки найкращих наближень ψ-диференційованих функцій в просторах Лебега зі змінним показником у термінах параметрів, що характеризують гладкісні властивості функцій. Такі результати називають *прямими теоремами* теорії наближення.

Справджується наступне твердження.

Теорема 5.4.1. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$, *задовольняють нерівності* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$ *і пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить до множини* Υ_0^*.

Тоді для довільної функції $f \in L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ *має місце оцінка*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le K_{p,s}\psi(n)E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)}, \tag{5.50}$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$ *і* K_p *— константа, що залежить лише від функцій* $p = p(x)$ *і* $s = s(x)$.

Беручи до уваги оцінку (5.28) отримуємо таке твердження.

Наслідок 5.4.1. *Нехай* $p \in \mathcal{P}^\gamma$ *і пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить до множини* Υ_0^*. *Тоді для довільної функції* $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$ *справджується нерівність*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le K_p \psi(n),$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$ *і* K_p *— величина, що залежить лише від функції* $p = p(x)$.

У випадках наближень на множинах $L_\beta^\psi L^{p(\cdot)}$ і $W_\beta^r L^{p(\cdot)}$ матимуть місце такі твердження.

Наслідок 5.4.2. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, *задовольняють нерівності* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і пара* $(\psi; \beta)$, *належить до множини* Υ_0^*.

Тоді для довільної функції $f \in L_\beta^\psi L^{p(\cdot)}$ *справджуються оцінки:*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le K_{p,s} \psi(n) E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)},$$

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le K_p \psi(n).$$

Наслідок 5.4.3. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, *задовольняють нерівності* $s(x) \le p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, $r > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$.

Тоді для довільної функції $f \in W_\beta^r L^{p(\cdot)}$, *мають місце оцінки:*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le K_{p,s} \frac{1}{n^r} E_n(f_\beta^r)_{p(\cdot)},$$

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le K_p \frac{1}{n^r}.$$

Зауваження 5.4.1. *Зазначимо, що твердження наслідків 5.4.1 – 5.4.3 містять як частинні випадки низку відомих результатів. При* $s(x) \equiv p(x)$

і $\psi(n) = n^{-\alpha},\ \beta = \alpha,\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *оцінку (5.50) отримано у праці [6]. Якщо* $p = \text{const},\ 1 \le p \le \infty$, *такі результати одержані О.І. Степанцем та О.К. Кушпелем [221, 222]. Якщо ж* $p = \text{const},\ 1 < p < \infty$ *і* $\psi(n) = n^{-r},\ \beta = r,\ n, r \in \mathbb{N}$, *нерівність (5.50) доведено О.П. Тіманом [243, с. 316].*

5.4.2. Нерівність типу Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної у метриці просторів $L^{p(\cdot)}$

Отримаємо тепер співвідношення, яке є аналогом класичної нерівності для максимуму модуля похідної тригонометричного поліному, отриманої С.Н. Бернштейном в роботі [22].

Нехай $\mathfrak{M}^*$ — це множина незростаючих послідовностей дійсних чисел $\psi(k) > 0,\ k = 0, 1, 2\ldots,$ що прямують до нуля, тобто:

$$\mathfrak{M}^* = \{\psi(k) : \quad \psi(k) - \psi(k+1) \ge 0,\ \lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 5.4.2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^*$ *і* $p \in \mathcal{P}^\gamma$. *Тоді для довільного тригонометричного поліному* T_n *порядку, не вищого за* n, *виконується нерівність*

$$\|D^\psi_\beta T_n\|_{p(\cdot)} \le \frac{K_p}{\psi(n)} \|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.51}$$

де $1/\psi(0) := 0$, *а* K_p *— величина, що залежить лише від функції* $p = p(x)$.

З основними результатами стосовно нерівностей типу С.Н. Бернштейна та коментарями до них можна ознайомитись, наприклад, у книзі М.П. Корнєйчука, В.Ф. Бабенка та А.О. Лігуна [100] (див., також, монографії О.П. Тімана [243], Н.І. Ахієзера [12]). Наведені у цих книгах методи отримання нерівностей типу Бернштейна суттєвим чином враховують інваріантність норми відносно зсуву аргументу. Використаний нами метод не потребує обмеженості оператору зсуву.

Зазначимо, що у випадку, коли $\psi(n) = n^{-\alpha},\ \beta = \alpha,\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$,

аналогічне твердження доведено у праці [6]. Якщо $p = \text{const},\ 1 \le p \le \infty$, нерівність (5.51) отримано О.І. Степанцем та О.К. Кушпелем [222].

Доведення. Якщо

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— тригонометричний поліном порядку, не вищого за n, то згідно означення 3.1.3 будемо мати

$$(D^{\psi}_{\beta}T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\psi(k)}a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\Big(a_k \sin kx - b_k \cos kx\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}A_k(T_n;x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}A_k(\tilde{T}_n;x) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_0 T_n)(x) - \sin\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_0\tilde{T}_n)(x). \tag{5.52}$$

Покладемо

$$R^{\psi}_m(\varphi;x) := \sum_{k=0}^{m-1}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]A_k(\varphi;x), \quad m = 1,2,\dots\ , \tag{5.53}$$

де $1/\psi(0) := 0$.

З рівності (5.52) випливає, що функція

$$\varphi_1(x) := \psi(n)(D^{\psi}_0 T_n)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n)}{\psi(k)}A_k(T_n;x),$$

є тригонометричним поліномом порядку, не вищого за n (тобто $A_k(\varphi_1;x) \equiv 0, \quad k > n$). Враховуючи це, застосовуючи перетворення Абеля, для довільного натурального числа $m \ge n$ отримуємо

$$R^{\psi}_m(\varphi_1;x) = \sum_{k=0}^{m-1}\left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]A_k(\varphi_1;x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right] \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(T_n; x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x) =$$

$$= \psi(n) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\psi(k)} - \frac{1}{\psi(k+1)}\right] r_k^{\psi,m}(T_n; x) + r_n^{\psi,m}(T_n; x), \tag{5.54}$$

де

$$r_k^{\psi,m}(T_n; x) := \sum_{i=0}^{k} \left[1 - \frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right] A_i(T_n; x), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Знову скориставшись перетворенням Абеля, одержуємо

$$r_k^{\psi,m}(T_n; x) = \psi(m) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{\psi(i+1)} - \frac{1}{\psi(i)}\right] \sum_{j=0}^{i} A_j(T_n; x) +$$

$$+ \psi(m) \left[\frac{1}{\psi(m)} - \frac{1}{\psi(k)}\right] \sum_{j=0}^{k} A_j(T_n; x),$$

звідки, з урахуванням монотонності послідовності $\psi(k)$ і співвідношення (1.35) випливає

$$\|r_k^{\psi,m}(T_n; \cdot)\|_{p(\cdot)} \le K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{5.55}$$

Застосовуючи тепер оцінку (5.55) до рівності (5.54), для довільного натурального числа $m \ge n$ знаходимо

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_1; \cdot)\|_{p(\cdot)} \le K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{5.56}$$

Аналогічно, для функції

$$\varphi_2(x) := \psi(n)(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x),$$

з урахуванням співвідношення (1.34), для довільного натурального числа

$m \geq n$ одержуємо

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_2;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}. \tag{5.57}$$

Покладемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x) := \frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} R_{m_2}^{\psi}(\varphi;x) - \frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} R_{m_1}^{\psi}(\varphi;x), \tag{5.58}$$

де $m_1 < m_2 \in \mathbb{N}$, а $R_m^{\psi}(\varphi;x)$ — величина, визначена у співвідношенні (5.53).

Покладаючи тепер $m_1 = n$ і $m_2 = [\eta(n)]$, де $[a]$ — ціла частина числа a, а $\eta(\cdot) = \eta(\cdot;\psi)$ — функція, що визначається рівністю (3.5), отримуємо

$$\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} = \mathcal{O}(1), \quad \frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} = \mathcal{O}(1). \tag{5.59}$$

На основі співвідношень (5.56) – (5.59) знаходимо

$$\|Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_i;\cdot)\|_{p(\cdot)} \leq K_p \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}, \quad n = 1,2,\ldots,\ i = 1,2, \tag{5.60}$$

де K_p — величина, яка залежить лише від функції $p = p(x)$.

Оскільки виконується рівність

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(m_2)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi;x) -$$

$$- \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_1-1} \left(\frac{1}{\psi(m_1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi;x),$$

яка за допомогою перетворення Абеля приймає вигляд

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi;x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1)-\psi(m_2)} \sum_{k=m_1}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(k+1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) S_k(\varphi;x),$$

то для довільного тригонометричного поліному T_m, порядок якого не перевищує m_1, будемо мати

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(T_m;x) = T_m(x). \tag{5.61}$$

Беручи тепер до уваги те, що

$$Q^{\psi}_{m_1,m_2}(c\varphi;x) = cQ^{\psi}_{m_1,m_2}(\varphi;x), \quad c = \text{const},$$

на підставі співвідношень (5.52), (5.60) і (5.61), знаходимо

$$\|(D^{\psi}_{\beta}T_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le \|(D^{\psi}_{0}T_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} + \|(D^{\psi}_{0}\tilde{T}_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \left\| \frac{1}{\psi(n)} Q^{\psi}_{n,[\eta(n)]}(\varphi_1;\cdot) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \frac{1}{\psi(n)} Q^{\psi}_{n,[\eta(n)]}(\varphi_2;\cdot) \right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \frac{K_p}{\psi(n)} \|T_n(\cdot)\|_{p(\cdot)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.62}$$

що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

Зауважимо, що нерівність (5.51) є непокращуваною за порядком, оскільки для тригонометричного поліному $t^*_n(x) = \cos nx$ будемо мати

$$(D^{\psi}_{0}t^*_n)(x) = \frac{1}{\psi(n)} \cos nx$$

і

$$\|D^{\psi}_{0}t^*_n)\|_{p(\cdot)} = \|\frac{1}{\psi(n)} \cos nx\|_{p(\cdot)} = \frac{1}{\psi(n)} \|t^*_n\|_{p(\cdot)}.$$

Очевидно, що послідовність $\psi_r(n) = n^{-r}$, $r > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, належить до множини $\mathfrak{M}^*$, отже з теореми 5.4.2 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5.4.4. *Якщо $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, то для довільного тригонометричного поліному T_n порядку, не вищого за n, виконується нерівність*

$$\|D^{r}_{\beta}T_n\|_{p(\cdot)} \le \frac{K_p}{n^r} \|T_n\|_{p(\cdot)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.63}$$

де K_p — величина, що залежить лише від функції $p = p(x)$.

Використовуючи теорему 5.4.2 можна довести таке твердження.

Теорема 5.4.3. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta}L^{p(\cdot)}$ завжди знайдеться такий тригонометричний поліном*

$T_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$, *що*

$$\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi T_n)\|_{p(\cdot)} \le c_p E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{5.64}$$

де c_p *— величина, яка залежить лише від функції* $p = p(x)$.

Зауважимо, що у випадку $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, твердження теореми 5.4.3 співпадає з теоремою 5 роботи [6].

Доведення. Покладемо для зручності $[\eta(0)] := 1$ і позначимо через

$$V_{n,[\eta(n)]}(f) = V_{n,[\eta(n)]}(f;x) := \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f;x), \quad n = 0,1,\ldots, \tag{5.65}$$

— середні Валле Пуссена функції f.

Відзначимо деякі властивості величин $V_{n,[\eta(n)]}(f;x)$. Очевидно, що для довільного тригонометричного поліному $P_n(x)$ порядку, не вищого за n, виконується рівність

$$V_{n,[\eta(n)]}(P_n;x) = P_n(x). \tag{5.66}$$

Крім того, беручи до уваги співвідношення (1.35), отримуємо оцінку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \|S_k(f;\cdot)\|_{p(\cdot)} \le c_p \|f\|_{p(\cdot)}, \tag{5.67}$$

Позначивши через $t_n(x)$ — поліном найкращого наближення суми Валле Пусена $V_{n,[\eta(n)]}(f)$ функції f у просторі $L^{p(\cdot)}$ порядку n, а через $T_n(x)$ — поліном найкращого наближення функції f порядку n, використовуючи нерівність (1.35), одержимо

$$E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{p(\cdot)} = \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\|_{p(\cdot)} \le \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - T_n\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \Big(S_k(f;\cdot) - T_n(\cdot) \Big) \right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)]-n} = \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} S_k(f - T_n;\cdot) \right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)]-n} \le$$

$$\le c_p \|f - T_n\|_{p(\cdot)} = c_p E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{5.68}$$

Покажемо, що у якості полінома, який задовольняє співвідношення

(5.64), може бути взятий $T_n(x)$ — поліном найкращого наближення функції f у просторі $L^{p(\cdot)}$ порядку n. Маємо

$$\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi T_n)\|_{p(\cdot)} \le \|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{p(\cdot)} + \|(D_\beta^\psi t_n) - (D_\beta^\psi T_n)\|_{p(\cdot)} +$$

$$+\|V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi) - (D_\beta^\psi t_n)\|_{p(\cdot)} =: R_1(f) + R_2(f) + R_3(f). \tag{5.69}$$

Позначивши ще $T_n^*(x)$ поліном найкращого наближення похідної f_β^ψ порядку n, на підставі співвідношень (5.66) і (5.67), знаходимо

$$R_1(f) = \|f_\beta^\psi - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{p(\cdot)} \le \|f_\beta^\psi - T_n^*\|_{p(\cdot)} +$$

$$+\|T_n^* - V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi)\|_{p(\cdot)} = E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} + \|V_{n,[\eta(n)]}(T_n^* - f_\beta^\psi)\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} + c_p\|f_\beta^\psi - T_n^*\|_{p(\cdot)} \le c_p E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)}. \tag{5.70}$$

Ураховуючи (1.37), для довільної функції $f \in L^{p(\cdot)},\ p \in \mathcal{P}^\gamma$, отримуємо оцінку

$$\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{p(\cdot)} = \frac{\left\| \sum\limits_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \Big(S_k(f;\cdot) - f(\cdot) \Big) \right\|_{p(\cdot)}}{[\eta(n)] - n} = \mathcal{O}(1) E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{5.71}$$

Застосовуючи нерівність (5.51) та беручи до уваги співвідношення (5.68) і (5.71), знаходимо

$$R_2(f) = \|(D_\beta^\psi t_n) - (D_\beta^\psi T_n)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c_p}{\psi(n)}\|t_n - T_n\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \frac{c_p}{\psi(n)}\Big(\|t_n - V_{n,[\eta(n)]}(f)\|_{p(\cdot)} + \|V_{n,[\eta(n)]}(f) - f\|_{p(\cdot)} + \|f - T_n\|_{p(\cdot)} \Big) \le$$

$$\le \frac{c_p}{\psi(n)} E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{5.72}$$

Нарешті, приймаючи до уваги рівність $V_{n,[\eta(n)]}(f_\beta^\psi) = (D_\beta^\psi V_{n,[\eta(n)]}(f))$, означення функції $\eta(n) = \eta(\psi; n)$, знову застосовуючи нерівність (5.51) і

оцінку (5.68), отримуємо

$$R_3(f) = \|(D^{\psi}_{\beta}V_{n,[\eta(n)]}(f)) - (D^{\psi}_{\beta}t_n)\|_{p(\cdot)} \leq$$

$$\leq \frac{c_p}{\psi([\eta(n)]-1)}\|V_{n,[\eta(n)]}(f) - t_n\|_{p(\cdot)} =$$

$$= \frac{c_p}{\psi([\eta(n)]-1)}E_{n+1}(V_{n,[\eta(n)]})_{p(\cdot)} \leq \frac{2c_p}{\psi(n)}E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}. \tag{5.73}$$

Співставлення співвідношень (5.50), (5.69) – (5.70) і (5.72) – (5.73), переконує нас в справедливості твердження теореми.

Теорему доведено.

5.4.3. Обернені теореми теорії наближення для $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій у просторах $L^{p(\cdot)}$

Використовуючи теорему 5.4.2, одержимо твердження, які зазвичай називають *оберненими теоремами* теорії наближення функцій.

Нехай $\mathfrak{M}_0$ — множина, визначена у співвідношенні (3.7) і (див. [216, с. 165])

$$F =: \{\psi \in \mathfrak{M}: \quad \eta'(\psi;t) \leq K\},$$

де $\mathfrak{M}$ — як і раніше, множина всіх неперервних опуклих донизу при $t \geq 1$ функцій $\psi(t)$, які зникають на нескінченності і $\eta(\psi;t)$ — функція, визначена у співвідношенні (3.5).

Теорема 5.4.4. *Нехай $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$. Тоді для довільної функції $f \in L^{p(\cdot)}$:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}, \tag{5.74}$$

то існує похідна f^{ψ}_{β}, для якої

$$E_n(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)} \leq C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)}|\psi(k)|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{5.75}$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *і збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1}, \tag{5.76}$$

то існує похідна f_β^ψ, *для якої*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \le C_2 \left(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |k\psi(k)|^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{5.77}$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \ge K > 0$ *і збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}, \tag{5.78}$$

то існує похідна f_β^ψ, *для якої*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \le C_3 \left(\frac{E_n(f)_{p(\cdot)}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{5.79}$$

де C_i, $i = 1, 2, 3$, *— величини, що залежать лише від функцій* $p = p(x)$ *і* $\psi = \psi(k)$.

Якщо $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, твердження теореми 5.4.4 містить теорему 4 роботи [6]. В метриці просторів L_p, $p = \text{const}$, $1 < p < \infty$ аналогічні результати для монотонних послідовностей ψ отримано О.І. Жукіною [80] та О.І. Степанцем [209], а у випадку $\psi(n) = n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і $p = \text{const}$, $1 < p < \infty$ — в роботі [95]. При $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$ і $p = \text{const}$, $1 < p < \infty$ аналог теореми 5.4.4 був встановлений О.П. Тіманом [243].

Для **доведення** теореми будемо використовувати схему, запропоновану в монографії [217, с. 120 – 126]. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції f у

просторі $L^{p(\cdot)}$. Тоді ряд

$$t_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (t_k(x) - t_{k-1}(x)) \tag{5.80}$$

буде збігатися до $f(x)$ за нормою простору $L_{p(\cdot)}$, оскільки його частинні суми T_m при $m > n$ співпадають з поліномами $t_m(x)$.

Розглянемо ряд

$$(D_\beta^\psi t_n)(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (D_\beta^\psi (t_k - t_{k-1}))(x) \tag{5.81}$$

і покажемо, що він збігається до суми $T(x)$, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{5.82}$$

Тим самим існування похідної $f_\beta^\psi(\cdot)$ буде встановлено. Оскільки різниця $u_k(x) = t_k(x) - t_{k-1}(x)$ є поліномом порядку k, то застосовуючи теорему 5.4.2, знаходимо

$$\|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le \frac{C_p}{|\psi(k)|} \|u_k(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \frac{C_p}{|\psi(k)|} \left(\|t_k(\cdot) - f(\cdot)\|_{p(\cdot)} + \|f(\cdot) - t_{k-1}(\cdot)\|_{p(\cdot)} \right) \le 2C_p E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)|^{-1}.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le C_p \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{p(\cdot)} |\psi(k)|^{-1}, \tag{5.83}$$

причому за умовою пункту 1 теореми ряд в правій частині співвідношення (5.83) є збіжним. Це означає, що ряд (5.81) дійсно збігається у просторі $L^{p(\cdot)}$ до деякої функції $T(x)$, яка належить цьому ж простору.

Нехай $a_k^{(n)} = a_k(t_n)$ і $b_k^{(n)} = b_k(t_n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — коефіцієнти Фур'є поліномів $t_n(\cdot)$. Враховуючи формули зв'язку між коефіцієнтами Фур'є фун-

кцій f і f_β^ψ (які випливають з означення 3.1.3)

$$a_k(f_\beta^\psi) = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{5.84}$$

$$b_k(f_\beta^\psi) = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{5.85}$$

коефіцієнти $\alpha_k^{(n)}$ і $\beta_k^{(n)}$ поліномів $(D_\beta^\psi t_n)(\cdot)$ мають вигляд

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k^{(n)}\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k^{(n)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{5.86}$$

$$\beta_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k^{(n)}\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k^{(n)}\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{5.87}$$

Оскільки

$$\|T - (D_\beta^\psi t_n)\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то, застосовуючи нерівність (5.2), отримуємо

$$|a_k(T) - \alpha_k^{(n)}| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(T(x) - D_\beta^\psi t_n(x))\cos kx dx\Big| \le$$

$$\le C\|T - (D_\beta^\psi t_n)\|_{p(\cdot)}\|\cos kx\|_{s(\cdot)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

і

$$|b_k(T) - \beta_k^{(n)}| \le C\|T - (D_\beta^\psi t_n)\|_{p(\cdot)}\|\sin kx\|_{s(\cdot)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Аналогічно, з того що

$$\|f - t_n\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

випливає

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k(f), \quad \lim_{n\to\infty} b_k^{(n)} = b_k(f), \quad k = 0, 1, \dots,$$

Беручи до уваги ці факти, на підставі рівностей (5.86) – (5.87) одержу-

ємо

$$a_k(T) = \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)} \lim_{n\to\infty} \left(a_k^{(n)} \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k^{(n)} \sin\frac{\beta\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2} \right)$$

і, аналогічно,

$$b_k(T) = \lim_{n\to\infty} \beta_k^{(n)} = \frac{1}{\psi(k)} \left(b_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2} \right).$$

Звідси випливає, що ряд Фур'є функції $T(x)$ дійсно співпадає з рядом (5.82). Це означає, що у функції $f(x)$ дійсно існує $(\psi;\beta)$-похідна $f_\beta^\psi(x)$, яка належить простору $L^{p(\cdot)}$ і для неї виконується рівність

$$f_\beta^\psi(x) = (D_\beta^\psi t_n)(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (D_\beta^\psi [t_k - t_{k-1}])(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.88}$$

в сенсі збіжності в метриці простору $L^{p(\cdot)}$.

Оскільки

$$E_n(f_\beta^\psi)_{p(\cdot)} \le \|f_\beta^\psi(\cdot) - (D_\beta^\psi t_n)(\cdot)\|_{p(\cdot)},$$

то для завершення доведення пункту 1 теореми залишилось зауважити, що нерівність (5.75) випливає із співвідношення (5.88) з урахуванням оцінки (5.83).

Для доведення пунктів 2 і 3 теореми, будемо використовувати такі міркування. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції f у просторі $L^{p(\cdot)}$. Для кожного натурального n покладемо

$$n_0 = n, n_1 = [\eta(n)] + 1, \ldots, n_k = [\eta(n_{k-1})] + 1, \ldots.$$

В цьому випадку ряд

$$t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x))$$

буде збігатися в просторі $L^{p(\cdot)}$ до функції f. Розглянемо ряд

$$(D_\beta^\psi t_{n_0})(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(D_\beta^\psi[t_{n_k} - t_{n_{k-1}}])(x) \tag{5.89}$$

і переконаємося, що він буде збігатися в просторі $L^{p(\cdot)}$ до суми $T(x)$, ряд Фур'є якої має вигляд (5.82). Застосовуючи нерівність (5.51) до різниці $u_k(x) = t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)$, отримуємо

$$\|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le C_p E_{n_{k-1}+1}(f)_{p(\cdot)}|\psi(n_k)|^{-1},$$

внаслідок чого

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le C_p\Bigg(E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}(\psi(n))^{-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}E_{n_k+1}(f)_{p(\cdot)}|\psi(n_k)|^{-1}\Bigg). \tag{5.90}$$

Скориставшись оцінкою (див. [217, с. 124 – 125])

$$\frac{E_{n_k+1}(f)}{\psi(n_k)} \le \sum_{\nu=n_{k-1}}^{n_k-1}\frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_0, \tag{5.91}$$

зі співвідношення (5.90) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(D_\beta^\psi u_k)(\cdot)\|_{p(\cdot)} \le C_p\Bigg(E_{n+1}(f)_{p(\cdot)}(\psi(n))^{-1}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_{p(\cdot)}|k\psi(k)|^{-1}\Bigg). \tag{5.92}$$

Згідно умовам пункту 2 теореми ряд в правій частині нерівності (5.92) збігається. Звідси випливає, що і ряд (5.89) буде збігатися у просторі $L^{p(\cdot)}$ до деякої функції $T \in L^{p(\cdot)}$ і для завершення доведення пункту 2 теореми залишається показати, що $S[T] = S[f_\beta^\psi]$. Це робиться шляхом повторення міркувань, які були використані для отримання рівності (5.88) і одержати нерівність (5.77), шляхом поєднання аналога рівності (5.88) і співвідношення

(5.92).

Доведення пункту 3 теореми проводиться аналогічно, з урахуванням наступного аналога нерівності (5.91), отриманого в монографії [217, с. 125 – 126]

$$\frac{E_{n_i+1}(f)}{\psi(n_i)} \le \sum_{\nu=n_{i-1}}^{\eta(n_{i-1})} \frac{E_{\nu+1}(f)}{(\eta(\nu)-\nu)\psi(\nu)}, \quad \psi \in F. \tag{5.93}$$

Теорему доведено.

Нехай $f \in L^{p(\cdot)},\ p \in \mathcal{P}^{\gamma}, \gamma \ge 1$ і

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int\limits_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\, dt, \quad 0 < h < 1,\ x \in [0; 2\pi], \tag{5.94}$$

— оператор Стєклова функції f. Беручи до уваги рівномірну обмеженість операторів Стєклова у просторах $f \in L^{p(\cdot)}$ (див. роботу [262]), в статті [6] до розгляду були введені модулі неперервності дробового порядку

$$\Omega_{\alpha}(f;\delta)_{p(\cdot)} := \sup_{h_i, h<\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma_h^{\varrho}(f) \right\|_{p(\cdot)}, \quad \varrho = \alpha - [\alpha],$$

де

$$\sigma_h^{\varrho}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\varrho}{k} \frac{1}{h^k} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \dots \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k, \quad 0 < \varrho < 1, \tag{5.95}$$

$$\binom{\varrho}{k} := \frac{\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-k+1)}{k!},\ k > 1; \quad \binom{\varrho}{1} := \varrho; \quad \binom{\varrho}{0} := 1.$$

Використовуючи теорему 1.5.2, з теореми 5.4.4 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5.4.5. *В умовах теореми 5.4.4 для довільного $\alpha > 0$:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і збігається ряд (5.74), то існує похідна f_{β}^{ψ}, для якої

$$\Omega_{\alpha}\Big(f_{\beta}^{\psi}; \frac{\pi}{n+1}\Big)_{p(\cdot)} \le C_1 \Bigg(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha}}{\psi(k)} E_k(f)_{p(\cdot)} +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{\psi(k)}\Bigg),\quad n\in\mathbb{N};\tag{5.96}$$

2. Якщо $\psi\in\mathfrak{M}_0$ *і збігається ряд (5.76), то існує похідна* f^{ψ}_{β}, *для якої*

$$\Omega_{\alpha}\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{\pi}{n+1}\Big)_{p(\cdot)}\le C_2\Bigg(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)}E_k(f)_{p(\cdot)}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{k\psi(k)}\Bigg),\quad n\in\mathbb{N};\tag{5.97}$$

3. Якщо $\psi\in F$, $\eta(\psi;t)-t\ge K>0$ *і збігається ряд (5.78), то існує похідна* f^{ψ}_{β}, *для якої*

$$\Omega_{\alpha}\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{\pi}{n+1}\Big)_{p(\cdot)}\le C_3\Bigg(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}E_k(f)_{p(\cdot)}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{p(\cdot)}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}\Bigg),\quad n\in\mathbb{N},\tag{5.98}$$

де C_i, $i=1,2,3$, *— величини, що залежать лише від* α, *послідовності* $\psi=\psi(k)$ *і функції* $p=p(x)$.

Доведення. Застосовуючи теорему 1.5.2 до функції f^{ψ}_{β}, існування якої гарантує теорема 5.4.4 та оцінюючи величини найкращих наближень $(\psi;\beta)$-похідної $E_k(f^{\psi}_{\beta})_{p(\cdot)}$ за допомогою співвідношення (5.75), отримуємо

$$\Omega_{\alpha}\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{\pi}{n+1}\Big)_{p(\cdot)}\le\frac{C}{(n+1)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}\sum_{j=k}^{\infty}E_j(f)_{p(\cdot)}|\psi(j)|^{-1}.$$

Беручи до уваги тотожність

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=k}^{\infty}b_k=\sum_{k=0}^{n}b_k\sum_{j=0}^{k}a_j+\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\sum_{j=0}^{n}a_j,$$

і оцінку

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\sum_{j=0}^{k}(j+1)^{\alpha-1}=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j+1}{k+1}\right)^{\alpha-1}\leq 1,\quad k=0,1,\ldots,n,$$

отримуємо співвідношення (5.96). Пункти 2 і 3 наслідку доводяться аналогічно.

5.5. Прямі та обернені теореми теорії наближення у вагових просторах Орлича

Використовуючи метод отримання результатів попередніх підрозділів, тут доведено прямі теореми теорії наближення, нерівність типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома, за допомогою якої одержано обернені теореми теорії наближення для $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій у вагових просторах Орлича.

Наведемо визначення вагових просторів Орлича [45]. Невід'ємна функція $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга M^{*} і така стала $c>1$, що виконується нерівність

$$M^{*}(x)\leq M(x)\leq M^{*}(cx),\quad \forall x\geq 0.$$

Нехай $\mathcal{Q}_2^{\theta}$ — множина функцій $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$, для кожної з яких при деякому $\theta\in(0;1)$ функція M^{θ} є квазіопуклою і які задовольняють умову Δ_2 $(M\in\Delta_2)$: існує стала $c>0$ така, що

$$M(2x)\leq c\,M(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Тоді через $L_{M,\omega}$ позначають лінійний простір 2π-періодичних вимірних за Лебегом функцій f, які для довільного числа $c>0$ задовольняють умову

$$\int_{0}^{2\pi}M(c|f(x)|)\omega(x)dx<\infty,\quad M\in\mathcal{Q}_2^{\theta},$$

де $\omega(x)$ — 2π-періодична вимірна і майже скрізь додатна функція (вага). Одна з еквівалентних норм в цьому просторі може бути визначена співвідно-

шенням

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\ dt : \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\ dt \le 1 \right\}.$$

Якщо вагова функція $\omega = \omega(t)$ належить класу Макенхаупа A_p, $1 < p < \infty$, тобто якщо ω є 2π-періодичною і

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \omega(t)\ dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\ dt\right)^{p-1} \le c = \text{const},$$

де $[a,b]$ довільний відрізок з $[0,2\pi]$, і показник $p = p(M)$ визначається співвідношенням [47]:

$$\frac{1}{p} := \inf\left\{\theta : \quad \theta > 0,\ M \in \mathcal{Q}_2^\theta\right\}, \tag{5.99}$$

то $L_{M,\omega} \subset L$ стає банаховим простором з нормою Орлича. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називається *ваговим простором Орлича.*

Позначимо через $L^\psi L_{M,\omega}$ множини ψ-інтегралів функцій $f \in L_{M,\omega}$ і одержуємо твердження, яке називають *прямою теоремою* теорії наближення на множинах $L^\psi L_{M,\omega}$ у вагових просторах Орлича.

Теорема 5.5.1. *Нехай пара $\psi = (\psi_1;\psi_2)$ належить до множини Υ_0^* і виконується умова (3.3). Тоді якщо $f \in L^\psi L_{M,\omega}$, причому $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_p$, то для довільного натурального числа n виконується нерівність*

$$E_n(f)_{M,\omega} \le K\psi(n)E_n(f^\psi)_{M,\omega},$$

де $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, K — константа, що не залежить від n і функції f.

Доведення. Оскільки $f \in L^\psi L_M$, то за означенням $f^\psi \in L_{M,\omega}$. Враховуючи тепер факт збіжності в просторах Орлича рядів Фур'є до відповідних функцій (звісно, за виконання умов $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$ і $\omega \in A_p$,), у сенсі збіжності у

просторах L_M, справджуються рівності:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x),$$

$$f^{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f^{\psi};x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}(f;x). \tag{5.100}$$

Із розкладу (5.100) випливають формули зв'язку між коефіцієнтами Фур'є функцій f^{ψ} і f:

$$a_k(f) = \psi_1(k) a_k(f^{\psi}) - \psi_2(k) b_k(f^{\psi}), \tag{5.101}$$

$$b_k(f) = \psi_2(k) a_k(f^{\psi}) + \psi_1(k) b_k(f^{\psi}). \tag{5.102}$$

Беручи до уваги рівності (5.101) – (5.102), знаходимо

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\Big[\psi_1(k) a_k(f^{\psi}) - \psi_2(k) b_k(f^{\psi})\Big] \cos kx +$$

$$+ \Big[\psi_2(k) a_k(f^{\psi}) + \psi_1(k) b_k(f^{\psi})\Big] \sin kx \Bigg) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\psi_1(k) \Big[a_k(f^{\psi}) \cos kx + b_k(f^{\psi}) \sin kx\Big] +$$

$$+ \psi_2(k) \Big[a_k(f^{\psi}) \sin kx - b_k(f^{\psi}) \cos kx\Big] \Bigg) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi};x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi};x). \tag{5.103}$$

На підставі співвідношень (5.10) і (5.103), отримуємо

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f;x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; x). \tag{5.104}$$

Далі маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi}; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Big[\Big(S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big) - \Big(S_{k-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big) \Big] =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Big(S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big) - \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Big(S_{k-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_1(k) - \psi_1(k+1)] \Big[S_k(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big] -$$

$$- \psi_1(n) \Big[S_{n-1}(f^{\psi}; x) - f^{\psi}(x) \Big]. \tag{5.105}$$

Аналогічно одержуємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) A_k(\tilde{f}^{\psi}; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \big[\psi_2(k) - \psi_2(k+1) \big] \Big[S_k(\tilde{f}^{\psi}; x) - \tilde{f}^{\psi}(x) \Big] -$$

$$- \psi_2(n) \Big[S_{n-1}(\tilde{f}^{\psi}; x) - \tilde{f}^{\psi}(x) \Big]. \tag{5.106}$$

Використовуючи властивості норми, монотонність послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k \in \mathbb{N}$, та співвідношення (1.52), на основі рівностей (5.104) – (5.106) знаходимо

$$E_n(f)_M \le \|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_1(k) - \psi_1(k+1)] \big\| S_k(f^{\psi}) - f^{\psi} \big\|_{M,\omega} + \psi_1(n) \big\| S_{n-1}(f^{\psi}) - f^{\psi} \big\|_{M,\omega} +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_2(k) - \psi_2(k+1)] \big\| S_k(\tilde{f}^{\psi}) - \tilde{f}^{\psi} \big\|_{M,\omega} + \psi_2(n) \big\| S_{n-1}(\tilde{f}^{\psi}) - \tilde{f}^{\psi} \big\|_{M,\omega} \le$$

$$\leq K\left(\psi_1(n)E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)} + \psi_2(n)E_n(\tilde{f}^{\psi})_{p(\cdot)}\right) \leq K\psi(n)E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)},$$

де $\psi^2(n) = \psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)$ і K — константа, що не залежить від n.

Якщо ж показники $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$, задовольняють нерівності $s(x) \leq p(x)$, $x \in [0; 2\pi]$, то оцінку (5.50) отримуємо з урахуванням співвідношення (5.5).

Теорему доведено.

Наслідок 5.5.1. *В умовах теореми 5.5.1 для довільного натурального числа* n

$$E_n(f)_{M,\omega} \leq K\psi(n).$$

Аналізуючи доведення теореми 5.4.2, робимо висновок, що застосований метод можна використати і для отримання аналогу нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного поліному у просторах Орлича.

Теорема 5.5.2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^*$, $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$ *і* $\omega \in A_p$. *Тоді для довільного тригонометричного поліному* T_n *порядку, не вищого за* n, *справджується нерівність*

$$\|D_{\beta}^{\psi}T_n\|_{M,\omega} \leq \frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.107}$$

де $1/\psi(0) := 0$, *а* K — *додатна стала.*

Зауважимо, що нерівність (5.107) є непокращуваною за порядком, оскільки для тригонометричного поліному $t_n^*(x) = \cos nx$ будемо мати

$$(D_0^{\psi}t_n^*)(x) = \frac{1}{\psi(n)}\cos nx$$

і

$$\|D_0^{\psi}t_n^*)\|_{M,\omega} = \|\frac{1}{\psi(n)}\cos nx\|_{M,\omega} = \frac{1}{\psi(n)}\|t_n^*\|_{M,\omega}.$$

Використовуючи тепер теорему 5.5.2 одержуємо таке твердження.

Теорема 5.5.3. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $f \in L_{M,\omega}$, *де* $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$, $\omega \in A_p$.

Тоді якщо $f \in L_\beta^\psi L_{M,\omega}$, *то*

$$\|f_\beta^\psi - (D_\beta^\psi S_n)\|_{M,\omega} \le K E_{n+1}(f_\beta^\psi)_{M,\omega},$$

де K *— стала, що не залежить від* n *і функції* f.

Зауважимо, що у випадку $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, твердження теорем 5.5.2 і 5.5.3 співпадають з результатами праці [7].

Нарешті, застосуємо теорему 5.5.2 для одержання так званих *обернених теорем* теорії наближення на множинах $L^\psi L_{M,\omega}$ у вагових просторах Орлича.

Теорема 5.5.4. *Нехай* $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$ *і* $\omega \in A_p$. *Тоді для довільної функції* $f \in L_{M,\omega}$ *матимемо:*

1. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}$ *і ряд (5.74) збігається, тоді існує похідна* f_β^ψ, *така що*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega} \le c_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

2. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *і ряд (5.76) збігається, тоді існує похідна* f_β^ψ, *така що*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega} \le c_2 \left(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |k\psi(k)|^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N};$$

3. *Якщо* $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \ge K > 0$ *і ряд (5.78) збігається, тоді існує похідна* f_β^ψ, *така що*

$$E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega} \le c_3 \left(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N};$$

де c_i, $i = 1, 2, 3$, *константи, які не залежать від* n *і функції* f.

Якщо $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то аналогічні дослідження проведено в роботі [7].

Для ***доведення*** цього твердження потрібно повторити міркування, використані для доведення теореми 5.4.4 застосувавши у відповідних місцях теорему 5.5.2 замість теореми 5.4.2.

В роботі [7] були введені до розгляду модулі неперервності дробового порядку

$$\Omega_\alpha(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{h_i,h<\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma_h^\beta(f) \right\|_{M,\omega}, \quad \beta = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma_h^\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} \dots \int_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!}, \ k > 1; \quad \binom{\beta}{1} := \beta; \quad \binom{\beta}{0} := 1,$$

де f_{h_i} — оператор Стєклова (5.94) функції f. Коректність введених величин гарантує співвідношення (1.53).

Поєднуючи теореми 5.5.4 і 1.6.2 одержуємо таке твердження.

Теорема 5.5.5. *В умовах теореми 5.5.4 для довільного* $\alpha > 0$:

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ *і ряд (5.74) збігається, то існує похідна* f_β^ψ *для якої*

$$\Omega_\alpha\Big(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\Big)_{M,\omega} \le c_1 \Bigg(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)} \Bigg), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{5.108}$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *і ряд (5.76) збігається, то існує похідна* f_β^ψ *для якої*

$$\Omega_\alpha\Big(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\Big)_{M,\omega} \le c_2 \Bigg(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{k\psi(k)} \Bigg), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{5.109}$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \geq K > 0$ *і ряд (5.78) збігається, то існує похідна* f^{ψ}_{β} *для якої*

$$\Omega_{\alpha}\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{\pi}{n+1}\Big)_{M,\omega} \leq c_3\Bigg(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{\alpha}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}E_k(f)_{M,\omega}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)(\eta(k)-k)}\Bigg),\quad n\in\mathbb{N},$$

де c_i, $i=1,2,3$, *– величини, які не залежать від* n *і функції* f.

Для модулів неперервності $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ порядку $r \in \mathbb{N}$ теорема 5.5.5 може бути уточненим таким чином.

Наслідок 5.5.2. *Нехай* $M \in \mathcal{Q}^{\theta}_2$ *і* $\omega \in A_p$. *Тоді для довільної функції* $f \in L_{M,\omega}$ *і* $n \in \mathbb{N}$ *будемо мати:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ *і ряд (5.76) збігається, то існує похідна* f^{ψ}_{β}, *така що для* $r = 0,1,2,\ldots,$ *і будь-якого натурального* n *виконується нерівність*

$$\Omega_r\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega} \leq \frac{C}{n^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)}E_{\nu}(f)_{M,\omega} + C\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)},$$

2. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \geq C > 0$ *і ряд (5.78) збігається, то існує похідна* f^{ψ}_{β} *для якої*

$$\Omega_r\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega} \leq C\Bigg(\frac{1}{n^{2r}}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)}E_{\nu}(f)_{M,\omega}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)}\Bigg),\quad n\in\mathbb{N},$$

де C *– константа, що не залежить від* n *і функції* f.

Випадок $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, r, $n \in \mathbb{N}$, був розглянутий в роботі [61]. Якщо ж $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то аналогічні результати отримано в праці [7].

Доведення. Знову повторюючи міркування, використані для доведення теореми 5.4.4 переконуємося, що функція $f(x)$ дійсно має $(\psi;\beta)$-похідну $f^{\psi}_{\beta}(x)$, яка належить простору $L_{M,\omega}$, і для неї справджується рівність

$$f^{\psi}_{\beta}(x) = (D^{\psi}_{\beta} t_{n_0})(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}[t_{n_i} - t_{n_{i-1}}])(x), \quad n_0 = n, \tag{5.110}$$

в сенсі збіжності в метриці простору $L_{M,\omega}$.

Далі будемо використовувати такі властивості модулів гладкості $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ (див., наприклад, [7]): якщо $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}^{\theta}_2$, $\omega \in A_p$, то

$$\Omega_r(f_1 + f_2;\delta)_{M,\omega} \le \Omega_r(f_1;\delta)_{M,\omega} + \Omega_r(f_2;\delta)_{M,\omega}. \tag{5.111}$$

$$\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}. \tag{5.112}$$

Застосувавши властивість (5.111) величини $\Omega_r(f^{\psi};\frac{1}{n})_{M,\omega}$, на основі співвідношення (5.110) отримуємо

$$\Omega_r\left(f^{\psi};\frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \le \Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0};\frac{1}{n}\right) + \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0};\frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \tag{5.113}$$

Беручи до уваги властивість (5.112) модуля неперервності а також нерівність (5.107), заходимо

$$\Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0};\frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \le C\|f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}]\|_{M,\omega} =$$

$$= C\|\sum_{i=1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}(t_{n_i} - t_{n_{i-1}}))(x)\|_{M,\omega} \le C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(n_i)}\|t_{n_i} - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega} \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|t_{n_i} - f\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} + C\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|f - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} \le K\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E_{n_i+1}(f)_{M,\omega}}{\psi(n_i)}. \tag{5.114}$$

Використовуючи оцінку (5.91) зі співвідношення (5.114) одержуємо

$$\Omega_r\Big(f^{\psi}-D^{\psi}_{\beta}t_{n_0};\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}\le C\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}. \tag{5.115}$$

Далі нам також знадобиться наступний факт, отриманий в роботі [7].

Лема 5.5.1. *Нехай* $M\in\mathcal{Q}^{\theta}_{2}$ *і* $\omega\in A_{p(M)}$. *Тоді, якщо* $f^{(2k)}\in L_{M,\omega}$, $k=1,2,\ldots,$ *то має місце нерівність*

$$\Omega_k(f;\delta)_{M,\omega}\le C\delta^{2k}\|f^{(2k)}\|_{M,\omega},\quad k=1,2,\ldots\ . \tag{5.116}$$

Беручи до уваги нерівності (5.107) та (5.116), знаходимо

$$\Omega_r\Big(D^{\psi}_{\beta}t_{n_0};\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}\le\Omega_r\Big(D^{\psi}_{\beta}t_0;\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}+\sum_{i=1}^{n_0}\Omega_r\Big(D^{\psi}_{\beta}(t_i-t_{i-1});\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}\le$$

$$\le\frac{C}{n^{2r}}\left(\big\|(D^{\psi}_{\beta}t_0)^{(2r)}\big\|_{M,\omega}+\sum_{i=1}^{n_0}\big\|(D^{\psi}_{\beta}(t_i-t_{i-1}))^{(2r)}\big\|_{M,\omega}\right)\le$$

$$\le\frac{C}{n^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n_0}\nu^{2r}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)}. \tag{5.117}$$

Співставлення оцінок (5.113), (5.115) і (5.117), дає право записати нерівність

$$\Omega_r\Big(f^{\psi}_{\beta};\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}\le\frac{C}{n^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n_0}\frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)}E_{\nu}(f)_{M,\omega}+C\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)},$$

що з урахуванням рівності $n_0=n,$ завершує доведення пункту 1 наслідку.

Доведення пункту 2 проводиться аналогічно, з використанням оцінки (5.93).

5.6. Висновки до розділу 5

В цьому розділі:

1. Знайдено умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та $L^{\psi}L_M$ в L_N.
2. Обчислено порядки наближення сумами Фур'є на множинах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ і $L^{\psi}L_M$.
3. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах та класах ψ-диференційованих функцій.
4. Зазначено випадки, коли порядки наближення сумами Фур'є співпадають з порядками величин найкращих наближень на цих множинах у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.
5. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M.
6. Доведено (у тому числі в термінах аналогів модулів неперервності дробового порядку) обернені теореми теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.
7. Доведено низку проміжних тверджень, які не позбавлені самостійного інтересу.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [270, 271, 273–276].

Розділ 6

Апроксимаційні властивості діагональних операторів у просторах числових послідовностей

Цей розділ присвячено розв'язанню екстремальних задач стосовно обчислення точних значень найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим певних множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей зі змінним показником підсумовування та дискретних просторах Орлича. Також досліджено екстремальні задачі стосовно знаходження точних значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A};d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функцій з одиничних куль $U_M^+(\mathbb{A})$ цих просторів.

6.1. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів у просторах $l_{\mathbf{p}}$

У цьому підрозділі розглянуто діагональні оператори у просторах $l_{\mathbf{p}}$ числових послідовностей зі змінним показником підсумовування і знайдено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим множин образів діагональних операторів у цих просторах. Одержані результати поширюють деякі результати О.І. Степанця [215, 219] (див., також, [217, гл. XI]) для лінійних просторів S_{φ}^{p} на випадок наближення у просторах $l_{\mathbf{p}}$ числових послідовностей зі змінним показником підсумовува-

ння. У класичних просторах l_p апроксимаційні характеристики діагональних операторів вивчали, зокрема, в роботах [44, 46].

Нехай $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \le p_k \le K, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.1}$$

де K — деяка додатна стала. Через $l_{\mathbf{p}}$ позначимо простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченою нормою Люксембурга:

$$||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{p}}} := \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \le 1\right\}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\mathbf{p}$ є сталою: $p_k{=}p$, $k \in \mathbb{N}$, простори $l_{\mathbf{p}}$ збігаються зі звичайними просторами l_p з нормою

$$||\mathbf{x}||_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p},$$

якщо ж $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (6.1), то як показано в [77] (лема 2.6), має місце рівність

$$l_{\mathbf{p}} = \left\{\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k} < \infty\right\}. \tag{6.2}$$

6.1.1. Точні значення найкращих наближень $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ та базисних поперечників $D_n(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0, \tag{6.3}$$

і

$$T : \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to T\mathbf{x} = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$$

— *діагональний оператор*, заданий на просторі $l_{\mathbf{p}}$. Нехай, далі,

$$B_{l_{\mathbf{p}}} := \{\mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}} : \quad \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{p}} \le 1\}$$

— одинична куля простору $l_{\mathbf{p}}$ і $\mathbf{e}_i = \{e_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$$

система одиничних ортів простору $l_{\mathbf{p}}$.

Для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо найкраще наближення

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) := E_{\gamma_n}(T(B_{l_{\mathbf{q}}}), l_{\mathbf{p}}) =$$

$$= \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}} E_{\gamma_n}(T\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) = \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}} \inf_{a_i} ||T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}||_{l_{\mathbf{p}}}$$

у просторі $l_{\mathbf{p}}$ множини $T(B_{l_{\mathbf{q}}})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів

$$P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i \mathbf{e}_i,$$

що відповідають набору γ_n, де a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли $0 < q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$, а послідовність λ задовольняє умову (6.3), для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}$ маємо $T\mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}}$ і, отже, величини $E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, в такому випадку для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}$ всі компоненти $|x_k| \leq 1$, тому для будь-яких $0 < q_k \leq p_k$ маємо $|x_k|^{p_k} \leq |x_k|^{q_k}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k x_k}{\lambda^*} \right|^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x_k}{||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{q}}}} \right|^{q_k} \leq 1,$$

де $\lambda^* = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$. Звідси випливає, що $||T\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{p}}} \leq \lambda^* < \infty$ і $T\mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}}$.

Теорема 6.1.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності (6.1), а їх компоненти пов'язані співвідношеннями* $q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Тоді для будь-якої послідовність додатних чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *що задовольняють умову (6.3) і для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральних*

чисел має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{6.4}$$

Доведення. Нехай

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) := ||\mathbf{x} - S_{\gamma_n}(\mathbf{x})||_{l_{\mathbf{p}}},$$

де $S_{\gamma_n}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \gamma_n} x_k \mathbf{e}_k$.

Оскільки для довільного $\mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}}$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$ справджується нерівність

$$\sum_{k \in \gamma_n} \left| \frac{x_k - a_i}{\alpha} \right|^{p_k} + \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \geq \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k},$$

то має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{\gamma_n}(x, l_{\mathbf{p}}) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \leq 1 \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in l_{\mathbf{p}}. \tag{6.5}$$

Виберемо число $k^* \in \mathbb{N}$, $k^* = k^*(\gamma_n)$, так, щоб $\lambda_{k^*} = \max\limits_{k \notin \gamma_n} \lambda_k$. Тоді для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{\mathbf{q}}}$ будемо мати

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{\lambda_k x_k}{\lambda_{k^*}} \right|^{p_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} |x_k|^{p_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} |x_k|^{q_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} \left| \frac{x_k}{||\mathbf{x}||_{l_{\mathbf{q}}}} \right|^{q_k} \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) \leq \lambda_{k^*} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

Водночас

$$E_{\gamma_n}(T\mathbf{e}_{k^*}, l_{\mathbf{p}}) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \left| \frac{\lambda_{k^*}}{\alpha} \right|^{p_{k^*}} \leq 1 \right\} = \lambda_{k^*},$$

при цьому очевидно, що $\mathbf{e}_{k^*} \in B_{l_{\mathbf{p}}}$. Отже, дійсно має місце рівність (6.4).

Теорему доведено.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (6.4) за всіма можливими наборами γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що

точна нижня межа в правій частині (6.4) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — незростаюча перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

З теореми 6.1.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.1.1. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють умову (6.1), а їх компоненти пов'язані співвідношенням* $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Тоді для будь-якої послідовності додатних чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *що задовольняють умову (6.3), справджується рівність*

$$D_n(T: l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B_{l_{\mathbf{q}}}), l_{\mathbf{p}}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T: l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \bar{\lambda}_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— незростаюча перестановка чисел* λ_k.

Величину $D_n(T: l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = D_n(T(B_{l_{\mathbf{q}}}), l_{\mathbf{p}})$ називають *базисним поперечником* множини $T(B_{l_{\mathbf{q}}})$ у просторі $l_{\mathbf{p}}$.

6.1.2. Точні значення поперечників за Колмогоровим $d_n(T: l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}})$

Конструкції апроксимаційних агрегатів, які ми будемо далі використовувати, визначаються характеристичними послідовностями $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$, означення яких наведено нижче [219].

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (6.3). Позначимо через $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ послідовність всіх значень величин λ_k, впорядковану за незростанням, через $g(\lambda) = g_1, g_2, \ldots$ — систему множин

$$g_n = g_n(\lambda) = \{k \in \mathbb{N}: \ \lambda_k \ge \varepsilon_n\}, \tag{6.6}$$

а через $\delta(\lambda) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ – послідовність чисел $\delta_n = |g_n|$, де $|g_n|$ – кількість чисел $k \in \mathbb{N}$, які містяться в множині g_n.

Враховуючи умову (6.3), послідовності $\varepsilon(\lambda)$ та $g(\lambda)$ можна означити наступними співвідношеннями:

$$\varepsilon_1 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k, \quad g_1 = \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_1\},$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k\bar{\in} g_{n-1}} \lambda_k, \quad g_n = g_{n-1} \cup \{k \in \mathbb{N} \ : \ \lambda_k = \varepsilon_n\}.$$

Зазначимо, що за такого означення кожне число $n^* \in \mathbb{N}$ належить усім множинам $g_n(\lambda)$ з достатньо великими номерами n і

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

Надалі через $g_0 = g_0^\lambda$ зручно позначати порожню множину і вважати, що $\delta_0 = 0$.

Зазначимо також наступне: якщо $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ — незростаюча перестановка чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, то справджується рівність

$$\bar{\lambda}_k = \varepsilon_n \quad \forall k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тому з теореми 6.1.1 легко отримати такий наслідок.

Наслідок 6.1.2. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ *і* $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^\infty$ *— довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності (6.1), а їх компоненти пов'язані співвідношеннями* $q_k \le p_k$, $k \in \mathbb{N}$. *Нехай, далі,* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (6.3).*

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ *виконуються рівності*

$$E_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{q}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n, \tag{6.7}$$

де ε_n *— n-й член характеристичної послідовності* $\varepsilon(\lambda)$.

Зауваження 6.1.1. *Зазначимо, що у випадку, коли послідовність* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *є строго спадною, для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *маємо* $\varepsilon_n(\lambda) = \lambda_n$ *і*

$g_n(\lambda) = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_n(\lambda) = n$, *а величини* $E_{g_{n-1}(\lambda)}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}})$ *та* $\mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}})$ *мають відповідно вигляд*

$$E_{g_{n-1}(\lambda)}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) = E_{n-1}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) = \inf_{a_i} ||\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \mathbf{e}_i||_{l_{\mathbf{p}}}$$

та

$$\mathcal{E}_{g_{n-1}(\lambda)}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) = \mathcal{E}_{n-1}(\mathbf{x}, l_{\mathbf{p}}) = ||\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \mathbf{e}_i||_{l_{\mathbf{p}}}.$$

Нехай далі X та Y — лінійні нормовані простори, B_X — замкнена одинична куля простору X і $T : X \to Y$ — обмежений лінійний оператор. Величину

$$d_n(T : X \to Y) := d_n(T(B_X); Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{u \in F_n} ||Tx - u||_Y$$

де $\mathcal{F}_n$ — множина всіх підпросторів простору Y розмірності не вище $n \in \mathbb{N}$, називають *поперечником за Колмогоровим* множини $T(B_X)$ у просторі Y.

Теорема 6.1.2. *Нехай* $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють нерівності (6.1),* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (6.3).*

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \ldots =$$

$$= d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = E_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \varepsilon_n, \tag{6.8}$$

в яких δ_s *і* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *— елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доведення. Нехай спочатку $n > 1$. Підпростір Φ_{n-1}^{λ} поліномів

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}(\lambda)} a_k \mathbf{e}_k \tag{6.9}$$

має розмірність δ_{n-1}. Тому з урахуванням (6.7) знаходимо

$$\varepsilon_n = E_{g_{n-1}(\lambda)}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq d_{\delta_{n-1}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq$$

$$\geq d_{\delta_{n-2}}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq \ldots \geq d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}).$$

Отже, для доведення рівності (6.8) залишається показати, що

$$d_{\delta_n - 1}(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) \geq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.10}$$

Для цього скористаємося відомою теоремою про поперечник кулі (див., наприклад, [245, §10.2]), згідно з якою, якщо множина $\mathfrak{M}$ лінійного нормованого простору $\mathcal{X}$ з нормою $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ містить кулю $\gamma U_{\nu+1}$ радіуса γ деякого $(\nu+1)$-вимірного підпростору $M_{\nu+1}$ з $\mathcal{X}$, тобто, якщо

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y : \ y \in M_{\nu+1}, \ ||y||_{\mathcal{X}} \leq \gamma\},$$

то

$$d_\nu(\mathfrak{M})_{\mathcal{X}} = \inf_{F_\nu \in G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} ||f - u||_{\mathcal{X}} \geq \gamma,$$

де G_ν — множина всіх ν-мірних підпросторів в $\mathcal{X}$.

Нехай $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ — перетин кулі радіуса ε_n в $l_{\mathbf{p}}$ з простором Φ^λ_n (розмірності δ_n) поліномів вигляду (6.9):

$$\varepsilon_n U^\lambda_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^\lambda_n \ : \ ||\Phi_n||_{l_{\mathbf{p}}} \leq \varepsilon_n\}. \tag{6.11}$$

Тоді з урахуванням (6.6) та (6.11) для довільного полінома

$$\Phi_n = \sum_{k \in g_n(\lambda)} a_k \mathbf{e}_k \in \varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$$

будемо мати

$$\sum_{k \in g_n(\lambda)} \left|\frac{a_k}{\lambda_k}\right|^{p_k} \leq \sum_{k \in g_n(\lambda)} \left|\frac{a_k}{\varepsilon_n}\right|^{p_k} \leq 1.$$

Звідси випливає, що Φ_n є образом деякого елемента з одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{p}}}$. Таким чином, куля $\varepsilon_n B^\lambda_{n,\Phi}$ δ_n-вимірного підпростору Φ^λ_n з $l_{\mathbf{p}}$ міститься в множині $T(B_{l_{\mathbf{p}}})$ образів всіх елементів з одиничної кулі $B_{l_{\mathbf{p}}}$ при дії оператора

T. Звідси з урахуванням рівності

$$d_n(T : l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{\mathbf{x} \in T(B_{l_{\mathbf{p}}})} \inf_{u \in F_n} ||\mathbf{x} - u||_{l_{\mathbf{p}}}$$

на підставі наведеної вище теореми отримуємо співвідношення (6.10). Таким чином, у випадку $n > 1$ теорему доведено. При $n = 1$ її доведення залишається без змін, якщо вважати, що підпростір $\Phi_0(\lambda)$ складається з нульового елемента $\theta = (0, 0, \ldots)$ і його розмірність дорівнює нулю.

Теорему доведено.

Зауваження 6.1.2. *Коли послідовність* $\mathbf{p}$ *є сталою:* $p_k = p$, $k \in \mathbb{N}$, *тобто, коли* $l_{\mathbf{p}} = l_p$, *твердження наслідку 6.1.2 та теореми 6.1.2 випливають відповідно із теорем 1 та 2 праці [215] (див. також [217, гл. XI]), теореми 3.1 та 3.2]). У випадку скінченно вимірних просторів* l_p^d *твердження, аналогічне до теореми 3.1, випливає з теореми 2.1 [153, ch. VI].*

6.2. Нерівності типу Чебишева

В цьому підрозділі отримано низку співвідношень, які в літературі називаються нерівностями типу Чебишева. Одержані тут результати мають допоміжне значення, але і не позбавлені самостійного інтересу.

Нехай f, $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — інтегровані функції, що не зростають (або не спадають). Нехай, також, $p : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ — інтегрована функція. Тоді (див., наприклад, [122, Chap. IX])

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \left(\int_a^b p(x)dx \right)^{-1}. \quad (6.12)$$

Якщо одна з функцій f або g не зростає, а інша — не спадає, то справджується протилежна нерівність, тобто

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \left(\int_a^b p(x)dx \right)^{-1}. \quad (6.13)$$

Нерівності вигляду (6.12) і (6.13) прийнято називати *нерівностями Чебишева.* Ці нерівності були встановлені П.Л. Чебишевим [279, 280] і постійно привертали увагу дослідників. Тому, відомо багато різноманітних доведень та узагальнень нерівностей вигляду (6.12) і (6.13). Зокрема, з цими результатами можна ознайомитись в монографії [122, Ch. IX], де наведено дуже детальний історичний і хронологічний огляд розвитку досліджень нерівностей типу Чебишева і суміжних питань (див., також, [123, 124]). До того ж, в статті [257] можна знайти багато важливих результатів щодо нерівностей типу Чебишева для строго зростаючих функцій, додатних опуклих вниз і вгору функцій, а також нерівності Чебишева в банахових функціональних просторах і симетричних просторах.

В роботі [265] дані дослідження були розвинені в такому напрямку: знайдено необхідні та достатні умови на функції $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ and $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ щоб для довільної монотонної функції $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ виконувались співвідношення

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \left(\frac{\int_a^b p^r(x)f^r(x)dx}{\int_a^b p^r(x)dx}\right)^{1/r} \int_a^b p(x)g(x)dx \tag{6.14}$$

і

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \left(\frac{\int_a^b p^r(x)f^r(x)dx}{\int_a^b p^r(x)dx}\right)^{1/r} \int_a^b p(x)g(x)dx \tag{6.15}$$

де r — довільне фіксоване додатне число.

6.2.1. Формулювання основних результатів підрозділу

В продовження досліджень нерівностей типу (6.12)–(6.15), одержано такі твердження.

Теорема 6.2.1. *Нехай $g: [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ та $p: [a,b] \to \mathbb{R}^+$ — інтегровані функції, такі що добуток $p \cdot g$ також є інтегрованою на $[a,b]$ функцією. Нехай, далі $f: [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ — незростаюча функція.*

Тоді для довільної опуклої вниз функції $M: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ такої, що

$M(0)=0$, справджується наступна нерівність:

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \le$$

$$\le \sup_{s\in(a,b]}\left\{M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}, \tag{6.16}$$

а для довільної опуклої вгору функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, справджується наступна нерівність:

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \ge$$

$$\ge \inf_{s\in(a,b]}\left\{M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}. \tag{6.17}$$

Поклавши $M(t)=t^{1/r}$, $r>0$, з теореми 6.2.1 отримуємо такі наслідки.

Наслідок 6.2.1. *Нехай $r\in(0,1]$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ і $p:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ інтегровані функції такі, що для всіх $s\in(a,b]$*

$$\frac{\int_a^s p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^s p(x)dx\right)^{1/r}} \le \frac{\int_a^b p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{1/r}}. \tag{6.18}$$

Тоді для довільної незростаючої функції $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$, справджується нерівність

$$\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx \le \left(\int_a^b p(x)f^r(x)dx\right)^{1/r}\frac{\int_a^b p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{1/r}}. \tag{6.19}$$

Наслідок 6.2.2. *Нехай $r\ge 1$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ і $p:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ — інтегровні функції такі, що для всіх $s\in(a,b]$*

$$\frac{\int_a^s p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^s p(x)dx\right)^{1/r}} \ge \frac{\int_a^b p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{1/r}}. \tag{6.20}$$

Тоді для довільної незростаючої функції $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$, *справджується нерівність*

$$\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx \geq \left(\int_a^b p(x)f^r(x)dx\right)^{1/r} \frac{\int_a^b p(x)g(x)dx}{\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{1/r}}. \tag{6.21}$$

Якщо в наслідках 6.2.1 і 6.2.2, покласти $r=1$, то бачимо, що співвідношення (6.19) і (6.21) є класичними нерівностями Чебишева (6.12) та (6.13). При цьому слід зазначити, що умови на функції p та g вигляду (6.18) і (6.20) для виконання нерівностей вигляду (6.12) і (6.13) зустрічались, зокрема, в роботах [265] та [235].

У випадку, коли функція $M(f(x))$ не спадає і функція g не зростає (або не спадає) ми можемо застосувати класичну нерівність Чебишева до інтегралу $\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx$ з лівої частини співвідношень (6.16) (або (6.17)). Відповідно, отримаємо

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \leq \frac{\int_a^b p(x)M(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b p(x)g(x)dx \tag{6.22}$$

і

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \geq \frac{\int_a^b p(x)M(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b p(x)g(x)dx. \tag{6.23}$$

При цьому, якщо точна верхня (або нижня) межа в правій частині співвідношення (6.16) (або (6.17)) реалізується для $s=b$, тоді зі співвідношень (6.16) та (6.17) отримуємо

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \leq M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)\int_a^b p(x)g(x)dx, \tag{6.24}$$

і

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx \geq M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)\int_a^b p(x)g(x)dx. \tag{6.25}$$

Тут слід зауважити, що внаслідок нерівності Йєнсена (див., наприклад, [122,

Chap. I]) оцінки (6.24) та (6.25) інтегралу $\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx$ є більш точними, в порівнянні з оцінками (6.22) та (6.23).

Зауваження 6.2.1. *У випадку, коли функція f не спадає, нерівності (6.16) та (6.17) мають такий самий вигляд, однак у них всі інтеграли вигляду $\int\limits_a^s(\cdot)$ слід замінити на інтеграли вигляду $\int\limits_s^b(\cdot)$.*

6.2.2. Дискретний аналог теореми 6.2.1

Доведення теореми 6.2.1 спирається на її дискретний аналог.

Лема 6.2.1. *Нехай $a=\{a_k\}_{k=1}^m$, $b=\{b_k\}_{k=1}^m$ та $p=\{p_k\}_{k=1}^m$, $m\in\mathbb{N}$ — послідовності невід'ємних чисел таких, що $a_1\geq a_2\geq\ldots a_m$ і $p_k>0$.*

Тоді довільної опуклої вниз функції $M:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^m p_k b_k M(a_k)\leq\max_{s\in[1,m]}\left\{M\left(\frac{\sum_{k=1}^m p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k}\right)\sum_{k=1}^s p_k b_k\right\},\qquad(6.26)$$

а довільної опуклої вгору функції $M:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, справджується нерівність

$$\sum_{k=1}^m p_k b_k M(a_k)\geq\min_{s\in[1,m]}\left\{M\left(\frac{\sum_{k=1}^m p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k}\right)\sum_{k=1}^s p_k b_k\right\}.\qquad(6.27)$$

Для строгості викладу наведемо повне доведення цієї леми зі спільної роботи [268] зауваживши, що основні його етапи належать А.Л. Шидлічу.

Доведення. Розглянемо випадок, коли функція M є опуклою вниз (доведення у випадку, коли M — опукла вгору цілком аналогічне). Доведемо методом математичної індукції по m, що для довільної опуклої вниз функції $M:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, виконується нерівність (6.26).

Випадок $m=1$ є тривіальним.

Розглянемо випадок $m=2$. Покладемо

$$c=p_1a_1+p_2a_2,\quad x_0=p_1a_1,\quad\alpha_k=p_kb_k,\quad\beta_k=p_k^{-1},\quad k=1,2,\qquad(6.28)$$

і розглянемо на інтервалі $[0,c]$ функцію

$$h(x)=\alpha_1 M(\beta_1 x)+\alpha_2 M(\beta_2(c-x)). \tag{6.29}$$

Внаслідок опуклості функції $M(t)$, функція $h(x)$ теж є опуклою вниз на відрізку $[0,c]$. Звідси випливає, що дана функція досягає свого найбільшого на відрізку $[x_1;x_2]\subset[0;c]$ значення на одному із кінців цього відрізка. Тому

$$h(x)\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}\quad\forall x\in[x_1,x_2]. \tag{6.30}$$

Покладаючи $x_1:=\beta_2 c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ та $x_2:=c$, робимо висновок, що число x_0 (внаслідок монотонності послідовності a) належить проміжку $[x_1;x_2]$.

Отже, з огляду на співвідношення (6.28)–(6.30) і рівність $M(0)=0$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{2}p_k b_k M(a_k)=h(x_0)\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}=$$

$$=\max\left\{M\Big(\frac{p_1a_2+p_2a_2}{p_1+p_2}\Big)(p_1b_2+p_2b_2),M\Big(\frac{p_1a_2+p_2a_2}{p_1}\Big)p_1b_1\right\}.$$

Таким чином, для $m=2$ нерівність (6.26) справджується.

Зараз припустимо, що при $m=n-1\ge1$, твердження леми є правильним. Покажемо, що для $m=n$, воно також виконується. Скористаємося позначеннями (6.28) і розглянемо на проміжку $[0,c]$ функцію $h(x)$ вигляду (6.29). Покладаючи $x_1:=\beta_2 c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ та $x_2:=c-a_3/\beta_2$, робимо висновок, що число x_0 (внаслідок монотонності послідовності a) належить проміжку $[x_1;x_2]$. Тому, з огляду на співвідношення (6.28)–(6.30) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n}p_k b_k M(a_k)=h(x_0)+\sum_{k=3}^{n}p_k b_k M(a_k)\le$$

$$\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}+\sum_{k=3}^{n}p_k b_k M(a_k). \tag{6.31}$$

Далі, у випадку, якщо $h(x_1) \geq h(x_2)$, покладемо

$$p'_k = \begin{cases} p_1 + p_2, & k = 1, \\ p_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}; \end{cases} \tag{6.32}$$

$$b'_k = \begin{cases} (p_1 b_1 + p_2 b_2)/(p_1 + p_2), & k = 1, \\ b_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}; \end{cases} \tag{6.33}$$

$$a'_k = \begin{cases} (p_1 a_1 + p_2 a_2)/(p_1 + p_2), & k = 1, \\ a_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}. \end{cases} \tag{6.34}$$

Тоді внаслідок співвідношення (6.31), робимо висновок, що має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k M(a_k) \leq \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k M(a'_k). \tag{6.35}$$

У випадку, коли $h(x_1) < h(x_2)$, співвідношення (6.35) виконується для послідовностей a', b' та p' вигляду

$$p'_k = \begin{cases} p_1, & k = 1, \\ p_2 + p_3, & k = 2, \\ p_{k+1}, & k = \overline{3, m-1}; \end{cases} \tag{6.36}$$

$$b'_k = \begin{cases} b_1, & k = 1, \\ (p_2 b_2 + p_3 b_3)(p_2 + p_3)^{-1}, & k = 2, \\ b_{k+1}, & k = \overline{3, m-1}; \end{cases} \tag{6.37}$$

$$a'_k = \begin{cases} (p_1 a_1 + p_2 a_2 - p_2 a_3)/p_1, & k = 1, \\ a_{k+1}. & k = \overline{2, m-1}, \end{cases} \tag{6.38}$$

Сума в правій частині співвідношення (6.35) містить $n-1$ доданок. До того ж, в обох випадках послідовності a', b' та p', задовольняють умови нашого припущення. Тому, беручи до уваги співвідношення (6.32) – (6.38), отримуємо необхідну оцінку (6.26):

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} p'_k b'_k M(a'_k) \leq \sup_{s \in [1, n-1]} \left\{ M \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} p'_k a'_k}{\sum_{k=1}^{s} p'_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p'_k b'_k \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{s\in[1,n]} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}.$$

Лему доведено.

6.2.3. Доведення теореми 6.2.1

Переконаємося у справедливості твердження теореми 6.2.1.

Доведення. Розглянемо випадок, коли функція M є опуклою вниз (доведення у випадку, коли M — опукла вгору цілком аналогічне). Спочатку переконаємося в справедливості нерівності (6.16) для довільної функції f такої, що для деякого $m \in \mathbb{N}$

$$f(x) = a_k, \quad x \in [l_{k-1}, l_k),\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

де $a_1 > a_2 > \ldots > a_m \geq 0$ і $a = l_0 < l_1 < \ldots < l_m = b$.

При кожному $k = 1, 2, \ldots, m$, покладемо

$$p_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)dx, \quad b_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)g(x)dx \Big(\int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)dx \Big)^{-1}.$$

Тоді, внаслідок леми 6.2.1, одержуємо (6.16):

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)g(x)M(f(x))dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k b_k M(a_k) \leq \sup_{s\in[1,m]\cap\mathbb{N}} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k}\right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\} =$$

$$= \sup_{s\in[1,m]\cap\mathbb{N}} \left\{ M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^{l_s} p(x)dx}\right) \int_a^{l_s} p(x)g(x)dx \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{s\in(a,b]} \left\{ M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^{s} p(x)dx}\right) \int_a^{s} p(x)g(x)\ dx \right\}.$$

Переконаємося тепер у справедливості нерівності (6.16) в загальному випадку. Спочатку зауважимо, якщо функції M і f задовольняють умови

теореми 1, то існує число $n_0 = n_0(M, f) \in \mathbb{N}$ таке, що при кожному $n > n_0$ і для всіх $x \in [a; b]$, виконується нерівність

$$|M(f(x))| < n.$$

Для кожного $n > n_0$, розглянемо систему точок $l_0^{(n)} < l_1^{(n)} < \ldots < l_m^{(n)} = b$, що визначаються наступним чином: покладаємо $l_0^{(n)} := a$ і при кожному $k \in [1; m] \cap \mathbb{N}$ визначимо величину $l_k^{(n)}$ як найбільше додатне число таке, що $l_k^{(n)} > l_{k-1}^{(n)}$ і для всіх $x \in [l_{k-1}^{(n)}; l_k^{(n)})$ виконується наступне співвідношення:

$$|M(f(l_{k-1}^{(n)})) - M(f(x))| \leq \frac{1}{n}.$$

Внаслідок умов на функції M та f, така система точок завжди існує і $m \leq 2n^2$.

Далі, розглянемо функцію $f_n = f_n(x)$ таку, що

$$f_n(x) \equiv \lim_{t \to l_k^{(n)} -} f(t), \quad \forall x \in [l_{k-1}^{(n)}; l_k^{(n)}),\ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.39}$$

Бачимо, що нерівність

$$|M(f(x)) - M(f_n(x))| \leq \frac{1}{n},$$

справджується для всіх $n > n_0$ і $x \in [a, b]$. Завдяки інтегрованості на $[a, b]$ добутку $p(x)g(x)$, величини

$$\int_a^b p(x)g(x)[M(f(x)) - M(f_n(x))]\, dx$$

збігаються до нуля при $n \to \infty$. Крім цього, при кожному $n > n_0$, функція $f_n(x)$ на $[a, b]$ не зростає і набуває скінченну кількість значень, тобто, задовольняє умови твердження, для якого справедливість нерівності (6.16) вже доведено.

Тому, враховуючи (6.39) і неперервність функції M, робимо висновок,

що для довільного $\varepsilon > 0$ при всіх достатньо великих n ($n > n_1(\varepsilon)$),

$$\int_a^b p(x)g(x)M(f(x))dx = \int_a^b p(x)g(x)M(f_n(x))dx +$$

$$+ \int_a^b p(x)g(x)(M(f(x)) - M(f_n(x)))dx \leq$$

$$\leq \sup_{s\in(a;b]} \left\{ M\left(\frac{\int_a^b p(x)f_n(x)dx}{\int_a^s p(x)dx} \right) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sup_{s\in(a;b]} \left\{ M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx} \right) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\} + \varepsilon.$$

Отже, співвідношення (6.16) дійсно виконується.

Теорему доведено.

Аналізуючи доведення теореми 6.2.1, робимо висновок, що аналогічне твердження також буде мати місце і у випадку, коли $b = \infty$.

Теорема 6.2.2. *Нехай $g : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ та $p : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ (де $b \in (a, \infty]$) — інтегровані функції такі, що добуток $p \cdot g$ також є інтегрованою на $[a, b]$ функцією. Нехай, також, $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ — незростаюча функція.*

Тоді для довільної опуклої вниз (опуклої вгору) функції $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такої, що $M(0) = 0$, виконується нерівність (6.16) *(або нерівність* (6.17)*).*

Так само можна отримати твердження, аналогічне до леми 6.2.1 у випадку, коли $n = \infty$.

Лема 6.2.2. *Нехай $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $b = \{b_k\}_{k=1}^\infty$ та $p = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ послідовності невід'ємних чисел таких, що $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$, $p_k > 0$ і ряд $\sum_{k=1}^\infty p_k b_k$ збігається.*

Тоді для довільної опуклої вниз функції $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такої, що

$M(0)=0$, *виконується наступна нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k M(a_k) \le \sup_{s\in[1,\infty)} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}, \tag{6.26′}$$

і для довільної опуклої вгору функції $M:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$, *виконується наступна нерівність*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k M(a_k) \ge \inf_{s\in[1,\infty)} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}. \tag{6.27′}$$

6.3. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів у просторах Орлича l_M

В цьому підрозділі досліджено апроксимаційні властивості діагональних операторів у просторах Орлича числових послідовностей. Отримано точні значення важливих апроксимаційних характеристик (таких, як найкраще наближення, базисний поперечник та поперечник за Колмогоровим) множин образів діагональних операторів у просторах l_M. Зокрема, отримані результати поширюють відповідні твердження доведені для просторів l_p (l_p^d) в роботах [214, 215, 217, 219, 282].

Нехай $M(t)$, $t\ge 0$, — довільна функція Орлича, тобто, неспадна опукла вниз функція така, що $M(0)=0$ і $M(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Простором Орлича l_M [149], що визначається даною функцією $M(t)$, називають лінійний простір всіх послідовностей $\mathbf{x}=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(x_k) < \infty.$$

Простір l_M є банаховим з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_M} := \inf\left\{ \alpha>0:\ \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha)\le 1 \right\}. \tag{6.40}$$

Кажуть, що функція Орлича $M(t)$ задовольняє Δ_2-умову, якщо

існує стала $C > 0$ така, що при всіх $t \geq 0$ справджується нерівність $M(2t) \leq CM(t)$.

Зазначимо, що у випадку, коли функція $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, простори l_M співпадають зі звичайними просторами l_p з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \tag{6.41}$$

якщо ж функція $M(t)$ задовольняє Δ_2-умову, то як показано в [106, твердження 1], має місце рівність

$$l_M = \left\{ \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \quad \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|/\alpha) < \infty \quad \forall \alpha > 0 \right\}, \tag{6.42}$$

при цьому система векторів $\mathbf{e}_i = \{e_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, де

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$$

є базисом у цьому просторі.

Простори l_M були введені до розгляду В. Орличем у праці [149] і в подальшому досліджувалися багатьма авторами, зокрема, у роботах [1, 56, 57, 106, 108, 132].

6.3.1. Точні значення найкращих наближень $E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N)$ і базисних поперечників $D_n(T : l_M \to l_N)$

Нехай, як і раніше, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову (6.3) і $T : \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to T\mathbf{x} = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — діагональний оператор, заданий на просторі l_M.

Нехай також $M(t)$ і $N(t)$ — дві довільні функції Орлича, l_M та l_N — простори Орлича, які відповідають цим функціям, і B_{l_M} — одинична куля простору l_M. Для будь-якого фіксованого набору γ_n із n різних натуральних

чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = E_{\gamma_n}(T(B_{l_M}), l_N) = \sup_{\mathbf{x}\in B_{l_M}} E_{\gamma_n}(T\mathbf{x}, l_N) :=$$

$$:= \sup_{\mathbf{x}\in B_{l_M}} \inf_{a_i} ||T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}||_{l_N}$$

найкращого наближення в просторі l_N множини $T(B_{l_M})$ за допомогою всіх можливих n-членних поліномів

$$P_{\gamma_n} = \sum_{i\in\gamma_n} a_i \mathbf{e}_i,$$

що відповідають набору γ_n, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли

$$0 < N(t) \le M(t), \quad t \in [0, 1], \tag{6.43}$$

а послідовність λ задовольняє умову (6.3), для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_M}$ маємо $T\mathbf{x} \in l_N$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N)$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, поклавши $\lambda^* := \max_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$, в такому випадку з врахуванням неспадання функцій $M(t)$ та $N(t)$ для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_M}$ будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda^*}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} N(|x_k|) \le \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{||\mathbf{x}||_{l_M}}\right) \le 1.$$

Звідси випливає, що $||T\mathbf{x}||_{l_N} \le \lambda^* < \infty$ і $T\mathbf{x} \in l_N$.

Теорема 6.3.1. *Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення* (6.43) *і*

$$\inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \le 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \le 1\}. \tag{6.44}$$

Нехай, далі, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова (6.3).

Тоді для довільного набору γ_n *із* n *різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \tag{6.45}$$

Доведення. Оскільки для довільного $\mathbf{x} \in l_N$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \gamma_n} N(|x_k - a_i|/\alpha) + \sum_{k \notin \gamma_n} N(|x_k|/\alpha) \geq \sum_{k \notin \gamma_n} N(|x_k|/\alpha),$$

то для довільного $\mathbf{x} \in l_N$

$$E_{\gamma_n}(\mathbf{x}, l_N) = \mathscr{E}_{\gamma_n}(\mathbf{x}, l_N) := ||\mathbf{x} - S_{\gamma_n}(\mathbf{x})||_{l_N} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} N(|x_k|/\alpha) \leq 1\right\}, \tag{6.46}$$

де

$$S_{\gamma_n}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \gamma_n} x_k \mathbf{e}_k.$$

Покладемо $\lambda_{k^*} = \lambda_{k^*}(\gamma_n) = \max\limits_{k \notin \gamma_n} \lambda_k$. Для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_M}$

$$\sum_{k \notin \gamma_n} N\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda_{k^*}}\right) \leq \sum_{k \notin \gamma_n} N(|x_k|) \leq$$

$$\leq \sum_{k \notin \gamma_n} M(|x_k|) \leq \sum_{k \notin \gamma_n} M\left(\frac{|x_k|}{\|\mathbf{x}\|_{l_M}}\right) \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) \leq \lambda_{k^*} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку, розглянемо елемент $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_{k^*}/||\mathbf{e}_{k^*}||_{l_M}$. Внаслідок (6.44)

$$\|\mathbf{e}_{k^*}\|_{l_M} = \inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \leq 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \leq 1\} = ||\mathbf{e}_{k^*}||_{l_N},$$

тому $||\mathbf{x}^*||_{l_M} = ||\mathbf{x}^*||_{l_N} = 1$ і $\mathbf{x}^* \in B_{l_M}$. Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T\mathbf{x}^*, l_N) = \inf\left\{\alpha > 0 : N\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha||\mathbf{e}_{k^*}||_{l_M}}\right) \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 : N\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha||\mathbf{e}_{k^*}||_{l_N}}\right) \le 1\right\} = \lambda_{k^*}.$$

Таким чином, дійсно має місце рівність (6.45).

Теорему доведено.

Зауваження 6.3.1. *Зазначимо, що співвідношення (6.44) виконується, зокрема, у випадку, коли* $M(1) = N(1) = 1$.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (6.45) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (6.45) реалізується набором γ_n^*, який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \quad \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неспадна перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

З теореми 6.3.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.3.1. *Нехай* $M(t)$ *та* $N(t)$ *— довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення* (6.43) *та* (6.44), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (6.3).

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$D_n(T : l_M \to l_N) = D_n(T(B_{l_M}), l_N) :=$$

$$:= \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– незростаюча перестановка чисел* λ_k.

Величину $D_n(T : l_M \to l_N) = D_n(T(B_{l_M}), l_N)$ називають *базисним поперечником* множини $T(B_{l_M})$ в просторі l_N.

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = t^q$ і $N(t) = t^p$, $0 < q \leq p$, тобто, коли $l_M = l_q$ і $l_N = l_p$, твердження теореми 6.3.1 та наслідку 6.3.1 випливають відповідно з теорем 4.1 та 4.3 роботи [219].

6.3.2. Точні значення поперечників за Колмогоровим $d_n(T : l_M \to l_M)$

Нехай $\varepsilon(\lambda)$, $g_n(\lambda)$ та $\delta(\lambda)$ — характеристичні послідовності, означення яких наведено в пункті 6.1.2

З теореми 6.3.1 легко отримати наступний наслідок.

Наслідок 6.3.2. *Нехай $M(t)$ і $N(t)$ — довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення (6.43) і (6.44), $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова (6.3).*

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$E_{g_{n-1}^{\lambda}}(T : l_M \to l_N) = \mathscr{E}_{g_{n-1}^{\lambda}}(T : l_M \to l_N) :=$$

$$:= \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_M}} \mathscr{E}_{g_{n-1}^{\lambda}}(T\mathbf{x}, l_N) = \varepsilon_n, \tag{6.47}$$

де ε_n — n-й член характеристичної послідовності $\varepsilon(\lambda)$.

Зауваження 6.3.2. *Зазначимо, що у випадку, коли послідовність $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ є строго спадною, для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо $\varepsilon_n(\lambda) = \lambda_n$ і $g_n^{\lambda} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\delta_n(\lambda) = n$, а для довільного $\mathbf{x} \in l_M$ величини $E_{g_{n-1}^{\lambda}}(\mathbf{x}, l_M)$ та $\mathscr{E}_{g_{n-1}^{\lambda}}(\mathbf{x}, l_M)$ мають відповідно вигляд*

$$E_{g_{n-1}^{\lambda}}(\mathbf{x}, l_M) = E_{n-1}(\mathbf{x}, l_M) = \inf_{a_i} \left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \mathbf{e}_i \right\|_{l_M}$$

та

$$\mathscr{E}_{g_{n-1}^{\lambda}}(\mathbf{x}, l_M) = \mathscr{E}_{n-1}(\mathbf{x}, l_M) = \left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \mathbf{e}_i \right\|_{l_M}.$$

Для величин поперечників за Колмогоровим справджується таке твердження.

Теорема 6.3.2. *Нехай* $M(t)$ *— довільна функція Орлича,* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* (6.3)*. Тоді для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{\delta_{n-1}}(T : l_M \to l_M) = d_{\delta_{n-1}+1}(T : l_M \to l_M) = \ldots =$$

$$= d_{\delta_n-1}(T : l_M \to l_M) = E_n(T : l_M \to l_M) = \varepsilon_n, \tag{6.48}$$

в яких δ_s *і* ε_s*,* $s = 1, 2, \ldots,$ *— елементи характеристичних послідовностей* $\delta(\lambda)$ *та* $\varepsilon(\lambda)$ *послідовності* λ*, а* $\delta_0 = 0$*.*

Доведення. Нехай спочатку $n > 1$. Підпростір Φ_{n-1}^{λ} поліномів

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g_{n-1}^{\lambda}} a_k e_k \tag{6.49}$$

має розмірність δ_{n-1}. Тому з врахуванням (6.47) знаходимо

$$\varepsilon_n = E_{g_{n-1}^{\lambda}}(T : l_M \to l_M) \geq d_{\delta_{n-1}}(T : l_M \to l_M) \geq$$

$$\geq d_{\delta_{n-2}}(T : l_M \to l_M) \geq \ldots \geq d_{\delta_n-1}(T : l_M \to l_M).$$

Тому для доведення рівності (6.48) залишається показати, що

$$d_{\delta_n-1}(T : l_M \to l_M) \geq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.50}$$

Для цього знову скористаємося теоремою про поперечник кулі(див., наприклад, [245, §10.2]). Нехай $\varepsilon_n B_{n,\Phi}^{\lambda}$ — перетин кулі радіуса ε_n в l_M з простором Φ_n^{λ} (розмірності δ_n) поліномів вигляду (6.49):

$$\varepsilon_n U_{n,\Phi}^{\lambda} = \{\Phi_n \in \Phi_n^{(\lambda)} \ : \ ||\Phi_n||_{l_M} \leq \varepsilon_n\}. \tag{6.51}$$

Тоді з урахуванням (6.6), (6.51) та монотонності функції $M(t)$ для до-

вільного полінома

$$\Phi_n = \sum_{k \in g_n^\lambda} a_k \mathbf{e}_k \in \varepsilon_n B_{n,\Phi}^\lambda,$$

маємо

$$\sum_{k \in g_n^\psi} M(|a_k|/\lambda_k) \le \sum_{k \in g_n^\psi} M(|a_k|/\varepsilon_n) \le 1.$$

Звідси випливає, що Φ_n є образом деякого елемента з одиничної кулі B_{l_M}. Таким чином, куля $\varepsilon_n B_{n,\Phi}^\lambda$ δ_n-мірного підпростору $\Phi_n(\lambda)$ з l_M міститься в множині $T(B_{l_M})$ образів всіх елементів з одиничної кулі B_{l_M} при дії оператора T, що на підставі наведеної вище теореми і дає співвідношення (6.50). Таким чином, у випадку $n > 1$ теорему доведено. При $n = 1$ її доведення залишається без змін, якщо вважати, що підпростір $\Phi_0(\lambda)$ складається з нульового елемента $\theta = (0, 0, \ldots)$ і його розмірність дорівнює нулю.

Зазначимо, що у випадку, коли $M(t) = N(t) = t^p$, $p \in [1, \infty)$, твердження наслідку 6.3.2 та теореми 6.3.2 випливають відповідно із теорем 1 та 2 роботи [214] (див. також [217, гл. XI], теореми 3.1 та 3.2). У випадку скінченно вимірних просторів l_p^d, твердження, аналогічні до теореми 6.3.2 випливають з теореми 2.1 розділу VI монографії [153].

6.4. Деякі екстремальні задачі у просторах Орлича

Отримано точні значення аналогів найкращих наближень, базисних поперечників та найкращих n-членних наближень у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функцій із одиничних куль $U_M^+(\mathbb{A})$ цих просторів.

6.4.1. Постановка задачі та основний результат підрозділу

Нехай $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, d\mu)$, $m \ge 1$, — m-вимірний евклідовий простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a — скінчене число, або ж $a = +\infty$:

$$\mu(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}|_\mu = a, \quad a \in (0; +\infty],$$

і $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орлича, тобто, неспадна опукла вниз функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Позначимо через $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ множину всіх функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, які задовольняють умову

$$\int_{\mathbb{A}} M(C|f(\mathbf{x})|)\, d\mu < +\infty, \quad (\forall C > 0).$$

Лінійний простір $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ є банаховим з нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L_M(\mathbb{A};\, d\mu)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M\Big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\Big)\, d\mu \leq 1\right\}$$

і називається простором Орлича.

Зауважимо, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, простори $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ збігаються з відомими просторами $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, які складаються з функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких є скінченою величина

$$||f||_{L_p(\mathbb{A};\, d\mu)} = \Big(\int_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Позначимо через $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$, де σ — деяке фіксоване додатне число, множину всіх μ-вимірних підмножин γ_σ з $\mathbb{A}$, μ-міра яких дорівнює σ. Тоді для довільної функції $f \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ і будь-якої фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ природно розглянути величини

$$E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)},$$

де $\chi_{\gamma_\sigma} = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ — характеристична функція множини γ_σ, яка набуває значення 1 при $\mathbf{x} \in \gamma_\sigma$ і значення 0 при $\mathbf{x} \notin \gamma_\sigma$.

Нехай, далі,

$$U_M(\mathbb{A}) = \{y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) :\ ||y||_{L_M(\mathbb{A},d\mu)} \leq 1\},$$

— одинична куля простору $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$, а $U_M^+(\mathbb{A})$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_M(\mathbb{A})$, і γ_σ — деяка фіксована множина з Γ_σ.

Розглянемо величини $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ для функцій $f = \varphi \cdot y$, де

$\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а y — довільна функція з множини $U_M^+(\mathbb{A})$. В цьому випадку вони будуть мати вигляд

$$E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$$

Покладемо

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \sup\left\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} : \quad y \in U_M^+(\mathbb{A})\right\}. \tag{6.52}$$

Зазначимо, що у випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величинам $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ можна поставити у відповідність найкраще наближення функції f поліномами степеня σ, величині $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ — точну верхню межу таких наближень по заданій множині.

Наступне твердження дає точні значення величин $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ і величин

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \inf\left\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} : \quad \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\right\}.$$

Теорема 6.4.1. *Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і M — довільна функція Орлича.*

Тоді для довільних $\sigma \in (0, a)$ та $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ має місце рівність

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+), \tag{6.53}$$

де $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ — незростаюча перестановка функції

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A \setminus \gamma_\sigma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma; \end{cases} \tag{6.54}$$

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}(\sigma+), \tag{6.55}$$

де $\bar{\varphi}$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому в Γ_σ міст-

ться множина γ_σ^*, *для якої виконується рівність*

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

Зокрема, в ролі γ_σ^* *можна взяти довільну вимірну підмножину множини* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ*-міри* σ, *яка містить множину* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

Зазначимо, що величина $D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ є аналогом тригонометричного (базисного) поперечника порядку σ заданої множини функцій.

Доведення. Функція $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ істотно обмежена на $\mathbb{A}_\sigma := \mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma$. Тому її неспадна перестановка обмежена і виконується рівність

$$\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = \lim_{v \to 0+} \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v) =: y_\sigma.$$

Якщо при цьому $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = y_\sigma = 0$, то майже скрізь на $\mathbb{A}_\sigma$ $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = 0$, і в такому випадку

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = 0 = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$$

Якщо ж $y_\sigma > 0$, то при кожному $y > 0$ покладемо $e_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_\sigma : \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) \geq y\}$. Тоді при $y > y_\sigma$ μ-міра множини e_y дорівнює нулю, і $\mu(e_y) > 0$ при $0 < y < y_\sigma$. Звідси, зокрема, випливає, що

$$y_\sigma = \operatorname{ess\,sup}\{\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{A}_\sigma\}.$$

Для довільної функції $h \in U_M^+(\mathbb{A})$ маємо

$$\int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})/y_\sigma\Big)\, d\mu \leq \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M(h(\mathbf{x}))\, d\mu \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\left\{\alpha > 0 \ : \ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x})h(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \leq 1\right\} \leq y_\sigma$$

і тому

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \sup_{y\in U_M^+(\mathbb{A})} E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le y_\sigma. \tag{6.56}$$

Для доведення (6.53) лишається показати, що строгої нерівності в останньому співвідношенні бути не може. Нехай y — довільне число з проміжку $(0, y_\sigma)$ і $\bar{e}_y$ — довільна підмножина множини e_y, міра якої не перевищує одиницю: $\mathrm{mes}_\mu \bar{e}_y \le 1$. Покладемо

$$h_y(\mathbf{x}) = \begin{cases} M^{-1}\Big((\mathrm{mes}_\mu\ \bar{e}_y)^{-1}\Big), & \mathbf{x}\in \bar{e}_y, \\ 0, & \mathbf{x}\in \mathbb{A}\setminus \bar{e}_y. \end{cases}$$

Тоді $h_y \in U_M^+(\mathbb{A})$, і в той же час

$$y \le E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h_y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0\ :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})h_y(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \le 1\right\} \le y_\sigma.$$

Спрямовуючи y до y_σ, бачимо, що дійсно (6.56) строгої нерівності бути не може, що і завершує доведення (6.53).

Розглядаючи точні нижні межі по множині Γ_σ обох частин (6.53), отримуємо

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+).$$

Враховуючи співвідношення (6.54), робимо висновок, що найменше значення величини $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$ буде у випадку, коли $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^*$, і це значення дорівнює $\bar{\varphi}(\sigma+)$:

$$\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = \bar{\varphi}(\sigma+),$$

тим самим співвідношення (6.55) доведено.

Теорему доведено.

6.4.2. Точні значення величин $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$

Поряд з величинами $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ розглядатимемо також величини $e_\sigma(f)$ вигляду

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \tag{6.57}$$

за умови, що

$$f = \varphi\cdot y, \quad \varphi\in\Phi(A),$$

а y — деяка невід'ємна функція. В цьому випадку вони матимуть вигляд

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\left\{\|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} :\ \gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma\right\}.$$

Ідея введення (6.57) величин бере свій початок від роботи С.Б. Стєчкіна [237], в якій з'явилося відоме поняття найкращого квадратичного наближення даного елемента за допомогою n-членних поліномів по заданій системі бере свій початок з роботи С.Б.Стєчкіна Наведемо означення цього поняття.

Нехай $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормований базис гільбертового простору H, $f\in H$, і

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k\varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k$$

— розклад елемента f в ортогональний ряд за системою φ.

Розглядаються всі можливі n-членні ($n = 1, 2, \dots,$) поліноми за системою φ

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} d_k\varphi_k,$$

де γ_n — довільні набори із n різних натуральних чисел, а d_k — довільні комплексні числа.

Величину

$$e_n(f,\varphi)_H = \inf_{P_{\gamma n}} ||f - P_{\gamma_n}||_H = \inf_{\gamma_n,\, d_k} \left\|f - \sum_{k\in\gamma_n} d_k\varphi_k\right\|_H \tag{6.58}$$

називають *найкращим квадратичним наближенням елемента f за допомогою n-членних поліномів за системою φ.*

За рівністю Парсеваля для довільного елемента $f \in H$ маємо

$$||f - P_{\gamma_n}||_H^2 = \sum_{k\bar{\in}\gamma_n} |f_k|^2 + \sum_{k\in\gamma_n} |f_k - d_k|^2 \geq \sum_{k\bar{\in}\gamma_n} |f_k|^2.$$

Звідси випливає, що

$$e_n^2(f,\varphi)_H = \inf_{\gamma_n} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|^2 - \sum_{k\in\gamma_n} |f_k|^2 \right).$$

Порівняння останньої рівності з рівністю (6.57) дає змогу зробити висновок, що величини $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ можна розглядати як аналоги величин $e_n(f,\varphi)_H$ в просторах $L_M(\mathbb{A};d\mu)$.

У випадку, коли $M(t) = t$, тобто, коли $L_M(\mathbb{A};d\mu) = L_1(\mathbb{A},d\mu)$, величини (6.57) для невід'ємних функцій f збігаються з відомими величинами

$$e_\sigma(f)_{L_1(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \left| \int\limits_A f(\mathbf{x})d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x})d\mu \right| \tag{6.59}$$

найкращих наближень інтегралів функцій інтегралами скінченного рангу σ (див., наприклад, [233, 234]).

У статті [237] досліджувалась абсолютна збіжність ортогональних рядів і в термінах величин (6.58) сформульовано критерій того, щоб для даного елемента $f \in H$ збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|, \quad f_k = (f,\varphi_k)$$

У статті [234] в термінах величин вигляду (6.59) встановлено подібні умови належності функцій $f \in L_p(\mathbb{A},d\mu)$ до просторів $L_s(\mathbb{A},d\mu)$, $s \neq p$.

Проте, дані величини є цікавими також з точки зору наближення функцій. Дослідження поведінки точних верхніх меж величин вигляду (6.58) для різноманітних класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних проводились багатьма авторами. З бібліографією робіт, в яких отримано подібні результати, можна ознайомитись, зокрема, в [40] та [161]. Апроксимаційні властивості величин вигляду (6.59) вивчались, зокрема, в статтях [233, 234].

Нехай

$$U_p(\mathbb{A}) = \{y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) : \ ||y||_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1\},$$

— одинична куля в просторі $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $U_p^+(\mathbb{A})$ — підмножина всіх невід'ємних функций з $U_p(\mathbb{A})$ і $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{A}$ функція, для якої у випадку, коли множина $\mathbb{A}$ необмежена, припускаємо, що

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0$$

і в такому випадку пишемо $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$.

Наступна теорема дає точні значення величин

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \sup\{e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} : \quad y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})\}, \tag{6.60}$$

де $\mathcal{U}_p(\mathbb{A}) = U_p^+(A) \cap L_M(\mathbb{A}; d\mu)$, у випадку, коли $\varphi \in \Phi(A)$, $p \in (0, +\infty)$, а M — довільна функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича. Вона опублікована в сумісній роботі [266]. Для повноти викладення в цьому підрозділі наведемо цю теорему без скорочень, зауваживши, що основні етапи її доведення належать А.Л. Шидлічу.

Теорема 6.4.2. *Нехай $p \in (0, +\infty)$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а M — деяка функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича.*

Тоді для будь-якого $\sigma \in (0, a)$ виконується рівність

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \sup\left\{\left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\left(\frac{1}{s-\sigma}\right) : \quad s > n\right\}, \tag{6.61}$$

де M^{-1} — функція, обернена до функції M, $\bar{\varphi}(t)$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (6.61) *досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа у співвідношенні* (6.60) *реалізується функцією*

$$y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}\left(\int\limits_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})d\mu\right)^{-\frac{1}{p}} \tag{6.62}$$

де $\mathbb{E}$ *— довільна вимірна підмножина множини*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$$

μ*-міри* s^**, яка містить множину*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^* -)\},$$

а $\chi_{\mathbb{E}}(\cdot)$ *— характеристична функція множини* $\mathbb{E}$.

Зазначимо, що умова $\varphi \in \Phi(A)$ гарантує той факт, що для функції $\varphi(\mathbf{x})$ її функція розподілу

$$m_\varphi(y) := \mu(\mathbb{E}_y), \quad \mathbb{E}_y = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{A}, \ \varphi(\mathbf{x}) \geq y\}, \quad y \geq 0,$$

набуває лише скінченних значень з проміжку $[0, a]$. Тому згідно з означенням спадної (а по-суті незростаючої) перестановки (див., наприклад [234, §1]) величина $\bar{\varphi}(t)$ визначена для довільного $t > 0$.

Зазначимо також, що у просторах $L_p(\mathbb{A}; d\mu)$ твердження, подібні до теорем 6.4.1 та 6.4.2, отримано відповідно в статтях [218] та [233], а у дискретних просторах Орлича l_M — в підрозділі 6.3. Доведення теорем 6.4.1 та 6.4.2 проводиться здебільшого шляхом розвинення прийомів та ідей з робіт [218, 233, 234]

Перед доведенням теореми 6.4.2 отримаємо допоміжну лему, для формулювання якої введемо такі позначення.

Нехай M — довільна функція Орлича, $L_M(0, a)$, $a \in (0, +\infty]$ — простір Орлича всіх вимірних на $(0, a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_M(0,a)} := \inf\left\{\alpha > 0 : \quad \int_0^a M\Big(|f(t)|/\alpha\Big)\, dt \leq 1\right\},$$

і $L_p(0, a)$, $0 < p < +\infty$, — простір всіх вимірних на $(0, a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ таких, що

$$||f||_{L_p(0,a)} := \Big(\int_0^a |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Нехай також $U_p(0,a)$ — одинична куля простору $L_p(0,a)$, і Ω — множина всіх незростаючих додатних функцій $\omega(t)$, істотно обмежених на проміжку $(0,a)$, $0<a\le+\infty$, для яких у випадку, коли $a=+\infty$ виконується співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=0.$$

Нехай, далі, ω — довільна функція з Ω, і при даному $p\in(0,+\infty)$ $\mathscr{M}_p^\omega$ — множина всіх невід'ємних функцій $m=m(t)$ з $U_p(0,a)$, для яких добуток $\omega(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і приймає скінчену кількість значень. Для кожного $\sigma\in(0,a)$ і для довільних функцій $\omega\in\Omega$ і $m\in\mathscr{M}_p^\omega$ розглянемо аналоги величин $e_\sigma(\varphi\,y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$

$$\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M}:=e_\sigma(\omega\,m)_{L_M(0;a)}=$$

$$=\inf\Big\{\big\|\omega(t)m(t)-\chi_{\delta_\sigma}(t)\omega(t)m(t)\big\|_{L_M(0;a)}:\ \delta_\sigma\subset(0,a)\Big\}=$$

$$=\inf\left\{\inf\left\{\alpha>0:\int\limits_{(0;a)\setminus\delta_\sigma}M\big(\omega(t)m(t)/\alpha\big)\,dt\le1\right\}:\delta_\sigma\subset(0,a)\right\},\qquad(6.63)$$

де δ_σ — підмножини з $(0;a)$, міри яких дорівнюють σ, і аналоги величин (6.60):

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathscr{M}_p^\omega,\omega)_{L_M}:=\sup\{\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M}:\quad m\in\mathscr{M}_p^\omega\}=$$

$$=\sup\{e_\sigma(\omega\,m)_{L_M(0;a)}:\quad m\in\mathscr{M}_p^\omega\}.\qquad(6.64)$$

Лема 6.4.1. *Нехай $\omega\in\Omega$, $p\in(0,+\infty)$ і $M(t)$ — функція Орлича така, що $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича.*

Тоді для кожного $\sigma\in(0,a)$ справджується рівність

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathscr{M}_p^\omega,\omega)_{L_M}=\sup\left\{\Big(\int_0^s\omega^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}/M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big):s\in(\sigma,a]\right\}.\qquad(6.65)$$

При цьому точна верхня межа в правій частині рівності (6.65) *завжди досягається в деякій скінченній точці $s^*\in(\sigma,a]$. Точна верхня межа в правій*

частині співвідношення (6.64) *реалізується функцією* $m^* = m^*(t)$ *з* $\mathscr{M}_p^\omega$, *де*

$$m^*(t) = \frac{\chi_{(0,\,s^*)}(t)}{\omega(t)}\Big(\int_0^{s^*} \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{6.66}$$

а $\chi_{(0,\,s^*)}(t)$ *— характеристична функція множини* $(0, s^*)$.

Доведення. Нехай m — довільна функція з множини $\mathscr{M}_p^\omega$. Тоді добуток $\omega(t)m(t)$ при деякому $n \in \mathbb{N}$ зображується у вигляді

$$\omega(t)m(t) = y_k, \quad t \in (s_{k-1}, s_k),\ k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{6.67}$$

де

$$y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y_{n+1} = 0$$

— деякі числа, і

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n \le s_{n+1} = a.$$

Звідси при $\Delta_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, маємо

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \inf\left\{\alpha > 0 :\ \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\ dt \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^{n} M(y_k/\alpha)\Delta_k - \int_0^\sigma M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\ dt \le 1\right\}.$$

Переконаємося, що можна вважати, що довжина Δ_1 проміжку $(0, s_1)$, на якому добуток $\omega(t)m(t)$ набуває свого найбільшого значення, не менша за σ. Якщо це не так, то через k_σ, $k_\sigma \in [1, n+1]$, позначимо найменше натуральне число таке, що $s_{k_\sigma} > \sigma$, і покладемо

$$\widetilde{s}_0 = 0, \quad \widetilde{s}_1 = s_{k_\sigma}, \quad \widetilde{y}_1 = y_{k_\sigma}; \quad \widetilde{s}_k = s_{k_\sigma+k-1}, \quad \widetilde{y}_k = y_{k_\sigma+k-1},$$

де $k = 2, \ldots, n - k_\sigma + 1$. Розглянемо функцію $\widetilde{m}(t)$ таку, що $\widetilde{m}(t) = 0$ при $t > \widetilde{s}_{n-k_\sigma+1}$, і

$$\omega(t)\,\widetilde{m}(t) = \widetilde{y}_k, \quad t \in (\widetilde{s}_{k-1}, \widetilde{s}_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функції

$$\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{s}_1 - \widetilde{s}_0 = s_{k_\sigma} > \sigma,$$

і

$$\|\widetilde{m}||_{L_p(0,a)} \le ||m||_{L_p(0,a)} \le 1,$$

тобто, $\widetilde{m} \in \mathscr{M}_p^\omega$ і

$$\mathcal{E}_\sigma(\widetilde{m},\omega)_{L_M} = \inf\left\{\alpha > 0 :\ M(\widetilde{y}_1/\alpha)(\widetilde{\Delta}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M(\widetilde{y}_k/\alpha)\Delta_k \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{\alpha > 0 :\ M(y_{k_\sigma}/\alpha)(s_{k_\sigma} - \sigma) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\right\} = \mathcal{E}_\sigma(m,\omega).$$

Зважаючи на ці факти, надалі будемо вважати, що довжина проміжку $(0, s_1)$ не менша за σ. В такому випадку

$$\mathcal{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \inf\left\{\alpha > 0 :\ M(y_1/\alpha)(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\right\}. \quad (6.68)$$

Внаслідок співвідношень (6.67) при кожному $k = 1, 2, \ldots, n$

$$m_k := \int_{s_{k-1}}^{s_k} m^p(x)dx = y_k^p \int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(x)dx,$$

і тому $y_k = \omega(t)m(t) = \omega_k m_k^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [s_{k-1}, s_k)$, де

$$\omega_k := \Big(\int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Звідси випливає, що рівність (6.68) можна записати у вигляді

$$\mathcal{E}_\sigma(m,\omega)_{L_M} = \inf\left\{\alpha > 0 : F_\sigma(m,\alpha) \le 1\right\},$$

де

$$F_\sigma(m,\alpha) := F_\sigma(m,\omega,\alpha,M) = M\Big(\omega_1 m_1^{\frac{1}{p}}/\alpha\Big)(\Delta_1 - \sigma) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} M\Big(\omega_k m_k^{\frac{1}{p}}/\alpha\Big)\Delta_k.$$

Покладемо $N(t) = M(t^{1/p})$, $p_k = \omega_k^{-p}$, $a_k = \omega_k^p m_k/\alpha^p$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і виберемо числа b_k так, що $b_1 = (\Delta_1 - \sigma)\omega_1^p$ та $b_k = \Delta_k \omega_k^p$ при $k = 2, \ldots, n$. Тоді для оцінки величини $F_\sigma(m, \alpha)$ можна використати лему 6.2.1.

Застосовуючи зазначену лему, отримаємо

$$F_\sigma(m,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_k b_k N(a_k) \le$$

$$\le \max\left\{ N\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k}{\alpha^p \sum_{k=1}^{l} \omega_k^{-p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{l} \Delta_k - \sigma\right) : l \in [1,n]\right\} =$$

$$= \max\left\{ M\left(\frac{||m||_{L_p(0,a)}}{\alpha(\int_0^{s_l} \omega^{-p}(x)\, dx)^{1/p}}\right)(s_l - \sigma) : \quad l \in [1,n]\right\}.$$

і оскільки $||m||_{L_p(0,a)} \le 1$, а функція M неспадна, то для довільного $\alpha > 0$

$$F_\sigma(m,\alpha) \le \sup\left\{(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha) : \quad s \in (\sigma, a]\right\}, \tag{6.69}$$

де

$$\widetilde{\omega}_s := \Big(\int_0^s \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Оскільки функція $M(t)$ опукла до низу і $M(0) = 0$, то для довільного числа $\mu \in [0,1]$ і $t \ge 0$ знаходимо

$$M(\mu t) = M(\mu t + (1-\mu)\cdot 0) \le \mu M(t) + (1-\mu)M(0) \le \mu M(t). \tag{6.70}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $a < +\infty$, існує число $s_\alpha \in (\sigma, a]$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (6.69). Якщо ж $a = +\infty$, то беручи до уваги монотонне прямування до нуля при $t \to +\infty$ функції $\omega(t)$, неспадання частки $M(t^{1/p})/t$, $t > 0$, та нерівність $M(t/\mu) \le M(t)/\mu$, яка виконується для довільної функції Орлича $M(t)$ та будь-яких чисел $\mu \ge 1$ і $t \ge 0$ (див. співвідношення (6.70)), для довільного фіксованого $\alpha > 0$ отримуємо

$$\lim_{s\to+\infty}(s-n)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha) = \lim_{s\to+\infty}(s-\sigma)M\left(\frac{1}{\alpha}\Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\, dt\Big)^{\frac{1}{p}}\right) \le$$

$$\leq K \lim_{s\to+\infty} \omega(s/2)\frac{M(1/s^{1/p})}{1/s} = 0. \tag{6.71}$$

Тому і в цьому випадку знайдеться принаймні одне число $s_\alpha > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (6.69). Отже, з урахуванням (6.69) маємо

$$F_\sigma(m,\alpha) \leq \sup\left\{(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha): \quad s\in(\sigma,a]\right\} =$$

$$= (s_\alpha-\sigma)M(\widetilde{\omega}_{s_\alpha}/\alpha). \tag{6.72}$$

Далі, для довільної функції $m\in\mathscr{M}_p^\omega$ покладемо

$$\alpha_m := \mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} = \inf\left\{\alpha>0: \quad \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\,dt\leq 1\right\}, \tag{6.73}$$

і розглянемо функцію $\bar{m}=\bar{m}(t)$ таку, що

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} \Big(\int_0^s \omega^{-p}(\tau)\,d\tau\Big)^{-1}\omega^{-1}(t), & t\in(0;s],\\ 0, & t\in(s;a), \end{cases} \tag{6.74}$$

де $s=s_{\alpha_m}$, число s_{α_m} визначається співвідношенням (6.72) при $\alpha=\alpha_m$. Тоді очевидно, що $\bar{m}\in\mathscr{M}_p^\omega$, і виконується співвідношення

$$F_\sigma(m,\alpha_m) = \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha_m\Big)\,dt \leq$$

$$\leq \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)\bar{m}(t)/\alpha_m\Big)\,dt = F_\sigma(\bar{m},\alpha_m),$$

з якого із врахуванням (6.73) робимо висновок, що

$$\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} \leq \mathcal{E}_\sigma(\bar{m};\omega)_{L_M}.$$

Позначимо через $\bar{\mathscr{M}}_p^\omega$ множину всіх функцій $\bar{m}\in\mathscr{M}_p^\omega$, для кожної з яких існує число $s\in(\sigma,a)$, $s=s(\bar{m})$, що має місце зображення (6.74). Тоді

має місце рівність

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathscr{M}_p^\omega,\omega)_{L_M}=\sup\{\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M}:m\in\bar{\mathscr{M}}_p^\omega\}$$

Звідси на підставі (6.74) отримуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathscr{M}_p^\omega,\omega)_{L_M}=\sup_{s\in(\sigma;a)}\inf\left\{\alpha>0:\quad (s-\sigma)M\left(\Big(\int_0^s\omega^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}/\alpha\right)\le 1\right\}=$$

$$=\sup_{s\in(\sigma;a)}\xi_s,$$

де числа ξ_s визначаються рівністю

$$\xi_s:=\Big(\int_0^s\omega^{-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{1}{p}}/M^{-1}(\frac{1}{s-\sigma}),$$

M^{-1} — функція, обернена до M. При цьому внаслідок (6.71) для довільного $\varepsilon>0$ існує такий номер s_ε, що при всіх $s>s_\varepsilon$ величина $(s-n)M(\widetilde{\omega}_s/\varepsilon)<1$ і тому при всіх $s>s_\varepsilon$, $\xi_s<\varepsilon$. Звідси випливає, що завжди існує таке число s^*, що $\sup\limits_{s>n}\xi_s=\xi_{s^*}$.

Для завершення доведення леми 6.4.1 достатньо помітити, що функція m^*, визначена рівністю (6.66), належить множині $\mathscr{M}_p^\omega$, і для неї

$$\mathcal{E}_\sigma(m^*,\omega)_{L_M}=\Big(\int_0^{s^*}\omega^{-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{1}{p}}/M^{-1}(\frac{1}{s^*-\sigma}).$$

Доведення теореми 6.4.2. Нехай $\varphi\in\Phi(\mathbb{A})$, $p\in(0,+\infty)$ і M — деяка функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича. Позначимо через $G_\sigma=G_\sigma(\varphi,p)$ праву частину співвідношення (6.61). Покажемо спочатку, що для довільної функції $y\in\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ виконується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\,y)\le G_\sigma. \tag{6.75}$$

Для цього розглянемо функції y_n, які визначаються співвідношення

$$\varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{k}{n}, & \mathbf{x}:\ \frac{k}{n}\le\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})<\frac{k+1}{n},\ k=0,1,\dots,n^2-1,\\ n, & \mathbf{x}:\ \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})\ge n.\end{cases} \tag{6.76}$$

Бачимо, що $y_n \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ і для довільних $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ та $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x}).$$

Тому

$$e_\sigma(\varphi\, y_n)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \leq e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Внаслідок того, що $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і $y \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ маємо

$$\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Тоді для фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$

$$\|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \leq \|\varphi\, y - \varphi y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} + \|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} +$$

$$+\|\chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \leq 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} +$$

$$+\|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Звідси при $n \to +\infty$ отримуємо

$$|e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} - e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}| \leq 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \to 0.$$

Тому якщо довести справедливість нерівності (6.75) для всіх функцій y_n, які визначаються рівностями (6.76), то звідси буде випливати, що ця нерівність виконується і для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Насправді ми доведемо більш загальний факт. Для даної функції φ позначимо через $\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ множину всіх функцій $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, для яких добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ тільки скінченну кількість значень (зрозуміло, що у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = \infty$, ці значення не дорівнюють нулю лише на множинах скінченної міри), і переконаємося, що нерівність (6.75) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$.

Отже, нехай функція $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ така, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) =: f(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ лише n різних відмінних від нуля значень f_k, $k = \overline{1,n}$, які для зручності упорядкуємо за спаданням:

$$f_1 > f_2 > \ldots > f_n > 0,$$

і покладемо

$$\mathbb{A}_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ f(\mathbf{x}) = f_k\}, \mu(\mathbb{A}_k) =: \mu_k.$$

Тоді

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma} \inf \left\{\alpha > 0 : \ \int_{A\setminus\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \le 1\right\} =$$

$$= \inf \left\{\alpha > 0 : \ \sum_{k=1}^{n} M(f_k/\alpha)\mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \le 1\right\}. \qquad (6.77)$$

Переконаємося, що можна вважати $\mu_1 = \mu(A_1) \ge \sigma$. З цією метою для даного $\sigma \in (0, a)$ позначимо через k_σ найменше натуральне число таке, що $\sum\limits_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k \ge \sigma$, і покладемо

$$\widetilde{\mathbb{A}}_1 = \bigcup_{i=1}^{k_\sigma} \mathbb{A}_i, \quad \widetilde{f}_1 = f_{k_\sigma}; \quad \widetilde{\mathbb{A}}_k = \mathbb{A}_{k_\sigma+k-1}, \quad \widetilde{f}_k = f_{k_\sigma+k-1},$$

де $k = 2, \ldots, n - k_\sigma + 1$. Розглянемо функцію $\widetilde{y}(\mathbf{x})$ таку, що

$$\widetilde{y}(\mathbf{x}) = 0, \quad t \in \mathbb{A} \setminus \cup_{i=1}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{\mathbb{A}}_i,$$

і

$$\varphi(\mathbf{x})\, \widetilde{y}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_k, \quad \mathbf{x} \in \widetilde{\mathbb{A}}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n - k_\sigma + 1.$$

Для цієї функції $\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_1) \ge \sigma$, виконується нерівність

$$||\widetilde{y}||_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le ||y||_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1,$$

тобто $\widetilde{y} \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ і

$$e_\sigma(\varphi\, \widetilde{y})_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} =$$

$$= \inf \left\{\alpha > 0 : \ M\Big(\frac{\widetilde{f}_1}{\alpha}\Big)(\mathrm{mes}_\mu \widetilde{\mathbb{A}}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M\Big(\frac{\widetilde{f}_k}{\alpha}\Big)\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_k) \le 1\right\} =$$

$$= \inf \left\{\alpha > 0 : \ M\Big(\frac{f_{k_\sigma}}{\alpha}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k - \sigma\Big) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k \le 1\right\} =$$

$$= e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Тому далі будемо вважати, що μ-міра множини $\mathbb{A}_1$ не менша σ.

На проміжку $t \in (0,a)$ розглянемо функцію

$$m'(t) = m'(y,t) = \begin{cases} \bar{\varphi}^{-1}(t) f_k, & t \in (a_{k-1}, a_k],\ k = \overline{1,n}, \\ 0, & t \in (a_n, a), \end{cases} \tag{6.78}$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, і $a_k := \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, $a_0 := 0$. Переконаємося, що функція m' належить одиничній кулі $U_p(0,a)$ простору $L_p(0,a)$ і для неї виконується співвідношення

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\delta_\sigma \in (0,a)} \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_{(0;a)\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\bar{\varphi}(t) m'(t)/\alpha\Big)\, dt \le 1 \right\} =$$

$$= \mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})_{L_M}. \tag{6.79}$$

Тим самим задачу про оцінку величини $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ для $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(\mathbb{A})$ буде зведено до дослідження величин $\mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})_{L_M}$ на множині всіх функцій $m' \in U_p(0,a)$ вигляду (6.78).

Враховуючи те, що $a_1 = \mu_1 \ge \sigma$, маємо

$$\mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})_{L_M} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)(a_k - a_{k-1}) \le 1 \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k \le 1 \right\}. \tag{6.80}$$

З іншого боку, внаслідок (6.77)

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \le 1 \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k \le 1 \right\}. \tag{6.81}$$

Порівнюючи вирази в правих частинах співвідношень (6.80) та (6.81), бачимо, що дійсно $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})_{L_M}$. Нерівність

$$||m'||_{L_p(0,a)} \le ||y||_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1 \tag{6.82}$$

доводиться цілком аналогічно до доведення нерівності (3.23) з роботи [234].

Нехай, далі, $\mathscr{M}_p^{\bar{\varphi}}$ — множина всіх невід'ємних функцій $m \in U_p(0,a)$, для яких добуток $\bar{\varphi}(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і набуває лише скінченну кількість значень. В силу (6.78) та нерівності (6.82) бачимо, що $m' \in \mathscr{M}_p^{\bar{\varphi}}$, і тому з урахуванням (6.79) для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(\mathbb{A})$

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le \sup_{m\in\mathscr{M}_p^{\bar{\varphi}}} \inf_{\gamma_\sigma\in(0,a)} \inf\left\{\alpha>0 : \int_{(0;a)\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\frac{\bar{\varphi}(t)m(t)}{\alpha}\Big)dt \le 1\right\} =$$

$$= \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi})_{L_M}. \tag{6.83}$$

Для знаходження величини $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}; \bar{\varphi})_{L_M}$ скористаємося доведеною вище лемою 6.4.1. Покладаючи $\omega(t) = \bar{\varphi}(t)$, $t \in (0,a)$, бачимо, що $\omega \in \Omega$, і згідно з (6.65) отримуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi})_{L_M} = \sup\left\{\Big(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big) : s \in (\sigma, a]\right\}. \tag{6.84}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині останнього співвідношення досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Співставлення (6.83) та (6.84) приводить нас до висновку, що нерівність (6.75) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(\mathbb{A})$, а отже, і для довільної функції y з множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Для завершення доведення теореми 6.4.2 покажемо, що у множині $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ існує функція $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar{\varphi}, \sigma, p)$, для якої

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \Big(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} / M^{-1}\Big(\frac{1}{s^*-\sigma}\Big).$$

З цією метою виділимо з множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) \ge \bar{\varphi}(s^*-)\}$ довільну вимірну підмножину $\mathbb{E}$ μ-міри s^*, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^*-)\}$, і розглянемо функцію y^*, визначену співвід-

ношенням (6.62). Для неї маємо: $y^* \in L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ і

$$||y^*||^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{x})^p \, d\mu = \int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) \, d\mu \Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t}) \, d\mu \Big)^{-1} = 1,$$

тобто $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Оскільки для довільного числа $h \geq 0$ μ-міра множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0, s^*) : \ \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) \, d\mu = \int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) \, dt,$$

і тому

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M} = \inf_{\gamma_\sigma} \inf \left\{ \alpha > 0 : \ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x}) y^*(\mathbf{x})/\alpha\Big) \, d\mu \leq 1 \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 : \ (s^* - \sigma) M\bigg(\Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \Big)^{-\frac{1}{p}} / \alpha \bigg) \leq 1 \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \alpha > 0 : \ M\bigg(\Big(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \Big)^{-\frac{1}{p}} / \alpha \bigg) \leq \frac{1}{s^* - \sigma} \right\} =$$

$$= \frac{\Big(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \Big)^{-\frac{1}{p}}}{M^{-1}(\frac{1}{s^* - \sigma})}.$$

Отже, співвідношення (6.61) дійсно є рівністю.

Теорему доведено.

6.5. Висновки до розділу 6

В цьому розділі:

1. Досліджено властивості діагональних операторів у просторах числових послідовностей зі змінним показником підсумовування $l_{\mathbf{p}}$, а також дискретних просторах Орлича l_M.

2. Отримано низку нерівностей типу Чебишева, які уточнюють деякі результати попередників.

3. Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим множин образів діагональних операторів у просторах $l_{\mathbf{p}}$ та l_M.

4. Отримано точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функцій із одиничних куль $U_M^+(\mathbb{A})$ цих просторів.

Основні результати цього розділу опубліковано у працях [266–269].

Висновки

У дисертаційній роботі розроблено метод розв'язання низки екстремальних задач теорії наближення. У процесі розробки методу розв'язано проблеми, які представляють значний самостійний інтерес, а саме:

1. Знайдено достатні умови збіжності в просторах $L_p(\mathbb{R})(p>1)$ та поточкової збіжності рядів Фур'є по системах $\{\Phi_n(t)\}$, $n\in\mathbb{Z}$, виражені в термінах обмежень на послідовності полюсів цих систем. Обчислено точне значення величини $E\left(z,\mathfrak{A}\right)$ найкращого наближення ядра Коші $\mathcal{C}(\cdot,z)$ в метриці $L_q(\mathbb{R})$ підпростором $\mathfrak{A}$, у випадку, коли $\mathfrak{A}=H_p^{\perp}(\mathbf{a}_n)\vee H_{p,\Phi^+}^{n\perp}$ та в явному вигляді побудовано для цих підпросторів елемент найкращого наближення та доведено його єдиність. Побудовано найкращий лінійний метод поточкового та рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$.

2. Для точних верхніх меж відхилень в інтегральній метриці сум $V_{n,p}(f;x)$ на класах L_1^{ψ} і $L^{\psi}H_{\omega_1}^0$, $\psi_1\in\mathfrak{M}_0$, $\psi_1\in\mathfrak{M}_0'$ знайдено асимптотичні рівності, які в багатьох важливих випадках дають розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського. Обчислено величини точних верхніх меж поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі K_∞ аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій, які зображуються інтегралами типу Коші. Знайдено порядкові оцінки для величин найкращих рівномірних раціональних наближень із фіксованими полюсами для функцій, які зображуються згортками функцій із $L_p(0,2\pi]$ із фіксованими ядрами, заданими у вигляді суми ряду за системою Такенаки-Мальмквіста. Встановлено асимптотичні при $n\to\infty$ рівності для точних верхніх меж відхилень у рівномірній та інтегральних метриках тригонометричних поліномів $U_{n-1}^*(f;x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій, визначених згортками

з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера. Описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

3. Для точних верхніх меж відхилень у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ отримано асимптотичні нерівності. Показано, що у випадку, коли $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, усі отримані нерівності перетворюються в асимптотичні рівності, що дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Цю задачу також розв'язано для операторів Валле Пуссена на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}, \psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ у просторі $\widehat{L}_1$.

4. Знайдено умови, які забезпечують вкладення множин $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ в $L^{q(\cdot)}$ та $L^{\psi}L_M$ в L_N, а також обчислено порядки наближення сумами Фур'є. Знайдено порядки найкращих наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича на множинах ψ-диференційованих функцій. Зазначено випадки, коли порядки наближення сумами Фур'є збігаються з порядками величин найкращих наближень на цих множинах у просторах Лебега зі змінним показником підсумовування та просторах Орлича. Отримано нерівності типу Бернштейна для норми $(\psi;\beta)$-похідної тригонометричного полінома у просторах $L^{p(\cdot)}$ та L_M. Доведено обернені теореми теорії наближення на множинах $(\psi;\beta)$-диференційованих функцій в узагальнених просторах Лебега та просторах Орлича.

5. Отримано низку інтегральних нерівностей типу Чебишева. Обчислено точні значення найкращих наближень, базисних поперечників та поперечників за Колмогоровим певних множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M. Отримано точні значення аналогів найкращих наближень та базисних поперечників у просторах Орлича $L_M(\mathbb{A};d\mu)$ класів невід'ємних функцій, які зображуються у вигляді добутку фіксованої функції та функцій з одиничних куль $U^+_M(\mathbb{A})$ цих просторів.

Список використаних джерел

1. Aiyub M. On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz function / M. Aiyub // Proyecciones Journal of Mathematics. — 2013. — Vol. 32, № 3, — P. 267 – 280.
2. Akcay H. Discrete-time system modelling in L_p with orthonormal basis function / H. Akcay // Systems and control letters. — 2000. — Vol. 39. — P. 365 – 376.
3. Akcay H. On the uniform approximation of discrete-time system by geneneralized Fourier series / H. Akcay // IEEE Transactions on signal processing. — 2001. — Vol. 49, № 7. — P. 1461 – 1467.
4. Akgün R. On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces / R. Akgün, V. Kokilashvili // Banach J. Math. Anal. — 2011. — Vol. 5, № 1. — P. 70 – 82.
5. Akgün R. Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth / R. Akgün // Georgian Math. J. — 2011. — Vol. 18, № 2. — P. 203 – 235.
6. Akgün R. Trigonometric approximation of functions in generalized lebesgue spaces with variable exponent / R. Akgün // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63 , № 1. — С. 3 – 23.
7. Akgün R. Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces / R. Akgün // Journ. of funct. spaces and applic. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1 – 41.
8. Akgün R. Approximations in wieghted Orlicz spaces / R. Akgün, D. Izrafilof // Math. Slovaca. — 2011. — Vol. 61 , №. 4, P. 601 – 618.
9. Akgün R. The refined direct and converse inequalities of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces / R. Akgün, V. Kokilashvili // Georgian Math. J. — 2011. — Vol. 18, № 3. — P. 399 –

423.

10. Akgün R. Approximation by trigonometric polynomials of function having $(\alpha;\psi)$-derivatives in weighted variable exponent Lebesgue spaces / R. Akgün, V. Kokilashvili // Journal of Mathematical Sciences — 2012. — Vol. 184, № 4, July. — P. 371 – 382.
11. Альпер С.Я. О наилучшем приближении функций, представимых лакунарными рядами Фурье и Тейлора / С.Я. Альпер // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1963. — Т. 27, № 4. — С. 747 – 760.
12. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Ахиезер Н. И. — Москва: Наука, 1965. — 407 с.
13. Бандалиев Р.А. Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости / Р.А. Бандалиев // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, № 3. — С. 323 – 333.
14. Bandaliev R.A. Embedding between variable exponent Lebesgue spaces with measures / R.A. Bandaliev // Azerbaijan Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 2, No 1. — P. 111 – 117.
15. Бандалиев Р.А. О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0 < p(x) < 1$ / Р.А. Бандалиев // Мат. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 492 – 506.
16. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — Москва: Физматгиз, 1961. — 936 с.
17. Батырев А.В. К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами / А.В. Батырев // ДАН АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 2. — С. 173 – 175.
18. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Москва: Наука. — 1973. — 296 с.
19. Bennett C. Interpolation of Operators / Colin Bennett, Robert C. Sharplay — New York: Academic Press, 1988. — 469 p.
20. Бердышев В.И. Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем / В.И. Бердышев // Изв. АН СССР. Сер.: Мат. — 1965. — Т. 29, № 3. — С. 505 – 526.
21. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее при-

ближение непрерывных функции одной вещественной переменной / С.Н. Бернштейн. — Ленинград; Москва: ОНТИ, 1937. — 203 с.

22. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собрание сочинений : в 5 т. / С. Н. Бернштейн. — Москва, 1952. — Т. 1: Конструктивная теория функций [1905 – 1930]. — С. 11 – 104.
23. Birnbaum Z. W. Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen / Z.W. Birnbaum, W. Orlicz // Studia Math. — 1931. — 3. — P. 1 – 67.
24. Boas H. P. Vita: Frederich Wilhelm Wiener / H.P. Boas, D. Khavinson // The Mathematical Intelligencer — 2000. — Vol. 22, № 2. — P. 73 – 75.
25. Bohr H. A theorem concerning power series / H. Bohr // Proc. London Math. Soc. — 1914. — Vol. 2, № 13. — P. 1 – 5.
26. Boyd D. W. Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces / D. W. Boyd // Proc. Amer. Math. Soc. — 1967. — № 18. —P. 215 – 219.
27. Boyd D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation / D. W. Boyd // Canad. J. Math. — 1969. — № 21. — P. 1245 – 1254.
28. Boyd D. W. Indices for the Orlicz spaces / D. W. Boyd // Pacific J. Math. — 1971. — № 38. — P. 315 – 323.
29. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении в единичном круге функций / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 6. — С. 838 – 843.
30. Вакарчук С.Б. Точные значения средних N-поперчников классов аналитических в верхней полуплоскости функций в пространстве Харди / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 1994. — Т. 46, № 7. — С. 814 – 824.
31. Вакарчук С.Б. О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах I / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 1994 — Т. 47, № 9. — С. 1123 – 1133.
32. Вакарчук С.Б. О сильной асимптотике средних N-поперечников классов функций, аналитических на вещественной прямой / С.Б. Вакарчук // Изв. вузов, Сер.: Математика. — 1996. — № 1. — С. 1 – 4.
33. Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-

approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes / S.B. Vakarchuk // East Journal on Approximation. — 2004. — Vol. 10, № 1–2. — P. 27 – 39.

34. Вакарчук С.Б. Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций / С.Б. Вакарчук, С.И. Жир// Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 9. — С. 1155 – 1162.
35. Вакарчук С.Б. О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости / С.Б. Вакарчук, С.И. Жир // Збірник праць Інститута математики НАН України, Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — 336 с.
36. Ch. La Valle Poussin. Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable reelle par des expressions d'order donne / Ch. La Valle Poussin // Comptes rendus Acad. Sei. Paris. — 1918. — Vol. 166. — P. 799 – 802.
37. Ch. La Valle Poussin. Lecons sur l'approximation des fonction d'une variable reelle / Ch. La Valle Poussin. — Paris: Gauthier-Villars, 1919. — 150 p.
38. Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen / K. Weierstrass // Sitzungsber. Akad. Berlin. — 1885. — pp. 633–639, 789–805. [This appeared in two parts. An expanded version of this paper with ten additional pages also appeared in "Mathematische Werke," Vol. 3, 1–37, Mayer & Müller, Berlin, 1903.]
39. Винер Н. Преобразование Фурье в комплексной области / Н. Винер, Н. Пэли. — Москва: Наука, 1964. — 267 с.
40. De Vore R. Nonlinear approximation / R. De Vore // Acta Numer. — 1998. — Vol. 7. — P. 51–150.
41. Восканян А. А. О некоторых экстремальных задачах теории приближения на всей вещественной оси / А. А. Восканян // Изв. АН АрССР. — 1979. — Т. 14, № 2. — С. 107 – 123.
42. Гаврилюк В.Т. О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье / В.Т. Гаврилюк // Укр. мат. журн. — 1988. — Т. 40, № 5. — С. 569 – 576.
43. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. — Москва: Мир, 1984. — 469 с.

44. Gao F. Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator /F. Gao // J. Approx. Theory. — 2010. — Vol. 162, № 4. — P. 646–652.
45. Genebashvili I. Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type / I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvili, M. Krbec. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998. — 410 p.
46. Gensun F. Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings / F. Gensun, Q. Lixin // J. Approx. Theory. — 2006. — Vol. 140, № 2. — P. 178 – 190.
47. Gogatishvili A. Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces / A. Gogatishvili, V. Kokilashvili // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— Vol. 1, № 6. — P. 641 – 673.
48. Голузин Г.М. Некоторые оценки для ограниченных функций / Г.М. Голузин // Мат. сб. — 1950. — Т. 26, № 1. — С. 7 – 18.
49. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. — Москва: Наука, 1966. — 623 с.
50. Гончар А. А. О наилучших приближениях измеримых функций рациональными функциями и многочленами / А.А. Гончар // Изв. вузов. матем. — 1960. — № 6. — С. 74 – 81.
51. Гончар А. А. Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями / А.А. Гончар // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1961. — Т. 25, № 3. — С. 347 – 356.
52. Гончар А. А. О рядах рациональных функций / А. А. Гончар // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1246 – 1249.
53. Гончар А. А. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения / А. А. Гончар // Мат. сб. — 1967. — Т. 72 (114), № 3. — С. 489 – 503.
54. Гончар А. А. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций / А. А. Гончар // Труды междун. конгресса математиков (Москва, 1966) — Москва: Мир, 1968. — С. 329 – 356.
55. Gorenflo R. Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S.V. Rogosin. — Berlin; Heidelberg:

Springer-Verlag, 2014. — 443 p.

56. Грибанов Ю.И. Нелинейные операторы в пространствах Орлича / Ю.И. Грибанов // Уч. зап. Казанского ун-та. — 1955. — Т. 115, кн. 7.
57. Грибанов Ю.И. К теории пространств l_M / Ю.И. Грибанов // Уч. зап. Казанского ун-та. — 1957. — Т. 117, кн. 2.
58. Guven A. Approximation by Means of Fourier Trigonometric Series in Weighted Orlicz spaces / A. Guven, D.M. Israfilov // Adv. Stud. Contemp. Math. — 2009. — Vol. 19, № 2. — P. 283 – 295.
59. Guven A. Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ spaces / A. Guven // Anal. Appl. (Singap.) — 2012. — Vol. 10, № 1. — P. 47 – 65.
60. Guven A. Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ / A. Guven and D. M. Israfilov // J. Math. Inequal. — 2010. — Vol.4, № 2. — P. 285 – 299.
61. Guven A. On approximation in weigted Orlicz spaces / A. Guven, D.M. Israfilov // Math. Slovaca. — 2012. — Vol. 62, № 1, P. 77 – 86.
62. Двейрин М. З. Неравенство Адамара и наилучшее приближение функций, аналитических в единичном круге / М.З. Двейрин // Укр. мат. вісник — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 315 – 330.
63. Демченко А.Г. Приближение в среднем функций из классов $W^r H_{[\omega]_L}$ суммами Фурье / А.Г. Демченко // Укр. мат. журн. — 1973. — Т. 25, № 2. — С. 262 – 271.
64. Jafarov S. Z. Approximation by Polynomials and Rational Functions in Smirnov- Orlicz classes / S.Z. Jafarov // Journal of Computational Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 13, № 5. P. 953 – 962.
65. Jafarov S. Z. Approximation by Rational Functions in Smirnov-Orlicz Classes / S.Z. Jafarov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2011. Vol. 379. — P. 870 – 877.
66. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polinoms / D. Jackson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1912. — № 14. — P. 491 – 515.
67. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М.М. Джрбашян // Изв. АН АрССР. Сер.: Математика. – 1956. – Т. 9,

№ 7. – С. 3 – 28.

68. Джрбашян М. М. О разложении аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов / М.М. Джрбашян // Изв. АН АрССР. Сер.: Математика. – 1957. – Т. 10, № 1. – С. 21 – 29.
69. Джрбашян М. М. Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами / М. М. Джрбашян // Изв. АН АрССР. Сер.: Математика. – 1967. – Т. 2, № 1. – С. 3 – 51.
70. Джрбашян М. М. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси / М. М. Джрбашян // Мат. сб. — 1974. — Т. 94, № 3. — С. 418 – 444.
71. Diening L. Calderon-Zygmund operators on generelized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics / L. Diening, M. Ružička // J. Reine Angew. Math. — 2003. — Vol. 563. — P. 197 – 220.
72. Diening L. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ / L. Diening // Math. Inequal. Appl. — 2004. — Vol.7, № 2. — P. 245 – 253.
73. Diening L. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lecture Notes in Math., vol. 2017 / L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — 509 p.
74. Dirichlet P. G. L. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält // Werke, Band 1. / P.G.L. Dirichlet. — Berlin: Reimer, 1889. — 664 s.
75. Djakov P.B. Multipliers between Orlicz Sequence Spaces / P.B. Djakov, M.S. Ramanujan // Truk. J. Math. — № 24. — 2000. — P. 313 – 319.
76. Евграфов М. А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. — Москва: Наука, 1991. – 448 с.
77. Edmunds D. E. Averaging operators on l_p and $L_p(x)$ / D.E. Edmunds, A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2002. — Vol. 5, № 2. — P. 235 – 246.
78. Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена I / А.В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1959. — Т. 23. — С. 737 – 770.

79. Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена II / А.В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер.: Математика — 1960. — Т. 24. — С. 431 – 468.
80. Жукина Е. И. Теоремы вложения. Приближение периодических функций в метрике пространсва L_p. — Киев: Ин-т математики, 1987. — С. 3 – 32. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.47).
81. Zaanen A.C. Linear Analysis / A.C. Zaanen. — North-Holland Publishing Company, Amsterdam and P. Noordhoff, Groningen. — 1960. — 600 p.
82. Забрейко П.П. О разрешимости нелинейных операторных уравнений / П.П. Забрейко, М.А. Красносельский // Функц. анализ и его прил. — 1971. — N. 5, № 3. — С. 42 – 44.
83. Забрейко П.П. Об одном классе линейных положительных операторов / П.П. Забрейко, М.А. Красносельский, Ю.В. Покорный // Функц. анализ и его прил. — 1971 — N. 5, № 4, С. 9 – 17.
84. Золотарев Е. И. Полное собрание сочинений. Вып. 2 / Е.И. Золотарев. — Ленинград: Изд-во АН СССР, 1932. — 364 с.
85. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. — Москва – Ленинград: ГОНТИ, 1939. — 319 с.
86. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе целых функций экспоненциального типа / И.И. Ибрагимов // Успехи мат.наук. — 1957. — Т. 12, № 3. — С. 323 – 328.
87. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени / И.И. Ибрагимов // Изв. АН СССР. — 1959. — Т. 23, № 2. — С. 243 – 256.
88. Ибрагимов И.И.Теория приближения целыми функциями / И.И. Ибрагимов. — Баку: ЭЛМ, 1979. — 468 с.
89. Kalton N. J. Orlicz sequence spaces without local convexity / N.J. Kalton // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — № 81. — 1977. — P. 253 – 277.
90. Келдыш М.В. О приближении голоморфных функций целыми функциями / М.В. Келдыш // ДАН СССР. — 1945. — Т. 47. — С. 243 – 245.
91. Khabazi M. The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes / M. Khabazi // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. — 2002. — Vol. 129. — P. 65 – 75.

92. Kober H. A note on approximation by rational function / H. Kober // Bull. of the American Math. Society. — 1943. — Vol. 49, № 6. — P. 437 – 443.
93. Kober H. A note on approximation by rational function / H. Kober // Pros. of Edinburg Math. Soc. — 1944. — Vol. 7, № 3. — P. 123 – 133.
94. Kolmogoroff A. Zur Crössendordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen / A. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1935. — 36. — P. 521 – 526.
95. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье / А.А. Конюшков // Мат. сб. — 1958. — Т. 44 (86), № 1. — С. 53 – 84.
96. Kokilashvily V. Weighted inequality in Lorentz and Orlicz spaces / V. Kokilashvily, M. Krbes. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1991. — 233 p.
97. Kokilashvili V. Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent / V. Kokilashvili and S. Samko // Georgian Math. J. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 145 – 156.
98. Kokilashvili V. Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves / V. Kokilashvili and S. Samko // Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2005. — Vol. 138 — P. 106 – 110.
99. Kokilashvili V. Operators of Harmonis Analysis in weighted spaces with nonstandard growth / V. Kokilashvili, S. Samko // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — № 352. — P. 15 – 34.
100. Корнейчук Н. П. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун. — Киев: Наук. думка, 1992. — 304 с.
101. Kováčik O. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ / O. Kováčik, J. Rakósník // Chach. Math. J. — 1991. — Vol. 41 (116), № 4. — P. 592 – 618.
102. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий. — Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.
103. Крылов В. И. О функциях, регулярных в полуплоскости / В.И. Крылов // Мат. сб. — 1939. — Т. 6, № 1. — С. 95 – 138.

104. Landau E. Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie / E. Landau, D. Gaier. — Berlin; New-York : Springer-Verlag, 1986. — 201 p.
105. Lebesgue H. Sur les integrals singulieres / H. Lebesgue // Ann. de Toulous. — 1909. — P. 25 – 117.
106. Lindenstrauss J. Classical Banach spaces I: Sequence Spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Berlin, 1977. — 188 p.
107. Lindenstrauss J. Classical Banach spaces II: Function Spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Berlin, 1979. — 243 p.
108. Lindenstrauss J. On Orlicz sequence spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri // Israel J. Math. — 1965. — № 10. — P. 379 – 390.
109. Лукацкий А. М. Разложение в ряды по системе рациональных функций / А.М. Лукацкий // Мат. сб. — 1973. — Т. 90 (132), № 4. — С. 544 – 557.
110. Luxemburg W.A.J. Banach function spaces / W.A.J. Luxemburg. — PhD thesis, Delft, 1955.
111. Luxemburg W. A. Some remarks on Banach function spaces / W. Luxemburg, A. Zaanen // Indag. Math. — 1956. — 18. — P. 110 – 119.
112. Luxemburg W. A. Conjugate spsses of Orlicz spaces / W. Luxemburg, A. Zaanen // Indag. Math. — 1956. — 59. — P. 217 – 228.
113. Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальные восстановление соболевских классов функций на прямой / Г.Г. Магарил-Ильяев // Мат.сборник. — 1991. — Т. 182, № 11. — С. 1635 – 1656.
114. Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой / Г.Г. Магарил-Ильяев // ДАН СССР. — 1991. — Т. 318, № 1. — С. 35 – 38.
115. Malmquist F. Comptes rendus du sixieme congres des mathematiciens scandinaves / F. Malmquist. — Kopenhagen, 1925. — P. 253.
116. Marcinkievicz J. Sur les multiplicateures des séries de Fourier / J. Marcinkievicz // Studia Mathematica. — 1938. — Vol. 8. — P. 78 – 91.
117. Mashreghi J. Representation Theorem in Hardy Spaces / J. Mashreghi. — New York: Cambridge University Press, 2009. — 372 p.

118. Matuszewska W. Some further properties of φ-functions / W. Matuszewska // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys. — 1961 — Vol. 9. — P. 445 – 450.

119. Matuszewska W. On certain properties of φ-functions / W. Matuszewska, W. Orlicz // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys. — 1960. — Vol. 8. — P. 439 – 443.

120. Matuszewska W. A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions / W. Matuszewska, W. Orlicz // Studia Math. — 1961. — Vol. 21. — P. 107 – 115.

121. Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного / С.Н. Мергелян // УМН. — 1952. — Т. 7, № 2(48). — С. 31 – 122.

122. Mitrinović D. S. Classical and new inequalities in analysis / D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. — Kluwer. — 1993. — 740 p.

123. Mitrinović D. S. History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities II / D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić // Rad JAZU (Zagreb). — 1990. — Vol. 450, № 9 — P. 139–156.

124. Mitrinović D. S. History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities / D. S. Mitrinović and P. M. Vasić // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. — 1974. — P. 1–30.

125. Montgomery H. L. Multiplicative Number Theory I. Classical Theory / H.L. Montgomery, R.C. Vaughan. — New York: Cambridge University Press, 2006. — 552 p.

126. Моторный В.П. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем / В.П. Моторный // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 1. — С. 15 – 26.

127. Musielak J. On modular spaces / J. Musielak, W. Orlicz // Studia Math. // 1959. — 18. — P. 49 – 65.

128. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces / J. Musielak. — Berlin: Springer, 1983. — 222 p.

129. Nagy B. Sur une classe generale de procedes de sommation pour les Series de Fourier/ B. Nagy // Hung. Acta Math. — 1948. — Vol. 1, № 3. — P. 14

– 62.

130. Nakano H. Modulared semi-ordered linear spaces / H. Nakano. — Tokyo: Maruzen Co. Ltd., 1950.
131. Nakano H. Topology of linear topological spaces / H. Nakano. — Tokyo: Maruzen Co. Ltd., 1951.
132. Nakano H. Modulared Sequence Spaces / H. Nakano. — Proc. Jap. Acad. 27 reprinted in semi ordered Linear Spaces. — Tokyo. — 1955.
133. Nekvinda A. Equivalence of l^{p_n} norms and shift operators / A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2002. — Vol. 5, № 4. — P. 711 — 723.
134. Nekvinda A. A note on maximal operator on l^{p_n} and $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ / A. Nekvinda // J. Funct. Spaces Appl. — 2007. — Vol. 5, № 1. — P. 49–88,
135. Nekvinda A. Imbeddings between discrete weighted Lebesgue spaces / A. Nekvinda // Math. Inequal. Appl. — 2007. — 10, № 1. — P. 165–172
136. Никольский С.М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1940. — № 6. — С. 509 – 520.
137. Никольский С.М. Оценка остатка сумм Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 31, № 3. — С. 210 – 214.
138. Никольский С.М. Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1941. – Т. 31, № 3. — С. 215 – 218.
139. Никольский С.М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1941. – Т. 22, № 6. — С. 386 – 389.
140. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С.М. Никольский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1945. — Т. 15. — С. 1 – 76.
141. Никольский С.М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1946. — Т. 52, № 3. — С. 191 – 193.
142. Никольский С.М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР.

Сер.: Математика. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207 – 256.

143. Никольский С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 259 – 278.

144. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных / С.М. Никольский // Тр. Матем. института им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 358 – 380.

145. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — Москва: Наука, 1969. — 480 с.

146. Orlicz W. Über konjugierte Exponentenfolgen / W. Orlicz // Studia Math. — 1931. — № 3. — P. 200 – 211.

147. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B / W. Orlicz // Bull. intern. de l'Acad. Pol. — 1932. — Serie A, Cracovie.

148. Orlicz W. Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen / W. Orlicz // Studia Mathematica. — 1936. — Vol. 6. P. 99 – 103.

149. Orlicz W. Über Räume (L^M) / W. Orlicz // Bull. intern. de l'Acad. Pol. — 1936. — Serie A, Cracovie.

150. Orlicz W. Linear functional analysis / W. Orlicz. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1992. — 246 p.

151. Островская О.В. Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда / О.В. Островская // Исследование по теории приближения функций: Сб. научных трудов. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. — С. 45 – 56.

152. Пекарский А.А. Сравнение наилучших равномерных приближений аналитических функций в круге и на его границе / А.А. Пекарский // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2006. — Т.255. — С. 227 – 232.

153. Pinkus A. n-Wedths in approximation theory / A. Pinkus. — Berlin, Heilderberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1986. — 291 p.

154. Ponomarenko V.G. Approximation of periodic functions in Orlicz spaces // Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 7, No. 6, pp. 1337-1346, November-December, 1966. Original article submitted June 28,

1965.

155. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. — Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1950. — 336 с.
156. Rao M. M. Theory of Orlicz Spaces / M. M. Rao, Z. D. Ren. — New York: Marcel Dekker Inc., 1991. — 449 p.
157. Rao M. M. Applications of Orlicz Spaces / M. M. Rao, Z. D. Ren. — New York: Marcel Dekker Inc., 2002. — 488 p.
158. Reddy A.R. Approximation of an Entire Functions / A.R. Reddy // J. Approximation Theory. — 1970. — Vol. 3, № 2. — P. 128 – 137.
159. Reddy A.R. Best polynomial approximation to certain entire functions / A.R. Reddy // J. Approximation Theory. — 1972. — Vol. 5, № 11. — P. 97 – 112.
160. Ровба Е. А. О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье / Е. А.Ровба // Мат. заметки. — 1989. — Т. 46, № 4. — С. 52 – 59.
161. Романюк А.С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 61–100.
162. Ružička M. Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory / M. Ružička. Lect. Notes Math. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. — 2000. — Vol. 1748. — 176 p.
163. Рукасов В.И. Приближение операторами Валле-Пуссена функций, заданных на действительной оси / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 5. — С. 682 – 691.
164. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций операторами Валле-Пуссена / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. — 2003. — 55, № 3. — С. 414 – 424.
165. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806 – 816.
166. Рукасов В.И. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена / В.И. Рукасов, О.А. Новиков // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 1998. — Т. 20 — С. 228

– 241.

167. Рукасов В.И. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ методами Валле-Пуссена / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. — С. 396 – 406.

168. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций операторами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, Е.С. Силин // Укр. мат. журн. — 2005. — Т 57, № 2, — С. 230 – 239.

169. Рукасов В.И. Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена / В.И. Рукасов, Е.С. Силин // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 3, — С. 394 – 400.

170. Рукасов В.И. Приближение классов $C^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ суммами Валле-Пуссена / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 681 – 691.

171. Рукасов В.И. Приближение непрерывных периодических функций суммами Валле-Пуссена (небольшая гладкость) / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання. — Київ, 2002. — С. 134 – 150. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 35).

172. Рукасов В.І. Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле-Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653 – 1668.

173. Рукасов В.И. Приближение $\psi-$интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках / В.И. Рукасов, С.О. Чайченко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. — Київ, 2003. — С. 156 – 191. — (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 36).

174. Рукасов В.І. Наближення періодичних функцій сумами Валле-Пуссена в просторі L / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Доповіді НАН України. — 2005. — № 4. — С 36 – 38.

175. Рукасов В.И. Приближение периодических функций малой гладкости суммами Валле-Пуссена в интегральной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 1, № 1. — Київ: Ін-ту математики НАН України, 2004. — С.

270 – 281.

176. Рукасов В.І. Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т.2, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. — С. 228 – 237.

177. Рукасов В.І. Аппроксимационные свойства операторов Валле Пуссена на классах $\widehat{L}_{\beta}^{\alpha}$ / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред. О.І. Степанець // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 4, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 284 – 301.

178. Рукасов В.І. Наближення операторами Фур'є на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 5, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 297 – 308.

179. Рукасов В.І. Наближення операторами Валле Пуссена на класах функцій, локально інтегровних на дійсній осі / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2010. — **62,** № 7. — С. 968 – 978.

180. Рукасов В.І., Чайченко С.О., Волковницький Д.С. Наближення $\bar{\psi}$-інтегралів локально сумовних на дійсній осі функцій за допомогою операторів Валле Пуссена в інтегральній метриці // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 7, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — С. 221 – 234.

181. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. — Минск: Изд. БГУ им. В.И.Ленина, 1979. — 174 с.

182. Русак В. Н. О наилучших рациональных приближениях одного класса периодических функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Вестник БГУ., Сер. 1. — 2010. — № 3. — С. 106 – 110.

183. Савчук В.В. Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій / В.В. Савчук // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, № 7. – С. 1001 – 1003.

184. Савчук В.В. Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій / В.В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 8. – С. 1047 – 1067.

185. Савчук В. В. Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді / В.В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 5. — С. 661 – 671.

186. Савчук В.В. Найкращі лінійні методи наближення обмежених гармонічних функцій / В.В. Савчук // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 242 – 251.

187. Савчук В. В. Декілька тверджень про суми Валле Пуссена функцій з простору Гарді / В.В. Савчук, М.В. Савчук // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. Т.2, № 2: Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 238 – 257.

188. Савчук В.В. Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / В.В. Савчук, М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Математичні студії. — 2010. — **34**, № 2/ — С. 207 – 219.

189. Савчук В. В. Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі / В.В. Савчук, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 11. — С. 1540 – 1549.

190. Савчук В.В. Доповненя до теореми Ф. Вінера про решето / В.В. Савчук, С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 12, № 4. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 262 – 272.

191. Samko S. G. Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ / S. Samko // Proc. Int. Conf. Operator Theory and Complex and Hypercomplex Analysis: Contemp. Math., 12 – 17 December 1994. — Mexico, 1994. — Т. 212. — P. 203 – 219.

192. Samko S.G. Convolution type operators in $L^{p(x)}$ / S.G. Samko // Integral Transform. Spec. Funct. — 1998. — Vol. 7, № 1–2. — P. 123 – 144.

193. Samko S.G. Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces / S.G. Samko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2003. — Vol. 6, № 4. — P. 355 –

362.

194. Samko S. G. On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent : Maximal and Singular operators / S. G. Samko // Integral Transforms Spec. Funct. — 2005. — T. 16, № 5 – 6. — P. 461 – 482.

195. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97 – 107.

196. Сердюк А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій / А.С. Сердюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 295 – 336.

197. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона однім лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2008. — Т 60, № 7. — С. 976 – 982.

198. Сердюк А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів $(\psi;\beta)$–диференційовних функцій / А.С. Сердюк, У.З. Грабова // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 9. — С. 1186 – 1197.

199. Сердюк А.С. Наближення класів аналітичних функцій лінійним методом спеціального вигляду / А.С. Сердюк, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2011. — **63,** № 1. — С. 102 – 109.

200. Соколенко І.В. Наближення операторами Сердюка $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі / І.В. Соколенко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2007. — Т.4, № 1. — С. 318 – 334.

201. Соколенко І.В. Наближення деякими лінійними операторами класів заданих на дійсній осі неперервних $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій / І.В. Соколенко // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 352 – 366.

202. Соколенко І.В. Наближення класів локально сумовних функцій деякими лінійними операторами / І.В. Соколенко // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 317

– 324.

203. Степанец А.И. Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье / А.И. Степанец // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. — 1986. — Т. 50, № 1. — С. 101 – 136.

204. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. — Киев: Наук. Думка, 1987. — 286 с.

205. Степанец А.И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1988. — Т. 40, № 2. — С. 198 – 209.

206. Степанец А.И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 1. — С. 102 – 112.

207. Степанец А.И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 2. — С. 210 – 222.

208. Степанец А.И. Приближение в пространствах локально интегрируемых функций / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1994. — Т. 46, № 5. — С. 597 – 625.

209. Степанец А. И. Обратные теоремы приближения периодических функций / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 9. — С. 1266 – 1273.

210. Степанец А.И. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов/ А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 8. — С. 1069 – 1113.

211. Степанец А.И. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) I / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 2. — С. 274 – 291.

212. Степанец А.И. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость) II / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 3. — С. 388 – 400.

213. Степанец А.И. Приближение аналитических непрерывных функций / А.И. Степанец // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113 – 138.

214. Степанец А.И. Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ /

А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 3. — С. 392–416.

215. Степанец А.И. Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 8. — С. 1121–1146.
216. Степанец А. И. Методы теории приближений : в 2 т. / А.И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. — 427 с.
217. Степанец А. И. Методы теории приближений : в 2 т. / А.И. Степанец. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.
218. Степанец А.И. Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 10. — С. 1378 – 1410.
219. Степанец А.И. Задачи теории приближений в линейных пространствах / А.И. Степанец // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 1. — С. 47–92.
220. Stepanets O.I. Approximation of locally integrable function oh the real line / O.I. Stepanets, Wang Kunyang, Zhang Xirong // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 11. — С. 1549 – 1561.
221. Степанец А. И. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций / Степанец А.И., Кушпель А.К. — Киев : Ин-т математики, 1984. — 44 с. — (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; 84.15).
222. Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p / Степанец А. И., Кушпель А. К. // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 4. — С. 483 – 492.
223. Степанец А.И. Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем / А.И. Степанец, А.К. Новикова // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, № 2. — С. 204 – 210.
224. Степанец А.И. Приближения суммами Валле Пуссена / А.И. Степанец, В.И. Рукасов, С.О. Чайченко. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 386 с.
225. Степанец А. И. Приближения интегралов типа Коши / А.И. Степанец, В.В. Савчук // Укр. мат. журн. – 2002. — Т. 54, № 5. – С. 706 – 740.
226. Степанец А.И. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк

// Укр. мат. журн. — 2000. — Т 52, № 3. — С. 375 – 395.

227. Степанец А.И. Неравенства Лебега для интегралов Пуассона / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375 – 395.

228. Степанець О.І. Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів неперервних функцій, заданих на дійсній осі / О.І. Степанець, І.В. Соколенко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 5. — С. 663 – 676.

229. Степанець О.І. Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі / О.І. Степанець, І.В. Соколенко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 7. — С. 960 – 965.

230. Степанець О.І. Наближення інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі / О.І. Степанець, І.В. Соколенко // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. — Т. 1, № 1. — С. 361 – 375.

231. Степанец А.И. Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье в пространстве L / А.И. Степанец, Н.И. Степанец. — Киев, 1996. — С. 63–69. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).

232. Степанець О.І. Про одну екстремальну задачу для додатних рядів / О.І. Степанець, А.Л. Шидліч // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1677 – 1683.

233. Stepanets A.I. Best approximations of integrals by integrals of finite rank / A.I. Stepanets, A.L. Shidlich // J. Approx. Theory. — 2010. — Vol. 162. — P. 323 – 348.

234. Степанец А.И. Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций / А.И. Степанец, А.Л. Шидлич // Изв. РАН. Сер.: Математика. — 2010. — Т. 74, № 3. — С. 169 – 224.

235. Steffensen J.F. En Ulighted mellem Middelve edier / J.F. Steffensen // Mat. Tidsskrift. — 1920. — Vol. B. — P. 49 – 53.

236. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1953, Т. 17. — С. 461 – 472.

237. Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С.Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, № 1. — С. 37 – 40.

238. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С.Б. Стечкин // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126 – 151.

239. Стечкин С.Б. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L / С.Б. Стечкин, С.А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1967. — Т. 88. — С. 20 – 29.

240. Szász O. Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe / O. Szász // Math. Z. — 1918. — Vol. 1. — P. 163—183.

241. Тайков Л.В. О методах суммирования рядов Тейлора / Л.В. Тайков // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, № 1. — С. 252 – 254.

242. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation / S. Takenaka // Japanese Journal of Mathematics. — 1925. — № 2. — P. 129 – 145.

243. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. — Москва : Физматгиз, 1960. — 624 с.

244. Тиман М.Ф. Аппроксимация и свойства периодических функций / М.Ф. Тиман. — Киев: Наукова думка, 2009. — 376 с.

245. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближения / В.М. Тихомиров. — Москва: Изд. МГУ. — 1976. — 304 с.

246. Тичмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Тичмарш. — Москва ; Ленинград : ОГИЗ, 1948. — 418 с.

247. Тумаркин Г.Ц. Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами / Г.Ц. Тумаркин // Изв. АН АрмССР, Сер.: Математика. — 1966. — Т. 1, № 2. – С. 89 – 105.

248. Тумаркин Г. Ц. Приближение в различных метриках функций, заданных на окружности, последовательностями рациональных дробей / Г.Ц. Тумаркин // Изв. АН СССР, Сер.: Математика. — 1966. — Т. 30. — С. 721 – 766.

249. Ульянов П.Л. Представление функций класса $\varphi(L)$ рядами / П. Л.

Ульянов // Тр. МИАН СССР. 1971. — Т. 112. — С. 372 – 384.

250. Ульянов П.Л. Теоремы Вейерштрасса для функций класса $\varphi(L)$ / П. Л. Ульянов // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 197, № 5. — С. 1030 – 1033.
251. Ульянов П.Л. О различных видах сходимости в классах $\varphi(L)$ / П. Л. Ульянов // Тр. МИАН СССР. — 1975. — Т 134. — С. 327 – 352.
252. Ульянов П.Л. Замечания о сходимости в среднем / П. Л. Ульянов // Матем. заметки. —1977. — Т. 21,№ 6. — С. 807 – 816.
253. Уолш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексксной области / Дж.Л. Уолш. — Москва: Изд-во. иностр. лит-ры, 1961. — 508 с.
254. Fan X. On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ / X.-L. Fan, D. Zhao // J. Math. Anal. and Appl. — 2001. — Vol. 263, № 2. — P. 424 – 446.
255. Hardy G. Some properties of fractional integrals / G. Hardy, J. Littlewood // IMZ. — 1928. — № 27. — P 565 – 606.
256. Харди Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. — Москва: Гос. изд. ин. лит. — 1948. — 456 с.
257. Heinig H. P. Chebyshev inequality in function spaces / H. P. Heinig and L. Maligranda // Real Anal. Exchange. — 1991/92. — Vol. 17, № 1. — P. 211 – 247.
258. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0;1])$ / И.И Шарапудинов // Мат. заметки. — 1979. — Т. 26, № 4. — С. 613 – 632.
259. Шарапудинов И. И. Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a;b])$ и квадратурные формулы / И.И. Шарапудинов // Proceedings of the International Conference "Constructive function theory 81"(Varna 1981), Publ. House Bulgar. Acad. Sci. — Sofia, 1983. — P. 189 – 193.
260. Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0;1])$ и принципе локализации в среднем / И.И. Шарапудинов // Мат. сб. — 1986. — Т. 130 (1722), № 2 (6). — С. 275 – 283.
261. Шарапудинов И. И. О равномерной ограниченности в $L^p, (p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки / И.И. Шарапудинов // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 2. — С. 291 – 302.
262. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближения в про-

странствах $L^{p(x)}(E)$ / И.И. Шарапудинов // Anal. Math. — 2007. — Т. 33. — С. 135 – 153.

263. Sharapudinov I.I. Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials / I.I. Sharapudinov // Izvestiya: Mathematics. — 2013. — Vol. 77, № 2. — P. 407 – 434.
264. Швецова А.М. Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций аналитических в единичном круге / А.М. Швецова // Вісник Харківського національного ун-ту. Сер. "Математика, прикладна математика і механіка". — 2000. — № 475. – С. 208 – 217.
265. Shidlich A.L. On necessary and sufficient for validity of some Chebyshev-Type inequalities / A.L. Shidlich J.Math.Inequal. — 2011. — Vol. 5, № 1. — P. 71 – 85.
266. Шидліч А. Л. Деякі екстремальні задачі в просторах Орлича / А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко // Математичні Студії. — 2014. — Т.42, № 1. — С. 21 – 32
267. Шидліч А.Л. Апроксимаційні характеристики діагональних операторів в просторах $l_{\mathbf{p}}$ / А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Інституту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2014. — Т.11, №4.- С. 399 – 412.
268. Shidlich A.L. On some inequalities of Chebyshev type / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Math. Ineq. and Appl. — 2015. — **18**, № 3. — P. 1313 – 1320.
269. Shidlich A. L. Approximative Properties of Diagonal Operators in Orlicz Spaces / A.L. Shidlich, S.O. Chaichenko // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2015. — **36.** — P. 1339 – 1352.
270. Чайченко С.О. Наилучшие приближения периодических функций в обобщенных пространствах Лебега / С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2012. — **64,** № 9. — С. 1249 – 1265.
271. Чайченко С.О. Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча / С.О. Чайченко // Вісник Київського національного

університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — Випуск № 2, 2013. — С. 33 – 40.

272. Чайченко С.О. Раціональні наближення класів згорток періодичних функцій / С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 10, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 296 – 303.

273. Чайченко С.О. Обернені теореми теорії наближення у вагових просторах Орлича / С.О. Чайченко // Буковинський математичний журнал. — Т.1, № 3 – 4. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. — С. 148 – 157.

274. Чайченко С.О. Теореми вкладення для множин $L^{\psi}L_M$ і наближення сумами Фур'є / С.О. Чайченко // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А.С. Романюк // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Т. 11, № 3. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. — С. 270 – 286.

275. Чайченко С.О. Приближения суммами Фурье на множествах $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ / С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2014. — **66,** № 6. — С. 835 – 846.

276. Чайченко С.О. Приближение периодических функций в весовых пространствах Орлича / С.О. Чайченко // Вісник Одеського нац. ун-ту. — 2014. — Т. 19, вип. 4(24). — С. 32 – 44.

277. Чайченко С.О. Збіжність на дійсній осі рядів Фур'є по системі раціональних функцій / С.О. Чайченко // Укр. мат. вісн. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 403 – 426.

278. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций / П.Л. Чебышев // Зап. Академии наук. — 1859.

279. Чебышев П.Л. О приближенных выражениях одних интегралов через другие / П.Л. Чебышев // Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Императорском Харьковском университете. — 1882. — № 2, С 93 – 98 (Полное собрание сочинений П.Л.Чебышева. — Москва-Ленинград. — 1978. – Т. 3. — С. 128 – 131).

280. Чебышев П.Л. Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подинтегральной функции на многочлены /

П.Л. Чебышев // Приложение к 57 тому Записок Императорской Академии Наук — 1883. — № 4 (Полное собрание сочинений П.Л.Чебышева. — Москва-Ленинград. — 1978. – Т. 3. — С. 157 – 169).

281. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева : [В 5 томах] / П.Л. Чебышев. — Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1947. — Т. 2. Математический анализ. — 520 с.
282. Fuchang Gao. Exact value of the n-term approximation of a diagonal operator / Fuchang Gao // J. Approx. Theory. — 2010. — Vol. 162, № 4. — P. 646 – 652.
283. Fejer L. Untersuchungen uber Fouriesche Reihen / L. Fejer // Ann. Math. — 1904. — Vol. 58. — P. 501 – 569.
284. Young W.H. On classes of summable functions and their Fourier series / W.H. Young // Proc. Royal Soc. London. — № 87. — 1912. — P. 225 – 229.