ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Чайченка Станіслава Олеговича “Екстремальні задачі
теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних”,
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Дисертаційну роботу С.О. Чайченка присвячено дослідженню важливих екстремальних задач теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних, а саме: задач про обчислення точного значення величини найкращого наближення підпросторами голоморфних функцій ядра Коші у верхній півплощині комплексної площини і побудову найкращого лінійного методу наближення на основі розвинення в ряд Фур’є по заданій ортонормованій системі; задачі Колмогорова-Нікольського про знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена та інших агрегатів наближення на класах функцій дійсної та комплексної змінних; задач про отримання у метриках просторів Лебега зі змінним показником та просторів Орлича тверджень, типу прямих та обернених теорем теорії наближення; задач про обчислення точних значень апроксимаційних характеристик (таких, як найкращі наближення, базисні поперечники та поперечники за Колмогоровим) множин образів діагональних операторів у просторах числових послідовностей.

Напрям теорії наближення функцій дійсної змінної, що бере свій початок у другій половині XIX сторіччя в класичних роботах П.Л. Чебишова і К. Вейєрштраса, набув подальшого розвитку на початку XX-го сторіччя завдяки роботам А. Лебега, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна, Ш. Валле Пуссена в яких головна увага приділялась дослідженню питань апроксимації індивідуальних функцій. Починаючи з 30-х років XX-го століття завдяки працям А.М. Колмогорова, Ж. Фавара, Н.І. Ахієзера, М.Г. Крейна, Б. Надя, С.М. Нікольського основна увага в теорії наближень змістилася в бік вивчення апроксимаційних характеристик функціональних класів, елементи яких володіють певними диференціально-різницевими чи гладкісними властивостями.

Завдяки фундаментальним результатам А.М. Колмогорова і С.М. Нікольського однією з найважливіших в теорії наближення стає задача про знаходження асимптотичних рівностей для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \sup \{\|f - U_n(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{N}\},$$

де $\mathfrak{N}$ — фіксований клас $2\pi-$періодичних функцій, $U_n(f) = U_n(f;x)$ — тригонометричні поліноми, що породжуються різноманітними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, X — лінійний нормований простір. Наслідуючи О.І. Степанця, цю задачу називають задачею Колмогорова-Нікольського.

У комплексному випадку аналогічні проблеми вперше були досліджені в працях С.Б. Стєчкіна, К.І. Бабенка, Л.В. Тайкова, Дж.Т. Шейка і В.І. Білого.

У подальшому, значний внесок у розв'язання цієї задачі внесли О.В. Єфімов, В.К. Дзядик, М.П. Корнєйчук, Б. Надь, В.Т. Пінкевич, О.І. Степанець, С.Б. Стєчкін, А.С. Сердюк, С.О. Теляковський, О.П. Тіман, Р.М. Тригуб та інші.

У 80–90-х роках ХХ-го сторіччя О.І. Степанцем та його учнями були розроблені методи дослідження апроксимаційних характеристик на класах ψ-дифернційовних функцій, що дозволило розв'язувати задачі теорії апроксимації не тільки в періодичному випадку, а й у випадку, коли об'єктами наближення є функції, локально інтегровні за Лебегом на всій дійсній осі, а також функції, визначені інтегралами типу Коші в областях комплексної площини, обмежених спрямлюваними жордановими кривими. В серії робіт О.І. Степанця та його учнів були отримані розв'язки задачі Комогорова-Нікольського для сум та операторів Фур'є на класах періодичних і локально сумовних на дійсній осі функцій; в працях В.В. Савчука досліджено питання наближення класів, елементи яких зображуються інтегралами типу Коші, за допомогою лінійних середніх рядів Фабера, в тому числі, частинних сум Тейлора, Фейєра, Абеля-Пуассона та ін.

Задача Колмогорова-Нікольського і дотепер перебуває у колі наукових інтересів провідних фахівців із теорії наближення. Отже важливим і актуальним є дослідження апроксимаційних властивостей класичних і спеціальних методів наближення на класах ψ-диференційовних 2π-періодичних функцій, локально сумовних на всій дійсній осі функцій та голоморфних в одиничному крузі функцій, у випадках, коли розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського не було знайдене.

Актуальною також є задача про розробку методу розв'язання задачі про найкраще наближення твірних ядер голоморфних у верхній півплощині функцій.

В останні роки спостерігається період інтенсифікації систематичного вивчення властивостей просторів Лебега зі змінним показником підсумовування та просторів Орлича. Велика кількість математиків з різних країн (зокрема, R. Akgün, Р.А. Бандалієв, A. Guven, L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, D.M. Israfilov, M. Khabazi, M. Ružička, S.G. Samko та ін.) зосередили увагу на дослідженні цих просторів с точки зору апроксимації на підмножинах функцій, які володіють певними диференціально-різницевими та структурними властивостями. Отже, актуальною є задача систематизації теорії наближення в просторах Лебега зі змінним показником підсумовування та просторах Орлича на основі більш загальної класифікації періодичних функцій, що використовує поняття ψ-похідної та ψ-інтеграла. Крім того, важливим і актуальним є дослідження властивостей дискретних аналогів просторів зі змінним показником підсумовування та просторів Орлича.

Основні наукові результати роботи. Дисертаційна робота С.О.Чайченка складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел.

У *вступі* обгрунтовано актуальність теми дисертації, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, сформульовані мета, об'єкт, предмет і завдання дослідження, визначені наукова новизна і практичне значення одержаних результатів, наведено данні про особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертаційної роботи.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дослідження.

У *другому* розділі встановлено достатні умови збіжності у просторах $L_p(\mathbb{R})(p > 1)$ і поточкової збіжності рядів Фур'є по системі Такенаки-Мальмквіста, а також обчислено точне значення величини найкращого поточкового наближеннями ядра Коші в метриці простору $L_q(\mathbb{R}), q \geq 2$, побудовано найкращий лінійний метод поточкового і рівномірного наближення функцій з одиничних куль просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ і показано, що такий метод є найкращим інтерполяційним методом наближення.

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $(\operatorname{Im} a_k > 0)$ — довільна послідовність комплексних чисел, які лежать у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді

$$\Phi_0^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_0}}{z - \overline{a}_0}, \ \Phi_n^+(z) := \frac{\sqrt{\operatorname{Im} a_n}}{z - \overline{a}_n} B_n^+(z), \ n = 1, 2, \dots,$$

$$B_0^+(z) := 1, \ B_n^+(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \chi_k^+ \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k}, \ \chi_k^+ := \frac{|1 + a_k^2|}{1 + a_k^2}, \ n = 1, 2, \dots .$$

— n-добуток Бляшке з нулями в точках a_k, $k = 0, 1, ... n - 1$.

Нехай далі

$$\mathfrak{A}_{n,p} := \left\{ f \in H_p(\mathbb{C}_+) : \langle f, \Phi_k^+ \rangle = 0, \quad k = \overline{0, n} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\mathfrak{A}_{n,p}^\perp := \{ g \in L_q(\mathbb{R}) : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{A}_{n,p} \}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

Основними результатами *другого* розділу є такі твердження.

Теорема 2.2.3. *Нехай $2 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$ і B_n^+ — n-добуток Бляшке системи Φ^+. Тоді для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ справджується рівність*

$$E\left(z, \mathfrak{A}_{n,p}^\perp\right) := \inf_{g \in \mathfrak{A}_{n,p}^\perp} \|\mathcal{C}(z, \cdot) - g(\cdot)\|_q = \frac{|B_n^+(z)|}{(4 \operatorname{Im} z)^{1/p}},$$

а елементом найкращого наближення з підпростору $\mathfrak{A}_{n,p}^\perp$ є єдина функція $g_z(t) = \mathcal{C}(t, z) - \mathcal{C}_{n,p,\Phi}(t, z)$.

Показано, що оператор $U_{n,p,\Phi}$, визначений на $H_p(\mathbb{C}_+)$ формулою

$$U_{n,p,\Phi}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)(1 - \frac{1}{\Phi_k^+} \langle \Phi_k^+, \mathcal{C}_{n,p,\Phi^+} \rangle) \Phi_k^+,$$

породжує найкращий лінійний метод наближення в такому розумінні. Нехай $\mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ — множина лінійних операторів I_n, визначених на $H_p(\mathbb{C}_+)$ правилом $I_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j) \varphi_j(z)$, де φ_j — довільні функції, визначені та неперервні в $\mathbb{C}_+$. Нехай далі

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) := \inf \left\{ \max \left\{ |f(z) - I_n(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1 \right\} : I_n \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n) \right\}$$

— найкраще наближення в точці $z \in \mathbb{C}_+$ одиничної кулі простору Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ образами операторів I_n.

Теорема 2.2.4. *Нехай $2 \le p < \infty$, $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^\infty$ — послідовність різних точок $a_k \in \mathbb{C}_+$ і $\Phi^+ \in TM(\mathbb{C}_+)$. Тоді $U_{n,p,\Phi} \in \mathcal{I}_p(\mathbf{a}_n)$ і в кожній точці $z \in \mathbb{C}_+$*

справджується рівність

$$e(\mathbf{a}_n, p, z) = \max\{|f(z) - U_{n,p,\Phi}(f)(z)| : f \in H_p, \|f\|_p \le 1\} = \frac{|B_n^+(z)|}{(4\operatorname{Im} z)^{1/p}}.$$

Зміст *третього* розділу складають результати, що стосуються розв'язання задачі Колмогорова-Нікольського для методу Валле Пуссена на класах функцій дійсної та комплексної змінних, а також для поліномів $U^*_{n-1}(f;x)$ спеціального вигляду на класах періодичних функцій, визначених згортками з ядрами, коефіцієнти яких задовольняють умову Даламбера. Крім того, описано всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$. Одержані результати застосовано до знаходження найкращих наближень функцій простору Гарді $H_p(\mathbb{D})$.

Одним з основних результатів цього розділу є таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай K_∞ — клас аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, що зображуються інтегралами типу Коші*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{1 - \overline{w}z}\frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D},$$

зі щільностями φ, для яких $\operatorname{ess\,sup}_{w\in\mathbb{T}} |\varphi(w)| \le 1$.

Тоді для будь-яких $p, n \in \mathbb{N}$, $p \le n$, і $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність

$$R_{n,p}(K_\infty; z) := \sup_{f\in K_\infty} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{2}{\pi p}|z|^{n-p+1}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p),$$

де $\mathbf{K}(\rho) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ *— повний еліптичний інтеграл першого роду.*

У *четвертому* розділі для точних верхніх меж відхилень у просторах $\widehat{L}_p$ операторів Валле Пуссена та модифікованих операторів Фур'є на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi \in \mathcal{D}_\alpha$ отримано асимптотичні нерівності. Показано, що у випадку, коли $p = \infty$ і при $\sigma \to \infty$ одночасно $c = c(\sigma) \to \infty$ і $\sigma - c \to \infty$, усі отримані нерівності перетворюються в асимптотичні рівності, які дають розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського. Цю задачу також розв'язано для операторів $\mathbb{V}_{\sigma,c}(f;x)$ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$, $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ у метриці простору $\widehat{L}_1$.

П'ятий розділ дисертаційної роботи присвячено знаходженню умов вкладення, порядків наближень сумами Фур'є та найкращих наближень, отриманню прямих та обернених теорем теорії наближення в просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича.

Одним з основних результатів розділу 5 є таке твердження.

Теорема 5.2.3. *Нехай показники* $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ *на періоді* $x \in [0; 2\pi]$ *пов'язані одним зі співвідношень* $p(x) < s(x)$ *або* $p(x) \geq s(x)$, *і пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить до множини* $\Upsilon_{\alpha,n}$, *де* $\alpha = 0$, *якщо* $p(x) \geq s(x)$, *і* $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, *якщо* $p(x) < s(x)$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \leq \mathcal{E}(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\nu(n)n^{\alpha}, \tag{1}$$

Зокрема, якщо пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *належить множині* Υ^*_{α}, *то*

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \leq \mathcal{E}(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}, \tag{2}$$

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} E_n(f)_{s(\cdot)}, \quad \mathcal{E}(L^{\psi}_{p(\cdot)}; S_n)_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} \|f - S_n(f)\|_{s(\cdot)}.$$

В *шостому* розділі обчислено точні значення найкращих наближень, базисних та колмогорівських поперечників множин образів діагональних операторів в просторах числових послідовностей $l_{\mathbf{p}}$ та l_M, а також отримано точні значення аналогів базисних поперечників в просторах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$.

Одними з основних результатів розділу 6 є такі твердження.

Теорема 6.3.1. *Нехай* $M(t)$ *та* $N(t)$ *— довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення* $0 < N(t) \leq M(t), \quad t \in [0,1]$, *і*

$$\inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \leq 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \leq 1\}. \tag{3}$$

Нехай далі $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність додатних чисел, для якої виконується умова* $\lambda_k \to 0, \ k \to \infty$. *Тоді для довільного набору* γ_n *із* n *різних натуральних чисел має місце рівність*

$$E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) := \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_M}} \inf_{a_i} ||T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}||_{l_N} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k,$$

де B_{l_M} — одинична куля простору l_M.

Із теореми 6.3.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.3.1. *В умовах теореми 6.3.1 справджуються рівності*

$$D_n(T : l_M \to l_N) = D_n(T(B_{l_M}), l_N) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_M \to l_N) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – незростаюча перестановка чисел λ_k.

Дисертаційна робота структурно і стилістично викладена правильно, оформлена досить акуратно.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер, разом з тим її результати мають практичне значення в конструктивній теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних. Розроблені в дисертації методи можуть бути використані в теоретичних дослідженнях із дійсного та комплексного аналізу, механіки, математичної фізики, варіаційного числення та обчислювальної математики, а також в теорії підсумовування рядів Фур'є, теорії пружності та теорії диференціальних операторів.

Ступінь обгрунтованості та достовірності наукових положень і висновків дисертації. Усі результати дисертаційної роботи сформульовано у вигляді теорем і лем, які є новими та строго математично обґрунтованими. Доведення теорем і лем повні та коректні. Висновки відповідають змісту дисертації. При дослідженнях використовується апарат математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, теорії двоїстості екстремальних задач, а також новий метод побудови твірних ядер і відповідних їм елементів найкращого наближення. Зауважень, які б ставили під сумнів результати дисертації, немає.

Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях. Результати дисертаційної роботи С.О. Чайченка доповідались та обговорювались на багатьох наукових семінарах та конференціях (як в Україні, так і за кордоном), і були опублікованими у 23 наукових публікаціях, з яких — 1 монографія та 22 статті у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, 8 з яких надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз (Mathematical Inequalities & Applications, Numerical Functional Analysis and Optimization, Ukrainian Mathematical Journal, Journal of Mathematical Sciences), та понад 15 тезах міжнародних наукових конференцій. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

Автореферат дисертації правильно і у повній мірі відображає її зміст. У дисертації і автореференаті чітко визначено особистий внесок дисертанта. Дисертація відповідає всім вимогам Міністерства освіти і науки України щодо кількості публікацій за темою дисертації у фахових виданнях, а також встановленим вимогам щодо обсягу та оформлення дисертаційних робіт.

До дисертаційної роботи є наступні *побажання та зауваження*:

1. Вважаю за доцільне продовжити дослідження, проведені у дисертаційній роботі, у таких напрямках: побудувати найкращий лінійний метод поточкового й рівномірного наближення класів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$ голоморфних у верхній півплощині функцій у випадку $1 \leq p < 2$; розглянути властивості інших лінійних методів наближення в просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича; поширити результати шостого розділу на випадок модульних просторів.

2. На с. 109 у лівих частинах нерівностей під знаком інтегралів замість $f(t)$ має бути $f(x+t)$.

3. На с. 138 у 7-му рядку зверху пропущено параметр p (має бути $1 \leq p \leq \infty$.)

4. На стор. 150. у 3-му рядку зверху для позначення константи потрібно використати літеру C.

5. На с. 275 у наступній після (6.30) нерівності допущено описки в індексах: замість $p_1 a_2$ потрібно писати $p_1 a_1$, а замість $p_1 b_2$ має бути $p_1 b_1$.

6. В тексті дисертації помічено низку граматичних помилок: с. 13, 8-й рядок зверху — замість "рівномірний" потрібно писати "рівномірній"; с.14, 8-й рядок зверху, с. 16, 11-й рядок зверху — замість "добутка" потрібно писати "добутку"; с. 101, 2-й і 3-й рядок зверху — замість "Валле-Пуссена" потрібно писати "Валле Пуссена";

Висновки. Наведені зауваження носять переважно редакційний характер, не мають принципового значення і не впливають на загальне цілком позитивне враження від роботи. Вважаю, що дисертаційна робота Чайченка Станіслава Олеговича на тему "Екстремальні задачі теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних" є завершеною науковою працею, яка за актуальністю обраної теми, обсягом виконаних досліджень, новизною і науковою цінністю одержаних результатів відповідає всім вимогам чинного положення "Порядку присудження наукових ступенів" щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, а її автор — Чайченко Станіслав Олегович заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України, професор
кафедри математичного аналізу і теорії функцій
Дніпропетровського національного університету
імені Олеся Гончара — В.П. Моторний

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара
02066747

7.06.16

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 08.06.2016 р.
секретар ради /Артемченко Ж.Я./

Інститут математики Національної академії наук України
Канцелярія