ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу **Чайченка Станіслава Олеговича** "Екстремальні задачі теорії наближення функцій дійсної та комплексної змінних", поданої до захисту на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

1. Актуальність дослідження і його мета. Основи конструктивної теорії функцій (теорії апроксимації) започатковано дослідженнями П.Л.Чебишова про найкраще рівномірне наближення функції алгебраїчними поліномами та теоремами К.Веєрштраса і К.Рунге про найкраще рівномірне наближення функції поліномами. Надзвичайно великий перелік прізвищ математиків, що присвятили свої роботи даній тематиці, обмежимо лише прізвищами тих, чиї дослідження в значній мірі визначили напрямки подальшого розвитку теорії апроксимації. Це дослідження Ш. Ла Валле-Пуссена, А.Лебега, Д.Джексона, С.Н.Бернштейна, Н.І.Ахієзера, А.Зігмунда, Ж.Фавара, С.М.Нікольського, С.Б.Стєчкіна, О.П.Тімана, П.Л.Ульянова, В.К.Дзядика, М.П.Корнійчука, М.П.Тімана. Серед сучасних досліджень варто виділити дослідження, виконані А.А. Гончаром, О.І. Степанцем, І.О. Шевчуком та їхніми учнями. Різноманітні зв'язки, які існують між структурними та конструктивними властивостями функцій, в першу чергу швидкістю прямування до нуля їх найкращих поліноміальних наближень, були метою пошуку у їхніх дослідженнях. Серед задач, які при цьому розглядаються одне з центральних місць займає, так звана задача Нікольського–Колмогорова про встановлення умов, за яких для найкращого наближення у тій чи іншій метриці, можна знайти головний член асимптотичної формули. Проблема пошуку точних сталих в обернених теоремах теорії наближень, які поряд з прямими теоремами займають основне місце в даній теорії, тривалий час у більшості випадків була далекою від свого вирішення. У цьому зв'язку варто відзначити роботи, виконані у 1972–1976 р.р. М.Д. Стерліним, який вперше в доволі загальних постановках успішно справився з цією проблемою. При цьому він вперше дослідив з точки зору наближень простори $S^{p,\mu}$, взяті пізніше О.І. Степанцем, у вигляді основи для структурування властивостей просторів періодичних функцій. Серед досягнень у цьому напрямку останніх років відзначимо дослідження, виконані А.С. Сердюком. І у даний час ці проблеми займають одне з центральних місць в конструктивній теорії функцій дійсної та комплексної змінних, позаяк встановлення нових фактів дуже часто приводить до виникнення нових постановок питань, важливих як з точки зору розвитку самої теорії, так і її застосувань. Перші результати, отримані в 1912 році в комплексному випадку С.Н.Бернштейном, стосувалися задачі про обчислення швидкості прямування до нуля на відрізку найкращих поліноміальних наближень звуження на відрізок аналітичної на деякій множині функції f. В більш загальному випадку для довільного континуума відповідні теореми довів Дж.Уолш (1926 р.). Власне, у подальшому у випадку апроксимації поліномами аналітичних функцій в комплексній площині виявилось, що не кожна область допускає можливість такої апроксимації. Областями, що допускають таку апроксимацію, є так звані області Каратеодорі, тобто, області, межа яких є одночасно межею деякої необмеженої області. Найпростішими прикладами областей Каратеодорі є Жорданові області. Конструктивні характеристики функцій з класів Ліпшиця в областях, що мають аналітичні границі отримано у 1942 р. В.Севеллом. Задачі поліноміальної апроксимації функцій, означених в областях з "особливостями", а також на довільних континуумах зі зв'язним доповненням, досліджувались С.Н.Мергеляном. Даний напрям отримав свій подальший розвиток у роботах С.Я.Альпера, В.К.Дзядика, Н.А.Лебедєва, П.М.Тамразова, В.І.Білого та інших. Зазначимо, що дослідження можливості наближення аналітичних функцій поліномами в середньому по контуру та по області проводились В.І.Смірновим, М.В.Келдишем, С.Н.Мергеляном, А.І.Маркушевичем, М.А.Лаврентьєвим,

Г.Ц.Тумаркіним та іншими. Задачі, пов'язані зі знаходженням конструктивних характеристик класів аналітичних функцій в залежності від їх найкращих поліноміальних наближень по контуру та по області, досліджувались в роботах Дж.Уолша, Г.Рассела, І.І.Ібрагімова, Дж.І.Мамедханова, В.М.Кокілашвілі та інших. Майже відразу, поряд з дослідженням апроксимаційних властивостей послідовностей алгебраїчних поліномів, виник і досі активно розвивається такий напрямок дослідження, як наближення поліномами Фур'є (тригонометричними і т.п.), а більш загально, лінійними агрегатами, побудованими за ортонормованими системами функцій чи ортогональними поліномами. Ці два напрямки досліджень активно впливають один на одного, і успіхи в одному з них призводять до появи нових ідей і постановок задач в іншому з них. Власне, наприклад, виявлення нових тонких шкал при вивченні просторів Хермандера і Соболєва у дослідженнях В.А. Михайлеця і А.А. Мурача, негайно робить актуальною проблему систематизації теорії наближень у просторах Лебега зі змінним показником, чи, більш загально, просторах Орлича на основі поняття $\psi-$похідної (інтеграла). В актуальності цієї розглянутої у дисертації С.О. Чайченка поблеми не повинно виникнути сумніву.

Викладене вище та аналіз літератури, яка стосується теми дисертації, демонструють актуальність обраної теми досліджень та її вагоме теоретичне значення для конструктивної теорії функцій дійсної і комплексної змінної.

2. Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основний зміст дисертаційної роботи міститься у розділах 2–6. У другому розділі дисертації встановлено умови збіжності в $p-$середньому (теорема 2.1.1) та поточкової збіжності (теореми 2.1.2 і 2.1.3) на дійсній осі рядів Фур'є за системами ортонормованих на дійсній осі раціональних функцій з фіксованою системою полюсів, що не мають точок скупчення на дійсній осі, до функції, за якою вони побудовані. Умови, які при цьому накладаються, є природними, бо ці теореми за своє суттю є аналогами класичних ознак збіжності рядів за тригонометричною системою функцій (ознаки Жордана і Діні-Ліпшиця) і повторюють у випадку півплощини відповідні твердження, встановлені М.М. Джрбашяном (1974) і А.М. Лукацьким (1973) у випадку ортонормованої на одиничному колі системи раціональних функцій. Схема доведення в цілому є повторення схеми для кола, при цьому добутки Бляшке для одиничного круга заміняються добутками Бляшке для верхньої півплощини Власне, те ж саме зробив і М.М. Джрбашян (1974), коли розглянув задачу найкращого наближення ядра Коші на дійсній осі. Базовими для всього розгляду тут є тотожності Джрбашяна (2.2) і (2.3), що є аналогами формули Хрістофеля-Дарбу для ортогонакльних многочленів. Відзначимо, що у дисертації наведено елементарне доведення цих формул (за схемою, запропонованою В. Савчуком!!?), позаяк, як зазначено у самому тексті дисертації, воно викликає "певний інтерес, насамперед з методичної точки зору". Крім цього у другому розділі обчислено точні значення найкращих наближень ядра Коші на дійсній осі фіксованими підпросторами Лебегових просторів на осі (теорема 2.2.3), та вказано застосування до обчислення точних верхніх меж поточкових відхилень функцій з одиничної кулі просторів Гарді $H_p(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 2$, у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$. Останні твердження є повними аналогами тверджень, встановлених В.Савчуком (2008) для просторів Гарді в одиничному крузі.

На думку автора відгуку, основні результати дисертаційної роботи, що складають її ядро, містяться у розділах 3 і 5. У цих розділах розвиваються підходи, що базуються на понятті $\psi-$похідної та $\psi-$інтегралу. Власне, основне місце у розділі 3 (як і у розділі 4) займає розв'язання задачі Нікольського-Колмогорова для тих або інших видів апроксимації. А серед отриманих теорем, основною на наш погляд є теорема 3.1.1., у якій, зокрема, міститься розв'язок цієї задачі у випадку апроксимації $\psi-$інтегралів сумами Валле Пуссена (формула (3.8)) та $\psi-$інтегралів, модуль неперервності яких не

перевищує заданого опуклого модуля неперервності (формула (3.9)). У теоремі 3.2.1 отримано точне значення верхньої межі поточкових відхилень сум Валле Пуссена на класі аналітичних в одиничному крузі функцій, що зображаються інтегралами типу Коші з істотно обмеженими щільностями. А у теоремі 3.3.1 встановлено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень у рівномірній і інтегральних метриках тригонометричних поліномів спеціального вигляду на класах періодичних функцій, що визначаються згортками з ядрами, що задовольняють умову вигляду $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q < 1$. У розділі 5 отримано прямі і обернені теореми теорії наближення на множинах $\psi-$диференційовних функцій у просторах Лебега зі змінним показником степеня та у просторах Орлича з нормою Люксембурга. Доведення основних тверджень з розділів 3 і 5 є найскладнішими у дисертації, а отримані там нетривіальні результати демонструють потужність й силу застосованих у них підходів. Зазначимо, що ми зосередили увагу тільки на результатах, які утворюють ядро дисертаційної роботи і в достатній мірі характеризують новизну і силу дисертації. Зі сказаного вище у цьому пункті, а також в актуальності, випливає, що всі основні результати дисертаційної роботи С.О. Чайченка є новими і мають важливе значення, як для розвитку теорії апроксимації в цілому, так і для можливих застосувань. Всі результати дисертаційної роботи є новими, тобто отримані вперше автором дисертаційної роботи.

3. Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Доведення всіх результатів дисертаційної роботи С.О.Чайченка приведені з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості і тому в їх обґрунтованості і достовірності не виникає сумніву. Дисертація написана чіткою і зрозумілою мовою, виклад логічний і послідовний.

4. Зауваження.

1) У підрозділі "Особистий внесок здобувача", де йдеться про статті, написані з співавторами, досить чітко і зрозуміло сказано про вклад автора дисертації. Проте, у самій дисертації є ряд місць, які написані доволі суперечливо. Так, на с. 294 перед теоремою 6.4.2, яка опублікована автором дисертації у співавторстві з А.Л. Шидлічем у статті [266], написано, що "Для повноти викладення... наведемо цю теорему без скорочень, зауваживши, що основні етапи її доведення належать А.Л. Шидлічу". Що ж тоді робити з написаним у дисертації на с.16 про те, що внесок співавторів є рівноцінним?? Це місце вимагає принаймні роз'яснень.

З іншого боку, важливе зображення (3.10) на с.105, отримане дисертантом у співавторстві з Рукасовим у статті [173] без жодних пояснень наводиться без доведення. А як же бути з повнотою викладу, чи то б пак, доведення?

2) На ст.66-68, як вже відзначалося вище, наведено з доведенням співвідношення, отримані М.М. Джрбашяном. Цитована вище аргументація, для чого це зроблено, не витримує ніякої критики.

3) На ст.71 доведення леми 2.1.4 завершується словами про те, що "Використовуючи аналогічні міркування...", а самі міркування насправді є відсутні. Виглядає схожим на те, що все правильно, але все ж ...1

4) Теорема 3.5.5 належить С.Я. Альперу [11]. Для чого ж тоді наводити її доведення на с. 163-164 дисертації? Якщо для того, щоб навести цікаве застосування теореми 3.5.3, як про це написано на с. 163 дисертації, то від такого "застосування" мало користі. Зрештою, написано "ще одне" застосування, а де ж інші?

5) На с.135 дисертації написано "Використані нижче міркування належать В.В.Савчуку і М.В.Савчук і були опубліковані у спільній роботі [188]" і нічого не сказано про дозвіл від співавторів на їхнє використання у дисертації. Як так!?

6) Дисертаційна робота є дотичною до досліджень дуже багатьох авторів і, тому вимагає дуже акуратного співставлення і порівняння отриманих автором результатів з результатами досліджень інших авторів. Попри великий список літератури з 284 позицій, присутнє лише на с.169 дуже акуратне порівняння результатів розділу 4 з результатами, як давніх, так і сучасних досліджень. У розділі Огляд літератури наводиться перелік результатів різноманітних досліджень зазвичай без їхньої прив'язки до конкретних результатів дисертаційної роботи.

Нескладний пошук за допомогою Scholar google дозволив автору даного відгуку відшукати наступні статті.

М.Д. Стерліна: 1. Докл АН СССР, 1972, 202, 545-547; 1973, 209, 1296-1298; 1976, 229, 550-553. 2. Вестн.Ленинград.ун-та, 1973, №2, 62-68; №3, 164-166, – присвячені прямим і оберненим теоремам наближення та точним сталим у цих теоремах.

Статті: A.Serdyuk, I.Ovsii: 1. Analysis math., 2012, 38, 4. 2. arXiv 1104.3060v1 [math.CA]15 Apr 2011,19 p.

A.Serdyuk, I.Ovsii, A.Musienko: arXiv 1112.0967v1 [math.CA] 5 Dec 2011, 14 p., – присвячені наближенням сумами Валле Пуссена і, як і статті наведені вище, повинні бути проаналізовані у контексті їхніх зв'язків з результатами дисертації.

Крім цього, глибокі дослідження В.К. Дзядика заслуговують на те, щоб у зв'язку з комплексною апроксимацією (та й не тільки) бути не лише побіжно згаданими.

Дослідження наближення на кривих, виконані Дж.Мамедхановим у призв'язці до понять подібних на $\psi-$інтеграл (похідну), а також його дослідження нерівностей типу нерівностей Чебишова і Бернштейна, також не можна обійти увагою.

7) Асимптотичні формули (як приклад згадаємо (3.8), (3.9)) вимагають певного пояснення, бо при різному виборі функції ψ різні їхні члени можуть ставати головними. Про це у дисертації побіжно згадується. Проте було би корисно виписати конкретні умови, за яких це відбувається. Зрештою, за умови $\Theta > 0$ другий і третій член формули є навіть еквівалентними. Це є прямим непорозумінням з тим, що ж таке асимптотична формула.

8) Описки. У дисертаційній роботі є ряд стилістичних і граматичних помилок, зустрічається неправильне вживання відмінків. Проте з контексту завжди зрозуміло про що йдеться і зміст при цьому не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей. Вкажемо лише на те, що прізвище Чебишов написано кілька разів також, як Чебишев. Правильний перший варіант.

Підсумовуючи цей доволі великий перелік зауважень, зазначу, що виявлені огріхи не спотворюють змісту і сприйняття тексту дисертації, доведення якої, хоча й написані іноді занадто конспективно, проте є зрозумілими, а сумнівів у правильності основних положень дисертації у автора відгуку не виникає.

6. Публікації і апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою опубліковані у 23 наукових публікаціях, з яких 1 монографія і 22 журнальні статті у фахових виданнях – 9 у виданнях, відображених у міжнародних науково-метричних базах даних. Результати дисертаційної роботи доповідались на численних міжнародних наукових конференціях, а також на наукових семінарах Національного університету ім.Т.Г.Шевченка, Інституту математики НАНУ, Львівського національного університету імені Івана Франка, у ряді наукових інститутів за межами України і, отже, пройшли належну апробацію.

7. Практичне значення результатів робота. Дисертаційна робота є теоретичним дослідженням і її результати можуть знайти застосування в тих розділах математики (насамперед математичного аналізу і диференціальних рівнянь), в яких традиційно знаходять застосування результати теорії апроксимації. Результати дисертаційної роботи можуть бути рекомендовані до використання при читанні спеціальних курсів, а

також у наукових дослідженнях в наступних наукових і навчальних закладах, в яких проводяться дослідження з математичного аналізу в широкому розумінні цього слова: Київському, Харківському, Одеському та Львівському національних університетах, Інституті математики НАНУ, Фізико-технічному інституті низьких температур (м.Харків), Інституті прикладної математики і механіки (м.Донецьк), НПУ ім.М.П.Драгоманова та Дрогобицькому ДПУ ім. І.Франка.

8. Висновки. Дисертаційна робота С.О.Чайченка є завершеним науковим дослідженням, має теоретичний характер, а її результати мають вагоме теоретичне значення для теорії апроксимації. В ній піддається систематичному аналізу проблема знаходження найкращих наближень різноманітних об'єктів аналізу на основі понятя $\psi-$похідної (інтегралу), зокрема задача Нікольського-Колмогорова про встановлення головного члена асимптотики таких наближень у просторах Лебега зі змінним показником та просторах Орлича. Вона виконана на сучасному науковому рівні. Перелічені вище зауваження до роботи не применшують хорошого враження від роботи в цілому. Аналізуючи дисертаційну роботу, слід відзначити її ідейну цілісність, вона містить остаточний розв'язок цілого ряду перелічених вище важливих для теорії наближень задач. Результати роботи належно опубліковані. Автореферат в цілому правильно і повно відображає зміст дисертації. З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота С.О.Чайченка задовольняє вимоги "Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника", результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) докторської дисертації, а її автор Станіслав Олегович Чайченко заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Професор, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії функцій і теорії
ймовірностей Львівського національного
університету імені Івана Франка О.Б.Скасків

7. 06. 2016 р.

Підпис Скасківа О.Б.
ПІДТВЕРДЖУЮ
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР
ЛЬВІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 8.06.2016 р.
секретар ради

Канцелярія