НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПРОЦАХ Наталія Петрівна

УДК 517.95

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2015

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та в Національному лісотехнічному університеті України МОН України.

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
ПТАШНИК Богдан Йосипович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
завідувач відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
КОЧУБЕЙ Анатолій Наумович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу нелінійного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАСИШЕН Степан Дмитрович,
Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут",
завідувач кафедри математичної фізики;

доктор фізико-математичних наук, професор
БОКАЛО Микола Михайлович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться **15 вересня 2015 р.** о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий **7 серпня 2015 р.**

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор Г. П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Еволюційними називають рівняння, які описують процеси, що змінюються з часом. У цих рівняннях виділено одну з незалежних змінних – час. Ультрапараболічні рівняння та гіперболічні рівняння (зокрема, третього порядку), які розглядаються в даній дисертаційній роботі, належать до еволюційних рівнянь.

Вперше ультрапараболічні рівняння були отримані А. М. Колмогоровим у 1934 році при моделюванні процесів дифузії з інерцією. Пізніше їх застосовували для опису багатьох інших явищ: фізики (теорія бінарних електролітів), біології (модель чисельності популяцій), економіки (теорія азіатських, американських та європейських опціонів, моделювання обсягу пенсій з певним законом старіння населення) та ін.

Дослідження крайових задач для лінійних ультрапараболічних рівнянь розпочинається з праць А. М. Колмогорова, А. М. Ільїна, Р. З. Хасьмінського, Л. П. Купцова, І. М. Соніна, М. С. Піскунова, Т. Г. Генчова, де для цих рівнянь побудовано фундаментальні розв'язки задачі Коші, досліджено їх гладкість і особливості, а також встановлено однозначну розв'язність у просторах неперервних функцій мішаних задач в обмежених областях. Активне вивчення мішаних задач для лінійних ультрапараболічних рівнянь розпочалося з 1984 року у працях Ш. Х. Амірова, С. А. Орлової, С. Г. Пяткова, С. А. Терсенова та ін. При цьому було узагальнено класичні рівняння А. М. Колмогорова дифузії з інерцією.

Значно менше праць присвячено нелінійним ультрапараболічним рівнянням, вивчення яких розпочинається з 1998 року. Це праці С. Г. Суворова, С. П. Лавренюка, Н. П. Процах, М. О. Оліскевич, Н. І. Гузіль, Ф. Лащіалфарі (F. Lascialfari), Д. Морбіделлі (D. Morbidelli) та ін., в яких знайдено достатні умови однозначної розв'язності мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, здебільшого, в обмежених областях. Відкритими залишалися питання:

1) існування та єдиності розв'язків мішаних задач в обмежених і необмежених областях для ультрапараболічних рівнянь зі степеневими нелінійностями в головній частині та в молодших членах, для рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині та рівнянь з немонотонною головною частиною;

2) встановлення асимптотичної поведінки розв'язків мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь при зростанні часової змінної.

У реферованій дисертаційній роботі досліджуються вказані задачі, а також, досліджено однозначну розв'язність ультрапараболічних варіаційних нерівностей та встановлено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач визначення правих частин слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь, причому дві останні задачі раніше в літературі не розглядалися.

Багато фізичних явищ (поширення збурень у пружнов'язких і в'язкопластичних стержнях, рух в'язкої стискувальної рідини, поширення звуку у в'язкому газі, крутильні коливання кругового циліндра з внутрішнім тертям, повздовжні коливання балки, процеси фільтрації рідини в пористих середовищах, передача тепла в гетерогенному середовищі та ін.) моделюються гіперболічними рівняннями третього порядку.

Встановленню однозначної розв'язності мішаних задач для лінійних та нелінійних (зі степеневими нелінійностями із сталими показниками) гіперболічних рівнянь третього порядку присвячено праці І. В. Сувейка, С. С. Войта, А. Є. Шишкова, І. П. Слєпцової, О. І. Кожанова, С. М. Глазатова, Дж. М. Грінберга (J. M. Greenberg), Р. К. Мак Камі (R. C. Mc Camy), В. Дж. Мізеля (V. J. Mizel), Ж. Андреуса (G. Andrews) та ін. У даній дисертаційній роботі розглядаються гіперболічні рівняння третього порядку зі степеневими нелінійностями із змінними показниками.

Робота присвячена дослідженню в просторах Соболєва однозначної розв'язності та властивостей узагальнених розв'язків: 1) мішаних задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку зі степеневими нелінійностями із змінними показниками; 2) задач без початкових умов та мішаних задач в обмежених і необмежених за просторовими змінними областях для нелінійних ультрапараболічних рівнянь; 3) обернених задач для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь; 4) нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та кафедри вищої математики Національного лісотехнічного університету України МОН України. Результати дисертації отримано в рамках таких держбюджетних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: "Дослідження розв'язності та побудова розв'язків некласичних крайових задач для лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними" (номер державної реєстрації 0102U000452), "Дослідження некласичних крайових задач для слабко нелінійних рівнянь із частинними похідними, нелінійних задач газодинаміки космічної плазми та руху часток у неоднорідних середовищах і полях" (номер державної реєстрації 0105U000929), "Розвиток методів дослідження ультрапараболічних рівнянь і варіаційних нерівностей та некласичних крайових задач для диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними" (номер державної реєстрації 0106U000595), "Дослідження некласичних крайових задач для рівнянь із частинними похідними та руху часток у неоднорідних середовищах і полях" (номер державної реєстрації 0107U000364), "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь” (номер державної реєстрації 0110U004817), “Розвиток методів дослідження прямих і обернених задач із некласичними умовами для еволюційних рівнянь та моделювання фізичних процесів у полях різної природи” (номер державної реєстрації 0111U009685), а також при виконанні науково-дослідних робіт: “Дослідження крайових задач для ультрапараболічних рівнянь і збурень абстрактних параболічних рівнянь, дробово-раціональних апроксимацій функцій багатьох змінних та операторів композиції на просторах аналітичних функцій” (грант НАН України для молодих вчених, номер державної реєстрації 0107U007278) та “Дослідження розв'язності мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь та властивостей їх розв'язків” (грант Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених, номер державної реєстрації 0108U009507).

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є розвинення відомих та розробка нових методів дослідження прямих та обернених задач для нелінійних еволюційних рівнянь, встановлення умов розв'язності нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей, мішаних задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку та ультрапараболічних рівнянь другого порядку в обмежених та необмежених областях, а також обернених задач для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь.

При цьому були поставлені наступні задачі:

1) встановити достатні умови однозначної розв'язності в обмежених та необмежених за просторовими змінними областях мішаних задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку з нелінійностями степеневого вигляду зі змінними показниками;
2) знайти класи нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей в обмежених і необмежених областях, для яких існують єдині узагальнені розв'язки, та отримати оцінки цих розв'язків;
3) встановити за яких умов існують єдині розв'язки мішаних задач в обмежених областях для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних;
4) знайти достатні умови існування та єдиності розв'язків мішаних задач в обмежених і необмежених областях і задачі без початкових умов для ультрапараболічних рівнянь із нелінійностями в головній частині та в молодших доданках;
5) встановити умови існування та єдиності розв'язків мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегральним доданком;
6) отримати оцінки розв'язків мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь;
7) встановити умови однозначної розв'язності обернених задач визначення правих частин слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь.

Об'єкт дослідження: мішані задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку, прямі та обернені задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, нелінійні ультрапараболічні варіаційні нерівності.

Предмет дослідження: достатні умови однозначної розв'язності в просторах Соболєва розглядуваних задач та властивості їх розв'язків.

Методи досліджень. Методи Фаедо-Гальоркіна, монотонності, компактності, регуляризації, штрафу, послідовних наближень, заміни основного простору.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі запропоновано нові підходи до дослідження розв'язності мішаних задач в обмежених та необмежених областях для нелінійних еволюційних рівнянь та ультрапараболічних варіаційних нерівностей; при цьому отримано такі нові результати:

1) встановлено умови однозначної розв'язності в узагальнених просторах Соболєва мішаних задач та задачі без початкових умов для гіперболічних рівнянь третього порядку з нелінійною головною частиною та нелінійностями в молодших членах;
2) доведено теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач та задачі без початкових умов для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з немонотонною головною частиною;
3) встановлено умови однозначної розв'язності в обмежених і необмежених областях мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь із степеневими нелінійностями зі сталими та змінними показниками в головній частині та в молодших членах; отримано оцінки розв'язку;
4) встановлено однозначну розв'язність мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегральним доданком в обмежених та необмежених областях та вивчено властивості їх розв'язків;
5) доведено теореми існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних;
6) встановлено однозначну розв'язність у просторах Соболєва варіаційних ультрапараболічних нерівностей в обмежених та необмежених областях та вивчено властивості їх розв'язків;
7) отримано умови існування та єдиності узагального розв'язку обернених задач визначення правих частин слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь та крайової умови мішаної задачі для ультрапараболічних рівнянь.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати у подальшому вивченні крайових та обернених задач для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні задач практики, що моделюються розглянутими в дисертації задачами.

Особистий внесок здобувача. Із 23 наукових праць, 14 опубліковано дисертантом одноосібно. У праці [4] науковому консультанту – Б. Й. Пташнику належить аналіз одержаних результатів, у працях [7], [8], [10], [18], [19], [21], [22] С. П. Лавренюку належить формулювання задач та аналіз результатів, із праці [23] в дисертацію включено лише результати, які належать дисертанту, у праці [18] співавторам належать оцінки величин I_4, I_5, а в праці [19] – оцінка (11).

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях і семінарах:

- Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано - Франківськ, Україна, 2003, 2013 рр.);
- Міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (Львів, Україна, 2003, 2006 рр.);
- Міжнародна наукова конференція "Шості Боголюбовські читання" (Чернівці, Україна, 2003 р.);
- Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, Україна, 2004, 2005, 2009 рр.)
- Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, Україна, 2004, 2007, 2011 рр.)
- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, Україна, 2005 р.);
- Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, Україна, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014 рр.);
- Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Rajecké Teplice, the Slovak Republic, 2006);
- International Conference on Differential Equations dedicated to the 100th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (L'viv, Ukraine, 2006);
- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, Україна, 2006 р.);
- International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Kyiv, Ukraine, 2007);
- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки і математики" (Львів, Україна, 2008, 2013 рр.);
- Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Strečno, the Slovak Republic, 2008);
- Міжнародна конференція до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (Чернівці, Україна, 2009 р.);

- Український математичний конгрес – 2009 (до 100 річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова) (Київ, Україна, 2009 р.);
- Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2010" (Львів, Україна, 2010 р.);
- Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits" (Kyiv, Ukraine, 2010);
- Third international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (L'viv, Ukraine, 2010);
- Международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (AMADE-2011), посвященная памяти профессора Анатолия Александровича Килбаса (Минск, Беларусь, 2011 г.);
- Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Terchová, the Slovak Republic, 2012);
- International conference EQUADIFF'13 (Prague, Czech Republic, 2013);
- International conference "Nonlinear partial differential equations" (Donetsk, Ukraine, 2013);
- Наукова конференція, присвячена 60-річчю кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, Україна, 2013 р.);
- науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н. В. О. Пелих; Львів, 2003 – 2014 рр.);
- загально-інститутський математичний семінар Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. М. Войтович, член-кор. НАН України Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н. В. О. Пелих, д.ф.-м.н. В. М. Петричкович; Львів, 2011, 2014 р.);
- Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України Б. Й. Пташник; Львів, 2003 – 2014 рр.);
- науковий семінар Львівського національного університету ім. Ів. Франка "Нелінійні диференціальні рівняння" (керівник: д.ф.-м.н., проф. М. М. Бокало; Львів, 2011 – 2012 рр.);
- Київський семінар з функціонального аналізу (керівники: акад. НАН України Ю. М. Березанський, чл.-кор. НАН України М. Л. Горбачук, акад. НАН України Ю. С. Самойленко; Київ, 2013, 2015 рр.) ;
- семінар відділу диференціальних рівнянь та нелінійних коливань Інституту математики НАН України під керівництвом академіка НАН України А. М. Самойленка (Київ, 2015 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 21 науковій праці в провідних закордонних та українських наукових фахових виданнях, затверджених МОН України, серед яких 11 – у фахових закордонних наукових журналах та журналах, включених до міжнародних наукометричних баз даних Scopus, і додатково висвітлені в 1 препринті (79 с.), 1 статті у збірнику наукових праць та 32 матеріалах і тезах наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 8 розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел і одного додатка та викладена на 363 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 304 с. Список використаних джерел, обсягом 39 сторінок, включає 343 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* дисертаційної роботи, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну та апробацію одержаних результатів, їх зв'язок з науковими темами, кількість публікацій та структуру дисертації.

Розділ 1 містить огляд праць за темою дисертації та опис отриманих у дисертації результатів. У *розділі 2* — подано короткий опис методики дослідження задач дисертації, наведено відомості з функціонального аналізу та теорії нелінійних диференціальних рівнянь, які використовуються при встановленні основних результатів дисертації.

У *третьому розділі* дисертації знайдено достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач в обмежених та необмежених областях для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку, які містять нелінійності степеневого вигляду, показники яких є функціями просторових змінних.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область з межею $\partial\Omega$, регулярною в сенсі Кальдерона, $O_T := \Omega \times (0,T)$, $\sigma_T := \partial\Omega \times (0,T)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$.

У *підрозділі 3.1* в обмеженій області O_T розглянуто мішану задачу

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it})_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij}(x,t)u_{x_it})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t + b_0(x,t)u = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,t), \qquad (1)$$

$$u|_{\sigma_T} = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \qquad (3)$$

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

1) : $a_i \in L^\infty(O_T)$, $\alpha_0 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \alpha_1$ для майже всіх $(x,t) \in O_T$

$(i=0,1,\dots,n)$, де α_0, α_1 – додатні сталі;

2) : $b_{ij},\ b_{ijt},\ b_0 \in L^\infty(O_T)$, $b_{ij}(x,t)=b_{ji}(x,t)\quad (i,j=1,\dots,n)$,

$$\beta_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \beta^0|\xi|^2 \text{ для майже всіх } (x,t)\in O_T$$

і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, де β_0, β^0 — додатні сталі;

3) : $c_i \in L^\infty(O_T)\quad (i=1,\dots,n)$;

4) : $p\in L^\infty(\Omega)$, $1<p_1:=\operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} p(x)\leqslant p_2:=\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} p(x)<+\infty$,

$$p_2<R(p_1)=\begin{cases}\dfrac{np_1}{n-p_1}, & \text{якщо } 1<p_1<n,\\ +\infty, & \text{якщо } n\leqslant p_1;\end{cases}$$

5) : $q\in L^\infty(\Omega)$, $1<q_1:=\operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} q(x)\leqslant q_2:=\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} q(x)<+\infty$;

6) : $d_{ij}\in L^\infty(O_T)$, $d_{ij}(x,t)=d_{ji}(x,t)\quad (i,j=1,\dots,n)$,

$$\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant d_0\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2 \text{ для майже всіх } (x,t)\in O_T$$

і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, де d_0 — додатна стала.

Узагальненим простором Лебега $L^{s(\cdot)}(\Omega)$ $(L^{s(\cdot)}(O_T))$, де $s(\cdot)$ дорівнює $p(\cdot)$ або $q(\cdot)$, називають множину функцій v таких, що $\rho_s(v,\Omega):=\int\limits_\Omega |v(x)|^{s(x)}dx<+\infty$ $(\tilde\rho_s(v,O_T) := \int\limits_{O_T}|v(x,t)|^{s(x)}dxdt < +\infty)$. *Узагальненим простором Соболєва* $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ називають множину функцій v таких, які разом зі своїми узагальненими похідними першого порядку належать до $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Простори $L^{s(\cdot)}(\Omega)$, $L^{s(\cdot)}(O_T)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ є банаховими просторами з нормами $\|v;L^{s(\cdot)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda>0 : \rho_s(v/\lambda,\Omega)\leqslant 1\}$, $\|v;L^{s(\cdot)}(O_T)\| = \inf\{\lambda>0 : \tilde\rho_s(v/\lambda,O_T)\leqslant 1\}$, $\|v;W^{1,p(\cdot)}(\Omega)\| = \|v;L^{p(\cdot)}(\Omega)\| + \sum\limits_{i=1}^n \|v_{x_i};L^{p(\cdot)}(\Omega)\|$ відповідно. Позначимо через $p'(x)$ і $q'(x)$ спряжені функції до $p(x)$ і $q(x)$ відповідно, тобто такі, що для всіх $x\in\Omega$ виконуються співвідношення: $1/p'(x)+1/p(x)=1$, $1/q'(x)+1/q(x)=1$.

Введемо простори: $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ – замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v;W^{1,p(\cdot)}(\Omega)\|$, $V_1(\Omega) := W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\cap L^{q(\cdot)}(\Omega)$, $V_2(O_T)$ – замикання простору $C^\infty([0;T];C_0^\infty(\Omega))$ за нормою $\sum\limits_{i=1}^n\|v_{x_i};L^{p(\cdot)}(O_T)\| + \|v;L^{q(\cdot)}(O_T)\|$, $V_3(O_T) := \{v : v_{x_i}\in L^{p(\cdot)}(O_T)\cap L^2(O_T)\ (i=1,\dots,n),\ v|_{\sigma_T}=0\}\cap L^{q(\cdot)}(O_T)$, $V_4(\Omega) := W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\cap L^{q(\cdot)}(\Omega)\cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Нехай $\Omega_1 := \{x\in\Omega : 1<p(x)<2\}$, $\Omega_2 := \{x\in\Omega : p(x)\geqslant 2\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $r(x)=\begin{cases}2, & \text{якщо } x\in\Omega_1,\\ p(x), & \text{якщо } x\in\Omega_2;\end{cases}$ $r'(x) := \frac{r(x)}{r(x)-1}$, $x\in\Omega$.

Означення 3.1.1. *Узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) назвемо функцію $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ таку, що $u_t \in V_3(O_T) \cap C([0,T]; (V_4(\Omega))^*)$, і справджується перша з початкових умов (3) та рівність*

$$\langle u_t(\cdot,T), v(\cdot,T)\rangle + \int\limits_{O_T} \Big[-u_t v_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_i t}|^{p(x)-2} u_{x_i t} v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t) u_{x_i t} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t) u_{x_i} v + a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2} u_t v + b_0(x,t) u v \Big]\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{O_T} \Big[f_0(x,t) v + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) v_{x_i} \Big]\, dx\, dt + \langle u_1(\cdot), v(\cdot,0)\rangle \qquad (4)$$

для всіх v таких, що $v \in V_3(O_T)$, $v_t \in L^2(O_T)$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярний добуток між $(V_4(\Omega))^*$ та $V_4(\Omega)$.

Теорема 3.1.4. *Нехай виконуються умови 1) – 6) і $f_0 \in L^{q'(\cdot)}(O_T)$, $f_i \in L^{r'(\cdot)}(O_T)$ $(i = 1,\dots,n)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).*

Теорема 3.1.5. *Нехай виконуються умови 1) – 6) та a_{i,x_i}, a_{it}, b_{ijtt}, b_{kjx_j}, c_{kt}, b_{0t}, $d_{ijt} \in L^\infty(O_T)$, f_i, $f_{it} \in L^2(O_T)$, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^{2(q(x)-1)}(\Omega)$, $(|u_{1x_j}|^{p(x)-2} u_{1x_j})_{x_j} \in L^2(\Omega)$ $(i = 0,\dots,n;\ \ k,j = 1,\dots,n)$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1) – (3) такий, що $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in V_3(O_T) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.*

Теорема 3.1.3. *Нехай виконуються умови 1) – 5) і $p_1 > 2$, $q_1 > 1$, $d_{ij} \equiv 0$, $f_0 \in L^{q'(\cdot)}(O_T)$, $f_i \in L^{p'(\cdot)}(O_T)$ $(i,j = 1,\dots,n)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) такий, що $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in V_2(O_T) \cap C([0,T]; (V_1(\Omega))^*)$.*

У *підрозділі 3.2* встановлено умови однозначної розв'язності мішаної задачі (1) – (3), коли область O_T — необмежена.

Нехай Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, яка задовольняє такі умови: а) $0 \in \Omega$; б) $\Omega = \bigcup\limits_{R>0} \Omega^R$, причому $\Omega^R = \Omega \cap B_R$ є регулярною областю в сенсі Кальдерона для всіх $R > 0$, де B_R – n-вимірна куля простору $\mathbb{R}^n$ з центром в початку координат і радіусом R; в) $\partial\Omega^R = \Upsilon_1^R \cup \Upsilon_2^R$, де $\Upsilon_1^R \in C^1$, $\Upsilon_2^R \in C^1$; $\mathrm{mes}\Upsilon_1^R \cap \Upsilon_2^R = 0$, $\mathrm{mes}\Upsilon_1^R \neq 0$, $\forall R > 0$; $\quad \partial\Omega = \bigcup\limits_{R>0} \Upsilon_1^R$.

Припустимо, що виконуються умови 1), 4)–6) та умови

7): $b_{ij} \in L^\infty(O_T)$, b_{ijt}, $b_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{O}_T)$, $b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$;

$\beta_1 \le b_0(x,t) \le \beta^1$, $\quad \beta_0|\xi|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \beta^0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in O_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, де β_0, β^0, β_1, β^1 — додатні сталі;

8): $c_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{O}_T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Позначимо: $O^R_T = \Omega^R \times (0, T)$, $\sigma^R_T = \partial\Omega^R \times (0, T)$, $V_5(O^R_T) = \{v : v, \ v_{x_i} \in C([0, T]; L^2(\Omega^R)), v_{x_it} \in L^2(O^R_T) \cap L^{p(\cdot)}(O^R_T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $v_t \in L^{q(\cdot)}(O^R_T) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $v|_{\sigma^R_T} = 0\}$, $V_6(O^R_T) = \{v : v \in L^{q(\cdot)}(O^R_T) \cap L^2(O^R_T)$, $v_t \in L^2(O^R_T)$, $v_{x_i} \in L^{p(\cdot)}(O^R_T) \cap L^2(O^R_T)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $v|_{\sigma^R_T} = 0\}$, $V_{s,\text{loc}}(\overline{O}_T) = \{v : v \in V_s(O^R_T)$ для всіх $R > 1\}$, $s = 5, 6$.

Означення 3.2.1. *Узагальненим розв'язком задачі (1) – (3) (в необмеженій області O_T) назвемо таку функцію u з простору $V_{5,loc}(\overline{O}_T) \cap C([0, T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{O_T} \Big[- u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x, t) u_{x_it} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) |u_{x_it}|^{p(x)-2} u_{x_it} v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x, t) u_{x_i} v + a_0(x, t)|u_t|^{q(x)-2} u_t v + b_0(x, t) uv -$$

$$- f_0(x, t) v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x, t) v_{x_i} \Big]\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_T} u_t(x, T) v(x, T)\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v(x, 0)\, dx = 0 \quad (5)$$

для всіх функцій $v \in V_{6,loc}(\overline{O}_T)$, які мають обмежений носій.

Теорема 3.2.1. *Нехай область O_T — необмежена, виконуються умови теореми 3.1.4 в кожній обмеженій підобласті області O_T та умови 1), 4) – 8), $p(x) \in (\frac{2n}{n+2}, 2]$ для майже всіх $x \in \Omega$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).*

У *підрозділі 3.3* в обмеженій області O_T встановлено умови однозначної розв'язності в узагальнених просторах Соболєва (теореми 3.3.1, 3.3.2) мішаної задачі для анізотропних гіперболічних рівнянь третього порядку

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x, t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij}(x, t) u_{x_it})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x, t) u_t + c(x, t) u + g(x, t)|u|^{q(x)-2} u = f(x, t), \ (x, t) \in O_T. \quad (6)$$

У *розділі 4* вивчаються мішані задачі та задачі без початкових умов для ультрапараболічних рівнянь із степеневими нелінійностями зі сталими та змінними показниками. Встановлено достатні умови однозначної розв'язності в просторах Лебега та Соболєва мішаних задач у циліндричних та нециліндричних областях, а також задачі без початкових умов у класах функцій експоненціально спадних на нескінченності, та у класах локально інтегровних функцій; отримано оцінки розв'язків таких задач.

Нехай Ω, D — обмежені області з межами $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$ відповідно, $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0, T)$. Позначимо: $G := \Omega \times D$, $Q_T := G \times (0, T)$, $Q := Q_\infty$,

$\Sigma_T := \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T := \Omega \times \partial D \times (0,T)$, ν — одинична зовнішня нормаль до поверхні S_T, S_T^1 — частина поверхні S_T, на якій $\sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0$. Припустимо, що виконується умова

(S) : існує поверхня додатної міри $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$ така, що поверхню S_T^1 можна подати у такому вигляді: $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$.

Приклади поверхонь S_T^1, які задовольняють умову (S), наведено у зауваженні 4.1.3.

Запровадимо простори: $V_7(Q_T) := \{v : \ v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),\ v_{x_i} \in L^p(Q_T),\ v_{y_j} \in L^2(Q_T)\ (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,l),\ v\big|_{\Sigma_T} = 0,\ v\big|_{S_T^1} = 0\}$, $V_8(Q_T) := \{v : v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),\ v_{x_i} \in L^p(Q_T)\ (i = 1,\dots,n),\ v\big|_{\Sigma_T} = 0\}$, $V_9(G) := \{v : v_{x_i} \in L^p(G)\ (i = 1,\dots,n),\ v\big|_{\partial\Omega\times D} = 0\}$. Позначимо через $V_9^*(G)$ простір лінійних неперервних функціоналів на $V_9(G)$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – значення функціонала з $V_9^*(G)$ на функціях з $V_9(G)$, а через числа p' та q' – такі числа, що $1/p' + 1/p = 1$, $1/q' + 1/q = 1$.

У *підрозділі 4.1* в області Q_T розглянуто мішану задачу

$$u_t+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i}+$$

$$+c(x,y,t)u+g(x,y,t,u)=f(x,y,t); \tag{7}$$

$$u|_{S_T^1} = 0; \qquad u|_{\Sigma_T} = 0; \tag{8}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G, \tag{9}$$

в якій коефіцієнти рівняння (7) задовольняють умови

9): $a_i \in L^\infty(0,T;C(\overline{G}))$, $a_i(x,y,t) \ge a_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ $(i = 1,\dots,n)$, де a_0 – додатна стала;

10): числа p та q такі, що $q \in (1,\infty)$, $p \in (1,2]$;

11): $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,y,t) \ge c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$;

12): $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$; $|g(x,y,t,\xi)| \le g^0|\xi|^{q-1}$, $g^0 > 0$, $(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi-\eta) \ge g_0|\xi-\eta|^q$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$, де $g_0 > 0$ для $q \ge 2$ і $g_0 = 0$ для $q \in (1,2)$;

13): $\lambda_i \in L^\infty(0,T;C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ $(i = 1,\dots,l)$;

14): $f \in L^2(Q_T)$;

15): $u_0 \in L^2(G)$.

Означення 4.1.1. *Узагальненим розв'язком задачі (7) – (9) назвемо функцію u з простору $V_7(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t \in L^{p'}((0,T);V_9^*(G)) + L^{r_0}(Q_T)$,* *яка задовольняє умову (9) та рівність*

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle\, dt + \int_{Q_T} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ c(x,y,t)uv + g(x,y,t,u)v - f(x,y,t)v\Bigg]\, dx\, dy\, dt = 0$$

для всіх функцій $v \in V_8(Q_T)$. *Тут* $r_0 = \min\{2, q'\}$.

Теорема 4.1.1. *Нехай коефіцієнти рівняння (7) задовольняють умови 9) – 15), (S) та*
а) a_{iy_j}, a_{ix_i}, $c_{y_j} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_j} \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in L^2(G)$, $u_{0y_i} \in L^2(G)$, $u_0\big|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0$ $(i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,l)$;
б) існує така стала g^1, *що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконується нерівність* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1|\xi|^{q-1}$ $(i = 1,\dots,l)$, *причому* $g^1 = 0$ *при* $q > 2$;
в) $f|_{S_T^1} = 0$;
г) $\frac{2(n+l)}{n+l+2} < p \le 2$;
д) $1 < q < +\infty$, $n = l = 1$; *або* $1 < q < \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, $n + l > 2$.
Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (7) – (9).

При доведенні використано методи Фаедо–Гальоркіна, спеціальної бази, монотонності та компактності.

Теорема 4.1.2. *Нехай коефіцієнти рівняння (7) задовольняють умови 9)– 15) та (S). Тоді задача (7) – (9) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Якщо в рівнянні (7) ще присутній доданок $\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}$, в якому $b_i, b_{ix_i} \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$ $(i = 1,\dots,n)$, то існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (7) – (9) при $1 < p \le 2$ (зауваження 4.1.4).

Умови однозначної розв'язності задачі (7) – (9) отримано також при $p > 2$ (якщо $n = l = 1$) та при $2 < p < \frac{2(n+l)}{n+l-2}$ (якщо $n + l > 2$) (зауваження 4.1.5).

Частковим випадком рівняння (7) є рівняння Колмогорова, яке описує випадкові рухи:

$$u_t + xu_y + a^2 u_{xx} = f(x,y,t),\quad a = \text{const},\ (x,y,t) \in (0,x_0)\times(0,y_0)\times(0,T), \tag{10}$$

а умови (8), (9) для цього рівняння мають вигляд

$$u(x,0,t) = 0 \text{ для майже всіх } (x,t) \in (0,x_0)\times(0,T), \tag{11}$$

$$u(0,y,t) = 0,\quad u(x_0,y,t) = 0 \text{ для майже всіх } (y,t) \in (0,y_0)\times(0,T), \tag{12}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \text{ для майже всіх } (x,y) \in (0,x_0)\times(0,y_0). \tag{13}$$

Зауважимо, що задачу (10), (11), (13) з крайовими умовами $u(0,y,t)=0$, $u_x(x_0,y,t)=0$ для майже всіх $(y,t)\in(0,y_0)\times(0,T)$ розглянуто у праці Ш. Х. Амірова. Задачу Коші для рівняння (10) та його узагальнень розглянуто в працях А. М. Колмогорова, Я. Й. Шатиро, Л. П. Купцова, С. Д. Івасишена, А. Н. Кочубея, С. Д. Ейдельмана, Г. П. Малицької, В. С. Дроня та ін.

У *підрозділі 4.2* встановлено оцінку узагальненого розв'язку задачі (7)–(9) у випадку, коли $f\equiv 0$.

Теорема 4.2.1. *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (7)–(9) при $p>2$ і $f\equiv 0$. Тоді*

а) якщо $\|u_0;L^2(G)\|=0$, то $\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|=0$ для довільного $t>0$;

б) якщо $\|u_0;L^2(G)\|\neq 0$ та $\operatorname*{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^{l}|\lambda_{iy_i}(x,y,t)|\leq 2\operatorname*{ess\,inf}_Q|c(x,y,t)|$, то для всіх $t>0$ виконується оцінка

$$\int_D\int_\Omega |u(x,y,t)|^2\,dx\,dy\leq\left[\frac{C_1}{t+1}\right]^{\frac{2}{p-2}},$$

де $C_1=\dfrac{C_0^{\frac{(n+2)p}{2n}}|\Omega|^{p/n}(n|G|)^{\frac{p-2}{2}}}{(p-2)a_0}$, $C_0=\max\{\frac{2(n-1)}{n};\frac{3}{2}\}$, $|G|=\operatorname{mes}G$, $|\Omega|=\operatorname{mes}\Omega$.

У випадку $1<p\leq 2$, $q>2$, $\|u_0;L^2(G)\|\neq 0$, $\operatorname*{ess\,sup}_Q\sum_{i=1}^{l}|\lambda_{iy_i}(x,y,t)|\leq 2\operatorname*{ess\,inf}_Q|c(x,y,t)|$, отримано оцінку $\int_D\int_\Omega|u(x,y,t)|^2\,dx\,dy\leq\left[\frac{C_2}{t+1}\right]^{\frac{2}{q-2}}$, де стала $C_2=|G|^{\frac{q-2}{2}}/(q-2)g_0$ (теорема 4.2.2).

З теорем 4.2.1, 4.2.2 випливає, що $\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|\to 0$ при $t\to\infty$.

У *підрозділі 4.3* встановлено умови однозначної розв'язності в узагальнених просторах Соболєва мішаної задачі та задачі без початкових умов для ультрапараболічного рівняння зі степеневими нелінійностями із змінними показниками.

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$L[u]:=u_t+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}+$$
$$+g(x,y,t)|u|^{p(x)-2}u=f(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T,\tag{14}$$
$$u|_{S_T^1}=0,\ u|_{\Sigma_T}=0,\tag{15}$$
$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in G.\tag{16}$$

Введемо простори: $V_{10}(Q_T)=\{v:\ v\in W^{1,2}(Q_T),\ v,\ v_{x_i}\in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ $(i=1,\dots,n)$, $v|_{\Sigma_T}=0$, $v|_{S_T^1}=0\}$, $V_{11}(Q_T)=\{v:\ v\in L^2(Q_T),\ v,\ v_{x_i}\in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ $(i=1,\dots,n)$, $v|_{\Sigma_T}=0\}$, $V_{k,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T):=\{v:\ v\in V_k(Q_{t_1,T})$ для всіх $t_1<T\}$, $k=10,11$, де $Q_{t_1,T}=G\times(t_1,T)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (14) виконуються такі умови:

16): $a_i \in L^\infty(Q_T)$, $a_i(x,y,t) \geqslant a_0 > 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ $(i = 1,\ldots,n)$;

17): $g \in L^\infty(Q_T)$, $g(x,y,t) \geqslant g_0 > 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

18): $\lambda_i \in C([0,T]; C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ $(i = 1,\ldots,l)$;

19): $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p_1 := \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} p(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p(x) := p_2 < +\infty$.

Означення 4.3.1. *Узагальненим розв'язком задачі (14) – (16) назвемо функцію $u \in V_{10}(Q_T)$, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_T} \Big[u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) |u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ g(x,y,t)|u|^{p(x)-2} u v\Big]\, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t) v\, dx\, dy\, dt$$

для довільної функції $v \in V_{11}(Q_T)$, та початкову умову (16).

Теорема 4.3.1. *Якщо виконуються умови 16) –19) та (S), то задача (14) – (16) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Якщо, крім того, справджуються умови: а) f, $f_{y_i} \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in W^{1,2}(G) \cap L^{p(\cdot)}(G)$, $u_{0x_i} \in L^{p(\cdot)}(G)$ $(i = 1,\ldots,n)$, $u_0|_{\partial\Omega\times D} = 0$, $u_0|_{\Gamma_1 \times D} = 0$, $f|_{S_T^1} < +\infty$; б) якщо $n+l > 2$, то $2 < p_1 < p_2 \leq \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, а якщо $n = l = 1$, то $2 < p_1 \leq p_2 < +\infty$, то існує узагальнений розв'язок задачі (14) – (16).

Тепер розглянемо в області $Q_{-\infty,T} := G \times (-\infty; T)$ задачу без початкових умов для рівняння (14) з крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_{-\infty,T}} = 0, \ u|_{S^1_{-\infty,T}} = 0, \tag{17}$$

де $\Sigma_{-\infty,T} := \partial\Omega \times D \times (-\infty, T)$, $S_{-\infty,T} := \Omega \times \partial D \times (-\infty, T)$, ν — одинична зовнішня нормаль до поверхні $S_{-\infty,T}$, $S^1_{-\infty,T}$ — частина поверхні $S_{-\infty,T}$, на якій $\sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \cos(\nu, y_i) < 0$.

Означення 4.3.2. *Сильним розв'язком задачі (14), (17) назвемо функцію $u \in V_{10,loc}(\overline{Q}_{-\infty,T}) \cap C((-\infty; T]; L^2(G))$, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) |u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ g(x,y,t)|u|^{p(x)-2} u v\Big]\, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} f(x,y,t) v\, dx\, dy\, dt$$

для всіх t_1, $t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$ і будь-яких функцій $v \in V_{11,loc}(\overline{Q}_{-\infty,T})$. Тут $Q_{t_1,t_2} = G \times (t_1, t_2)$.

Означення 4.3.3. *Слабким розв'язком задачі (14), (17) назвемо функцію u, яка є границею в просторі $V_{11,loc}(\overline{Q}_{-\infty,T}) \cap C((-\infty;T];L^2(G))$ послідовності функцій $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u^k є сильним розв'язком задачі для рівняння $L[u] = f^k(x,y,t)$ з умовами (17), де послідовність $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною до функції f у просторі $L^{p'(\cdot)}_{loc}((-\infty,T];L^{p'(\cdot)}(G))$.*

Теорема 4.3.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.3.1 в області $Q_{t_1,T}$ для довільного $t_1 < T$ та умови 16) – 19) у всій області $Q_{-\infty,T}$. Тоді існує слабкий розв'язок задачі (14), (17).*

Теорема 4.3.3. *Нехай виконуються умови 16)–18) в області $Q_{-\infty,T}$. Тоді задача (14), (17) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

У *підрозділі 4.4* встановлено умови однозначної розв'язності мішаної задачі (7) – (9) з $p = 2$ в нециліндричній області (теорема 4.4.1) та оцінки її розв'язку.

Нехай $\alpha(t)$, $t \in [0,T]$, – неперервно диференційовна функція така, що $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 0$ для всіх $t \in (0,T]$. Позначимо: $D_t := \{y : \ y = \alpha(t) \cdot z, \ z \in D\}$, $\widetilde{Q}_T := \{(x,y,t) : \ x \in \Omega, \ y \in D_t, \ 0 < t < T\}$.

В області $\widetilde{Q}_T$ для довільного $T > 0$ розглянемо мішану задачу (7)–(9) при $p = 2$ та з $\tilde{\Sigma}_T$, $\widetilde{S}^1_T$ замість Σ_T, S^1_T в умовах (8), де $\widetilde{S}_T = \{(x,y,t) : x \in \Omega, \, y \in \partial D_t, \, 0 < t < T\}$, $\widetilde{\Sigma}_T = \{(x,y,t) : x \in \partial\Omega, \ y \in D_t, \, 0 < t < T\}$, $\widetilde{S}^1_T = \{(x,y,t) \in \widetilde{S}_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\}$, $\widetilde{Q} := \widetilde{Q}_\infty$.

Теорема 4.4.2. *Нехай справджуються умови*

а) $\mu := 2 \operatorname*{ess\,inf}\limits_{\tilde{Q}} c(x,y,t) - \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tilde{Q}} \sum\limits_{i=1}^{l} |\lambda_{iy}(x,y,t)| > 0$;

б) $\int\limits_0^\infty \varphi(t) \int\limits_{D_t} \int\limits_{\Omega} (f(x,y,t))^2 \, dxdydt < +\infty$, *де функція* $\varphi \in C^1([0;\infty))$ *така, що* $\varphi(0) = 1, \ 0 \le \varphi'(t) \le k\varphi(t)$, $0 < k < \mu$;

в) $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} < +\infty$ *для* $t \in [0,T]$;

г) $\sum\limits_{i=1}^{l} \left(\lambda_i - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} y_i\right) \cos(y_i, \nu) > 0$ *на* $\Gamma_{2t} = \Gamma \backslash \Gamma_{1t}$.

Тоді існує така стала M, що для всіх $t > 0$ узагальнений розв'язок u задачі (7) – (9) в області $\tilde{Q}$ з $p = 2$, задовольняє оцінку $\int\limits_{D_t} \int\limits_{\Omega} (u(x,y,t))^2 \, dx\, dy \le \dfrac{M}{\varphi(t)}$.

За функцію $\varphi(t)$, наприклад, можна вибрати e^{kt} або $(1+t)^k$. Тоді при $t \to \infty$ функція u спадає, як e^{-kt} або $(1+t)^{-k}$.

Якщо $1 < \alpha(t) \le \overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha} = \mathrm{const}$, $\mu > 0$, $q > 2$, $f \equiv 0$, $u_0 \not\equiv 0$, то для всіх $t > 0$ для узагальненого розв'язку u задачі (7) – (9) в області $\tilde{Q}$ з $p = 2$, виконується оцінка $\int\limits_{D_t} \int\limits_{\Omega} (u(x,y,t))^2 \, dxdy \le \left[\frac{C}{t}\right]^{\frac{2}{q-2}}$, де C – стала, яка залежить тільки від коефіцієнтів задачі (7)– (9), чисел n, q та області $\tilde{Q}$ (теорема 4.4.3).

Якщо ж $f \equiv 0$ та

а) $1 < \alpha(t) \leq \overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha} = \text{const}$, $\mu < 0$, $a_0 > -C_3\mu$, де $C_3 = C_4^{2(n+2)/n}|\Omega|^{2/n}/2$, $C_4 = \max\left\{\frac{2(n-1)}{n}; \frac{3}{2}\right\}$, $|\Omega| = \text{mes}\,\Omega$, число $q > 2$;

або

б) $\mu > 0$, число $1 < q \leq 2$, то для всіх $t > 0$ виконується оцінка $\int\limits_{D_t}\int\limits_{\Omega}(u(x,y,t))^2\,dxdy \leq (\int\limits_{D}\int\limits_{\Omega}(u_0(x,y))^2\,dxdy)e^{-C_5 t}$, де стала C_5 залежить тільки від коефіцієнтів задачі (7) – (9) (теорема 4.4.4).

У *підрозділі 4.5* розглянуто задачу без початкових умов

$$u_t - \lambda(x,y,t)\,u_y - \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,y,t)\,u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)\,u_{x_i} +$$

$$+c(x,y,t)\,u + g(x,t,u) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega \times (0,y_0) \times (-\infty,T), \qquad (18)$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,y_0)\times(-\infty,T)} = 0, \qquad u(x,\,y_0,t) = 0,\; (x,t) \in \Omega \times (-\infty,T), \qquad (19)$$

де g така, що функція $(x,\,t) \to g(x,\,t,\,\xi)$ є вимірною в $\Omega \times (-\infty,T)$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, для майже всіх $(x,\,t) \in \Omega \times (-\infty,\,T)$ функція $\xi \to g(x,\,t,\,\xi)$ є неперервно диференційовною і справджує нерівності: $|g(x,\,t,\,\xi)| \leqslant g_0|\xi|^{p(x,t)-1}$, $|g_\xi(x,\,t,\,\xi)| \leqslant g_0|\xi|^{p(x,t)-2}$, $g_\xi(x,\,t,\,\xi) \geqslant 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де g_0 — додатна стала; $p \in L^\infty(\Omega\times(-\infty,T))$; $1 < p_1 = \text{ess}\inf p(x,t) \leqslant \text{ess}\sup p(x,t) = p_2 \leqslant 2$.

Встановлено умови (теорема 4.5.1) за яких існує узагальнений розв'язок задачі (18)–(19) (в сенсі означення 4.5.1) такий, що

$$\lim_{t\to-\infty}\int\limits_0^{y_0}\int\limits_{\Omega} u^2(x,y,t)e^{\mu t}dx\,dy = 0,$$

і він у цьому класі єдиний. Число μ в останній рівності визначається через коефіцієнти рівняння (18).

Р о з д і л 5 дисертаційної роботи присвячений дослідженню однозначної розв'язності мішаних задач та задачі без початкових умов для нелінійних ультрапараболічних рівнянь: 1) з виродженням на гіперплощині задання початкових даних, 2) з немонотонною головною частиною.

Зауважимо, що мішані задачі для параболічних та гіперболічних рівнянь з виродженням досліджували А. В. Біцадзе, М. М. Смірнов, С. М. Глазатов, Ф. Т. Барановский, В. М. Врагов, А. С. Калашников, С. П. Лавренюк, М. М. Бокало та ін.

Для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з виродженням мішані задачі в дисертаційній роботі розглянуто вперше.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$, регулярною в сенсі Кальдерона. Позначимо: $Q_{0,T} := \Omega \times (0,y_0) \times (0,T),\; x \in \Omega,\; y \in (0,y_0),\; t \in (0,T)$, $G := \Omega \times (0,y_0),\; Q_{s,T} := \Omega \times (0,y_0) \times (s,T)$, s дорівнює t_1 або $-\infty$.

У *підрозділі 5.1* в області $Q_{0,T}$ встановлено умови існування та єдиності функції $u \in L^p(Q_{0,T})$, $u_y \in L^2(Q_{0,T})$, $|u|^{\frac{p-2}{2}}u \in L^2(0,T;W^{1,2}(G))$ (теорема 5.1.1), яка є узагальненим розв'язком (в сенсі означення 5.1.1) мішаної задачі

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t)|u|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} = f(x,y,t),\ (x,y,t) \in Q_{0,T}, \quad (20)$$

$$u(x,y_0,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T);\ u|_{\partial\Omega\times(0,y_0)\times(0,T)} = 0, \quad (21)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ (x,y) \in \Omega \times (0,y_0). \quad (22)$$

У *підрозділі 5.2*, використовуючи метод Фаедо-Гальоркіна та метод заміни основного простору, встановлено достатні умови існування та єдиності (теореми 5.2.1, 5.2.2) слабкого розв'язку задачі (20)–(21) (в сенсі означення 5.2.1) такого, що $u \in C(-\infty;T];H) \cap V_{12,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_{-\infty,T})$, де $H := L^2(0,y_0;W^{-1,2}(\Omega))$, $V_{12,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_{-\infty,T}) = \{v:\ v \in L^2(t_1,T;H) \cap L^p(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1 < T\}$.

У *підрозділі 5.3* в області $Q_{0,T}$ розглянуто задачу

$$\varphi(t)u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \psi(t)\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}c_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+d(x,y,t)u + g(x,y,t)|u|^{p-2}u = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_{0,T}, \quad (23)$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,y_0)\times(0,T)} = 0; \qquad u(x,y_0,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad (24)$$

$$\lim_{t\to+0}\sqrt{\varphi(t)}u(x,y,t) = 0, \qquad (x,y) \in G, \quad (25)$$

де функція φ така, що $\int\limits_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} = \infty$ (тобто, рівняння (23) має сильне виродження).

Припускаємо, що $\psi \equiv 1$, а коефіцієнти рівняння (23) задовольняють такі умови:

20): $\varphi \in C([0,T])$, $\varphi(t) > 0$; $\varphi' \in C((0,T])$; $\varphi'(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$; $\varphi(0) = 0$;

21): $a_{ij} \in L^\infty(Q_{0,T})$ $(i,j = 1,\dots,n)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$ та всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, де $a_0 -$ додатна стала;

22): $\lambda \in C(\overline{Q}_{0,T})$, $\lambda_y \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \not\equiv 0$;

23): $g \in L^\infty(\overline{Q}_{0,T})$, $g(x,y,t) \geqslant g_0 > 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$;

24): $1 < p < \infty$.

Позначимо: $c_0(t) := \sup\limits_{Q_{0,t}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{|c_i(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)}$, $\quad \lambda_1(t) := \sup\limits_{Q_{0,t}} \frac{|\lambda_y(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)}$,

$$d_0(t) := \sup_{Q_{0,t}} \frac{|d(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},\ c_1(t) := \sup_{Q_{0,t}} \sum_{i=1}^{n} \frac{|c_{iy}(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)},\ d_1(t) := \sup_{Q_{0,t}} \frac{|d_y(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},$$

$$c_2(t):=\sup_{Q_{0,t}}\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_{it}(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)},\ \lambda_2(t):=\sup_{Q_{0,t}}\frac{|\lambda_t(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},\ d_2(t):=\sup_{Q_{0,t}}\frac{|d_t(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},$$

$$\nu_0:=1+\inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}\left[\lambda_1(t)+2d_0(t)+\frac{2c_0(t)}{a_0}\right],\ \nu_1:=\nu_0-2,$$

δ_i $(i=0,1,\ldots,6)$ – мале додатне число.

Припустимо, що

25): $\max\limits_{[0,T]}\{c_1(t);d_1(t)\}\leqslant\omega_1(t),\ \max\limits_{[0,T]}\{c_2(t);d_2(t);(\lambda_2(t))^2\}\leqslant\omega_2(t),$

де $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – невід'ємні монотонні неспадні на $[0,T]$ функції, а функція f задовольняє умову

26): $$\int\limits_{Q_{0,T}}\left[\frac{\omega_1(t)|f(x,y,t)|^2+|f_y(x,y,t)|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}\varphi'(t)}+\frac{|f_t(x,y,t)|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi'(t)}\right]dx\,dy\,dt<+\infty,$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{y_0}\int\limits_\Omega\frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+1+2\delta_0}}\,dxdy<+\infty,\ f(x,y_0,t)=0$ для майже всіх $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$.

Теорема 5.3.1. *Нехай виконуються умови 20) – 26) та* $g_y,\ g_t\in L^\infty(Q_{0,T})$, $c_i,\ d_i,\ \lambda_j\in L^\infty(0,T)$ $(i=0,1,2;\ j=1,2)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок* $u\in H_{0,\varphi}(Q_{0,T})\cap L^p(Q_{0,T})$ *задачі (23)–(25), де простір* $H_{0,\varphi}(Q_{0,T})$ *– замикання за нормою* $\|u;H_{0,\varphi}(Q_{0,T})\|^2=\int\limits_{Q_{0,T}}\left[\varphi(t)|u|^2+\varphi(t)|u_y|^2+\varphi(t)|u_t|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\right]dxdydt$ *множини нескінченно диференційовних функцій в* $Q_{0,T}$ *таких, що* $u|_{\partial\Omega\times(0,y_0)\times(0,T)}=0,\ u|_{y=y_0}=0$.

Теорема 5.3.2. *Нехай виконуються умови 20) – 25) та* $c_0,\ d_0,\ \lambda_1\in L^\infty([0,T])$. *Тоді задача (23)–(25) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

У випадку слабкого виродження рівняння (23) (коли $\int\limits_0^T\frac{dt}{\varphi(t)}<\infty$), задача (23), (24) з початковою умовою

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in G, \tag{26}$$

шляхом заміни $\int\limits_0^t\frac{1}{\varphi(\xi)}\,d\xi=\eta$ зводиться до мішаної задачі для рівняння без виродження, розв'язність якої випливає з результатів розділу 4.

У *підрозділі 5.4* в області $Q_{0,T}$ встановлено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі (23), (24), (26) у випадку, коли $\varphi\equiv1$, $\psi\in C([0,T]),\ \psi(t)>0,\ t\in(0,T];\ \psi(0)=0$ (теореми 5.4.1, 5.4.2).

У *р о з д і л і 6* дисертації вивчаються мішані задачі для ультрапараболічних рівнянь зі степеневими нелінійностями, які містять інтегральний доданок типу оператора пам'яті, в обмежених та необмежених за просторовими змінними областях, а саме:

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u+$$

$$+b(x)|u|^{p-2}u + \int\limits_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y,s)\,ds = f(x,y,t),\ (x,y,t)\in Q_T; \quad (27)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0; \qquad u|_{S_T^1} = 0; \quad (28)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \ \ (x,y)\in \overline{G}, \quad (29)$$

де Q_T, Σ_T, S_T^1, G визначені в розділі 4.

У *підрозділі 6.1* область Q_T – обмежена, а коефіцієнти рівняння (27) задовольняють такі умови:

27): $a_{ij}\in C(\overline{Q}_T), a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,\dots,n), \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, де $a_0>0$;

28): $b\in L^\infty(\Omega),\ b(x)\ge b_0$ для майже всіх $x\in\Omega$, де $b_0>0$;

29): $c\in L^\infty(Q_T),\ c(x,y,t)\ge c_0$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T,\ c_0\in\mathbb{R}$;

30): $g\in C([0,T])\cap L^2(0,\infty),\ \ g(t)>0,\ t\in[0;\infty)$;

31): $\lambda_i\in L^\infty(0,T;C(\overline{G})),\ \lambda_{iy_i}\ \in L^\infty(Q_T)\ (i=1,\dots,l)$;

32): $a_0 - \int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi > 0.$

Теорема 6.1.1. *Нехай виконуються умови 27)–32), (S) і, крім того:*
а) $\lambda_{kt}, c_{y_j}, c_t, a_{ijy_k}, a_{ijt}\in L^\infty(Q_T),\ f, f_t, f_{y_k}\in L^2(Q_T)\,(i,j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,l)$, $u_0\in H^1(G)\cap L^{2p-2}(G)$, $u_{0x_ix_i}\in L^2(G)\ (i=1,\dots,n)$, $u_0|_{\partial\Omega\times D}=0$, $u_0|_{\Omega\times\Gamma_1}=0$;
б) $f\big|_{S_T^1}=0$;
в) $g'\in C([0,T])$;
г) $2<p<\infty$, *якщо* $n=l=1$ *або* $2<p<\frac{2(n+l)}{n+l-2}$, *якщо* $n+l>2$.
Тоді існує узагальнений розв'язок $u\in H^1(Q_T)\cap L^p(Q_T)$ *задачі (27)–(29) (в сенсі означення 6.1.1).*

Теорема 6.1.2. *Нехай виконуються умови 27)–32), (S) і* $p>2$. *Тоді задача (27) – (29) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

У *підрозділі 6.2* за додаткових умов на поведінку ядра інтегрального доданка, отримано оцінки розв'язку задачі (27)–(29), на підставі яких передбачено асимптотичну поведінку цього розв'язку при зростанні часової змінної.

Нехай $c_1 := \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c_{y_i}|^2$, $c_2 := \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c_t|^2$, $\lambda^1 := \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\lambda_{iy_i}|$, $\lambda^2 := \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\lambda_{it}|$, $\chi_1 := 2\left(a_0 - \int\limits_0^\infty g(\xi)\,d\xi\right)$, $\chi_2 = \lambda^1 l - 2c_0 + 1 + \max\{\lambda^2\sqrt{l};\ 2c_1 l + 2c_2\}$, а C_6 – найбільша із сталих, для яких виконується нерівність Фрідріхса $\int\limits_\Omega |\zeta|^2\,dx \le \frac{1}{C_6}\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n |\zeta_{x_i}|^2\,dx$; $\mu := C_6(\chi_1 - \delta) - \chi_2$, $\delta > 0-$ досить мале число.

Теорема 6.2.1. *Нехай $\mu > 0$, виконуються всі умови теореми 6.1.1, u – узагальнений розв'язок задачі (27) – (29) при $f \equiv 0$, $a_{ij}(x,y,t) \equiv a_{ij}(x)$, $u_0 \not\equiv 0$. Тоді:*

а) якщо $g(t) \le g(0)e^{-Ct}$ для всіх $t > 0$, де C – додатна стала, то $\int\limits_G [|u|^2 + \sum\limits_{j=1}^l |u_{y_j}|^2 + |u_t|^2]\,dxdy \le \left(K\|u_0; V_{13}(G)\|^2 + \frac{M}{|\mu - 2C|}\right)e^{-\gamma t}$, де $\gamma = \min\{2C; \mu\}$, $M = \frac{1}{\delta}\int\limits_G \sum\limits_{i=1}^n |u_{0x_i}(x,y)|^2\,dxdy$, $K > 0$ залежить від l, n та коефіцієнтів рівняння (27), $V_{13}(G) = \{v :\ v \in H^1(G) \cap L^{2p-2}(G),\ v_{x_ix_i} \in L^2(G)\ (i = 1,\ldots,n),\ v|_{\partial\Omega\times D} = 0,\ v|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0\}$.

б) якщо $g(t) \le C_7(t+1)^{-m}$, $m \ge 1, C_7 > 0$, для всіх $t > 0$, то існує стала $C_8 > 0$, що виконується оцінка $\int\limits_G [|u|^2 + \sum\limits_{j=1}^l |u_{y_j}|^2 + |u_t|^2]\,dxdy \le C_8(1+t)^{-2m+1}$;

в) якщо $\lambda^1 l - 2c_0 + 1 \le 0$, то $\int\limits_G |u|^2\,dxdy \le C_9(1+t)^{-q}$, $q = \max\{2m-1; \frac{2}{p-2}\}$.

Нехай функція $g(t)$ задовольняє таку умову: $g(t) \le q(t)$ для всіх $t > 0$, де $q \in C^1(0;+\infty)$ така, що $q > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\varkappa t}(q(t))^2 = +\infty$, $\alpha := \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{q'(t)}{q(t)} > -\varkappa$. Тоді при $t \to \infty$ виконується оцінка (зауваження 6.2.1)

$$\int\limits_G [|u(x,y,t)|^2 + \sum_{j=1}^l |u_{y_j}(x,y,t)|^2 + |u_t(x,y,t)|^2]\,dxdy \le (q(t))^2.$$

У *підрозділі 6.3* в області $Q_{0,T} = \Omega \times (0, y_0) \times (0,T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — необмежена область, без додаткових припущень на зростання вихідних даних на нескінченності встановлено достатні умови розв'язності в класах локально інтегровних функцій мішаної задачі (27) – (29) при $l = 1$, коли $2 < p < \infty$, якщо $n = 1$ або $2 < p < \frac{2n+2}{n-1}$, якщо $n \ge 2$ (теорема 6.3.1). Єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі встановлено для $2 < p < \frac{2n}{n-2}$, якщо $n > 2$ і $p > 2$, якщо $n \le 2$ (теорема 6.3.2).

У *підрозділі 6.4* в обмеженій нециліндричній області $\omega_T = \{(x,y,t) :\ x \in \Omega_t,\ y \in D,\ 0 < t < T\}$, де $\Omega_t = \{x :\ x = \alpha(t)\cdot z,\ z \in \Omega\}$, $\alpha(t),\ t \in [0,T]$,– неперервно диференційовна функція, така, що $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 0$ для всіх $t \in (0,T]$, встановлено достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку u

мішаної задачі для рівняння (27) (при $c \equiv 0,\ b \equiv 0$) з умовами (28), (29) (теорема 6.4.1), а також, його оцінку: $\int\limits_D \int\limits_{\Omega_t} (u(x,y,t))^2\, dx\, dy \le e^{-\nu_0 t} \int\limits_D \int\limits_{\Omega} (u_0(x,y))^2\, dx\, dy$, де стала ν_0 залежить від коефіцієнтів рівняння (27).

У *р о з д і л і 7* встановлено умови існування і єдиності розв'язку та його оцінки для нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей другого та вищих порядків в обмежених та в необмежених за часовою змінною областях. Як наслідок, отримано умови однозначної розв'язності мішаних задач для деяких класів нелінійних ультрапараболічних рівнянь з класичними та некласичними крайовими умовами.

Гіперболічні та параболічні варіаційні нерівності вивчалися у працях Р. І. Аліханової, Р. Х. Атакішієвої, Г. Дюво, Ж.-Л. Ліонса, М. М. Бокала, С. П. Лавренюка, О. М. Бугрія, С. М. Глазатова, М. А. Ларькіна, А. Фрідмана, М. А. Херреро та ін. Нелінійні ультрапараболічні варіаційні нерівності в дисертації розглянуто вперше.

Позначимо: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$– обмежена область, $G := \Omega \times (0, y_0)$, $Q_{0,T} := G \times (0,T)$, $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, y_0) \times (0,T)$, $\Pi_T := (0, y_0) \times (0,T)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} \nu_i$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – зовнішня нормаль до Σ_T.

У *підрозділі 7.1* в обмеженій області розглянуто нелінійні ультрапараболічні варіаційні нерівності другого порядку. Нехай $W_0(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_1(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$, $W(\Omega)$ – замкнений підпростір такий, що $W_0(\Omega) \subset W(\Omega) \subset W_1(\Omega)$, простір $U(\Omega)$ є підпростором $H^1(\Omega)$ таким, що $W(\Omega)$ є щільним в $U(\Omega)$, K – опукла замкнена підмножина в $W(\Omega)$, яка містить нульовий елемент.

Означення 7.1.1. *Функцію $u \in L^2(\Pi_T; W^{1,p}(\Omega))$ таку, що $u_t \in L^2(Q_{0,T})$, $u(\cdot, y, t) \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, назвемо розв'язком варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t) u_y (v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) - \\ - f(x,y,t)(v-u) \Big]\, dx\, dy\, dt \ge 0, \tag{30}$$

якщо для всіх $\tau \in (0,T)$ вона задовольняє цю нерівність для всіх $v \in L^2(\Pi_T; W^{1,p}(\Omega))$, $v(\cdot,y,t) \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, та справджує початкову умову $u(x,y,0) = u_0(x,y)$.

Припустимо, що коефіцієнти нерівності (30) задовольняють такі умови:

33): $a_i \in C^1(\overline{Q}_{0,T})$, $a_i(x,y,t) \ge a_0 > 0$ для всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$ $(i = 1, \ldots, n)$;
34): $\lambda,\ \lambda_y \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\lambda(x,y,t) \ge 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$, $\lambda \not\equiv 0$;
35): $|\nabla_x u_0|^{p-2} u_{0x_ix_i} \in L^2(G)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 7.1.1. *Нехай виконуються умови 33) – 35) та* $p > 2$, f_y, f_t, $f \in L^2(Q_{0,T})$, $u_{0y} \in L^2(G)$, $\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \frac{(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}\,dx\,dt < +\infty$, $\lambda_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $u_0(\cdot,y) \in K$ *для майже всіх* $y \in (0,y_0)$. *Тоді існує розв'язок варіаційної нерівності (30).*

Теорема 7.1.2. *Нехай виконуються умови 33), 34) та* $p > 2$. *Тоді нерівність (30) не може мати більше одного розв'язку.*

Наведено приклади простору $W(\Omega)$ і множини K, з яких випливає, що якщо u є розв'язком варіаційної нерівності, то u є розв'язком мішаних задач для рівняння

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^n \left(a_i(x,y,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i} = f(x,y,t)$$

з класичними та некласичними крайовими умовами, а саме, $u(x,y_0,t) = 0$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, та: $u \geq 0$ на Σ_T, $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \geq 0$ на Σ_T, $u\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0$ на Σ_T (приклад 6.1.1), $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_T} = 0$ (приклад 6.1.2), $u\Big|_{\Sigma_T} = 0$ (приклад 6.1.3), $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_{2,T}} = 0$, $u\Big|_{\Sigma_{1,T}} = 0$ (приклад 6.1.4), $u\Big|_{\Sigma_T} = 0$, $u \geq 0$ (приклад 6.1.5).

У *підрозділі 7.2* в необмеженій за часовою змінною області $Q_{-\infty,T}$ встановлено умови існування та єдиності слабкого розв'язку u (в сенсі означення 7.2.2) варіаційної нерівності (30) (теореми 7.2.1, 7.2.2). Доведено (теорема 7.2.3), що якщо $\int\limits_{Q_{t,t+1}} |f(x,y,\tau)|^{p'}\,dx\,dy\,d\tau \leq M_0$ для всіх $t \in (-\infty, T-1]$, то існує така стала M, що виконуються оцінки: $\int\limits_{Q_{t,t+1}} \sum\limits_{i=1}^n |u_{x_i}(x,y,\tau)|^p\,dxdyd\tau \leq M$, $t \in (-\infty, T-1]$, $\int\limits_G |u(x,y,t)|^2\,dxdy \leq M$, $t \in (-\infty, T]$.

У *підрозділі 7.3* у обмеженій та необмеженій за часом областях, встановлено достатні умови однозначної розв'язності та оцінки слабких розв'язків (теореми 7.3.1–7.3.3) нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей високого порядку

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\leq m} a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^\alpha u(D^\gamma v - D^\gamma u) +$$
$$+ g(x,y,t,u)(v-u) - f(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geq 0, \tag{31}$$

для довільних $t_1 < t_2 \leq T$. Тут $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за (x,y,t) в $Q_{-\infty,T}$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{-\infty,T}$; $(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi - \eta) \geqslant g_0|\xi-\eta|^p$; $|g(x,y,t,\xi)| \leqslant g^0|\xi|^{p-1}$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{-\infty,T}$ і всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$; g_0, g^0 –додатні сталі, $g_\xi \in C(Q_{-\infty,T})$.

У *розділі 8* вивчено обернені задачі для ультрапараболічних рівнянь з інтегральними умовами перевизначення, а саме: 1) обернені задачі визначення невідомих множників, залежних від часових і/або просторових змінних, правих частин ультрапараболічних рівнянь з Ліпшицевими нелінійностями; 2) обернені задачі визначення невідомих функцій, розташованих у крайових умовах типу Неймана мішаної задачі для ультрапараболічних рівнянь.

Обернені задачі визначення правих частин еволюційних рівнянь вивчали О. І. Кожанов, В. Л. Камінін, А. І. Прілєпко, Д. Г. Орловский, Р. І. Сафіулова, М. І. Іванчов та ін. Обернені задачі для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь в дисертаційній роботі розглянуто вперше.

Використаємо позначення розділу 4. Введемо простори: $V_{14}(Q_T) := \{w : w, w_{x_i} \in L^2(Q_T)\ (i = 1, \dots, n),\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$; $V_{15}(Q_T) := \{w : w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T)$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, l),\ w|_{S_T^1} = 0,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$.

У *підрозділі 8.1* в області Q_T розглянуто задачу

$$L_1[u] := u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u+$$

$$+g(x,y,t,u) = f(x,y,t)f_0(t), \qquad (x,y,t) \in Q_T, \tag{32}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{33}$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0, \tag{34}$$

$$\int\limits_G K(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \qquad t \in [0,T], \tag{35}$$

де $u(x,y,t), f_0(t)$– невідомі функції.

Нехай справджуються умови

36): $f \in C([0,T]; L^2(G))$;

37): $u_0,\ u_{0,y_j} \in L^2(G)\ (j = 1, \dots, l),\ \ u_0|_{\partial\Omega\times D} = 0,\ u_0|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0$;

38): $K \in C^1(D; C^1(\overline{\Omega})),\ K\big|_{\partial\Omega\times D} = 0,\ \ K|_{\Omega\times\Gamma_2} = 0,$ де $\Gamma_2 = \partial D \backslash \Gamma_1$;

39): $E \in W^{1,2}(0,T)$;

40): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)\ (i,j = 1, \dots, n),\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, де a_0 – додатна стала;

41): $c \in L^\infty(Q_T),\ c(x,y,t) \geq c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T,\ c_0 \in \mathbb{R}$;

42): $\lambda_i \in L^\infty(0,T; C(\overline{G})),\ \lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)\ \ (i = 1, \dots, l)$;

43): функція $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$

і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, причому така, що існує додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta)|\le g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх $\xi,\,\eta\in\mathbb{R}^1$.

Якщо $f_0(t)$ – відома, то встановлено достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (32) – (34) (теореми 8.1.1, 8.1.2), знайдено умови, за яких цей розв'язок є розв'язком майже всюди (лема 8.1.1).

Означення 8.1.2. *Пару функцій $(u(x,y,t),f_0(t))$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (32)–(35), якщо $u\in V_{15}(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t\in L^2(Q_T)$, $f_0\in L^2(0,T)$, причому ці функції для всіх $v\in V_{14}(Q_T)$ задовольняють інтегральну рівність*

$$\int\limits_{Q_T}\big[u_tv+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+c(x,y,t)uv+$$
$$+g(x,y,t,u)v\big]\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_T}f(x,y,t)f_0(t)v\,dx\,dy\,dt \tag{36}$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (33) та (35).

Лема 8.1.2. Для того, щоб пара функцій $(u(x,y,t),f_0(t))$ була узагальненим розв'язком задачі (32)—(35) необхідно і достатньо, щоб для всіх $v\in V_{12}(Q_T)$ ця пара задовольняла рівність (36), а також (33) і рівність

$$[\int\limits_G K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy]f_0(t)=E'(t)+\int\limits_G\big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}+K(x,y)c(x,y,t)u+$$
$$+K(x,y)g(x,y,t,u)\big)\,dxdy,\quad t\in[0,T].$$

Теорема 8.1.3. Нехай $\int\limits_G K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy\neq 0$ для всіх $t\in[0,T]$, виконуються умови 36) – 43), (S) та $a_{ijy_k},\ a_{ijx_i},\ c_{y_k}\in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k},\ u_{0,x_i},\ a_{ijt}\in L^2(Q_T)$ $(i,j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,l)$, $f|_{S_T^1}=0$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (32)–(35) в області Q_T.

Теорема 8.1.4. Нехай $\int\limits_G K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy\neq 0$ для всіх $t\in[0,T]$ і виконуються умови 36) – 43) та (S). Тоді задача (32)–(35) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Достатні умови існування єдиного узагальненого розв'язку оберненої задачі встановлено також для рівняння високого порядку з правою частиною спеціального вигляду

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} + \sum_{|\alpha|=|\gamma|\le m_0} (-1)^{|\gamma|} D^{\gamma}(a_{\alpha\gamma}(x,y,t)D^{\alpha}u) +$$

$$+c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x,y,t)q_i(t) + f_0(x,y,t),$$

де $u(x,y,t), q_i(t)$ $(i=1,\dots,s)$– невідомі функції.

У *підрозділі 8.2* встановлено асимптотичну поведінку при $t\to\infty$ узагальненого розв'язку u задачі (32)—(35), тобто, показано, що коли $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{k}^{k+1} |E'(\tau)|^2\,d\tau=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{k}^{k+1} |g^1(t)|^2\,dt=0$, то виконуються такі збіжності: $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{k}^{k+1}\int\limits_{G}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,y,t)|^2\,dxdydt = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{k}^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt = 0$ (теорема 8.2.1), а якщо $\lim\limits_{t\to\infty}|E'(t)| = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}|g^1(t)| = 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{k}^{k+1}\int\limits_{G}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,y,t)|^2\,dxdydt = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}|f_0(t)|=0$ (теорема 8.2.2).

У *підрозділі 8.3* знайдено достатні умови існування та єдиності (теореми 8.3.1, 8.3.2) узагальненого розв'язку (в сенсі означення 8.3.1) оберненої задачі

$$L_1[u] = f(x,y,t)f_0(y) + q(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{37}$$

з умовами (33), (34) та умовою перевизначення

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} K(x,t)u(x,y,t)\,dxdt = E(y), \qquad y\in D, \tag{38}$$

де $u(x,y,t), f_0(y)$– невідомі функції, в області Q_{T_1}, де $T_1\le T_0 < T$, число T_0 визначається вихідними даними задачі (37), (33), (34), (38).

Подібні результати також встановлено для оберненої задачі з інтегральними умовами перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння, права частина якого містить три невідомі функції різних аргументів $q_1(x)$, $q_2(t)$, $q_3(y)$:

$$L_1[u]=f_1(x,y,t)q_1(x)+f_2(x,y,t)q_2(t)+f_3(x,y,t)q_3(y)+f_0(x,y,t),\ (x,y,t)\in Q_T.$$

У *підрозділі 8.4* в області Q_T розглянуто задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u = f(x,y,t), \tag{39}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{40}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_3}\right|_{\Sigma_T} = p(t)h(x,y,t) \quad (x,y,t) \in \Sigma_T; \qquad u|_{S_T^1} = 0, \tag{41}$$

$$\int\limits_G K(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \qquad t \in [0,T], \tag{42}$$

де $u(x,y,t)$, $p(t)$ – невідомі функції; $\frac{\partial u}{\partial \nu_3} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} \cos(\nu_2, x_j)$, ν_1 – одинична зовнішня нормаль до S_T, ν_2 – одинична зовнішня нормаль до Σ_T, $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu_1, y_i) < 0\}$.

Доведено (теореми 8.4.3, 8.4.4), що за умов гладкості вихідних даних задачі (39) – (42) та при $\int\limits_D \int\limits_{\partial\Omega} K(x,y)h(x,y,t)\,d\sigma\,dy \neq 0$ для всіх $t \in [0,T]$, існує єдина пара функцій $(u(x,y,t), p(t))$ така, що $u \in W^{1,2}(Q_T)$, $u|_{S_T^1} = 0$, $p \in W^{1,2}(0,T)$, $p(0) = 0$, яка є узагальненим розв'язком задачі (39)–(42) (в сенсі означення 8.4.2).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена встановленню достатніх умов однозначної розв'язності мішаних задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку, нелінійних ультрапараболічних рівнянь та варіаційних нерівностей.

У дисертації вперше отримано такі результати:

1) для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку з нелінійностями степеневого вигляду зі змінними показниками встановлено:

— достатні умови існування та єдиності розв'язків з узагальнених просторів Лебега та Соболєва мішаних задач в обмежених областях; рівняння містять нелінійності в головній частині та в молодших доданках;

— однозначну розв'язність в класах локально-інтегровних функцій мішаної задачі в необмежених за просторовими змінними областях; при цьому обмежень щодо поведінки вихідних даних чи розв'язку на нескінченності не вимагається;

2) для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з монотонною головною частиною знайдено:

— достатні умови однозначної розв'язності мішаних задач в обмежених областях для випадку, коли нелінійності рівнянь мають степеневий вигляд зі сталими та змінними показниками;
— достатні умови існування та єдиності узагальнених розв'язків та розв'язків майже всюди мішаних задач в обмежених областях для рівнянь з нелінійностями Ліпшицевого типу;
— достатні умови однозначної розв'язності в узагальнених просторах Соболєва задачі без початкових умов, коли показники степеневих нелінійностей в головній частині та в молодших членах є функціями;
— існування та єдиність узагальненого розв'язку у класах експоненціально спадних функцій на нескінченності задачі без початкових умов для рівняння з нелінійностями в молодших членах;
— умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в нециліндричних областях;
— асимптотичні оцінки розв'язків мішаних задач та задачі без початкових умов в необмежених за часовою змінною областях;

3) для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з немонотонною головною частиною отримано:
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області;
— достатні умови існування та єдиності слабкого розв'язку задачі без початкових умов;

4) для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині встановлено:
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області, коли коефіцієнт при похідній за часовою змінною від шуканої функції обертається в нуль на початковій гіперплощині;
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій області, коли коефіцієнт при других похідних за просторовими змінними від шуканої функції обертається в нуль на початковій гіперплощині;

5) для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегро-диференціальним доданком знайдено:
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в обмеженій циліндричній, нециліндричній області та в області, необмеженій за просторовими змінними;
— оцінки узагальненого розв'язку мішаної задачі та його похідних;

6) для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь з Ліпшицевими нелінійностями встановлено:

— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку оберненої задачі з невідомим множником, залежним від часової або просторової змінної, у правій частині рівняння;
— асимптотичну поведінку узагальненого розв'язку при $t \to \infty$ оберненої задачі з невідомою правою частиною;
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку оберненої задачі визначення функції з крайової умови типу Неймана;

7) для нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей другого та вищих порядків встановлено:
— достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в обмежених областях, коли задано початкову умову;
— достатні умови існування, єдиності та оцінки слабких розв'язків в необмежених за часовою змінною областях.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати у подальшому вивченні крайових та обернених задач для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні задач практики, що моделюються розглянутими в дисертації задачами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Процах Н. П. Обернена задача для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомою правою частиною / Н. П. Процах // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 3. — С. 333–348. (Переклад: Protsakh N. P. Inverse problem for a semilinear ultraparabolic equation with unknown right-hand side/ N. P. Protsakh // Ukrainian mathematical Journal. — 2014. — V. 66, №. 3. — P. 371–390).

2. Процах Н. П. Обернена задача для ультрапараболічного рівняння з невідомою функцією просторової змінної в правій частині / Н. П. Процах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т 56, № 2. — С. 20–36. (Переклад: Protsakh N. P. Inverse problem for an ultraparabolic equation with unknown function of the space variable on the right-hand side / N. P. Protsakh // J. Math. Sci. —2014.– V. 203, № 1. — P. 16–39).

3. Protsakh N. Inverse problem for ultraparabolic equation / N. Protsakh // Tatra Mt. Math. Publ. — 2013. — V. 54. — P. 133–151.

4. Процах Н. П. Смешанная задача для нелинейного ультрапараболического уравнения с интегральным слагаемым / Н. П. Процах, Б. И. Пташник // Математический журнал. — 2012. — Т. 12, № 4. — С. 95–114.

5. Protsakh N. P. Properties of solutions for mixed problem for ultraparabolic equation with the memory term / N. P. Protsakh // Український математичний вісник. — 2012. — Т. 9, № 1. — С. 98–113. (Переклад: Protsakh N. P. Properties of

a solution of the mixed problem for an ultraparabolic equation with memory term/ N. P. Protsakh // J. Math. Sci. — 2012. — V. 183, No 6. — P. 823–834).

6. Protsakh N. Mixed problem for degenerate nonlinear ultraparabolic equation / N. Protsakh // Tatra Mt. Math. Publ. — 2009. — V. 43. — P. 203–214.

7. Лавренюк С. П. Варіаційні ультрапараболічні нерівності / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 12. — С. 1616–1628. (Переклад: Lavrenyuk S. P. Variational ultraparabolic inequalities / S. P. Lavrenyuk, N. P. Protsakh // Ukrainian Mathematical Journal. — 2004. — V. 56, №12. — P. 1915–1931).

8. Лавренюк С. П. Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 9. — С. 1192–1210. (Переклад: Lavrenyuk S. P. Mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation that generalizes the diffusion equation with inertia/ S. P. Lavrenyuk, N. P. Protsakh // Ukrainian Mathematical Journal. — 2006. — V. 8, №9. — P. 1347–1368).

9. Процах Н. П. Властивості розв'язків мішаної задачі для нелінійного ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // Укр. матем. журн. — 2009. — Т. 61, № 6. — С. 795–809. (Переклад: Protsakh N. P. Properties of solutions of a mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation/ N. P. Protsakh// Ukrainian mathematical journal. — 2009. — V. 61, №6. — P. 945–963).

10. Lavrenyuk S. Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain / S. Lavrenyuk, N. Protsakh // Tatra Mt. Math. Publ. — 2007. — V. 38. — P. 131–146.

11. Процах Н. П. Задача без початкових умов для нелінійного ультрапараболічного рівняння з виродженням/ Н. П. Процах// Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 7–20. (Переклад: Protsakh N. P. A problem without initial conditions for a nonlinear ultraparabolic equation with degeneration/N. P. Protsakh // J. Math. Sci. — 2010. — V. 168, № 4. — P. 505–522).

12. Процах Н. П. Асимптотична поведінка розв'язку оберненої задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 326–335.

13. Процах Н. П. Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в нециліндричній області / Н. П. Процах // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2010. — Вип. 8. — С. 60–70.

14. Процах Н. П. Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області / Н. П. Процах // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці. ЧНУ. — 2010. — Вип. 501. — С. 74–81.

15. Процах Н. Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з виродженням / Н. Процах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2008. — Вип. 68. — С. 215–230.

16. Процах Н. П. Змішана задача для анізотропного рівняння третього порядку / Н. П. Процах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 1. — С. 40–53.

17. Процах Н. П. Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку в необмеженій за просторовими змінними області / Н. П. Процах // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці. ЧНУ. — 2006. — Вип. 314-315. — С. 143–149.

18. Доманська Г. П. Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку / Г. П. Доманська, С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці. ЧНУ. — 2005. — Вип. 269. — С. 34–42.

19. Барабаш Г. М. Задача без початкових умов для напівлінійного ультрапараболічного рівняння / Г. М. Барабаш, С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці. ЧНУ. — 2005. — Вип. 239. — С. 11–18.

20. Процах Н. Розв'язки слабко нелінійної ультрапараболічної нерівності високого порядку без початкових умов / Н. Процах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 201–217.

21. Лавренюк С. П. Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Математичні студії. — 2005. — Т. 23, № 1. — С. 57–67.

22. Лавренюк С. П. Розв'язність крайових задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах. – Л., 2008. — 79 с. (Препринт / НАН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; № 108).

23. Бугрій О. Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва / О. Бугрій, Г. Доманська, Н. Процах // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 44–61.

24. Процах Н. П. Про обернену задачу для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомою правою частиною / Н. П. Процах // XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.: матеріали конференції. — Т. І. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ, 2014. — С. 258.

25. Protsakh N. P. Direct and inverse problems for semilinear higher order ultraparabolic equation / N. P. Protsakh // International Conference EQUADIFF'13, Prague, Czech Republic, August 26-30, 2013: Book of abstr. — Prague, 2013. — P. 283.

26. Процах Н. П. Про асимптотичну поведінку розв'язків оберненої задачі для ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // Всеукраїнська конференція "Нелінійні проблеми аналізу", Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 р. : тез.

доп. — Івано-Франківськь, 2013. — С. 59.

27. Protsakh N. P. On the inverse problem for semilinear ultraparabolic equation/ N. P. Protsakh // International conference "Nonlinear partial differential equations" dedicated to the 95th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, Ukraine, 9-14 September, 2013.: Book of abstr. – Donetsk, 2013. – P. 54–55.

28. Процах Н. Про умови розв'язності оберненої задачі для ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // II Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики", Львів, 21-25 травня 2013 р. : В 3 т./ під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника.— Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 3.– С. 151-153.

29. N. Protsakh. On the inverse problem for ultraparabolic equation/ N. Protsakh // Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Terchová, the Slovak Republic, June 25-29, 2012.: Book of abstr. — Department of Mathematics, University of Žilina, 2012. — P. 39.

30. Процах Н. П. Про мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в необмеженій області / Н. П. Процах // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: матеріали конференції.— Київ, 2012. — С. 356.

31. Protsakh N. P. On mixed problem for nonlinear ultraparabolic equation with the integral term / N. P. Protsakh // 6 международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (AMADE–2011), посвященная памяти профессора Анатолия Александровича Килбаса, Минск, Беларусь, 12–17 сентября 2011 г.: тез. докл. — Минск, 2011. — С. 121.

32. Процах Н. П. Про розв'язність мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння з інтегральним доданком / Н. П. Процах // XIII міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 13–15 травня 2010 р.: матеріали конференції. — Київ, 2010. — С. 336.

33. Protsakh N. P. On behaviour of solutions of mixed problem for ultraparabolic equation / N. P. Protsakh // Humboldt Kolleg "Mathematics and life sciences: possibilities, interlacements and limits" (international interdisciplinary conference under the sponsorship of the Alexander von Humboldt Foundation and the support of the German Embassy), Kyiv, 5-8 August 2010: Book of abstr. — Kyiv, 2010. — P. 80.

34. Процах Н. П. Про мішану задачу для ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в нециліндричній області [Електронний ресурс] / Н. П. Процах // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2010", Львів, 25-26 травня 2010 р.: тез. доп. — Режим доступу: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-02-P-26.pdf

35. Процах Н. П. Про мішану задачу для ультрапараболічного рівняння з ін-

тегральним доданком / Н. П. Процах // Third international conference for young mathematicians on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Львів, 3–6 листопада, 2010 р. : тез. доп. — Донецьк, 2010. — С. 81.

36. Процах Н. П. Про мішану задачу для ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області / Н. П. Процах // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди, Чернівці, 8 -13 червня, 2009 р. : тез. доп. - Чернівці: Книги – XXI, 2009. — С. 150–151.

37. Процах Н. П. Розв'язність мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області [Електронний ресурс] / Н. П. Процах // Український математичний конгрес- 2009 (до 100 річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, 27–29 серпня 2009 р.: тез. доп. — Режим доступу: www.imath.kiev.ua/ congress2009/

38. Процах Н. Про умови розв'язності мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння з виродженням / Н. Процах // II Міжнародна наукова конференція „Сучасні проблеми механіки та математики Львів, 25-29 травня 2008 р.: тез. доп. — Т. 3, Львів, 2008. — С. 149–151.

39. Protsakh N. On mixed problem for degenerate nonlinear ultraparabolic equation / N. Protsakh // Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Strečno, the Slovak Republic, June 23–27, 2008: Book of abstr Strečno, 2008. — P. 45 – 46.

40. Процах Н. П. Розв'язність мішаної задачі для нелінійного ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.: тез. доп. — Львів, 2007. — С. 232.

41. Процах Н. П. Властивості розв'язків задачі для ультрапараболічних рівнянь в необмеженій області / Н. Процах // International conference "Dynamical system modelling and stability investigation", Kyiv, May 22-25 : тез. доп. — Київ, 2007. — С. 85.

42. Процах Н. Про мішану задачу для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку/ Н. Процах// VII міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Львів, 20-23 вересня 2006 р.: матеріали конференції. — Т. 2, Львів, 2006. — С. 229–230.

43. Процах Н. П. Розв'язність мішаної задачі для нелінійного ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // XI міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука, Київ, 18-20 травня 2006 р.: матеріали конференції. — Київ, 2006. — С. 564.

44. Protsakh N. P. On mixed problem for nonlinear hyperbolic equation of the third order in unbounded domain equation / N. Protsakh //Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", Чернівці 11–14 жовтня, 2006 р.: тез. доп. — Чернівці, 2006. — С. 196.

45. Процах Н. П. Одностороння задача без початкових умов для нелінійного ультрапараболічного рівняння / Н. П. Процах // Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського, Донецьк, 6-7 грудня 2006 р. : тез. доп. — Донецьк, 2006. — С. 107–108.

46. Lavrenyuk S. On solutions of mixed problem for nonlinear ultraparabolic equation / S. Lavrenyuk, N. Protsakh // International Conference on Differential equations dedicated to the 100th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, Lviv, September 12–17, 2006: Books of abstr. — Lviv, 2006. — P. 113–114.

47. Lavrenyuk S. On solvability of mixed problem for nonlinear ultraparabolic equation in generalized Lebesgue spaces / S. Lavrenyuk, N. Protsakh // Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Rajecké Teplice, the Slovak Republic, June 26–30, 2006.: Book of abstr. — Žilina, 2006. — P. 32–33.

48. Лавренюк С. П. Про мішану задачу для нелінійного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 6–9 червня 2005 р.: тез. доп. — Київ, 2005. — С. 52.

49. Бугрій О. М. Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку / О. М. Бугрій, Г. П. Доманська, Н. П. Процах // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, Львів, 24-27 травня 2005 р.: тез. доп. — Львів, 2005. — С. 260–261.

50. Процах Н. П. Ультрапараболічні слабко нелінійні варіаційні нерівності без початкових умов / Н. П. Процах // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача, Львів, 24-26 травня 2004 р.: тез. доп. — Львів, 2004. — С. 137–138.

51. Процах Н. Про нелінійні ультрапараболічні варіаційні нерівності в необмежених областях / Н. Процах // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.: тез. доп. — Львів, 2004. — С. 181.

52. Лавренюк С. П. Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов / С. П. Лавренюк, Н. П. Процах // III Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу Івано-Франківськ, 9-12 вересня 2003 р.: тез. доп. — Івано-Франківськ, 2003. — С. 56.

53. Лавренюк С. Про мішану задачу для одного класу ультрапараболічних рівнянь/ С. Лавренюк, Н. Процах // VI міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Львів, 26–29 травня 2003 р.: матеріали конференції. — Львів, 2003. — С. 493.

54. Lavrenyuk S. P. Mixed problem for nonlinear ultraparabolic equations in an

unbounded domain / S. P. Lavrenyuk, N. P. Protsakh // International conference "Nonlinear partial differential equations", Alushta, September 15-22.: Books of abstr. — Donetsk, 2003. — P. 117.

55. Lavrenyuk S. P. Variational ultraparabolic inequalities / S. P. Lavrenyuk, N. P. Protsakh // Міжнародна наукова конференція "Шості Боголюбовські читання", Чернівці, 26–30 серпня, 2003 р.: тез. доп., Київ, 2003. — С. 288.

АНОТАЦІЯ

Процах Н. П. *Мішані задачі для нелінійних еволюційних рівнянь та ультрапараболічні варіаційні нерівності.* — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

В роботі розглянуто нелінійні ультрапараболічні варіаційні нерівності, мішані задачі в обмежених та необмежених областях для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку та для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, обернені задачі для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь.

Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язків мішаних задач в обмежених та необмежених за просторовими змінними областях для гіперболічних рівнянь третього порядку із степеневими нелінійностями зі змінними показниками, мішаних задач в обмежених областях для ультрапараболічних рівнянь з нелінійностями в головній частині та в молодших членах, задачі без початкових умов для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, мішаних задач та задач без початкових умов для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з немонотонними головними частинами, мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, які вироджуються на гіперплощині задання початкових даних, нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегро-диференціальним оператором, обернених задач визначення функцій просторових або часової змінних правих частин слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь, нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей другого та вищих порядків з початковою умовою в обмежених областях та без початкових умов в необмеженій за часовою змінною області. Встановлено оцінки розв'язків цих задач. Наведено приклади задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з класичними та некласичними крайовими умовами, однозначна розв'язність яких випливає із результататів, отриманих для нелінійних ультрапараболічних варіаційних нерівностей.

Ключові слова: нелінійне ультрапараболічне рівняння, гіперболічне рівняння третього порядку, ультрапараболічна варіаційна нерівність, метод Фаедо-Гальоркіна, мішана задача, задача без початкових умов, обернена задача.

АННОТАЦИЯ

Процах Н. П. *Смешанные задачи для нелинейних эволюционных уравнений и ультрапараболические вариационные неравенства.*– На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

В работе рассмотрены нелинейные ультрапараболические вариационные неравенства, смешанные задачи в ограниченных и неограниченных областях для нелинейных гиперболических уравнений третьего порядка и для нелинейных ультрапараболических уравнений, обратные задачи для слабо нелинейных ультрапараболических уравнений.

Найдены достаточные условия существования и единственности решений смешанных задач в ограниченных и неограниченных по пространственным переменным областям для гиперболических уравнений третьего порядка со степенными нелинейностями с функциями пространственных переменных в показателях нелинейностей.

Установлены условия однозначной разрешимости и свойства решений смешанных задач в ограниченных областях для ультрапараболических уравнений с нелинейностями в главной части и в младших слагаемых, задачи без начальных условий для нелинейных ультрапараболических уравнений, показано, что решение смешанной задачи спадает к нулю при возрастании временной переменной, смешанных задач и задач без начальных условий для нелинейных ультрапараболических уравнений с немонотонными главными частями, смешанных задач для нелинейных ультрапараболических уравнений, вирождающихся на гиперплоскости задания начальных данных, нелинейных ультрапараболических уравнений с интегро-дифференциальным оператором, установлено ассимптотическое поведение решения при возрастании временной переменной этой задачи в зависимости от ядра интегрального оператора.

Определено обобщенное решение обратных задач определения функций пространственных или временной переменных правых частей слабо нелинейных ультрапараболических уравнений, установлено ассимптотическое поведение решения этих задач.

Найдены достаточные условия существования и единственности решений нелинейных ультрапараболических вариационных неравенств второго и высоких порядков с начальным условием в ограниченных областях и без начальных условий в неограниченной по временной переменной области. Приведены примеры задач для нелинейных ультрапараболических уравнений с классическими и неклассическими краевыми условиями, однозначная разрешимость которых следует из результатов, полученных для нелинейных ультрапараболических вариационных неравенств.

Ключевые слова: нелинейное ультрапараболическое уравнение, гиперболическое уравнение третьего порядка, ультрапараболическое вариоционное неравенство, метод Фаэдо-Гальоркина, смешанная задача, задача без начальных условий, обратная задача.

ABSTRACT

Protsakh N. P. *Initial-boundary value problems for nonlinear evolutionary equations and ultraparabolic variational inequalities.* – On the rights of manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physics and Mathematics in specialily 01.01.02 – differential equations. – Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, 2015.

The nonlinear ultraparabolic inequalities, initial-boundary value problems in a bounded or unbounded domains for nonlinear hyperbolic equations of the third order and for nonlinear ultraparabolic equations are considered in this work.

We obtain the sufficient conditions of existence and uniqueness of weak solutions for initial-boundary value problems in bounded or unbounded on spatial variables domains for nonlinear hyperbolic equations of the third order with variable exponents, for initial-boundary value problems in bounded domains for ultraparabolic equations with nonlinearities in major and minor parts of the equations, for the problem without initial conditions for nonlinear ultraparabolic equations, for initial-boundary value problems and for the problem without initial conditions for ultraparabolic equations with non-monotone major part, for nonlinear degenerate ultraparabolic equations, for ultraparabolic equations with the integro-differential operator, for the inverse problems of determination of the right-hand side for semilinear ultraparabolic equations, for nonlinear ultraparabolic variational inequalities in bounded or unbounded domains. Some estimates of solutions are found.

Key words: nonlinear ultraparabolic equation, hyperbolic equation of the third order, ultraparabolic variational inequality, Faedo-Galerkin method, initial-boudary value problem, a problem without initial conditions, inverse problem.