НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОДЕНЧУК Володимир Васильович

УДК 517.5

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
Дніпропетровський університет імені Альфреда Нобеля,
завідувач кафедри економічної кібернетики
та математичних методів в економіці;

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
НАЗАРЕНКО Микола Олексійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «21» червня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «13» травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Робота присвячена знаходженню точних значень поперечників класів 2π-періодичних функцій, що задаються за допомогою згорток із фіксованими твірними ядрами.

Актуальність теми. У 1936 році А.М. Колмогоров поставив задачу про обчислення величин вигляду

$$d_m(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_m \subset X} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in F_m} \|f - y\|_X, \tag{1}$$

де X — лінійний нормований простір, $\mathfrak{N}$ — центрально-симетрична множина, а зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X. Величина $d_m(\mathfrak{N}, X)$ отримала назву поперечника за Колмогоровим порядку m множини $\mathfrak{N}$ в просторі X. Це величина, яка показує, що дану центрально-симетричну множину $\mathfrak{N}$ не можна наблизити лінійними підпросторами розмірності m в просторі X з швидкістю, кращою за $d_m(\mathfrak{N}, X)$. Лінійний підпростір F_m^*, на якому досягається зовнішній inf у (1), називається екстремальним підпростором.

Проблема знаходження точних значень m-поперечників $d_m(\mathfrak{N}, X)$ має багату історію і привертала увагу багатьох спеціалістів з теорії наближень по всьому світу. Поряд із величинами $d_m(\mathfrak{N}, X)$ в теорії наближень також виникали і активно досліджувались інші подібні характеристики, інші поперечники (лінійні, проекційні, тригонометричні, поперечники за Бернштейном та ін.). Сам А.М. Колмогоров знайшов точні значення поперечників класів W_2^r у просторі L_2.

Особливий інтерес до поперечників функціональних класів став проявлятись, починаючи з 60-х років XX століття, коли В.М. Тихомиров, залучивши топологічні методи до задач про поперечники, обчислив точні значення колмогоровських поперечників класів диференційовних функцій W_∞^r, $r \in \mathbb{N}$, в рівномірній метриці і показав, що величини $d_{2n-1}(W_\infty^r, C)$ і $d_{2n}(W_\infty^r, C)$, $r \in \mathbb{N}$, чисельно співпадають з найкращими наближеннями тригонометричними поліномами порядку $n-1$, тобто величинами $E_n(W_\infty^r)_C = \sup_{f \in W_\infty^r} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C$, точні значення яких встановив Ж. Фавар у 1936 р. З тих пір задачі по обчисленню точних значень поперечників для різних функціональних класів у різних нормованих просторах розв'язувались у роботах В.Ф. Бабенка, О.П. Буслаєва, К.Ю. Осіпенка, С.Б. Вакарчука, М.П. Корнєйчука, О.К. Кушпеля, А.О. Лигуна, Ю.І. Маковоза, В.П. Моторного, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, А. Пінкуса, В.І. Рубана, А.С. Сердюка, О.І. Степанця, Ю.М. Субботіна, Л.В. Тайкова, В. Форста, В.Т. Шевалдіна та багатьох інших.

Найбільш повні результати щодо розв'язання задачі Колмогорова про поперечники вдавалось одержати для класів згорток з так званими CVD-ядрами (ядрами, які не збільшують осциляції). 2π-періодичне ядро K називають CVD-ядром (і записують $K \in \mathrm{CVD}$), якщо для довільної $\varphi \in C$ виконується нерівність $\nu(K * \varphi) \leqslant \nu(\varphi)$, де $\nu(\varphi)$ — число змін знаку 2π-періодичної функції φ на $[0, 2\pi)$, а $(K * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt$ — згортка функцій K і φ.

Зокрема, у 1979 році А. Пінкус для класів згорток

$$K * U_p^0 = \{f \in L_1 : f(x) = c + (K * \varphi)(x), c \in \mathbb{R}, \varphi \in U_p^0\},$$

$$U_p^0 = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leqslant 1, \varphi \perp 1\},$$

породжених неперервними CVD-ядрами K, обчислив точні значення колмогоровських поперечників $d_m(K * U_p^0, L_s)$, $m \in \mathbb{N}$, при $p = \infty$ і $1 \leqslant s \leqslant \infty$, а також при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $s = 1$.

Умова $K \in \mathrm{CVD}$ є доволі жорсткою, в міркуваннях вона фактично замінює класичну теорему Ролля і багато відомих ядер її не задовольняють. Це стосується, наприклад, спряжених ядер Бернуллі $\tilde{B}_r(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \frac{(r+1)\pi}{2})$, $r \in \mathbb{N}$, ядер Пуассона $P_q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$, $q \in (0,1)$, спряжених ядер аналітичних функцій $\tilde{H}_h(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \sin kt$, $h > 0$, та ін.

У 1980-1990-х роках О.К. Кушпель запропонував новий метод знаходження точних оцінок знизу колмогоровських поперечників у просторах C і L класів згорток, породжених ядрами, що можуть збільшувати осциляції. Цей метод базується на застосуванні апарату SK-сплайнів. Подальший розвиток даної тематики пов'язаний з роботами О.К. Кушпеля, В.Т. Шевалдіна, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, О.І. Степанця та А.С. Сердюка. Незважаючи на значне число робіт з даної тематики, деякі принципові питання щодо знаходження точних оцінок знизу колмогоровських поперечників до останнього часу залишались відкритими. Зокрема, не при всіх значеннях твірних параметрів були відомі оцінки поперечників класів згорток з ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), q \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

з ядрами Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big), q \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

та з ядрами

$$H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big), h > 0, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Розв'язанню цих відкритих проблем сучасної теорії наближення і присвячено дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079.

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є встановлення точних значень колмогоровських поперечників класів $C^q_{\beta,p} = P_{q,\beta} * U^0_p$, $C^{q,1}_{\beta,p} = N_{q,\beta} * U^0_p$ та $C^h_{\beta,p} = H_{h,\beta} * U^0_p$ при $p = 1$ та $p = \infty$ в просторах L та C відповідно.

Об'єктом дослідження є класи $C^q_{\beta,p}$, $C^{q,1}_{\beta,p}$ та $C^h_{\beta,p}$ при $p = 1, \infty$.

Предметом дослідження є колмогоровські поперечники класів $C^q_{\beta,p}$, $C^{q,1}_{\beta,p}$ та $C^h_{\beta,p}$ при $p = 1$ та $p = \infty$ в просторах L та C відповідно.

Задачі дослідження:

1. Знайти точні значення поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$ для довільних $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_q.

2. Встановити точні значення колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ для довільних $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n^*_q.

3. Отримати точні значення колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_h.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач в дисертаційній роботі використовувались загальні методи математичного аналізу, елементи теорії функцій дійсної змінної, а також методи знаходження значень колмогоровських поперечників, які запропоновані у роботах В.М. Тихомирова, М.П. Корнєйчука, О.К. Кушпеля, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, О.І. Степанця, А.С. Сердюка, В.Т. Шевалдіна та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному.

1. Одержано зображення для (ψ, β)-похідних фундаментальних SK-сплайнів, породжених ядрами $\Psi_{\beta,1}$ загального вигляду. На основі цих зображень доведено, що ядра Пуассона $P_{q,\beta}$ вигляду (2), ядра Неймана $N_{q,\beta}$ вигляду (3) та ядра аналітичних функцій $H_{h,\beta}$ вигляду (4) задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$ для усіх номерів n, починаючи з деякого натурального числа, яке конструктивно визначається через параметри відповідних ядер.

2. Встановлено оцінки знизу колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ і $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, а також $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ і $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, для усіх n, починаючи з деякого номера. Отримані оцінки збігаються з найкращими наближеннями вказаних класів тригонометричними поліномами порядку $n-1$ у відповідних метриках. В результаті знайдено точні значення поперечників зазначених класів функцій і показано, що оптимальними підпросторами для поперечників d_{2n-1} є підпростори тригонометричних поліномів порядку $n-1$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближення функцій, тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук А.С. Сердюку. Результати робіт [1-3, 5, 6] отримано спільно з науковим керівником, внесок співавторів є рівноцінним. Результати роботи [4] отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, професори І.О. Шевчук, О.О. Курченко, В.М. Радченко);

— міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження членакореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "International Conference on

Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Мерсін, 4–9 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "Современные проблемы математики, механики, информатики", присвяченій 90-річчю з дня народження професора Л.А. Толоконнікова, Тула, 16–20 вересня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— кримській міжнародній математичній конференції КММК-2013, Судак, 23 вересня – 4 жовтня 2013 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— IX-ій Літній школі "Алгебра, топологія і аналіз", Поляниця, 7–18 липня 2014 року;

— міжнародній науковій конференції "International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Баку, 8–13 вересня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у чотирнадцяти наукових публікаціях [1-14]. Шість з них [1-6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, три з яких [2, 5, 6] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз. Решту вісім опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 86 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 120 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У **першому розділі** дисертаційної роботи проведено огляд літератури за темою дослідження. У підрозділі 1.1 наведено означення класів (ψ, β)-диференційовних функцій та апроксимативних характеристик, які досліджуються у роботі. У підрозділі 1.2 наведено деякі результати з найкращих наближень розглядуваних класів тригонометричними поліномами. Основні відомі результати із обчислення колмогоровських поперечників різних класів (ψ, β)-диференційовних функцій висвітлено у підрозділі 1.3. Також окреслено деякі методи знаходження оцінок знизу колмогоровських поперечників, серед них, зокрема, розроблений О.К. Кушпелем метод, що використовує апарат SK-сплайнів, породжених ядрами, які задовольняють умову $C_{y,2n}$.

Позначимо через L_p, $1 \leqslant p < \infty$, простір 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ в p-му степені функцій f з нормою $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. При $p = 1$ простір L_p будемо позначати через L, тобто $L = L_1$.

Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

— її ряд Фур'є за тригонометричною системою, $\psi(k)$ — довільна послідовність дійсних чисел, β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f_β^ψ. Множину усіх функцій $f(x)$, які мають (ψ, β)-похідну, позначають через L_β^ψ, а підмножину усіх неперервних функцій із L_β^ψ — через C_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ ($f \in C_\beta^\psi$) і при цьому $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L, то записують, що $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ ($f \in C_\beta^\psi \mathfrak{N}$). Надалі в ролі $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини $U_1 = \{f : f \in L_1, \|f\|_1 \leqslant 1\}$ та $U_\infty = \{f : f \in C, \|f\|_\infty \leqslant 1\}$, при цьому будемо використовувати позначення $L_{\beta,1}^\psi = L_\beta^\psi U_1$ і $C_{\beta,\infty}^\psi = C_\beta^\psi U_\infty$.

Якщо послідовність $\psi(k)$ і параметр $\beta \in \mathbb{R}$ такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi_\beta \in L$, то елементи f із L_β^ψ майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = A + (\Psi_\beta * \varphi)(x) = A + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x - t)\varphi(t)dt, \qquad (5)$$

$$A \in \mathbb{R}, \varphi \in L, \varphi \perp 1,$$

в якій φ майже скрізь співпадає з f^{ψ}_{β}. Зрозуміло, що якщо при цьому $f \in C^{\psi}_{\beta}$, то рівність (5) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

У роботі розглядаються ядра $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \psi(k) > 0. \qquad (6)$$

Важливим частковим випадком ядер $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (6) при $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$, є ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ з параметрами q і β, тобто функції вигляду (2). Функції f, які допускають зображення у вигляді згортки (5) з ядром $\Psi_{\beta}(t) = P_{q,\beta}(t)$, називають інтегралами Пуассона. В цьому випадку класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, будемо позначати через $C^{q}_{\beta,p}$, а відповідні (ψ,β)-похідні f^{ψ}_{β} функції $f \in C^{q}_{\beta,p}$ при $\psi(k) = q^k$ називати (q,β)-похідними і позначати через f^{q}_{β}.

Якщо $\psi(k) = \dfrac{q^k}{k^r}$, $q \in (0,1)$, $r \in \mathbb{N}$, то класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, позначатимемо через $C^{q,r}_{\beta,p}$. При $r = 1$ класи $C^{q,r}_{\beta,p}$ є класами згорток з ядром Неймана вигляду (3).

Також в роботі розглядаються ядра $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (6) у випадку, коли $\psi(k) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} kh}$, $h > 0$, тобто функції вигляду (4). При зазначених ψ класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через $C^{h}_{\beta,p}$.

Позначимо через $\mathcal{D}_q$, $q \in [0,1)$, множину додатних послідовностей $\psi(k)$, які задовольняють умову Даламбера

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q.$$

Якщо $\psi(k) \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, то класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, складаються з 2π-періодичних функцій, які допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \ln\frac{1}{q}$ комплексної площини. Неважко переконатись, що модулі коефіцієнтів Фур'є ядер $P_{q,\beta}(t)$ та $N_{q,\beta}(t)$ задовольняють умову $\mathcal{D}_q$. Цю умову задовольняють і модулі коефіцієнтів Фур'є ядер $H_{h,\beta}(t)$ при $h = \ln\frac{1}{q}$.

Через $E_n(\mathfrak{N})_X$ позначимо найкраще наближення в просторі $X \subset L$ множини $\mathfrak{N} \subset X$ підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$, тобто величину вигляду

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_X.$$

Означення 1.1. *Сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову A_n^*, $n \in \mathbb{N}$ ($K \in A_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном T_{n-1}^* порядку $n-1$ і додатне число $\lambda \leqslant \pi/n$ таке, що для функції $\varphi_*(t) - \operatorname{sign}(K(t) - T_{n-1}^*(t))$ майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t-\lambda) = -\varphi_*(t)$.*

Означення 1.2. *Сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^*, $n \in \mathbb{N}$ ($K \in N_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном T_{n-1}^* порядку $n-1$ і точка $\xi \in [0, \pi/n)$ такі, що різниця $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi)$ у точках $t_k = \xi + k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, і тільки в них.*

Із означень 1.1 та 1.2 випливає включення $N_n^* \subset A_n^*$. Сенс умови A_n^* полягає у тому, що тригонометричний поліном T_{n-1}^*, котрий фігурує в її формулюванні, здійснює найкраще наближення в середньому ядра Ψ_β, тобто

$$E_n(\Psi_\beta)_L = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|\Psi_\beta(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1 = \|\Psi_\beta(\cdot) - T_{n-1}^*(\cdot)\|_1.$$

Задамо системи чисел

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \tag{7}$$

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1} \tag{8}$$

і побудуємо для кожної функції f із множини $\mathfrak{N} \subset L_\beta^\psi$ тригонометричний поліном $U_{n-1}(x)$ порядку $n-1$, що задається системами (7) та (8), наступним чином:

$$U_{n-1}(x) = U_{n-1}(f; x; \mu, \nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu_k(a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k(a_k \sin kt - b_k \cos kt)\right), \tag{9}$$

де a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є функції f_β^ψ. Послідовність $U_{n-1}(f; x; \mu, \nu)$ задає лінійний метод наближення функцій f із $\mathfrak{N}$, що визначається системами (7) і (8).

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}; \mu, \nu)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - U_{n-1}(f; \cdot; \mu, \nu)\|_X. \tag{10}$$

Метод наближення вигляду (9) називають найкращим для множини $\mathfrak{N}$ у метриці простору X, якщо він визначається такими системами чисел (7) і (8), для яких точна верхня межа в (10) буде найменшою серед усіх можливих.

З робіт Б. Надя та С.М. Нікольського випливає, що якщо ядро $\Psi_\beta(t)$ вигляду (6), що породжує класи $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $L^\psi_{\beta,1}$, задовольняє умову N_n^*, то лінійний метод $U_{n-1}(x)$ вигляду (9) є найкращим для класів $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $L^\psi_{\beta,1}$ при $\mu_k=\mu_k^*$, $\nu_k=\nu_k^*$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, де μ_k^* і ν_k^* означаються формулами

$$\mu_0^*=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}), \tag{11}$$

$$\mu_k^*=\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)+\psi(2n\nu+k))\cos(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}),\ k=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

$$\nu_k^*=\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)+\psi(2n\nu+k))\sin(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}),\ k=\overline{1,n-1}, \tag{13}$$

в яких $\theta_n=\theta_n(\psi,\beta)\in[0,1)$ — корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0.$$

При цьому виконуються рівності

$$E_n(C^\psi_{\beta,\infty})_C=\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C=$$
$$=E_n(L^\psi_{\beta,1})_L=\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L=\frac{1}{\pi}E_n(\Psi_\beta)_L.$$

Через $b_m(\mathfrak{N},X)$ позначимо поперечник за Бернштейном порядку m класу $\mathfrak{N}$ у просторі X, тобто величину вигляду

$$b_m(\mathfrak{N},X)=\sup_{F_{m+1}\subset X}\ \sup_{\varepsilon>0}\{\mathfrak{N}\supset\varepsilon U\cap F_{m+1}\},$$

де зовнішній sup розглядається по всіх можливих лінійних підпросторах F_{m+1} із X розмірності $m+1$, U — одинична куля простору X, а через $\lambda_m(\mathfrak{N}, X)$ — лінійний поперечник класу $\mathfrak{N}$ у просторі X, тобто величину вигляду

$$\lambda_m(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_m \subset X} \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}(X, F_m)} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - \Lambda f\|_X,$$

де $\mathcal{L}(X, F_m)$ — клас неперервних лінійних відображень, що діють із X в F_m, а зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X.

Нехай $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = 2\pi\}$ — довільне розбиття проміжку $[0, 2\pi]$ і $K(t)$ — довільна сумовна 2π-періодична функція. SK-сплайном за розбиттям Δ_{2n} будемо називати функцію вигляду

$$SK(\cdot) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k K(\cdot - x_k), \ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0, \ \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Будемо розглядати SK-сплайни у випадку, коли розбиття Δ_{2n} рівномірне, тобто коли $x_k = k\pi/n$, а в ролі функції $K(t)$ виступатиме функція

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right),$$

де $B_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin kt$ — ядро Бернуллі. Простір SK-сплайнів $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ за розбиттям Δ_{2n} позначатимемо через $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$.

Фундаментальним SK-сплайном, породженим ядром $\Psi_{\beta,1}$, називають функцію $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot) = \overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ вигляду

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k), \ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0, \ \alpha_k \in \mathbb{R},$$

що задовольняє умови

$$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, 2n-1}, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

де $y_k = x_k + y$, $x_k = k\pi/n$, $y \in [0, \dfrac{\pi}{n})$. Сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ породжує систему фундаментальних сплайнів виду $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, яка утворює базис в просторі $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$.

О.К. Кушпелем було розроблено метод знаходження оцінок знизу колмогоровських поперечників класів згорток із ядрами Ψ_β, які задовольняють умову $C_{y,2n}$.

Означення 1.4. *Кажуть, що для деякого дійсного числа y і розбиття Δ_{2n} ядро Ψ_β вигляду (6) задовольняє умову $C_{y,2n}$ (і записують $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$), якщо для цього ядра існує єдиний фундаментальний сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ і для нього виконуються рівності*

$$\operatorname{sign}(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t_k))^{\psi}_{\beta} = (-1)^k \varepsilon e_k,\ k = \overline{0, 2n-1}, \tag{14}$$

де $t_k = (x_k + x_{k+1})/2$, e_k дорівнює або 0, або 1, а ε приймає значення ± 1 і не залежить від k.

Оскільки поняття (ψ,β)-похідної ототожнює функції, що відрізняються на множині нульової міри Лебега, то, щоб уникнути неоднозначності, в рівності (14) і скрізь надалі під записом $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta}$ розуміють ту з (ψ,β)-похідних функції $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot)$, яка є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}).

Теорема 1.16 (О.К. Кушпель). *Нехай при деякому $n \in \mathbb{N}$ функція Ψ_β вигляду (6), що породжує класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$, задовольняє умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій функція $|(\Psi_\beta * \varphi_n)(t)|$ приймає максимальне значення. Тоді*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C,$$

де

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sign}\sin nt. \tag{15}$$

Наведена теорема зводить задачу про оцінки знизу поперечників класів згорток з фіксованим ядром Ψ_β до перевірки включення $\Psi_\beta \in C_{y_0,2n}$.

О.К. Кушпелем було доведено включення $\Psi_\beta \in C_{y_0,2n}$ і знайдено точні оцінки знизу поперечників $d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L)$ при $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і $\psi(k) = \varphi(k)\rho^k$, де $0 < \rho \leqslant 1/7$, а $\varphi(k)$ — довільна додатна незростаюча послідовність. Згодом дослідження у даному напрямі було продовжено у роботах В.Т. Шевалдіна, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, О.І. Степанця та А.С. Сердюка.

У **другому розділі** встановлено точні оцінки знизу поперечників за Колмогоровим $d_{2n}(C^{q}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^{q}_{\beta,1}, L)$ при довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$ і всіх натуральних n, починаючи з деякого номера n_q, який однозначно визначається при кожному конкретному заданні параметра q. Як наслідок, отримано точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників зазначених класів.

У підрозділі 2.1 одержано нове зображення для (ψ, β)–похідних фундаментальних SK-сплайнів, породжених ядрами $\Psi_{\beta,1}$ загального вигляду.

Лема 2.2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y \in [0, \frac{\pi}{n})$. *Тоді при виконанні умови*

$$|\lambda_l(y)| \neq 0,\ l = \overline{1, n},$$

де

$$\lambda_l(y) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} e^{il\nu\pi/n}\Psi_{\beta,1}(y - \frac{\nu\pi}{n}),$$

для довільного $t \in (\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n})$, $k = \overline{1, 2n}$, *справедлива рівність*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4n\psi(n)}\left(\mathcal{P}_q(t_k - y)\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{5}\gamma_m(y)\right), \quad (16)$$

в якій $t_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$, $\mathcal{P}_q(t)$ *— ядро аналітично продовжуваних в смугу функцій:*

$$\mathcal{P}_q(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos jt}{q^j + q^{-j}},\ q \in (0,1),$$

а

$$\gamma_1(y) = \gamma_1(\psi, \beta, k, y) = \frac{\psi(n)}{n}\left(\frac{z_0(y)}{|\lambda_n(y)|^2} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{z_j(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2\cos\frac{j\pi}{2n}}\right),$$

$$\gamma_2(y) = \gamma_2(\psi, \beta, y) = -\frac{R_0(y)\frac{n}{\psi(n)}}{2(2 + R_0(y)\frac{n}{\psi(n)})}\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\gamma_3(y) = \gamma_3(\psi, \beta, k, y) = 2\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1}\frac{\cos j(t_k - y)}{\frac{n}{\psi(n)}|\lambda_{n-j}(y)|\cos\frac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\gamma_4(y) = \gamma_4(\psi, \beta, k, y) = -2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\delta_j(y)\cos j(t_k - y)}{\frac{n}{\psi(n)}|\lambda_{n-j}(y)|\cos\frac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\gamma_5(y) = \gamma_5(q,\beta,k,y) = -2\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{\cos j(t_k - y)}{q^j + q^{-j}} \operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$z_j(y) = z_j(\psi,\beta,k,y) = |r_j(y)|\cos(j(t_k - y) + \arg(r_j(y)))-$$

$$-R_j(y)\cos(j(t_k - y))\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),\ j = \overline{0, n-1},$$

$$R_j(y) = R_j(\psi,\beta,y) = |\lambda_{n-j}(y)| - \frac{\psi(n-j)}{n-j} - \frac{\psi(n+j)}{n+j},\ j = \overline{0, n-1},$$

$$r_j(y) = \sum_{\nu=1}^{3} r_j^{(\nu)}(y),\ j = \overline{0, n-1},$$

$$r_j^{(1)}(y) = r_j^{(1)}(\psi,\beta,y) = \frac{\psi(3n-j)e^{i(3ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{3n-j} +$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{\psi((2m+1)n-j)e^{i((2m+1)ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{(2m+1)n-j} +\right.$$

$$\left.+\frac{\psi((2m-1)n+j)e^{-i((2m-1)ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{(2m-1)n+j}\right),$$

$$r_j^{(2)}(y) = r_j^{(2)}(\psi,\beta,y) = i\left(\frac{\psi(n+j)}{n+j} - \frac{\psi(n-j)}{n-j}\right)\cos(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$r_j^{(3)}(y) = r_j^{(3)}(\psi,\beta,y) = \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\times$$

$$\times(|\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})| - 1)\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\delta_j(y) = \delta_j(\psi,y) = \frac{n|\lambda_{n-j}(y)|\cos\frac{j\pi}{2n}}{(q^{-j}+q^j)\psi(n)} - 1,\ j = \overline{1, [\sqrt{n}]},$$

$[a]$ — *ціла частина числа* a.

У підрозділі 2.2 на основі отриманих зображень (16) доведено, що ядра Пуассона $P_{q,\beta}$ вигляду (2) задовольняють умову $C_{y_0,2n}$ для усіх номерів n, починаючи з деякого натурального числа, яке конструктивно визначається через параметр гладкості ядра і, як наслідок, знайдено точні оцінки знизу поперечників класів згорток із такими ядрами.

Для кожного фіксованого $q \in (0,1)$ позначимо через n_q найменший з номерів $n \geqslant 9$, для яких виконується нерівність

$$\frac{43}{10(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \qquad (17)$$

Теорема 2.1. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів $n \geqslant n_q$ мають місце оцінки*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C,$$

де φ_n означена рівністю (15).

В підрозділі 2.3 записано точні значення та асимптотичні рівності для колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників класів $C^q_{\beta,\infty}$ та $C^q_{\beta,1}$ в просторах C і L. Також показано, що ядра Пуассона при певних значеннях параметрів β та q можуть збільшувати осциляції, а тому встановлені у розділі оцінки неможливо отримати, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом для CVD-ядер.

Теорема 2.2. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n_q$, де n_q — найменший з номерів $n \geqslant 9$, для яких виконується умова* (17), *мають місце наступні рівності:*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0, \qquad (18)$$

а φ_n означена рівністю (15).

Зокрема, при $n \geqslant n_q$ і $\beta \in \mathbb{Z}$ виконуються рівності

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} q^n, \ \beta = 2k, \ k \in \mathbb{Z};$$

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+q^n}{1-q^n}, \ \beta = 2k-1, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо

$$n_{q,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q \in (0, 0{,}2] \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0, 0{,}196881] \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ n_q, & \text{якщо } q \in (0{,}2, 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0{,}196881, 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теорема 2.4. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|,$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (18), *а μ^* і ν^* означаються рівностями* (11)-(13) *при $\psi(k) = q^k$.*

У **третьому розділі** розв'язується задача про знаходження точних значень поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ для усіх $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ та натуральних n, більших від деякого номера, залежного лише від q.

У підрозділі 3.1 показано, що ядра Неймана $N_{q,\beta}$ вигляду (3) задовольняють умову $C_{y_0,2n}$ для усіх номерів n, починаючи з деякого натурального числа n^*_q.

Для кожного фіксованого $q \in (0,1)$ позначимо через n^*_q найменший з номерів $n \geqslant 2$, для яких виконуються нерівності

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} \leqslant \min\{\frac{2q^{\sqrt{n}}}{15n^2}, \frac{8}{3n^2}\left(\frac{2n-1}{7(n-1)^2} - \frac{\pi^2}{8n^2}\right)\},$$

$$\frac{24}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}}+\frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\ \frac{q}{(1-q)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}.$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $q\in(0,1)$. Тоді для довільного $\beta\in\mathbb{R}$ і всіх номерів $n\geqslant n_q^*$ виконуються нерівності*

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)\geqslant\|N_{q,\beta}*\varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)\geqslant\|N_{q,\beta}*\varphi_n\|_C.$$

В підрозділі 3.2 записано точні та асимптотично точні оцінки колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників класів $C^{q,1}_{\beta,\infty}$ та $C^{q,1}_{\beta,1}$. Також показано, що встановлені у розділі оцінки неможливо отримати, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом для CVD-ядер, оскільки ядра Неймана при певних значеннях параметрів β та q можуть збільшувати осциляції.

Позначимо

$$n^*_{q,\beta}=\begin{cases}1, \text{ якщо } q\in(0,\ 0{,}2] \text{ і } \beta\in\mathbb{Z} \text{ або } q\in(0,\ 0{,}193864] \text{ і } \beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\\ n_q^*, \text{якщо } q\in(0{,}2,\ 1) \text{ і } \beta\in\mathbb{Z} \text{ або } q\in(0{,}193864,\ 1) \text{ і } \beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$$

Теорема 3.3. *Нехай $q\in(0,1)$ і $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді для довільного $\beta\in\mathbb{R}$ та усіх номерів $n\geqslant n^*_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)=d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)=b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)=\lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)=$$

$$=\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)=d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)=b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)=\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)=$$

$$=E_n(C^{q,1}_{\beta,\infty})_C=\mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C=E_n(C^{q,1}_{\beta,1})_L=\mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L=$$

$$=\|N_{q,\beta}*\varphi_n\|_C=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

де $\theta_n=\theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{2\nu n}}{2\nu+1}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0,$$

а μ^* і ν^* означаються рівностями (11)-(13) *при* $\psi(k) = \frac{q^k}{k}$.

Четвертий розділ дисертації присвячено знаходженню точних значень поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх натуральних n, більших від деякого номера, залежного лише від параметра h.

У підрозділі 4.1 знайдено найкраще наближення класів $C^h_{\beta,\infty}$ та $C^h_{\beta,1}$ тригонометричними поліномами в просторах C і L для всіх номерів n, починаючи з деякого номера n^*_h.

Для кожного фіксованого $h > 0$ покладемо

$$n^*_h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h \geqslant \ln \frac{10}{3}, \\ n^{**}_h, & \text{якщо } 0 < h < \ln \frac{10}{3}, \end{cases}$$

де n^{**}_h — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$(1 - e^{-h})^2 \geqslant \frac{5 + 3e^{-2h}}{1 - e^{-2h}} \frac{\left(\frac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}} + (2 + e^{-2nh})e^{-2nh}.$$

Має місце твердження.

Теорема 4.1. *Нехай $h > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n^*_h$, має місце включення $H_{h,\beta} \in N^*_n$ та виконуються рівності*

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)\,\mathrm{ch}((2\nu+1)nh)} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|,$$

в яких $\varphi_n(t)$ — функція вигляду (15), *а $\theta_n = \theta_n(h, \beta)$ — єдиний на $[0, 1)$ корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}((2\nu+1)nh)} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \qquad (19)$$

У підрозділі 4.2 доведено, що ядра аналітичних функцій $H_{h,\beta}$ вигляду (4) задовольняють умову $C_{y,2n}$ для усіх номерів n, починаючи з деякого номера і, як наслідок, знайдено оцінки знизу поперечників класів $C^h_{\beta,\infty}$ та $C^h_{\beta,1}$ в просторах C і L.

Для кожного фіксованого $h > 0$ через n_h будемо позначати найменший з номерів $n \geqslant 9$, для якого виконується нерівність

$$\frac{37}{5(1-e^{-h})}e^{-h\sqrt{n}} + \frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1-e^{-h})\operatorname{ch} h}\right)\left(\frac{1-e^{-h}}{1+e^{-h}}\right)^{\frac{4}{1-e^{-2h}}}$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються нерівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) \geqslant \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C.$$

У підрозділі 4.3 знайдено точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників класів $C^h_{\beta,\infty}$ та $C^h_{\beta,1}$. Показано, що ядра $H_{h,\beta}$ при певних значеннях параметрів β та h можуть збільшувати осциляції, а тому встановлені у розділі оцінки неможливо отримати, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом для класів згорток із ядрами, що не збільшують осциляції.

Теорема 4.4. *Нехай $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\right|,$$

де $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (19), *а μ^* і ν^* означаються рівностями* (11)-(13) *при $\psi(k) = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}$.*

Висновки

1. Доведено, що ядро Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ при $q \in (0,1)$ та $\beta \in \mathbb{R}$ задовольняє умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_q, залежного лише від q. Як наслідок, для всіх $n \geqslant n_q$ встановлено оцінки знизу колмогоровських поперечників у просторі C (L) класів інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,\infty}$ $(C^q_{\beta,1})$. Отримані оцінки співпали з найкращими наближеннями зазначених класів тригонометричними поліномами у просторі C (L). У результаті знайдено точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників класів інтегралів Пуассона і показано, що підпростори тригонометричних поліномів порядку $n-1$ є оптимальними підпросторами для поперечників розмірності $2n-1$.

2. Встановлено включення $N_{q,\beta}(t) \in C_{y,2n}$ і знайдено точні оцінки знизу колмогоровських n-поперечників у просторах C і L класів $C^{q,1}_{\beta,\infty}$ і $C^{q,1}_{\beta,1}$ при $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, для усіх натуральних n, більших від деякого номера, залежного лише від q. Як наслідок, обчислено точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників зазначених класів.

3. Показано, що ядра $H_{h,\beta}(t)$ при $h > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ задовольняють умову Надя N^*_n, а також умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_h, який виражається через параметр h гладкості ядра. У результаті для всіх $n \geqslant n_h$ отримано точні оцінки колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників класів $C^h_{\beta,\infty}$ $(C^h_{\beta,1})$ у просторі C (L).

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Сердюк А.С. Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Доп. НАН України. — 2013. — № 5. — С. 31–36.

2. Serdyuk A.S. Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals / A.S. Serdyuk, V.V. Bodenchuk // Journal of Approximation Theory. — 2013. — Т. 173, № 9. — P. 89–109.

3. Сердюк А.С. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — Т. 10, № 1. — С. 204–221.

4. Боденчук В.В. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів згорток з ядром Неймана / В.В. Боденчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН Укра-

їни. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. — Т. 11, № 1. — С. 7–34.

5. Боденчук В.В. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. I / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 6. — С. 719–738.

6. Боденчук В.В. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. II / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1011–1018.

7. Сердюк А.С. Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2012 р., Кам'янець-Подільський, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2012. — С. 94-95.

8. Bodenchuk V.V. Estimates of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals in a uniform and integral metrics / V.V. Bodenchuk, A.S. Serdyuk // "International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", 4–9 September, 2012, Mersin, Turkey: Abstracts. — Mersin, 2012. — P. 31–32.

9. Боденчук В.В. Оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій в метриках просторів C та L / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Севастополь, 23–30 червня 2013 р.: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 218–219.

10. Сердюк А.С. О точных значениях колмогоровских поперечников классов сверток с ядром Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г.: Материалы конференции. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. — С. 111–112.

11. Сердюк А.С. Точні значення поперечників за Колмогоровим класів згорток з ядром Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Крымская международная математическая конференция КММК-2013, Судак, 22 сентября – 4 октября 2013 г.: Сборник тезисов. Т. 1. — Судак: 2013. — С. 78–79.

12. Сердюк А.С. Точні значення колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р.: Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. — С. 182–183.

13. Боденчук В.В. Оцінки поперечників за Колмогоровим класів згорток з ядром Неймана / В.В. Боденчук // IX-а Літня школа "Алгебра, топологія і аналіз", Поляниця, 7–18 липня 2014 р.: Тези лекцій і доповідей. — Івано-Франківськ: 2014. — С. 17–18.

14. Serdyuk A.S. Estimates for Kolmogorov widths of some classes of analytic functions / A.S. Serdyuk, V.V. Bodenchuk // "International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", 8–13 September, 2015, Baku, Azerbaijan: Abstracts. — Baku, 2015. — P. 153–154.

Анотації

Боденчук В.В. Оцінки поперечників класів (ψ, β)-диференційовних функцій. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертації досліджуються поперечники класів згорток з ядрами Пуассона, класів згорток з ядрами Неймана та з ядрами аналітичних функцій.

Встановлено, що ядра Пуассона $P_{q,\beta}$, ядра Неймана $N_{q,\beta}$ та ядра аналітичних функцій $H_{h,\beta}$ задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера, який залежить лише від параметрів гладкості ядер. У результаті для всіх вказаних n отримано точні оцінки знизу колмогоровських поперечників класів згорток із зазначеними ядрами.

Знайдені оцінки співпали з найкращими рівномірними наближеннями класів тригонометричними поліномами. Як наслідок, обчислено точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників розглянутих класів функцій.

Ключові слова: колмогоровський поперечник, бернштейнівський поперечник, лінійний поперечник, ядро Пуассона, ядро Неймана, найкраще наближення, найкращий лінійний метод, оптимальний підпростір, клас згорток, SK-сплайн.

Боденчук В.В. Оценки поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации исследуются поперечники классов сверток с ядрами Пуассона, классов сверток с ядрами Неймана и с ядрами аналитических функций.

Установлено, что ядра Пуассона $P_{q,\beta}$, ядра Неймана $N_{q,\beta}$ и ядра аналитических функций $H_{h,\beta}$ удовлетворяют введенному А.К. Кушпелем условию $C_{y,2n}$, начиная с некоторого номера, зависящего только от параметров гладкости ядер. В результате для всех указанных n получены точные оценки снизу колмогоровских поперечников классов сверток с указанными ядрами.

Полученные оценки совпали с наилучшими равномерными приближениями классов тригонометрическими полиномами. В итоге, вычислены точные значения колмогоровских, бернштейновских и линейных поперечников рассмотренных классов функций.

Ключевые слова: колмогоровский поперечник, бернштейновский поперечник, линейный поперечник, ядро Пуассона, ядро Неймана, наилучшее приближение, наилучший линейный метод, оптимальное подпространство, класс сверток, SK-сплайн.

Bodenchuk V.V. Estimates of widths of classes of (ψ, β)-differentiable functions. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

Widths of classes of convolutions with Poisson kernels, classes of convolutions with Neumann kernels and with kernels of analytic functions are investigated in the thesis.

We prove that the Poisson kernels $P_{q,\beta}$, Neumann kernels $N_{q,\beta}$ and kernels of analytic functions $H_{h,\beta}$ satisfies Kushpel's condition $C_{y,2n}$, beginning with some number which only depends on parameters of smoothness of kernels. As a result, for all specified n we obtain exact lower bounds for Kolmogorov widths of classes of convolutions with mentioned kernels.

The obtained estimates coincide with the best uniform approximations by trigonometric polynomials. As a result, we calculated exact values for Kolmogorov, Bernstein and linear widths of considered classes of functions.

Let's write some of results of the work.

Theorem 2.2. *Let $q \in (0,1)$. Then for any $\beta \in \mathbb{R}$ and all numbers $n \geqslant n_q$ (where n_q is the smallest number $n \geqslant 9$, for which condition*

$$\frac{43}{10(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}$$

is satisfied) the following equalities take place:

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

where $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — is the unique on $[0,1)$ root of equation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0$$

and

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sign} \sin nt.$$

In particular, whenever $n \geqslant n_q$ and $\beta \in \mathbb{Z}$, the following equalities are satisfied:

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} q^n, \ \beta = 2k, \ k \in \mathbb{Z};$$

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+q^n}{1-q^n}, \ \beta = 2k-1, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Key words: Kolmogorov width, Bernstein width, linear width, Poisson kernel, Neumann kernel, the best approximation, the best linear method, the optimal subspace, class of convolutions, SK-spline.