НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БОДЕНЧУК Володимир Васильович

УДК 517.5

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович
доктор фізико–математичних наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Базові позначення

$\forall$ — квантор загальності: «для всіх»;

$\exists$ — квантор існування: «існує»;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$x \in A$ — елемент x належить множині A;

$A \cap B$ — перетин множин A і B;

$A \subset B$ — множина A міститься в множині B;

$A \setminus B$ — різниця множин A і B;

$:=$ — дорівнює за означенням;

$\sup\limits_{x \in A} F(x)$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині A;

$\inf\limits_{x \in A} F(x)$ — точна нижня межа значень функціонала F на множині A;

$\operatorname{ess\,sup}$ — істотна точна верхня межа;

$f \perp 1$ для $f \in L_1$ означає, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$;

$\{x : \ S\}$ — сукупність елементів x, які мають властивість S;

$\operatorname{sign} \alpha$ — величина, яка дорівнює 1 якщо $\alpha > 0$, дорівнює -1 якщо $\alpha < 0$, і нулю якщо $\alpha = 0$;

$[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α;

$\|f\|_X$ — норма функції f в просторі X;

$[a, b]$ — сегмент числової прямої;

(a, b) — інтервал числової прямої;

$[a, b)$ — півінтервал числової прямої;

U_p — одинична куля в просторі L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

$\operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа z;

$\operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа z.

Функції та функціонали

$a_k = a_k(f), b_k = b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f;

$(h * g)(x)$ — згортка функцій f і g: $(h * g)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)g(t)dt$;

$f^{(r)}$ — r–та похідна функції f;

f_β^r — (r,β)–похідна в сенсі Вейля–Надя функції f;

f_β^ψ — (ψ,β)–похідна функції f;

$B_1(t)$ — ядро Бернуллі: $B_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}\sin kt$;

$P_{q,\beta}(t)$ — ядра Пуассона: $P_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), 0 < q < 1, \beta \in \mathbb{R}$;

$N_{q,\beta}(t)$ — ядра Неймана: $N_{q,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), 0 < q < 1, \beta \in \mathbb{R}$;

$H_{h,\beta}(t)$ — ядра аналітичних функцій:

$$H_{h,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ h > 0,\ \beta \in \mathbb{R};$$

$\mathcal{P}_q(t)$ — ядра аналітичних функцій: $\mathcal{P}_q(t) = \frac{1}{2} + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{q^k + q^{-k}},\ 0 < q < 1$;

$\Psi_\beta(t)$ — ядра вигляду: $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),\ \psi(k) \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$;

$\Psi_{\beta,1}(t)$ — функції вигляду:

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right);$$

t_{n-1} — тригонометричний поліном порядку $n-1$:

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), a_k, b_k \in \mathbb{R};$$

$S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ — SK-сплайн, породжений ядром $\Psi_{\beta,1}(t)$, за розбиттям $\Delta_{2n} = \{x_k\}_{k=1}^{2n}$, тобто функція вигляду: $S\Psi_{\beta,1}(\cdot) = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{2n} \alpha_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k)$, $\sum\limits_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0,\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ x_k = \frac{k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, 2n$;

$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot)$ — фундаментальний SK-сплайн, породжений ядром $\Psi_{\beta,1}$;

$\operatorname{dn} u$ — дельта амплітуди, еліптична функція Якобі.

Лінійні нормовні простори

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L_p — простір 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ у p-му степені функцій з нормою

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \ p \in [1, \infty);$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій з нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — простір тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$;

$S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$ — простір SK-сплайнів $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ за розбиттям $\Delta_{2n} = \{x_k = \frac{k\pi}{n}\}_{k=1}^{2n}$.

Апроксимаційні характеристики

$E_n(\mathfrak{N})_X$ — найкраще наближення множини $\mathfrak{N} \subset X$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$ у метриці простору X;

$d_m(\mathfrak{N}, X)$ — поперечник за Колмогоровим порядку m множини $\mathfrak{N} \subset X$ у просторі X;

$b_m(\mathfrak{N}, X)$ — поперечник за Бернштейном порядку m множини $\mathfrak{N} \subset X$ у просторі X;

$\lambda_m(\mathfrak{N}, X)$ — лінійний поперечник порядку m множини $\mathfrak{N} \subset X$ у просторі X.

Функціональні класи

W^r_p — класи вигляду: $W^r_p = \{f \in C: \ ||f^{(r)}||_p \leq 1\}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$;

$W^r_{\beta,p}$ — класи Вейля–Надя: $W^r_{\beta,p} = \{f \in L_1: \ ||f^r_\beta||_p \leq 1\}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$;

$C^q_{\beta,p}$ — клас неперервних 2π-періодичних функцій, що зображуються у вигляді згортки функцій $\varphi \in U_p$ з ядром Пуассона $P_{q,\beta}$;

$C^{q,1}_{\beta,p}$ — клас неперервних 2π-періодичних функцій, що зображуються у вигляді згортки функцій $\varphi \in U_p$ з ядром Неймана $N_{q,\beta}$;

$C^h_{\beta,p}$ — клас неперервних 2π-періодичних функцій, що зображуються у вигляді згортки функцій $\varphi \in U_p$ з ядром $H_{h,\beta}$;

$L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ — класи вигляду: $L^\psi_\beta\mathfrak{N} \ = \{f \in L_1: \ f^\psi_\beta \in \mathfrak{N}\}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$;

$C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ — класи функцій вигляду: $C^\psi_\beta\mathfrak{N} = L^\psi_\beta\mathfrak{N} \bigcap C$;

A^h — класи функцій із C, які допускають аналітичне продовження у смугу $\{z = x + iy: \ -h < y < h\}$ і таких, що $\| \operatorname{Re} f(\cdot + iy)\|_\infty \leqslant 1$, $|y| < h$;

H^ρ — класи функцій із C, які допускають зображення у вигляді $f(x) = u(\rho, x)$, $\rho < 1$, де функція $u(\rho, x)$, $0 \leqslant \rho < 1$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ гармонічна в одиничному крузі з центром у початку координат та задовольняє нерівність $|u(\rho, x)| \leqslant 1$.

ВСТУП

Робота присвячена знаходженню точних значень поперечників класів 2π-періодичних функцій, що задаються за допомогою згорток із фіксованими твірними ядрами.

Актуальність теми. У 1936 році А.М. Колмогоров поставив задачу про обчислення величин вигляду

$$d_m(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_m \subset X} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in F_m} \|f - y\|_X, \tag{В.1}$$

де X — лінійний нормований простір, $\mathfrak{N}$ — центрально-симетрична множина, а зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X. Величина $d_m(\mathfrak{N}, X)$ отримала назву поперечника за Колмогоровим порядку m множини $\mathfrak{N}$ в просторі X. Це величина, яка показує, що дану центрально-симетричну множину $\mathfrak{N}$ не можна наблизити лінійними підпросторами розмірності m в просторі X з швидкістю, кращою за $d_m(\mathfrak{N}, X)$. Лінійний підпростір F_m^*, на якому досягається зовнішній inf у (В.1), називається екстремальним підпростором.

Проблема знаходження точних значень m-поперечників $d_m(\mathfrak{N}, X)$ має багату історію і привертала увагу багатьох спеціалістів з теорії наближень по всьому світу. Поряд із величинами $d_m(\mathfrak{N}, X)$ в теорії наближень також виникали і активно досліджувались інші подібні характеристики, інші поперечники (лінійні, проекційні, тригонометричні, поперечники за Берштейном та ін.). Сам А.М. Колмогоров знайшов точні значення поперечників класів W_2^r у просторі L_2.

Особливий інтерес до поперечників функціональних класів став проявлятись, починаючи з 60-х років XX століття, коли В.М. Тихомиров, залучивши топологічні методи до задач про поперечники, обчислив точні значення колмогоровських поперечників класів диференційовних функцій W^r_∞, $r \in \mathbb{N}$, в рівномірній метриці і показав, що величини $d_{2n-1}(W^r_\infty, C)$ і $d_{2n}(W^r_\infty, C)$, $r \in \mathbb{N}$, чисельно співпадають з найкращими наближеннями тригонометричними поліномами порядку $n-1$:

$$E_n(W^r_\infty)_C = \sup_{f \in W^r_\infty} \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C,$$

точні значення яких встановив Ж. Фавар у 1936 р. З тих пір задачі по обчисленню точних значень поперечників для різних функціональних класів у різних нормованих просторах розв'язувались у роботах В.Ф. Бабенка, О.П. Буслаєва, С.Б. Вакарчука, М.П. Корнєйчука, О.К. Кушпеля, А.О. Лигуна, Ю.І. Маковоза, В.П. Моторного, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, К.Ю. Осіпенка, А. Пінкуса, В.І. Рубана, А.С. Сердюка, О.І. Степанця, Ю.М. Субботіна, Л.В. Тайкова, В. Форста, В.Т. Шевалдіна та багатьох інших.

Найбільш повні результати по розв'язанню задачі Колмогорова про поперечники вдавалось одержати для класів згорток з так званими CVD-ядрами (ядрами, які не збільшують осциляції). 2π-періодичне ядро K називають CVD-ядром (і записують $K \in \mathrm{CVD}$), якщо для довільної $\varphi \in C$ виконується нерівність $\nu(K * \varphi) \leqslant \nu(\varphi)$, де $\nu(\varphi)$ — число змін знаку 2π-періодичної функції φ на $[0, 2\pi)$, а $(K * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt$ — згортка функцій K і φ.

Зокрема, у 1979 році А. Пінкус для класів згорток

$$K * U^0_p = \{f \in L_1 : f(x) = c + (K * \varphi)(x), c \in \mathbb{R}, \varphi \in U^0_p\}, \qquad \text{(В.2)}$$

$$U^0_p = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \leqslant 1, \varphi \perp 1\},$$

породжених неперервними CVD-ядрами K, обчислив точні значення колмогоровських поперечників $d_m(K * U^0_p, L_s)$, $m \in \mathbb{N}$, при $p = \infty$ і $1 \leqslant s \leqslant \infty$, а також при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $s = 1$.

Умова $K \in \mathrm{CVD}$ є доволі жорсткою, в міркуваннях вона фактично замінює класичну теорему Ролля і багато відомих ядер її не задовольняють. Це стосується, наприклад, спряжених ядер Бернуллі $\tilde{B}_r(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(kt - \frac{(r+1)\pi}{2})$, $r \in \mathbb{N}$, ядер Пуассона $P_q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$, $q \in (0,1)$, спряжених ядер аналітичних функцій $\tilde{H}_h(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \sin kt$, $h > 0$, та ін.

У 1980-1990-х роках О.К. Кушпель запропонував новий метод знаходження точних оцінок знизу колмогоровських поперечників у просторах C і L класів згорток, породжених ядрами, що можуть збільшувати осциляції. Цей метод базується на застосуванні апарату SK-сплайнів. Подальший розвиток даної тематики пов'язаний з роботами О.К. Кушпеля [28, 30, 31], В.Т. Шевалдіна [83], Нгуен Тхи Тх'єу Хоа [39], О.І. Степанця та А.С. Сердюка [49, 51, 53, 63]. Незважаючи на значне число робіт з даної тематики, деякі принципові питання щодо знаходження точних оцінок знизу колмогоровських поперечників до останнього часу залишались відкритими. Зокрема, не при всіх значеннях твірних параметрів були відомі оцінки поперечників класів згорток з ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), q \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}, \tag{B.3}$$

з ядрами Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), q \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}, \tag{B.4}$$

та з ядрами

$$H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), h > 0, \beta \in \mathbb{R}. \tag{B.5}$$

Розв'язанню цих відкритих проблем сучасної теорії наближення і присвячено дану роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково–дослідною темою: "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111U002079.

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є встановлення точних значень колмогоровських поперечників класів $C^q_{\beta,p} = P_{q,\beta} * U^0_p$, $C^{q,1}_{\beta,p} = N_{q,\beta} * U^0_p$ та $C^h_{\beta,p} = H_{h,\beta} * U^0_p$ при $p = 1$ та $p = \infty$ в просторах L та C відповідно.

Об'єктом дослідження є класи $C^q_{\beta,p}$, $C^{q,1}_{\beta,p}$ та $C^h_{\beta,p}$ при $p = 1, \infty$.

Предметом дослідження даної роботи є колмогоровські поперечники класів $C^q_{\beta,p}$, $C^{q,1}_{\beta,p}$ та $C^h_{\beta,p}$ при $p = 1$ та $p = \infty$ в просторах L та C відповідно.

Задачі дослідження:

1. Знайти точні значення поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$ для довільних $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_q.

2. Встановити точні значення колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ для довільних $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n^*_q.

3. Отримати точні значення колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_h.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач в дисертаційній роботі використовувались загальні методи математичного аналізу, елементи теорії функцій дійсної змінної, а також методи знаходження значень колмогоровських поперечників, які запропоновані у роботах В.М. Тихомирова, М.П. Корнєйчука, О.К. Кушпеля, Нгуен Тхи Тх'єу Хоа, О.І. Степанця, А.С. Сердюка, В.Т. Шевалдіна та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному.

1. Одержано зображення для (ψ, β)–похідних фундаментальних SK-сплайнів, породжених ядрами $\Psi_{\beta,1}$ загального вигляду. На основі цих зображень доведено, що ядра Пуассона $P_{q,\beta}$ вигляду (В.3), ядра Неймана $N_{q,\beta}$ вигляду (В.4) та ядра аналітичних функцій $H_{h,\beta}$ вигляду (В.5) задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$ для усіх номерів n, починаючи з деякого натурального числа, яке конструктивно визначається через параметри відповідних ядер.

2. Встановлено оцінки знизу колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ і $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, а також $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ і $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, для усіх n, починаючи з деякого номера. Отримані оцінки збігаються з найкращими наближеннями вказаних класів тригонометричними поліномами порядку $n-1$ у відповідних метриках. В результаті знайдено точні значення поперечників зазначених класів функцій і показано, що оптимальними підпросторами для поперечників d_{2n-1} є підпростори тригонометричних поліномів порядку $n-1$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближення функцій, тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові А.С. Сердюку. Результати робіт [11, 12, 55–57] отримані спільно з А.С. Сердюком, внесок співавторів є рівноцінним. Результати роботи [9] отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.–мат. наук, професор А.С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко–математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.–мат. наук, професори І.О. Шевчук, О.О. Курченко, В.М. Радченко);

— міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", Мерсін, 4–9 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "Современные проблемы математики, механики, информатики", присвяченій 90-річчю з дня народження професора Л.А. Толоконнікова, Тула, 16–20 вересня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— кримській міжнародній математичній конференції КММК-2013, Судак, 23 вересня – 4 жовтня 2013 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— IX-ій Літній школі "Алгебра, топологія і аналіз", Поляниця, 7–18 липня 2014 року;

— міжнародній науковій конференції “International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications”, Баку, 8–13 вересня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у чотирнадцяти наукових публікаціях, серед яких шість — статті у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, та вісім опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 86 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 120 сторінок друкованого тексту.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру вдячність науковому керівникові Анатолію Сергійовичу СЕРДЮКУ за постановку задач, постійну увагу, корисні зауваження, підтримку та допомогу у роботі.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Означення класів та основних апроксимаційних характеристик

Через L_p, $1 \leqslant p < \infty$, позначимо простір 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ в p-му степені функцій f з нормою $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, через L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, а через C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. При $p = 1$ простір L_p будемо позначати через L, тобто $L = L_1$.

Нехай $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.1}$$

— її ряд Фур'є за тригонометричною системою, $\psi(k)$ — довільна послідовність дійсних чисел, β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β. Множину усіх функцій $f(x)$, які мають (ψ, β)-похідну, позначають через L^ψ_β, а підмножину усіх неперервних функцій із L^ψ_β — через C^ψ_β. Якщо $f \in L^\psi_\beta$ $(f \in C^\psi_\beta)$ і при цьому $f^\psi_\beta \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з L, то записують, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ $(f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N})$. Надалі в ролі $\mathfrak{N}$ виступатимуть множини $U_1 = \{f : f \in L_1, \|f\|_1 \leqslant 1\}$ та $U_\infty = \{f : f \in C, \|f\|_\infty \leqslant 1\}$, при цьому будемо використовувати позначення $L^{\psi}_{\beta,1} = L^{\psi}_{\beta}U_1$ і $C^{\psi}_{\beta,\infty} = C^{\psi}_{\beta}U_\infty$.

Нехай $K \in L$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Покладемо

$$K * U^0_p = \{f \in L : \ f(x) = c + (K * \varphi)(x), c \in \mathbb{R}, \ \varphi \in U^0_p\},$$

де

$$(K * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt, \tag{1.2}$$

$$U^0_p = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \leq 1, \ \varphi \perp 1\}.$$

Якщо хоч одна із функцій K або φ у згортці (1.2) належить простору L_∞, то згортка (1.2) є неперервною (див., наприклад, [64, с. 138]).

Якщо послідовність $\psi(k)$ і параметр $\beta \in \mathbb{R}$ такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{1.3}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi_\beta \in L$, то елементи f із L^{ψ}_{β} майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки (див., наприклад, [64, с. 135])

$$f(x) = A + (\Psi_\beta * \varphi)(x) = A + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt, \tag{1.4}$$

$$A \in \mathbb{R}, \varphi \in L, \varphi \perp 1,$$

в якій φ майже скрізь співпадає з f^{ψ}_{β}. Зрозуміло, що якщо при цьому $f \in C^{\psi}_{\beta}$, то рівність (1.4) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

З огляду на представлення (1.4), за умови, що ряд (1.3) є рядом Фур'є функції Ψ_β із L, класи $L^{\psi}_{\beta,1}$ та $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ можна розглядати як класи згорток:

$$L^{\psi}_{\beta,1} = \Psi_\beta * U^0_1;$$

$$C^{\psi}_{\beta,\infty} = \Psi_\beta * U^0_\infty.$$

Поняття (ψ,β)-похідної f^{ψ}_{β} є природним узагальненням поняття (r,β)-похідної f^{r}_{β} в розумінні Вейля-Надя. При $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, майже скрізь $f^{\psi}_{\beta}=f^{r}_{\beta}$ і, отже, $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}=W^{r}_{\beta}\mathfrak{N}$ ($W^{r}_{\beta}\mathfrak{N}$ — класи Вейля-Надя). При $\psi(k)=k^{-r}$, $r\in\mathbb{N}$ і $\beta=r$ (ψ,β)-похідна f^{ψ}_{β} є звичайною r-тою похідною f^{r} функції f.

У роботі розглядатимуться ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right), \psi(k)>0. \tag{1.5}$$

Важливим частковим випадком ядер $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1.5) при $\psi(k)=q^k$, $q\in(0,1)$, є ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ з параметрами q і β, тобто функції вигляду

$$P_{q,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\ q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Функції f, які допускають зображення у вигляді згортки (1.4) з ядром $\Psi_\beta(t)=P_{q,\beta}(t)$, називають інтегралами Пуассона. В цьому випадку класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p=1,\infty$, будемо позначати через $C^{q}_{\beta,p}$, а відповідні (ψ,β)-похідні f^{ψ}_{β} функції $f\in C^{q}_{\beta,p}$ при $\psi(k)=q^k$ називати (q,β)-похідними і позначати через f^{q}_{β}. При $\beta=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, $p=\infty$ і $q=\rho$ класи $C^{q}_{\beta,p}$ збігаються (див., наприклад, [77, с. 185]) з відомими класами H^{ρ} функцій $f\in C$, які допускають представлення у вигляді $f(x)=u(\rho,x)$, $\rho<1$, де функція $u(\rho,x)$, $0\leqslant\rho<1$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, гармонічна в одиничному крузі з центром у початку координат та задовольняє нерівність $|u(\rho,x)|\leqslant 1$.

Якщо $\psi(k)=\dfrac{q^k}{k^r}$, $q\in(0,1)$, $r\in\mathbb{N}$, то класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p=1,\infty$, позначатимемо через $C^{q,r}_{\beta,p}$. При $r=1$ класи $C^{q,r}_{\beta,p}$ є класами згорток з ядром Неймана вигляду

$$N_{q,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right), q\in(0,1), \beta\in\mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Як показано в [15, с. 285–287] (див. також [14]), згортки з ядром Неймана є розв'язками крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа в одиничній кулі.

Також в роботі розглядатимуться ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1.5) у випадку, коли $\psi(k) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} kh}$, $h > 0$, тобто функції вигляду

$$H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big),\ h > 0,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

При зазначених ψ класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через $C^{h}_{\beta,p}$. При $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і $p = \infty$ класи $C^{h}_{\beta,p}$ збігаються з відомими класами A^{h}_{∞} функцій $f \in C$, які допускають аналітичне продовження у смугу

$$\{z = x + iy:\ -h < y < h\} \tag{1.9}$$

і таких, що $\|\operatorname{Re} f(\cdot + iy)\|_\infty \leqslant 1$, $|y| < h$ (див. [3, с. 269]).

Через $\mathcal{D}_q$, $q \in [0, 1)$, позначатимемо множину додатних послідовностей $\psi(k)$, які задовольняють умову Даламбера

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \tag{1.10}$$

Якщо $\psi(k) \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0, 1)$, то класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, складаються з 2π-періодичних функцій, які допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \ln\frac{1}{q}$ комплексної площини (див., наприклад, [64, с. 144]). Неважко переконатись, що модулі коефіцієнтів Фур'є ядер $P_{q,\beta}(t)$ та $N_{q,\beta}(t)$ задовольняють умову $\mathcal{D}_q$. Цю умову задовольняють і модулі коефіцієнтів Фур'є ядер $H_{h,\beta}(t)$ при $h = \ln\frac{1}{q}$.

Через $E_n(\mathfrak{N})_X$ позначимо найкраще наближення в просторі $X \subset L$ множини $\mathfrak{N} \subset X$ підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$, тобто величину вигляду

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_X. \tag{1.11}$$

Через $d_m(\mathfrak{N}, X)$ позначатимемо поперечник за Колмогоровим порядку m класу $\mathfrak{N}$ в просторі X, тобто величину вигляду

$$d_m(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_m \subset X} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in F_m} \|f - y\|_X, \tag{1.12}$$

де зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X. Лінійний підпростір F_m^*, для якого величина $d_m(\mathfrak{N}, X)$ досягається, називається екстремальним.

Через $b_m(\mathfrak{N}, X)$ позначимо поперечник за Бернштейном порядку m класу $\mathfrak{N}$ у просторі X, тобто величину вигляду

$$b_m(\mathfrak{N}, X) = \sup_{F_{m+1} \subset X} \sup_{\varepsilon > 0} \{\mathfrak{N} \supset \varepsilon U \cap F_{m+1}\}, \tag{1.13}$$

де зовнішній sup розглядається по всіх можливих лінійних підпросторах F_{m+1} із X розмірності $m+1$, U — одинична куля простору X, а через $\lambda_m(\mathfrak{N}, X)$ — лінійний поперечник класу $\mathfrak{N}$ у просторі X, тобто величину вигляду

$$\lambda_m(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_m \subset X} \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}(X, F_m)} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - \Lambda f\|_X, \tag{1.14}$$

де $\mathcal{L}(X, F_m)$ — клас неперервних лінійних відображень, що діють із X в F_m, а зовнішній inf розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X.

Поряд із просторами $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку $n-1$ у дисертаційній роботі розглядатимуться простори інтерполяційних SK-сплайнів за рівномірним розподілом вузлів сплайнів та сталим зсувом вузлів інтерполяції.

Нехай $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = 2\pi\}$ — довільне розбиття проміжку $[0, 2\pi]$ і $K(t)$ — довільна сумовна 2π-періодична функція. SK-сплайном за розбиттям Δ_{2n} будемо називати функцію вигляду

$$SK(\cdot) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k K(\cdot - x_k), \ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0, \ \alpha_k \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Будемо розглядати SK-сплайни у випадку, коли розбиття Δ_{2n} рівномірне, тобто коли $x_k = k\pi/n$, а в ролі функції $K(t)$ виступатиме функція

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right), \tag{1.16}$$

де $B_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin kt$ — ядро Бернуллі. Простір SK-сплайнів $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ за розбиттям Δ_{2n} позначатимемо через $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$.

Фундаментальним SK-сплайном, породженим ядром $\Psi_{\beta,1}$, називають функцію $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot) = \overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ вигляду

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k),\ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0,\ \alpha_k \in \mathbb{R}, \tag{1.17}$$

що задовольняє умови

$$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, 2n-1}, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

де $y_k = x_k + y$, $x_k = k\pi/n$, $y \in [0, \dfrac{\pi}{n})$. Сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ породжує систему фундаментальних сплайнів виду $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, яка утворює базис в просторі $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$. Необхідні і достатні умови існування і єдиності фундаментального сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ в залежності від співвідношення між y — зсувом вузлів інтерполяції та параметрами ψ і β твірного ядра $\Psi_{\beta,1}$ досліджувались у роботах [30, 49, 50, 62, 82, 85].

Оскільки, в силу означення (ψ,β)-похідної, для ядра $\Psi_{\beta,1}$ виконується рівність

$$(\Psi_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta} = B_1(\cdot), \tag{1.18}$$

то внаслідок (1.15) маємо

$$(S\Psi_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k B_1(\cdot - x_k),\ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0. \tag{1.19}$$

Рівності в (1.18) та (1.19) розуміють як рівності між двома функціями із L (тобто майже скрізь). В силу леми 2.3.4 роботи [26, с. 76] функція, що знаходиться в правій частині рівності (1.19) є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}). Отже, серед (ψ, β)-похідних будь-якого сплайна виду (1.17), а значить, і для фундаментального сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot)$, існує функція, яка є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}). Надалі саме цю функцію будемо розуміти під записом $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot))^{\psi}_{\beta}$.

1.2. Про найкращі наближення класів згорток у просторах C і L

Як правило, задача про обчислення поперечників $d_m(\mathfrak{N}, X)$ розпадається на дві частини. Спочатку фіксується деякий простір $F_m^* \subset X$ розмірності $m \in \mathbb{N}$ і обчислюється величина

$$E(\mathfrak{N}, F_m^*)_X = \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in F_m^*} \|x - y\|_X,$$

Очевидно, що

$$E(\mathfrak{N}, F_m^*)_X \geq d_m(\mathfrak{N}, X). \tag{1.20}$$

Потім для поперечника $d_m(\mathfrak{N}, X)$ отримують оцінки знизу. Майже в усіх випадках, коли вдається розв'язати задачу про знаходження значення поперечників класів $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ $(L_{\beta,1}^{\psi})$, екстремальним підпростором виявляється підпростір тригонометричних поліномів або підпростори узагальнених сплайнів.

У даній роботі в ролі підпросторів F_m^* будуть використовуватися підпростори $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку, не вищого за $n-1$. При цьому будемо позначати

$$E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi})_C = E(C_{\beta,\infty}^{\psi}, \mathcal{T}_{2n-1})_C, \tag{1.21}$$

$$E_n(L_{\beta,1}^{\psi})_L = E(L_{\beta,1}^{\psi}, \mathcal{T}_{2n-1})_L. \tag{1.22}$$

Значення величин (1.21) та (1.22) при тих чи інших додаткових обмеженнях на ψ та $\beta \in \mathbb{R}$ були отримані у роботах Ж. Фавара [79, 80], Н.І. Ахієзера та М.Г. Крейна [1], Б. Надя [37], С.М. Нікольського [40], В.К. Дзядика [20–23], С.Б. Стєчкіна [66, 67], Сунь Юн-шена [70–72], А. Пінкуса [44], А.В. Бушанського [16], В.Т. Шевалдіна [82, 83, 85, 86], А.С. Сердюка [46, 49, 50, 52, 53] та ін.

Усі відомі до цього часу точні значення найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ у рівномірній та інтегральній метриках були одержані для класів згорток, породжених ядрами, що задовольняють умову Нікольського A^*_n, або навіть більш жорстку, умову Надя N^*_n.

Означення 1.1. *Сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову A^*_n, $n \in \mathbb{N}$ ($K \in A^*_n$), якщо існують тригонометричний поліном T^*_{n-1} порядку $n-1$ і додатне число $\lambda \leqslant \pi/n$ таке, що для функції $\varphi_*(t) - \operatorname{sign}(K(t) - T^*_{n-1}(t))$ майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t-\lambda) = -\varphi_*(t)$.*

Означення 1.2. *Сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N^*_n, $n \in \mathbb{N}$ ($K \in N^*_n$), якщо існують тригонометричний поліном T^*_{n-1} порядку $n-1$ і точка $\xi \in [0, \pi/n)$ такі, що різниця $K(t) - T^*_{n-1}(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi)$ у точках $t_k = \xi + k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, і тільки в них.*

Із означень 1.1 та 1.2 випливає включення

$$N^*_n \subset A^*_n. \tag{1.23}$$

С.М. Нікольський [40] довів, що якщо ядро Ψ_β, яке породжує класи згорток $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\beta,1}$, задовольняє умову A^*_n, то мають місце рівності

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_\beta)_L.$$

Сенс умови A^*_n полягає у тому, що тригонометричний поліном T^*_{n-1}, котрий фігурує в її формулюванні, здійснює найкраще наближення в середньому ядра Ψ_β, тобто

$$E_n(\Psi_\beta)_L = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|\Psi_\beta(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_1 = \|\Psi_\beta(\cdot) - T^*_{n-1}(\cdot)\|_1.$$

Наведемо деякі відомі твердження про значення найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ у рівномірній та інтегральній метриках.

Теорема 1.1 (В.К. Дзядик [23]). *Нехай $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при довільних $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(W^r_{\beta,\infty})_C = E_n(W^r_{\beta,1})_L = \frac{1}{\pi} E_n(B_{r,\beta})_L = \frac{M_{r,\beta}}{n^r},$$

де

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \beta\pi/2), \tag{1.24}$$

$$M_{r,\beta} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} \sin \frac{\beta\pi}{2}, & r \in (0,1],\ \beta \in [r, \ \ 2-r], \\ \frac{4}{\pi} \Big| \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin((2\nu+1)\theta\pi - \beta\pi/2)}{(2\nu+1)^{r+1}} \Big|, & \left[\begin{array}{l} r \in (0,1],\ \beta \in [0,2] \setminus [r, 2-r], \\ r > 1,\ \beta \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \end{cases} \tag{1.25}$$

а $\theta \in (0,1]$ — корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1)^{-r} \cos\left((2\nu+1)\theta - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \tag{1.26}$$

Теорема 1.2 (М.Г. Крейн [27], С.М. Нікольський [40]). *Нехай $\beta \in \mathbb{Z}$, $0 < q < 1$. Тоді при довільних $n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} q^n,\ \beta = 2l,\ l \in \mathbb{Z};$$

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+q^n}{1-q^n},\ \beta = 2l-1,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.3 (Н.І. Ахієзер [2], С.М. Нікольський [40]). *Нехай $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і $h > 0$. Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}.$$

Теорема 1.4 (Б. Надь [37], С.М. Нікольський [40]). *Нехай $\beta \in \mathbb{Z}$ і для коефіцієнтів $\psi(k)$ ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1.5) виконуються співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0, \psi(k) \geqslant \psi(k+1);$$

$$\Delta_2\psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) - \psi(k+2) \geqslant 0 \tag{1.27}$$

і, крім того, при $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, *виконується умова*

$$\Delta_3\psi(k) = \psi(k) - 3\psi(k+1) + 3\psi(k+2) - \psi(k+3) \geqslant 0, k = 1, 2, \ldots, \tag{1.28}$$

а при $\beta = 2l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$, *— умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty. \tag{1.29}$$

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ *виконуються рівності*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi((2k+1)n)}{2k+1}, \beta = 2l, l \in \mathbb{Z};$$

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi((2k+1)n)}{2k+1}, \beta = 2l+1, l \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.5 (А.В. Бушанський [16], В.Т. Шевалдін [83]). *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. *Тоді* $P_{q,\beta} \in N^*_n$ *та при довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(C^{q}_{\beta,\infty})_C = E_n(C^{q}_{\beta,1})_L = \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right|, \tag{1.30}$$

де

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sign} \sin nt, \tag{1.31}$$

а $\theta_n = \theta_n(q, \beta)$ *— єдиний на* $[0, 1)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) = 0. \tag{1.32}$$

В роботі [6] знайдено явний вираз для величини $\theta_n(q, \beta)$, а в [7] — компактне представлення через елементарні функції для суми в (1.30).

Для класів згорток $C^{q,r}_{\beta,\infty} = N_{q,r,\beta} * U^0_p$, $p = 1, \infty$, породжених ядрами Неймана $N_{q,r,\beta}(t)$ вигляду

$$N_{q,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k^r} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big), 0 < q < 1, \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}, \qquad (1.33)$$

має місце наступне твердження.

Теорема 1.6 (А.С. Сердюк [51]). *Для довільних* $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, *має місце включення* $N_{q,r,\beta} \in N^*_n$ *та виконуються рівності*

$$E_n(C^{q,r}_{\beta,\infty})_C = E_n(C^{q,r}_{\beta,1})_L = \|N_{q,r,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n^r(2\nu+1)^{r+1}} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|, \qquad (1.34)$$

де φ_n *означена рівністю* (1.31), *а* $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ *— єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{2\nu n}}{(2\nu+1)^r} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \qquad (1.35)$$

В загальному випадку, для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\beta,1}$ мають місце наступні твердження.

Теорема 1.7 (А.С. Сердюк [52]). *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\psi(k)$ *ядра* Ψ_β *вигляду* (1.5), *яке породжує класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *задовольняє умову* (1.10). *Тоді знайдеться номер* n_0 *такий, що для будь-якого натурального числа* n *більшого за* n_0, *має місце включення* $\Psi_\beta \in N^*_n$ *та виконуються рівності*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_L = \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|, \qquad (1.36)$$

в яких φ_n *означена рівністю* (1.31), *а* $\theta_n = \theta_n(\psi, \beta)$ — *єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n) \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \tag{1.37}$$

Теорема 1.8 (А.С. Сердюк [52])**.** *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\psi(k)$ *ядра* Ψ_β *вигляду* (1.5), *яке породжує класи* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *задовольняє умову*

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \rho_* = 0{,}3253678\ldots, \ k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді при кожному натуральному n *мають місце рівності* (1.36).

Варто зазначити, що точні значення найкращих наближень, які містяться в теоремах 1.2–1.8 реалізують лінійні методи наближення спеціального вигляду, які в явному вигляді можуть бути виражені через параметри класів. Наслідуючи Б. Надя [37], задамо системи чисел

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \tag{1.38}$$

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1} \tag{1.39}$$

і побудуємо для кожної функції f із класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ (чи відповідно $L^{\psi}_{\beta,1}$) тригонометричний поліном $U_{n-1}(x)$ порядку $n-1$, що задається системами (1.38) та (1.39), наступним чином:

$$U_{n-1}(x) = U_{n-1}(f; x; \mu, \nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\mu_k(a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k(a_k \sin kt - b_k \cos kt)\right), \tag{1.40}$$

де a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi = f^{\psi}_{\beta}$. Послідовність $U_{n-1}(f; x; \mu, \nu)$ задає лінійний метод наближення функцій f із $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ (чи відповідно $L^{\psi}_{\beta,1}$), що визначається системами (1.38) і (1.39).

Розглянемо величини

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty};\mu,\nu)_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\|f(\cdot)-U_{n-1}(f;\cdot;\mu,\nu)\|_C, \tag{1.41}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1};\mu,\nu)_L=\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,1}}\|f(\cdot)-U_{n-1}(f;\cdot;\mu,\nu)\|_1. \tag{1.42}$$

Метод наближення вигляду (1.40) називають найкращим для класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ (чи відповідно $L^{\psi}_{\beta,1}$) у метриці простору C (L), якщо він визначається такими системами чисел (1.38) і (1.39), для яких точна верхня межа в (1.41) (чи відповідно в (1.42)) буде найменшою серед усіх можливих. Із роботи С.М. Нікольського [40] випливає наступне твердження.

Теорема 1.9 (С.М. Нікольський)**.** *Нехай неперервне ядро $\Psi_\beta(t)$ вигляду* (1.5)*, що породжує класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$, задовольняє умову N^*_n. Тоді лінійний метод $U_{n-1}(x)$ вигляду* (1.40) *є найкращим для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ при $\mu_k=\mu^*_k$, $\nu_k=\nu^*_k$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, де μ^*_k і ν^*_k означаються формулами*

$$\mu^*_0=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\mu^*_k=\psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)+\psi(2n\nu+k))\cos(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}),\ k=\overline{1,n-1},$$

$$\nu^*_k=\psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)+\psi(2n\nu+k))\sin(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}),\ k=\overline{1,n-1}.$$

При цьому виконуються рівності

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C=\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C=E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L=\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L=$$
$$=\frac{1}{\pi}E_n(\Psi_\beta)_L=\frac{1}{\pi}\|\Psi_\beta(\cdot)-T^*_{n-1}(\cdot)\|_1=$$
$$=\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{1.43}$$

де φ_n означена рівністю (1.31)*, а $\theta_n=\theta_n(\psi,\beta)\in[0,1)$ — корінь рівняння* (1.37).

1.3. Задача про знаходження оцінок знизу колмогоровських поперечників класів згорток: історичні відомості по її розв'язанню

Знаходження точних оцінок знизу поперечників $d_m(\mathfrak{N}, X)$ у ряді випадків стало можливим завдяки залученню ідей із суміжних розділів математики. В.М. Тихомиров [75], застосувавши топологічні методи до задач про поперечники, довів теорему про поперечник кулі.

Теорема 1.10 (про поперечник кулі)**.** *Нехай M_{n+1} — $(n+1)$-вимірний підпростір лінійного нормованого простору X, а U_{n+1} — замкнена одинична куля в M_{n+1}, тобто*

$$U_{n+1} = \{x : \ x \in M_{n+1}, \ \|x\|_X \leq 1\}.$$

Тоді

$$d_n(U_{n+1}, X) = 1.$$

Використовуючи вказану теорему, В.М. Тихомиров знайшов точні оцінки знизу поперечників $d_{2n-1}(W_\infty^r, C)$, $r \in \mathbb{N}$, і згодом показав (див. [76]), що $d_{2n-1}(W_\infty^r, C) = d_{2n}(W_\infty^r, C)$. Точні оцінки знизу для непарних поперечників $d_{2n-1}(W_1^r, L)$, $r \in \mathbb{N}$, отримали незалежно Ю.М. Субботін [68, 69] та Ю.І. Маковоз [33], а для парних поперечників $d_{2n}(W_1^r, L)$ — В.І. Рубан (див. коментарі до гл. 10 у [25]). Значення поперечників $d_{2n-1}(W_p^r, L_s)$ та $d_{2n}(W_p^r, L_s)$ при $p = \infty$, $1 < s < \infty$ та $1 < p < \infty$, $s = 1$ обчислили незалежно і різними методами А.О. Лигун [32], Ю.І. Маковоз [34] та А. Пінкус [43]. Наведемо точне формулювання згаданих вище результатів.

Теорема 1.11 (В.М. Тихомиров)**.** *При всіх $n, r = 1, 2, \ldots$ справедливі* *співвідношення*

$$d_{2n-1}(W^r_\infty, C) = d_{2n}(W^r_\infty, C) = \lambda_{2n-1}(W^r_\infty, C) = \lambda_{2n}(W^r_\infty, C) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r},$$

де

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, r = 0, 1, \dots \text{ — константи Фавара.} \tag{1.44}$$

Теорема 1.12. *При всіх $n, r = 1, 2, \dots$ виконуються рівності*

$$d_{2n-1}(W^r_\infty, C) = d_{2n-1}(W^r_1, L) = \lambda_{2n-1}(W^r_\infty, C) = \lambda_{2n-1}(W^r_1, L) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r};$$

$$d_{2n-1}(W^r_1, L) = d_{2n}(W^r_1, L) = \lambda_{2n-1}(W^r_1, L) = \lambda_{2n}(W^r_1, L) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r};$$

$$d_{2n}(W^r_\infty, L_q) = \lambda_{2n}(W^r_\infty, L_q) = \|B_r * \varphi_n\|_q, \ q \geqslant 1;$$

$$d_{2n-1}(W^r_p, L) = d_{2n}(W^r_p, L) = \lambda_{2n}(W^r_p, L) =$$
$$= \|B_r * \varphi_n\|_{p'}, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

де $\mathcal{K}_r$ — константи Фавара, $B_r(t)$ — ядра Бернуллі вигляду

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \ r \in \mathbb{N}, \tag{1.45}$$

а φ_n означена рівністю (1.31).

У роботі В.Ф. Бабенка [4] були знайдені точні оцінки знизу поперечників d_{2n-1} класів функцій $W^1_{\beta,\infty}$ та $W^1_{\beta,1}$ в метриках L_∞ та L відповідно при довільних значеннях параметра $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.13 (В.Ф. Бабенко)**.** *Для всіх $\beta \in \mathbb{R}$ і $n = 1, 2, \dots$ мають місце рівності*

$$d_{2n-1}(W^1_{\beta,\infty}, L_\infty) = d_{2n-1}(W^1_{\beta,\infty}, L_1) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(W^1_{\beta,\infty}, L_\infty) = \lambda_{2n-1}(W^1_{\beta,\infty}, L_1) = \|B_{1,\beta} * \varphi_n\|_\infty,$$

а φ_n означена рівністю (1.31).

Точні значення поперечників були знайдені також для деяких інших класів функцій (див., наприклад, [5, 17, 18, 24, 36, 41, 42, 45, 73, 78]).

Класи W^r_p, $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ є класами згорток із ядрами Бернуллі $B_r(t)$, які є так званими CVD_{2n}-ядрами.

Означення 1.3. *2π-періодичну функцію $K \in L$ називають CVD_{2n}-ядром (ядром, що не збільшує осциляції) і позначають $K \in \mathrm{CVD}_{2n}$, якщо для довільної функції $f \in C$ такої, що $\nu(f) \leqslant 2n$, виконується нерівність*

$$\nu(K * f) \leqslant \nu(f),$$

де $\nu(g)$— число змін знаку функції $g \in C$ на $[0, 2\pi)$. Якщо K є CVD_{2n}-ядром при усіх $n \in \mathbb{N}$, то K називають CVD-ядром і записують $K \in \mathrm{CVD}$.

У 1979 році А. Пінкус [43] (див. також [44]) для класів згорток $K * U^0_p$, породжених CVD_{2n}-ядром $K(\cdot)$, обчислив колмогоровські поперечники $d_{2n-1}(K * U^0_p, L_s)$ і $d_{2n}(K * U^0_p, L_s)$ при $p = \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, а також при $1 \leq p \leq \infty$, $s = 1$. А саме, у вказаних випадках має місце наступне твердження.

Теорема 1.14 (А. Пінкус). *Нехай CVD_{2n}-ядро K є неперервною функцією і при довільних $0 \leq y_0 < y_1 < \cdots < y_{2n+1} < 2\pi$ система функцій $\{K(\cdot - y_i)\}_{i=0}^{2n+1}$ є лінійно незалежною. Тоді мають місце рівності*

$$d_{2n-1}(K * U^0_\infty, C) = \lambda_{2n-1}(K * U^0_\infty, C) = b_{2n-1}(K * U^0_\infty, C) =$$

$$= \|K * \varphi_n\|_\infty;$$

$$d_{2n}(K * U^0_\infty, L_s) = \lambda_{2n}(K * U^0_\infty, L_s) = \|K * \varphi_n\|_s;$$

$$d_{2n-1}(K * U^0_1, L) = \lambda_{2n-1}(K * U^0_1, L) = b_{2n-1}(K * U^0_1, L) =$$

$$= \|K * \varphi_n\|_\infty;$$

$$d_{2n}(K*U_p^0,L)=\lambda_{2n}(K*U_p^0,L)=\|K*\varphi_n\|_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;$$

$$d_{2n-1}(K*U_p^0,L)=\|K*\varphi_n\|_{p'},\ 1\leqslant p\leqslant\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

де φ_n *означена рівністю* (1.31).

Крім ядер Бернуллі $B_r(t)$ вигляду (1.45), прикладами CVD_{2n}-ядрами є також такі відомі ядра, як ядро Валле-Пуссена

$$w_n(x)=\sin^{2n}\frac{x}{2};$$

ядро рівняння теплопровідності

$$\phi_\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\sigma}\cos kx\right),\ \sigma>0;$$

ядро

$$\Omega(P_r,x)=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ P_r(ik)\neq 0}}\frac{e^{ikx}}{P_r(ik)},$$

де $P_r(z)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами і нулями у смузі $|\operatorname{Im}z|<\frac{1}{2}$; ядро аналітично продовжуваних у смугу $\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Im}z|\leqslant\ln\frac{1}{q}\}$ функцій

$$\mathcal{P}_q(x)=\frac{1}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{q^k+q^{-k}},\ 0<q<1,$$

та інші (див. [44, с. 62], [41, 42]).

Зазначимо, що для перевірки факту, чи деяке ядро K є CVD_{2n}-ядром зручно користуватись наступним твердженням, що належить Дж. Мерхюберу, І. Шонбергу та Р. Вільямсону [35] (див. також [44, с. 67]).

Теорема 1.15. *Нехай* $K\in C$ *та* $K(x)$ *має ранг не менший за* $2n+2$, *тобто існує розбиття* t_i, $i=\overline{1,2n+2}$, *проміжку* $[0,2\pi)$ *таке, що* $0\leqslant t_1<\dots<t_{2n+2}<2\pi$ *і для якого* $\dim(\operatorname{span}\{K(x-t_i)\}_{i=1}^{2n+2})=$

$= 2n+2$. *Тоді для справедливості включення* $K \in \mathrm{CVD}_{2n}$ *необхідно і достатньо, щоб для деякого фіксованого* $\varepsilon = \pm 1$ *виконувалась умова*

$$D_{2l+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \det(\varepsilon K(x_i - y_j))_{i,j=1}^{2l+1} \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant x_1 < \dots < x_{2l+1} < 2\pi, \;\; 0 \leqslant y_1 < \dots < y_{2l+1} < 2\pi, \;\; l = 0,1,\dots,n.$$

Ядра Ψ_β вигляду (1.5) мають ту властивість, що $\dim(\mathrm{span}\{\Psi_\beta(x-t_i)\}_{i=1}^{2n+2}) = 2n+2$ (див., наприклад, лему 1.3 роботи [28]). Тому з теореми 1.15 випливає наступне твердження.

Наслідок 1.1. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб ядро* Ψ_β *вигляду* (1.5) *було* CVD_{2n}*-ядром, є виконання для деякого фіксованого* $\varepsilon = \pm 1$ *умови:*

$$D_{2l+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \det(\varepsilon \Psi_\beta(x_i - y_j))_{i,j=1}^{2l+1} \geqslant 0$$

для довільних наборів $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{2l+1}$ *та* $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^{2l+1}$ *таких, що*

$$0 \leqslant x_1 < \dots < x_{2l+1} < 2\pi, \;\; 0 \leqslant y_1 < \dots < y_{2l+1} < 2\pi, \;\; l = 0,1,\dots,n.$$

Умова CVD_{2n} (CVD) є досить жорсткою, в міркуваннях вона фактично замінює теорему Ролля і багато відомих ядер їй не задовольняє. Наприклад ядра Вейля-Надя $B_{r,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(kt - \beta\pi/2)$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, при певних співвідношеннях між параметрами r і β, ядро Пуассона $P_q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ при $q = \frac{1}{7}$, ядро $K(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k k!}\cos kt$ та ін. не є CVD_{2n}-ядрами (див. [31,46]).

О.К. Кушпелем [28, 30] було започатковано новий метод знаходження точних оцінок знизу поперечників класів згорток, породжених ядрами, що можуть збільшувати осциляції. Цей метод суттєво спирається на апарат SK-сплайнів для класів згорток, породжених ядрами, що задовольняють так звану умову $C_{y,2n}$.

Означення 1.4. *Кажуть, що для деякого дійсного числа y і розбиття Δ_{2n} ядро Ψ_β вигляду* (1.5) *задовольняє умову $C_{y,2n}$ (і записують $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$), якщо для цього ядра існує єдиний фундаментальний сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ і для нього виконуються рівності*

$$sign(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t_k))^{\psi}_{\beta} = (-1)^k \varepsilon e_k, \; k = \overline{0, 2n-1},$$

де $t_k = (x_k + x_{k+1})/2$, e_k дорівнює або 0, або 1, а ε приймає значення ± 1 і не залежить від k.

Умова $C_{y,2n}$ була введена О.К. Кушпелем [28, 30] і формулювалась у термінах так званого твірного полінома для ядра Ψ_β. Він же ж вказав достатні умови включення $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$. Пізніше О.І. Степанець та А.С. Сердюк (див. лему 2 роботи [63]) встановили нові достатні умови включення $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$ для ядер вигляду (1.5) з коефіцієнтами, що задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty.$$

Розроблений О.К. Кушпелем метод базується на наступній теоремі.

Теорема 1.16 (О.К. Кушпель [30, 31])**.** *Нехай при деякому $n \in \mathbb{N}$ функція Ψ_β вигляду* (1.5)*, що породжує класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$, задовольняє умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій функція $|(\Psi_\beta * \varphi_n)(t)|$ ($\varphi_n(t)$ задана рівністю* (1.31)*) приймає максимальне значення. Тоді*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C, \tag{1.46}$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C. \tag{1.47}$$

Він же встановив наступний результат.

Теорема 1.17 (О.К. Кушпель [28, 30, 31])**.** *Нехай $\beta \in \mathbb{Z}$ і коефіцієнти $\psi(k)$ функції $\Psi_\beta(t)$ вигляду* (1.5) *мають вигляд $\psi(k) = \varphi(k)\rho^k$,*

$0 < \rho \leqslant 1/7$, *де* $\varphi(k)$ — *довільні незростаючі функції натурального аргументу. Тоді* $\Psi_\beta(t)$ *задовольняє умову* $C_{y_0,2n}$, *де* y_0 — *точка максимуму функції* $|(\Psi_\beta * \varphi_n)(t)|$, *а, отже, виконуються нерівності* (1.46) *і* (1.47).

Згодом дослідження у даному напрямі було продовжено у роботах В.Т. Шевалдіна [83, 85], Нгуен Тхи Тх'єу Хоа [39], О.І. Степанця [63], А.С. Сердюка [49, 63] та ін. Автори зазначених робіт встановили факт виконання умови $C_{y_0,2n}$ для ядер $\Psi_\beta(t)$ при тих чи інших обмеженнях на ψ і β. Як наслідок, встановлено наступні твердження.

Теорема 1.18 (В.Т. Шевалдін [83]). *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $0 < q \leq q(\beta)$, *де* $q(\beta) = 0,2$, *якщо* $\beta \in \mathbb{Z}$ *та* $q(\beta) = 0,196881...$, *якщо* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. *Тоді при всіх* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|,$$

де φ_n *означена рівністю* (1.31), *а* $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — *єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння* (1.32).

Теорема 1.19 (В.Т. Шевалдін [84, 85]). *Нехай* $\beta \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$ *і* $n \leq c(\beta)(r+1)$, *де* $c(\beta) = 0,249971...$, *якщо* $\beta \in \mathbb{Z}$ *та* $c(\beta) = 0,247812...$, *якщо* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. *Тоді при вказаних* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{2n}(W^r_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(W^r_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(W^r_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(W^r_{\beta,\infty})_C = E_n(W^r_{\beta,1})_L = \|B_{r,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{M_{r,\beta}}{n^r},$$

де $B_{r,\beta}(t)$ *та* $M_{r,\beta}$ *задані рівностями* (1.24) *і* (1.25) *відповідно.*

Теорема 1.20 (Нгуен Тхи Тх'єу Хоа [39]). *Нехай* $q \in (0,1)$ *і*

$$P_q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt.$$

Тоді існує номер $n(q)$ такий, що для всіх $n \geqslant n(q)$ виконуються рівності

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= \|P_q * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} q^n.$$

Теорема 1.21 (О.І. Степанець, А.С. Сердюк [63]). *Нехай коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду* (1.5) *задовольняють нерівності*

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \rho(\beta),\ k = 1, 2, ...,$$

де $\rho(\beta) = 0,2$ якщо $\beta \in \mathbb{Z}$ та $\rho(\beta) = 0,193864$ якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$. Тоді при усіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$d_{2n}(C^\psi_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(L^\psi_{\beta,1}, L) \geqslant \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C.$$

Теорема 1.22 (А.С. Сердюк [47]). *Нехай $\beta = 2p - 1$, $p \in \mathbb{Z}$, і коефіцієнти $\psi(k)$ мають вигляд*

$$\psi(k) = \varphi(k) e^{-\alpha k^r}, 0 < r < 1, \alpha > 0, \tag{1.48}$$

де $\varphi(k)$ — незростаюча додатна функція натурального аргументу, або $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 2p-1$, $p \in \mathbb{Z}$, а $\psi(k)$ має вигляд (1.48) *і є тричі монотонною, тобто*

$$\Delta\psi(k) = \psi(k) - \psi(k+1) \geqslant 0,\ \Delta^2\psi(k) = \Delta(\Delta\psi(k)) \geqslant 0,$$

$$\Delta^3\psi(k) = \Delta(\Delta^2\psi(k)) \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Тоді для усіх $n \in \mathbb{N}$, що задовольняють умову

$$\frac{4n^{1-r}}{\alpha r} + \frac{2n}{(\alpha r n^r)^2} \leqslant 1,\ \text{якщо}\ \beta \in \mathbb{Z},$$

або

$$\left(\frac{4n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{2n}{(\alpha r n^r)^2}\right)\left(1-\frac{4}{3}\exp(-\alpha r n^{r-1})\right)^{-1}\leqslant 1,\ \textit{якщо}\ \beta\notin\mathbb{Z},$$

справедливі нерівності

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty},C)\geqslant\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1},L)\geqslant\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C.$$

Теорема 1.23 (А.С. Сердюк [48]). *Нехай функція* $\psi(k)$ *є тричі монотонною, якщо* $\beta=2p-1$, $p\in\mathbb{Z}$, *і подається у вигляді*

$$\psi(k)=\varphi(k)k^{-r},\ r\geqslant 1,$$

де $\varphi(k)$ *— незростаюча додатна функція натурального аргумент. Тоді для всіх* $n\in\mathbb{N}$, *що задовольняють співвідношенням* $n\leqslant c(\beta)(r+1)$, *де* $c(\beta)=0,24996\ldots$ *якщо* $\beta\in\mathbb{Z}$ *або* $c(\beta)=0,249839\ldots$ *якщо* $\beta\notin\mathbb{Z}$, *мають місце нерівності*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty},C)\geqslant\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1},L)\geqslant\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C.$$

Точні значення поперечників класів згорток були одержані також в ряді інших випадків (див., наприклад, [49, 51, 53]).

РОЗДІЛ 2

Точні оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона

Даний розділ дисертаційного дослідження присвячено встановленню точних оцінок знизу поперечників за Колмогоровим $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$ при довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$ і всіх натуральних n починаючи з деякого номера n_q.

2.1. Суматорні зображення для (ψ,β)-похідних фундаментальних SK-сплайнів, породжених ядрами $\Psi_{\beta,1}$

Для встановлення факту, що деяке ядро $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1.5) задовольняє умову $C_{y,2n}$ необхідно отримати певну інформацію про поведінку функцій $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta$. У роботі [46] отримано зображення функції $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta$, згідно з яким за умови $|\lambda_j(y)| \neq 0$, $j = \overline{1,n}$, для довільного $t \in (x_{k-1}, x_k)$ виконується рівність

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta = \frac{\pi}{4n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin jt_k\cdot\rho_j(y) - \cos jt_k\cdot\sigma_j(y)}{|\lambda_j(y)|^2\sin\frac{j\pi}{2n}} + \frac{(-1)^{k+1}\rho_n(y)}{|\lambda_n(y)|^2}\right), \tag{2.1}$$

де

$$\lambda_j(\cdot) = \lambda_j(\psi,\beta,n,\cdot) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} e^{ij\nu\pi/n}\Psi_{\beta,1}(\cdot - \frac{\nu\pi}{n}), \tag{2.2}$$

i — уявна одиниця, $\rho_j(\cdot) = \mathrm{Re}(\lambda_j(\cdot))$, $\sigma_j(\cdot) = \mathrm{Im}(\lambda_j(\cdot))$, $t_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$.

Встановимо ще одне зручне зображення функції $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta$. Має місце наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай* $\beta\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$ *і* $y\in[0,\frac{\pi}{n})$ *таке, що*

$$|\lambda_j(y)|\neq 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{2.3}$$

де $\lambda_j(\cdot)$ *означені формулою* (2.2). *Тоді для довільного* $t\in(\frac{(k-1)\pi}{n},\frac{k\pi}{n})$, $k=\overline{1,2n}$, *виконується рівність*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))_{\beta}^{\psi}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4n\psi(n)}\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1}{2}+2\frac{\psi(n)}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\cos j(t_k-y)}{|\lambda_{n-j}(y)|\cos\frac{j\pi}{2n}}\right)\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2})+\gamma_1(y)+\gamma_2(y)\right), \tag{2.4}$$

в якій $t_k=\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}$, *а*

$$\gamma_1(y)=\gamma_1(\psi,\beta,k,y)=\frac{\psi(n)}{n}\left(\frac{z_0(y)}{|\lambda_n(y)|^2}+2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{z_j(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2\cos\frac{j\pi}{2n}}\right), \tag{2.5}$$

$$\gamma_2(y)=\gamma_2(\psi,\beta,y)=-\frac{R_0(y)\frac{n}{\psi(n)}}{2(2+R_0(y)\frac{n}{\psi(n)})}\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.6}$$

$$z_j(y)=z_j(\psi,\beta,k,y)=|r_j(y)|\cos(j(t_k-y)+\arg(r_j(y)))-$$

$$-R_j(y)\cos(j(t_k-y))\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2}),\ j=\overline{0,n-1}, \tag{2.7}$$

$$R_j(y)=R_j(\psi,\beta,y)=|\lambda_{n-j}(y)|-\frac{\psi(n-j)}{n-j}-\frac{\psi(n+j)}{n+j},\ j=\overline{0,n-1}, \tag{2.8}$$

$$r_j(y)=\sum_{\nu=1}^{3}r_j^{(\nu)}(y),\ j=\overline{0,n-1}, \tag{2.9}$$

$$r_j^{(1)}(y)=r_j^{(1)}(\psi,\beta,y)=\frac{\psi(3n-j)e^{i(3ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{3n-j}+$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{\psi((2m+1)n-j)e^{i((2m+1)ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{(2m+1)n-j}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi((2m-1)n+j)e^{-i((2m-1)ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2})}}{(2m-1)n+j}\right), \tag{2.10}$$

$$r_j^{(2)}(y)=r_j^{(2)}(\psi,\beta,y)=i\left(\frac{\psi(n+j)}{n+j}-\frac{\psi(n-j)}{n-j}\right)\cos(ny-\frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.11}$$

$$r_j^{(3)}(y) = r_j^{(3)}(\psi, \beta, y) = \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right) \times$$
$$\times \left(|\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})| - 1\right) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}). \qquad (2.12)$$

Доведення. Змінивши порядок підсумовування доданків у сумі в правій частині рівності (2.1), маємо

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin jt_k \cdot \rho_j(y) - \cos jt_k \cdot \sigma_j(y)}{|\lambda_j(y)|^2 \sin \frac{j\pi}{2n}} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(n-j)t_k \cdot \rho_{n-j}(y) - \cos(n-j)t_k \cdot \sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \sin \frac{(n-j)\pi}{2n}} =$$
$$= (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos jt_k \cdot \rho_{n-j}(y) - \sin jt_k \cdot \sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \cos \frac{j\pi}{2n}}. \qquad (2.13)$$

З урахуванням (2.1) і (2.13) для фундаментального SK-сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t)$, за умови $|\lambda_j(y)| \neq 0$, $j = \overline{1,n}$, одержуємо зображення

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))_\beta^\psi =$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n^2} \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos jt_k \cdot \rho_{n-j}(y) - \sin jt_k \cdot \sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \cos \frac{j\pi}{2n}} + \frac{\rho_n(y)}{|\lambda_n(y)|^2}\right). \qquad (2.14)$$

Покажемо, що величини $\lambda_{n-j}(y)$ виду (2.2) при $j = \overline{0, n-1}$ можна виразити наступним чином:

$$\lambda_{n-j}(y) = e^{-ijy} \left(\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_j(y)\right), \qquad (2.15)$$

де величини $r_j(y)$ задаються рівностями (2.9).

Перепишемо ядро $\Psi_{\beta,1}$ у комплексній формі

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}) = \frac{1}{2} {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' c_k e^{ikt},$$

де

$$c_k = \frac{\psi(k)}{k} e^{-i\frac{(\beta+1)\pi}{2}}, \ c_{-k} = \frac{\psi(k)}{k} e^{i\frac{(\beta+1)\pi}{2}}, \ k \in \mathbb{N}, \qquad (2.16)$$

а штрих біля знака суми означає, що при підсумовуванні відсутній доданок з нульовим номером.

Підставивши у (2.2) замість ядра $\Psi_{\beta,1}$ його розклад у комплексний ряд Фур'є, одержимо

$$\lambda_l(y) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} e^{il\nu\pi/n}\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{ik(y-\nu\pi/n)} = \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{i(ky+(l-k)\nu\pi/n)} =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{iky}\sum_{\nu=1}^{2n} e^{i((l-k)\nu\pi/n)}. \tag{2.17}$$

Неважко переконатись, що

$$\sum_{\nu=1}^{2n} e^{i((l-k)\nu\pi/n)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq l-2mn, m \in \mathbb{Z}; \\ 2n, & \text{якщо } k = l-2mn, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.18}$$

З (2.17) та (2.18) при $l = \overline{1,n}$ випливає наступне представлення:

$$\lambda_l(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{l-2mn} e^{i(l-2mn)y} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{2mn+l} e^{i(2mn+l)y}.$$

Звідси при $l = n-j$, $j = \overline{0, n-1}$, отримуємо

$$\lambda_{n-j}(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{(2m+1)n-j} e^{i((2m+1)n-j)y} =$$

$$= e^{-ijy}(c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} + r_j^{(1)}(y)). \tag{2.19}$$

З урахуванням (2.16) перетворимо перші два доданки в (2.19) наступним чином:

$$c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} = \frac{\psi(n-j)}{n-j}e^{i(ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2})} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}e^{-i(ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2})} =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}) +$$

$$+ i\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} - \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_j^{(2)}(y). \tag{2.20}$$

Записавши $\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})$ у вигляді

$$\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) = |\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})| \operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.21}$$

з (2.20) маємо

$$c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} = \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) +$$

$$+ \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)(|\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})| - 1)\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_j^{(2)}(y) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_j^{(2)}(y) + r_j^{(3)}(y). \tag{2.22}$$

Рівності (2.19) та (2.22) доводять формулу (2.15).

Перетворимо чисельник кожного доданка в правій частині рівності (2.14). Для цього, з урахуванням (2.15), запишемо

$$\rho_{n-j}(y) = \operatorname{Re}(\lambda_{n-j}(y)) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos jy \;\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \operatorname{Re}(e^{-ijy}r_j(y)); \tag{2.23}$$

$$\sigma_{n-j}(y) = \operatorname{Im}(\lambda_{n-j}(y)) =$$

$$= -\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin jy \;\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \operatorname{Im}(e^{-ijy}r_j(y)). \tag{2.24}$$

Застосовуючи (2.23) та (2.24), отримуємо

$$\cos jt_k \cdot \rho_{n-j}(y) - \sin jt_k \cdot \sigma_{n-j}(y) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos(j(t_k - y)) \;\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) +$$

$$+ \cos jt_k \cdot \operatorname{Re}(e^{-ijy}r_j(y)) - \sin jt_k \cdot \operatorname{Im}(e^{-ijy}r_j(y)) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j} + R_j(y)\right)\cos(j(t_k - y)) \;\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) +$$

$$+ z_j(y) = |\lambda_{n-j}(y)| \cos(j(t_k - y)) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + z_j(y), \tag{2.25}$$

де

$$z_j(y) = \cos jt_k \cdot \operatorname{Re}(e^{-ijy} r_j(y)) - \sin jt_k \cdot \operatorname{Im}(e^{-ijy} r_j(y)) -$$

$$-R_j(y) \cos(j(t_k - y)) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}),$$

а $R_j(y)$ означені у (2.8).

В силу очевидної рівності

$$e^{-ijy} r_j(y) = |r_j(y)|(\cos(\arg(r_j(y)) - jy) + i \sin(\arg(r_j(y)) - jy))$$

величину $z_j(y)$ можна зобразити у вигляді (2.7).

При $j = 0$ формула (2.15) перетворюється в наступну рівність:

$$\lambda_n(y) = 2\frac{\psi(n)}{n} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_0(y), \tag{2.26}$$

де $r_0(y)$ визначається формулою (2.9), у якій

$$r_0^{(1)}(y) = 2\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\psi((2m-1)n)}{(2m-1)n} \cos((2m-1)ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}), \tag{2.27}$$

$$r_0^{(2)}(y) = 0, \tag{2.28}$$

$$r_0^{(3)}(y) = 2\frac{\psi(n)}{n}(|\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})| - 1) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}). \tag{2.29}$$

З (2.26)–(2.29) випливає, що $\sigma_n(y) = 0$ і тому

$$\rho_n(y) = \lambda_n(y) = 2\frac{\psi(n)}{n} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + r_0(y).$$

Звідси, враховуючи (2.7) та (2.8), можна записати

$$\rho_n(y) = \left(2\frac{\psi(n)}{n} + R_0(y)\right) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + z_0(y) =$$

$$= |\lambda_n(y)| \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + z_0(y), \tag{2.30}$$

де

$$z_0(y) = r_0(y) - R_0(y)\,\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}).$$

Із зображення (2.14) і рівностей (2.25) та (2.30) отримуємо

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n\psi(n)} \left(\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) \left(2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos\frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n)}{n|\lambda_n(y)|} \right) + \right.$$

$$\left. +2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \cos\frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n) z_0(y)}{n|\lambda_n(y)|^2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n\psi(n)} \left(\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos\frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n)}{n|\lambda_n(y)|} \right) + \gamma_1(y) \right). \tag{2.31}$$

В силу (2.8)

$$\frac{\psi(n)\,\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})}{n|\lambda_n(y)|} = \frac{\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})}{2 + R_0(y)\frac{n}{\psi(n)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{R_0(y)\frac{n}{\psi(n)}}{2(2 + R_0(y)\frac{n}{\psi(n)})} \right) \mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \gamma_2(y). \tag{2.32}$$

Із (2.31) та (2.32) отримуємо (2.4). Лему доведено.

Лема 2.1 дозволяє одержати зручне для подальших досліджень зображення величин $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta}$, що породжуються ядрами Ψ_β вигляду (1.5), коефіцієнти $\psi(k)$ яких належать множині $\mathcal{D}_q$, тобто виконується умова (1.10).

Лема 2.2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y \in [0, \frac{\pi}{n})$. *Тоді при виконанні умови* (2.3) *для довільного* $t \in (\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n})$, $k = \overline{1, 2n}$, *справедлива рівність*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4n\psi(n)} \left(\mathcal{P}_q(t_k - y) \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \sum_{m=1}^{5} \gamma_m(y) \right), \tag{2.33}$$

в якій $t_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$, $\mathcal{P}_q(t)$ — *ядро аналітично продовжуваних в смугу функцій:*

$$\mathcal{P}_q(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jt}{q^j + q^{-j}}, \ q \in (0,1), \tag{2.34}$$

величини $\gamma_1(y)$ *та* $\gamma_2(y)$ *задані рівностями* (2.5) *і* (2.6) *відповідно, а*

$$\gamma_3(y) = \gamma_3(\psi, \beta, k, y) = 2 \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} \frac{\cos j(t_k - y)}{\frac{n}{\psi(n)} |\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.35}$$

$$\gamma_4(y) = \gamma_4(\psi, \beta, k, y) = -2 \sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\delta_j(y) \cos j(t_k - y)}{\frac{n}{\psi(n)} |\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.36}$$

$$\gamma_5(y) = \gamma_5(q, \beta, k, y) = -2 \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty} \frac{\cos j(t_k - y)}{q^j + q^{-j}} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}), \tag{2.37}$$

$$\delta_j(y) = \delta_j(\psi, y) = \frac{n |\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}}{(q^{-j} + q^j)\psi(n)} - 1, \ j = \overline{1, [\sqrt{n}]}, \tag{2.38}$$

$[a]$ — *ціла частина числа* a.

Доведення. Згідно з (2.35)

$$2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) =$$

$$= 2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} \operatorname{sign} \sin(ny - \frac{\beta\pi}{2}) + \gamma_3(y). \tag{2.39}$$

Далі в силу формул (2.36)–(2.38) можна записати рівності

$$2\frac{\psi(n)}{n}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{|\lambda_{n-j}(y)|\cos\frac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{(q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y))}\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=\left(2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{q^j+q^{-j}}-2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\delta_j(y)\cos j(t_k-y)}{(q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y))}\right)\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=\left(\mathcal{P}_q(t_k-y)-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sign}\sin(ny-\frac{\beta\pi}{2})+\gamma_4(y)+\gamma_5(y), \tag{2.40}$$

Із (2.4), (2.39) та (2.40) отримуємо (2.33). Лему доведено.

2.2. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона

Для кожного фіксованого $q \in (0,1)$ позначимо через n_q найменший з номерів $n \geqslant 9$, для яких виконується нерівність

$$\frac{43}{10(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \tag{2.41}$$

Теорема 2.1. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх номерів $n \geqslant n_q$ мають місце оцінки*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{2.42}$$

$$d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{2.43}$$

в яких φ_n означена рівністю (1.31).

Доведення. Відповідно до теореми 1.16 достатньо показати, що для довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і всіх номерів $n \geqslant n_q$ ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ задовольняють умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій функція $|\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)|$, де $\Phi_{q,\beta,n}(\cdot) = (P_{q,\beta} * \varphi_n)(\cdot)$, а $\varphi_n(\cdot)$ задана рівністю (1.31), досягає найбільшого значення, тобто

$$|\Phi_{q,\beta,n}(y_0)| = |(P_{q,\beta} * \varphi_n)(y_0)| = \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C.$$

Функція

$$\Phi_{q,\beta,n}(\cdot) = (P_{q,\beta} * \varphi_n)(\cdot) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)n\cdot - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

періодична з періодом $2\pi/n$ і така, що $\Phi_{q,\beta,n}(\cdot + \dfrac{\pi}{n}) = -\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)$. Тому максимальне значення π/n-періодичної функції $|\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)|$ на $[0, \dfrac{\pi}{n})$

досягається у точці $y_0 = y_0(n,q,\beta) = \dfrac{\theta_n\pi}{n}$, де θ_n — корінь рівняння (1.32), $\theta_n \in [0,1)$. Оскільки $|\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)| = |\Phi_{q,\beta+2,n}(\cdot)|$, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\beta \in [0,2)$. Для вказаних значень β єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (1.32) можна записати в явному вигляді наступним чином:

$$\theta_n = 1 - [\beta] - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{(1-q^{2n})\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\beta\pi + q^{4n}}},\quad \beta\in[0,2), \tag{2.44}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a.

Функції $\Psi_{\beta,1}(t)$ вигляду (1.16), які породжуються ядрами Пуассона $\Psi_\beta(t) = P_{q,\beta}(t)$, позначатимемо через $P_{q,\beta,1}(t)$, а фундаментальний SK-сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,\cdot)$ — через $\overline{SP}_{q,\beta,1}(y,\cdot)$.

Наступне твердження містить оцінку зверху суми $\sum\limits_{k=1}^{5}|\gamma_k(y_0)|$ у випадку, коли $\psi(k) = q^k$, $q\in(0,1)$.

Лема 2.3. *Нехай $\psi(k) = q^k$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $y_0 = y_0(n,q,\beta) = \dfrac{\theta_n\pi}{n}$, де θ_n — корінь рівняння (1.32) і $\theta_n\in[0,1)$, а величини $\gamma_k(y_0)$, $k=\overline{1,5}$ задаються рівностями (2.5), (2.6), (2.35)–(2.37) при $\psi(k)=q^k$. Тоді при $n\geqslant 9$ та при виконанні умови*

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} \leqslant \frac{7q^{\sqrt{n}}}{37n^2} \tag{2.45}$$

для довільного $t\in(\frac{(k-1)\pi}{n},\frac{k\pi}{n})$, $k=\overline{1,2n}$, має місце зображення

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y_0,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4nq^n}\left(\mathcal{P}_q(t_k-y_0)\operatorname{sign}\sin(ny_0-\frac{\beta\pi}{2}) + \sum_{l=1}^{5}\gamma_l(y_0)\right), \tag{2.46}$$

та справедлива оцінка

$$\sum_{k=1}^{5}|\gamma_k(y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{43}{10(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})},\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}. \tag{2.47}$$

Доведення. Як випливає з (2.44) (див. також [65, с. 114]), виконуються включення

$$ny_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ при } \beta \in [0,1) \cup [2,3), \tag{2.48}$$

$$ny_0 \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ при } \beta \in [1,2) \cup [3,4). \tag{2.49}$$

Тоді, згідно з рівністю (19) роботи [62] і лемою 2 із [62], $|\lambda_j(y_0)| \neq 0$, $j = \overline{1,n}$. Отже, відповідно до леми 2.2, має місце зображення (2.46).

Оцінимо окремо кожен з доданків $|\gamma_k(y_0)|$, $k = \overline{1,5}$. Для цього спочатку знайдемо оцінки зверху величин $|r_j(y_0)|$ та $|R_j(y_0)|$ при $j = \overline{0,n-1}$. Враховуючи, що внаслідок опуклості послідовності $\dfrac{q^k}{k}$ виконується нерівність $\dfrac{q^{k-j}}{k-j} + \dfrac{q^{k+j}}{k+j} < \dfrac{q^{k-n}}{k-n} + \dfrac{q^{k+n}}{k+n}$, $k > n$, $j = \overline{0,n-1}$, з (2.10) знаходимо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leqslant \frac{q^{3n-j}}{3n-j} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m-1)n+j}}{(2m-1)n+j} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m+1)n+j}}{(2m+1)n+j} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2mn}}{2mn} + \frac{q^{2(m+1)n}}{2(m+1)n} \right) =$$

$$= \frac{q^{2n}}{2n} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q^{2mn}}{mn} \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2n}}{2n(1-q^{2n})}. \tag{2.50}$$

Оскільки $y_0 = \dfrac{\theta_n \pi}{n}$, то з (1.32) отримуємо

$$\left| \cos\left(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu n} \cos\left((2\nu+1)ny_0 - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu n} = \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}. \tag{2.51}$$

З (2.11) та (2.51) маємо

$$|r_j^{(2)}(y_0)| \leqslant |\cos(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2})| \left(\frac{q^{n-j}}{n-j} - \frac{q^{n+j}}{n+j} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(q-\frac{q^{2n-1}}{2n-1}\right). \tag{2.52}$$

З (2.51) випливає, що

$$0 \leqslant 1-|\sin(ny_0-\frac{\beta\pi}{2})| \leqslant |\cos(ny_0-\frac{\beta\pi}{2})| \leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}. \tag{2.53}$$

Із (2.12) та (2.53) знаходимо

$$|r_j^{(3)}(y_0)| \leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(q+\frac{q^{2n-1}}{2n-1}\right). \tag{2.54}$$

Отже, для величини $r_j(y_0)$ з (2.50), (2.52) та (2.54) випливає оцінка

$$|r_j(y_0)| \leqslant |\sum_{\nu=1}^{3} r_j^{(\nu)}(y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(2q+\frac{1}{2n}\right) \leqslant \frac{37q^{2n}}{18(1-q^{2n})}, j=\overline{0,n-1}. \tag{2.55}$$

При $j=0$ оцінку (2.55) можна покращити. Дійсно, в силу (2.27) та (2.29) при $j=0$ маємо

$$|r_0^{(1)}(y_0)| \leqslant 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{q^{(2m-1)n}}{(2m-1)n} \leqslant \frac{2}{3n}\sum_{m=2}^{\infty}q^{(2m-1)n} = \frac{2}{3n}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},$$

$$\left|r_0^{(3)}(y_0)\right| \leqslant \frac{2q^{3n}}{n(1-q^{2n})}.$$

Тоді, враховуючи (2.28),

$$|r_0(y_0)| \leqslant |r_0^{(1)}(y_0)+r_0^{(3)}(y_0)| \leqslant \frac{8}{3n}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}. \tag{2.56}$$

Із (2.15) для величини $|R_j(y_0)|$ вигляду (2.8) отримуємо зображення

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| = \left|(-1)^s\left(\frac{q^{n-j}}{n-j}+\frac{q^{n+j}}{n+j}\right)+r_j(y_0)\right|,$$

з якого безпосередньо випливають оцінки

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \leqslant \frac{q^{n-j}}{n-j}+\frac{q^{n+j}}{n+j}+|r_j(y_0)|, \tag{2.57}$$

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \geqslant \frac{q^{n-j}}{n-j} + \frac{q^{n+j}}{n+j} - |r_j(y_0)|. \tag{2.58}$$

В силу (2.8), (2.57) та (2.58)

$$|R_j(y_0)| \leqslant |r_j(y_0)|, \ j = \overline{0, n-1}. \tag{2.59}$$

Перейдемо до оцінки величини $|\gamma_1(y_0)|$. Враховуючи, що для $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ справджується нерівність $\cos x \geqslant 1 - \frac{2x}{\pi} > 0$, отримуємо

$$\cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant 1 - \frac{j}{n} = \frac{n-j}{n}, \ j = \overline{0, n-1}. \tag{2.60}$$

Взявши до уваги оцінки (2.58), (2.55) та (2.60), маємо

$$\frac{n}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)| \cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant \frac{n}{q^n}\left(\frac{q^{n-j}}{n-j} + \frac{q^{n+j}}{n+j} - \frac{37q^{2n}}{18(1-q^{2n})}\right)\frac{n-j}{n} =$$

$$= q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{37(n-j)q^n}{18(1-q^{2n})}. \tag{2.61}$$

Оскільки при $n \geqslant 9$

$$\frac{9q^{-j}}{10} > \frac{9}{10} > \frac{7}{9} > \frac{7q^{\sqrt{n}}}{n},$$

то з умови (2.45) випливає нерівність

$$\frac{9q^{-j}}{370n} > \frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

яка еквівалентна наступній нерівності:

$$\frac{q^{-j}}{20} > \frac{37nq^n}{18(1-q^{2n})}, \ j = \overline{0, n-1}. \tag{2.62}$$

В силу (2.62) виконуються оцінки

$$q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{37(n-j)q^n}{18(1-q^{2n})} =$$

$$= \frac{19}{20}q^{-j} + \frac{q^{-j}}{20} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{37(n-j)q^n}{18(1-q^{2n})} > \frac{19}{20}q^{-j}, \ j = \overline{0, n-1}. \tag{2.63}$$

Об'єднуючи (2.61) та (2.63), маємо

$$\frac{n}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|\cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant \frac{19q^{-j}}{20}. \tag{2.64}$$

Тому, взявши до уваги (2.64), з (2.35) знаходимо

$$|\gamma_1(y_0)| \leqslant \frac{40}{19}\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} q^j = \frac{40(q^{[\sqrt{n}]+1} - q^{n-1})}{19(1-q)} \leqslant \frac{40q^{\sqrt{n}}}{19(1-q)}. \tag{2.65}$$

Оцінимо величину $|\gamma_2(y_0)|$. Взявши до уваги оцінки (2.55), (2.58), (2.60) та (2.63), маємо

$$\frac{n}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|^2\cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{q^n}\left(\frac{q^{n-j}}{n-j} + \frac{q^{n+j}}{n+j} - \frac{37q^{2n}}{18(1-q^{2n})}\right)^2 \frac{n-j}{n} =$$

$$= \frac{q^n}{n-j}\left(q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{37(n-j)q^n}{18(1-q^{2n})}\right)^2 > \frac{361q^{n-2j}}{400n}. \tag{2.66}$$

З (2.59) і (2.7) випливає, що $|z_j(y_0)| \leqslant 2|r_j(y_0)|$. Тому враховуючи (2.55), (2.66) та умову (2.45), з (2.5) одержуємо

$$|\gamma_2(y_0)| \leqslant \frac{1600}{361}\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|r_j(y_0)|\frac{n}{q^n}\sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} < \frac{29600\,nq^n}{3249(1-q^{2n})}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{29600\,n}{3249}\,\frac{7q^{\sqrt{n}}}{37n^2}\,\frac{1}{1-q^2} \leqslant \frac{5600}{3249n}q^{\sqrt{n}}\,\frac{1}{1-q^2}. \tag{2.67}$$

Оцінимо $|\gamma_3(y_0)|$. З умови (2.45) при $n \geqslant 9$ випливає нерівність

$$q^{2n} \leq \frac{49}{8982009}.$$

Тоді з (2.6), (2.59), (2.56) і (2.45) отримуємо

$$|\gamma_3(y_0)| \leqslant \frac{\dfrac{8q^{2n}}{3(1-q^{2n})}}{2\left|2 - \dfrac{8q^{2n}}{3(1-q^{2n})}\right|} = \frac{2q^{2n}}{3-7q^{2n}} = \frac{1-q^{2n}}{3-7q^{2n}}\,\frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{7} + \frac{4}{7(3-7q^{2n})}\right)\frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} <$$

$$< \frac{3}{7}\frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{6q^{n+\sqrt{n}}}{37n^2}. \tag{2.68}$$

Перш ніж оцінити величину $|\gamma_4(y_0)|$ встановимо оцінки зверху для $|\delta_j(y_0)|$ вигляду (2.38). В силу (2.8)

$$\frac{n}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|\cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-j}\frac{q^{n-j}}{q^n} + \frac{n}{n+j}\frac{q^{n+j}}{q^n} + R_j(y_0)\frac{n}{q^n}\right)\cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left((1+\frac{j}{n-j})q^{-j} + (1-\frac{j}{n+j})q^j + R_j(y_0)\frac{n}{q^n}\right)\cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= (q^{-j}+q^j)(1-2\sin^2\frac{j\pi}{4n})+$$

$$+ \left(\frac{j}{n-j}q^{-j} - \frac{j}{n+j}q^j + R_j(y_0)\frac{n}{q^n}\right)\cos\frac{j\pi}{2n}. \tag{2.69}$$

З (2.38), (2.55), (2.59), (2.69) та опуклості послідовності q^k для величин $|\delta_j(y_0)|$ випливають нерівності

$$|\delta_j(y_0)| \leqslant 2\sin^2\frac{j\pi}{4n} + \frac{1}{q^{-j}+q^j}\left(\frac{j}{n-j}q^{-j} + \frac{j}{n-j}q^j + |R_j(y_0)|\frac{n}{q^n}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{j\pi}{4n}\right)^2 + \frac{j}{n-j} + \frac{n|r_j(y_0)|}{q^{n-j}+q^{n+j}} \leqslant \frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{j}{n-j} + \frac{37nq^n}{36(1-q^{2n})} =$$

$$= \frac{4j}{3(n-j)} + \left(\frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{37nq^n}{36(1-q^{2n})} - \frac{j}{3(n-j)}\right). \tag{2.70}$$

Покажемо, що для усіх $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$ вираз у дужках в правій частині (2.70) від'ємний, тобто має місце нерівність

$$\frac{j}{3(n-j)} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} > \frac{37nq^n}{36(1-q^{2n})}. \tag{2.71}$$

Тоді з (2.70) і (2.71) випливатиме, що

$$|\delta_j(y_0)| \leqslant \frac{4j}{3(n-j)}. \tag{2.72}$$

Дійсно, при кожному фіксованому $x \geqslant 9$ функція

$$f(x,\tau) = \frac{\tau}{3(x-\tau)} - \frac{\tau^2\pi^2}{8x^2}$$

опукла вгору на $[1, \sqrt{x}]$. Тому вона набуває найменшого значення при $\tau = 1$ або $\tau = \sqrt{x}$. Розглянемо різницю $f(x,1) - f(x,\sqrt{x})$ при $x \geqslant 9$:

$$f(x,1) - f(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{\pi^2}{8x^2} - \frac{\sqrt{x}}{3(x-\sqrt{x})} + \frac{x\pi^2}{8x^2} =$$

$$= \frac{-8x^2\sqrt{x} + 3\pi^2(x-1)^2}{24x^2(x-1)}. \tag{2.73}$$

Оскільки, як не важко переконатися, функція $g(x) = -8x^2\sqrt{x}+3\pi^2(x-1)^2$ спадає на $[9, +\infty)$ і $g(9) < 0$, то в силу (2.73) $f(x,1) - f(x,\sqrt{x}) < 0$. При $n \geqslant 9$, з урахуванням (2.45), маємо для всіх $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$

$$\frac{j}{3(n-j)} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} \geqslant \frac{1}{3(n-1)} - \frac{\pi^2}{8n^2} > \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) >$$

$$> \frac{7}{36n} > \frac{7q^{\sqrt{n}}}{36n} > \frac{37nq^n}{36(1-q^{2n})}.$$

Звідси випливає справедливість (2.71), а отже, і (2.72).

Формули (2.36), (2.64) та (2.72) дозволяють одержати при $n \geqslant 9$ наступну оцінку величини $\gamma_4(y_0)$:

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\dfrac{4j}{3(n-j)}}{\dfrac{19q^{-j}}{20}} = \frac{160}{57}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{j}{n-j}q^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{160}{57(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} jq^j < \frac{160}{57(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{\infty} jq^j <$$

$$< \frac{160}{57(n-\sqrt{n})}\,\frac{q}{(1-q)^2}. \tag{2.74}$$

Поряд з (2.74) можна отримати також іншу оцінку зверху величини $\gamma_4(y_0)$. Записавши рівність (2.38) у вигляді

$$\frac{n}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|\cos\frac{j\pi}{2n} = (q^j + q^{-j})(1 + \delta_j(y_0)),$$

з (2.36) та (2.72) одержуємо, що при $n \geqslant 9$

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\dfrac{4j}{3(n-j)}}{|1-\dfrac{4j}{3(n-j)}|} q^j = 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{4j}{3n-7j} q^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{3n-7\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} jq^j < \frac{8}{3n-7\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} jq^j <$$

$$< \frac{8}{3n-7\sqrt{n}} \, \frac{q}{(1-q)^2}. \tag{2.75}$$

З (2.74) та (2.75) отримуємо

$$|\gamma_4(y_0)| < \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}. \tag{2.76}$$

В силу (2.37) для величини $|\gamma_5(y_0)|$ маємо

$$|\gamma_5(y_0)| \leqslant 2 \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty} q^j = 2\frac{q^{[\sqrt{n}]+1}}{1-q} < 2\frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}. \tag{2.77}$$

Взявши до уваги оцінки (2.65), (2.67), (2.68), (2.76) та (2.77), при $n \geqslant 9$ одержимо

$$\sum_{k=1}^{5} |\gamma_k(y_0)| <$$

$$< \frac{40q^{\sqrt{n}}}{19(1-q)} + \frac{5600}{3249n} q^{\sqrt{n}} \, \frac{1}{1-q^2} + \frac{6q^{n+\sqrt{n}}}{37n^2} +$$

$$+ \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} + \frac{2q^{\sqrt{n}}}{1-q} <$$

$$< \frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}(2{,}1053 + 0{,}1916 + 0{,}0021 + 2) +$$

$$+ \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} <$$

$$< \frac{43}{10(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}.$$

Лему доведено.

Наступна лема містить оцінку знизу мінімального значення ядра $\mathcal{P}_q(\cdot)$ вигляду (2.34).

Лема 2.4. *Нехай* $q \in (0,1)$. *Тоді для довільного* $x \in \mathbb{R}$ *має місце нерівність*

$$\mathcal{P}_q(x) > \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \tag{2.78}$$

Доведення. Використаємо наступне зображення для ядра $\mathcal{P}_q(x)$, яке виводиться у теорії еліптичних функцій (див., наприклад, [19, с. 925]):

$$\mathcal{P}_q(x) = \frac{K}{\pi}\,\mathrm{dn}\left(\frac{Kx}{\pi}\right), \tag{2.79}$$

де

$$K = \pi\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^j}{1+q^{2j}}\right). \tag{2.80}$$

Згідно з формулою (8.146.22) із [19, с. 926], маємо

$$\mathrm{dn}\left(\frac{Kx}{\pi}\right) = \exp\left\{-8\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j-1}\,\frac{q^{2j-1}}{1-q^{2(2j-1)}}\sin^2\frac{2j-1}{2}x\right\}, \tag{2.81}$$

В силу рівності

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu-1}}{2\nu-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$$

(див., наприклад, [19, с. 58]) справедлива оцінка

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j-1}\,\frac{q^{2j-1}}{1-q^{2(2j-1)}}\sin^2\frac{2j-1}{2}x <$$

$$< \frac{1}{1-q^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^{2j-1}}{2j-1} = \frac{1}{1-q^2}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}. \tag{2.82}$$

З (2.81) і (2.82) випливає нерівність

$$\mathrm{dn}\left(\frac{Kx}{\pi}\right) > \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}, \tag{2.83}$$

а з (2.80) — нерівність

$$\frac{K}{\pi} > \frac{1}{2} + \frac{2}{1+q^2}\sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}. \tag{2.84}$$

Формули (2.79), (2.83) і (2.84) доводять (2.78). Лему доведено.

З доведених вище лем 2.1–2.4 випливає, що при $n \geqslant 9$ за умов (2.41) та (2.45)

$$\mathcal{P}_q(t_k - y_0) + \sum_{m=1}^{5} \gamma_m(y_0) \geqslant 0. \tag{2.85}$$

В силу зображення (2.46), а також нерівності (2.85) робимо висновок, що при $n \geqslant 9$ за виконання умов (2.41) та (2.45) справедливе включення $P_{q,\beta}(t) \in C_{y_0,2n}$.

Зазначимо, що при $q \in \left(0, \dfrac{91}{250}\right]$ умова (2.45) виконується для довільних $n \geqslant 9$. Для того, щоб у цьому переконатись досить помітити, що послідовність

$$\xi(n) = (n - \sqrt{n}) \ln \frac{91}{250} + 2\ln n - \ln\left(\frac{7}{37}\left(1 - \left(\frac{91}{250}\right)^{18}\right)\right)$$

монотонно спадна при $n \geqslant 9$ і $\xi(9) < 0$. Тому при $n \geqslant 9$

$$(n - \sqrt{n}) \ln \frac{91}{250} + 2\ln n - \ln\left(\frac{7}{37}\left(1 - \left(\frac{91}{250}\right)^{18}\right)\right) < 0. \tag{2.86}$$

Нерівність (2.86) еквівалентна нерівності

$$\frac{\left(\frac{91}{250}\right)^{n-\sqrt{n}}}{1 - \left(\frac{91}{250}\right)^{18}} < \frac{7}{37n^2},$$

а, тому при $q \in \left(0, \dfrac{91}{250}\right]$

$$\frac{q^{n-\sqrt{n}}}{1 - q^{2n}} < \frac{\left(\frac{91}{250}\right)^{n-\sqrt{n}}}{1 - \left(\frac{91}{250}\right)^{18}} < \frac{7}{37n^2}.$$

Отже, для доведення теореми 2.1 достатньо показати, що при $n \geqslant 9$ і $q \in \left(\dfrac{91}{250}, 1\right)$ має місце імплікація

$$(2.41) \Rightarrow (2.45). \tag{2.87}$$

Доведемо вказану імплікацію спочатку для номерів n таких, що

$$\min\left\{\frac{8}{3n - 7\sqrt{n}}, \frac{160}{57(n - \sqrt{n})}\right\} = \frac{160}{57(n - \sqrt{n})}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)} \leqslant \frac{1+q}{1-q}, \tag{2.88}$$

то з (2.41) випливає нерівність

$$\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}\ \frac{q}{(1-q)^2} < \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}-1},$$

а, отже, й еквівалентна їй нерівність

$$n - \sqrt{n} - \frac{160q}{57(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}-1} > 0. \tag{2.89}$$

Із (2.89) випливає

$$n > \frac{160q}{57(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3. \tag{2.90}$$

Отже, при $n \geqslant 9$ і $q \in (0, 1)$

$$(2.41) \Rightarrow (2.90). \tag{2.91}$$

Далі покажемо, що при $n \geqslant 9$ і $q \in (0, 1)$ нерівність (2.45) випливає з нерівності

$$n > \left(\frac{9(1+q)}{4(1-q)}\right)^2. \tag{2.92}$$

Оскільки (див., наприклад, [19, с. 58]) для довільного $q \in (0, 1)$

$$\ln\frac{1}{q} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{2k-1} > 2\frac{1-q}{1+q},$$

то

$$\left(\frac{9(1+q)}{4(1-q)}\right)^2 > \left(\frac{9}{4\frac{1-q}{1+q}}\right)^{\frac{125}{79}} > \left(\frac{9}{2\ln 1/q}\right)^{\frac{125}{79}}. \tag{2.93}$$

Із (2.92) і (2.93) випливає нерівність

$$n > \left(\frac{9}{2\ln 1/q}\right)^{\frac{125}{79}},$$

яка еквівалентна нерівності

$$\frac{2}{3}n\ln\frac{1}{q} > 3n^{\frac{46}{125}}. \tag{2.94}$$

Оскільки при $n \in \mathbb{N}$ $\ln n < n^{\frac{46}{125}}$ і при $n \geqslant 9$ $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{2}{3}$, то з (2.94) випливає

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\frac{1}{q} > 3\ln n. \tag{2.95}$$

При $n \geqslant 9$ із (2.95) одержуємо

$$\frac{1}{q^n} > \frac{n^3}{q^{\sqrt{n}}} > \frac{9n^2}{q^{\sqrt{n}}} > \frac{38n^2}{7q^{\sqrt{n}}} = \frac{37n^2}{7q^{\sqrt{n}}} + \frac{n^2}{7q^{\sqrt{n}}} > \frac{37n^2}{7q^{\sqrt{n}}} + q^n.$$

Отже, при $n \geqslant 9$ і $q \in (0,1)$

$$(2.92) \Rightarrow (2.45). \tag{2.96}$$

Залишилось довести, що при $q \in \left(\frac{91}{250}, 1\right)$ і $n \geqslant 9$

$$(2.90) \Rightarrow (2.92). \tag{2.97}$$

Для цього розглянемо різницю правих частин в нерівностях (2.90) та (2.92), поклавши

$$v(q) = \frac{160q}{57(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3 - \left(\frac{9(1+q)}{4(1-q)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2\left(\frac{160q(1+q)}{57(1-q)^3} - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right). \tag{2.98}$$

Оскільки $q \in \left(\dfrac{91}{250}, 1\right)$, то

$$\frac{160q(1+q)}{57(1-q)^3} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 > 0. \tag{2.99}$$

З (2.98) та (2.99) отримуємо нерівність $v(q) > 0$, а також і (2.97). При $q \in \left(\dfrac{91}{250}, 1\right)$ з (2.91), (2.96) та (2.97) випливає (2.87).

Тому залишається довести імплікацію (2.87) при тих $n \in \mathbb{N}$, для яких

$$\min\left\{\frac{8}{3n - 7\sqrt{n}}, \frac{160}{57(n-\sqrt{n})}\right\} = \frac{8}{3n - 7\sqrt{n}}. \tag{2.100}$$

З (2.41), (2.88) та (2.100) випливає нерівність

$$\frac{8}{3n - 7\sqrt{n}}\,\frac{q}{(1-q)^2} < \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}-1},$$

а, отже, й еквівалентна їй нерівність

$$3n - 7\sqrt{n} - \frac{8q}{(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}-1} > 0. \tag{2.101}$$

З (2.101) випливає

$$n > \frac{8q}{3(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3. \tag{2.102}$$

Отже, при $n \geqslant 9$ і $q \in (0,1)$

$$(2.41) \Rightarrow (2.102). \tag{2.103}$$

Залишилось довести, що при $q \in \left(\dfrac{91}{250}, 1\right)$ і $n \geqslant 9$

$$(2.102) \Rightarrow (2.92). \tag{2.104}$$

Для цього розглянемо різницю $v(q)$ правих частин в нерівностях (2.102) та (2.92)

$$v(q) = \frac{8q}{3(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3 - \left(\frac{9(1+q)}{4(1-q)}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 \left(\frac{8q(1+q)}{3(1-q)^3} - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right). \tag{2.105}$$

Оскільки $q \in \left(\frac{91}{250}, 1\right)$, то

$$\frac{8q(1+q)}{3(1-q)^3} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 > 0. \tag{2.106}$$

З (2.105) та (2.106) отримуємо нерівність $v(q) > 0$, а разом з нею і (2.104). Об'єднуючи формули (2.103), (2.96) та (2.104) одержуємо (2.87) при $q \in \left(\frac{91}{250}, 1\right)$. Теорему доведено.

2.3. Теореми про точні значення поперечників класів інтегралів Пуассона

Наступне твердження містить точні оцінки колмогоровських поперечників класів $C^q_{\beta,\infty}$ та $C^q_{\beta,1}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $q \in (0,1)$. *Тоді для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$ *та усіх номерів* $n \geqslant n_q$, *де* n_q *— найменший з номерів* $n \geqslant 9$, *для яких виконується умова* (2.41), *мають місце наступні рівності:*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (2.107)$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ *— єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння* (1.32), *а* φ_n *означена рівністю* (1.31).

Зокрема, при $n \geqslant n_q$ *і* $\beta \in \mathbb{Z}$ *виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} q^n,\ \beta = 2k,\ k \in \mathbb{Z}; \qquad (2.108)$$

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = E_n(C^q_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+q^n}{1-q^n},\ \beta = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (2.109)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.1 для $n \geqslant n_q$ мають місце нерівності (2.42) і (2.43), які в поєднанні з формулами (1.20), (1.30) та співвідношенням $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ доводять (2.107) при $\beta \in \mathbb{R}$. Доведемо (2.108) та (2.109).

Як випливає з (2.44) при $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ єдиним на $[0,1)$ коренем рівняння (1.32) є значення $\theta_n = \dfrac{1}{2}$. Оскільки в даному випадку

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= (-1)^k \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} = (-1)^k \operatorname{arctg} q^n,$$

то з (2.107) одержуємо (2.108).

При $\beta = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$ коренем рівняння (1.32), як випливає з (2.44), є значення $\theta_n = 0$. Оскільки

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= (-1)^k \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} = (-1)^k \frac{1}{2} \ln \frac{1+q^n}{1-q^n},$$

то з (2.107) отримуємо рівності (2.109). Теорему доведено.

Теореми 2.2 та 1.18 дають змогу записати наступне твердження про значення поперечників $d_m(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2m-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, яке охоплює відомі на даний час результати [30, 39, 55, 57, 83]. Для його формулювання позначимо

$$n_{q,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q \in (0, 0{,}2] \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0, 0{,}196881] \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ n_q, & \text{якщо } q \in (0{,}2, 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0{,}196881, 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|, \qquad (2.110)$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (1.32), *а φ_n означена рівністю* (1.31).

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми із роботи О.К. Кушпеля [31], можна показати, що при виконанні умов теореми 2.3 виконуються нерівності

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{2.111}$$

$$d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \geqslant b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \geqslant \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C. \tag{2.112}$$

З теорем 1.5 та 1.9 випливає справедливість рівностей (1.43) при $\psi(k) = q^k$, $q \in (0,1)$. Тому, співставляючи оцінки (2.111) та (2.112) з рівностями (1.43), (1.30) і очевидними співвідношеннями

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) \leqslant \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C,$$

$$d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) \leqslant \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L,$$

де μ^* і ν^* означаються рівностями

$$\mu^*_0 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2n\nu} \cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\mu^*_k = q^k \cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(q^{2n\nu-k} + q^{2n\nu+k}) \cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

$$\nu^*_k = q^k \sin\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(q^{2n\nu-k} + q^{2n\nu+k}) \sin(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

отримуємо наступне твердження.

Теорема 2.4. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|, \qquad (2.113)$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ *— единий на* $[0,1)$ *корінь рівняння* (1.32).

Зазначимо, що у роботі [7] було встановлено, що для довільних $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ справедлива рівність

$$4 \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| =$$

$$= 2\cos\beta \operatorname{arctg} \frac{2q^n \cos\beta}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}}} +$$

$$+ \sin\beta \ln \frac{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}} + 2q^n \sin\beta}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}} - 2q^n \sin\beta}.$$

Отже, теорему 2.4 можна переписати у наступному вигляді.

Теорема 2.4′. *Нехай* $q \in (0,1)$. *Тоді для довільного* $\beta \in \mathbb{R}$ *та усіх номерів* $n \geqslant n_{q,\beta}$ *мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|P_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{2}{\pi} \cos\beta \operatorname{arctg} \frac{2q^n \cos\beta}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin\beta \ln \frac{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}} + 2q^n \sin\beta}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\beta + q^{4n}} - 2q^n \sin\beta}.$$

Теорема 2.2 дозволяє оцінити асимптотичну при $n \to \infty$ поведінку поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $\lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$.

Теорема 2.5. *Нехай* $q \in (0,1)$ *та* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \geqslant n_{q,\beta}$

$$d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^q_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= E_n(C^q_{\beta,1})_L = q^n \left(\frac{4}{\pi} + \gamma_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \right), \tag{2.114}$$

де $|\gamma_n| \leqslant \dfrac{16}{3\pi}$.

Доведення. Знайдемо двосторонні оцінки правої частини формули (2.113). Оскільки,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \leqslant \frac{1}{3} \frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}, \ n \in \mathbb{N},$$

і в силу формули (2.21)

$$1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}, \ n \in \mathbb{N},$$

то одержуємо для довільних $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \geqslant q^n - q^n \left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \right) -$$

$$- \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant q^n \left(1 - \frac{4}{3} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \right), \tag{2.115}$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leqslant q^n + q^n \left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \right) +$$

$$+\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant q^n\left(1+\frac{4}{3}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right). \qquad (2.116)$$

З теореми 2 та оцінок (2.115) і (2.116) випливає, що при $n \geqslant n_{q,\beta}$ виконується (2.114). Теорему доведено.

Важливо зазначити, що встановлені в даному розділі оцінки (2.42), (2.43), (2.107)–(2.109) та (2.113) неможливо отримати, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом [44] для класів згорток із ядрами, що не збільшують осциляції. Доведемо це на прикладі ядер Пуассона $P_{q,0}(t)$ та $P_{q,1}(t)$ при $q=0{,}21$.

Згідно з наслідком 1.1, щоб довести, що ядро Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ не є CVD_{2n}-ядром ні при яких $n\in\mathbb{N}$, достатньо показати, що знайдуться вектори $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $0\leqslant x_1<x_2<x_3<2\pi$, та $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$, $0\leqslant y_1<y_2<y_3<2\pi$, для яких детермінант

$$D_3(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{vmatrix}P_{q,\beta}(x_1-y_1) & P_{q,\beta}(x_1-y_2) & P_{q,\beta}(x_1-y_3)\\ P_{q,\beta}(x_2-y_1) & P_{q,\beta}(x_2-y_2) & P_{q,\beta}(x_2-y_3)\\ P_{q,\beta}(x_3-y_1) & P_{q,\beta}(x_3-y_2) & P_{q,\beta}(x_3-y_3)\end{vmatrix} \qquad (2.117)$$

змінює знак. Виберемо вектори

$$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}),\ k=1,2,$$

та

$$\mathbf{y}^{(k)}=(y_1^{(k)},y_2^{(k)},y_3^{(k)}),\ k=1,2,$$

наступним чином:

$$x_1^{(1)}=\frac{\pi}{18},\ x_2^{(1)}=\frac{\pi}{9},\ x_3^{(1)}=\frac{\pi}{6},\ y_1^{(1)}=\frac{13\pi}{36},\ y_2^{(1)}=\frac{11\pi}{30},\ y_3^{(1)}=\frac{67\pi}{180},$$
$$x_1^{(2)}=\frac{\pi}{18},\ x_2^{(2)}=\frac{\pi}{9},\ x_3^{(2)}=\frac{\pi}{6},\ y_1^{(2)}=\frac{13\pi}{30},\ y_2^{(2)}=\frac{10\pi}{9},\ y_3^{(2)}=\frac{7\pi}{6}.$$

Обчислення показують, що для ядра $P_{q,0}$ при $q = 0{,}21$

$$D_3(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) < -9{,}98 \cdot 10^{-10},\ D_3(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) > 1{,}97 \cdot 10^{-6},$$

а для ядра $P_{q,1}$ при $q = 0{,}21$

$$D_3(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) < -1{,}3 \cdot 10^{-8},\ D_3(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) > 1{,}17 \cdot 10^{-6}.$$

Отже, в силу наслідку 1.1 для $q = 0{,}21$ і будь-яких $n \in \mathbb{N}$ вірно, що $P_{q,0} \notin \mathrm{CVD}_{2n}$ і $P_{q,1} \notin \mathrm{CVD}_{2n}$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі встановлено, що ядра Пуассона вигляду $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_q, який залежить лише від параметра q гладкості ядра. У результаті для всіх $n \geqslant n_q$ отримано оцінки знизу колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ і $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$.

Одержані оцінки співпали з найкращими наближеннями класів $C^q_{\beta,1}$ та $C^q_{\beta,\infty}$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$ в метриках L та C відповідно. Як наслідок, знайдено точні значення поперечників $d_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $\lambda_{2n}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$, $b_{2n-1}(C^q_{\beta,\infty}, C)$ та $b_{2n-1}(C^q_{\beta,1}, L)$.

Основні результати, які висвітлені у даному розділі, опубліковано в роботах [13, 54–59].

РОЗДІЛ 3

Точні оцінки колмогоровських поперечників класів згорток з ядром Неймана

У даному розділі розв'язується задача про знаходження точних значень поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$ для усіх $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ та натуральних n, більших деякого номера n^*_q, залежного лише від q.

Оцінки зверху колмогоровських поперечників класів згорток з ядрами Неймана можна отримати з теореми 1.6 (при $\beta \in \mathbb{Z}$ вони випливають також з теореми 1.4). А саме, згідно з теоремою 1.6, для $\psi(k) = \dfrac{q^k}{k}$ при довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$E_n(C^{q,1}_{\beta,\infty})_C = E_n(C^{q,1}_{\beta,1})_L = \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (3.1)$$

де $\varphi_n(t)$ задається рівністю (1.31), а $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{2\nu n}}{2\nu+1} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \qquad (3.2)$$

Тому для встановлення точних значень колмогоровських поперечників класів згорток з ядром Неймана залишається встановити оцінки знизу.

3.1. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів згорток з ядром Неймана

Для кожного фіксованого $q \in (0,1)$ позначимо через n_q^* найменший з номерів $n \geqslant 2$, для яких виконуються нерівності

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} \leqslant \min\{\frac{2q^{\sqrt{n}}}{15n^2}, \frac{8}{3n^2}\left(\frac{2n-1}{7(n-1)^2} - \frac{\pi^2}{8n^2}\right)\}, \tag{3.3}$$

$$\frac{24}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\;\frac{q}{(1-q)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \tag{3.4}$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 3.1. *Нехай $q \in (0,1)$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ і всіх номерів $n \geqslant n_q^*$ виконуються нерівності*

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{3.5}$$

$$d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) \geqslant \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C. \tag{3.6}$$

Зауважимо, що при $q \in (0,1/7]$, $\beta \in \mathbb{Z}$ нерівності (3.5) та (3.6) випливають з результатів О.К. Кушпеля (див. теорему 1.17), а при $q \in (0,\ 0{,}2]$, $\beta \in \mathbb{Z}$ і $q \in (0,\ 0{,}193864]$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ — встановлені А.С. Сердюком (див. теорему 6 роботи [51]). У вказаних випадках нерівності (3.5) та (3.6) доведено для усіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Відповідно до теореми 1.16 для доведення (3.5) і (3.6) достатньо показати, що для довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і всіх номерів $n \geqslant n_q^*$ ядра Неймана $N_{q,\beta}(t)$ задовольняють умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій функція $|\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)|$, де $\Phi_{q,\beta,n}(\cdot) = (N_{q,\beta} * \varphi_n)(\cdot)$, а $\varphi_n(\cdot)$ задана рівністю (1.31), досягає найбільшого значення, тобто

$$|\Phi_{q,\beta,n}(y_0)| = |(N_{q,\beta} * \varphi_n)(y_0)| = \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C.$$

Функція

$$\Phi_{q,\beta,n}(t) = (N_{q,\beta} * \varphi_n)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2}\sin\left((2\nu+1)nt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

періодична з періодом $2\pi/n$ і така, що $\Phi_{q,\beta,n}(t+\dfrac{\pi}{n}) = -\Phi_{q,\beta,n}(t)$. Тому максимальне значення π/n-періодичної функції $|\Phi_{q,\beta,n}(\cdot)|$ на $[0,\dfrac{\pi}{n})$ досягається у точці $y_0 = y_0(n,q,\beta) = \dfrac{\theta_n\pi}{n}$, де θ_n — корінь рівняння (3.2), $\theta_n \in [0,1)$.

Наступне твердження містить оцінку зверху суми $\sum\limits_{l=1}^{5}|\gamma_l(y_0)|$ для ядер $N_{q,\beta}(t)$.

Лема 3.1. *Нехай* $\psi(k) = \frac{q^k}{k}$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y_0 = y_0(n,q,\beta) = \frac{\theta_n\pi}{n}$, *де* θ_n *— корінь рівняння* (3.2) *і* $\theta_n \in [0,1)$, *а величини* $\gamma_l(y_0)$, $l = \overline{1,5}$, *задаються рівностями* (2.5), (2.6), (2.35)–(2.37), *при* $\psi(k) = \frac{q^k}{k}$. *Тоді при* $n \geqslant 2$ *та виконанні умов* (3.3) *для довільного* $t \in (\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n})$, $k = \overline{1,2n}$, *має місце зображення*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y_0,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4q^n}\left(\mathcal{P}_q(t_k - y_0)\operatorname{sign}\sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}) + \sum_{l=1}^{5}\gamma_l(y_0)\right), \qquad (3.7)$$

та справедлива оцінка

$$\sum_{l=1}^{5}|\gamma_l(y_0)| \leqslant \frac{24}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\,\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Доведення леми 3.1. Встановимо справедливість зображення (3.7). Для цього розглянемо функції

$$G_q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)n}\cos(2\nu+1)x = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2q^n\cos x + q^{2n}}{1-2q^n\cos x + q^{2n}}, \qquad (3.8)$$

$$H_q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)n}\sin(2\nu+1)x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2q^n\sin x}{1-q^{2n}}. \qquad (3.9)$$

З (3.8) випливає, що

$$G_q(x) > 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi),$$

$$G_q(x) < 0,\ x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

В силу (3.9) функція $H_q(x)$ додатна на $(0, \pi)$ і від'ємна на $(\pi, 2\pi)$. Оскільки

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = G_q(\theta_n\pi)\cos\frac{\beta\pi}{2} + H_q(\theta_n\pi)\sin\frac{\beta\pi}{2},$$

то, враховуючи зазначені вище властивості функцій $G_q(x)$ та $H_q(x)$ та рівність (3.2), отримуємо наступні включення:

$$ny_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ при } \beta \in [0,1) \cup [2,3), \tag{3.10}$$

$$ny_0 \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ при } \beta \in [1,2) \cup [3,4). \tag{3.11}$$

Згідно з рівностями (3.10), (3.11), рівністю (19) роботи [62] і лемою 2 з [62] для ядер $\Psi_\beta(t) = N_{q,\beta}(t)$ виконується умова $|\lambda_j(y_0)| \neq 0,\ j = \overline{1,n}$. Тому, відповідно до леми 2.2, для фундаментального SK-сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t) = \overline{SN}_{q,\beta,1}(y,t)$, породженого ядром Неймана $N_{q,\beta}(t)$, має місце представлення (2.33), яке набуває вигляду (3.7).

Для оцінки кожного з доданків $|\gamma_l(y_0)|$, $l = \overline{1,5}$, нам будуть потрібні оцінки зверху величин $|r_j(y_0)|$ та $|R_j(y_0)|$ при $j = \overline{0, n-1}$. Знайдемо їх. З (2.10) маємо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leqslant \frac{q^{3n-j}}{(3n-j)^2} + \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{((2m+1)n-j)^2} + \frac{q^{(2m-1)n+j}}{((2m-1)n+j)^2}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{((2m+1)n-j)^2} + \frac{q^{(2m+1)n+j}}{((2m+1)n+j)^2}\right). \tag{3.12}$$

Оскільки послідовність $\dfrac{q^k}{k^2}$ опукла, то виконується нерівність $\dfrac{q^{k-j}}{(k-j)^2} + \dfrac{q^{k+j}}{(k+j)^2} < \dfrac{q^{k-n}}{(k-n)^2} + \dfrac{q^{k+n}}{(k+n)^2}$, $k > n$, $j = \overline{0, n-1}$. Тому з

(3.12) знаходимо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2mn}}{(2mn)^2} + \frac{q^{2(m+1)n}}{(2(m+1)n)^2} \right) =$$

$$= \frac{q^{2n}}{4n^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q^{2mn}}{2m^2n^2} \leqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2n}}{4n^2(1-q^{2n})}. \tag{3.13}$$

З (3.2) отримуємо

$$\left| \cos\left(\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{2\nu n}}{2\nu+1} \cos\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu n} = \frac{q^{2n}}{3(1-q^{2n})}. \tag{3.14}$$

Враховуючи (3.14) та (2.11), маємо

$$|r_j^{(2)}(y_0)| \leqslant |\cos(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2})| \left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} - \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^{2n}}{3(1-q^{2n})} \left(q - \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)^2} \right). \tag{3.15}$$

З (3.14) випливає, що

$$0 \leqslant 1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \leqslant |\cos(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \leqslant \frac{q^{2n}}{3(1-q^{2n})}. \tag{3.16}$$

Із (3.16) та (2.12) знаходимо

$$|r_j^{(3)}(y_0)| \leqslant \frac{q^{2n}}{3(1-q^{2n})} \left(q + \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)^2} \right). \tag{3.17}$$

Об'єднавши (3.13), (3.15) та (3.17), для величини $r_j(y_0)$ отримуємо оцінку

$$|r_j(y_0)| \leqslant |\sum_{\nu=1}^{3} r_j^{(\nu)}(y_0)| \leqslant \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \left(\frac{2q}{3} + \frac{1}{4n^2} \right) \leqslant \frac{3}{4} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}, j = \overline{0, n-1}. \tag{3.18}$$

При $j = 0$ оцінку (3.18) можна покращити. Дійсно, в силу (2.27) маємо

$$|r_0^{(1)}(y_0)| \leqslant 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q^{(2m-1)n}}{((2m-1)n)^2} \leqslant \frac{2}{9n^2} \sum_{m=2}^{\infty} q^{(2m-1)n} = \frac{2}{9n^2} \frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},$$

а з (2.29) та (3.16)

$$\left|r_0^{(3)}(y_0)\right| \leqslant \frac{2}{3n^2}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}.$$

Тоді, враховуючи (2.28),

$$|r_0(y_0)| \leqslant |r_0^{(1)}(y_0) + r_0^{(3)}(y_0)| \leqslant \frac{8}{9n^2}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}. \tag{3.19}$$

Із (2.15) для величини $|\lambda_{n-j}(y_0)|$ отримуємо зображення

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| = \left|\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})\left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2}\right) + r_j(y_0)\right|,$$

з якого безпосередньо випливає оцінка

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \leqslant \frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2} + |r_j(y_0)|. \tag{3.20}$$

Оскільки внаслідок (3.10) і (3.11)

$$\sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}) = \sin ny_0 \cos\frac{\beta\pi}{2} - \cos ny_0 \sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0. \tag{3.21}$$

то отримуємо також оцінку

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \geqslant \frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2} - |r_j(y_0)|. \tag{3.22}$$

В силу (2.8), (3.20) та (3.22)

$$|R_j(y_0)| \leqslant |r_j(y_0)|,\ j = \overline{0, n-1}. \tag{3.23}$$

Перейдемо до оцінки величини $|\gamma_1(y_0)|$. Взявши до уваги оцінки (3.22) та (3.18), маємо

$$\begin{gathered}|\lambda_{n-j}(y_0)| \geqslant \\ \geqslant \frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2} - \frac{3}{4}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} = \\ = \frac{q^n}{(n-j)^2}\left(q^{-j} + \frac{(n-j)^2}{(n+j)^2}q^j - \frac{3(n-j)^2}{4}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\right).\end{gathered} \tag{3.24}$$

Оскільки при $j = \overline{0, n-1}$ $\dfrac{2}{15(n-j)^2}q^{-j} > \dfrac{2}{15n^2} > \dfrac{2q^{\sqrt{n}}}{15n^2}$, то з умови (3.3) випливає нерівність

$$\frac{2}{15(n-j)^2}q^{-j} > \frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

яка еквівалентна наступній нерівності:

$$\frac{q^{-j}}{10} > \frac{3(n-j)^2}{4}\frac{q^n}{1-q^{2n}},\ j = \overline{0, n-1}. \tag{3.25}$$

В силу (3.25) виконуються оцінки

$$q^{-j} + \frac{(n-j)^2}{(n+j)^2}q^j - \frac{3(n-j)^2}{4}\frac{q^n}{1-q^{2n}} =$$

$$= \frac{9q^{-j}}{10} + \frac{q^{-j}}{10} + \frac{(n-j)^2}{(n+j)^2}q^j - \frac{3(n-j)^2}{4}\frac{q^n}{1-q^{2n}} >$$

$$> \frac{9q^{-j}}{10},\ j = \overline{0, n-1}. \tag{3.26}$$

Об'єднуючи (3.24) та (3.26), маємо

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \geqslant \frac{9q^{n-j}}{10(n-j)^2}. \tag{3.27}$$

Враховуючи, що для $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ справджується нерівність $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{2x}{\pi} > 0$, отримуємо

$$\cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant 1 - \frac{j}{n} = \frac{n-j}{n},\ j = \overline{0, n-1}. \tag{3.28}$$

З (3.27) та (3.28) маємо

$$\frac{n^2}{q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|^2 \cos\frac{j\pi}{2n} > \frac{81n}{100(n-j)^3}q^{n-2j}. \tag{3.29}$$

З (2.7) і (3.23) випливає, що $|z_j(y_0)| \leqslant 2|r_j(y_0)|$. Тому враховуючи (3.18), (3.29) та умову (3.3), з (2.5) одержуємо

$$|\gamma_1(y_0)| \leqslant \frac{400}{81}\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}|r_j(y_0)|\frac{1}{q^n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j)^3}{n}q^{2j} < \frac{100\,n^2q^n}{27(1-q^{2n})}\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{40}{81} q^{\sqrt{n}} \, \frac{1}{1-q^2}. \tag{3.30}$$

Оцінимо $|\gamma_2(y_0)|$. З умови (3.3) при $n \geqslant 2$ випливає нерівність

$$q^{2n} \leq \frac{1}{900}.$$

Тоді з (2.6), (3.23), (3.19) і (3.3) отримуємо

$$|\gamma_2(y_0)| \leqslant \frac{\dfrac{8q^{2n}}{9(1-q^{2n})}}{2\left|2 - \dfrac{8q^{2n}}{9(1-q^{2n})}\right|} = \frac{2q^{2n}}{9-13q^{2n}} = \frac{1-q^{2n}}{9-13q^{2n}} \, \frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{13} + \frac{4}{13(9-13q^{2n})}\right) \frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} <$$

$$< \frac{3}{26} \frac{2q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{2q^{n+\sqrt{n}}}{65n^2}. \tag{3.31}$$

Оцінимо величину $|\gamma_3(y_0)|$. Взявши до уваги оцінки (3.18), (3.22), (3.28) та (3.26), маємо

$$\frac{n^2}{q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos \frac{j\pi}{2n} \geqslant \frac{n^2}{q^n} \left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)^2} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)^2} - \frac{3}{4} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \right) \frac{n-j}{n} =$$

$$= \frac{nq^{-j}}{n-j} + \frac{n(n-j)}{(n+j)^2} q^j - \frac{3n(n-j)}{4} \frac{q^n}{1-q^{2n}} > \frac{9nq^{-j}}{10(n-j)}. \tag{3.32}$$

Тому, взявши до уваги (3.32), з (2.35) знаходимо

$$|\gamma_3(y_0)| < \frac{20}{9} \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} \frac{n-j}{n} q^j <$$

$$< \frac{20}{9} \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} q^j = \frac{20(q^{[\sqrt{n}]+1} - q^{n-1})}{9(1-q)} \leqslant \frac{20q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)}. \tag{3.33}$$

Щоб оцінити величину $|\gamma_4(y_0)|$ спочатку оцінимо зверху величину $|\delta_j(y_0)|$ вигляду (2.38). В силу (2.8)

$$\frac{n^2}{q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos \frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{(n-j)^2} \frac{q^{n-j}}{q^n} + \frac{n^2}{(n+j)^2} \frac{q^{n+j}}{q^n} + R_j(y_0) \frac{n^2}{q^n} \right) \cos \frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left((1 + \frac{j(2n-j)}{(n-j)^2}) q^{-j} + (1 - \frac{j(2n+j)}{(n+j)^2}) q^j + R_j(y_0) \frac{n^2}{q^n} \right) \cos \frac{j\pi}{2n} =$$

$$= (q^{-j} + q^j)(1 - 2\sin^2 \frac{j\pi}{4n}) +$$

$$+ \left(\frac{j(2n-j)}{(n-j)^2} q^{-j} - \frac{j(2n+j)}{(n+j)^2} q^j + R_j(y_0) \frac{n^2}{q^n} \right) \cos \frac{j\pi}{2n}. \qquad (3.34)$$

З (2.38), (3.18), (3.23), (3.34) із врахуванням опуклості послідовності q^k для величин $|\delta_j(y_0)|$ випливають нерівності

$$|\delta_j(y_0)| \leqslant 2\sin^2 \frac{j\pi}{4n} + \frac{1}{q^{-j} + q^j} \left(\frac{j(2n-j)}{(n-j)^2} q^{-j} + \frac{j(2n-j)}{(n-j)^2} q^j + |R_j(y_0)| \frac{n^2}{q^n} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{j\pi}{4n} \right)^2 + \frac{j(2n-j)}{(n-j)^2} + \frac{n^2 |r_j(y_0)|}{q^{n-j} + q^{n+j}} \leqslant \frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{j(2n-j)}{(n-j)^2} + \frac{3n^2}{8} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} =$$

$$= \frac{8j(2n-j)}{7(n-j)^2} + \left(\frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{3n^2}{8} \frac{q^n}{1-q^{2n}} - \frac{j(2n-j)}{7(n-j)^2} \right). \qquad (3.35)$$

При кожному фіксованому n функція $f_n(j) = \dfrac{j(2n-j)}{7(n-j)^2} - \dfrac{j^2\pi^2}{8n^2}$ зростає. Дійсно

$$\frac{d}{dj} \left(\frac{j(2n-j)}{7(n-j)^2} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} \right) = \frac{2n^2}{7(n-j)^3} - \frac{j\pi^2}{4n^2} =$$

$$= \frac{8n^4 - 7j\pi^2(n-j)^3}{28n^2(n-j)^3} > 0$$

(оскільки функція $g_n(x) = 8n^4 - 7x\pi^2(n-x)^3$ в точці мінімуму $x = \frac{1}{4}n$ набуває додатне значення). Тому, з врахуванням (3.3), при $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$ та $n \geqslant 2$ отримуємо

$$\frac{j(2n-j)}{7(n-j)^2} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} \geqslant \frac{2n-1}{7(n-1)^2} - \frac{\pi^2}{8n^2} > \frac{3n^2}{8} \frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Отже, вираз у дужках в правій частині (3.35) від'ємний. Тоді з (3.35) випливає, що

$$|\delta_j(y_0)| \leqslant \frac{8j(2n-j)}{7(n-j)^2}. \qquad (3.36)$$

Формули (2.36), (3.32) та (3.36) дозволяють одержати при $n \geqslant 2$ наступну оцінку величини $\gamma_4(y_0)$:

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\dfrac{8j(2n-j)}{7(n-j)^2}}{\dfrac{9nq^{-j}}{10(n-j)}} = \frac{160}{63n}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{j(2n-j)}{n-j} q^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{160}{63}\frac{2n-\sqrt{n}}{n(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} jq^j < \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\sum_{j=1}^{\infty} jq^j <$$

$$< \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\ \frac{q}{(1-q)^2}. \tag{3.37}$$

Об'єднавши оцінки (3.30), (3.31), (3.33), (3.37) та (2.77), при $n \geqslant 2$ одержимо

$$\sum_{k=1}^{5} |\gamma_k(y_0)| <$$

$$< \frac{40}{81}q^{\sqrt{n}}\ \frac{1}{1-q^2} + \frac{2q^{n+\sqrt{n}}}{65n^2} + \frac{20q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)} + \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\ \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{2q^{\sqrt{n}}}{1-q} <$$

$$< \frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}(0{,}494 + 0{,}008 + 2{,}223 + 2) + \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\ \frac{q}{(1-q)^2} <$$

$$< \frac{24}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{160}{63}\frac{2\sqrt{n}-1}{n(\sqrt{n}-1)}\ \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Лему 3.1 доведено.

З леми 3.1 та нерівності (2.78) випливає, що при $n \geqslant 2$ за умов (3.4) та (3.3)

$$\mathcal{P}_q(t_k - y_0) + \sum_{m=1}^{5} \gamma_m(y_0)\,\mathrm{sign}\sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}) \geqslant 0. \tag{3.38}$$

В силу зображення (2.46), а також (3.21) і нерівності (3.38) робимо висновок, що при $n \geqslant 2$ за умов (3.4) та (3.3) справедливе включення $N_{q,\beta}(t) \in C_{y_0,2n}$. Теорему доведено.

3.2. Теореми про точні значення поперечників класів згорток з ядром Неймана

Як було зазначено вище, з роботи А.С. Сердюка [51] випливає, що при $q \in (0,\ 0{,}2]$, $\beta \in \mathbb{Z}$ і $q \in (0,\ 0{,}193864]$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ нерівності (3.5) і (3.6) вірні для усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді, з урахуванням теореми 3.1, поклавши

$$n^*_{q,\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q \in (0,\ 0{,}2] \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0,\ 0{,}193864] \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ n^*_q, & \text{якщо } q \in (0{,}2,\ 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{Z} \text{ або } q \in (0{,}193864,\ 1) \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

одержимо істинність нерівностей (3.5) і (3.6) для усіх номерів $n \geqslant n^*_{q,\beta}$. Врахувавши нерівності (1.20), рівності (3.1), співвідношення $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \geqslant d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ з нерівностями (3.5) та (3.6), отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.2. *Нехай $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n^*_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^{q,1}_{\beta,\infty})_C = E_n(C^{q,1}_{\beta,1})_L = \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right|, \tag{3.39}$$

де φ_n означена рівністю (1.31), *а $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ – єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння* (3.2).

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми із роботи О.К. Кушпеля [31], можна показати, що при виконанні умов теореми 3.1 виконуються нерівності

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \geqslant b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{3.40}$$

$$d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) \geqslant b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) \geqslant \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C. \qquad (3.41)$$

З теорем 1.6 та 1.9 випливає справедливість рівностей (1.43) при $\psi(k) = \frac{q^k}{k}$, $q \in (0,1)$. Тому, співставляючи оцінки (3.40) та (3.41) з рівностями (1.43), (1.30) і очевидними співвідношеннями

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) \leqslant \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C,$$

$$d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) \leqslant \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L,$$

в яких μ^* і ν^* означаються рівностями

$$\mu^*_0 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2n\nu}}{\nu}\cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\mu^*_k = \frac{q^k}{k}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\frac{q^{2n\nu-k}}{2n\nu-k} + \frac{q^{2n\nu+k}}{2n\nu+k})\cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

$$\nu^*_k = \frac{q^k}{k}\sin\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\frac{q^{2n\nu-k}}{2n\nu-k} + \frac{q^{2n\nu+k}}{2n\nu+k})\sin(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.3. *Нехай $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх номерів $n \geqslant n^*_{q,\beta}$ мають місце рівності*

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^{q,1}_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^{q,1}_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|N_{q,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (3.42)$$

де $\theta_n = \theta_n(q,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (3.2).

Теорема 3.2 дозволяє оцінити асимптотичну при $n \to \infty$ поведінку поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$, $\lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$, $b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C)$ та $b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L)$.

Теорема 3.4. *Нехай* $q \in (0,1)$ *та* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \geqslant n^*_{q,\beta}$

$$d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^{q,1}_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^{q,1}_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^{q,1}_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \frac{q^n}{n}\left(\frac{4}{\pi} + \gamma_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \tag{3.43}$$

де $|\gamma_n| \leqslant \dfrac{16}{9\pi}$.

Доведення. Дійсно, знайдемо двосторонні оцінки правої частини формули (3.42). Оскільки,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \leqslant \frac{1}{9n}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},\ n \in \mathbb{N},$$

то, враховуючи (3.16), одержуємо для довільних $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{q^n}{n} - \frac{q^n}{n}\left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})|\right) -$$

$$-\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{q^n}{n}\left(1 - \frac{4}{9}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \tag{3.44}$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{q^n}{n} + \frac{q^n}{n}\left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})|\right) +$$

$$+\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{n(2\nu+1)^2} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q^n}{n}\left(1+\frac{4}{9}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \tag{3.45}$$

З теореми 3.2 та оцінок (3.44) і (3.45) випливає, що при $n \geqslant n^*_{q,\beta}$ виконується (3.43). Теорему доведено.

Зазначимо, що оцінки (3.5) і (3.6) для довільних $q \in (0,1)$ неможливо встановити, використовуючи методи знаходження оцінок знизу для колмогоровських поперечників класів згорток із ядрами, що не збільшують осциляції, розроблені А. Пінкусом [43], оскільки ядра Неймана $N_{q,\beta}(t)$ можуть збільшувати осциляцію. Проілюструємо це на прикладі ядер Неймана $N_{q,0}(t)$ та $N_{q,1}(t)$ при $q = 0{,}21$.

Згідно з наслідком 1.1, щоб довести, що ядра Неймана $N_{q,\beta}(t)$ при $q = 0{,}21$ і $\beta = 0$ або $\beta = 1$ не є CVD_{2n}-ядрами ні при яких $n \in \mathbb{N}$, достатньо показати, що знайдуться вектори $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < 2\pi$, та $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $0 \leqslant y_1 < y_2 < y_3 < 2\pi$, для яких детермінант $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ змінює знак. Виберемо вектори $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ та $\mathbf{y}^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)})$, $k = 1, 2$, наступним чином:

$$x_1^{(1)} = \frac{\pi}{18},\ x_2^{(1)} = \frac{\pi}{9},\ x_3^{(1)} = \frac{\pi}{6},\ y_1^{(1)} = \frac{13\pi}{36},\ y_2^{(1)} = \frac{11\pi}{30},\ y_3^{(1)} = \frac{67\pi}{180},$$

$$x_1^{(2)} = \frac{\pi}{18},\ x_2^{(2)} = \frac{\pi}{9},\ x_3^{(2)} = \frac{\pi}{6},\ y_1^{(2)} = \frac{13\pi}{30},\ y_2^{(2)} = \frac{10\pi}{9},\ y_3^{(2)} = \frac{7\pi}{6}.$$

Обчислення показують, що для ядра $N_{q,0}$

$$D_3(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) < -2{,}74 \cdot 10^{-10},\ D_3(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) > 1{,}09 \cdot 10^{-6},$$

а для ядра $N_{q,1}$

$$D_3(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) < -2{,}26 \cdot 10^{-8},\ D_3(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) > 2{,}09 \cdot 10^{-6}.$$

Отже, в силу наслідку 1.1 для $q = 0{,}21$ і будь-яких $n \in \mathbb{N}$ вірно, що $N_{q,0} \notin \mathrm{CVD}_{2n}$ і $N_{q,1} \notin \mathrm{CVD}_{2n}$.

Висновки до розділу 3

У даному розділі встановлено, що ядра Неймана вигляду $N_{q,\beta}(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_q^*, залежного лише від q. У результаті для всіх $n\geqslant n_q^*$ отримано оцінки знизу колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$ та $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)$.

Одержані оцінки співпали з найкращими наближеннями класів $C^{q,1}_{\beta,1}$ та $C^{q,1}_{\beta,\infty}$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$ в метриках L та C відповідно. Як наслідок, знайдено точні значення поперечників $d_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$, $d_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)$, $\lambda_{2n}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$, $\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$, $\lambda_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)$, $b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,\infty},C)$ та $b_{2n-1}(C^{q,1}_{\beta,1},L)$.

Основні результати, які висвітлені у цьому розділі, опубліковано у роботах [9] та [10].

РОЗДІЛ 4

Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій

Даний розділ дисертації присвячено знаходженню точних значень поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ та усіх натуральних n, більших деякого номера n_h, залежного лише від параметра h.

4.1. Оцінки зверху колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій

Для кожного фіксованого $h > 0$ покладемо

$$n^*_h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h \geqslant \ln \frac{10}{3}, \\ n^{**}_h, & \text{якщо } 0 < h < \ln \frac{10}{3}, \end{cases}$$

де n^{**}_h — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$(1 - e^{-h})^2 \geqslant \frac{5 + 3e^{-2h}}{1 - e^{-2h}} \frac{\left(\frac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}} + (2 + e^{-2nh})e^{-2nh}. \tag{4.1}$$

Має місце твердження.

Теорема 4.1. *Нехай $h > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n^*_h$, має місце включення $H_{h,\beta} \in N^*_n$ та виконуються рівності*

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{4.2}$$

в яких $\varphi_n(t)$ — *функція вигляду* (1.31), *а* $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — *єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0. \tag{4.3}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.8 рівності (1.36) справджуються для усіх $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ за умови, що

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < 0{,}3253678\ldots,\ k=1,2,\ldots.$$

Оскільки коефіцієнти $\psi(k)=\frac{1}{\operatorname{ch}kh}$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ при $q=e^{-h}$ і відношення

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=\frac{\operatorname{ch}kh}{\operatorname{ch}(k+1)h}=q\frac{1+q^{2k}}{1+q^{2k+2}}$$

утворює спадну послідовність, то при $q\in(0,\frac{3}{10}]$

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}\leqslant q\frac{1+q^2}{1+q^4}\leqslant 0{,}3253678, k=1,2,\ldots.$$

Отже, якщо $h>\ln\frac{10}{3}$, то рівності (4.2) виконуються для усіх $n\in\mathbb{N}$.

Відповідно до теореми 1.7, якщо послідовність коефіцієнтів $\psi(k)$ ядра Ψ_β вигляду (1.5), яке породжує класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p=1,\infty$, задовольняє умову Даламбера (1.10), то знайдеться номер n_0 такий, що для будь-якого натурального $n\geqslant n_0$ мають місце рівності (1.36). При цьому (див. [52, с. 188–190]) номер n_0 означається конструктивно як найменше натуральне число, для котрого виконуються нерівності

$$(1-q)^2\geqslant\frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}}+\varepsilon_n(2+\varepsilon_n),\ n=n_0,n_0+1,\ldots, \tag{4.4}$$

де

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\psi) := \sup_{k \geqslant n} |\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q|. \tag{4.5}$$

При $\psi(k) = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}$ для величин $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\psi)$ вигляду (4.5) мають місце співвідношення

$$\varepsilon_n = q^{2n+1}\frac{1-q^2}{1+q^{2n+2}} < q^{2n+1} < q^{2n},\ q = e^{-h}.$$

Тому виконання нерівності (4.1) гарантує виконання умови (4.4), а отже, в силу [52], і рівностей (4.2) для усіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h^{**}$. Теорему доведено.

4.2. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій

Для кожного фіксованого $h>0$ через n_h будемо позначати найменший з номерів $n\geqslant 9$, для якого виконується нерівність

$$\frac{37}{5(1-e^{-h})}e^{-h\sqrt{n}}+\frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})},\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(1-e^{-h})\operatorname{ch}h}\right)\left(\frac{1-e^{-h}}{1+e^{-h}}\right)^{\frac{4}{1-e^{-2h}}} \tag{4.6}$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай $h>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n\geqslant n_h$, виконуються нерівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty},C)\geqslant\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C, \tag{4.7}$$

$$d_{2n-1}(C^h_{\beta,1},L)\geqslant\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C. \tag{4.8}$$

Зауважимо, що для усіх $h>0$ таких, що

$$\frac{\operatorname{ch}kh}{\operatorname{ch}(k+1)h}\leqslant\frac{\operatorname{ch}h}{\operatorname{ch}2h}\leqslant\rho(\beta),\ k\in\mathbb{N}, \tag{4.9}$$

де $\rho(\beta)=0{,}2$, якщо $\beta\in\mathbb{Z}$ і $\rho(\beta)=0{,}193864$, якщо $\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ нерівності (4.7) та (4.8) при довільних $n\in\mathbb{N}$ випливають з теореми 1.21. Обчислення показують, що умова (4.9), а разом з нею і оцінки (4.7) та (4.8), має місце при усіх $h\geqslant 1{,}644651$, якщо $\beta\in\mathbb{Z}$ і $h\geqslant 1{,}67423$, якщо $\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Доведення. Відповідно до теореми 1.16 для встановлення нерівностей (4.7) і (4.8) достатньо показати, що для довільних $h>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ і всіх номерів $n\geqslant n_h$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ задовольняють умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій модуль функції $\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)=(H_{h,\beta}*\varphi_n)(\cdot)$, $\varphi_n(t)=\operatorname{sign}\sin nt$, досягає найбільшого значення, тобто

$$|\Phi_{h,\beta,n}(y_0)|=|(H_{h,\beta}*\varphi_n)(y_0)|=\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C.$$

Оскільки, як не важко переконатись,

$$\Phi_{h,\beta,n}(t) = (H_{h,\beta} * \varphi_n)(t) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\sin\left((2\nu+1)nt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

то $\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)$ періодична з періодом $2\pi/n$ диференційовна функція і така, що $\Phi_{h,\beta,n}(\cdot + \frac{\pi}{n}) = -\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)$. Тому максимальне значення π/n-періодичної функції $|\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)|$ на $[0, \frac{\pi}{n})$ досягається у точці $y_0 = y_0(n,h,\beta) = \frac{\theta_n\pi}{n}$, де θ_n — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (4.3).

Як зазначалось вище, послідовності $\psi(k) = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ вигляду (1.8) задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ при $q = e^{-h}$, а тому для вказаних ψ застосовна лема 2.2.

Наступне твердження містить оцінку зверху суми $\sum\limits_{k=1}^{5}|\gamma_k(y)|$ у випадку, коли $\psi(n) = \frac{1}{\operatorname{ch} nh}$, $h > 0$, та $y = y_0$, де y_0 — точка, в якій функція $|\Psi_\beta * \varphi_n|$ набуває найбільшого значення.

Лема 4.1. *Нехай* $\psi(n) = \frac{1}{\operatorname{ch} nh} = \frac{2q^n}{1+q^{2n}}$, $h > 0$, $q = e^{-h}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y_0 = y_0(n,h,\beta) = \frac{\theta_n\pi}{n}$, *де* θ_n — *корінь рівняння* (4.3), $\theta_n \in [0,1)$, *а величини* $\gamma_l(y_0)$, $l = \overline{1,5}$, *задаються рівностями* (2.5), (2.6), (2.35)–(2.37) *з* $\psi(n) = \frac{1}{\operatorname{ch} nh}$. *Тоді при* $n \geqslant 9$ *та виконанні умови* (2.45) *для довільного* $t \in (\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n})$, $k = \overline{1,2n}$, *має місце зображення*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y_0,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{\pi \operatorname{ch} nh}{4n}\left(\mathcal{P}_q(t_k - y_0)\operatorname{sign}\sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}) + \sum_{l=1}^{5}\gamma_l(y_0)\right), \qquad (4.10)$$

та справедлива оцінка

$$\sum_{l=1}^{5}|\gamma_l(y_0)| \leqslant \frac{37}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}.$$

Доведення леми 4.1. Встановимо спочатку справедливість зображення (4.10). Для цього достатньо показати, що при $y = y_0$ виконується умова (2.3). Знайдемо оцінки зверху величин $|r_j(y_0)|$ та $|R_j(y_0)|$ при $j = \overline{0, n-1}$. З (2.10) маємо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2q^{3n-j}}{(3n-j)(1+q^{2(3n-j)})} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{((2m+1)n-j)(1+q^{2((2m+1)n-j)})}+\right.$$

$$\left.+\frac{q^{(2m-1)n+j}}{((2m-1)n+j)(1+q^{2((2m-1)n+j)})}\right) <$$

$$< \frac{2q^{3n-j}}{3n-j} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m-1)n+j}}{(2m-1)n+j}\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m+1)n+j}}{(2m+1)n+j}\right). \tag{4.11}$$

Враховуючи, що внаслідок опуклості послідовності $\dfrac{q^k}{k}$ виконується нерівність

$$\frac{q^{k-j}}{k-j} + \frac{q^{k+j}}{k+j} < \frac{q^{k-n}}{k-n} + \frac{q^{k+n}}{k+n},\ k > n,\ j = \overline{0, n-1},$$

із (4.11) знаходимо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leqslant 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2mn}}{2mn} + \frac{q^{2(m+1)n}}{2(m+1)n}\right) =$$

$$= \frac{q^{2n}}{n} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{q^{2mn}}{mn} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}. \tag{4.12}$$

З рівняння (4.3) при $q = e^{-h}$ отримуємо

$$\left|\cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| =$$

$$= (1+q^{2n})\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| <$$

$$< (1+q^{2n})\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu n} = \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}). \tag{4.13}$$

У свою чергу, з (4.13) випливає, що

$$0 \leqslant 1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| \leqslant |\cos(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})| < \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}). \tag{4.14}$$

З (4.13) та (2.11) маємо

$$|r_j^{(2)}(y_0)| < \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} - \frac{q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})}\right). \tag{4.15}$$

Із (4.14) та (2.12) знаходимо

$$|r_j^{(3)}(y_0)| < \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})}\right). \tag{4.16}$$

З умови (2.45) випливає, що

$$q^{2n} < \frac{49}{1369n^4}. \tag{4.17}$$

Отже, з (4.12), (4.15), (4.16) та (4.17) при $n \geqslant 9$ випливає оцінка величини $|r_j(y_0)|$

$$|r_j(y_0)| \leqslant |\sum_{\nu=1}^{3} r_j^{(\nu)}(y_0)| <$$

$$< \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(\frac{4(1+q^{2n})q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{1}{n}\right) <$$

$$< \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left(4q(1+q^{2n}) + \frac{1}{n}\right) < \frac{38}{9}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}, j = \overline{0, n-1}. \tag{4.18}$$

При $j = 0$ оцінку (4.18) можна покращити. Дійсно, в силу (2.27) маємо

$$|r_0^{(1)}(y_0)| \leqslant 4\sum_{m=2}^{\infty} \frac{q^{(2m-1)n}}{((2m-1)n)(1+q^{2(2m-1)n})} <$$

$$< \frac{4}{3n}\sum_{m=2}^{\infty} q^{(2m-1)n} = \frac{4}{3n}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},$$

а з (2.29) та (4.14) випливає

$$\left|r_0^{(3)}(y_0)\right| < \frac{4q^{3n}}{n(1-q^{2n})}.$$

Тоді, враховуючи (2.28), можемо записати

$$|r_0(y_0)| \leqslant |r_0^{(1)}(y_0) + r_0^{(3)}(y_0)| \leqslant \frac{16}{3n}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}. \tag{4.19}$$

Із (2.15) отримуємо зображення

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| =$$

$$= \left|\operatorname{sign}\sin(ny - \frac{\beta\pi}{2})\left(\frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})}\right) + r_j(y_0)\right|,$$

з якого безпосередньо випливає оцінка

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \leqslant \frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} + |r_j(y_0)|. \tag{4.20}$$

Оскільки внаслідок (4.14) та умови (2.45)

$$|\sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2})| \geqslant 1 - \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}) > 0, \tag{4.21}$$

то отримуємо також оцінку

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \geqslant \frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} - |r_j(y_0)|. \tag{4.22}$$

В силу (2.8), (4.20) та (4.22)

$$|R_j(y_0)| \leqslant |r_j(y_0)|,\ j = \overline{0, n-1}. \tag{4.23}$$

Взявши до уваги оцінки (4.22) та (4.18), маємо

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| > \frac{q^{n-j}}{n-j} + \frac{q^{n+j}}{n+j} - \frac{38}{9}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} =$$

$$= \frac{q^n}{n-j}\left(q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})}\right). \tag{4.24}$$

Оскільки при $j = \overline{0, n-1}$ та $n \geqslant 9$

$$\frac{9q^{-j}}{380(n-j)} > \frac{9}{380n} > \frac{7q^{\sqrt{n}}}{37n^2},$$

то з умови (2.45) випливає нерівність

$$\frac{9}{380(n-j)}q^{-j} > \frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

яка еквівалентна наступній нерівності:

$$\frac{q^{-j}}{10} > \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})}, \; j = \overline{0, n-1}. \tag{4.25}$$

В силу (4.25) виконуються оцінки

$$q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})} =$$

$$= \frac{9q^{-j}}{10} + \frac{q^{-j}}{10} + \frac{n-j}{n+j}q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})} > \frac{9q^{-j}}{10}, \; j = \overline{0, n-1}. \tag{4.26}$$

Об'єднуючи (4.24) та (4.26), маємо

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| > \frac{9q^{n-j}}{10(n-j)}. \tag{4.27}$$

З нерівності (4.27) випливає виконання умови (2.3), а отже, і справедливість зображення (4.10).

Знайдемо оцінки зверху кожної з величин $|\gamma_l(y_0)|$, $l = \overline{1, 5}$. Розпочнемо з оцінки величини $|\gamma_1(y_0)|$. Оскільки для $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ справджується нерівність $\cos x \geqslant 1 - \frac{2x}{\pi} > 0$, отримуємо співвідношення

$$\cos\frac{j\pi}{2n} \geqslant 1 - \frac{j}{n} = \frac{n-j}{n}, \; j = \overline{0, n-1}. \tag{4.28}$$

З (4.27) та (4.28) маємо

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|^2 \cos\frac{j\pi}{2n} > \frac{81(1+q^{2n})}{200n}q^{n-2j}. \tag{4.29}$$

З (4.23) і (2.7) випливає, що $|z_j(y_0)| \leqslant 2|r_j(y_0)|$. Тому враховуючи (4.18), (4.29) та умову (2.45), з (2.5) одержуємо

$$|\gamma_1(y_0)| \leqslant \frac{800}{81(1+q^{2n})} \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} |r_j(y_0)| \frac{n}{q^n} \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} <$$

$$< \frac{30400\, nq^n}{729(1+q^{2n})(1-q^{2n})} \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} \leqslant \frac{212800}{26973n} q^{\sqrt{n}} \, \frac{1}{1-q^2}. \tag{4.30}$$

Оцінимо $|\gamma_2(y_0)|$. З (2.6), (4.23), (4.19), (2.45) і (4.17) отримуємо

$$|\gamma_2(y_0)| \leqslant \frac{\frac{8q^{2n}(1+q^{2n})}{3(1-q^{2n})}}{2\left|2 - \frac{8q^{2n}(1+q^{2n})}{3(1-q^{2n})}\right|} = \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{|3-7q^{2n}-4q^{4n}|} < \frac{4q^{2n}}{3-11q^{2n}} =$$

$$= \frac{1-q^{2n}}{3-11q^{2n}} \, \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} = \left(\frac{1}{11} + \frac{8}{11(3-11q^{2n})}\right) \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} <$$

$$< \frac{5}{11} \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{140 q^{n+\sqrt{n}}}{407n^2}. \tag{4.31}$$

Оцінимо величину $|\gamma_3(y_0)|$. Взявши до уваги (4.27) та (4.28), маємо

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos\frac{j\pi}{2n} > \frac{9(1+q^{2n})q^{-j}}{20}. \tag{4.32}$$

Тому, зважаючи на (4.32), з (2.35) знаходимо

$$|\gamma_3(y_0)| < \frac{40}{9(1+q^{2n})} \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} q^j = \frac{40(q^{[\sqrt{n}]+1} - q^n)}{9(1-q)(1+q^{2n})} \leqslant \frac{40q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)}. \tag{4.33}$$

Перш ніж оцінити $|\gamma_4(y_0)|$ встановимо оцінки зверху для величини $|\delta_j(y_0)|$, означеної в (2.38). З урахуванням (2.8)

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-j} \frac{(1+q^{2n})q^{n-j}}{q^n(1+q^{2(n-j)})} + \frac{n}{n+j} \frac{(1+q^{2n})q^{n+j}}{q^n(1+q^{2(n+j)})} + R_j(y_0) \frac{(1+q^{2n})n}{2q^n} \right) \cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= (q^{-j} + q^j)(1 - 2\sin^2\frac{j\pi}{4n}) + \left(\frac{n}{n-j} \frac{q^{-j}(1+q^{2n})}{1+q^{2(n-j)}} - q^{-j} + \right.$$

$$+\frac{n}{n+j}\frac{q^j(1+q^{2n})}{1+q^{2(n+j)}}-q^j+R_j(y_0)\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}\Bigg)\cos\frac{j\pi}{2n}. \tag{4.34}$$

Оскільки

$$\left|\frac{n}{n-j}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}}-1\right|=\left|\left(1+\frac{j}{n-j}\right)\left(1-\frac{q^{2(n-j)}-q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}}\right)-1\right|=$$

$$=\left|\frac{j}{n-j}-\frac{n}{n-j}\frac{q^{2(n-j)}-q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}}\right|<\frac{j}{n-j}+\frac{n}{n-j}q^{2(n-j)},$$

$$\left|\frac{n}{n+j}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n+j)}}-1\right|=\left|\left(1-\frac{j}{n+j}\right)\left(1+\frac{q^{2n}-q^{2(n+j)}}{1+q^{2(n+j)}}\right)-1\right|=$$

$$=\left|-\frac{j}{n+j}+\frac{n}{n+j}\frac{q^{2n}-q^{2(n+j)}}{1+q^{2(n+j)}}\right|<\frac{j}{n+j}+\frac{n}{n+j}q^{2n},$$

то

$$\max\{|\frac{n}{n-j}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}}-1|,|\frac{n}{n+j}\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n+j)}}-1|\}<$$

$$<\frac{j}{n-j}+\frac{n}{n-j}q^{2(n-j)}. \tag{4.35}$$

Тоді з (2.38), (4.18), (4.23), (4.34), (4.35) та з урахуванням опуклості послідовності q^k для величин $|\delta_j(y_0)|$ будемо мати

$$|\delta_j(y_0)|\leqslant 2\sin^2\frac{j\pi}{4n}+\frac{1}{q^{-j}+q^j}\left(\left(\frac{j}{n-j}+\frac{nq^{2(n-j)}}{n-j}\right)(q^{-j}+q^j)+\right.$$

$$\left.+|R_j(y_0)|\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}\right)\leqslant 2\left(\frac{j\pi}{4n}\right)^2+\frac{j}{n-j}+\frac{nq^{2(n-j)}}{n-j}+\frac{n(1+q^{2n})|r_j(y_0)|}{2(q^{n-j}+q^{n+j})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{j^2\pi^2}{8n^2}+\frac{j}{n-j}+\frac{nq^{2(n-j)}}{n-j}+\frac{19n(1+q^{2n})}{18}\frac{q^n}{1-q^{2n}}=$$

$$=\frac{4j}{3(n-j)}+\left(\frac{j^2\pi^2}{8n^2}+\frac{nq^{2(n-j)}}{n-j}+\frac{19n(1+q^{2n})}{18}\frac{q^n}{1-q^{2n}}-\frac{j}{3(n-j)}\right). \tag{4.36}$$

Покажемо, що для усіх $j=\overline{1,[\sqrt{n}]}$

$$|\delta_j(y_0)|\leqslant\frac{4j}{3(n-j)}. \tag{4.37}$$

Для цього, в силу (4.36) досить переконатися, що при $j = \overline{1,[\sqrt{n}]}$ має місце нерівність

$$\frac{j}{3(n-j)} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} - \frac{\sqrt{n}q^{2(n-\sqrt{n})}}{\sqrt{n}-1} > \frac{19n(1+q^{2n})}{18}\frac{q^n}{1-q^{2n}}. \qquad (4.38)$$

Дійсно, як показано при доведенні леми 2.3, при кожному фіксованому $x \geqslant 9$ функція

$$f(x,\tau) = \frac{\tau}{3(x-\tau)} - \frac{\tau^2\pi^2}{8x^2}$$

на $[1,\sqrt{x}]$ набуває найменшого значення у точці $\tau = 1$. Тому при $n \geqslant 9$, з урахуванням (2.45), маємо для всіх $j = \overline{1,[\sqrt{n}]}$

$$\frac{j}{3(n-j)} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} - \frac{\sqrt{n}q^{2(n-\sqrt{n})}}{\sqrt{n}-1} \geqslant \frac{1}{3(n-1)} - \frac{\pi^2}{8n^2} - \frac{\sqrt{n}q^{2(n-\sqrt{n})}}{2} >$$

$$> \frac{1}{3(n-1)} - \frac{\pi^2}{8n^2} - \frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}. \qquad (4.39)$$

При $n = 9$, враховуючи (2.45) та (4.17), отримуємо

$$\frac{1}{3(n-1)} - \frac{\pi^2}{8n^2} - \frac{49}{2738n^3\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{\pi^2}{648} - \frac{49}{5988006} > \frac{17}{648} - \frac{49}{5988006} >$$

$$> 0{,}025 > \frac{7\cdot 19(1+q^{18})q^3}{18\cdot 37\cdot 9} = \frac{7\cdot 19(1+q^{2n})q^{\sqrt{n}}}{18\cdot 37n} > \frac{19n(1+q^{2n})q^n}{18(1-q^{2n})}. \qquad (4.40)$$

При $n \geqslant 10$, враховуючи (2.45) та (4.17), отримуємо

$$\frac{1}{3(n-1)} - \frac{\pi^2}{8n^2} - \frac{49}{2738n^3\sqrt{n}} > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi^2}{80}\right) - \frac{49}{2738n^3\sqrt{n}} >$$

$$> \frac{5}{24n} - \frac{49}{2738n^3\sqrt{n}} > \frac{7\cdot 19(1+q^{2n})q^{\sqrt{n}}}{18\cdot 37n} > \frac{19n(1+q^{2n})q^n}{18(1-q^{2n})}. \qquad (4.41)$$

З (4.39), (4.40) та (4.41) випливає справедливість (4.38), а отже, і (4.37).

Формули (2.36), (4.32) та (4.37) дозволяють одержати при $n \geqslant 9$ наступну оцінку величини $\gamma_4(y_0)$:

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\frac{4j}{3(n-j)}}{\frac{9(1+q^{2n})q^{-j}}{20}} = \frac{160}{27(1+q^{2n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{j}{n-j}q^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} jq^j < \frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{\infty} jq^j <$$

$$< \frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\,\frac{q}{(1-q)^2}. \tag{4.42}$$

Водночас для величини $|\gamma_4(y_0)|$ можна отримати іншу оцінку зверху. З цією метою, помітивши, що в силу (2.38)

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|\cos\frac{j\pi}{2n} = (q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y_0)),$$

з (2.36) та (4.37) при $n \geqslant 9$ одержуємо

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\frac{4j}{3(n-j)}}{1-\frac{4j}{3(n-j)}}q^j = 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{4j}{3n-7j}q^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} jq^j < \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\infty} jq^j < \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\,\frac{q}{(1-q)^2}. \tag{4.43}$$

Із (4.42) і (4.43) випливає оцінка

$$|\gamma_4(y_0)| \leqslant \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}. \tag{4.44}$$

В силу (2.37) для величини $|\gamma_5(y_0)|$ маємо

$$|\gamma_5(y_0)| \leqslant 2\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty} q^j = 2\frac{q^{[\sqrt{n}]+1}}{1-q} < 2\frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}. \tag{4.45}$$

Взявши до уваги оцінки (4.30), (4.31), (4.33), (4.44) та (4.45), при $n \geqslant 9$ одержимо, що при виконанні умови (2.45)

$$\sum_{k=1}^{5}|\gamma_k(y_0)| < \frac{212800}{26973n}q^{\sqrt{n}}\,\frac{1}{1-q^2} + \frac{140q^{n+\sqrt{n}}}{407n^2} + \frac{40q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)} +$$

$$+\frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} + \frac{2q^{\sqrt{n}}}{1-q} <$$

$$< \frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}(0{,}877+0{,}0043+4{,}45+2) + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} <$$

$$< \frac{37}{5(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min \left\{ \frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}} \right\}.$$

Лему доведено.

З леми 4.1 і нерівності (2.78) випливає, що при $n \geqslant 9$, $q = e^{-h}$, $k = \overline{1, 2n}$, за умов (4.6) та (2.45) виконується нерівність

$$\mathcal{P}_q(t_k - y_0) + \sum_{m=1}^{5} \gamma_m(y_0) \operatorname{sign} \sin(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}) \geqslant 0. \tag{4.46}$$

В силу зображення (4.10), а також нерівностей (4.21) і (4.46) робимо висновок, що при $n \geqslant 9$ за умов (4.6) та (2.45) справедливе включення $H_{h,\beta} \in C_{y_0, 2n}$. Залишається лише переконатись, що (2.45) випливає з (4.6).

При доведенні теореми 2.1 було показано, що нерівність (2.45) випливає з умови (2.41). При $q = e^{-h}$ безпосередньо переконуємося, що (4.6) $\Rightarrow$ (2.41), а отже (4.6) $\Rightarrow$ (2.45). Теорему доведено.

4.3. Теореми про точні значення поперечників класів аналітичних функцій

Теорема 4.3. *Нехай $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (4.47)$$

де $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (4.3).

Доведення. Із теорем 4.1 та 4.2, а також із співвідношення (1.20) випливає, що рівності (4.47) мають місце для усіх номерів $n \geqslant \max\{n^*_h, n_h\}$. Покажемо, що $n_h \geqslant n^*_h$. При $h \geqslant \ln\frac{10}{3}$ вказана нерівність очевидна, оскільки в цьому випадку $n^*_h = 1$. Тому залишається переконатись, що при $h \in (0, \ln\frac{10}{3})$ $n_h \geqslant n^*_h = n^{**}_h$, де n^{**}_h — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність (4.1).

Покладемо, як і раніше, $q = e^{-h}$. Тоді для доведення теореми достатньо показати, що при $q \in (\frac{3}{10}, 1)$ і $n \geqslant 9$ з нерівності

$$\frac{37}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}} \qquad (4.48)$$

випливає нерівність

$$(1-q)^2 \geqslant \frac{5+3q^2}{1-q^2} \frac{\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}} + (2+q^{2n})q^{2n}. \qquad (4.49)$$

Як показано при доведенні теореми 2.1, при $n \geqslant 9$ і $q \in (0,1)$ із умови (2.41) випливає нерівність

$$n > \frac{160q}{57(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3.$$

Оскільки

$$\frac{160q}{57(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3 > \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5}.$$

то, з урахуванням очевидної імплікації (4.48) $\Rightarrow$ (2.41), одержуємо, що з умови (4.48) при $n \geqslant 9$ і $q \in (0,1)$ випливає нерівність

$$n > \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5}. \tag{4.50}$$

Покажемо, що при $q \in (\frac{3}{10}, 1)$ із (4.50) випливає нерівність

$$n > \frac{5}{1-q^2}\ln\frac{2}{1-q}. \tag{4.51}$$

Розглянемо різницю

$$v(q) = \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5} - \frac{5}{1-q^2}\ln\frac{2}{1-q},\ q \in [\frac{3}{10}, 1). \tag{4.52}$$

Похідна цієї функції зростає і має вигляд

$$v'(q) = \frac{8(1+6q+3q^2)}{3(1-q)^6} - \frac{5}{(1+q)(1-q)^2}\left(\frac{2q}{1+q}\ln\frac{2}{1-q} + 1\right). \tag{4.53}$$

Із відомого розкладу (див., наприклад, [19, с. 58])

$$\ln t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t-1}{t}\right)^k,\ t \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4.54}$$

при $t = \frac{2}{1-q}$ можемо записати оцінку

$$\ln\frac{2}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1+q}{2}\right)^k < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{2}\right)^k = \frac{1+q}{1-q}. \tag{4.55}$$

В силу (4.53) і (4.55) одержуємо

$$v'(q) > \frac{8(1+6q+3q^2)}{3(1-q)^6} - \frac{5}{(1-q)^3}.$$

Оскільки $v'(q)$ зростає і $v'(\frac{3}{10}) > 0$, то $v'(q) > 0$, $q \in [\frac{3}{10}, 1)$. Отже, $v(q)$ також зростає на проміжку $[\frac{3}{10}, 1)$, а тому

$$v(q) > v(\frac{3}{10}) > 0,\ q \in [\frac{3}{10}, 1). \tag{4.56}$$

Із (4.52) і (4.56) випливає, що при $q \in (\frac{3}{10},\ 1)$ (4.50) $\Rightarrow$ (4.51).

Нарешті нам залишається довести імплікацію (4.51) $\Rightarrow$ (4.49).

Записавши ланцюжок очевидних співвідношень

$$5\ln\frac{2}{1-q} > \ln\frac{16}{(1-q)^5} > \ln\frac{\frac{2(5+3q^2)}{(1-q^2)(1-q)}+3}{(1-q)^2} > \ln\frac{\frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{2}{\sqrt{3(1-q^2)}}+3}{(1-q)^2}$$

і врахувавши нерівність

$$\ln\frac{2}{1+q^2} > \frac{1-q^2}{2},$$

яка безпосередньо випливає з розкладу (4.54) при $t = \frac{2}{1+q^2}$, з (4.51) отримуємо

$$n > \frac{1}{2\ln\frac{1+q^2}{2}}\ln\frac{\frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{2}{\sqrt{3(1-q^2)}}+3}{(1-q)^2}.$$

Остання нерівність рівносильна наступній нерівності

$$(1-q)^2 > \frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^2}} + 3\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}. \tag{4.57}$$

Оскільки

$$3\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n} > (2+q^{2n})q^{2n},$$

то із (4.57) випливає (4.49). Таким чином

$$(4.48) \Rightarrow (4.50) \Rightarrow (4.51) \Rightarrow (4.49).$$

Теорему доведено.

При $\beta = 2l-1$, $l \in \mathbb{Z}$, із теореми 4.3 одержуємо наступне твердження.

Наслідок 4.1. *Нехай $h > 0$, $\beta = 2l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Тоді для всіх номерів таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = E_n(C^h_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\right|.$$

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми із роботи О.К. Кушпеля [31], можна показати, що при виконанні умов теореми 4.3 виконуються нерівності

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) \geqslant b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) \geqslant \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C, \tag{4.58}$$

$$d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) \geqslant b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) \geqslant \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C. \tag{4.59}$$

З теорем 4.1 та 1.9 випливає справедливість рівностей (1.43) при $\psi(k) = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}$, $h > 0$, і $n \geqslant n_h$. Тому, співставляючи оцінки (4.58) та (4.59) з рівностями (1.43), (1.36) і очевидними співвідношеннями

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) \leqslant \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C,$$

$$d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) \leqslant \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) \leqslant \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L,$$

де μ^* і ν^* означаються рівностями

$$\mu_0^* = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}(2n\nu h)}\cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),$$

$$\mu_k^* = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}\cos\frac{\beta\pi}{2} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}((2n\nu-k)h)} + \frac{1}{\operatorname{ch}((2n\nu+k)h)}\right)\cos(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

$$\nu_k^* = \frac{1}{\operatorname{ch} kh}\sin\frac{\beta\pi}{2} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}((2n\nu-k)h)} + \frac{1}{\operatorname{ch}((2n\nu+k)h)}\right)\sin(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}),\ k = \overline{1, n-1},$$

отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.4. *Нехай $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{4.60}$$

де $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (4.3).

Із теореми 4.4 легко одержати асимптотичні при $n \to \infty$ оцінки поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, $\lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, $b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$.

Теорема 4.5. *Нехай $h > 0$ та $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \geqslant n_h$*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(C^h_{\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} nh}\left(\frac{4}{\pi} + \gamma_n \frac{e^{-2nh}}{1 - e^{-2nh}}\right), \tag{4.61}$$

де $|\gamma_n| \leqslant \frac{28}{3\pi}$.

Доведення. Знайдемо двосторонні оцінки правої частини формули (4.60). Оскільки

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \leqslant \frac{2}{3(1+q^{2n})}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}, \ n \in \mathbb{N},$$

то, враховуючи (4.14), одержуємо для довільних $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2q^n}{1+q^{2n}} - \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})|\right) -$$

$$-\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1 - \frac{7}{3}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \qquad (4.62)$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2q^n}{1+q^{2n}} + \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1 - |\sin(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2})|\right) +$$

$$+\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})} \sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1 + \frac{7}{3}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right). \qquad (4.63)$$

З теореми 4.4 та оцінок (4.62) і (4.63) випливає, що при $n \geqslant n_h$ виконується (4.61). Теорему доведено.

Зазначимо, що при $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, В.М. Тихомиров у [75] та [77] одержав рівності

$$d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C, n \in \mathbb{N}. \qquad (4.64)$$

Але доведення рівностей (4.64) у вказаних роботах не були повними. Коректне доведення зрештою було отримано В. Форстом [81], який фактично показав, що ядро $H_{h,\beta}(t)$ при $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, є CVD-ядром.

Однак у загальному випадку для довільних $\beta \in \mathbb{R}$ та $h > 0$ встановлені в даному розділі оцінки (4.7) та (4.8) неможливо отримати, користуючись методами і підходами, які розвинуто А. Пінкусом [44], оскільки при деяких співвідношеннях між параметрами h і β ядра $H_{h,\beta}(t)$ можуть збільшувати осциляції. Доведемо це на прикладі ядра $H_{h,1}(t)$ при $h = \ln \frac{100}{21}$.

Згідно з наслідком 1.1, щоб довести, що ядро $H_{h,\beta}(t)$ не є CVD_{2n}-ядром ні при яких $n \in \mathbb{N}$, достатньо показати, що знайдуться вектори $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < 2\pi$, та $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $0 \leqslant y_1 < y_2 < y_3 < 2\pi$, для яких детермінант $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ змінює знак. Виберемо вектори

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}),\ k = 1, 2,$$

та

$$\mathbf{y}^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}),\ k = 1, 2,$$

наступним чином:

$$x_1^{(1)} = \frac{\pi}{18},\ x_2^{(1)} = \frac{\pi}{9},\ x_3^{(1)} = \frac{\pi}{6},\ y_1^{(1)} = \frac{13\pi}{36},\ y_2^{(1)} = \frac{11\pi}{30},\ y_3^{(1)} = \frac{67\pi}{180},$$

$$x_1^{(2)} = \frac{\pi}{18},\ x_2^{(2)} = \frac{\pi}{9},\ x_3^{(2)} = \frac{\pi}{6},\ y_1^{(2)} = \frac{13\pi}{30},\ y_2^{(2)} = \frac{10\pi}{9},\ y_3^{(2)} = \frac{7\pi}{6}.$$

Обчислення показують, що для ядра $H_{h,1}$ при $h = \ln \frac{100}{21}$

$$D_3(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}) < -1{,}269 \cdot 10^{-8},\ D_3(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}) > 3{,}81 \cdot 10^{-5}.$$

Отже, в силу наслідку 1.1 для $h = \ln \frac{100}{21}$ і будь-яких $n \in \mathbb{N}$ вірно, що $H_{h,1} \notin \mathrm{CVD}_{2n}$.

Висновки до розділу 4

У даному розділі встановлено, що ядра аналітичних функцій вигляду $H_{h,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, задовольняють введену О.К. Кушпелем умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_h, який залежить лише від параметра h гладкості ядра. У результаті для всіх $n \geqslant n_h$ отримано оцінки знизу колмогоровських поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$.

Одержані оцінки співпали з найкращими наближеннями класів $C^h_{\beta,1}$ та $C^h_{\beta,\infty}$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$ в метриках L та C відповідно. Як наслідок, знайдено точні значення поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, $\lambda_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $\lambda_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$, $b_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $b_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$.

Основні результати, які висвітлені у цьому розділі, опубліковано в роботах [11], [12] та [60].

ВИСНОВКИ

1. Доведено, що ядро Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ при $q \in (0,1)$ та $\beta \in \mathbb{R}$ задовольняє умову $C_{y,2n}$ починаючи з деякого номера n_q, залежного лише від q. Як наслідок, для всіх $n \geqslant n_q$ встановлено оцінки знизу колмогоровських поперечників в просторі C (L) класів інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,\infty}$ $(C^q_{\beta,1})$. Отримані оцінки співпали з найкращими наближеннями зазначених класів тригонометричними поліномами в просторі C (L). У результаті знайдено точні значення колмогоровських, бернштейновських та лінійних поперечників класів інтегралів Пуассона і показано, що підпростори тригонометричних поліномів порядку $n-1$ є оптимальними підпросторами для поперечників розмірності $2n-1$.

2. Встановлено включення $N_{q,\beta}(t) \in C_{y,2n}$ і знайдено точні оцінки знизу колмогоровських n-поперечників в просторах C і L класів $C^{q,1}_{\beta,\infty}$ і $C^{q,1}_{\beta,1}$ при $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, для усіх натуральних n, більших деякого номера, залежного лише від q. Як наслідок, обчислено точні значення колмогоровських, бернштейновських та лінійних поперечників зазначених класів.

3. Показано, що ядра $H_{h,\beta}(t)$ при $h > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ задовольняють умову Надя N^*_n, а також умову $C_{y,2n}$, починаючи з деякого номера n_h, який виражається через параметр h гладкості ядра. У результаті для всіх $n \geqslant n_h$ отримано точні оцінки колмогоровських, бернштейновських та лінійних поперечників класів $C^h_{\beta,\infty}$ $(C^h_{\beta,1})$ в просторі C (L).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций / Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 15, № 3. — С. 107–112.

2. Ахиезер Н.И. О наилучшем приближении аналитических функций / Н.И. Ахиезер // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 18, № 4–5. — С. 241–245.

3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Наум Ильич Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 408 с.

4. Бабенко В.Ф. О поперечниках некоторых классов сверток / В.Ф. Бабенко // Укр. мат. журн. — 1983. — Т. 35, № 5. — С. 603–607.

5. Бабенко В.Ф. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами / В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, № 5. — С. 669–683.

6. Барабошкина Н.А. Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами / Н.А. Барабошкина // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 79–86.

7. Барабошкина Н.А. Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности / Н.А. Барабошкина // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 71–78.

8. Боденчук В.В. Оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій в метриках просторів C та L / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка "Боголюбівські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Севастополь, 23–30 червня 2013 р. : Тези доповідей. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 218–219.

9. Боденчук В.В. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів згорток з ядром Неймана / В.В. Боденчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2014. — Т. 11, № 1. — С. 7–34.

10. Боденчук В.В. Оцінки поперечників за Колмогоровим класів згорток з ядром Неймана / В.В. Боденчук // IX-а Літня школа "Алгебра, топологія і аналіз", Поляниця, 7-18 липня 2014 р. : Тези лекцій і доповідей. — Івано-Франківськ : 2014. — С. 17–18.

11. Боденчук В.В. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. I / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 6. — С. 719–738.

12. Боденчук В.В. Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. II / В.В. Боденчук, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1011–1018.

13. Bodenchuk V.V. Estimates of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals in a uniform and integral metrics / V.V. Bodenchuk, A.S. Serdyuk // "International Conference on Mathematical Analysis, Differential

Equations and Their Applications", 4–9 September, 2012, Mersin, Turkey : Abstracts. — Mersin, 2012. — P. 31–32.

14. Бугров Я.С. Свойства полигармонических функций / Я.С. Бугров // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1958. — Т. 22, № 4. — С. 491–514.

15. Butzer P.L. Fourier analysis and approximation. Vol. 1: One-dimensional theory / Paul L. Butzer, Rolf J. Nessel // Pure and Applied Mathematics. Vol. 40. — New York-London : Academic Press, 1971. — 553 p.

16. Бушанский А.В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций / А.В. Бушанский // Исследования по теории приближения функций и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. — С. 29–37.

17. Вакарчук С.Б. О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 4. — С. 522–531.

18. Вакарчук С.Б. О поперечниках классов функций, аналитических в круге / С.Б. Вакарчук, М.Ш. Шабозов // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 3–22.

19. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е издание) / Израиль Соломонович Градштейн, Иосиф Моисеевич Рыжик. — М. : Наука, 1963. — 1100 с.

20. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1953. — Т. 17, № 2. — С. 135–162.

21. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1959. — Т. 23, № 6. — С. 933–950.

22. Дзядык В.К. К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригонометрических полиномов / В.К. Дзядык // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1961. — Т. 25, № 2. — С. 173–238.

23. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер / В.К. Дзядык // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 5. — С. 691–701.

24. Корнейчук Н.П. О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p / Н.П. Корнейчук // Мат. заметки. — 1971. — Т. 10, № 5. — С. 493–500.

25. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Николай Павлович Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.

26. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Николай Павлович Корнейчук. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 424 с.

27. Крейн М.Г. К теории наилучшего приближения периодических функций / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 18, № 4-5. — С. 245–249.

28. Кушпель А.К. SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$ / А.К. Кушпель. —

Київ : Ин-т математики АН УССР, 1985. — 47 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 85.51).

29. Кушпель А.К. Вопросы оптимального приближения функциональных классов: Дис. ... доктора физ.-мат. наук / Александр Константинович Кушпель. — Київ, 1988. — 283 с.

30. Кушпель А.К. Точные оценки поперечников классов сверток / А.К. Кушпель // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1305–1322.

31. Кушпель А.К. Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L / А.К. Кушпель // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 8. — С. 1070–1076.

32. Лигун А.А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых переодических функций / А.А. Лигун // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 1. — С. 61–75.

33. Маковоз Ю.И. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L / Ю.И. Маковоз // Изв. АН БССР. — Сер. физ.-мат. — 1969. — № 4. — С. 19–28.

34. Маковоз Ю.И. Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля / Ю.И. Маковоз // Мат. заметки. — 1979. — Т. 26, № 5. — С. 805–812.

35. Mairhuber J.C. On variation diminising transformations on the circle / J.C. Mairhuber, I.J. Shoenberg, R.E. Williamson // Rend. Circ. Mathem. Palermo. — 1959. — V. 8, № 2. — P. 241–270.

36. Моторный В.П. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L / В.П. Моторный, В.И. Рубанн // Мат. заметки. — 1975. — Т. 17, № 4. — С. 531–543.

37. Nagy B. Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I / B. Nagy // Periodischer Fall, Berichte der Math.-Phys. Kl. Akad. der Wiss. zu Leipzig. — 1938. — V. 90. — P. 103–134.

38. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Оператор $D(D^2 + 1^2)\dots(D^2 + n^2)$ и тригонометрическая интерполяция / Нгуен Тхи Тхьеу Хоа // Analysis Mathematica. — 1989. — Т. 15. — С. 291–306.

39. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций : Дис. ... доктора физ.-мат. наук / Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. — М. : МИАН им. Стеклова, 1994. — 219 с.

40. Никольский С.М. Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.

41. Осипенко К.Ю. Об n-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе / К.Ю. Осипенко // Изв. РАН, сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 55–79.

42. Осипенко К.Ю. О точных значениях n-поперечников на классах, задаваемых операторами, не увеличивающими осцилляции / К.Ю. Осипенко // Матем. сб. — 1997. — Т. 188, № 9. — С. 113–126.

43. Pinkus A. On n-widths of periodic functions / A. Pinkus // J. Analyse Math. — 1979. — V. 35. — P. 209–235.

44. Pinkus A. n-widths in approximation theory / Allan Pinkus. — Springer-Verlag. — 1985. — 291 p.

45. Савчук В.В. Найкращі наближення деяких класів голоморфних функцій / В.В. Савчук // Доп. НАН України. — 2007, № 5. — С. 36–42.

46. Сердюк А.С. О наилучшем приближении классов сверток периодических функций тригонометрическими полиномами / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 9. — С. 1261–1265.

47. Сердюк А.С. Оцінки поперечників за Колмогоровим класів нескінченно диференційовних періодичних функцій / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 12. — С. 1700–1706.

48. Сердюк А.С. Оцінки поперечників класів (ψ, β)-диференційовних функцій : Дис.... канд. фіз.-мат. наук / Анатолій Сергійович Сердюк. — Київ, 1995. — 117 с.

49. Сердюк А.С. Оцінки поперечників та найкращих наближень класів згорток періодичних функцій / А.С. Сердюк // Ряди Фур'є: теорія і застосування / Пр. Ін-ту математики НАН України. Т. 20. — Київ : Ін-т математики НАН України, 1998. — С. 286–299.

50. Сердюк А.С. Про існування та єдиність розв'язку задачі рівномірної SK-сплайн інтерполяції / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 4. — С. 486–492.

51. Сердюк А.С. Поперечники та найкращі наближення класів згорток

періодичних функцій / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 5. — С. 674–687.

52. Сердюк А.С. Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій / А.С. Сердюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Пр. Ін-ту математики НАН України. Т. 35. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 172–194.

53. Сердюк А.С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 946–971.

54. Сердюк А.С. Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), 28 травня – 3 червня 2012 р., Кам'янець-Подільський, Україна : Тези доповідей. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2012. — С. 94-95.

55. Serdyuk A.S. Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals / A.S. Serdyuk, V.V. Bodenchuk // Journal of Approximation Theory. — 2013. — V. 173, № 9. — P. 89–109.

56. Сердюк А.С. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ : Ін-т математики НАН України, 2013. — Т. 10, № 1. — С.204–222.

57. Сердюк А.С. Оцінки колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Доп. НАН України. — 2013, № 5. — С. 31–36.

58. Сердюк А.С. О точных значениях колмогоровських поперечников классов сверток с ядром Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Международна научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики", посвященная 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова, Тула, 16–20 сентября 2013 г. : Материалы конференции. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2013. — С. 111–112.

59. Сердюк А.С. Точні значення поперечників за Колмогоровим класів згорток з ядром Пуассона / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // Кримская международная математическая конференция КММК-2013, Судак, 22 сентября – 4 октября 2013 г. : Сборник тезисов. Т. 1. — Судак : 2013. — С. 78–79.

60. Сердюк А.С. Точні значення колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій / А.С. Сердюк, В.В. Боденчук // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р. : Тези доповідей. — Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. — С. 182–183.

61. Serdyuk A.S. Estimates for Kolmogorov widths of some classes of analytic functions / A.S. Serdyuk, V.V. Bodenchuk // "International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", 8-13 September, 2015, Baku, Azerbaijan : Abstracts. — Baku, 2015. — P. 153–154.

62. Степанец А.И. О существовании интерполяционных SK-сплайнов / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1994. — Т. 46, № 11. — С. 1546–1554.

63. Степанец А.И. Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 8. — С. 1112–1121.

64. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец // Пр. Ін-ту математики НАН України. Т. 40. — Київ : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.

65. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец // Пр. Ін-ту математики НАН України. Т. 40. — Київ : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

66. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1956. — Т. 20, № 5. — С. 643–648.

67. Стечкин С.Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 197–206.

68. Субботин Ю.Н. Поперечники класса W^rL в $L(0,2\pi)$ и приближение сплайн-функциями / Ю.Н. Субботин // Мат. заметки. — 1970. — Т. 7, № 1. — С. 43–52.

69. Субботин Ю.Н. Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников / Ю.Н. Субботин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1971. — Т. 109. — С. 35–60.

70. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами / Сунь Юн-шен // Успехи мат. наук. — 1958. — Т. 13, № 2. — С. 238–241.

71. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами / Сунь Юн-шен // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1959. — Т. 23, № 1. — С. 67–92.

72. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами (второе сообщение) / Сунь Юн-шен // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1961. — Т. 25, № 1. — С. 143–152.

73. Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций / Л.В. Тайков // Мат. заметки. — 1977. — Т. 22, № 2. — С. 285–295.

74. Temlyakov V.N. Approximation of periodic functions / V.N. Temlyakov. — New York: Nova Science Publishers, 1993. — 272 p.

75. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В.М. Тихомиров // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 81–120.

76. Тихомиров В.М. Наилучшие методы приближения и интерполирования в пространствах $C[-1,1]$ / В.М. Тихомиров // Матем. сб. — 1969. — Т. 80, № 2. — С. 290–304.

77. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / Владимир Михайлович Тихомиров. — М. : Изд-во МГУ, 1976. — 304 с.

78. Тихомиров В.М. Об экстремальных подпространствах для классов функций, задаваемых ядрами, не повышающими осцилляцию / В.М. Тихомиров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1997. — № 4. — С. 16–19.

79. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques / J. Favard // C.R. Acad. Sci. — 1936. — V. 203. — P. 1122–1124.

80. Favard J. Sur les meilleurs procedes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonometriques / J. Favard // Bull. de Sci. Math. — 1937. — V. 61. — P. 209–224, 243–256.

81. Forst W. Uber die Breite von Klassen holomorpher periodischer Funktionen / W. Forst // J. Approx. Theory. — 1977. — V. 19, № 4. — P. 325–331.

82. Шевалдин В.Т. Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций / В.Т. Шевалдин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 189. — С. 185–200.

83. Шевалдин В.Т. Поперечники классов сверток с ядром Пуассона / В.Т. Шевалдин // Мат. заметки. — 1992. — Т. 51, № 6. — С. 126–136.

84. Шевалдин В.Т. Оценки снизу поперечников некоторых классов периодических функций / В.Т. Шевалдин // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1992. — Т. 198. — С. 242–267.

85. Шевалдин В.Т. Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной / В.Т. Шевалдин // Мат. заметки. — 1993. — Т. 53, № 2. — С. 145–151.

86. Шевалдин В.Т. Оценки снизу поперечников классов функций, опеределяемых модулем непрерывности / В.Т. Шевалдин // Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 5. — С. 172–188.