МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Болух Віра Андріївна

УДК 517.9:517.987:519.7

Поведінка кореляційних та термодинамічних функцій нескінченних статистичних систем

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики
Національної академії наук України

Науковий керівник

доктор фізико–математичних наук, професор
РЕБЕНКО Олексій Лукич,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук, професор
ГОРДЕВСЬКИЙ Вячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна,
професор кафедри фундаментальної математики;

доктор фізико–математичних наук, професор
ДУДКІН Микола Євгенович,
Національний технічний університет України "КПІ", м. Київ,
в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться "5" липня 2016 р. о 15^{00} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "27" травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А.С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню нескінченних систем класичної статистичної механіки. Дослідження нескінченних систем є зручним математичним методом вивчення систем з дуже великою кількістю елементів. Реальна фізична чи біологічна система у кожний момент часу t займає деяку конфігурацію $\widetilde{\gamma}(t) = \{\widetilde{x}_1(t), ..., \widetilde{x}_n(t), ...\}$ фазового простору $\widetilde{\Gamma}$, який є множиною усіх допустимих конфігурацій, а змінною $\widetilde{x}(t)$ ми позначаємо усі фізичні характеристики частинки: координату, імпульс, спін тощо. Проте для дослідження системи важливою є не детальна поведінка кожної частинки системи, а її макроскопічні характеристики, такі як тиск, вільна енергія, ентропія тощо. Тому фазовий простір $\tilde{\Gamma}$ розглядають як сукупність нескінченних множин $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots\}$, розподіл яких описується ймовірнісною мірою Гіббса, а фізичні характеристики, які називаються спостережуваними величинами, описують вимірними функціями на просторі $\tilde{\Gamma}$. Середні значення спостережуваних величин обчислюють за допомогою міри Гіббса. Фізичне обґрунтування вигляду такої міри в обмеженому об'ємі було запропоновано Гіббсом ще у 1902 році. Перехід до нескінченної системи має назву граничного термодинамічного переходу.

Важливою характеристикою міри Гіббса є послідовність кореляційних функцій, які описують мікроскопічну поведінку фізичних систем. За допомогою кореляційних функцій зручно записувати середні значення спостережуваних величин. Дослідження кореляційних та термодинамічних функцій є надзвичайно актуальною задачею математичної фізики.

В 1946 році М. М. Боголюбовим були намічені шляхи математичного обґрунтування термодинамічного граничного переходу в рамках формалізму канонічного ансамблю Гіббса, а також розроблено загальний метод відшукання граничних m-частинкових функцій розподілу (кореляційних функцій) у вигляді формальних рядів за степенями густини частинок у системі. В 1963 році Д. Рюель запропонував подібний метод, який базувався на дослідженні рівнянь Кірквуда—Зальцбурга для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю. Крім рівнянь Кірквуда—Зальцбурга існують й інші рівняння, яким задовольняє кореляційний функціонал рівноважних систем статистичної механіки. Це рівняння Майєра—Монтролла, рівняння Боголюбова, рівняння Гончара та інші. Побудова стану в розумінні ідеї Гіббса для нескінченної системи була вирішена в роботах Р. А. Мінлоса, Д. Рюеля, Р. Л. Добрушина та О. Е. Ленфорда.

Актуальним питанням у дослідженні неперервних статистичних систем залишається доведення існування фазових переходів для стандартних взаємодій типу Ленарда—Джонса. Фазові переходи в неперервних системах досліджувались тільки для деяких екзотичних взаємодій типу потенціала Каца в границі Ван-дер-Ваальса, моделі Уідома—Роулінсона, моделі Лебовіца—Мазеля—Пресутті квантово-польового типу та ін. Важливим кроком вперед є, введена О. Л. Ребенком, модель коміркового газу [1], яка апроксимує неперервну систему точкового газу з наперед заданою точністю. Для розрахунків основних термодинамічних потенціалів та кореляційних функцій нескінченних систем достатньо досліджувати ці функції тільки на конфігураціях, в яких в комірку (уявний гіперкубик з ребром розміру a, яке можна вибрати як завгодно малим) потрапляє не більше однієї частинки. Така модель є дуже близькою до моделі ґратчастого газу на $a\mathbb{Z}^d$, а її дослідження є актуальним для вирішення відкритої проблеми опису фазових переходів і дослідження критичних явищ неперервних систем статистичної механіки.

Запропонована дисертація є подальшим розвитком теоретичних досліджень нескінченних систем класичної статистичної механіки методами нескінченновимірного аналізу, а розділ 4 дисертації можна розглядати як підготовчу роботу до вирішення проблеми існування фазових переходів в модельних неперервних системах класичних частинок, які взаємодіють за допомогою парних потенціалів типу Ленарда—Джонса.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою "Дослідження спектральних характеристик та критичної поведінки складних систем математичної фізики" (номер державної реєстрації 0111U001030).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження поведінки термодинамічних та кореляційних функцій нескінченних статистичних систем.

Завдання дослідження:

1. Описати основні методи нескінченновимірного аналізу в статистичній механіці, за допомогою яких значно спрощуються доведення важливих теорем і формул статистичної механіки: теорема, що відображає властивості міри Лебега—Пуассона і є важливою у представленні великої статистичної суми у вигляді експоненти, що в свою чергу є необхідним для побудови термодинамічних потенціалів при переході до нескінченного об'єму; продемонструвати новий спосіб виведення рівнянь ББҐКІ та

[1] Rebenko O. L. Cell gas model of classical statistical systems / O. L. Rebenko // Rewiew in Math. Phys. — 2013. — Vol. 25, No. 4, 13330006 (28 p.).

Кірквуда—Зальцбурга для кореляційних функцій.

2. Отримати нові форми запису розкладів Майєра та довести їх збіжність.

3. Довести збіжність апроксимованої вільної енергії Гельмгольца моделі коміркового газу до відповідної вільної енергії неперервної системи.

Об'єктом дослідження є класичні неперервні статистичні системи з нескінченним числом частинок, що взаємодіють за допомогою двочастинкового потенціалу.

Предметом дослідження є побудова нових розкладів для термодинамічних потенціалів, зокрема тиску; апроксимація вільної енергії Гельмгольца в рамках моделі коміркового газу.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи нескінченновимірного аналізу та термодинамічного граничного переходу.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати:

1. Запропоновано новий метод доведення теореми про представлення деяких інтегралів за мірою Лебега—Пуассона у вигляді експоненти, а також розглянуто її застосування до термодинамічних потенціалів, зокрема тиску.

2. Запропоновано нові методи виведення рівнянь ББҐКІ та Кірквуда—Зальцбурга для кореляційних функцій методами нескінченновимірного пуассонівського аналізу.

3. Побудовано розклад Майєра у формі Бріджеса—Федербуша для системи точкових частинок, які взаємодіють за допомогою неінтегрованого потенціалу взаємодії, а також доведено збіжність такого розкладу.

4. Запропоновано нове виведення розкладу Майєра для зв'язних кореляційних функцій методами нескінченновимірного пуассонівського аналізу.

5. Побудовано новий розклад для термодинамічного потенціалу тиску, який дає можливість покращити результати попередніх досліджень.

6. Доведено, що вільна енергія коміркового газу $f^{(a)}(v,\beta)$ є монотонною, неперервною, вгнутою функцією від питомого об'єму v.

7. В рамках канонічного ансамблю доведено, що апроксимована вільна енергія моделі коміркового газу з будь-яким ступенем точності наближається до відповідної вільної енергії неперервної системи.

Практичне значення одержаних результатів. Результати і методи дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути використані при подальших дослідженнях нескінченних систем взаємодіючих точкових частинок статистичної механіки, а також в статистичній фізиці для розрахунків середніх спостережуваних величин.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження і постановка задач належать науковому керівнику О. Л. Ребенку. Результати дисертації, які визначають наукову новизну роботи та виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових конференціях та семінарах, а саме:

— IM Workshop on mathematical physics. Workshop on occasion of the 105th anniversary of academician M.M. Bogolubov (Київ, Інститут математики НАН України, 19 листопада 2014 року);

— III Міжнародній науково-практичній конференції "Розвиток сучасної освіти і науки: результати, проблеми, перспективи" (Дрогобич, 26-27 березня 2015 року);

— XVI Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 14-15 травня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3-6 червня 2015 року);

— наукових семінарах відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники семінару — доктор фіз.-мат. наук, професор О. Л. Ребенко та доктор фіз.-мат. наук, професор В. Д. Кошманенко);

— об'єднаному семінарі з математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники семінару — доктор фіз.-мат. наук Є. Д. Білоколос та доктор фіз.-мат. наук, чл.-кор. НАН України А. Г. Нікітін).

Публікації. Основні результати дисертації викладено в п'яти статтях [1-5], опублікованих у виданнях, що входять до переліку фахових видань, та додатково відображено в матеріалах конференцій [6-8]. Серед статей дві опубліковано в журналах, які входять до наукометричних баз даних (MathSciNet, Google Scholar).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 128 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 127 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації автора.

У **першому розділі** дисертації здійснено огляд літератури за темою дослідження та введено основні означення та поняття рівноважної статистичної механіки, необхідні при формулюванні результатів дослідження в наступних розділах. У підрозділі 1.1 представлено основні етапи еволюції досліджень актуальних задач математичної фізики. У підрозділі 1.2 описано простори конфігурацій систем статистичної механіки. Нехай $\mathbb{R}^d$ — це d-вимірний евклідовий простір. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ борелівську σ-алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ систему всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Конфігураційний простір $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ визначимо формулою:

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \left\{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \big| \; |\gamma \cap \Lambda| < \infty \;\; \text{для} \quad \text{всіх} \;\; \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \right\}, \tag{1}$$

де для довільної множини $A \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ $\quad |A|$ — це кількість елементів в множині A.

Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0. Простір скінченних конфігурацій, що знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, позначимо Γ_Λ. Конфігураційний простір з фіксованою кількістю елементів будемо позначати $\Gamma^{(n)}$.

Для довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкубики з довжиною ребра $a > 0$ введемо простір розріджених конфігурацій, який буде покладений в означення коміркового газу:

$$\Gamma^{(a)} = \{\gamma \in \Gamma \big| \; |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \; \text{для всіх} \; \Delta \in \overline{\Delta}_a\}. \tag{2}$$

У підрозділі 1.3 розглянуто умови, які накладають на двочастинковий потенціал взаємодії.

Нехай взаємодія точкових тотожних частинок у просторі $\mathbb{R}^d$ описується парним потенціалом $\phi(|x-y|)$, де $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x-y|$ — відстань між x та y в $\mathbb{R}^d$. Потенціальна енергія взаємодії буде виражатись формулою:

$$U(\gamma) = \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi(|x-y|), \;\; \gamma \in \Gamma_0. \tag{3}$$

1. Умова стійкості. Будемо називати потенціал ϕ стійким, якщо потенціальна енергія $U(\gamma)$ конфігурації $\gamma \in \Gamma_0$ задовольняє наступну нерівність:

$$U(\gamma) = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \phi(|x-y|) \geq -B|\gamma|, \text{ для } |\gamma| \geq 2 \tag{4}$$

зі сталою величиною $B \geq 0$.

2. Умова надстійкості. Потенціал ϕ називають надстійким, якщо існують константи $A > 0$, $B \geq 0$ та розбиття $\bar{\Delta}_a$ таке, що потенціальна енергія $U(\gamma)$ задовольняє нерівність:

$$U(\gamma) \geq A \sum_{\Delta\in\bar{\Delta}_a} |\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma|, \quad \text{для довільної } \gamma \in \Gamma_0. \tag{5}$$

3. Умова посиленої надстійкості. Взаємодія називається посилено надстійкою, якщо існує $a_0 > 0$ та константи $A(a) > 0$, $B(a) \geq 0$ і $m \geq 2$ для всіх $0 < a \leq a_0$ такі, що для довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_0$ для потенціальної енергії буде виконуватись умова:

$$U(\gamma) \geq A(a) \sum_{\Delta\in\Delta_a : |\gamma_\Delta|\geq 2} |\gamma_\Delta|^m - B(a)|\gamma|. \tag{6}$$

4. Умова регулярності. Двочастинковий потенціал ϕ називається регулярним, якщо він обмежений знизу та виконується умова:

$$C(\beta) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} |e^{-\beta\phi(|x|)} - 1|dx < \infty, \tag{7}$$

де $\beta = \frac{1}{kT}$ (T — температура системи, k — стала Больцмана).

(A): Умови на потенціал взаємодії. У дисертації розглядаються потенціали загального вигляду ϕ, які є неперервними функціями на $R_+\backslash\{0\}$ і для яких існують константи $r_0 > 0$, $R > r_0$, $\varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що:

$$1)\ \ \phi(|x|) \equiv -\phi^-(|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \text{ для } |x| \geq R; \tag{8}$$

$$2)\ \ \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s}, \quad s \geq d \text{ для } |x| \leq r_0, \text{ де} \tag{9}$$

$$\phi^+(|x|) := \max\{0; \phi(|x|)\}, \quad \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\}, \text{ а} \tag{10}$$

$$\phi(|x|) = \phi^{+}(|x|) - \phi^{-}(|x|). \tag{11}$$

Прикладом таких потенціалів є потенціали типу Ленарда—Джонса, які використовуються в теорії для опису міжмолекулярних взаємодій

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{12}} - \frac{D}{|x|^{6}},\ \text{де } C > 0,\ D > 0 \text{ — деякі константи.}$$

У підрозділі 1.4 визначені основні міри на просторах конфігурацій Γ_Λ, Γ_0, Γ і наведені їх властивості, які необхідні для доведення основних результатів.

Міри Пуассона та Лебега—Пуассона. Нехай σ — це міра Лебега в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$. Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою Пуассона $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ, де $z > 0$ — це активність. Введемо міру Лебега—Пуассона $\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$ на просторі скінченних конфігурацій Γ_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або Γ_0) за формулою:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda \cdots \int_\Lambda F_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \tag{12}$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$, $F_n \in L^\infty(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$).

За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір:

$$\pi_{z\sigma}^{\Lambda} := e^{-z\sigma(\Lambda)} \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \tag{13}$$

Зауважимо, що сімейство мір $\{\pi_{z\sigma}^{\Lambda} \ : \ \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\}$ буде попарно узгодженим, існуватиме єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ (міра Пуассона) на конфігураційному просторі Γ, яка буде визначатись наступним чином:

$$\forall \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \ \pi_{z\sigma}^{\Lambda} = \pi_{z\sigma} \circ (\mathrm{p}_\Lambda)^{-1},\ \ \mathrm{p}_\Lambda \ : \ \Gamma \mapsto \Gamma_\Lambda.$$

Визначення міри Гіббса. Вираз для міри Гіббса у скінченному об'ємі в рамках великого канонічного ансамблю:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{14}$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \tag{15}$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега—Пуассона (12).

У підрозділі 1.5 введено поняття кореляційних та термодинамічних функцій мір Гіббса.

Статистичні властивості нескінченних систем взаємодіючих частинок у практичному аспекті доцільно описувати, використовуючи кореляційні функції. Перш за все, слідуючи Ленарду, визначимо кореляційну міру, що відповідає мірі Гіббса μ, формулою:

$$\rho_\mu(A) = \rho(A) = \int_\Gamma \sum_{\eta \Subset \gamma} 1\!\!1_A(\eta)\mu(d\gamma), \; A \in \mathcal{B}(\Gamma_0). \tag{16}$$

Якщо кореляційна міра $\rho(\cdot)$ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега в λ_σ, тоді її щільність визначає відповідний кореляційний функціонал $\rho(\eta)$:

$$\rho(A) = \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta)\rho(\eta)\lambda_\sigma(d\eta) = \int_{\Gamma_0} 1\!\!1_A(\eta) z^{-|\eta|}\rho(\eta)\lambda_{z\sigma}(d\eta) \tag{17}$$

і сімейство кореляційних функцій:

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) := \rho(\eta) \upharpoonright \Gamma^{(n)}, \;\; \eta = \{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{18}$$

У випадку обмеженої системи, що знаходиться в об'ємі Λ, кореляційний функціонал $\rho_\Lambda(\eta)$ має вигляд:

$$\rho_\Lambda(\eta) \; = \; \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{19}$$

В дисертації розглянуто термодинамічні функції — тиск та вільну енергію Гельмгольца.

У великому канонічному ансамблі тиск обчислюють за допомогою формули:

$$p(z, \beta) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} p^\Lambda(z, \beta) := \frac{1}{\beta} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z, \beta), \tag{20}$$

де велика статистична сума $Z_\Lambda(z, \beta) = Z_\Lambda$(див. (15)).

Вільна енергія системи визначатиметься за допомогою формули:

$$f(v, \beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{\substack{N, V \to \infty \\ \frac{V}{N} \to v}} \frac{1}{N} \log Z_\Lambda(N, \beta), \tag{21}$$

де $Z_\Lambda(N,\beta)$ — це статистична сума канонічного ансамблю:

$$Z_\Lambda(N,\beta) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda^{(N)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\lambda_D^{-d}\sigma}(d\gamma), \text{ де } \lambda_D = (\frac{h^2\beta}{2\pi m})^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

h — стала, яку вводять, щоб позбутись розмірності.

Другий розділ присвячений застосуванню методу нескінченновимірного пуассонівського аналізу для доведення важливих формул та рівнянь статистичної механіки.

У підрозділі 2.1 за допомогою даного методу доведено теорему 2.1 про експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега—Пуассона.

Для будь-якої $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$-вимірної функції F інтеграл за мірою Лебега—Пуассона визначатиметься за допомогою формули (12), для всіх функцій $F : \Gamma_\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ або $F : \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$, що можуть бути представлені як нескінченна послідовність симетричних функцій $\{F_n\}_{n\geq 0}$ так, що для будь-якої конфігурації $\gamma = \{x_1, \ldots, x_n\} \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ матимемо:

$$F(\gamma) = F(\{x_1, \ldots, x_n\}) = F_n(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}), \tag{23}$$

$F(\emptyset) = F_0 \in \mathbb{R}$, $\pi \in P_n$, а P_n — є множиною перестановок з n елементів.

Будемо розглядати функції на конфігураційному просторі Γ_Λ, що мають вигляд:

$$\Phi(\gamma) = \sum_{k=1}^{|\gamma|} \sum_{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\}\subset\gamma}^{*} F(\gamma_1)F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_k), \quad \Phi(\emptyset) = 1, \tag{24}$$

де $*$ в межі суми означає, що сумування відбувається по всім k-непорожнім неперетинним підмножинам γ, тобто:

$$\bigcup_{j=1}^{k} \gamma_j = \gamma,\ \gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing \text{ для всіх } i \neq j,\ \gamma_i \neq \varnothing,\ i,j \in \{1,\ldots,k\}. \tag{25}$$

Теорема 2.1. *Нехай функція Φ має вигляд (24), а функції F_n, задані формулою (23), задовольняють наступні оцінки:*

$$\int\limits_\Lambda \ldots \int\limits_\Lambda F_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \leq c^n C_\Lambda n!, \tag{26}$$

де стала c не залежить від Λ. Тоді буде справджуватись рівність:

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda} \Phi(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma) = e^{\int\limits_{\Gamma_\Lambda\setminus\{\varnothing\}} F(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma)} \tag{27}$$

для $0 < z < 1/2c$.

У підрозділі 2.2 продемонстровано застосування теореми 2.1 для отримання розкладу Майєра для тиску та густини нескінченної системи точкових частинок, що взаємодіють через парний потенціал ϕ, який є неперервною функцією на $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ і задовольняє умови стійкості (4) та регулярності (7).

Стандартною процедурою є представлення експоненти $e^{-\beta U(\gamma)}$, що входить в означення великої статистичної суми, у вигляді:

$$e^{-\beta U(\gamma)} = \begin{cases} 1, & \text{для } |\gamma| = 0 \vee 1, \\ \prod\limits_{\{x,y\}\subset\gamma} (C_{xy}+1), & \text{для } |\gamma| \geq 2, \end{cases} \tag{28}$$

де $C_{xy} := e^{-\beta\phi_{xy}} - 1$ та запис її за допомогою функцій Урсела $\Phi^T(\gamma)$:

$$e^{-\beta U(\gamma)} = \sum_{k=1}^{|\gamma|} \sideset{}{^*}\sum_{\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}\subset\gamma} \Phi^T(\gamma_1)\dots\Phi^T(\gamma_k), \tag{29}$$

де $*$ в межі суми означає те ж саме, що і у формулі (24). В результаті отримуємо новий вираз для великої статистичної суми:

$$Z_\Lambda(z,\beta) := \int\limits_{\Gamma_\Lambda} \sum_{k=1}^{|\gamma|} \sideset{}{^*}\sum_{\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}\subset\gamma} \Phi^T(\gamma_1)\dots\Phi^T(\gamma_k)\lambda_{z\sigma}(d\gamma). \tag{30}$$

Для того, щоб застосувати теорему 2.1 з $F(\gamma) = \Phi^T(\gamma)$ необхідно оцінити $\Phi^T(\gamma)$. Такі оцінки можна знайти в роботі Д. Рюеля [2]:

$$\int\limits_\Lambda \dots \int\limits_\Lambda |\Phi^T(\{x_1,\dots,x_n\})| dx_2\dots dx_n \leq (n-1)! e^{-2\beta B}(e^{2\beta B+1}C(\beta))^{n-1}. \tag{31}$$

[2] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / Д. Рюэль. — М.: Мир, 1971. — 368 с.

Використаємо теорему 2.1 з $C_\Lambda = \sigma(\Lambda)C\ (\beta)^{-1}e^{-4\beta B-1}$, а також $c = e^{2\beta B+1}C(\beta)$ для того, щоб представити велику статистичну суму у вигляді:

$$Z_\Lambda(z,\beta) = e^{\int\limits_{\Gamma_\Lambda\setminus\{\emptyset\}} \Phi^T(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma)}. \tag{32}$$

Рівності (32) та (31) доводять існування та аналітичність тиску:

$$p(z,\beta) = \frac{1}{\beta}\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}\frac{1}{\sigma(\Lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}\dots\int\limits_{\Lambda}\Phi^T(\{x_1,\dots,x_n\})dx_1\dots dx_n. \tag{33}$$

У підрозділі 2.3 запропонований новий спосіб виведення рівнянь Кірквуда—Зальцбурга для кореляційних функцій рівноважних систем. В підрозділі 2.4 з позиції нескінченновимірного пуассонівського аналізу розглянуто виведення рівнянь ББҐКІ для кореляційних функцій.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено побудові та дослідженню нових розкладів для термодинамічних функцій у ряди за степенями активності z (розклади Майєра). У такому розкладі n-й член є сумою вкладів зв'язних діаграм з n вершинами. Такий ряд є збіжним для потенціалів, які задовольняють умови стійкості (4) і регулярності (7). У 1979 році Бріджесом і Федербушем була запропонована нова форма запису розкладів Майєра, в яких n-й член розкладу є сумою вкладів зв'язних графів-дерев з n вершинами. Такий запис значно спрощує доведення збіжності рядів, але вимагає додаткової умови на потенціал взаємодії — умови інтегровності потенціалу.

У підрозділі 3.1 удосконалено метод Бріджеса—Федербуша і побудовано розклад Майєра для неінтегровних потенціалів взаємодії та доведено теорему 3.1 про збіжність побудованого розкладу. Нехай потенціал взаємодії задовольняє умови **(A)** (див. (8)-(11)).

Розкладом Майєра буде ряд:

$$\beta p(z,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta)z^n. \tag{34}$$

Перш ніж побудувати розклад за допомогою методу Бріджеса—Федербуша, зробимо деяке проміжне розбиття потенціалу ϕ. Нехай v — позитивний інтегровний парний потенціал, такий що:

$$w(|x|) := \phi^+(|x|) - v(|x|) \geq 0 \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^d, \tag{35}$$

а потенціал $\varphi = v - \phi^-$ є стійким (4), тобто (36)

$$U_\varphi(\gamma) = \sum_{\{x,y\}\subset\gamma} \varphi(|x-y|) \geq -B_1|\gamma| \text{ з деякою константою } B_1 \geq 0. \quad (37)$$

$$\text{Тоді } \phi = w + \varphi, \;\; U(\gamma) = U_\phi(\gamma) = U_w(\gamma) + U_\varphi(\gamma). \quad (38)$$

Використовуючи метод введення проміжних параметрів взаємодії, отримаємо розклад:

$$Z_\Lambda(N) = \sum_{l=1}^{N} \frac{l}{N} K_l^\Lambda Z_\Lambda(N-l), \quad (39)$$

де величини K_l^Λ і $Z_\Lambda(N-l)$ задані формулами (3.21)–(3.23) дисертації. Підставимо праву частину тотожності (39) у вираз для великої статистичної суми і продиференціюємо за змінною z, враховуючи, що ряд $\sum\limits_{n\geq 1} nz^{n-1}K_n^\Lambda$ рівномірно збігається в деякому околі точки $z = 0$. Тоді отримаємо рівняння:

$$\frac{dZ_\Lambda}{dz} = (\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} K_n^\Lambda) Z_\Lambda. \quad (40)$$

Отже, остаточно для статистичної суми отримуємо представлення:

$$Z_\Lambda = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} z^n K_n^\Lambda), \quad (41)$$

а враховуючи означення (20) і (34), отримуємо:

$$b_n(\beta) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} K_n^\Lambda. \quad (42)$$

Теорема 3.1. *Нехай потенціал взаємодії задовольняє умови **(A)** (див. (8)-(11)). Тоді існує границя*

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z,\beta) = \beta p(z,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta) z^n \quad (43)$$

для достатньо малих значень активності z, які визначаються нерівністю:

$$z\beta e^{\beta B_1 + 1}(||\varphi||_1 + ||u||_1) < 1, \; \textit{де} \quad (44)$$

$$||f||_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx < \infty. \tag{45}$$

У підрозділі 3.2 досліджується розклад Майєра для зв'язних кореляційних функцій. Запропоновано нове виведення розкладу методами нескінченновимірного пуассонівського аналізу.

У підрозділі 3.3 запропонована нова форма запису розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів нескінченних систем статистичної механіки. Ідея полягає у тому, щоб розділити додатню і від'ємну частини потенціалу взаємодії між частинками і побудувати розклад за функціями Урсела від'ємної частини, яка інтегрується за мірою Гіббса, що визначається додатньою частиною потенціалу.

Для побудови розкладу, експоненту від енергії, яка враховує лише від'ємну частину потенціалу ϕ^- $(\phi = \phi^+ + \phi^-)$, запишемо у вигляді:

$$e^{-\beta U^-(\gamma)} = \sum_{\eta\subset\gamma} \tilde{F}(\eta), \quad \tilde{F}(\varnothing) = 1, \tag{46}$$

$$\tilde{F}(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sideset{}{^*}\sum_{\{\eta_1,\dots,\eta_k\}\subset\eta} F(\eta_1)\dots F(\eta_k). \tag{47}$$

$F(\{x\}) = 0$ і $F(\eta) = \Phi^T_-(\eta)$ для $|\eta| \geq 2$, а вираз для $\Phi^T_-(\eta)$ відрізняється від функцій Урсела $\Phi^T(\eta)$ тим, що у кожному зв'язному графі, внесок якого входить у визначення $\Phi^T_-(\eta)$, аналітичний вираз C_{xy}, який відповідає кожній лінії графа, треба замінити на функції $C^-_{xy} := e^{-\beta\phi^-_{xy}} - 1$.

Тоді велика статистична сума набуває вигляду:

$$Z_\Lambda(z,\beta) = Z^+_\Lambda(z,\beta) \int\limits_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta\subset\gamma} \tilde{F}(\eta)\mu^+_\Lambda(d\gamma), \tag{48}$$

де μ^+_Λ — це міра Гіббса в Λ, яка відповідає взаємодії ϕ^+.

До правої частини рівності застосуємо формулу (1.40) дисертації:

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta\subset\gamma} \tilde{F}(\eta)\mu^+_\Lambda(d\gamma) = \int\limits_{\Gamma_\Lambda} \tilde{F}(\eta)\rho^{(+)}(\eta)\lambda_\sigma(d\eta), \tag{49}$$

де $\rho^{(+)}(\eta)$ — сім'я кореляційних функцій, які відповідають взаємодії ϕ^+.

А далі, враховуючи вигляд функції $\tilde{F}(\eta)$ в (47), підінтегральний вираз в (49) представимо у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1,\ldots,\eta_k\}\subset\eta}^{*} F(\eta_1)\ldots F(\eta_k)\rho^{(+)}(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1,\ldots\eta_k\}\subset\eta}^{*} X(\eta_1)\ldots X(\eta_k), \quad (50)$$

де функції X визначаються з рівняння (50) методом математичної індукції:

$$X(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1,\ldots,\eta_k\}\subset\eta}^{*} F(\eta_1)\ldots F(\eta_k)\rho^{(+),T}(\eta_1,\ldots,\eta_k \mid \eta), \quad (51)$$

де $\rho^{(+),T}(\eta_1,\ldots,\eta_k \mid \eta)$ — узагальнені зв'язні кореляційні функції, які відповідають взаємодії ϕ^+. Вони визначаються як звичайні зв'язні кореляційні функції по відношенню до підмножин $\eta_1,\ldots,\eta_k$ конфігурації η, тобто є звичайними зв'язними кореляційними функціями у випадку, коли кожна з підмножин $\eta_1,\ldots,\eta_k$ містить по одній точці.

Враховуючи (50) і теорему 2.1, отримуємо рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \tilde{F}(\eta)\rho^{(+)}(\eta)\lambda_\sigma(d\eta) = e^{\int_{\Gamma_\Lambda\setminus\{\emptyset\}} X(\gamma)\lambda_{z\sigma}(d\gamma)}. \quad (52)$$

Тоді, використовуючи формули (48)-(50), (51), (52) та означення (20), отримуємо розклад тиску p за степенем активності z:

$$p(z,\beta) = p^+(z,\beta) + kT\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}^d}\ldots\int_{\mathbb{R}^d} X_n(x_1,\ldots,x_n)dx_2\ldots dx_n. \quad (53)$$

Збіжність розкладу (53) випливає з оцінок $\rho^{(+),T}(\eta_1,\ldots,\eta_k \mid \eta)$ [3] та внесків $F(\eta)$ зв'язних графів, побудованих за допомогою функцій C^-_{xy}, вирішальною властивістю яких є умови:

$$C^-_{xy} = 0 \text{ при } |x-y| \le r_0 \text{ та } C^-(\beta,r_0) = \int_{R^d} C^-_{0x}dx < \infty. \quad (54)$$

[3] Duneau M. Decrease Properties of Truncated Correlation Functions and Analicity Properties for Classical Lattices And Continuous Systems. / M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard // Commun. math. Phys. — 1973. — Vol. 31. — P. 191-208.

У **четвертому розділі** в рамках моделі коміркового газу показано, що для довільних позитивних значень оберненої температури $\beta > 0$ та питомого об'єму $v > 0$ апроксимована вільна енергія модельної системи буде прямувати до вільної енергії неперервної системи, коли параметр розбиття $a \to 0$. Також доведено, що вільна енергія коміркового газу є монотонною, неперервною, вгнутою функцією від питомого об'єму v.

У підрозділі 4.1 описано конфігураційний простір та термодинамічні функції моделі коміркового газу.

Нескінченну систему частинок, конфігураційний простір якої визначено у (2), розглядають як модель коміркового газу. Введемо функцію-індикатор формулою:

$$\chi_{-}^{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{55}$$

Статистична сума канонічного ансамблю моделі коміркового газу буде мати вигляд:

$$Z_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta) = \int\limits_{\Gamma_{\Lambda}^{(N)}} \prod_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a,\Lambda}} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{\lambda_D^{-d}\sigma}(d\gamma). \tag{56}$$

Вільна енергія Гельмгольца модельної системи буде виражатись рівністю:

$$f^{(a)}(v, \beta) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}} f_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta) := -\frac{1}{\beta} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}} \frac{1}{N} \log Z_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta). \tag{57}$$

У підрозділі 4.2 описано властивості вільної енергії коміркового газу як функції від питомого об'єму v, а саме продемонстровано, що $f^{(a)}(v, \beta)$ є монотонною, неперервною, вгнутою функцією від питомого об'єму v.

Теорема 4.1. *Нехай двочастинковий потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умови **(A)** (див. (8)-(11)) Тоді існує деяке $0 \leq v_0 < \infty$ таке, що для всіх $v > v_0$ існує границя*

$$f^{(a)}(v, \beta) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}} f_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta) := -\frac{1}{\beta} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Lambda\uparrow\mathbb{R}^d}} \frac{1}{N} \log Z_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta). \tag{58}$$

Функція $f^{(a)}(v, \beta)$ є монотонною, неперервною, вгнутою функцією від питомого об'єму v.

У підрозділі 4.3 доведено теорему про апроксимацію вільної енергії точкового газу вільною енергією коміркового газу.

Теорема 4.2. *Нехай двочастинковий потенціал взаємодії* $\phi(|x|)$ *задовольняє умови* ***(A)*** *(див. (8)–(11)). Тоді для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує значення параметру розбиття* $a_1 = a_1(v, \varepsilon) > 0$ *таке, що умова*

$$|f(v, \beta) - f^{(a)}(v, \beta)| < \varepsilon \tag{59}$$

буде виконуватись для всіх позитивних значень v, β і $a \in (0; a_1(v, \varepsilon))$.

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Методами нескінченновимірного аналізу доведено теорему про експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега—Пуассона. Продемонстровано зручність застосування доведеної теореми для представлення великої статистичної суми у вигляді експоненти та відповідного представлення тиску.
2. Запропоновано новий спосіб виведення рівнянь Кірквуда—Зальцбурга для кореляційних функцій рівноважних систем, а також виведення ланцюжка рівнянь ББҐКІ для кореляційних функцій з позиції нескінченновимірного пуассонівського аналізу.
3. Побудовано розклад Майєра методом Бріджеса—Федербуша для неінтегровних потеціалів взаємодії та доведено збіжність даного розкладу. Запропоновано новий спосіб виведення розкладу Майєра для зв'язних кореляційних функцій методами нескінченновимірного пуассонівського аналізу. Запропонована нова форма запису розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів нескінченних систем статистичної механіки.
4. В рамках моделі коміркового газу сформульовано та доведено теорему про існування термодинамічної границі для вільної енергії коміркового газу, а також досліджено властивість вільної енергії як монотонної, неперервної, вгнутої функції від питомого об'єму v. Встановлено, що для довільних позитивних значень оберненої температури $\beta > 0$ та питомого об'єму $v > 0$ апроксимована вільна енергія коміркового газу буде прямувати до вільної енергії неперервної статистичної системи, коли параметр апроксимації a спрямувати до нуля.

Список опублікованих праць за темою дисертації:

1. Boluh V. A. An exponential Representation for Some Integrals with Respect to Lebesgue-Poisson Measure / V. A. Boluh, O. L. Rebenko // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2014. — Vol. 20. — № 2. — P. 186-192.
2. Ребенко О. Л. Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка / О. Л. Ребенко, В. А. Болух // Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 1. — 354 с. — С. 257-315.
3. Болух В. А. Розклад Бріджеса-Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією / В. А. Болух // Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 1. — 354 с. — С. 153-165.
4. Boluh V. A. Cell gas free energy as an approximation of the continuous model / V. A. Boluh, O. L. Rebenko // J. Modern Phys. — 2015. — Vol. 5. — P. 168-175.
5. Ребенко О. Л. Про нову форму запису розкладів Майєра / О. Л. Ребенко, В. А. Болух // Доповіді Національної академії наук України. — 2015. — № 11. — С. 18-22.
6. Болух В. А. Збіжність розкладу Майєра у формі Бріджеса-Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією / В. А. Болух // Розвиток сучасної освіти і науки: результати, проблеми, перспективи: тези III-ї Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених, 26-27 березня, 2015 р., Дрогобич: Просвіт. — 2015. — 360 с. — С. 296-297.
7. Болух В. А. Про представлення деяких інтегралів за мірою Лебега-Пуассона / В. А. Болух // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.:НТУУ "КПІ", 2015. — 216 с. — Укр., англ., рос. — С. 59-60.
8. Болух В. А. Апроксимація вільної енергії Гельмгольца в рамках моделі коміркового газу / В. А. Болух // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 року, Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2015. — 192 с. — С. 134.

АНОТАЦІЇ

Болух В. А. Поведінка кореляційних та термодинамічних функцій нескінченних статистичних систем. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.03 — математична фізика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню нескінченних систем класичної статистичної механіки методами нескінченновимірного пуассонівського аналізу. В рамках даного методу доведено теорему про експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега—Пуассона, на основі якої отримано представлення великої статистичної суми та тиску. Запропоновано нове виведення рівнянь Кірквуда—Зальцбурга та ланцюжка рівнянь ББҐКІ для кореляційних функцій. Побудовано розклад Майєра методом Бріджеса—Федербуша для неінтегровних потенціалів взаємодії та доведено збіжність даного розкладу. Отримано нову форму запису розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів нескінченних систем. В рамках моделі коміркового газу сформульовано та доведено теорему про існування термодинамічної границі для вільної енергії модельної системи, а також досліджено властивість вільної енергії як монотонної, неперервної, вгнутої функції від питомого об'єму v. Встановлено, що для довільних додатних значень оберненої температури β та питомого об'єму v апроксимована вільна енергія коміркового газу буде прямувати до вільної енергії нескінченної системи, якщо параметр апроксимації спрямувати до нуля.

Ключові слова: парний потенціал взаємодії, стійка взаємодія, надстійка взаємодія, посилено надстійка взаємодія, кореляційні функції, термодинамічні функції, розклад Майєра, квазінеперервна апроксимація, комірковий газ, міра Лебега—Пуассона, міра Гіббса.

Болух В. А. Поведение корреляционных и термодинамических функций бесконечных статистических систем. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию бесконечных систем классической статистической механики методами бесконечномерного пуассоновского анализа. Исходя из данного метода, доказана теорема об экспоненциальном представлении некоторых интегралов по мере Лебега—Пуассона, на основе которой получено представление большой статистической суммы и давления. Предложен новый вывод уравнений Кирквуда—Зальцбурга и цепочки уравнений ББГКИ для корреляционных функций. Построено разложение Майера методом Бриджеса—Федербуша для неинтегрируемых потенциалов взаимодействия и доказана сходимость данного разложения. Получена новая форма записи разложений Майера для термодинамических потенциалов бесконечных систем. Для модели ячеечного газа сформулирована и доказана теорема о существовании термодинамического предела для свободной энергии модельной системы, а также исследовано свойство свободной энергии как монотонной, непрерывной, вогнутой функции по переменной v. Установлено, что для произвольных положительных значений обратной температуры β и удельного объема v аппроксимированная свободная энергия ячеечного газа будет стремиться к свободной энергии бесконечной системы, если параметр аппроксимации стремиться к нулю.

Ключевые слова: парный потенциал взаимодействия, устойчивое взаимодействие, сверхустойчивое взаимодействие, усиленно сверхустойчивое взаимодействие, корреляционные функции, термодинамические функции, разложение Майера, квазинепрерывная апроксимация, ячеечный газ, мера Лебега—Пуассона, мера Гиббса.

Bolukh V.A. Behavior of correlational and thermodynamic functions of continuous statistical systems. — Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.03 — Mathematical Physics. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is dedicated to the investigation of infinite systems of the classical statistical mechanics in the framework of infinite dimensional Poisson analysis.

The thesis consists of the introduction, four chapters, conclusions and list of references.

The first chapter is dedicated to the review of the literature which concerns the topic of the investigation. The main definitions and notions of equilibrium statistical mechanics which would be necessary for the formulation of the results were introduced.

In the second chapter of the thesis some significant formulas and theorems of the statistical mechanics were proved in the framework of infinite

dimensional Poisson analysis. Using this method the theorem of exponential representation of some integrals with respect to the Lebesgue—Poisson measure has been proved. It gives the possibility to represent the large partition function in the exponential form and write down the pressure of the infinite system. The new approaches of derivation of Kirkwood—Salzburg equations and Boholyubov chain of equations for correlational functions have been suggested.

The third chapter of the thesis is dedicated to the construction and investigation of the new expansions for thermodynamic functions (the Mayer expansion). The Bridges—Federbush method of the Mayer expansion for nonintegrable potentials was constructed and the convergences of these expansions were proved. A new form of the Mayer expansion for thermodynamic potentials of infinite systems is presented.

In the fourth chapter in the framework of the cell gas model we have formulated and proved the theorem that free energy is an approximation of the correspondent value of continuous system; characteristics of the free energy have been investigated as the monotonous, infinite, convex function from the specific volume v. It is established that approximated free energy will converge to the free energy of the continuous system if the parameter of approximation $a \to 0$ for any values of an inverse temperature $\beta > 0$ and volume per particle $v > 0$.

This thesis is the further development of the theoretical investigation of infinite systems of the classical statistical mechanics in the framework of infinite dimensional Poisson analysis. The last chapter is the preparatory stage for the proof of the open problem of the existence of the phase transitions in the model infinite classical systems, which interact by means of two-body interaction potentials of the Lenard-Jones type.

Key words: two-body interaction potential, stable interaction, superstable interaction, strong superstable interaction, correlational functions, thermodynamic functions, Mayer expansion, Quasi-Lattice Approximation, Cell Gas, Lebesgue—Poisson measure, Gibbs measure.