Національна академія наук України
Інститут математики

Антонюк Олександра Вікторівна

УДК 517.958+517.955.4+519.217.4

Аналітичні методи в задачах статистичної механіки, нелінійної дифузії та теорії складності дискретних часових рядів

01.01.03 — математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України
Кочубей Анатолій Наумович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор
Білоколос Євген Дмитрович,
Інститут магнетизму НАН України,
завідувач відділу теоретичної фізики;

доктор фізико-математичних наук,
професор
Бондаренко Віктор Григорович,
Інститут прикладного системного аналізу
Національного технічного університету
України "КПІ", професор кафедри
математичних методів системного аналізу;

доктор фізико-математичних наук,
професор
Мішура Юлія Степанівна,
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, завідувач кафедри теорії
ймовірностей, математичної статистики та
актуарної математики.

Захист відбудеться «5» липня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «31» травня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При вивченні моделей, які виникають в задачах математичної фізики, важливим є питання строгого аналітичного опису таких моделей та розвитку аналітичних методів для їх дослідження.

Дисертаційна робота присвячена колу питань, пов'язаних з аналітичними властивостями еволюції системи нескінченної кількості частинок, що виникають у задачах статистичної механіки, асимптотичних розкладів в околі особливої точки на межі області та варіаційних методів для задач нелінійної дифузії, а також з аналізом такого показника складності дискретного сигналу, як ентропія.

Починаючи з робіт Максвела, Больцмана та Гіббса головним завданням класичної статистичної механіки було пояснення еволюції макроскопічних систем виходячи з їх мікроскопічних характеристик та ймовірнісних припущень. Виявляється, що на макроскопічному рівні колективна поведінка таких систем істотно відрізняється від індивідуальної поведінки її атомів. Більш того, макроскопічні явища набувають колективних властивостей, що відсутні або не спостерігаються при дослідженні поведінки окремих частинок. Математичний апарат, пристосований до строгого опису моделей як рівноважної, так і нерівноважної статистичної механіки розроблявся в роботах радянських, згодом – українських та російських авторів, таких як М. М. Боголюбова, Е. Д. Білоколоса, В. І. Герасименка, Р. Л. Добрушина, Ю. Г. Кондратьєва, В. А. Малишева, Р. А. Мінлоса, Л. А. Пастура, Д. Я. Петрини, С. Я. Пірогова, О. Л. Ребенка, Я. Г. Сіная, В. І. Скрипника та ін., а також зарубіжних – Х. О. Георгі, О. Ленфорда, Ж. Лебовіца, Е. Презутті, Д. Руеля, Т. Спенсера, Д. Струка, Ф. Шпітцера, Й. Фрьоліха, Т. Е. Харріса, Р. Холлі, Г. Шпона та ін.

При дослідженні багатьох фізичних моделей, зокрема, в статистичній механіці, виникають оператори нескінченної кількості змінних та пов'язані з ними дифузійні рівняння; вони становлять базу для розвитку відповідних математичних методів, що дозволяють описати еволюцію таких нескінченних систем.

Особливого значення у 20-тому столітті набув розвиток квантової теорії поля, що виявила необхідність узгодження класичних механічних уявлень про природу всесвіту з його дискретними квантовими характеристиками. У зв'язку з розвитком у 60-х роках 20-го століття математичних методів квантової теорії поля моделі статистичної механіки набувають значення також в якості наближень моделей теорії поля, на що неодноразово вказувалося в роботах Б. Саймона, Дж. Глімма, А. Джаффе та ін.

Починаючи з робіт Р. Холлі, Д. Струка, Ж.-Д. Дойшеля, Х. Досса, Г. Ройера, В. Фариса, Ж. Фрітца, Х. Фьолмера інтенсивного розвитку набуває дослідження так званої стохастичної моделі Ізінга та її більш загальних аналогів — глауберової або стохастичної динаміки, що вперше була запропонована Р. Глаубером у 1963 р. Подальше дослідження та розвиток моделі глауберової або стохастичної динаміки проводилося в роботах С. Альбеверіо, О. Ю. Далецького, М. Рьокнера, Ю. Г. Кондратьева, Д. Струка, Б. Зегарлінського та ін.

У цих роботах досліджувалось досить широке коло питань, від проблеми існування, єдиності та марковських властивостей відповідних стохастичних процесів до питань гладкості перехідних ймовірностей, самоспряженості генератора та збереження і підвищення сумовності в шкалі L_p-просторів функцій зліченної кількості змінних під дією асоційованої півгрупи (так звані гіперстискаюча та ультрастискаюча властивості), а також зв'язок цих властивостей з логарифмічними нерівностями типу Соболєва.

У той же час властивостям еволюції таких систем у шкалах просторів диференційовних функцій інтегровних за певною мірою чи у просторах з топологією супремуму, не було приділено достатньої уваги. З аналітичної точки зору еволюція таких систем задається півгрупою деякого необмеженого оператора зліченної кількості змінних. Складності, що виникають при дослідженні цієї задачі, пов'язані перш за все з нескінченною кількістю змінних та принциповою відсутністю теорем про вкладення типу Соболєва, що не дає можливості отримати гладкі властивості відповідних півгруп, використовуючи їх L_p-гладкість. З іншого боку нерефлексивність просторів з нормою супремуму приводить до необмеженості оператора відповідної півгрупи, що позбавляє можливості застосування відомих операторних методів для її дослідження. Таким чином задача про гладкі властивості півгрупи оператора, асоційованого з певною моделлю статистичної механіки, вимагає розробки принципово нових методів, що не залежали б від розмірності простору та враховували особливості задачі, які випливають з фізичних міркувань, зокрема нелінійність та необмеженість коефіцієнтів відповідних дифузійних рівнянь.

Перші шість розділів дисертації присвячені саме цьому колу питань. Зокрема, в Розділах 2 – 4 розглядається півгрупа оператора в частинних похідних другого порядку зліченної кількості змінних, що пов'язаний з енергетичною формою, генерованою мірою Гіббса. В цих розділах, фактично, розв'язується питання про збереження просторів L_2-диференційовних функцій (що є нескінченновимірними аналогами просторів Соболєва) та просторів диференційовних функцій нескінченної кількості змінних з рівномірною топологією. Оскільки, як зазначалося раніше, в таких просторах стандартні операторні підходи не можуть бути застосовані, був розроблений альтернативний метод дослідження гладких властивостей, що ґрунтується на нелінійних квазістискаючих оцінках. Цей метод дозволив не тільки побудувати простори диференційовних функцій нескінченної кількості змінних, які зберігаються під дією еволюції системи, але і довести підвищення гладкості в шкалі таких просторів під дією еволюції.

У Розділах 5 – 6 дисертації метод нелінійних оцінок поширюється на моделі нелінійної дифузії на некомпактному рімановому многовиді і отримано результати про збереження просторів гладких функцій та підвищення гладкості під дією відповідної півгрупи. При цьому було вирішено ряд принципових складностей, пов'язаних додатково з нелінійністю самого простору, над яким будується нелінійна дифузія.

У Розділі 7 дисертації виводиться принцип найменшої дії для нелінійної дифузії в пористому середовищі.

Починаючи з часів Лейбніца, Мопертюї та Ейлера сформувалося розуміння того, що всі фізичні явища мають описуватися виходячи з принципу найменшої дії для деякого функціонала енергії. В роботах Лагранжа та Гамільтона такий підхід був реалізований для задач класичної механіки. Проте тільки в 1966 В. І. Арнольд вперше сформулював та довів принцип найменшої дії для ідеальної рідини, що описується рівнянням Ейлера. Щоб це зробити В. І. Арнольд розширив простір, над яким задається функціонал енергії, до нескінченновимірного простору – групи дифеоморфізмів, що зберігають об' єм многовиду. Виявилося, що саме такий простір дифеоморфізмів є прийнятним конфігураційним простором для задач гідродинаміки нестисненної рідини. В такому підході розв'язки рівняння Ейлера є геодезичними кривими по відношенню до деякої правоінваріантної метрики на просторі дифеоморфізмів.

Розвиваючи цю ідею, Д. Ебін та Ж. Марсден показали зв'язок між простором дифеоморфізмів, що зберігають об'єм, та класичними розв'язками рівняння Нав'є-Стокса. Вони зокрема довели, що для рівняння Нав'є-Стокса при заданій кінцевій конфігурації з деякими додатковими умовами гладкості в шкалі типу Соболєва існує єдина геодезична, яка є розв'язком задачі мінімізації відповідного функціонала енергії. Головна складність полягає в тому, що топологія, індукована функціоналом енергії, є занадто сильною для того, щоб отримати регулярність відповідних відображень. З метою уникнути цієї складності Я. Бреньє у 1989 р. ввів поняття узагальненого розв'язку для принципу найменшої. Такі розв'язки є ймовірнісними мірами, визначеними на множині лагранжевих траєкторій, при цьому також включають класичні розв'язки. В подальшому цей підхід розвивався в роботах М. Арнадона, А. Б. Крузейро, Т. Накагомі, Ф. Ціпріано, К. Ясуе та ін. Також необхідно згадати роботи П. Констатіна, Г. Йєра та Дж. Ейінка, а також книгу Ю. Є. Гліклiха, в яких розвивались інші стохастичні підходи до питання характеризації розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса.

Розвиваючи ці ідеї, в Розділі 7 дисертації доводиться існування узагальнених потоків, що реалізують мінімум функціонала енергії для узагальненого рівняння пористого середовища. Це рівняння вперше виникло при дослідженні газових потоків, що проходять через пористі породи, проте також описує інші процеси, що виникають у застосуваннях, зокрема, при моделюванні дифузії електронно-іонної плазми, а також для опису динаміки біологічної популяції, чия мобільність залежить від щільності. Зауважимо, що у частинному випадку, коли $q = 2$, узагальнене рівняння пористого середовища співпадає з рівнянням Нав'є-Стокса.

В останні роки у зв'язку із задачами, що виникають в фізиці, хімії та біології, пожвавився інтерес до параболічних задач з сингулярною межею, що відповідають рівнянню дифузії з точковим джерелом, розташованим на межі області. Такі задачі приводять до рівняння типу теплопровідності в нециліндричній, змінній за часом, області, на межі якої розташована особлива точка типу каспа. Вперше існування класичного розв'язку для рівняння теплопровідності в нециліндричній області було досліджено М. Жевре в 1913 р., який розглядав області спеціального вигляду зі спеціальними умовами гладкості межі області. Пізніше було з'ясовано, що навіть за умов достатньої гладкості коефіцієнтів рівняння для параболічної крайової задачі в гладкій області точка межі може не бути регулярною, якщо ця точка є характеристичною точкою задачі, тобто дотична до межі в даній точці є ортогональною до вісі t. Петровський І. Г. у своїй роботі 1934 р. знайшов необхідні і достатні умови на поведінку межі області в околі характеристичної точки, щоб задача в околі цієї точки була коректно поставленою. Ці умови характеризуються порядком дотику в цій точці характеристики рівняння до межі області. При цьому критичний порядок дотику залежить від порядку головної частини параболічного рівняння. Такі задачі досить ретельно були досліджені в 60-ті роки 20 століття в роботах В. П. Михайлова, В. О. Солоннікова, В. О. Кондратьєва, О. А. Олейнік, Дж. Кона та Л. Ніренберга та ін.

Останнім часом у роботах В. Н. Арефьєва, Л. А. Багірова, В. О. Галактіонова, В. Г. Мазьї та ін. спостерігається нова хвиля інтересу до задач з особливостями типу каспа у зв'язку з розвитком аналізу псевдодиференціальних операторів з повільно змінним символом, а також застосуваннями нелінійного аналізу до задач, що виникають в математичній фізиці при дослідженні дифузії з джерелом на межі області. Зокрема в роботах В. Н. Арефьєва та Л. А. Багірова розглядється задача теплопровідності в областях, явно заданих за допомогою квадратичної функції. При цьому методи, що покладені в основу отримання асимптотичних розкладів, істотним чином спираються на явний спосіб задання області. Проте в загальній постановці задачу побудови асимптотичних розкладів для параболічних рівнянь в околі каспідальної точки ще не вирішено.

У Розділі 8 досліджується питання щодо побудови асимптотичних розкладів для розв'язків рівняння теплопровідності в нециліндричній області, заданій степеневою функцією з довільним показником. При цьому основним питанням є обґрунтування асимптотичності такого розкладу, що вимагає адекватного підбору відповідних просторів. Виявляється, що природнім для такої задачі є простори типу Слободецького, параметри в яких залежать не тільки від порядку рівняння, але і від порядку дотику характеристики до межі області, що виявляє внутрішній зв'язок між аналітичними та геометричними властивостями задачі.

Ще одним класом досліджуваних у дисертації моделей, є моделі, пов'язані з розвитком математичних методів аналізу даних, що виникають в медицині та інших областях знань. Так з точки зору аналізу енцефалограм та кардіограм особливого значення набуває дослідження дискретних часових рядів, що інтерпретуються як наближений опис таких сигналів. При цьому діагностичного значення набувають складність, варіативність, нерегулярність та інші характеристики таких процесів. Одним з таких діагностичних показників складності сигналу, отриманого за допомогою енцефалографа або кардіографа, вважається ентропія, зокрема ентропія Колмогорова-Сіная.

У 2002 для сигналів, що мають форму нерегулярних гострих зубців різної амплітуди та частоти, К. Брандт і Б. Помпе запропонували означення так званої *ентропії перестановок*, обчислення якої є пристосованим до такого типу об'єктів і вимагає перебору значно меншої кількості множин, ніж класичне означення, що з точки зору застосування комп'ютерних діагностичних методів є дуже важливим. У зв'язку з цим останнім часом зростає інтерес до питання про зв'язок між цими двома означеннями ентропії та умов, за яких вони співпадають. На сьогодні відомо, що ентропія перестановок та ентропія Колмогорова-Сіная співпадають для одновимірних динамічних систем, що задаються кусково-монотонним відображенням, проте у більш загальному випадку це питання залишається відкритим.

У роботах К. Келлера та його учнів в останні роки розвивається підхід до характеризації ентропії Колмогорова-Сіная для дискретних часових рядів на основі так званих впорядкованих розбиттів простору станів динамічних систем, що будуються над простором випадкових процесів. Такі розбиття будуються на основі деякого відношення порядку, яке вводиться у просторі значень випадкової величини та її образів під дією відображення, що задає динамічну систему. В такому підході випадкова величина та її образи інтерпретуються як вимірювання спостережуваних величин. При цьому однією з головних умов є принцип розділення точок простору станів під дією відображення динамічної системи. В Розділі 9 ця умова розділення точок послаблюється і надається характеризація ентропії Колмогорова-Сіная шляхом звуження σ-алгебри множин, в сенсі якої задається розбиття простору станів відповідної динамічної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідних тем: "Функціональні і асимптотичні методи дослідження нелінійних диференціальних рівнянь", 1996—2000 р., номер державної реєстрації 0198U003052; "Розробка методів нелінійного функціонального аналізу та їх застосувань до нелінійних проблем математичної фізики" 2001—2005 р., номер державної реєстрації 0101U000623; "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики", 2006—2010 р., номер державної реєстрації 0106U000513; "Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики", 2011—2015 р., номер державної реєстрації 0111U001011.

Частина досліджень проводилася в рамках міжнародного проекту за 7-ою Рамковою програмою Європейського Союзу "Marie Curie Actions - International Research Staff Exchange Scheme (IRSES) FP7-People-2011-IRSES", № 295164, 2012—2016 р., проекту Німецького дослідницького товариства (DFG) "Nichtlineare Differentialgleichungen mit kleinem Parameter" 2010 р., проекту "Asymptotic Properties of Solutions to Parabolic Equations in a Bounded Domain" у рамках стипендії Фонду ім. Александра фон Гумбольдта, 2012 р.

Мета і завдання дослідження. Отримати достатні умови регулярності (гладкості) в сенсі інтегровної по мірі та рівномірної топологій, заданих на просторах нескінченної кількості змінних, для еволюції системи зліченної кількості частинок. Отримати умови регулярності нелінійного потоку на некомпактному рімановому многовиді. Довести принцип максимуму для рівняння пористого середовища та отримати асимптотичні розклади розв'язків рівняння теплопровідності в околі особливої точки типу каспа на межі області.

Отримати характеризацію показника складності дискретного часового рядку – ентропії Колмогорова-Сіная.

Об'єкт дослідження. Математичні моделі та поняття, що виникають у статистичній механіці, нелінійній дифузії та теорії складності дискретних часових рядів.

Предмет дослідження. Півгрупи операторів та асоційовані з ними нелінійній потоки в нескінченно-вимірних просторах та на некомпактних рімановых многовидах. Лінійні та нелінійні параболічні рівняння та пов'язані з ними функціонали енергії та асимптотичні розклади. Ентропія Колмогорова-Сіная.

Методи дослідження. Теорія півгруп та необмежених операторів в нескінченновимірних банахових просторах, методи нелінійного аналізу, зокрема, властивості монотонних відображень, методи асимптотичного та варіаційного аналізу, диференціальної геометрії, теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертаційного дослідження і виносяться на захисти, є такими:
– доведено теореми про регулярність еволюції системи нескінченної кількості частинок у шкалах просторів диференційованих у середньо квадратичному функцій нескінченної кількості змінних;
– розроблено схему дослідження регулярності будь-якого порядку для нелінійних рівнянь нескінченної кількості змінних з неліпшицевими коефіцієнтами, що спирається на нові класи нелінійних оцінок на варіації;
– на основі цього доведено збереження просторів гладких функцій під дією еволюції системи нескінченної кількості частинок та досліджено вплив характеру нелінійності взаємодії між частинками на структуру топологій в цих просторах;
– розроблено геометрично-інваріантний підхід до задачі регулярності за початковою умовою розв'язків рівнянь дифузії на рімановых многовидах, побудовано відповідний апарат тензорного числення;
– для випадку некомпактного ріманового многовиду знайдено аналог умови монотонності коефіцієнтів рівняння та виділено вплив тензору кривини на регулярність високого порядку за початковою умовою для нелінійного потоку на многовиді;

– отримано достатні умови відсутності вибуху для розв'язків нелінійних рівнянь дифузії на некомпактному рімановому многовиді;
– виявлено ефект наявності щілини між топологіями обмеженості і неперервності в задачах регулярності високого порядку над нескінченновимірним простором;
– доведено несингулярне інтегрування частинами для не глобально ліпшицевої дифузії, на основі якого та методу нелінійних оцінок отримано теореми про підвищення гладкості під дією еволюції нескінченної системи взаємодіючих частинок;
– отримано умови підвищення гладкості під дією півгрупи, асоційованої з нелінійною дифузією на некомпактному рімановому многовиді;
– доведено принцип найменшої дії для нелінійного рівняння, що описує дифузію у пористому середовищі, та отримано достатні умови існування узагальнених розв'язків відповідної варіаційної задачі;
– отримано формальні асимптотичні розклади для рівняння теплопровідності в нециліндричній області з особливістю типу каспа на межі області та доведено асимптотичний характер таких розкладів у спеціальних просторах, що залежать від характеру дотику межі області в околі особливої точки;

– доведено характеризацію ентропії Колмогорова-Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані для подальшої розробки якісно нових методів дослідження нелінійних рівнянь в нескінченновимірних банахових просторах та нескінченновимірних многовидах. Результати Розділу 7 розширюють спосіб визначення розв'язку рівняння, що описує дифузію в пористому середовищі. Це дає можливість розвинути альтернативні методи пошуку розв'язків таких рівнянь (у тому числі не класичних). Результати Розділу 8 дають новий підхід до побудови асимптотичних розкладів для рівнянь дифузії, які описують процеси з точковим джерелом на межі області, що дає можливість отримати якісні та кількісні характеристики наближень таких розв'язків. Результати останнього розділу можуть бути корисними з точки зору розвитку комп'ютерних діагностичних методів на основі аналізу складності сигналів, що задаються дискретними часовими рядами з додатковими характеристиками, характерними для енцефалограм та кардіограм.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження та постановка задачі в Розділах 2–4 проводилось дисертантом спільно з О.Вал. Антонюком. Постановка задач щодо інших розділів дисертації проводилась спільно з М. Арнадоном, К. Келлером, С.І. Максименко та М.М. Тархановим. Результати, викладені в дисертації спираються на монографію [34] та 23 статті [2-24]. Усі наведені у дисертації результати отримано автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на:

- засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 03 березня 2014 р.;

- Київському міському семінарі з нелінійного аналізу при Інституті математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України І. В. Скрипник);

- Київському семінарі з функціонального аналізу при Інституті математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук);

- Семінарі Математичного відділення ФТІНТ ім. Б .І. Веркіна НАН Украіни (м. Харків, керівник семінару — академік НАН України Є. Я. Хруслов);

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники семінару — проф. М. І. Іванчов, проф. П. І. Каленюк, член-кореспондент НАН України Б. Й. Пташник)

- Міжнародній конференції "Münchener Stochastic Tage", Німеччина, 24 – 27 березня, 1998;

- International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations", dedicated to J.P.Schauder, Ukraine, Lviv, August 23 – 29, 1999;

- Міжнародній конференції "Nonlinear Partial differential equations", Україна, Київ, 22 – 28 серпня, 2001;

- "Mini-Workshop on Stochastic Analysis", Friedrich Schilller University of Jena, Faculty of Mathematics and Informatics, Institute of Stochastics, January 18-19, 2002;

- Міжнародній конференції "Nonlinear Partial differential equations", Україна, Алушта, 15 – 21 вересня, 2003;

- Міжнародній конференції "Recent Trends in Kinetic Theory and its Applications", Україна, Київ, 11 – 15 травня, 2004;

- Міжнародній конференції "Nonlinear Partial Differential Equations", Україна, Алушта, 17-23 вересня, 2005 р.;

- Міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька, Україна, Дрогобич, 24-28 вересня 2007 р.;

- Міжнародній конференції "Nonlinear Partial Differential Equations", пам'яті І.В. Скрипника, Ялта, 10-15 вересня 2007 р.;

- "33-rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications", Berlin, 27-31 July, 2009;

- Conference "ProbaGeo", France, Futuroscope, 11-13 June, 2012;

- Міжнародній конференції "Third Conference Mathematics for Life Sciences", Рівне, 15-19 вересня, 2015 р.

Публікації. Основні результати дисертації оприлюднені в монографії [34] та 23-х статтях [2 – 24], три з яких опубліковані без співавторів. Тези доповідей на міжнародних конференціях надруковані в [24 – 33]

Структура дисертації. Дисертація складається з вступу, дев'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та семи додатків. Перелік використаних джерел налічує 203 посилання. Загальний обсяг дисертації разом з додатками складає **413** стор. з них 318 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** надано огляд робіт та підходів, пов'язаних з темою дисертації, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано основну мету досліджень та подано стислу анотацію результатів.

У **першому розділі** подається огляд літератури за темою дисертації та наводяться базові поняття та теореми, що використовуються в наступних розділах. Тут, зокрема, вводиться поняття гіббсової міри, що описує модель нескінченної кількості взаємодіючих частинок, та вводиться поняття оператора енергії та еволюції такої системи.

Нехай $\mathbb{Z}^d$ позначає d-мірну ґратку, вузли якої задаються цілочисловим векторами $k = (k_1, ..., k_d)$, $k_i \in \mathbb{Z}$. З кожним таким вузлом пов'язується відповідний одновимірний простір $\mathbb{R}^1$, який інтерпретується як спіновий простір k-ої частинки. *Гіббсівською мірою з локальними розподілами* $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$ називають міру μ на тихонівській σ-алгебрі $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d}$, якщо $\forall\, f \in C_{0,cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \forall\,\Lambda\subset\mathbb{Z}^d:\quad \mu(\dot{\mu_\Lambda}(f)) = \mu(f)$, де використано позначення $\mu(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} f\, d\mu$. Під тихонівською σ-алгеброю розуміється мінімальна σ-алгебра, генерована σ-алгеброю циліндричних множин $\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)$ – борелева σ-алгебра на $\mathbb{R}^\Lambda = \underset{k\in\Lambda}{\times}\,\mathbb{R}^1$. При цьому під *гіббсовим розподілом в скінченному об'ємі* $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ *з фіксованими граничними умовами* $x_{\Lambda^c} = \{x_k\}_{k\in\Lambda^c}$, $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d\setminus\Lambda$ розуміється міра μ_Λ, яка задається співвідношенням $\mu_\Lambda(dx_\Lambda|x_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(x_{\Lambda^c})}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod\limits_{k\in\Lambda} dx_k$ з нормуючим множником $Z_\Lambda(x_{\Lambda^c}) = \int\limits_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod\limits_{k\in\Lambda} dx_k$, де dx_k — міра Лебега на просторі $\mathbb{R}^1$, асоційованому з вузлом $k\in\mathbb{Z}^d$. В роботі розглядаються так звані *помірні* гіббсові міри, тобто для яких $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} x_k^{2n} d\mu(x)$ є скінченною величиною для будь-якого $n\in\mathbb{N}$. *Потенціалом,* гіббсової системи називають функцію $U_\Lambda = \sum\limits_{k\in\Lambda}\Phi(x_k) + \sum\limits_{k\in\Lambda}(Bx)_k x_k$, де $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, які зростають на нескінченності разом з своїми похідними не швидше полінома, B – скінченно-діагональна матриця. Такі потенціали називають *потенціалами скінченного радіусу взаємодії.*

Основним об'єктом дослідження є півгрупа *оператора енергії гіббсової системи* H_μ, який будується як замикання диференціального виразу

$$H_\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\{-\Delta_k + [F(x_k) + \sum_{j:\ |j-k|\leqslant r_0} b(j-k)x_j]\frac{\partial}{\partial x^k}\},$$

визначеного на просторі $C^n_{0,cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ циліндричних n-раз диференційованих функцій з компактним носієм в сенсі теорії форм Діріхле, що були введені в роботах А. Бьорлінга та Ж. Дені та розвинені С. Альбеверіо, Ю. Г. Контратьєвим, Ш. Кусуокою, Ш. Ма, М. Рьокнером, М. Фукушимою, Р. Хоег-Кроном, Л. Штрайтом та ін. Така півгрупа інтерпретується як *оператор еволюції* нескінченної системи взаємодіючих частинок. Вище $F(x_k) = \partial_k\Phi(x_k)$.

У дисертації припускається, що функція $F(x)$ є гладкою симетричною монотонно зростаючою функцією з умовою $F(0)=0$, яка зростає на нескінченності не швидше полінома разом з усіма своїми похідними

$$\exists\ \varkappa>0:\ \forall\, j\geqslant 0\ \ \exists\, C_j:\ |F^{(j)}(x)-F^{(j)}(z)|\leqslant K_j|x-z|(1+|x|+|z|)^{\varkappa}. \tag{1}$$

Стала $\varkappa>1$ називається *параметром нелінійності* системи і грає ключову роль у формулюванні основних теорем.

Другий розділ дисертації присвячено гладким властивостям еволюції гіббсової системи у нескінченновимірних аналогах просторів Соболєва $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu)$-диференційовних функцій. Основний результат цього розділу полягає у побудові таких просторів $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, які зберігаються під дією півгрупи, генерованої оператором енергії H_μ.

Простори $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ будуються як замикання множини $\mathcal{P}^{\infty}_{cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ (нескінченно диференційовних циліндричних функцій не більш ніж поліноміального росту з усіма своїми похідними) у нормі

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}=\sum_{(p,\mathbf{C}\,)\in\Theta}\ \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)\,\langle\mathbf{C}\,\partial^m f,\partial^m f\rangle\, d\mu(x),$$

де $z=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}a_k(1+x_k^2)$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}a_k=1$, $\{a_k\}\in\mathbb{P}$. Скінченний набір ваг $\Theta=\{(p,\mathbf{C}\,)\}$ складається з монотонно зростаючої функції $p(z)$ не більш ніж поліноміального росту разом з другою похідною та матричної мульти-ваги $\mathbf{C}\,=C^1\otimes\ldots\otimes C^m$, $C^j\in\mathbb{P}$, що задає скалярний добуток $\langle\,\mathbf{C}\,\partial^m f,\partial^m f\rangle=\sum\limits_{k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}^d}C^1_{k_1}\ldots C^m_{k_m}|\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_m}f|^2$, $\mathbb{P}$ позначає множину послідовностей $c=\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, таких, що $c_k>0$ і $\delta_c=\sup\limits_{|k-j|=1}|c_k/c_j|<\infty$. До набору Θ також входить вага $(p_0,\varnothing)$, яка відповідає члену $\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}p_0(z)|f(x)|^2\,d\mu(x)$. (Означення 2.2.)

Основний результат Розділу 2 полягає в наступній теоремі.

Теорема 1 (Теорема 2.10) Нехай μ – гіббсова міра помірного росту з скінченним радіусом взаємодії, і виконана умова (1). Нехай, крім того, набір ваг Θ задовольняє наступну умову ієрархії: для будь-яких $(p,\mathbf{C}\,)\in\Theta$ та пари $i,j\in\{1,\ldots,m\}$, $i<j$ існує вага $(\widetilde{p},\widetilde{\mathbf{C}}\,)\in\Theta$,

яка оцінює зверху вагу $(z^{\varkappa+1}p(z), \widehat{\mathbf{C}}^{ij})$, тобто існує така стала K, що

$$
\begin{aligned}
&z^{\varkappa+1}p(z) \leqslant K\cdot\widetilde{p}(z),\ \ z\geqslant 1,\\
&\{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\}^{\ell} \leqslant K\,\widetilde{\mathbf{C}}^{\ell},\ \ \ell = 1, ..., m-1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де нерівність (2) розуміється як покоординатна нерівність між векторами з $\mathbb{P}$. Матриця $\{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\}_{i<j\in\{1,\ldots,m\}}$ будується по матриці $\mathbf{C}$ за правилом $\{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\} = C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes \underset{\uparrow j}{(A)^{-(\varkappa+1)}C^i C^j} \otimes \ldots \otimes C^m$. Скорочення $C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes C^s$ означає, що у тензорному добутку i-тий множник опущений, а $C^1\otimes\ldots\otimes \underset{\uparrow j}{B} \otimes\ldots\otimes C^s$ означає, що на j-ому місці у тензорному добутку стоїть матриця B. Матриця A є діагональною з елементами $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$.

Тоді замикання оператора $\widetilde{H_\mu}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ генерує сильно неперервну квазістискаючу півгрупу у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, тобто виконана оцінка:

$$\exists\ M_\Theta:\ \ \forall\, Q\subseteq\mathbb{Z}^d:\qquad \|\exp(-t\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \leqslant e^{M_\Theta t}.$$

Принципова складність, що може виникати у випадку істотно нелінійних зростаючих коефіцієнтів оператора енергії (що є природним з точки зору фізичних застосувань), полягає в тому, що відповідна півгрупа у просторі з рівномірною топологією, може не бути сильно неперервною. У такій ситуації застосування стандартної теорії операторів та теорії сильно неперервних півгруп стає неможливим.

У **Розділі 3** дисертації розробляється підхід, який дає можливість дослідити гладкі властивості відповідної півгрупи, генерованої оператором H_μ, в просторах функцій нескінченної кількості змінних з рівномірною топологією на похідні будь-якого порядку. Це стає можливим в першу чергу завдяки можливості пов'язати півгрупу, генеровану оператором H_μ, з півгрупою, асоційованою з стохастичним диференціальним рівнянням в нескінченно-вимірному просторі за формулою:

$$(e^{-tH_\mu}f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_t^x), \tag{3}$$

де $\xi_t^x = \{\xi_{k,t}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ є розв'язком нелінійного стохастичного диференціального рівняння

$$\xi_{k,t} = x_k + W_{k,t} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \{F(\xi_{k,s}) + \sum_{j:\ |j-k|\leqslant r_0} b(j-k)\xi_{j,s}\}ds. \qquad (4)$$

Тут $W_{k,t}$ позначають копії незалежних одновимірних вінерівських процесів, $\mathbf{E}$ – середнє по циліндричній мірі Вінера $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$, заданій на циліндричному просторі $\Omega_{\mathbb{Z}^d} = \underset{k\in\mathbb{Z}^d}{\times} \Omega_k$, $\Omega_k = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Такого роду рівняння вивчалися в роботах Ю. Л. Далецького, Дж. Да Прато, Ж.-Д. Дойчеля, К. Елворсі, Я. Зябчика, Н. В. Крилова, Е. Парду, Б. Л. Розовського, Д. Струка та ін. на предмет існування та єдиності відповідного розв'язку. Проте слід зазначити, що питання про збереження просторів диференційовних функцій під дією півгрупи, заданої за допомогою рівності (3), з врахуванням представлення

$$\partial^{(m)} P_t f(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1\cup\ldots\cup\beta_\ell=\{1,\ldots,m\}} \mathbf{E}\,\langle\, \partial^{(\ell)} f(\xi_t^x), \xi_{\beta_1}\ldots\xi_{\beta_\ell}\,\rangle, \qquad (5)$$

для похідних півгрупи $P_t f = e^{-tH_\mu} f$, вимагає дослідження властивостей варіацій ξ_β процесу ξ_t^x за початковим даним x з метою отримати кількісні оцінки на їх поведінку в певних глобальних нормах.

Для вирішення цього кола питань в Розділі 3 дисертації запропоновано підхід нелінійних оцінок на варіації ξ_τ, $\tau = j_1, \ldots, j_n$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$ який дозволяє не тільки отримати кількісні оцінки на поведінку розв'язків варіаційних рівнянь, але і підказати спосіб підбору топологій в глобальних просторах диференційовних функцій, які зберігаються під дією півгрупи (3). При цьому варіація $\xi_\tau = \{\xi_{k,\tau}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ інтерпретується як похідна порядку $|\tau|$ процесу $\xi_t^{x^0} =: \xi^0$ за початковою умовою $x^0 = \{x_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, тобто координати процесу ξ_τ задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_{k,\tau}}{dt} = -F'(\xi_k^0)\xi_{k,\tau} - \sum\limits_{j:\,|j-k|\leqslant r_0} b(k-j)\xi_{j,\tau} - \varphi_{k,\tau}; \\ \xi_{k,\tau}(0) = x_{k,\tau}. \end{cases} \qquad (6)$$

Головна частина рівняння (6) нелінійним чином залежить від розв'язку вихідного рівняння ξ^0, а неоднорідна частина $\varphi_{k,\tau}$ задається формулою:

$$\varphi_{k,\tau}(\xi^0, \xi_\gamma, \gamma \subset \tau, \gamma \neq \tau) = \sum_{\gamma_1 \cup ... \cup \gamma_\ell = \tau,\ \ell \geqslant 2} F^{(\ell)}(\xi^0)\xi_{k,\gamma_1}...\xi_{k,\gamma_\ell}. \qquad (7)$$

Підсумовування в (7) ведеться по всім можливим підрозбиттям множини $\tau = \{j_1, ..., j_n\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$ на підмножини, що не перетинаються $\gamma_1, ..., \gamma_\ell \subset \tau$, $|\gamma_1| + ... + |\gamma_\ell| = |\tau|$, $\ell \geqslant 2$, $|\gamma_i| \geqslant 1$.

Система (6) є неавтономною системою диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, які нелінійним чином залежать від розв'язку ξ^0 вихідного рівняння (4). Крім того, неавтономна частина системи рівнянь (6) нелінійним та мультиплікативним чином залежить від варіацій менших порядків і наявна певна "пропорційність" між її лівою та правою частинами, яку неформально можна виразити наступним чином: $\|\xi_t^{(1)}\| \sim \sqrt[n]{\|\xi_t^{(n)}\|}$. Таке спостереження мотивує ввести нелінійний вираз, що відображає цю симетрію:

$$\rho_\tau(\xi; t) = \mathbf{E}\sum_{\ell=1}^{n} \Big\{p_\ell(z_t) \sum_{\gamma \subseteq \tau,\ |\gamma| = \ell} \|\xi_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\Big\}, \qquad (8)$$

де $\tau = \{j_1, ..., j_n\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$, p_ℓ є поліноміальними функціями, що залежать від $z_t = \|\xi^0(t, x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$ та $m_\gamma = m_1/|\gamma|$, де $|\gamma|$ позначає число точок множини $\gamma \subset \mathbb{Z}^d$.

Теорема 2 (Теорема 3.7) Нехай F задовольняє умову (1) і процеси ξ^0, ξ_τ є сильними розв'язками рівнянь (4), (6) з початковими умовами $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ та $x_\gamma \in \ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)$, $\gamma \subseteq \tau$ для $d_k \geqslant a_k^{-\frac{\varkappa}{2}m_1}$, $a, d \in \mathbb{P}$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k = 1$. Нехай $m_1 \geqslant |\tau|$ та $\forall\, \gamma \subseteq \tau$, $m_\gamma = m_1/|\gamma|$. Припустимо, що

1) для векторів $\{c_\gamma\}_{\gamma \subseteq \tau}$ виконана наступна умова: $\forall\, \tau = \{j_1, ..., j_n\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$ та для довільного розбиття множини τ на непорожні підмножини $\gamma_1, ..., \gamma_\ell$, $\ell \geqslant 2$, що не перетинаються, існує така стала $R_{\tau, \gamma_1, ..., \gamma_\ell}$, що

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d: \quad [c_{k,\tau}]^{|\tau|} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leqslant R_{\tau,\gamma_1,...,\gamma_\ell}[c_{k,\gamma_1}]^{|\gamma_1|}...[c_{k,\gamma_\ell}]^{|\gamma_\ell|}. \qquad (9)$$

2) монотонно зростаючі функцій не більше ніж поліноміального росту $p_i(z)$, $i = 1, ..., n$ задовольняють ієрархію: $\exists\ K_p \quad \forall\, j =$

$2, ..., n, \ \forall\, i_1, ..., i_\ell : \ i_1 + ... + i_\ell = j, \ell \geqslant 2$

$$[p_j(z)]^j (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1} \leqslant K_p [p_{i_1}(z)]^{i_1} ... [p_{i_\ell}(z)]^{i_\ell}. \qquad (10)$$

Тоді існує така стала $M \in \mathbb{R}^1$, що

$$\rho_\tau(\xi; t) \leqslant e^{Mt} \rho_\tau(\xi; 0). \qquad (11)$$

Сильний розв'язок рівняння (6) (Означення 3.6) розуміється в стандартному сенсі теорії Като-Кьомури.

Основним результатом Розділу 3 є Теорема 3.19 про збереження просторів диференційовних функцій $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$, який визначається наступним чином.

Означення 1. (Означення 3.17) Нехай $r \geqslant 0, \ n \geqslant 1$ і $\Theta = \Theta^1 \cup ... \cup \Theta^n$ – деякий набір ваг. Функція f належить простору неперервно диференційовних функцій $C_{\Theta,r}$, якщо $f \in Lip_r$ і виконані наступні припущення:
1. Функція f має частинні похідні $\{\partial^{(1)} f, ..., \partial^{(n)} f\}$ до порядку n $\partial_\tau f(x) = \{\partial^{(m)} f(x)\}_{j_1 \dots j_m}$ $\tau = \{j_1, ..., j_m\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$, $m = 1, ..., n$, які є неперервними, і для довільної $h \in \mathbf{X}_\infty([a, b])$ мають місце інтегральні співвідношення:

$$f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_k f(x^0 + h(s)) h_k'(s)\, ds,$$

$$\partial_\tau f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\tau \cup \{k\}} f(x^0 + h(s)) h_k'(s)\, ds, \ |\tau| \leqslant n - 1.$$

2. Норма $\| f \|_{C_{\Theta,r}} = \| f \|_{Lip_r} + \max\limits_{m=1,n} \| \partial^{(m)} f \|_{\Theta^m}$ є скінченною, де

$$\| u^{(m)} \|_{\Theta^m} = \sup_{x \in \ell_2(a)} \max_{(p_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta^m} \frac{|u^{(m)}(x)|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(\, \|x\|^2_{\ell_2(a)})},$$

$$|u^{(m)}(x)|^2_{\mathcal{G}^m} = \sum_{\tau = \{j_1 \dots j_m\} \subset \mathbb{Z}^d} G^1_{j_1} ... G^m_{j_m} |u_\tau(x)|^2$$

для $\mathcal{G}^m = G^1 \otimes ... \otimes G^m$. Тут $\mathbf{X}_\infty([a, b]) = \bigcap\limits_{p \geqslant 1, c \in \mathbb{P}} AC_\infty([a, b], \ell_p(c))$, $AC_\infty([a, b], X) = \{h \in C([a, b], X) : \ \exists\ h' \in L_\infty([a, b], X)\}$ – простір абсолютно неперервних функцій зі значеннями в деякому банаховому просторі X. Через $Lip_r = Lip_r(\ell_m(a))$, $m \geqslant 2$, $r \geqslant 0$ позначається простір неперервних функцій над $\ell_m(a)$, оснащений нормою

$$\begin{aligned} \|f\|_{Lip_r} &= \sup_{x\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|_{\ell_m(a)})^{r+1}} + \\ &+ \sup_{x,y\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_{\ell_m(a)}(1+\|x\|_{\ell_m(a)}+\|y\|_{\ell_m(a)})^r}. \end{aligned}$$

Теорема 3. (Теорема 3.19) Нехай F задовольняє умову (1), і набір ваг $\Theta = \Theta^1 \cup ... \cup \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$ є *квазі-стискаючим з параметром* $\varkappa$, тобто для будь-якого $m = 2, ..., n$ та пари $(p, \mathcal{G}) \in \Theta^m$, для довільних $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i \neq j$, існує така вага $(\widetilde{p}, \widetilde{\mathcal{G}}) \in \Theta^{m-1}$, що

$$\begin{aligned} &\exists\, K: \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^1_+ \quad (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}}\widetilde{p}(z) \leqslant Kp(z), \\ &(\widehat{\mathcal{G}}^{\{i,j\}})^\ell \leqslant K\,\widetilde{G}^\ell, \quad \ell = 1, ..., m-1. \end{aligned}$$

Тоді півгрупа P_t (3) зберігає простори $C_{\Theta,r}$, тобто $\forall\, t \geqslant 0$ $P_t : C_{\Theta,r} \to C_{\Theta,r}$ і $\exists\, K, M \ \ \forall\, f \in C_{\Theta,r}: \ \|P_t f\|_{C_{\Theta,r}} \leqslant Ke^{Mt}\|f\|_{C_{\Theta,r}}$.

Доведення цієї теореми спирається на наслідок нелінійної оцінки (11) та Теореми 3.12, 3.13, 3.15 та 3.16, в яких послідовно доводиться розв'язність варіаційних рівнянь та їх неперервна залежність і диференційовність за початковими умовами. Крім того, в цьому ж розділі доведена Теорема 3.21 про щілину між топологіями неперервності та диференційовності та теорема про регулярні властивості півгрупи (3) у випадку змінного дифузійного коефіцієнта (Теорема 3.30).

У **Розділі 4** досліджуються подальші питання регулярності еволюції оператора H_μ, тобто півгрупи (3), зокрема на предмет підвищення гладкості. Основною в даному розділі є Теорема 4.7.

Теорема 4. (Теорема 4.7) Нехай виконані умови Теореми 3.19 і набір ваг Θ є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa$. Позначимо $\mathcal{D}_\Theta$ замикання в нормі $C_{\Theta,r}$ функцій $f \in \mathcal{P}^\infty_{cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ таких, що $\|f\|_{C_{\Theta,r}} < \infty$. Тоді для будь-якого $m \geqslant 1$, $f \in \mathcal{D}_\Theta$ та $t > 0$ маємо $P_t f \in C_{(\Theta)^m,r}$, і існують такі сталі $K_{\Theta,m}$, $M_{\Theta,m}$, що виконана оцінка

$$\|P_t f\|_{C_{(\Theta)^m,r}} \leqslant \frac{1}{t^{m/2}} K_{\Theta,m} e^{M_{\Theta,m}t}\|f\|_{C_{\Theta,r}}, \quad t > 0. \tag{12}$$

Набір $(\Theta)^m = \bigcup\limits_{i=0}^{m} T_{\varkappa}^i \Theta$, будується по набору $\Theta = \{(p, G^1 \otimes ... \otimes G^s)\}$, де $(\Theta)^0 = \Theta$, і $T_{\varkappa}\Theta = \{\big((1+z)^{\varkappa+1}p(z),\, G^1 \otimes ... G^j \otimes A^{\varkappa+2} \otimes G^{j+1} \otimes ... G^s\big), j = 0, .., s\}$. Доведення цієї теореми спирається на спеціальну формулу інтегрування частинами для вінерівських функціоналів (Теорема 4.3), яка дозволяє розвинути метод нелінійних оцінок і застосувати його для дослідження питання підвищення гладкості.

У **Розділах 5 та 6** дисертації досліджуються відповідно питання збереження та підвищення гладкості для операторів еволюції дифузійних процесів на некомпактних рімановых многовидах. Головна складність, яка тут виникає, пов'язана не тільки з істотною нелінійністю коефіцієнтів дифузійного рівняння, але і з нелінійністю простору, над яким це рівняння розглядається. Основним об'єктом дослідження в даних розділах є нелінійне дифузійне рівняння

$$\delta\xi_t^x = A_0(\xi_t^x)dt + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha(\xi_t^x)\delta W_t^\alpha, \quad \xi_0^x = x, \tag{13}$$

що розглядається на некомпактному орієнтованому C^∞-гладкому повному зв'язному рімановому многовиді M без краю. Вище δW^α позначають диференціали Стратоновича одновимірних незалежних вінерівських процесів W_t^α, $\alpha = 1, ..., d$. Питання коректного означення розв'язку рівняння (13) та умов його існування досліджувалось в роботах Д. Елворсі, П. Маллявена, Ю. Л. Далецького, Я. І. Білопольської та ін.

Аналогічно до попередніх розділів питання про гладкі властивості асоційованої з рівнянням (13) півгрупи зводиться до питання регулярності розв'язку варіаційного рівняння за початковою умовою.

При стандартному підході до задачі регулярності за початковою умовою розв'язок дифузійного рівняння (13) розглядається як випадкове відображення: $M \ni x \to \xi_t^x \in M$, і похідна високого порядку за початковою умовою x розуміється як процес $d_x^n \xi_t^x$. При цьому оператор диференціювання $d : TM \to TM$ задається на дотичному просторі TM многовиду. Слід зазначити, що оператор $d : TM \to TM$ співпадає з частинною похідною і є тензор-інваріантним. Неінваріантність похідних вищого порядку вирішується за допомогою введення так званих *коваріантних похідних*. Проте, для того, щоб застосувати, розвинуті в попередніх розділах методи, необхідно мати також інваріантне представлення для похідних півгрупи аналогічне (5), що є неможливим в термінах звичайних коваріантних похідних. Тому в роботі запропоновано новий тип інваріантних похідних $\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x$ (варіацій процесу ξ_t^x за початковою умовою), в термінах яких справедливо інваріантне представлення для коваріантних похідних півгрупи P_t (Теорема 5.17):

$$\nabla_\gamma^x P_t f(x) = \sum_{\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_s=\gamma} \mathbf{E}\left(\nabla^\xi_{\{j_1,\ldots,j_s\}} f\right)(\xi_t^x)\, \mathbb{V}_{\gamma_1}\xi_t^{j_1} \ldots \mathbb{V}_{\gamma_s}\xi_t^{j_s},$$

де використано позначення $\nabla_\gamma^x = \nabla_{k_1}^x \ldots \nabla_{k_n}^x$, $\gamma = \{k_1, \ldots, k_n\}$ для коваріантних похідних.

Для множини індексів $\gamma = \{k_1, \ldots, k_n\}$ *варіацією процесу* ξ_t^x порядку $|\gamma|$ називається процес $\mathbb{V}_\gamma \xi_t^x$, який задається наступними рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_k(\xi_t^x)^m = \dfrac{\partial(\xi_t^x)^m}{\partial x^k}, \\ \mathbb{V}_k(\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m) = \nabla_k^x(\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m) + \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t^x)\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^p \dfrac{\partial(\xi_t^x)^q}{\partial x^k}, \end{cases} \tag{14}$$

де $\nabla_k^x(\mathbb{V}_\gamma \xi^m)$ позначає класичну коваріантну похідну по змінній x.

Фактично, таким чином введена варіація є векторним полем за змінною ξ_t^x та ковекторним полем $|\gamma|$-го порядку по змінній x:

$$\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x = \{\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m\}_{|\gamma|=n} \in T_{\xi_t^x}M \otimes (T_x^* M)^{\otimes n}.$$

Це дає можливість ввести відповідний нелінійний вираз:

$$r_n(\xi, t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\, p_j(\rho^2(\xi_t^x, o)) \|\, \mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x \,\|^{q/j}, \tag{15}$$

де $o \in M$ – деяка фіксована точка многовиду, $\rho(x, y)$ – геодезична відстань між точками x, y, і довести для нього нелінійну оцінку. Таким чином, строгий аналіз властивостей півгрупи, асоційованої з дифузійним рівнянням (13) зводиться до дослідження властивостей введених вище варіацій від його розв'язків.

Нехай $\vec{q}_\varkappa = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geqslant 1$ позначає набір монотонних функцій на $\mathbb{R}_+$ поліноміальної поведінки, що задовольняють ієрархію

$$\forall\, i \geqslant 1 \quad q_i(z)(1+z)^{\varkappa/2} \leqslant q_{i+1}(z), \quad z \geqslant 0. \tag{16}$$

Позначимо через $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ простір n-разів неперервно диференційовних функцій на многовиді M, оснащений нормою

$$\|f\|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)} = \max_{i=0,\dots,n} \sup_{x\in M} \frac{\|(\nabla^x)^i f(x)\|}{q_i(\rho^2(x,o))}. \tag{17}$$

Теорема 5. (Теорема 5.18) Припустимо, що коефіцієнти рівняння (13) задовольняють наступні умови:
1.) $\forall C \in I\!R_+ \ \exists K_C \in I\!R^1$, що $\forall x \in M$

$$\langle \widetilde{A}_0(x), \nabla^x \rho^2(o,x)\rangle + C\sum_{\alpha=1}^d \|A_\alpha(x)\|^2 \leqslant K_C(1+\rho^2(o,x));$$

2.) $\forall C, C' \in I\!R_+ \ \exists K_C \in I\!R^1$ така, що $\forall x \in M$, $\forall h \in T_xM$

$$\langle \nabla \widetilde{A}_0(x)[h], h\rangle + C\sum_{\alpha=1}^d \|\nabla A_\alpha(x)[h]\|^2 -$$

$$- C'\sum_{\alpha=1}^d \langle R_x(A_\alpha(x),h)A_\alpha(x),h\rangle \leqslant K_C\|h\|^2,$$

де $[R(A,h)A]^m = R_{p\ \ell q}^{\ m} A^p A^\ell h^q$ позначає оператор кривини.
3.) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує така стала $\varkappa_{\mathfrak{A}}$, що для всіх $j = 1,..,n$ і $x \in M$: $\|(\nabla)^j \mathfrak{A}(x)\| \leqslant (1+\rho(x,o))^{\varkappa_{\mathfrak{A}}}$, де $\mathfrak{A} = \widetilde{A}_0(x), A_\alpha(x)$ або $R(x)$.

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ простори $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ зберігається під дією півгрупи $\forall\, t \geqslant 0 \ \ P_t : C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ та $\exists\ K, M$, такі, що

$$\forall\, f \in C^n_{\vec{q}}(M) \qquad \|P_t f\|_{C^n_{\vec{q}}(M)} \leqslant K e^{Mt}\|f\|_{C^n_{\vec{q}}(M)}.$$

Теорема 6. (Теорема 6.9) Нехай виконані умови Теореми 5.18 та нехай, крім того, існує така стала $\varkappa_1$, що $\inf \dfrac{\|A^\sigma(x)\|}{(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa_1}} > 0$. Тоді $\exists\ K$ та N, що для $t > 0$ $P_t : C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa), q_{n+1}(\varkappa),\dots,q_{n+m}(\varkappa)}(M)$, і виконана оцінка

$$\|P_t f\|_{C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa), q_{n+1}(\varkappa),\dots,q_{n+m}(\varkappa)}} \leqslant \frac{K e^{Nt}}{t^{m/2}}\|f\|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}}.$$

Розділ 7 присвячений доведенню принципу найменшої дії для нелінійного рівняння, яке є узагальненням так званого рівняння пористого середовища:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(\|u\|^{m-1}u). \tag{18}$$
На нескінченновимірному просторі дифеоморфізмів $\mathcal{D}_\mu(M)$, що зберігають об'єм многовиду μ , право-інваріантна метрика в точці $g \in \mathcal{D}_\mu$ задається співвідношенням: $\big(X,Y\big) = \int_M \langle X(x),Y(x)\rangle_x d\mu(x)$, де $X,Y \in T_g\mathcal{D}_\mu$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ – метрика на T_xM з відповідною нормою $\|\cdot\|_x$. Многовид, який розглядається в цьому розділі, є N-вимірним тором $\mathbb{T}$, відповідно міра dx є нормованою мірою Лебега на торі.

Для деякого гладкого бездивергентного змінного за часом векторного поля $(t,x) \mapsto v_t(x) \in T_x\mathbb{T}$ потік $e_t(v) \in \mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$, генерований $\dot{v}_t$, визначається як розв'язок звичайного диференціального рівняння:
$$\frac{de_t(v)}{dt} = \dot{v}_t(e_t(v)), \quad e_0(v) = I_\mathbb{T}. \tag{19}$$

Дифеоморфізм $e_t(v)$ грає роль збурення тотожного відображення у просторі $\mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$. Розв'язність рівняння (19) випливає з компактності $\mathbb{T}$ та гладкості v. Для залежного від часу бездивергентного векторного поля u оператор $L(u_t) : C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^N)$ задамо формулою: $L(u_t)f = \dfrac{1}{2}\Delta f + u_t \cdot \nabla f$. Тоді для $q > 1$ *функціоналом q-енергії* називається наступна величина:

$$\mathcal{E}_q(u,v) = \frac{1}{q}\int_0^T \int_\mathbb{T} \Big\|\Big[\big(\partial_t + L(u_t)\big)e_t(v)\Big](e_t^{-1}(v)(x))\Big\|^q \,dx\,dt,$$

де $e_t^{-1}(v)$ – обернене відображення до дифеоморфізма $e_t(v) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.

Означення 2. (Означення 7.3) Скажемо, що u є *критичною точкою функціонала* $\mathcal{E}_q$, якщо для всіх бездивергентних, змінних у часі векторних полів v таких, що $v_0 = 0$ і $v_T = 0$, виконано співвідношення:
$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{E}_q(u,\varepsilon v) = 0.$$

Теорема 7. (Теорема 7.4) Бездивергентне векторне поле u_t є критичною точкою функціонала $\mathcal{E}_q$, $q \geqslant 2$ тоді і лише тоді, коли існує функція $P(x)$ така, що виконано рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u\cdot\nabla + \frac{1}{2}\Delta\right)\left(\|u\|^{q-2}u\right) + \nabla P. \tag{20}$$

Рівняння (20) в літературі називається ваговим рівнянням пористого середовища, і є узагальненням рівняння (18).

В даному розділі дисертації також досліджується питання існування узагальнених розв'язків, які задовольняють варіаційну задачу з функціоналом узагальненої q-енергії.

Означення 3. (Означення 7.11) Скажемо, що білінійне відображення $\Theta_t(\cdot,\cdot)$ *є узагальненим потоком*, якщо кожній парі $\varphi,\psi \in C^\infty(M)$ ставиться у відповідність неперервний процес $t \mapsto \Theta_t(\varphi,\psi)$, визначений на спільному ймовірнісному просторі з спільною для всіх φ,ψ фільтрацією, і для якого, крім того, $\forall\,\varphi,\psi,\varphi_1,\psi_1 \in C^\infty(M)$ виконані наступні умови:

(1) $\quad \Theta_t(\varphi,1) \equiv \int\limits_M \varphi(x)\,dx,$

(2) $\quad \Theta_t(1,\psi) \equiv \int\limits_M \psi(x)\,dx,\quad$ м.в. для всіх $t\in[0,T]$,

(3) $\quad \Theta_0(\varphi,\psi) = (\varphi,\psi)_{L^2(M)};$

(4) $\quad$ для $\varphi,\psi \geqslant 0$ випливає $\Theta_t(\varphi,\psi) \geqslant 0$ м.в.;

(5) $\quad |\Theta_t(\varphi,\psi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^2(M)}\|\psi\|_{L^2(M)}$, м.в. для всіх $t\in[0,T]$;

(6) $\quad d\,[\Theta(\varphi,\psi),\Theta(\varphi_1,\psi_1)]_t = \sum\limits_{i\geqslant 1}\Theta_t\big(\varphi,\langle\nabla\psi,\sigma_i\rangle\big)\cdot\Theta_t\big(\varphi_1,\langle\nabla\psi_1,\sigma_i\rangle\big)\,dt.$

Скажемо, що узагальнений потік Θ_t *має конфігурацію η на кінцях*, якщо $\mathbb{E}\,[\Theta_T(\varphi,\psi)] = \int_{M\times M}\varphi(x)\psi(y)\,\eta(dx,dy)$. Позначимо через $\mathcal{H}'_q(\eta) = \mathcal{H}'_q(\sigma,\eta,T)$ множину розподілів узагальнених потоків Θ_t, які мають конфігурацію η в кінцевих точках та скінченну *узагальнену q-енергію*, тобто для яких наступний функціонал є скінченним:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta) = \frac{1}{q}\sup_{\varphi,\psi,\ell,m}\left\{\mathbb{E}\int\limits_0^T\sum_{j=1}^m\left[\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\big(D\widetilde{\Theta}_t(\varphi_j,\psi_k)\big)^2}{\Theta_t(\varphi_j,1)^\alpha}\right]^{q/2}dt\right\},$$

де $\alpha = \dfrac{2(q-1)}{q}$, sup береться по всім векторам $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_\ell)$ для будь-яких $m, \ell \geqslant 1$ таким, що $\varphi_j, \psi_k \in C^\infty(M)$, $\varphi_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j = 1$, і $\sum\limits_{k=1}^{\ell} \langle \nabla\psi_k, v\rangle^2 \leqslant ||v||^2$ для всіх $v \in TM$. Для $\varphi, \psi \in C^2(M)$ $\widetilde{\Theta}_t(\varphi, \psi) := \Theta_t(\varphi, \psi) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s(\varphi, \Delta\psi)\, ds$, Δ – оператор Лапласа. Покладемо $\mathcal{E}'_q(\eta) = \mathcal{E}'_q(\sigma, \eta, T) := \inf\left\{\mathcal{E}'_q(\Theta),\ \mathcal{L}(\Theta) \in \mathcal{H}'_q(\eta)\right\}$, де за означенням $\mathcal{E}'(\eta) = \infty$, якщо не існує узагальнених потоків з конфігурацією η в кінцевих точках.

Теорема 8. (Теорема 7.19) Якщо $\mathcal{E}'_q(\eta) < \infty$, тоді існує узагальнений потік Θ з розподілом з $\mathcal{H}'_q(\eta)$ такий, що $\mathcal{E}'_q(\Theta) = \mathcal{E}'_q(\eta)$.

Іншими словами, інфімум функціонала узагальненої q-енергії з заданою конфігурацією η в кінцевих точках досягається на елементах множини $\mathcal{H}'_q(\eta)$.

У **Розділі 8** вивчається питання про асимптотичне представлення розв'язку граничної задачі в околі сингулярної особливої точки типу каспа. Ця задача ставиться у наступному сенсі.

Нехай $\mathcal{F}_n$ позначає деяку послідовність підпросторів деякого простору $\mathcal{F}$ таку, що $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ для будь-якого n. Позначимо через $\mathcal{F}_{-\infty}$ об'єднання всіх $\mathcal{F}_n$. Для даного $f \in \mathcal{F}_{-\infty}$, під асимптотичним розкладом елемента f розуміється ряд

$$f \sim \sum_{n=n_f}^{\infty} f_n, \quad f_n \in \mathcal{F}_n \tag{21}$$

такий, що $f - \sum_{n=n_f}^{N} f_n \in \mathcal{F}_{N+1}$ для будь-якого $N \geqslant n_f$.

Розглядається перша крайова задача для рівняння теплопровідності

$$\begin{array}{rcll} u'_t - u''_{x,x} & = & f & \text{в} \quad \mathcal{G}, \\ u & = & u_0 & \text{на} \quad \partial\mathcal{G} \setminus \Sigma. \end{array} \tag{22}$$

в нециліндричній області $\mathcal{G}$, де Σ позначає множину характеристичних точок границі $\partial\mathcal{G}$. Функції f в $\mathcal{G}$ та u_0 на $\partial\mathcal{G}\setminus\Sigma$ є деякими гладкими функціями. Припускається, що область $\mathcal{G}$ в околі особливої точки задається нерівністю $t > |x|^p$, де p – деяке позитивне дійсне число. Основна ідея дослідження полягає в застосуванні так званої техніки "підриву сингулярності", яка полягає у введені нової системи координат (ω, r) за допомогою спеціальної заміни змінних $(x, t) \to (\omega, r)$ при якій особлива точка перетворюється в сегмент. При цьому в області змінних (ω, r) задача (22) зводиться до звичайного диференціального рівняння з операторними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} r^Q U'_r - U''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} U'_\omega &= r^Q F \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,1), \\ U &= U_0 \quad \text{на} \quad \{\pm 1\}\times(0,1), \end{aligned} \tag{23}$$

де $U(\omega, r)$ та $F(\omega, r)$ – відповідні функції, які отримуються з $u(x,t)$ та $f(x,t)$ при координатному перетворенні, $Q = \frac{2}{p}$. В Розділі 8 доведена наступна теорема.

Теорема 9. (Теорема 8.1) Нехай $p \neq 2$. Тоді довільний розв'язок однорідної задачі (23) має формальний асимптотичний розклад наступного вигляду:

$$U(\omega, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r^{Q/4}} \exp\left(\lambda_n \frac{r^{1-Q}}{1-Q}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{r^{(1-Q)m}}, \tag{24}$$

де $\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{2}n\right)^2$ – власні значення спеціального ланцюга задач Штурма-Ліувілля.

У термінах вихідних координат (x,t) в околі особливої точки формальний розклад розв'язку задачі (22) має вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{Q/4}} \exp\left(\lambda_n \frac{t^{1-Q}}{1-Q}\right) \sum_{m=0}^{\infty} V_{n,m}\left(\frac{x}{t^{1/p}}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{(1-Q)m}. \tag{25}$$

Аби дослідити розв'язність задачі (23) та довести, що отриманий формальний розв'язок є асимптотичним у сенсі означення (21), задача (23) зводиться до параболічного рівняння з операторно-значним символом за допомогою такої заміни координат $s = \delta(r)$, що $r^Q \dfrac{d}{dr} = \dfrac{d}{ds}$. Функція δ визначається однозначно з точністю до константи з рівняння: $\delta'(r) = r^{-Q}$ і дається виразом:

$$\delta(r) = \frac{r^{1-Q}}{1-Q} \tag{26}$$

для $r > 0$. Зауважимо, що $\delta(0+) = -\infty$. Тоді задача (23) переходить в наступну:

$$\begin{aligned} U'_s - U''_{\omega,\omega} + \frac{1}{2-p}\frac{1}{s}\,\omega U'_\omega &= G \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(-\infty, \delta(1)), \\ U &= U_0 \quad \text{при} \quad \{\pm 1\}\times(-\infty, \delta(1)), \end{aligned} \tag{27}$$

де $G = \left(\dfrac{\delta(1)}{s}\right)^{\frac{2}{2-p}} F$. Таким чином, гранична задача (22) зводиться до граничної задачі (27) з оператором $\mathcal{A}(s)U = U'_s - U''_{\omega,\omega} + \frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}U'_\omega$, що діє у просторі $\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))$ функцій U таких, що $U = U_0$ при $\omega = \pm 1$, $s \in (-\infty, \delta(1))$ та наступна норма є скінченною:

$$||U||^2_{\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))} = \int\limits_{-\infty}^{\delta(1)} \Big(||U'(s)||^2_{L^2(-1,1)} + ||U(s)||^2_{H^2(-1,1)}\Big)|s|^{\frac{3}{p-2}}\, d\omega\, ds.$$

Фактично, для $s < 0$ оператор граничної задачі (27) є псевдодиференціальним оператором $AU\,(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath s\sigma} a(s,\sigma)\hat{U}(\sigma) d\sigma$ з повільно змінним операторним символом. Для псевдодиференціальних операторів з повільно змінним символом в роботі В. Рабіновича, Н. Тарханова та В.-Б. Шульце 2000 р. доведено критерій локальної розв'язності в околі нескінченної точки, проте даний критерій стосується однорідного в класичному сенсі символу і не може бути безпосередньо застосований до задачі (27), символ якої є квазі-однорідним, тобто однорідним тільки по частині змінних.

У Розділі 8 доведено локальну розв'язність задачі (27) та отримано теореми про асимптотичність відповідного формального розкладу в сенсі спеціального класу просторів, які є аналогами просторів Слободецького.

Формальний асимптотичний розклад однорідної задачі для (23) в нових координатах (ω, s) отримується після підстановки (26) в (24):

$$U(\omega,s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,((1-Q)s)^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} \exp(\lambda_n s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{((1-Q)s)^m} \qquad (28)$$

для s, що знаходиться в околі точки $-\infty$. При цьому $\lambda_n = -\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)^2$.

Розв'язність трансформованої граничної задачі (27), доводиться в шкалі просторів $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$ функцій, які приймають значення в стандартному просторі Соболєва $H^{2k}(-1,1)$. Функція U зі значеннями в просторі $H^{2k}(-1,1)$ належить простору $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$, $T \leqslant \infty$ для $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \leqslant 0$ та деякого $\mu > \mu_0$, $\mu_0 = \frac{3}{2(p-2)}$ якщо наступна норма є скінченною:

$$\|U\|_{\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} := \Big(\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\, s^{2\mu} \sum_{j=0}^{k} \|U^{(j)}(s)\|^2_{H^{2(k-j)}(-1,1)} ds\Big)^{1/2}.$$

У спеціальному випадку, коли $k = 1$, $\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$ та $T = \delta(1)$ ці простори співпадають з простором $\mathcal{H}^1_0(-\infty, \delta(1))$. Якщо $k = 0$ і $\mu = 0$, то простір $\mathcal{H}^0_{\gamma,0}(-\infty, T)$ позначається $\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty, T)$. Основними результатами цього розділу є наступні теореми.

Теорема 10. (Теорема 8.2) Нехай $\gamma < 0$, $\gamma \neq \lambda_n, n \geqslant 0$, де λ_n – власні значення оператора Δ в просторі $L^2(-1,1)$. Тоді для будь-якого $\mu > -1$ існує таке $T_0(\mu) \in \mathbb{R}$, що для всіх $T < T_0$ оператор $\mathcal{A}(s)$ задачі (27), що діє у просторах $\mathcal{A}(s) : \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty, T) \mapsto \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty, T)$ є оборотним, і виконана наступна оцінка:

$$||U||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} \leqslant C\, ||\mathcal{A}(s)U||_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)}.$$

Теорема 11. (Теорема 8.5) Припустимо $\lambda_{n+1} < \gamma < \lambda_n$. Тоді представлення (28) дійсного розв'язку $U \in H^{1,\gamma}(-\infty, S)$ задачі (27) є асимптотичним розкладом у сенсі (21).

Об'єктом, що розглядається у **Розділі 9** є динамічна система $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, де Ω – непорожня множина елементів, яка інтерпретується як множина станів динамічної системи, $\mathcal{A}-\sigma$-алгебра на Ω, $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ – ймовірнісна міра та $T : \Omega \to \Omega$ є $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-вимірне перетворення, що зберігає міру, тобто $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$. При цьому міра μ називається T-інваріантною. На перетворення T робиться додаткове припущення його регулярності, яке полягає в тому, що T є *ергодичним* по відношенню до міри μ, тобто $\mu(A) \in \{0,1\}$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$ такого, що $T^{-1}(A) = A$.

Основним результатом даного розділу є Теорема 9.7, що дає еквівалентний спосіб обчислення ентропії Колмогорова-Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Нагадаємо означення *ентропії Колмогорова-Сіная.* Нехай $q \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_q\} \subset \mathcal{A}$ скінчене розбиття множини Ω, тобто $\Omega = \bigcup\limits_{\ell=1}^{q} P_\ell$, $P_\ell \neq \varnothing$ для $\ell = 1, ..., q$, $P_{\ell_1} \cap P_{\ell_2} = \varnothing$ для різних $\ell_1, \ell_2 \in \{1, ..., q\}$ і нехай $A = \{1, ..., q\}$ позначає відповідний *алфавіт.* Кожне *слово* $a_1 a_2 ... a_t$ довжини $t \in \mathbb{N}$ визначає множину $P_{a_1...a_t} := \{\omega \in \Omega : (\omega, T(\omega), ..., T^{\circ t-1}(\omega) \in P_{a_1} \times ... \times P_{a_t})\}$, де $T^{\circ t}(\omega) := \overbrace{T \circ T \circ ... \circ T}^{t \text{ разів}}(\omega)$, $\circ$ позначає суперпозицію. Набір непорожніх підмножин, отриманих таким чином для слів довжини t, задає розбиття $\mathcal{P}_t \subset \mathcal{A}$ множини Ω. Зокрема, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

Ентропійним показником перетворення T по відношенню до розбиття $\mathcal{P}$ називається границя $h_\mu(T,\mathcal{P}) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} H_\mu(\mathcal{P}_t)$, де $H_\mu(\mathcal{C})$ позначає *ентропію Шеннона* скінченного розбиття $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_q\} \subset \mathcal{A}$ множини Ω, $q \in \mathbb{N}$: $H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum\limits_{\ell=1}^{q} \mu(C_\ell) \ln \mu(C_\ell)$ з врахуванням домовленості $0 \cdot \ln 0 := 0$. Тоді *ентропія Колмогорова-Сіная* за означенням дорівнює: $h_\mu^{KS}(T) = \sup\limits_{\substack{\mathcal{P}-\text{скінченне}\\ \text{розбиття}}} h_\mu(T,\mathcal{P})$. У даному розділі під *спостережуваними* розуміється набір ξ_1, ξ_2,…,ξ_n випадкових $\mathbb{R}^1$-значних величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, що розглядається як випадковий вектор $\Theta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Для однієї спостережуваної ξ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ та довільних $s, t \in \mathbb{N}$ таких, що $s < t$ розглянемо розбиття множини Ω на дві підмножини, що не перетинаються: $\mathcal{P}_{s,t}^{\xi,T} = \Big\{\omega \in \Omega : \xi(T^{\circ s}(\omega)) < \xi(T^{\circ t}(\omega))\Big\} \cup \Big\{\omega \in \Omega : \xi(T^{\circ s}(\omega)) \geqslant \xi(T^{\circ t}(\omega))\Big\}$. Тоді для набору спостережуваних $\Theta = (\xi_1, ..., \xi_n)$ над $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ та довільного $d \in \mathbb{N}$ розбиття $\mathcal{P}_d^{\Theta,T} = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{0\leqslant s<t\leqslant d} \mathcal{P}_{s,t}^{\xi_i,T}$ називається *впорядкованим розбиттям порядку d множини Ω, асоційованим з Θ.* За означенням для двох довільних розбиттів $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ та $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ множини Ω утворення нового розбиття за допомогою операції подрібнення $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ задається наступним чином: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}\}$.

Враховуючи ці означення *впорядкована ентропія* динамічної системи задається як верхня границя при $d \to \infty$ ентропії Шеннона, що визначається по підрозбиттю $\mathcal{P}_d^{\Theta,T}$. Нехай $\sigma\big(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geqslant 0}\big)$ – σ-алгебра генерована випадковим вектором Θ та його “зсувами”, під дією перетворення T: $\Theta \circ T, \Theta \circ T^2, \ldots$. Позначимо $T^{-1}\mathcal{A}$ розбиття множини Ω, що складається з всіх прообразів елементів з набору множин $\mathcal{A}$: $T^{-1}\mathcal{A} = \{T^{-1}(A_1), \ldots, T^{-1}(A_n)\}$. Для кожного $k \geqslant 1$ розбиття $\tau_k(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots T^{-(k-1)}\mathcal{A}$.

Теорема 12. (Теорема 9.7) Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ позначає ймовірнісний простір, $T : \Omega \to \Omega$ – вимірне μ-інваріантне перетворення, і $\Theta = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – вимірне відображення таке, що $\sigma\big(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geqslant 0}\big) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Припустимо, що виконано одна з наступних умов:

(a) T є ергодичним, або

(b) T не є ергодичним, проте Ω може бути вкладеним в деякий компактний метричний простір таким чином, що $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Тоді $\quad h_\mu^{KS}(T) = \lim\limits_{d\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} H_\mu \left(\tau_k(\mathcal{P}_d^{\Theta,T})\right).$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі запропоновано новий підхід до розв'язання задачі регулярності еволюції оператора енергії стохастичної моделі Ізінга нескінченної кількості частинок з необмеженою взаємодією, а також розвинуто варіаційні та асимптотичні методи дослідження нелінійних дифузійних рівнянь типу рівняння пористого середовища та рівняння теплопровідності з каспідальною особливістю на межі нециліндричної області. Крім того, в роботі вдосконалено метод обчислення впорядкованої ентропії спостережуваних величин, що є образами випадкових векторів при дії відображення, яке задає динамічну систему. Отримано такі результати:

1. Розроблено метод нелінійних оцінок розв'язання проблеми регулярності (збереження та підвищення гладкості) півгрупою операторів, що описують еволюцію стохастичної моделі Ізінга нескінченної кількості частинок.

2. Доведено теореми про регулярність еволюції системи нескінченної кількості частинок у шкалах просторів функцій нескінченної кількості змінних з топологією, що задається супремальною нормою, та нормою диференційовних у середньо квадратичному функцій.

3. Досліджено вплив характеру нелінійності взаємодії між частинками на структуру топологій нескінченновимірних просторів, що зберігаються під дією півгрупи.

4. Розроблено геометрично-інваріантний підхід до задачі регулярності за початковою умовою розв'язків нелінійних стохастичних дифузійних рівнянь на гладкому рімановому многовиді. Побудовано відповідний апарат тензорного числення.

5. Виділено місце тензора кривини многовиду в інваріантній структурі варіаційних рівнянь за початковою умовою. Виявлено вплив тензора кривини на регулярність будь-якого порядку відповідної півгрупи.

6. Отримано умови відсутності вибуху для розв'язку нелінійного стохастичного дифузійного рівняння на некомпактному рімановому

многовиді.

7. Виявлено ефект наявності щілини між топологіями обмеженості та неперервності в задачах регулярності високого порядку над нескінченно-вимірними просторами.

8. Доведено несингулярне інтегрування частинами для нелінійної не глобально ліпшицевої дифукції, за допомогою якого та методу нелінійних оцінок доведено теореми про підвищення гладкості під дією півгрупи на некомпактному рімановому многовиді.

9. Доведено принцип найменшої дії для нелінійного рівняння, що описує дифузію у пористому середовищі, та отримано достатні умови існування узагальнених розв'язків відповідної варіаційної задачі.

10. Отримано формальні асимптотичні розклади для рівняння теплопровідності в нециліндричній області з особливістю типу каспа на межі області та доведено асимптотичний характер таких розкладів у спеціальних просторах, що залежать від характеру дотику межі області в околі особливої точки.

11. Доведено характеризацію ентропії Колмогорова-Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Автор висловлює щиру і глибоку вдячність науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України Анатолію Наумовичу Кочубею за увагу до роботи та підтримку.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Antoniouk A. V. Smoothing properties of semigroups for Dirichlet operators of Gibbs measures / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Funct. Anal. — 1995. — Vol. 127, no. 2. — P. 390–430.

[2] Antoniouk A. V. Decay of correlations and uniqueness of Gibbs lattice systems with nonquadratic interaction / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, no. 11. — P. 5444–5454.

[3] Antoniouk A. V. How the unbounded drift shapes the Dirichlet semigroups behaviour of non-Gaussian Gibbs measures / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Funct. Anal. — 1996. — Vol. 135, no. 2. — P. 488–518.

[4] Antoniouk A. V. Nonlinear estimates on regularity of non-Lipschitz diffusions / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk. — National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, Kiev, 1999. — P. 84.

[5] Антонюк О. В. Формули високих порядків для похідних нелінійних дифузійних напівгруп / О. В. Антонюк, О. В. Антонюк // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, N 1. — С. 117–122.

[6] Antoniouk A.V. Nonlinear calculus of variations and regularity of parabolic problems / A.V. Antoniouk, A.V. Antoniouk // Збірник наукових праць Інституту математики НАНУ "Нелінійний аналіз: труди 1-го Українського математичного конгресу". — Т. 10. — Киев: Інститут математики НАНУ, 2001. — С. 7–19.

[7] Antoniouk A. V. High order symmetries of variations and nonlinear quasi-contractive estimates approach to the parabolic regularity problems / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2002. — Vol. 12. — P. 3–12.

[8] Antoniouk A. V. Nonlinear estimates approach to the regularity properties of diffusion semigroups / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 2. — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003. — P. 165–226.

[9] Антонюк О. Вікт. Регулярні властивості півргуп, породжених нелінійними потоками на многовидах / О. Вікт. Антонюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 50, no. 4. — P. 83–89.

[10] Antoniouk A. Vict. Regularity properties of infinite-dimensional evolutions, related with anharmonic lattice systems / A. Vict. Antoniouk // Symmetry in nonlinear mathematical physics. — National. Akad. Sci. of Ukraine, Inst. of Math., Kiev, 2004. — Vol. 2. — P. 1236–1243.

[11] Antoniouk A. V. Nonlinear calculus of variations for differential flows on manifolds: geometrically correct introduction of covariant and stochastic variations / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Український математичний вісник. — 2004. — Т. 1, №. 4. — С. 449–484.

[12] Antoniouk A. Vict. Nonsingular smoothing representations for differential flows on manifolds / A. Vict. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2005. — Т. 15. — С. 21–30.

[13] Antoniouk A.V. Nonlinear estimates approach to the non-Lipschitz gap between boundedness and continuity in C^{∞}-properties of infinite dimensional semigroups / A.V. Antoniouk, A.V. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2006. — Т. 16. — С. 3–26.
[14] Antoniouk A. V. Nonlinear-estimate approach to the regularity of infinite-dimensional parabolic problems / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, №. 5. — С. 579–596.
[15] Antoniouk A. V. Regularity of nonlinear flows on noncompact Riemannian manifolds: differential geometry versus stochastic geometry or what kind of variations is natural? / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 8. — С. 1011–1034.
[16] Antoniouk A. V. Non-explosion and solvability of nonlinear diffusion equations on noncompact manifolds / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 11. — С. 1454–1472.
[17] Antoniouk A. V. Regularity of infinite dimensional heat dynamics of unbounded lattice spins with non-constant diffusion coefficients / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2007. — Т. 17. — С. 101–129.
[18] Antoniouk A. V. Continuity with respect to the initial data and absolute-continuity approach to the first-order regularity of nonlinear diffusions on noncompact manifolds / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 10. — С. 1299–1316.
[19] Antoniouk A. The Dirichlet problem for the heat equation in domains with cuspidal points on the boundary / A. Antoniouk, N. Tarkhanov // Operator theory, pseudo-differential equations, and mathematical physics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013. — Vol. 228, Oper. Theory Adv. Appl. — P. 1–20.
[20] Antoniouk A. Variational principle for weighted porous media equation / A. Antoniouk, M. Arnaudon // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2014. — Vol. 352, no. 1. — P. 31–34.
[21] Antoniouk A. Generalized stochastic flows and applications to incompressible viscous fluids / A. Antoniouk, M. Arnaudon,

A. B. Cruzeiro // Bull. Sci. Math. — 2014. — Vol. 138, no. 4. — P. 565–584.

[22] Antoniouk A. Asymptotic Solutions of the Dirichlet Problem for the Heat Equation at a Characteristic Point / A. Antoniouk, O. Kiselev, N. Tarkhanov // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 10. — С. 1299–1317.

[23] Antoniouk A. Kolmogorov-Sinai entropy via separation properties of order-generated σ-algebras / A. Antoniouk, K. Keller, S. Maksymenko // Discrete and Continuous Dynamical System - A. — 2014. — Vol. 34. — P. 1793–1809.

[24] Antoniouk A. V. High order symmetries of variational calculus and Cauchy-Liouville-Picard regularity scheme / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // International conference "Nonlinear Partial Differential Equations" — (Lviv, August 23-29, 1999): Book of Abstracts. – Lviv, 1999. – P. 6.

[25] Антонюк A. V. High order symmetries of variations and nonlinear quasi-cntractive estimates approach to the parabolic regularity problems / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // International conference "Nonlinear Partial Differential Equations" — (Donetsk, August 22-28, 2001): Book of Abstracts. – Donetsk, 2001. – P. 9.

[26] Antoniouk A. Raise of regularity under evolution of anharmonic lattice spin systems. Effects, related with the dependence on random parameter / A. Antoniouk // Міжнародна конференція "Recent Trends in Kinetic Theory and its Applications" — (Kyiv, May 11-15, 2004): Book of Abstracts. – Kyiv, 2004. – P. 10.

[27] Antoniouk A. Raise of smoothness properties for non-Lipschitz heat flows on non-compact Riemannian manifolds / A. Antoniouk // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" — (Donetsk, September 17-23, 2005): Book of Abstracts. – Donetsk, 2005. – P. 12.

[28] Antoniouk A. V. Nonlinear effects in the regularity problems for infinite dimensional evolutions of classical Gibbs models / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // International Conference "Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications" — (Lviv, August 28-30, 2005): Book of Abstracts. – Lviv, 2005. – P. 85.

[29] Antoniouk A. V. High order regularity of non-Lipschits heat differential equations on manifolds and anharmonic spin lattices / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька — (Дрогобич, 24 – 28 вереня, 2007): тези доповідей. – Дрогобич, 2007. – С. 9.

[30] Antoniouk A. V. Monotone and covariant approach to the high-order regularity of non-Lipschitz diffusions on noncompact manifolds or why the covariant derivative is a derivative / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Inernational Conference" Nonlinear Partial Differential Equations. Dedicated to the memory of I.V. Skrypnik" — (Yalta, September 10-15, 2007): Book of Abstracts. – Donetsk, 2007. – P. 6.

[31] Antoniouk A. Nonlinear flows on non compact manifold or why the covariant derivative is a derivative? / A. Antoniouk // 33-rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications — (Berlin, 27-31 July, 2009): Book of Abstracts. – Berlin, 2009. – P. 121.

[32] Антонюк А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле в окрестности каспидальной точки / A. Antoniouk // Крымская международная математическая конференция — (Судак, 22 сентября – 4 октября, 2013): тези доповідей. – Судак, 2013.

[33] Antoniouk A. Least action principle for weigthed porous media equation / O. Antoniouk // Third Conference Mathematics for Life Sciences — (Rivne, September 15-19, 2015): Book of Abstracts. – Rivne, 2015. – P. 2.

[34] Антонюк О.В. Нелинейные эффекты в задачах регулярности для бесконечномерных эволюций классических гиббсовских моделей / О.В. Антонюк, О.В. Антонюк. — Киев: Наукова Думка, 2006. — 208 с.

АНОТАЦІЇ

Антонюк О. В. Аналітичні методи в задачах статистичної механіки, нелінійної дифузії та теорії складності дискретних часових рядів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню математичних об'єктів, які виникають у зв'язку зі строгим описом моделей статистичної механіки та нелінійної дифузії, а також моделей дискретних часових рядів, що є результатами запису сигналів енцефалограм та кардіограм. В роботі запропоновано та розвинуто метод нелінійних оцінок на варіації за початковою умовою, за допомогою якого досліджуються питання збереження та підвищення гладкості під дією півгрупи, що описує еволюцію стохастичної моделі Ізінга зліченної кількості взаємодіючих частинок. Розроблено геометрично-інваріантний підхід до задачі регулярності розв'язків нелінійних стохастичних дифузійних рівнянь на некомпактному рімановому многовиді. Доведено принцип найменшої дії для нелінійного рівняння пористого середовища. Отримано асимптотичні розклади розв'язків рівняння теплопровідності в нециліндричній області в околі точки, яка має особливість типу каспу. Доведено характеризацію ентропії Колмогорова-Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Ключові слова: стохастична модель Ізінга, задача Коші, диференційовність за початковою умовою, некомпактний ріманів многовид, рівняння диффузії, рівняння пористого середовища, ентропія перестановок.

Антонюк А. В. Аналитические методы в задачах статистической механики, нелинейной диффузии и теории сложности дискретных временных рядов. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию математических объектов, которые возникают в связи со строгим описанием моделей статистической механики и нелинейной диффузии, а также моделей дискретных временных рядов, которые являются результатами записи сигналов кардиограмм и энцевалограмм. В работе предложен и развит метод нелинейных оценок на вариации, с помощью которого исследованы вопросы сохранения и повышения гладкости под действием полугруппы, описывающей эволюцию стохастической модели Изинга счетного числа частиц. Разработан геометрически инвариантный подход к задаче регулярности решений нелинейных стохастических диффузионных уравнений на некомпактном римановом многообразии. Доказано принцип наименьшего действия для уравнения пористой среды. Получено асимптотическое разложение решения уравнения теплопроводности в нецилиндрической области в окрестности точки каспидального типа. Доказана характеризация энтропии Колмогорова – Синая в терминах упорядоченных разбиений.

Ключевые слова: стохастическая модель Изинга, задача Коши, дифференцируемость по начальному данному, некомпактное риманово многообразие, уравнение диффузии, уравнение пористой среды, энтропия перестановок.

Antoniouk O. V. Analytic methods in statistic mechanics, nonlinear diffusion and complexity theory of time series. — Manuscript.

Doctor of Sciences thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.03 — mathematical physics. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is dedicated to the investigation of mathematical objects that arise due to the rigorous description of statistic mechanics models, nonlinear diffusion and discrete time series which are the result of recording EEG and ECG/EKG signals. In this manuscript it is proposed and developed the method of nonlinear estimates on variations, which is applied to the investigation of smoothness and raise of smoothness properties for the semigroup, associated with the Ising stochastic model of infinite number of interacting particles. The geometric invariant approach to the regularity for the solutions of nonlinear diffusion equations on noncompact Riemannian manifolds is developed. The Least Action Principle for the weighted porous media equation is proved. It is obtained the asymptotic expansion for the solution of the heat equation in non-cylindric domain with cuspidal singularity on the boundary. The Kolmogorov – Sinai entropy is characterized in terms of ordinal partitions.

Key words: stochastic Ising model, Cauchy problem, differentiability with respect to the initial data, noncompact Reiamannian manifold, diffusion equation, porous medium equation, permutation entropy.

Підписано до друку 26.04.2016. Формат $60 \times 901/16$. Папір. офс. Гарнітура "Таймс". Друк. офс. Ум. друк. арк. 1,9. Обл.-вид. арк. 1,9. Наклад 100 прим. Зам. 365.

Віддруковано у ТОВ-Видавництві "ЛОГОС".
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 201 від 27.09.2000 р.
01030, Київ-30, вул. Богдана Хмельницького, 10, тел. 235-6003