Національна Академія наук України

Інститут математики

АНТОНЮК ОЛЕКСАНДРА ВІКТОРІВНА

УДК 517.958+517.955.4+519.217.4

На правах рукопису

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧНОЇ МЕХАНІКИ, НЕЛІНІЙНОЇ ДИФУЗІЇ ТА ТЕОРІЇ СКЛАДНОСТІ ДИСКРЕТНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

01.01.03 – математична фізика

дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант

чл.-кор. НАН України

доктор фізико-математичних наук

Кочубей А.Н.

Київ – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{R}^n$	n-вимірний евклідовий простір
$\mathbb{Z}^d$	d-мірна ґратка, вузли якої задаються цілочисловим векторами
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
μ_Λ	гіббсові розподіли в скінченних об'ємах
$C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$	простір неперервно-диференційованих циліндричних функцій з компактним носієм
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)$	сигма-алгебра борелевих множин над простором $\mathbb{R}^\Lambda$
H_μ	оператор Діріхле, асоційований з гіббсовою мірою μ
$\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$	множина нескінченно диференційованих циліндричних функцій не більш ніж поліноміального росту з усіма своїми похідними
$\mathcal{W}_\Theta(\mu)$	простори L_2-диференційованих функцій нескінченної кількості змінних
$\varkappa$	параметр нелінійності задачі
$\mathbf{X}_\infty([a,b])$	простір абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій зі значенням в банаховому просторі X
$C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$	простір неперервно диференційованих функцій нескінченної кількості змінних

ВСТУП

Актуальність теми. При вивченні моделей, які виникають в задачах математичної фізики, важливим є питання строгого аналітичного опису таких моделей та розвитку аналітичних методів для їх дослідження.

Дана дисертаційна робота присвячена колу питань, пов'язаних з аналітичними властивостями еволюції системи нескінченної кількості часток, що виникають у задачах статистичної механіки, асимптотичних розкладів в околі особливої точки на межі області та варіаційних методів для задач нелінійної дифузії, а також з аналізом такого показника складності дискретного сигналу, як ентропія.

Починаючи з робіт Максвела, Больцмана та Гіббса головним завданням класичної статистичної механіки було пояснення еволюції макроскопічних систем виходячи з їх мікроскопічних характеристик та ймовірнісних припущень. Виявляється, що на макроскопічному рівні колективна поведінка таких систем істотно відрізняється від індивідуальної поведінки її атомів. Більш того, макроскопічні явища набувають колективних властивостей, що відсутні або не спостерігаються при дослідженні поведінки окремих частинок. Сучасний огляд еволюції уявлень про основні принципи класичної статистичної механіки та порівняння підходів Больцмана та Гіббса можна знайти, наприклад, в [106, 197]. Математичний апарат, пристосований до строгого опису моделей як рівноважної, так і нерівноважної статистичної механіки розроблявся в роботах радянських, згодом — українських та російських авторів, таких як М. М. Боголюбов, Е. Д. Білоколос, В. І. Герасименко, Р. Л. Добрушин, Ю. Г. Кондратьев, В. А. Малишев, Р. А. Мінлос, Л. А. Пастур, Д. Я. Петрина, С. Я. Пірогов, О. Л. Ребенко, Я. Г. Сінай, В. І. Скрипник та ін., а також зарубіжних — Х. О. Георгі, О. Ленфорда, Ж. Лебовіца, Е. Презутті, Д. Руеля, Т. Спенсера, Д. Струка, Ф. Шпітцера, Й. Фрьоліха, Т. Е. Харріса, Р. Холлі, Г. Шпона та ін.

При дослідженні багатьох фізичних моделей, зокрема, в статистичній механіці, виникають оператори нескінченної кількості змінних та пов'язані з ними дифузійні рівняння; вони становлять базу для розвитку відповідних математичних методів, що дозволяють описати еволюцію таких нескінченних систем.

Особливого значення у 20-тому столітті набув розвиток квантової теорії поля, що виявила необхідність узгодження класичних механічних уявлень про природу всесвіту з його дискретними квантовими характеристиками. У зв'язку з розвитком у 60-х роках 20-го століття математичних методів квантової теорії поля моделі статистичної механіки набувають значення також в якості наближень моделей теорії поля, на що неодноразово вказувалося в роботах Б. Саймона, Дж. Глімма, А. Джаффе та ін. (див., наприклад, [5, 26]).

Починаючи з робіт Р. Холлі, Д. Струка, Ж.-Д. Дойшеля, Х. Досса, Г. Ройера, В. Фариса, Ж. Фритца, Х. Фьолмера [90, 91, 95, 103, 104, 107, 120–129, 183] інтенсивного розвитку набуває дослідження так званої стохастичної моделі Ізінга та її більш загальних аналогів глауберової або стохастичної динаміки, що вперше була запропонована Р. Глаубером у

1963 р. [113]. Подальше дослідження та розвиток моделі глауберової або стохастичної динаміки проводилося в роботах С. Альбеверіо, О.Ю. Далецького, М. Рьокнера, Ю. Г. Кондратьева, Д. Струка, Б. Зегарлінського та ін. [32, 36, 73, 101, 114, 152, 153, 189, 190, 193–195].

У цих роботах досліджувалось досить широке коло питань, від проблеми існування, єдиності та марковських властивостей відповідних стохастичних процесів до питань гладкості перехідних ймовірностей, самоспряженості генератора та збереження і підвищення сумовності в шкалі L_p-просторів функцій зліченної кількості змінних під дією асоційованої півгрупи (так звана гіперстискаюча та ультрастискаюча властивість), а також зв'язок цих властивостей з логарифмічними нерівностями типу Соболєва.

У той же час властивостям еволюції таких систем у шкалах просторів диференційованих функцій інтегрованих за певною мірою чи в просторах з топологією супремума, не було приділено достатньої уваги. З аналітичної точки зору еволюція таких систем задається півгрупою деякого необмеженого оператора зліченної кількості змінних. Складності, що виникають при досліджені цієї задачі, пов'язані перш за все з нескінченною кількістю змінних та принциповій відсутності теорем про вкладення типу Соболєва, що не дає можливості отримати гладкі властивості відповідних півгруп, використовуючи їх L_p-гладкість. З іншого боку нерефлексивність просторів з нормою супремума приводить до необмеженості оператора відповідної півгрупи, що позбавляє можливості застосування відомих операторних методів для її дослідження. Таким чином задача про гладкі властивості півгрупи оператора, асоційованого з певною моделлю статистичної механіки, вимагає розробки принципово нових методів, що не залежали б від розмірності простору та враховували особливості задачі, які випливають з фізичних міркувань, зокрема нелінійність та необмеженість коефіцієнтів відповідних дифузійних рівнянь.

Перші шість розділів дисертації присвячені саме цьому колу питань. Зокрема, у розділах 2 – 4 розглядається півгрупа оператора в частинних похідних другого порядку зліченної кількості змінних, що пов'язаний з енергетичною формою, генерованою мірою Гіббса. В цих розділах фактично розв'язувалося питання про збереження просторів L_2-диференційованих функцій (що є нескінченновимірними аналогами просторів Соболєва) та просторів диференційованих функцій нескінченної кількості змінних з рівномірною топологією. Оскільки, як зазначалося раніше, в таких просторах стандартні операторні підходи не можуть бути застосовані, був розроблений альтернативний метод дослідження гладких властивостей, що ґрунтується на нелінійних квазістискаючих оцінках. Цей метод дозволив не тільки побудувати простори диференційованих функцій нескінченної кількості змінних, які зберігаються під дією еволюції системи, але і довести підвищення гладкості в шкалі таких просторів під дією еволюції. Особлива увага була приділена виявленню точного зв'язку між порядком нелінійності потенціалів взаємодії вихідної моделі та структурою цих просторів.

У розділах 5–6 дисертації метод нелінійних оцінок поширюється на моделі нелінійної дифузії, на некомпактному рімановому многовиді. Для цього випадку також отримані результати про збереження просторів гладких функцій та підвищення гладкості під дією відповідної півгрупи. При цьому було вирішено ряд принципових складностей, пов'язаних додатково з нелінійністю самого простору, над яким будується нелінійна дифузія.

У розділі 7 дисертації виводиться принцип найменшої дії для нелінійної дифузії, що відбувається в так званому пористому середовищі.

Починаючи з часів Лейбніца, Мопертюї та Ейлера сформувалося розуміння того, що всі фізичні явища мають описуватися виходячи з принципу найменшої дії для деякого функціонала енергії. В роботах Лагранжа та Гамільтона такий підхід був реалізований для задач класичної механіки. Проте тільки в 1966 В.І. Арнольд [69] вперше сформулював та довів принцип найменшої дії для ідеальної рідини, що описується рівнянням Ейлера. Щоб це зробити В. І. Арнольд розширив простір, над яким задається функціонал енергії, до нескінченновимірного простору — групи дифеоморфізмів, що зберігають об'єм многовиду. Виявилося, що саме такий простір дифеоморфізмів є прийнятним конфігураційним простором для задач гідродинаміки нестисненої рідини. В такому підході розв'язки рівняння Ейлера є геодезичними кривими по відношенню до деякої право-інваріантної метрики на просторі дифеоморфізмів.

Розвиваючи цю ідею, Д. Ебін та Ж. Марсден [96] показали зв'язок між простором дифеоморфізмів, що зберігають об'єм, та класичними розв'язками рівняння Нав'є–Стокса. Вони зокрема довели, що для рівняння Нав'є–Стокса при заданій кінцевій конфігурації з деякими додатковими умовами гладкості в шкалі типу Соболєва існує єдина геодезична, яка є розв'язком задачі мінімізації відповідного функціонала енергії. Взагалі кажучи існують випадки, коли такі геодезичні не є визначеними (див., наприклад, [31]). Головна складність полягає в тому, що топологія, індукована функціоналом енергії, є занадто сильною для того, щоб отримати регулярність відповідних відображень. З метою уникнути цієї складності

Я. Бреньє [78] ввів поняття узагальненого розв'язку для принципу найменшої. Такі розв'язки є ймовірнісними мірами, визначеними на множині лагранжевих траєкторій. При цьому класичні розв'язки також будуть і узагальненими розв'язками задачі, проте можуть існувати також і інші розв'язки. В подальшому цей підхід розвивався в роботах М. Арнадона, А. Б. Крузейро, Т. Накагомі, Ф. Ціпріано, К. Ясуе та ін. [68, 81, 175, 198]. Також необхідно згадати праці [83, 102] та книгу Ю. Є. Гліклiха [115], в яких розвивались інші стохастичні підходи до питання характеризації розв'язків рівнянь Нав'є–Стокса.

Розвиваючи ці ідеї, у розділі 7 дисертації доводиться існування узагальнених потоків, які реалізують мінімум функціонала енергії для узагальненого рівняння пористого середовища. Це рівняння вперше виникло при дослідженні газових потоків, що проходять через пористі породи (див., наприклад, [174, Глава 3.4]), проте також описує інші процеси, що виникають у застосуваннях, зокрема, при моделюванні дифузії електронно-іонної плазми [162], а також для опису динаміки біологічної популяції, чия мобільність залежить від щільності (див. [118]). Зауважимо, що у частинному випадку, коли $q = 2$, узагальнене рівняння пористого середовища співпадає з рівнянням Нав'є–Стокса.

В останні роки у зв'язку із задачами, що виникають в фізиці, хімії та біології, пожвавився інтерес до параболічних задач з сингулярною межею, що відповідають рівнянню дифузії з деяким точковим джерелом, розташованим на межі області. Такі задачі приводять до рівняння типу теплопровідності в нециліндричній, змінній за часом, області, на межі якої розташована особлива точка типу каспу.

Вперше існування класичного розв'язку для рівняння теплопровідності в нециліндричній області було досліджено М. Жевре [112], який розглядав області спеціального вигляду з спеціальними умовами гладкості межі області з показником Гельдера більшим, ніж $1/2$. Пізніше було з'ясовано, що навіть за умов достатньої гладкості коефіцієнтів рівняння та межі області для деяких точок межі області може порушуватися умова регулярності, тобто порушуватися однозначна розв'язність відповідної крайової задачі. Для параболічної крайової задачі в гладкій області точка межі може не бути регулярною, якщо ця точка є характеристичною точкою задачі, тобто дотична до межі в даній точці є ортогональною до вісі t. І.Г. Петровський в роботі [180] знайшов необхідні і достатні умови на поведінку межі області в околі характеристичної точки, щоб задача в околі цієї точки була коректно поставленою. Ці умови характеризуються порядком дотику в цій точці характеристики рівняння до межі області. При цьому критичний порядок дотику залежить від порядку головної частини параболічного рівняння. Такі задачі досить ретельно були досліджені в 60-ті роки 20 століття (див., наприклад, роботи [147, 151, 171, 172, 178, 188] та ін.) Якщо ж порядок дотику є більшим за порядок оператора, то такі задачі можуть бути розглянуті в межах аналізу вироджених параболічних рівнянь.

В. О. Кондратьєв в роботі [151] розглянув граничну задачу для параболічного рівняння в області, в якій порядок дотику характеристики до межі області співпадає з порядком рівняння, що відповідає так званому випадку конічних сингулярностей. Крім того він запропонував підхід для отримання асимптотичного розкладу розв'язку відповідної граничної задачі в околі такої особливої точки.

Останнім часом у роботах В. Н. Арефьєва, Л. А. Багірова, В. О. Галактіонова, В. Г. Мазьї та ін. [66, 67, 110, 111, 145, 181] спостерігається нова хвиля інтересу до задач з особливостями типу каспу у зв'язку з розвитком аналізу псевдодиференціальних операторів з повільно змінним символом, а також застосуваннями нелінійного аналізу до задач, що виникають в математичній фізиці при дослідженні дифузії з джерелом на межі області. Зокрема в роботах [66, 67] розглядалася задача теплопровідності в областях, явно заданих за допомогою квадратичної функції. При цьому методи, що покладені в основу отримання асимптотичних розкладів, істотним чином спираються на явний спосіб задання області. В той же час роботи [110,111] присвячені більш класичним питанням регулярності точок межі області для рівнянь в частинних похідних. Проте в загальній постановці задачу побудови асимптотичних розкладів для параболічних рівнянь в околі каспідальної точки ще не вирішено.

У розділі 8 дисертації досліджується питання щодо побудови асимптотичних розкладів для розв'язків рівняння теплопровідності в нециліндричній області, заданій степеневою функцією з довільним показником. При цьому основним питанням є обґрунтування асимптотичності такого розкладу, що вимагає адекватного підбору відповідних просторів. Виявляється, що природнім для такої задачі є простори типу Слободецького [29], параметри в яких залежать не тільки від порядку рівняння, але і від порядку дотику характеристики до межі області, що виявляє внутрішній зв'язок між аналітичними та геометричними властивостями задачі.

Ще одним класом досліджуваних у дисертації моделей, є моделі, пов'язані з розвитком математичних методів аналізу даних, що виникають в медицині та інших областях знань, і стосуються властивостей процесів, що відбуваються в живих організмах. Так з точки зору діагностичного аналізу енцефалограм та кардіограм особливого значення набуває дослідження дискретних часових рядів, що інтерпретуються як наближений опис таких сигналів. При цьому діагностичного значення набувають складність, варіативність, нерегулярність та інші характеристики таких процесів. Одним з таких діагностичних показників складності сигналу, отриманого за допомогою енцефалографа або кардіографа, вважається ентропія, зокрема ентропія Колмогорова–Сіная.

У 2002 для сигналів, що мають форму нерегулярних гострих зубців різної амплітуди та частоти, К. Бандт і Б. Помпе [71] запропонували означення так званої *ентропії перестановок*, обчислення якої є добре пристосованим до такого типу об'єктів і вимагає перебору значно меншої кількості множин, ніж класичне означення, що з точки зору застосування комп'ютерних діагностичних методів є дуже важливим. У зв'язку з цим останнім часом зростає інтерес до питання про зв'язок між цими двома означеннями ентропії та умов, за яких вони співпадають (див., наприклад, [38, 39]).

На сьогодні відомо [70], що ентропія перестановок та ентропія Колмогорова–Сіная співпадають для одновимірних динамічних систем, що задаються кусково-монотонним відображенням, проте в більш загальному випадку це питання залишається відкритим.

У роботах К. Келлера та його учнів [141–144] в останні роки розвивається підхід до характеризації ентропії Колмогорова–Сіная для дискретних часових рядів на основі так званих впорядкованих розбиттів простору станів динамічних систем, що будуються над простором випадкових процесів. Такі розбиття будуються на основі деякого відношення порядку, що вводиться в просторі значень випадкової величини та її образів під дією відображення, що задає динамічну систему. В такому підході випадкова величина та її образи інтерпретуються як вимірювання спостережуваних величин. У цитованих роботах однією з головних умов є принцип розділення точок простору станів під дією відображення динамічної системи. В розділі 9 дисертації ця умова розділення точок послаблюється і надається характеризація ентропії Колмогорова–Сіная шляхом звуження σ-алгебри множин, в сенсі якої задається відповідне розбиття простору станів відповідної динамічної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у відділі нелінійного аналізу згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідних тем: "Функціональні і асимптотичні методи дослідження нелінійних диференціальних рівнянь" 1996—2000 р., номер державної реєстрації 0198U003052; "Розробка методів нелінійного функціонального аналізу та їх застосувань до нелінійних проблем математичної фізики" 2001—2005 р., номер державної реєстрації 0101U000623; "Методи нелінійного аналізу та їх застосування до теорії диференціальних рівнянь і задач математичної фізики" 2006—2010 р., номер державної реєстрації 0106U000513; "Нелінійні, неархімедові та спектральні задачі теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики" 2011—2015, номер державної реєстрації 0111U001011.

Частина досліджень проводилася в рамках міжнародного проекту за 7-ою Рамковою програмою Європейського Союзу "Marie Curie Actions–International Research Staff Exchange Scheme (IRSES) FP7-People-2011-

IRSES”, проект № 295164 (2012 – 2016), проекту Німецького дослідницького товариства (DFG) “Nichtlineare Differentialgleichungen mit kleinem Parameter” (2010), проекту “Asymptotic Properties of Solutions to Parabolic Equations in a Bounded Domain” у рамках стипендії Фонду ім. Александра фон Гумбольдта (2012).

Мета і задачі дослідження. Отримати достатні умови регулярності (гладкості) в сенсі інтегровної по мірі та рівномірної топологій, заданих на просторах нескінченної кількості змінних, для еволюції системи зліченної кількості часток. Отримати умови регулярності нелінійного потоку на некомпактному рімановому многовиді. Довести принцип максимуму для рівняння пористого середовища та отримати асимптотичні розклади розв'язків рівняння теплопровідності в околі особливої точки типу каспу на межі області. Отримати характеризацію показника складності дискретного часового рядку — ентропії Колмогорова–Сіная.

Об'єкт дослідження. Математичні моделі та поняття, що виникають у статистичній механіці, нелінійній дифузії та теорії складності дискретних часових рядів.

Предмет дослідження. Півгрупи операторів та асоційовані з ними нелінійні потоки в нескінченно-вимірних просторах та на некомпактних ріманових многовидах. Лінійні та нелінійні параболічні рівняння та пов'язані з ними функціонали енергії та асимптотичні розклади. Ентропія Колмогорова–Сіная.

Методи дослідження. Теорія півгруп та необмежених операторів в нескінченновимірних банахових просторах, методи нелінійного аналізу, зокрема, властивості монотонних відображень, методи асимптотичного та варіаційного аналізу, диференціальної геометрії, теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертаційного дослідження і виносяться на захисти, є такими:

– доведено теореми про регулярність еволюції системи нескінченної кількості часток у шкалах просторів у середньо квадратичному диференційованих функцій нескінченної кількості змінних;

– розроблено схему дослідження регулярності будь-якого порядку для нелінійних рівнянь нескінченної кількості змінних з неліпшицевими коефіцієнтами, що спирається на нові класи нелінійних оцінок на варіації;

– на основі цього доведено збереження просторів гладких функцій під дією еволюції системи нескінченної кількості часток та досліджено вплив характеру нелінійності взаємодії між частками на структуру топологій в цих просторах;

– розроблено геометрично-інваріантний підхід до регулярності розв'язків рівнянь дифузії на ріманових многовидах за початковою умовою, побудовано відповідний апарат тензорного числення;

– для випадку некомпактного ріманового многовиду знайдено аналог умови монотонності коефіцієнтів рівняння та виділено вплив тензору кривини на регулярність високого порядку за початковою умовою для нелінійного потоку на многовиді;

– отримано достатні умови відсутності вибуху для розв'язків нелінійних рівнянь дифузії на некомпактному рімановому многовиді;

– виявлено ефект наявності щілини між топологіями обмеженості і неперервності в нелінійних задачах регулярності високого порядку над нескінченновимірним простором;

– доведено несингулярне інтегрування частинами для не глобально ліпшицевої дифузії, на основі якого та методу нелінійних оцінок отримано теореми про підвищення гладкості під дією еволюції нескінченної системи взаємодіючих часток;
– отримано умови підвищення гладкості під дією півгрупи, пов'язаної з нелінійною дифузією на некомпактному рімановому многовиді;
– доведено принцип найменшої дії для нелінійного рівняння, що описує дифузію у пористому середовищі, та отримано достатні умови існування узагальнених розв'язків відповідної варіаційної задачі;
– отримано формальні асимптотичні розклади для рівняння теплопровідності в нециліндричній області з особливістю типу каспу на межі області та доведено асимптотичний характер таких розкладів у спеціальних просторах, що залежать від характеру дотику межі області в околі особливої точки;
– доведено характеризацію ентропії Колмогорова–Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані для подальшої розробки якісно нових методів дослідження нелінійних рівнянь в нескінченновимірних банахових просторах та на нескінченновимірних многовидах. Результати розділу 7 розширюють спосіб визначення розв'язку рівняння, що описує дифузію у пористому середовищі. Це дає можливість розвинути альтернативні методи пошуку розв'язків таких рівнянь (у тому числі не класичних). Результати розділу 8 дають новий підхід до побудови асимптотичних розкладів для рівнянь дифузії, які описують процеси з точковим джерелом на межі області, що дає можливість отримати якісні та кількісні характеристики наближень таких розв'язків. Результати останнього розділу можуть бути корисними з точки зору розвитку комп'ютерних діагностичних методів на основі аналізу складності сигналів, що задаються дискретними часовими рядами з додатковими характеристиками, характерними для енцефалограм та кардіограм.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження та постановка задачі у розділах 2–4 проводились дисертантом спільно з О. Вал. Антонюком. Постановка задач щодо інших розділів дисертації проводилась спільно з М. Арнадоном, А. Б. Крузейро, К. Келером, С. І. Максименко та М. М. Тархановим. З результатів, надрукованих у спільних з співавторами статтях, в основну частину дисертації ввійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком результатів пунктів 3.2, 3.6, 3.8, 4.4, 5.1, 5.6, 6.3, 7.3, де вклад співавторів є рівноцінним. Результати, викладені в дисертації спираються на монографію [1] та 23 статті [2, 41–47, 49, 50, 52–54, 56–65]. Усі наведені у дисертації результати отримані автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на:

- засіданні Вченої ради Інституту математики НАН України 04 березня 2014 р.;

- Київському міському семінарі з нелінійного аналізу при Інституті математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України І. В. Скрипник);

- Київському семінарі з функціонального аналізу при Інституті математики НАН України (керівник семінару член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук);

- Міжнародній конференції “Münchener Stochastic Tage”, Німеччина, 24 – 27 березня, 1998;

- International Conference “Nonlinear Partial Differential Equations”, dedicated to J.P.Schauder, Ukraine, Lviv, August 23–29, 1999;

- “Mini-Workshop on Stochastic Analysis”, Friedrich Schilller University of Jena, Faculty of Mathematics and Informatics, Institute of Stochastics, January 18–19, 2002;

- Міжнародній конференції “Nonlinear Partial differential equations”, Україна, Алушта, 15–21 вересня, 2003;

- Міжнародній конференції “Recent Trends in Kinetic Theory and its Applications”, Україна, Київ, 11–15 травня, 2004;

- Міжнародній конференції “Nonlinear Partial Differential Equations”, Україна, Алушта, 17–23 вересня, 2005 р.;

- Міжнародній конференції “Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications”, Україна, Львів, 28–30 серпня, 2005 р.;

- Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька, Україна, Дрогобич, 24–28 вересня 2007 р.;

- Міжнародній конференції “Nonlinear Partial Differential Equations”, присвяченій пам’яті І. В. Скрипника, Ялта, 10–15 вересня 2007 р.;

- “33rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications”, Berlin, 27–31 July, 2009;

- Conference ProbaGeo, France, Poitier/Futuroscope, 11–13 June, 2012;

- Міжнародній конференції “Third Conference Mathematics for Life Sciences”, Рівне, 15–19 вересня, 2015 р.

Публікації. Основні результати дисертації оприлюднені в монографії [1] та 23-х статтях [2, 41–44, 46, 47, 49, 50, 52–54, 56–65], три з яких опубліковані без співавторів.

Структура дисертації. Дисертація складається з вступу, дев'яти розділів, семи додатків, висновків та списку використаних джерел. Перелік використаних джерел налічує [203] посилання. Загальний обсяг дисертації складає 413 стор. з них 318 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** надано огляд робіт та підходів, пов'язаних з темою дисертації, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано основну мету досліджень та подано стислу анотацію результатів.

У **першому розділі** подається огляд літератури за темою дисертації та наводяться базові поняття та теореми, що використовуються в наступних розділах. Тут, зокрема, вводиться поняття гіббсової міри, що описує модель нескінченної кількості взаємодіючих часток, та вводиться поняття оператора енергії та еволюції такої системи.

Нехай $\mathbb{Z}^d$ позначає d-мірну ґратку, вузли якої задаються цілочисловим векторами $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{Z}$. З кожним таким вузлом пов'язується відповідний одновимірний простір $\mathbb{R}^1$, який інтерпретується як спіновий простір k-ої частки. Під *гіббсівською мірою з локальними розподілами* $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d}$ розуміють міру μ на тихонівській σ-алгебрі $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d}$ таку, що

$$\forall\, f \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \forall\, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d: \qquad \mu(\mu^{\cdot}_{\Lambda}(f)) = \mu(f),$$

де використано позначення $\mu(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} f\, d\mu$. Під тихонівською σ-алгеброю розуміється мінімальна σ-алгебра, генерована σ-алгеброю циліндричних множин $\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)$ — борелева σ-алгебра на $\mathbb{R}^\Lambda = \underset{k\in\Lambda}{\times}\mathbb{R}^1$. При цьому під *гіббсовим розподілом в скінченному об'ємі* $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ *з фіксованими граничними умовами* $x_{\Lambda^c} = \{x_k\}_{k\in\Lambda^c}$, $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d\setminus\Lambda$ розуміється міра μ_Λ, яка задається співвідношенням

$$\mu_\Lambda(dx_\Lambda|x_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(x_{\Lambda^c})}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod_{k\in\Lambda}dx_k$$

з нормуючим множником $Z_\Lambda(x_{\Lambda^c}) = \int\limits_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod\limits_{k\in\Lambda}dx_k$. dx_k — міра Лебега на просторі $\mathbb{R}^1$, асоційованому з вузлом $k\in\mathbb{Z}^d$. В роботі розглядаються так звані *помірні* гіббсові міри, тобто для яких $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}x_k^{2n}d\mu(x)$ є скінченною величиною для будь-якого $n\in\mathbb{N}$. *Потенціалом,* гіббсової системи називають функцію $U_\Lambda = \sum\limits_{k\in\Lambda}\Phi(x_k) + \sum\limits_{k\in\Lambda}(Bx)_k x_k$, де функція $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ зростає на нескінченності разом з своїми похідними не швидше полінома, B — скінченно-діагональна матриця. Такі потенціали називають *потенціалами скінченного радіусу взаємодії.*

Основним об'єктом дослідження є півгрупа *оператора енергії гіббсової системи* H_μ, який будується як замикання диференціального виразу

$$H_\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Big\{-\Delta_k + \big[F(x_k) + \sum_{j\,:\,|j-k|\le r_0}b(j-k)x_j\big]\frac{\partial}{\partial x^k}\Big\},$$

визначеного на просторі $C^n_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ циліндричних n-раз диференційованих функцій з компактним носієм. Сенс такому оператору надається в рамках теорії форм Діріхле [74, 89], розвиненої в роботах С. Альбеверіо, Ю. Г. Контратьєва, Ш. Кусуоки, Ш. Ма, М. Рьокнера, М. Фукушими, Р. Хоег-Крона, Л. Штрайта та ін. [33–35, 37, 79, 108, 109, 130, 156, 165]. Відповідна півгрупа інтерпретується як *оператор еволюції* нескінченної системи взаємодіючих часток. Вище $F(x_k) = \partial_k\Phi(x_k)$.

У дисертації припускається, що функція $F(x)$ є гладкою симетричною монотонно зростаючою функцією з умовою $F(0) = 0$, що зростає на нескінченності не швидше полінома разом з усіма своїми похідними

$$\exists\ \varkappa > 0\colon\ \forall j \geq 0\ \exists\ C_j\colon\ |F^{(j)}(x) - F^{(j)}(z)| \leq K_j|x-z|(1+|x|+|z|)^{\varkappa}. \quad (1)$$

Стала $\varkappa > 1$ називається *параметром нелінійності* системи і грає ключову роль у формулюванні основних теорем.

Другий розділ дисертації присвячено гладким властивостям еволюції гіббсової системи в нескінченновимірних аналогах просторів Соболєва $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$-диференційованих функцій. Основний результат цього розділу полягає в побудові просторів $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, що зберігаються під дією півгрупи, генерованої оператором енергії H_μ. Це означає певну гладкість еволюції гіббсової системи.

Простори $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ будуються як замикання множини $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ (нескінченно диференційованих циліндричних функцій не більш ніж поліноміального росту з усіма своїми похідними) у нормі

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \sum_{(p,\mathbf{C})\in\Theta} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)\, \langle \mathbf{C}\, \partial^m f, \partial^m f\rangle\, d\mu(x),$$

де $z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(1+x_k^2)$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, $\{a_k\} \in \mathbb{P}$. Скінченний набір ваг $\Theta = \{(p, \mathbf{C})\}$ складається з монотонно зростаючої функції $p(z)$ не більш ніж поліноміального росту разом з другою похідною та матричної мультиваги $\mathbf{C} = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m$, $C^j \in \mathbb{P}$, що задає скалярний добуток

$$\langle \mathbf{C}\, \partial^m f, \partial^m f\rangle = \sum_{k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\cdots C^m_{k_m} |\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_m} f|^2,$$

$\mathbb{P}$ позначає множину послідовностей $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, таких, що $c_k > 0$ і $\delta_c = \sup\limits_{|k-j|=1} |c_k/c_j| < \infty$. До набору Θ також входить вага $(p_0, \varnothing)$, яка відповідає члену $\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p_0(z)|f(x)|^2\, d\mu(x)$. (Означення 2.2.)

Основний результат розділу 2 полягає в наступній теоремі.

Теорема 2.10. Нехай μ — гіббсова міра помірного росту з скінченним радіусом взаємодії, і виконана умова (1). Нехай, крім того, набір ваг Θ задовольняє наступну умову ієрархії: для будь-яких $(p, \mathbf{C}\,) \in \Theta$ та пари $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i < j$ існує вага $(\widetilde{p}, \widetilde{\mathbf{C}}\,) \in \Theta$, яка оцінює зверху вагу $(z^{\varkappa+1}p(z), \widehat{\mathbf{C}}^{\,ij})$, тобто існує така стала K, що

$$\begin{aligned} & z^{\varkappa+1}p(z) \leq K \cdot \widetilde{p}(z), \;\; z \geq 1, \\ & \{\widehat{\mathbf{C}}^{\,ij}\}^{\ell} \leq K\,\widetilde{\mathbf{C}}^{\,\ell}, \;\;\; \ell = 1, \ldots, m-1, \end{aligned} \tag{2}$$

де нерівність (2) розуміється як покоординатна нерівність між векторами з $\mathbb{P}$. Матриця $\{\widehat{\mathbf{C}}^{\,ij}\}_{i<j\in\{1,\ldots,m\}}$ будується по матриці $\mathbf{C}$ за правилом $\{\widehat{\mathbf{C}}^{\,ij}\} = C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes \underset{\uparrow j}{(A)^{-(\varkappa+1)}} C^i C^j \otimes \ldots \otimes C^m$. Скорочення $C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes C^s$ означає, що у тензорному добутку i-тий множник опущений, а $C^1 \otimes \ldots \otimes \underset{\uparrow j}{B} \otimes \ldots \otimes C^s$ означає, що на j-тому місці у тензорному добутку стоїть матриця B. Матриця A є діагональною з елементами $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$.

Тоді замикання оператора $\widetilde{H_\mu}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ генерує сильно неперервну квазістискаючу півгрупу у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, і виконана рівномірна оцінка:

$$\exists \;\; M_\Theta: \;\; \forall\, Q \subseteq \mathbb{Z}^d: \qquad \|\exp(-t\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \leq e^{M_\Theta t}.$$

Принципова складність, що може виникати у випадку істотно нелінійних зростаючих коефіцієнтів оператора енергії (що є природним з точки зору фізичних застосувань), полягає в тому, що відповідна півгрупа у просторі з рівномірною топологією, може не бути сильно неперервною. Відповідний приклад наведено на початку розділу 3. У такій ситуації застосування стандартної теорії операторів та теорії сильно неперервних півгруп стає неможливим.

У **розділі 3** дисертації розробляється підхід, який дає можливість дослідити гладкі властивості півгрупи, генерованої оператором H_μ, в просторах функцій нескінченної кількості змінних з рівномірною топологією на похідні будь-якого порядку. Це стає можливим в першу чергу завдяки можливості пов'язати півгрупу, генеровану оператором H_μ, з фелерівською півгрупою, асоційованою з нелінійним стохастичним диференціальним рівнянням в нескінченно-вимірному просторі, за формулою:

$$(e^{-tH_\mu}f)(x) = \mathbf{E}f(\xi_t^x), \tag{3}$$

де $\xi_t^x = \{\xi_{k,t}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ є розв'язком нелінійного стохастичного диференціального рівняння

$$\xi_{k,t} = x_k + W_{k,t} - \frac{1}{2}\int_0^t \{F(\xi_{k,s}) + \sum_{j\,:\,|j-k|\le r_0} b(j-k)\xi_{j,s}\}ds. \tag{4}$$

Тут $W_{k,t}$ позначають копії незалежних одновимірних вінерівських процесів, $\mathbf{E}$ — середнє по циліндричній мірі Вінера $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$, заданій на циліндричному просторі $\Omega_{\mathbb{Z}^d} = \underset{k\in\mathbb{Z}^d}{\times}\Omega_k$, $\Omega_k = C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $k\in\mathbb{Z}^d$ (див., наприклад, [87, 88]). Такого роду стохастичні рівняння вивчалися в роботах Ю.Л. Далецького, Дж. Да Прато, Ж.-Д. Дойчеля, К. Елворсі, Я. Зябчика, Н.В. Крилова, Е. Парду, Б.Л. Розовського, Д. Струка та ін. [10, 16, 25, 80, 86, 91, 95, 98, 179, 182] на предмет існування та єдиності їхнього розв'язку. Проте слід зазначити, що питання про збереження просторів диференційованих функцій під дією півгрупи, заданої за допомогою рівності (3), з врахуванням представлення

$$\partial^{(m)}P_tf(x) = \sum_{\ell=1}^{m}\ \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1,\dots,m\}} \mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)}f(\xi_t^x),\xi_{\beta_1}\dots\xi_{\beta_\ell}\,\rangle, \tag{5}$$

для похідних півгрупи $P_tf = e^{-tH_\mu}f$, вимагає більш детального дослідження властивостей розв'язку системи рівнянь (4), зокрема, на предмет його неперервності та диференційованості за початковою умовою. Саме цим питанням присвячена частина розділу 3. Тут досліджуються варіації ξ_β процесу ξ_t^x за початковим даним x з метою отримати кількісні оцінки на їх поведінку в певних глобальних нормах.

Для вирішення цього кола задач у розділі 3 дисертації запропоновано підхід нелінійних оцінок на варіації ξ_τ, $\tau = j_1, \ldots, j_n$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$ який дозволяє не тільки отримати кількісні оцінки на поведінку розв'язків варіаційних рівнянь, але і підказати спосіб підбору топологій в глобальних просторах диференційованих функцій, які зберігаються під дією півгрупи (3). При цьому варіація $\xi_\tau = \{\xi_{k,\tau}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ інтерпретується як похідна високого порядку процесу $\xi_t^{x^0} =: \xi^0$ за початковою умовою $x^0 = \{x_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$:

$$\xi_{k,\tau} = \partial_\tau \xi_k^0(t, x^0) = \frac{\partial^{|\tau|}\xi_k^0(t, x^0)}{\partial x_{j_n}^0 \ldots \partial x_{j_1}^0}, \quad \tau = \{j_1, \ldots, j_n\},$$

тобто задовольняє рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_{k,\tau}}{dt} = -F'(\xi_k^0)\xi_{k,\tau} - \displaystyle\sum_{j:\ |j-k|\le r_0} b(k-j)\xi_{j,\tau} - \varphi_{k,\tau}; \\ \xi_{k,\tau}(0) = x_{k,\tau}. \end{cases} \tag{6}$$

Головна частина рівняння (6) нелінійним чином залежить від розв'язку вихідного рівняння ξ^0, а неоднорідна частина $\varphi_{k,\tau}$ задається формулою:

$$\varphi_{k,\tau}(\xi^0, \xi_\gamma, \gamma \subset \tau, \gamma \ne \tau) = \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ \ell\ge 2} F^{(\ell)}(\xi^0)\xi_{k,\gamma_1}\ldots\xi_{k,\gamma_\ell}. \tag{7}$$

Сумування в (7) ведеться по всім можливим підрозбиттям множини $\tau = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$ на підмножини, що не перетинаються $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \subset \tau$, $|\gamma_1| + \cdots + |\gamma_\ell| = |\tau|$, $\ell \ge 2$, $|\gamma_i| \ge 1$.

Система (6) є неавтономною системою диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, які нелінійним чином залежать від розв'язку ξ^0 вихідного рівняння (4). Крім того, неавтономна частина системи рівнянь (6) нелінійним та мультиплікативним чином залежить від варіацій менших порядків і має місце певна “пропорційність” між її лівою та правою частинами, яку неформально можна виразити наступним чином: $\|\xi_t^{(1)}\| \sim \sqrt[n]{\|\xi_t^{(n)}\|}$. Таке спостереження мотивує ввести нелінійний вираз, що відображає цю симетрію:

$$\rho_\tau(\xi;t) = \mathbf{E}\sum_{\ell=1}^{n}\{p_\ell(z_t)\sum_{\gamma\subseteq\tau,\ |\gamma|=\ell}\|\xi_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\},$$

де $\tau = \{j_1,\ldots,j_n\},\ j_i \in \mathbb{Z}^d$, p_ℓ є поліноміальними функціями, що залежать від $z_t = \|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$ та $m_\gamma = m_1/|\gamma|$, де $|\gamma|$ позначає число точок множини $\gamma \subset \mathbb{Z}^d$.

Теорема 3.7. (Нелінійна оцінка на варіації) Нехай F задовольняє умову (1) і процеси $\xi^0,\ \xi_\tau$ є сильними розв’язками рівнянь (4), (6) з початковими умовами $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ та $x_\gamma \in \ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)$, $\gamma \subseteq \tau$ для $d_k \geq a_k^{-\frac{\varkappa}{2}m_1}$, $a, d \in \mathbb{P}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$. Нехай $m_1 \geq |\tau|$ та $\forall\,\gamma \subseteq \tau$, $m_\gamma = m_1/|\gamma|$. Припустимо, що

1. для векторів $\{c_\gamma\}_{\gamma\subseteq\tau}$ виконана наступна умова: $\forall\,\tau = \{j_1,\ldots,j_n\},\ j_i \in \mathbb{Z}^d$ та для довільного розбиття множини τ на непусті підмножини $\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell,\ \ell \geq 2$, що не перетинаються, існує така стала $R_{\tau,\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell}$, що
$$\forall\,k \in \mathbb{Z}^d: \qquad [c_{k,\tau}]^{|\tau|}a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leq R_{\tau,\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell}[c_{k,\gamma_1}]^{|\gamma_1|}\ldots[c_{k,\gamma_\ell}]^{|\gamma_\ell|}.$$
2. монотонно зростаючі функції не більше ніж поліноміального росту $p_i(z),\ i = 1,\ldots,n$ задовольняють ієрархію: $\exists\ K_p\ \forall\,j = 2,\ldots,n$, $\forall\,i_1,\ldots,i_\ell$: $i_1+\cdots+i_\ell = j$, $\ell \geq 2$:
$$[p_j(z)]^j(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leq K_p[p_{i_1}(z)]^{i_1}\ldots[p_{i_\ell}(z)]^{i_\ell}.$$

Тоді існує така стала $M \in \mathbb{R}^1$, що

$$\rho_\tau(\xi;t) \leq e^{Mt}\rho_\tau(\xi;0). \tag{8}$$

Сильний розв'язок рівняння (6) (означення 3.6) розуміється в стандартному сенсі теорії Като–Кьомури (див., наприклад, [135]).

Основним результатом розділу 3 є теорема 3.19 про збереження просторів диференційованих функцій $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$, що визначається наступним чином.

Означення 3.17. Нехай $r \geq 0$, $n \geq 1$ і $\Theta = \Theta^1 \cup \cdots \cup \Theta^n$ — деякий набір ваг. Функція f належить простору неперервно диференційованих функцій $C_{\Theta,r}$, якщо $f \in \mathrm{Lip}_r$ і виконані наступні припущення:

1. Функція f має частинні похідні $\{\partial^{(1)}f, \ldots, \partial^{(n)}f\}$ до порядку n $\partial_\tau f(x) = \{\partial^{(m)}f(x)\}_{j_1 \ldots j_m}$ $\tau = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$, $m = 1, \ldots, n$, які є неперервними, і для довільної $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ мають місце інтегральні співвідношення:

$$f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_k f(x^0 + h(s)) h_k'(s)\, ds,$$

$$\partial_\tau f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\tau \cup \{k\}} f(x^0 + h(s)) h_k'(s)\, ds, \ |\tau| \leq n-1.$$

2. Норма є скінченною:

$$\|f\|_{C_{\Theta,r}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}_r} + \max_{m=1,\ldots,n} \|\partial^{(m)} f\|_{\Theta^m} < \infty,$$

де

$$\|u^{(m)}\|_{\Theta^m} = \sup_{x \in \ell_2(a)} \max_{(p_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta^m} \frac{\|u^{(m)}(x)\|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(\|x\|^2_{\ell_2(a)})},$$

$$\|u^{(m)}(x)\|^2_{\mathcal{G}^m} = \sum_{\tau = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset \mathbb{Z}^d} G^1_{j_1} \ldots G^m_{j_m} |u_\tau(x)|^2$$

для $\mathcal{G}^m = G^1 \otimes \cdots \otimes G^m$, $\mathbf{X}_\infty([a,b]) = \bigcap_{p \geq 1, c \in \mathbb{P}} AC_\infty([a,b], \ell_p(c))$, $AC_\infty([a,b], X) = \{h \in C([a,b], X) \colon \exists \ \ h' \in L_\infty([a,b], X)\}$ — простір абсолютно неперервних функцій зі значеннями в деякому банаховому просторі X. Через $\mathrm{Lip}_r = \mathrm{Lip}_r(\ell_m(a))$, $m \geq 2$, $r \geq 0$ позначається простір неперервних функцій над $\ell_m(a)$, оснащений нормою

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{Lip}_r} &= \sup_{x\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|_{\ell_m(a)})^{r+1}} + \\ &+ \sup_{x,y\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_{\ell_m(a)}(1+\|x\|_{\ell_m(a)}+\|y\|_{\ell_m(a)})^r}.\end{aligned}$$

Основний результат цього розділу полягає у наступній теоремі.

Теорема 3.19. Нехай F задовольняє умову (1), і набір ваг $\Theta = \Theta^1 \cup \dots \cup \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$ є *квазі-стискаючим з параметром* $\varkappa$, тобто для будь-якого $m = 2, \dots, n$ та пари $(p, \mathcal{G}) \in \Theta^m$, для довільних $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, існує така вага $(\widetilde{p}, \widetilde{\mathcal{G}}) \in \Theta^{m-1}$, що

$$\begin{aligned}&\exists\ K\colon\ \forall\, z \in \mathbb{R}^1_+\ \ (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}}\widetilde{p}(z) \le Kp(z),\\ &(\widehat{\mathcal{G}}^{\{i,j\}})^\ell \le K\,\widetilde{G}^\ell,\quad \ell = 1, \dots, m-1.\end{aligned}$$

Тоді півгрупа P_t (3) зберігає простори $C_{\Theta,r}$, тобто $\forall\, t \ge 0$ $P_t\colon C_{\Theta,r} \to C_{\Theta,r}$, і $\exists\ K, M\ \ \forall\, f \in C_{\Theta,r}\colon \|P_t f\,\|_{C_{\Theta,r}} \le Ke^{Mt}\,\|f\,\|_{C_{\Theta,r}}$.

Доведення цієї теореми спирається на наслідок нелінійної оцінки (8) та Теореми 3.12, 3.13, 3.15 та 3.16, в яких послідовно доводиться розв'язність варіаційних рівнянь та їх неперервна залежність і диференційованість за початковою умовою. Крім того, в цьому ж розділі доведена теорема 3.21 про щілину між топологіями неперервності та обмеженості похідних у нелінійному випадку та теорема про регулярні властивості півгрупи (3) у випадку змінного дифузійного коефіцієнта (теорема 3.30).

У **розділі** 4 дисертації досліджуються подальші питання регулярності еволюції оператора H_μ, тобто півгрупи (3), зокрема на предмет підвищення гладкості під її дією. Основною в даному розділі є теорема 4.7.

Теорема 4.7. Нехай виконані умови теореми 3.19 і набір ваг Θ є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa$. Позначимо $\mathcal{D}_\Theta$ замикання в нормі $C_{\Theta,r}$

функцій $f \in \mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ таких, що $\|f\|_{C_{\Theta,r}} < \infty$. Тоді для будь-якого $m \geq 1$, $f \in \mathcal{D}_\Theta$ та $t > 0$ маємо $P_t f \in C_{(\Theta)^m,r}$, і існують такі сталі $K_{\Theta,m},\ M_{\Theta,m}$, що виконана оцінка

$$\|P_t f\|_{C_{(\Theta)^m,r}} \leq \frac{1}{t^{m/2}} K_{\Theta,m} e^{M_{\Theta,m}t} \|f\|_{C_{\Theta,r}}, \quad t > 0.$$

Набір $(\Theta)^m = \bigcup\limits_{i=0}^{m} T^i_\varkappa \Theta$, будується по $\Theta = \{(p, G^1 \otimes \cdots \otimes G^s)\},$ де $(\Theta)^0 = \Theta$, $T_\varkappa \Theta = \{\big((1+z)^{\varkappa+1} p(z),\ G^1 \otimes \dots G^j \otimes A^{\varkappa+2} \otimes G^{j+1} \otimes \dots G^s\big), j = 0, \dots, s\}$.

Доведення цієї теореми спирається на спеціальну формулу інтегрування частинами для вінерівських функціоналів (теорема 4.3). Це дозволяє розвинути метод нелінійних оцінок і застосувати його для дослідження питання підвищення гладкості.

Теорема 4.3. Нехай виконані попередні умови і $\xi^0(t, x^0)$ є узагальненим розв'язком рівняння (4) з початковим даним $x^0 \in \ell_2(a)$. Для деякого вектора $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ з скінченною кількістю ненульових координат розглянемо процес

$$\Gamma_t v = [Id + t(F'(\xi^0(t, x^0)) + B)]v,$$

що належить так званому *простору локальних напрямків* $\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$. Тоді стохастична похідна у напрямку $u_t = \Gamma_t v$ має вигляд

$$D_{\Gamma v} \xi^0(t, x^0) = tv.$$

Крім того, має місце наступна формула інтегрування частинами:

$$\mathbf{E} \,\langle\, \partial f(\xi^0_t), v \,\rangle_{\ell_2(1)} \Psi = \frac{1}{t} \mathbf{E}\, f(\xi^0_t) \Big\{ \Psi \int_0^t \langle\, \Gamma_s v, dW(s) \,\rangle_{\ell_2(1)} - D_{\Gamma v} \Psi \Big\}$$

для всіх $\mathcal{F}_t$-вимірних *стохастично диференційованих в напрямках* $\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ *функціоналів* $\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ та функцій $f \in \mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}),\ t > 0$.

У **розділах 5 та 6** досліджуються відповідно питання збереження та підвищення гладкості для операторів еволюції дифузійних процесів на некомпактних ріманових многовидах. Головна складність, яка тут виникає, пов'язана не тільки з істотною нелінійністю коефіцієнтів дифузійного рівняння, але і з нелінійністю простору, над яким це рівняння розглядається. Основним об'єктом дослідження в даних розділах є нелінійне дифузійне рівняння

$$\delta\xi_t^x = A_0(\xi_t^x)dt + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha(\xi_t^x)\delta W_t^\alpha, \quad \xi_0^x = x, \tag{9}$$

яке розглядається на некомпактному гладкому повному зв'язному рімановому многовиді M без краю. Вище δW^α позначає диференціали Стратоновича одновимірних незалежних вінерівських процесів W_t^α, $\alpha = 1, \ldots, d$. Розв'язок рівняння (9) розуміється у стандартному сенсі [97,99, 134]. Аналогічно до попередніх розділів питання про гладкі властивості асоційованої з рівнянням (9) півгрупи зводиться до питання регулярності розв'язку рівняння за початковою умовою.

При стандартному підході до задачі регулярності за початковою умовою розв'язок дифузійного рівняння (9) розглядається як випадкове відображення: $M \ni x \to \xi_t^x \in M$, і похідна високого порядку за початковою умовою x розуміється як процес $d_x^n \xi_t^x$. При цьому оператор диференціювання $d\colon TM \to TM$ задається на дотичному просторі TM многовиду. При цьому слід зазначити, що для першого порядку оператор $d\colon TM \to TM$, що співпадає з частинною похідною, є тензор-інваріантним. Неінваріантність похідних вищого порядку вирішується за допомогою введення так званих *коваріантних похідних*. Проте, для того, щоб застосувати, розвинуті в попередніх розділах методи, необхідно мати також інваріантне представлення для похідних півгрупи аналогічне (5), що є неможливим в термінах звичайних коваріантних похідних на варіації. Тому в роботі запропоновано новий тип інваріантних похідних $\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x$ (варіацій процесу ξ_t^x за початковою умовою), в термінах яких має місце інваріантне представлення для коваріантних похідних півгрупи P_t (теорема 5.17):

$$\nabla_\gamma^x P_t f(x) = \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_s=\gamma} \mathbf{E}\left(\nabla^\xi_{\{j_1,\dots,j_s\}} f\right)(\xi_t^x)\, \mathbb{V}_{\gamma_1}\xi_t^{j_1}\dots\mathbb{V}_{\gamma_s}\xi_t^{j_s}.$$

Тут використано позначення $\nabla_\gamma^x = \nabla_{k_1}^x \dots \nabla_{k_n}^x$, $\gamma = \{k_1,\dots,k_n\}$ для стандатних коваріантних похідних на многовиді.

Для множини індексів $\gamma = \{k_1,\dots,k_n\}$ *варіацією процесу* ξ_t^x порядку $|\gamma|$ називається процес $\mathbb{V}_\gamma\xi_t^x$, який задається наступними рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_k(\xi_t^x)^m = \dfrac{\partial(\xi_t^x)^m}{\partial x^k}, \\ \mathbb{V}_k(\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m) = \nabla_k^x(\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m) + \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t^x)\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^p\,\dfrac{\partial(\xi_t^x)^q}{\partial x^k}, \end{cases}$$

де $\nabla_k^x(\mathbb{V}_\gamma\xi^m)$ позначає класичну коваріантну похідну по змінній x.

Фактично, таким чином введена варіація є векторним полем за змінною ξ_t^x та ковекторним полем порядку $|\gamma|$ по змінній x:

$$\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x = \{\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m\}_{|\gamma|=n} \in T_{\xi_t^x}M \otimes (T_x^*M)^{\otimes n}.$$

Це дає можливість задати інваріантну норму варіації:

$$\|\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x\|^2 = g_{mn}(\xi_t^x)\left[\prod_{s=1}^j g^{i_s k_s}(x)\right]\mathbb{V}_{i_1,\dots,i_j}\xi_t^m \cdot \mathbb{V}_{k_1,\dots,k_j}\xi_t^n,$$

де g_{mn} та g^{ik} позначають метричний і обернений метричний тензори многовиду, і ввести відповідний нелінійний вираз:

$$r_n(\xi,t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\, p_j(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\,\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x\,\|^{q/j},$$

де $o \in M$ — деяка фіксована точка многовиду, $\rho(x,y)$ — геодезична відстань між точками x,y. Таким чином, строгий аналіз властивостей півгрупи, асоційованої з дифузійним рівнянням (9), вимагає дослідження властивостей введених вище варіацій, що проведено у відповідних теоремах цих розділів.

Нехай $\vec{q}_\varkappa = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geq 1$ позначає набір монотонних функцій на $\mathbb{R}_+$ поліноміальної поведінки, що задовольняють ієрархію

$$\forall\, i \geq 1 \quad q_i(z)(1+z)^{\varkappa/2} \leq q_{i+1}(z), \quad z \geq 0.$$

Позначимо через $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ простір n-раз неперервно диференційованих функцій на многовиді M, оснащений нормою

$$\| f \|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)} = \max_{i=0,\ldots,n} \sup_{x\in M} \frac{\| (\nabla^x)^i f(x) \|}{q_i(\rho^2(x,o))}.$$

Теорема 5.18. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (9) задовольняють наступні умови:

1. $\forall\, C \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, K_C \in \mathbb{R}^1$ що $\forall\, x \in M$

$$\langle\, \widetilde{A}_0(x), \nabla^x \rho^2(o,x)\rangle + C \sum_{\alpha=1}^{d} \|A_\alpha(x)\|^2 \leq K_C(1+\rho^2(o,x));$$

2. $\forall\, C, C' \in \mathbb{R}_+ \ \exists\, K_C \in \mathbb{R}^1$ така, що $\forall\, x \in M$, $\forall\, h \in T_x M$

$$\langle \nabla \widetilde{A}_0(x)[h], h\rangle + C \sum_{\alpha=1}^{d} \|\nabla A_\alpha(x)[h]\|^2 - C' \sum_{\alpha=1}^{d} \langle R_x(A_\alpha(x), h) A_\alpha(x), h\rangle \leq K_C \|h\|^2,$$

де $[R(A,h)A]^m = R_{p\ \ell q}^{\ m} A^p A^\ell h^q$ позначає оператор кривини.

3. для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існують такі сталі $\varkappa_0$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_R$, що для всіх $j = 1, \ldots, n$ і $x \in M$:

$$\| (\nabla)^j \widetilde{A}_0(x) \| \leq (1 + \rho(x,o))^{\varkappa_0},$$

$$\| (\nabla)^j A_\alpha(x) \| \leq (1 + \rho(x,o))^{\varkappa_\alpha},$$

$$\| (\nabla)^j R(x) \| \leq (1 + \rho(x,o))^{\varkappa_R}.$$

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ простори $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ зберігається під дією півгрупи $\forall\, t \geq 0 \;\; P_t\colon C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ та $\exists\; K, M$ такі, що

$$\forall\, f \in C^n_{\vec{q}}(M) \qquad \|P_t f\,\|_{C^n_{\vec{q}}(M)} \leq K e^{Mt}\,\|f\,\|_{C^n_{\vec{q}}(M)}.$$

Теорема 6.9. Нехай виконані умови теореми 5.18 та нехай, крім того, існує така стала $\varkappa_1$, що $\inf \dfrac{\|A^\sigma(x)\|}{(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa_1}} > 0$. Тоді $\exists\; K$ та $N \in \mathbb{R}^1$, що для $t > 0$ $P_t\colon C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa),q_{n+1}(\varkappa),\ldots,q_{n+m}(\varkappa)}(M)$, і має місце оцінка

$$\|P_t f\|_{C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa),q_{n+1}(\varkappa),\ldots,q_{n+m}(\varkappa)}} \leq \frac{K e^{Nt}}{t^{m/2}}\|f\|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}}.$$

Розділ 7 дисертації присвячений доведенню принципу найменшої дії для нелінійного рівняння, що є узагальненням так званого рівняння пористого середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(\|u\|^{m-1}u). \tag{10}$$

Нехай $\mathcal{D}_\mu(M)$ позначає нескінченновимірний простір дифеоморфізмів, що зберігають об'єм μ многовиду M. Право-інваріантна метрика на $\mathcal{D}_\mu$ в точці $g \in \mathcal{D}_\mu$ задається співвідношенням:

$$\big(X,Y\big) = \int_M \langle X(x), Y(x)\rangle_x d\mu(x),$$

де $X, Y \in T_g\mathcal{D}_\mu$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ — метрика на T_xM з відповідною нормою $\|\cdot\|_x$.

Многовид, що розглядається в цьому розділі, є N-вимірним тором $\mathbb{T}$, $N \in \mathbb{N}$, відповідно міра dx є нормованою мірою Лебега на торі.

Для деякого гладкого бездивергентного змінного за часом векторного поля $(t,x) \mapsto v_t(x) \in T_x\mathbb{T}$ визначимо потік, генерований $\dot{v}_t$: $e_t(v) \in \mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$ як розв'язок звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{de_t(v)}{dt} = \dot{v}_t(e_t(v)), \quad e_0(v) = I_{\mathbb{T}}. \tag{11}$$

Дифеоморфізм $e_t(v)$ грає роль збуренням тотожного відображення у просторі $\mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$. Розв'язність рівняння (11) випливає з компактності $\mathbb{T}$ та гладкості v. Розглянемо залежне від часу бездивергентне векторне поле u, задане на $[0,T]\times\mathbb{T}$, тобто $\sum_{j=1}^{N}\partial_j u^j \equiv 0$. Оператор $L(u_t)\colon C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^N)\to C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^N)$ задамо формулою: $L(u_t)f = \dfrac{1}{2}\Delta f + u_t\cdot\nabla f$.

Нехай $q>1$. *Функціоналом q-енергії* називається наступна величина:

$$\mathcal{E}_q(u,v) = \frac{1}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{T}}\left\|\Big[\big(\partial_t + L(u_t)\big)e_t(v)\Big](e_t^{-1}(v)(x))\right\|^q dx\,dt,$$

де $e_t^{-1}(v)$ — обернене відображення до дифеоморфізма $e_t(v)\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$.

Означення 7.3. Скажемо, що u є *критичною точкою функціонала* $\mathcal{E}_q$, якщо для всіх бездивергентних, змінних у часі векторних полів v таких, що $v_0=0$ і $v_T=0$ має місце співвідношення:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{E}_q(u,\varepsilon v)=0.$$

Теорема 7.4. Бездивергентне векторне поле u_t є критичною точкою функціонала $\mathcal{E}_q$, $q\geq 2$ тоді і лише тоді, коли існує функція $P(x)$ така, що виконано рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u\cdot\nabla + \frac{1}{2}\Delta\right)\left(\|u\|^{q-2}u\right) + \nabla P. \tag{12}$$

Рівняння (12) в літературі називається ваговим рівнянням пористого середовища [94, 163], і є узагальненням рівняння (10).

Крім того, в даному розділі дисертації досліджується питання існування узагальнених розв'язків, які задовольняють варіаційну задачу з функціоналом узагальненої q-енергії.

Означення 7.11. Скажемо, що білінійне відображення $\Theta_t(\cdot,\cdot)$ *є узагальненим потоком*, якщо кожній парі $\varphi,\psi\in C^\infty(M)$ ставиться у відповідність неперервний процес $t\mapsto\Theta_t(\varphi,\psi)$, визначений на спільному ймовірнісному просторі з спільною для всіх φ,ψ фільтрацією, і для якого, крім того, $\forall\, \varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1 \in C^\infty(M)$ виконані наступні умови:

(1) $\quad \Theta_t(\varphi, 1) \equiv \int_M \varphi(x)\, dx,$

(2) $\quad \Theta_t(1, \psi) \equiv \int_M \psi(x)\, dx,$ м.в. для всіх $t \in [0, T]$,

(3) $\quad \Theta_0(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{L^2(M)};$

(4) для $\varphi, \psi \geq 0$ випливає $\Theta_t(\varphi, \psi) \geq 0$ м.в.;

(5) $\quad |\Theta_t(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(M)} \|\psi\|_{L^2(M)},$ м.в. для всіх $t \in [0, T]$;

(6) $\quad d\,[\Theta(\varphi, \psi), \Theta(\varphi_1, \psi_1)]_t = \sum_{i \varkappa 1} \Theta_t\big(\varphi, \langle \nabla\psi, \sigma_i\rangle\big) \cdot \Theta_t\big(\varphi_1, \langle \nabla\psi_1, \sigma_i\rangle\big)\, dt.$

Скажемо, що узагальнений потік Θ_t *має конфігурацію* η *на кінцях*, якщо

$$\mathbb{E}\,[\Theta_T(\varphi, \psi)] = \int_{M \times M} \varphi(x)\psi(y)\, \eta(dx, dy).$$

Позначимо через $\mathcal{H}'_q(\eta) = \mathcal{H}'_q(\sigma, \eta, T)$ множину розподілів узагальнених потоків Θ_t, які мають конфігурацію η в кінцевих точках та скінченну *узагальнену* q*-енергію*, тобто для яких наступний функціонал є скінченним:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta) = \frac{1}{q} \sup_{\varphi, \psi, \ell, m} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^\ell \frac{\big(D\widetilde{\Theta}_t(\varphi_j, \psi_k)\big)^2}{\Theta_t(\varphi_j, 1)^\alpha} \right]^{q/2} dt \right\},$$

де $\alpha = \dfrac{2(q-1)}{q}$, sup береться по всім векторам $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_\ell)$ для будь-яких $m, \ell \geq 1$ таким, що $\varphi_j, \psi_k \in C^\infty(M)$, $\varphi_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^m \varphi_j = 1$ і ψ_k такі, що для всіх $v \in TM\colon \sum\limits_{k=1}^\ell \langle \nabla\psi_k, v\rangle^2 \leq ||v||^2$, і для $\varphi, \psi \in C^2(M)$ $\widetilde{\Theta}_t(\varphi, \psi) = \Theta_t(\varphi, \psi) - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \Theta_s(\varphi, \Delta\psi)\, ds$, Δ — оператор Лапласа. Покладемо

$$\mathcal{E}'_q(\eta) = \mathcal{E}'_q(\sigma, \eta, T) := \inf\left\{ \mathcal{E}'_q(\Theta), \;\; \mathcal{L}(\Theta) \in \mathcal{H}'_q(\eta) \right\},$$

де за означенням $\mathcal{E}'(\eta) = \infty$, якщо не існує узагальнених потоків з конфігурацією η в кінцевих точках, $\mathcal{L}(\Theta)$ — розподіл процесу Θ.

Теорема 7.19. Якщо $\mathcal{E}'_q(\eta) < \infty$, тоді існує узагальнений потік Θ з розподілом з $\mathcal{H}'_q(\eta)$ такий, що $\mathcal{E}'_q(\Theta) = \mathcal{E}'_q(\eta)$.

Іншими словами, інфімум функціонала узагальненої q-енергії з заданою конфігурацією η в кінцевих точках досягається на елементах множини $\mathcal{H}'_q(\eta)$.

У **розділі 8** вивчається питання про асимптотичне представлення розв'язку граничної задачі в околі сингулярної особливої точки типу каспу, яке ставиться у наступному сенсі.

Нехай $\mathcal{F}_n$ позначає деяку послідовність підпросторів деякого простору $\mathcal{F}$, де індекс n пробігає цілі значення. Нехай $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ для будь-якого n. Позначимо через $\mathcal{F}_{-\infty}$ об'єднання всіх $\mathcal{F}_n$. Для даного $f \in \mathcal{F}_{-\infty}$, під асимптотичним розкладом елемента f розуміється ряд

$$f \sim \sum_{n=n_f}^{\infty} f_n, \quad f_n \in \mathcal{F}_n \tag{13}$$

такий, що $f - \sum\limits_{n=n_f}^{N} f_n \in \mathcal{F}_{N+1}$ для будь-якого $N \geq n_f$.

Розглядається перша крайова задача для рівняння теплопровідності

$$\begin{array}{rcl} u'_t - u''_{x,x} & = & f \quad \text{in} \;\; \mathcal{G}, \\ u & = & u_0 \;\; \text{at} \;\; \partial\mathcal{G} \setminus \Sigma. \end{array} \tag{14}$$

в нециліндричній області $\mathcal{G}$, де Σ позначає множину характеристичних точок границі $\partial\mathcal{G}$. Функції f в $\mathcal{G}$ та u_0 на $\partial\mathcal{G} \setminus \Sigma$ є деякими гладкими функціями. З локального принципу [186, 187] випливає, що властивість фредгольма задачі (14) в належному функціональному просторі еквівалентна локальній оберненості задачі в кожній точці замикання області $\mathcal{G}$.

Тому без порушення загальності можна вважати, що особлива точка, в околі якої буде досліджуватися задача (14), співпадає з початком координат: $P = (0, 0)$. Припускається, що область $\mathcal{G}$ в околі особливої точки задається нерівністю $t > |x|^p$, де p — деяке позитивне дійсне число. Без порушення загальності можемо вважати, що $|x| \leq 1$.

Основна ідея полягає в застосуванні так званої техніки "підриву сингулярності", яка полягає у введені нової системи координат (ω, r) за допомогою спеціальної заміни змінних $(x, t) \to (\omega, r)$ при якій особлива точка $P = (0, 0)$ перетворюється в сегмент. При цьому в області змінних (ω, r) задача (14) зводиться до звичайного диференціального рівняння за змінною r з операторними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} r^Q U'_r - U''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} U'_\omega &= r^Q F \quad \text{in} \quad (-1, 1) \times (0, 1), \\ U &= U_0 \quad\;\; \text{at} \quad \{\pm 1\} \times (0, 1), \end{aligned} \tag{15}$$

де $U(\omega, r)$ та $F(\omega, r)$ — відповідні функції, які отримуються з $u(x, t)$ та $f(x, t)$ при відповідному координатному перетворенні, $Q = \frac{2}{p}$. Для того, щоб визначити придатні функціональні простори, в яких задача (15) матиме формальні асимптотичні розклади, у розділі 8 вивчалася відповідна однорідна крайова задача і доведена наступна теорема.

Теорема 8.1. Нехай $p \neq 2$. Тоді довільний розв'язок однорідної задачі (15) має формальний асимптотичний розклад наступного вигляду:

$$U(\omega, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r^{Q/4}} \exp\left(\lambda_n \frac{r^{1-Q}}{1-Q}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{r^{(1-Q)m}}, \tag{16}$$

де $\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{2} n\right)^2$ — власні значення спеціального ланцюга задач Штурма–Ліувілля.

У термінах вихідних координат (x,t) в околі точки $P=(0,0)$ області $\mathcal{G}$ формальний розклад розв'язку задачі (14) має вигляд:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{t^{Q/4}}\exp\left(\lambda_n\frac{t^{1-Q}}{1-Q}\right)\sum_{m=0}^{\infty}V_{n,m}\Big(\frac{x}{t^{1/p}}\Big)\Big(\frac{1}{t}\Big)^{(1-Q)m}.$$

Аби дослідити розв'язність задачі (15) та довести, що отриманий формальний розв'язок є асимптотичним розв'язком у сенсі означення (13), задача (15) зводиться до параболічного рівняння з операторно-значним символом. Для цього знайдено таку заміну координат $s=\delta(r)$ на інтервалі $(0,1)$, що $r^Q\dfrac{d}{dr}=\dfrac{d}{ds}$. Функція δ визначається однозначно з точністю до константи з рівняння: $\delta'(r)=r^{-Q}$ і дається виразом:

$$\delta(r)=\frac{r^{1-Q}}{1-Q} \tag{17}$$

для $r>0$. Зауважимо, що $\delta(0+)=-\infty$. Тоді задача (15) переходить в наступну:

$$\begin{array}{rclcl} U'_s-U''_{\omega,\omega}+\dfrac{1}{2-p}\dfrac{1}{s}\,\omega U'_\omega & = & G & \text{в} & (-1,1)\times(-\infty,\delta(1)),\\ U & = & U_0 & \text{при} & \{\pm 1\}\times(-\infty,\delta(1)), \end{array} \tag{18}$$

де $G=\left(\dfrac{\delta(1)}{s}\right)^{\frac{2}{2-p}}F$. Таким чином, гранична задача (14) зводиться до граничної задачі (18) з оператором $\mathcal{A}(s)U=U'_s-U''_{\omega,\omega}+\frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}U'_\omega$, що діє у просторі $\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))$ функцій U таких, що $U=U_0$ при $\omega=\pm 1$, $s\in(-\infty,\delta(1))$ та

$$||U||^2_{\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))}=\int\limits_{-\infty}^{\delta(1)}\Big(||U'(s)||^2_{L^2(-1,1)}+||U(s)||^2_{H^2(-1,1)}\Big)|s|^{\frac{3}{p-2}}\,d\omega\,ds<\infty.$$

Фактично, для $s<0$ оператор граничної задачі (18) є псевдодиференціальним оператором $AU\,(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\imath s\sigma}a(s,\sigma)\hat{U}(\sigma)d\sigma$ з повільно змінним операторним символом:

$$a(s,\sigma) = \begin{pmatrix} \imath\sigma - \left(\dfrac{\partial}{\partial\omega}\right)^2 + \frac{1}{2-p}\dfrac{1}{s}\,\omega\dfrac{\partial}{\partial\omega} \\ r' \end{pmatrix},$$

який приймає значення в операторах граничної задачі Штурма–Ліувілля на інтервалі $[-1,1]$. Тут r' позначає звуження на простір граничних умов даної задачі, $\hat{U}$ — перетворення Фур'є функції U по змінній s. Важливою властивістю символу $a(s,\sigma)$ є те, що для будь-якого $\alpha \geq 0$ та $\beta \geq 1$ похідні $D_s^\beta D_\sigma^\alpha a(s,\sigma)$ прямують до нуля у відповідних нормах, коли $s \to -\infty$. Для псевдодиференціальних операторів з повільно змінним символом в точці $s = -\infty$ в роботі [181] доведено критерій локальної розв'язності в точці $-\infty$. Проте даний критерій стосується однорідного в класичному сенсі символу і не може бути безпосередньо застосований до задачі (18), символ якої є квазі-однорідним, тобто однорідним тільки по частині змінних.

У розділі 8 дисертації була доведена, зокрема, теорема про локальну розв'язність задачі (18), також отримані теореми про асимптотичність відповідного формального розкладу в сенсі спеціального класу просторів, які є аналогами просторів Слободецького [29].

Формальний асимптотичний розклад однорідної задачі для (15) в нових координатах (ω, s) отримується після підстановки (17) в (16):

$$U(\omega,s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left((1-Q)s\right)^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} \exp(\lambda_n s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{((1-Q)s)^m} \tag{19}$$

для s, що знаходиться в околі точки $-\infty$. При цьому $\lambda_n = -\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)^2$.

Розв'язність трансформованої граничної задачі (18), доводиться в шкалі просторів $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$ функцій, які приймають значення в стандартному просторі Соболєва $H^{2k}(-1,1)$. Функція U зі значеннями в просторі

$H^{2k}(-1,1)$ належить простору $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$, $T \leq \infty$ для $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \leq 0$ та деякого $\mu > \mu_0$, $\mu_0 = \frac{3}{2(p-2)}$, якщо наступна норма є скінченною:

$$\|U\|_{\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} := \Big(\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\, s^{2\mu} \sum_{j=0}^{k} \|U^{(j)}(s)\|^2_{H^{2(k-j)}(-1,1)} ds\Big)^{1/2}.$$

У спеціальному випадку, коли $k = 1$, $\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$ та $T = \delta(1)$ ці простори співпадають з простором $\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))$. Якщо $k = 0$ і $\mu = 0$, то простір $\mathcal{H}^0_{\gamma,0}(-\infty,T)$ позначається $\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)$. Основними результатами цього розділу є наступні теореми.

Теорема 8.2. Нехай $\gamma < 0$, $\gamma \neq \lambda_n, n \geq 0$, де λ_n — власні значення оператора Δ в просторі $L^2(-1,1)$. Тоді для будь-якого $\mu > -1$ існує таке $T_0(\mu) \in \mathbb{R}$, що для всіх $T < T_0$ оператор $\mathcal{A}(s)$ задачі (18), що діє у просторах $\mathcal{A}(s)\colon \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T) \mapsto \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)$ є оборотним, і виконана наступна оцінка: $||U||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} \leq C\,||\mathcal{A}(s)U||_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)}$.

Теорема 8.5. Припустимо $\lambda_{n+1} < \gamma < \lambda_n$. Тоді представлення (19) дійсного розв'язку $U \in H^{1,\gamma}(-\infty,S)$ задачі (18) є асимптотичним розкладом у сенсі (13).

Об'єктом, що розглядається у **розділі 9** є динамічна система $(\Omega,\mathcal{A},\mu,T)$, де Ω — непуста множина елементів, яка інтерпретується як множина станів динамічної системи, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на Ω, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ — ймовірнісна міра та $T\colon \Omega \to \Omega$ є $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-вимірне перетворення, що зберігає міру, тобто $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$. При цьому міра μ називається T-інваріантною. На перетворення T робиться додаткове припущення про його регулярність, яке полягає в тому, що T є *ергодичним* по відношенню до міри μ, тобто $\mu(A) \in \{0,1\}$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$ такого, що $T^{-1}(A) = A$.

Основним результатом даного розділу є теорема 9.8, що дає еквівалентний спосіб обчислення ентропії Колмогорова–Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

Нагадаємо означення *ентропії Колмогорова–Сіная.* Нехай $q \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_q\} \subset \mathcal{A}$ скінченне розбиття множини Ω, тобто $\Omega = \bigcup\limits_{\ell=1}^{q} P_\ell$, $P_\ell \neq \varnothing$ для $\ell = 1, \ldots, q$, $P_{\ell_1} \cap P_{\ell_2} = \varnothing$ для різних $\ell_1, \ell_2 \in \{1, \ldots, q\}$, і нехай $A = \{1, \ldots, q\}$ позначає відповідний *алфавіт.* Кожне *слово* $a_1 a_2 \ldots a_t$ довжини $t \in \mathbb{N}$ визначає множину $P_{a_1 \ldots a_t} := \{\omega \in \Omega \colon (\omega, T(\omega), \ldots, T^{\circ t-1}(\omega) \in P_{a_1} \times \cdots \times P_{a_t})\}$, де $T^{\circ t}(\omega) := \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{t \text{ разів}}(\omega)$, $\circ$ позначає суперпозицію. Набір непорожніх підмножин, отриманих таким чином для слів довжини t, задає розбиття $\mathcal{P}_t \subset \mathcal{A}$ множини Ω. Зокрема, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

Ентропійним показником перетворення T по відношенню до розбиття $\mathcal{P}$ називається границя $h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t} H_\mu(\mathcal{P}_t)$, де $H_\mu(\mathcal{C})$ позначає *ентропію Шеннона* скінченного розбиття $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_q\} \subset \mathcal{A}$ множини Ω, $q \in \mathbb{N}$: $H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum\limits_{\ell=1}^{q} \mu(C_\ell) \ln \mu(C_\ell)$ з врахуванням домовленості $0 \cdot \ln 0 := 0$. Тоді *ентропія Колмогорова–Сіная* за означенням дорівнює

$$h_\mu^{KS}(T) = \sup_{\substack{\mathcal{P} \text{— скінченне} \\ \text{розбиття}}} h_\mu(T, \mathcal{P}).$$

У даному розділі під *спостережуваними* розуміється набір $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ випадкових $\mathbb{R}^1$-значних величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Цей набір розглядається як випадковий вектор

$$\Theta = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Для однієї спостережуваної ξ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, для довільних $s, t \in \mathbb{N}$ таких, що $s < t$ розглянемо розбиття множини Ω на дві підмножини, що не перетинаються:

$$\mathcal{P}_{s,t}^{\xi,T} = \Big\{\omega \in \Omega \colon \xi(T^{\circ s}(\omega)) < \xi(T^{\circ t}(\omega))\Big\} \cup \Big\{\omega \in \Omega \colon \xi(T^{\circ s}(\omega)) \geq \xi(T^{\circ t}(\omega))\Big\}.$$

Тоді для набору спостережуваних $\Theta = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ над $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ та довільного $d \in \mathbb{N}$ розбиття $\mathcal{P}_d^{\Theta,T} = \bigvee_{i=1}^n \bigvee_{0\le s<t\le d} \mathcal{P}_{s,t}^{\xi_i,T}$ називається *впорядкованим розбиттям порядку d множини Ω, асоційованим з Θ.* За означенням для двох довільних розбиттів $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ та $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ множини Ω утворення нового розбиття за допомогою операції подрібнення $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ задається наступним чином: $\mathcal{A}\vee\mathcal{B} = \{A_i\cap B_j \mid A_i \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}\}$.

Враховуючи ці означення *впорядкована ентропія* динамічної системи задається як верхня границя при $d \to \infty$ ентропії Шеннона, що визначається по підрозбиттю $\mathcal{P}_d^{\Theta,T}$.

Позначимо $\sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\ge 0}\big)$ σ-алгебру генеровану випадковим вектором Θ та його "зсувами" під дією перетворення $T\colon \Theta\circ T, \Theta\circ T^2, \dots$. Позначимо $T^{-1}\mathcal{A}$ розбиття множини Ω, що складається з всіх прообразів елементів з набору множин $\mathcal{A}$: $T^{-1}\mathcal{A} = \{T^{-1}(A_1), \dots, T^{-1}(A_n)\}$. Для кожного $k \ge 1$ означимо розбиття $\tau_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots T^{-(k-1)}\mathcal{A}$.

Якщо $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — дві під-σ-алгебри, будемо писати $\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$, якщо для кожного $B \in \mathcal{B}$ існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $\mu(B \triangle A) = 0$. Відповідно будемо писати $\mathcal{B} \overset{\circ}{=} \mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{B}$ і $\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$.

Теорема 9.8. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ позначає ймовірнісний простір, $T\colon \Omega \to \Omega$ — вимірне μ-інваріантне перетворення, і $\Theta = (\xi_1, \dots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — вимірне відображення таке, що $\sigma\big(\{\Theta \circ T^k\}_{k\ge 0}\big) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Припустимо, що виконано одна з наступних умов:

(a) T є ергодичним, або

(b) T не є ергодичним, проте Ω може бути вкладеним в деякий компактний метричний простір таким чином, що $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Тоді $$h_\mu^{KS}(T) = \lim_{d\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu\left(\tau_k(\mathcal{P}_d^{\Theta,T})\right).$$

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Відомості з теорії гіббсових мір та пов'язаних з ними операторів Діріхле

Нехай $\mathbb{Z}^d$ позначає d-мірну ґратку, вузли якої задаються цілочисловим векторами $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{Z}$. З кожним таким вузлом пов'язується відповідний одновимірний простір $\mathbb{R}^1$, який інтерпретується як спіновий простір k-ої частки.

Для системи класичних часток, що не взаємодіють, їх спільний розподіл задається як добуток $\prod\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} \mu_k$ ймовірнісних розподілів $d\mu_k(x_k) = e^{-\Phi(x_k)} dx_k$ окремих часток. В такому випадку некомпактність кожного спінового простору і вимога $\mu_k(\mathbb{R}^1) = 1$ вимагають зростання одночастинкових потенціалів $\Phi(x_k)$ на нескінченності, наприклад, поліноміального типу.

В розділах 2 – 4 розглядається система часток з квадратичною взаємодією, яка відповідає так званій гіббсовій мірі над простором $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ формального вигляду:

$$d\mu(x) = \frac{1}{Z}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j:\ |i-j|\le r_0} b(i-j)x_i x_j\}\prod_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{-\Phi(x_k)}dx_k. \tag{1.1}$$

Така міра описує модель енгармонійного кристалу зі скінченим радіусом r_0 взаємодії часток. При цьому частки взаємодіють у відповідності до лінійного закону Гука, а числа $b(i)$ пов'язані з відповідними коефіцієнтами пружності.

Модель (1.1) з різних точок зору була досліджена в літературі на предмет існування, єдиності та властивостей гіббсової міри [5, 12, 14, 18, 22, 26, 88, 91, 124, 125, 129, 173, 184, 193, 194, 201, 202]. Крім того, така модель також розглядалася як ґраткова апроксимація моделі багатовимірної евклідової теорії поля : $P(\phi)_d$: [5, 21, 26].

Кінетична енергія довільного гладкого розподілу u над простором $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ задається квадратичною формою Діріхле (див. [33–35, 37, 74, 79, 89, 108, 109, 130, 156, 165]:

$$\mathcal{E}_\mu(u,u) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} |\frac{\partial u(x)}{\partial x^k}|^2 d\mu(x), \tag{1.2}$$

а оператор енергії H_μ, пов'язаний з цією енергетичною формою, задається співвідношенням:

$$(H_\mu u, u)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu)} = \mathcal{E}_\mu(u,u),$$

За допомогою формули інтегрування частинами може бути відтворений формальний вигляд оператора H_μ як оператора зліченної кількості змінних, що задається виразом:

$$H_\mu = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\{-\Delta_k + [F(x_k) + \sum_{j:\ |j-k|\le r_0} b(j-k)x_j]\frac{\partial}{\partial x^k}\}, \tag{1.3}$$

де $F(x_k) = \partial_k \Phi(x_k)$.

Строгий опис моделі, що задається оператором (1.3) та дослідження властивостей його пів-групи (еволюції, генерованої оператором енергії відповідної системи часток), вимагає перш за все вивчення розв'язків нескінченновимірних параболічних рівнянь та побудову відповідних просторів, в яких ці розв'язки можуть бути задані. Крім того, в даному розділі ставиться завдання побудувати нескінченновимірні аналоги просторів Соболєва $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$-диференційованих функцій, які будуть зберігатися під дією півгрупи оператора (1.3).

Для того, щоб коректно означити оператор H_μ (1.3) та відповідні простори $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$-диференційовних функцій, введемо декілька необхідних позначень. Розглянемо d-мірну цілочислову ґратку $\mathbb{Z}^d$. Кожній точці $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $k_i \in \mathbb{Z}$, поставимо у відповідність лінійний простір $\mathbb{R}^1$, який назвемо його *спіновим простором* k-ої *частки*. Для скінченної або нескінченної підмножини $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| \leq \infty$ введемо позначення

$$x_\Lambda = \{x_k\}_{k\in\Lambda}, \quad \mathbb{R}^\Lambda = \mathop{\times}_{k\in\Lambda} \mathbb{R}^1.$$

Для скінченної множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, введемо так звану σ-алгебру циліндричних множин $\mathcal{F}_\Lambda$:

$$\mathcal{F}_\Lambda = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda) \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda},$$

де $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)$ — борелева σ-алгебра на $\mathbb{R}^\Lambda$. Для нескінченної множини $|\Lambda| = \infty$ нехай $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma(\bigcup_{Q\subset\Lambda,\ |Q|<\infty} \mathcal{F}_Q)$ позначає тихонівську σ-алгебру, тобто мінімальну σ-алгебру, утворену циліндричними вимірними множинами.

Введемо позначення $C^n_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ для класу циліндричних n-раз диференційованих функцій f з компактним носієм: для будь-якої $f \in C^n_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ існує скінченна множина $\Lambda_f \subset \mathbb{Z}^d$ і функція $g_f \in C^n_0(\mathbb{R}^{\Lambda_f})$ з компактним носієм, задана на скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^{\Lambda_f}$, така що $f(\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}) =$

$g_f(\{x_k\}_{k\in\Lambda_f})$. Мінімальна множина Λ_f, яка задовольняє цій умові в подальшому називається *носієм циліндричності* функції f:

$$\operatorname{supp}_{\mathrm{cyl}} f = \min\{\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d \colon\ f \text{ є } \mathcal{F}_\Lambda\text{-вимірною}\}. \tag{1.4}$$

Розглянемо сім'ю потенціалів $\{\Phi_A,\ A\subset\mathbb{Z}^d,\ |A|<\infty\}$ — функцій, що залежать від змінних, занумерованих скінченними підмножинами ґратки $\mathbb{Z}^d$, які задовольняють наступні припущення:

1) *скінченність радіусу взаємодії:*

   існує таке число r_0, що у разі $\sup\limits_{k,j\in A}|k-j|>r_0$, то $\Phi_A\equiv 0$;

2) функція $\Phi_A\in C^1(\mathbb{R}^A)$ неперервно диференційовна

   та зростає не швидше полінома на нескінченності разом з похідною:
   $$\exists\ C,n\colon\ \max\Big(|\Phi_A(x_A)|,\ \max_{k\in A}|\partial_k\Phi_A(x_A)|\Big)\le C(1+\sum_{k\in A}|x_k|)^n. \tag{1.5}$$

Позначимо U_Λ *повний потенціал в об'ємі* $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$:

$$U_\Lambda(x)=\sum_{A\colon\ A\cap\Lambda\neq\varnothing}\Phi_A(x_A), \tag{1.6}$$

тобто суму потенціалів областей, які мають непорожній перетин з Λ.

Означення 1.1. *Гіббсовим розподілом в скінченному об'ємі* $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ *з фіксованими граничними умовами* x_{Λ^c}, $\Lambda^c=\mathbb{Z}^d\backslash\Lambda$ називається міра μ_Λ, що задається наступним чином:

$$\mu_\Lambda(dx_\Lambda|x_{\Lambda^c})=\frac{1}{Z_\Lambda(x_{\Lambda^c})}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod_{k\in\Lambda}dx_k \tag{1.7}$$

з нормуючим множником

$$Z_\Lambda(x_{\Lambda^c})=\int\limits_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp(-U_\Lambda(x)\,)\prod_{k\in\Lambda}dx_k.$$

В означенні $\mu_\Lambda(dx_\Lambda|x_{\Lambda^c})$ змінні $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ поділені на дві групи: перша частина формується змінними, по яким ведеться інтегрування $x_\Lambda = \{x_k,\ k \in \Lambda\}$ по мірі μ_Λ, інша частина $x_{\Lambda^c} = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d \backslash \Lambda\}$ відіграє роль фіксованих граничних умов поза межами множини Λ. З скінченності радіусу взаємодії (1.5) випливає, що результат інтегрування по мірі μ_Λ ефективним чином залежить тільки від змінних в r_0-околі множини Λ і інтерпретуються як *граничні умови.*

Припустимо, що потенціали $\{\Phi_A\}$ такі, що

$$\forall\, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d,\ |\Lambda| < \infty,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \quad Z_\Lambda(x_{\Lambda^c}) < \infty. \tag{1.8}$$

Тоді означення міри μ_Λ стає коректним і можна визначити інтеграл

$$\mu_\Lambda^{x_{\Lambda^c}}(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^\Lambda} f(x_\Lambda, x_{\Lambda^c}) \mu_\Lambda(dx_\Lambda|x_{\Lambda^c}), \quad f \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \tag{1.9}$$

з фіксованими граничними умовами x_{Λ^c}.

Означення 1.2. Ймовірнісна міра μ на тихонівській σ-алгебрі $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d}$ називається *гіббсовою з локальними розподілами* $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d}$, якщо

$$\forall\, f \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \forall\, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d: \quad \mu(\mu_\Lambda^{\cdot}(f)) = \mu(f). \tag{1.10}$$

Скажемо, що міра μ є *помірною*, якщо

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} x_k^{2n} d\mu(x) < \infty. \tag{1.11}$$

Вище було використано позначення $\mu(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} f\, d\mu$, точка в $\mu_\Lambda^{\cdot}(f)$ означає, що відбувається інтегрування по відповідним змінним x_{Λ^c}. В подальшому також буде використано позначення $\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ для всіх помірних гіббсових мір з локальними розподілами $\{\mu_\Lambda\}$.

Зауваження 1.3. Фактично з означення гіббсової міри випливає, що міри μ_Λ є умовними розподілами міри μ. Нагадаємо, що у випадку, коли на просторі з мірою $(X, \mathbf{P})$ задано дві σ-алгебри $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, то оператор умовного математичного сподівання $\mathcal{F}$- вимірної функції f відносно σ-алгебри $\mathcal{E}$ та міри $\mathbf{P}$ (позначення $\mathbf{E_P}\big(f|\mathcal{E}\big)$) є $\mathcal{E}$-вимірною та інтегровною функцією, такою, що

$$\forall\, A \in \mathcal{E}\colon \quad \int\limits_A f\, d\mathbf{P} = \int\limits_A \mathbf{E_P}\big(f|\mathcal{E}\big)\, d\mathbf{P}.$$

В подальшому буде використано наступна важлива властивість умовного сподівання (див., наприклад, [3, 19]):

$$\mathbf{E_P}\big(fg|\mathcal{E}\big) = g\, \mathbf{E_P}\big(f|\mathcal{E}\big) \tag{1.12}$$

для будь-якої $\mathcal{E}$-вимірної функції g.

Нехай U_k позначає повний потенціал вузла $k \in \mathbb{Z}^d$:

$$U_k = \sum_{A\colon\, k\in A} \Phi_A. \tag{1.13}$$

Для скінченної або нескінченної підмножини $Q \subset \mathbb{Z}^d,\ |Q| \le \infty$ ґратки $\mathbb{Z}^d$ розглянемо сім'ю диференціальних виразів

$$H_Q = \sum_{k\in Q} H_k, \tag{1.14}$$

заданих на $C^2_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, де

$$H_k = -\frac{1}{2}\partial_k^2 + \frac{1}{2}(\partial_k U_k)\partial_k. \tag{1.15}$$

За умов (1.5) оператори $\{H_Q,\, |Q| \le \infty\}$ є коректно заданими на множині $C^2_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$:

$$\forall\ f \in C^2_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \ \forall\ Q \subset \mathbb{Z}^d,\ |Q| \le \infty\colon\ \ H_Q f \in L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$$

в просторі квадратично-сумовних функцій відносно помірної гіббсової міри $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$. Крім того, оператори H_Q, $|Q| \leq \infty$ є симетричними в просторі $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$, що випливає з наступної леми.

В наступній лемі описано носій гіббсової міри μ помірного росту. Її доведення частково наслідує підхід [28], проте з використанням формули інтегрування частинами для гіббсової міри замість властивості квазіінваріантності міри.

Лема 1.4. Нехай виконані умови (1.5) та (1.8). Тоді гіббсові розподіли в скінчених об'ємах задовольняють систему рівнянь Добрушина–Ланфорда–Рюеля [12, 14, 158] :

$$\forall\, \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d\colon \quad |\Lambda_2| < \infty \quad \forall\, f \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \\ \mu_{\Lambda_2}^{x_{\Lambda_2^c}}(\mu_{\Lambda_1}^{\cdot}(f)) = \mu_{\Lambda_2}^{x_{\Lambda_2^c}}(f). \tag{1.16}$$

Крім того, для будь-якою помірної гіббсової міри $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ з локальними розподілами $\{\mu_\Lambda\}$ має місце формула інтегрування частинами :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} h_k \partial_k u \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} u\{h_k \partial_k U_k - \partial_k h_k\} \, d\mu \tag{1.17}$$

для всіх $u, h_k \in C^1_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, а оператори H_Q, $|Q| \leq \infty$ є симетричними у просторі $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$. Ці оператори пов'язані з відповідними локальними енергетичними формами:

$$(H_Q u, v)_{L_2(\mu)} = \frac{1}{2} \sum_{k \in Q} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \partial_k u \cdot \partial_k v \, d\mu, \qquad u, v \in C^2_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}).$$

Зауважимо, що з цієї леми також випливає, що у разі співпадіння множини Q з $\mathbb{Z}^d$:

$$H_Q = H_{\mathbb{Z}^d} = H_\mu.$$

Доведення див. лему A.1 у додатку A.

Зауваження 1.5. Оскільки $\mu_\Lambda(g) = g$ при $\operatorname{supp}_{\mathrm{cyl}} g \cap \Lambda = \varnothing$, умова (1.10) еквівалентна припущенню, що сім'я мір $\{\mu_\Lambda\}$ формує множину умовних розподілів для міри μ відносно σ-алгебр $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ [12,14,22,158]. З скінченності радіусу взаємодії випливає, що будь-яка слабка границя $\widetilde{\mu} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda$ задовольняє властивість (1.10):

$$\widetilde{\mu}(\mu_{\Lambda_1}^{\cdot}(f)) = \lim_{\Lambda_2 \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_{\Lambda_2}(\mu_{\Lambda_1}^{\cdot}(f)) = \lim_{\Lambda_2 \nearrow \mathbb{Z}^d} \mu_{\Lambda_2}(f) = \widetilde{\mu}(f).$$

Тому питання побудови гіббсової міри в нескінченому об'ємі як границі скінченно-вимірних гіббсових розподілів розглядалося як задача опису міри, яка має конкретні умовні розподіли в скінченних об'ємах, див. [5, 18, 22, 26, 173, 184].

Як вже зазначалося вище питанню існування та єдиності гіббсових мір при різних умовах на взаємодію між частками присвячена значна кількість робіт, починаючи від класичних робіт Р.Л. Добрушина, О.Е. Ланфорда та Д. Рюеля до питань неєдиності гіббсової міри, існування фазових переходів, швидкого спадання кореляцій, диференційованості функції тиску та ін. [12–14, 27, 92, 93, 100, 105, 116, 117, 146, 155, 158, 185]. В основі критерії типу Добрушина лежать певні варіаційні оцінки на одноточкові умовні сподівання, наслідком яких при застосуванні теореми про нерухому точку є єдиність відповідної глобальної гіббсової міри. У випадку необмеженого спінового простору для кожної частки (наприклад $\mathbb{R}^1$) такі теореми були наслідком субгауссівських оцінок, отриманих Д. Рюелем в [184] і стосувалися так званої *регулярної* функції взаємодії [100, 133, 160, 182, 184], коли потенціальна енергія системи допускає квадратичну оцінку. Наприклад, для випадку двоточкової взаємодії відповідний потенціал має наступний вигляд:

$$U_{\mathbb{Z}^d}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Phi(x_k) + \lambda \sum_{|k-j|\le r_0} b_{k-j} x_k x_j. \tag{1.18}$$

З іншого боку, було показано, що для широкого класу моделей з неквадратичною взаємодією

$$U_{\mathbb{Z}^d}(x) = \sum_{|\,k-j\,|=1} (x_k - x_j)^2 + \lambda \sum_{|\,k-j\,|=1} (x_k - x_j)^4,$$

для довільного $\lambda > 0$ експоненційне спадання кореляцій і існування єдиної гіббсової міри не має місця [159].

Тим не менше в роботі [53] показано, що для моделей з потенціалом вигляду

$$U_{\mathbb{Z}^d}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Phi(x_k) + \lambda \sum_{k,j\in\mathbb{Z}^d} G_{k-j}(x_k - x_j) \tag{1.19}$$

має місце як швидке спадання корреляцій так і єдиність відповідної гіббсової міри за певних умов на співвідношення між зростанням потенціалів взаємодії $\{G_j\}$ та потенціалів самодії $\{\Phi\}$:

1. $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^1)$ є симетричною опуклою функцією:

   $$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(x) = \Phi(-x), \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} \Phi''(x) \ge \varepsilon,$$

   що має не більше, ніж поліноміальний ріст на нескінченності:

   $$\exists\, c, n\colon\ \forall\, x \quad |\Phi(x)|,\ |\Phi'(x)|,\ |\Phi''(x)| \le c(1+|x|)^n.$$

2. Функції $\{G_j \in C^2(\mathbb{R}^1)\}_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}$ є опуклими симетричними $G_j(0) = 0$, $G_j(x) = G_j(-x)$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^1\colon\quad G_j''(x) \ge 0$ та мають скінченний радіус взаємодії:

   $$\exists\, r_0\colon\ \forall\, j\colon\ |j| > r_0 \;\Rightarrow\; G_j \equiv 0.$$

3. $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d\ |k| \le r_0\colon \qquad \sup\limits_{x_k, x_0 \in \mathbb{R}^1} \dfrac{|G_k''(x_k - x_0)|}{\sqrt{\Phi''(x_k)}\sqrt{\Phi''(x_0)}} < \infty.$

Зазначимо, що дослідження, проведені в дисертації стосуються випадку систем з квадратичною взаємодією.

1.2 Відомості з теорії сильно неперервних півгруп

Для доведення основного результату у розділі 2 істотним чином використовуються наступні відомості з теорії сильно неперервних півгруп в банахових просторах (див., наприклад, [6]).

Означення 1.6. *Сильно неперервною півгрупою* $\{P_t\}_{t\ge 0}$ в банаховому просторі X називається сім'я обмежених операторів $\{P_t \in \mathcal{L}(X),\ t \ge 0\}$, що задовольняє наступні властивості:

1) $P_0 = 1$ (1 — тотожне відображення в просторі X);

2) півгрупова властивість: $\forall\, t, s \in \mathbb{R}^1_+\ \ P_{t+s} = P_t P_s$;

3) сильна неперервність: $\forall\, x \in X$ відображення $\mathbb{R}^1 \ni t \to P_t x \in X$ є неперервним, тобто $\|P_s\, x - P_t\, x\|_X \to 0$, при $s \to t$.

Півгрупа P_t називається *стискаючою*, якщо $\|P_t\|_{\mathcal{L}(X)} \le 1,\ t \ge 0$ і квазістискаючою зі сталою $M \in \mathbb{R}^1$, якщо $\|P_t\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{Mt},\ t \ge 0$.

Означення 1.7. *Генератором H* сильно неперервної півгрупи $\{P_t\}_{t\ge 0}$ називається лінійний оператор, який задається як границя:

$$Hx = -\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(P_t x - x) = -\frac{d^+}{dt}\Big|_{t=0} P_t x \tag{1.20}$$

для тих $x \in X$, для яких така границя існує. *Область визначення генератора H* — це множина всіх $x \in X$, для яких границя (1.20) існує:

$$\mathcal{D}_X(H) = \{x \in X\colon\ \exists\ Hx \in X\}.$$

Оператор H з областю визначення $\mathcal{D}_X(H)$ називається *щільно заданим* в банаховому просторі X, якщо $\|\cdot\|_X$-замикання лінійної оболонки $\mathcal{D}(H)$ співпадає з простором X (позначення: $\widetilde{\mathcal{D}(H)} = X$). Оператор H називається *замкненим*, якщо $\forall\, x_n \in \mathcal{D}(H)$ із збіжності $x_n \to x$ та $Hx_n \to y$, випливає $x \in \mathcal{D}(H)$ і $Hx = y$.

Теорема 1.8 (Хілле–Іосіди, [119, 199])**.** Оператор H є генератором сильно неперервної квазі-стискаючої півгрупи P_t зі сталою M тоді і лише тоді, коли H є замкненим, щільно заданим оператором в X і справедлива наступна оцінка:

$$\forall\, \lambda > M \;\; \exists\, (\lambda + H)^{-1} \colon X \to \mathcal{D}(H) \;\; \text{і} \;\; \|(\lambda + H)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le 1/(\lambda - M).$$

Вище $(\lambda + H)^{-1}$ позначає резольвенту оператора H.

Для будь-якого $x \in X$ розглянемо множину $J(x)$ спряжених до x елементів простору X^*:

$$J(x) = \{\ell_x \in X^* \colon \quad \|x\|_X^2 = \|\ell_x\|_{X^*}^2 = \langle\, \ell_x, x \,\rangle\,\}. \tag{1.21}$$

З теореми Хана–Банаха [11] випливає, що множина $J(x)$ є непорожньою для довільного $x \in X$. Будь-який перетин $j \colon X \to X^*$ багатозначного відображення $X \ni x \to J(x) \subset X^*$ називається *відображенням двоїстості*.

Означення 1.9. Оператор H в дійсному банаховому просторі X називається *квазі-акретивним зі сталою* M відносно відображення двоїстості j, якщо $\exists\, M \in \mathbb{R}^1$ така, що

$$\forall\, x \in \mathcal{D}(H) \colon \qquad \langle\, j(x), (H + M)x \,\rangle \ge 0. \tag{1.22}$$

У випадку гільбертового простору $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, умова (1.22) має наступний вигляд:

$$\forall\, x \in \mathcal{D}(H) \quad \big(x, (H+M)x\big)_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Наступна теорема дає частину твердження теореми Хілле–Іосіди в формі Люмера–Філліпса для випадку квазі-стискаючих півгруп [164].

Теорема 1.10. Генератор H сильно неперервної квазі-стискаючої півгрупи P_t є квазі-акретивним по відношенню до будь-якого перетину двоїстості.

Фактично, з цієї теореми випливає необхідна умова того, що в деякому просторі X оператор H буде генератором сильно неперервної квазі-стискаючої півгрупи. Це твердження в подальшому дослідженні є одним з ключових, оскільки дозволяє у розділі 2 ефективно вибирати кандидатів на простори, в яких будуть досліджені гладкі властивості еволюції гіббсової системи.

Лема 1.11. [85] Квазі-акретивний щільно заданий оператор має єдине квазі-акретивне замикання.

Наступна теорема дає достатні умови того, що замикання оператора H з деякої множини $D \subset \mathcal{D}(H)$ генерує сильно неперервну півгрупу.

Теорема 1.12. [24, теорема X.49] Нехай P_t є сильно неперервною квазістискаючою півгрупою в банаховому просторі X. Припустимо, що деякий щільний підпростір $D \subset X$ зберігається цією півгрупою, тобто для будь-якого $t \geq 0$ $P_t \colon D \to D$ і на області D півгрупа має генератор A:

$$\forall\, x \in D \colon\; \exists\, \frac{d^+}{dt}\Big|_{t=0} P_t x = Ax.$$

Тоді генератор P_t є замиканням оператора A з області $\mathcal{D}(A) = D$.

Зауваження 1.13. Доведення теореми 2.10 розділу 2 спирається на теорему Да Прато–Грісварда, яка дає достатні умови для скінченної суми непідпорядкованих операторів утворювати сильно неперервну півгрупу ([84, 85], див. також [1, теорема 3.18]).

Теорема 1.14. (Да Прато–Грісварда) Нехай X — банахів простір. Припустимо, що:

1. Оператори $A_1, \dots, A_p, B$ замкнені в X і їх резольвенти задовольняють оцінки
$$\begin{aligned} &\|(\lambda + A_i)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/(\lambda - \alpha_i),\ \lambda > \alpha_i, \\ &\|(\lambda + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/(\lambda - \beta),\ \lambda > \beta. \end{aligned} \tag{1.23}$$
2. Існує банахів простір Y, щільно та неперервно вкладений в X такий, що $Y \subset \mathcal{D}(B)$, і, крім того, Y щільно і неперервно вкладений в $\mathcal{D}(A_i^2)$ з нормою графіку в X:
$$\exists\ C\ \forall\ y \in Y\colon\ \|A_i^2 y\|_X \leq C\|y\|_Y, \quad i = 1, \dots, p.$$
3. Існують сталі $\gamma_1, \dots, \gamma_p, \delta$, такі, що звуження операторів A_i, B на Y задовольняють оцінки:
$$\|(\lambda + A_i \restriction_Y)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq 1/(\lambda - \gamma_i), \quad \lambda > \gamma_i,$$
$$\|(\lambda + B \restriction_Y)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq 1/(\lambda - \delta), \quad \lambda > \delta.$$

Тоді оператор $L = A_1 + \dots + A_p + B$ з областю визначення $\mathcal{D}(L) = Y$ допускає замикання $\widetilde{L}$, яке генерує сильно неперервну півгрупу в просторі X зі сталою квазіакретивності $\theta = \alpha_1 + \dots + \alpha_p + \beta$. Крім того, має місце мультиплікативна формула:
$$e^{-t\widetilde{L}}x = X\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}A_1} \dots e^{-\frac{t}{n}A_p} e^{-\frac{t}{n}B}\right)^n x, \quad x \in X \tag{1.24}$$
з рівномірною збіжністю по t на скінченних інтервалах в $[0, T],\ T > 0$.

1.3 Висновки розділу 1

У даному розділі дисертації наведено короткий огляд літератури з теми теорії гіббсових мір та асоційованих з ними форм Діріхле. Крім того, сформульовані основні твердження та означення цієї теорії сильно неперервних півгруп та їх квазі-акретивних генераторів, що будуть використовуватися в наступних розділах.

РОЗДІЛ 2

L_2-ГЛАДКІ ВЛАСТИВОСТІ ЕВОЛЮЦІЇ ГІББСОВОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо сім'ю операторів

$$H_Q = \sum_{k\in Q} H_k, \qquad H_k = -\frac{1}{2}\big\{\partial_k^2 + [F(x_k) + (Bx)_k]\partial_k\big\}, \tag{2.1}$$

де сума береться по підмножині $Q \subseteq \mathbb{Z}^d,\ |Q| \leq \infty$.

Такі оператори мають невід'ємну квадратичну *енергетичну форму* (див. [1, розділ 2])

$$(H_Q u, u)_{L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu)} = \frac{1}{2}\sum_{k\in Q}\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} |\partial_k u|^2 d\mu \geq 0. \tag{2.2}$$

Вони пов'язані з гіббсовою мірою $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ з потенціалом вигляду

$$U_\Lambda = \sum_{k\in\Lambda} U_k, \qquad U_k = \Phi(x_k) + \sum_{k\in\Lambda}(Bx)_k x_k, \tag{2.3}$$

де $F = \Phi'$. Оператори типу H_Q називають *операторами енергії* гіббсової системи.

Надалі припустимо, що $F(x)$ є гладкою симетричною монотонно зростаючою функцією $F(0) = 0$, що зростає на нескінченності не швидше полінома разом з усіма своїми похідними

$$\exists\, \varkappa > 0\colon \forall\, j \geq 0\ \ \exists\, C_j\colon\ |F^{(j)}(x) - F^{(j)}(z)| \leq K_j|x-z|(1+|x|+|z|)^\varkappa, \tag{2.4}$$

а матриця $B_{kj} = \{\, b(k-j)\,\}_{k,j\in\mathbb{Z}^d}$ є скінченно-діагональною, тобто

$$\exists\, r_0\colon \forall\, k \in \mathbb{Z}^d\colon |k| > r_0 \;\Rightarrow\; b(k) \equiv 0. \tag{2.5}$$

За наведених вище умов множина гіббсових мір помірного росту є непустим опуклим компактом [12,14,158,160,184], причому для достатньо малих $\{\, b(j)\,\}$ міра μ є єдиною [100]. Зауважимо, що при $\varkappa > 1$ в (2.4) міра $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ не є гауссівською.

2.1 Простори L_2-диференційованих функцій зліченної кількості змінних $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$

Нехай $\mathbb{P}$ позначає множину послідовностей $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ таких, що $c_k > 0$ та

$$\delta_c = \sup_{|k-j|=1} |c_k/c_j| < \infty. \tag{2.6}$$

Зафіксуємо послідовність $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{P}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$ і розглянемо простори

$$\ell_p(a) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\colon \|x\|_{\ell_p(a)} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k |x_k|^p\Big)^{1/p} < \infty\}, \quad p \geq 1. \tag{2.7}$$

Лема 2.1. [1, Лема 3.10] Нехай $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ гіббсова міра помірного росту (1.10), (1.11). Тоді для довільного $p \geq 1$ простір $\ell_p(a)$ є простором повної міри: $\mu(\ell_p(a)) = 1$ і норма $\|x\|^q_{\ell_p(a)}$ є інтегровною

$$\forall\, q, p \geq 1 \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \|x\|^q_{\ell_p(a)} d\mu(x) < \infty. \tag{2.8}$$

Крім того, для будь-якого $x \in \ell_2(a)$ довільна куля

$$B(x,\delta) = \{y\colon \|x-y\|_{\ell_2(a)} < \delta\}$$

має строго додатну міру μ.

Доведення. З нерівності Гельдера $|\sum x_k y_k| \leq \|x\|_{\ell_{p_1}} \|y\|_{\ell_{p_2}}$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ з $p_1 = q/(q-p)$, $p_2 = q/p$ випливає

$$\forall\, q \geq p \quad \|x\|_{\ell_p(a)} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k |x_k|^p)^{1/p} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k^{(q-p)/q} a_k^{p/q} |x_k|^p)^{1/p} \leq$$

$$\leq (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k)^{(q-p)/qp} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k |x_k|^q)^{1/q} = \|x\|_{\ell_q(a)}. \tag{2.9}$$

Тому маємо інтегровність норми

$$\forall\, q \geq p \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \|x\|^q_{\ell_p(a)} d\mu(x) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \|x\|^q_{\ell_q(a)} d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k |x_k|^q d\mu \leq (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k) \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} |x_k|^q d\mu(x) < \infty.$$

З нерівності

$$\mu(\{x\colon\ \|x\|_{\ell_p(a)} \geq N\}) \leq \frac{1}{N} \int\limits_{\|x\|_{\ell_p(a)} \geq N} \|x\|_{\ell_p(a)} d\mu(x) \leq \frac{K}{N} \to 0, \quad N \to \infty$$

випливає, що простір $\ell_p(a)$ є простором повної міри.

Введемо позначення $\mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ для множини векторів з скінченною кількістю ненульових координат. Нехай $\operatorname{supp}(h) = \{k \in \mathbb{Z}^d\colon\ h_k \neq 0\}$ позначає носій циліндричності вектора $h \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d}$.

Припустимо, що для деякої кулі з центом $x^0 \in \ell_2(a)$ радіуса $\varepsilon > 0$ $\mu(B(x^0, \varepsilon)) = 0$. Розглянемо функцію $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, таку, що

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]; \\ 0, & x \notin (-\varepsilon, \varepsilon), \end{cases}$$

яка приймає значення в проміжку $[0,1]$. Введемо позначення

$$\pi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \varphi(\|y - x\|^2_{\ell_2(a)})\, d\mu(y).$$

Оскільки $0 \leq \varphi \leq 1$ і $0 \leq \pi(x^0) \leq \mu(B(x^0, \varepsilon)) = 0$, маємо $\pi(x^0) = 0$.

Нехай послідовність $h_j \in \mathbb{R}_0^{\mathbb{Z}^d}$ така, що кулі $\{B(x^0 + h_j, \varepsilon/2)\}_{j\geq 1}$ утворюють покриття сепарабельного простору $\ell_2(a)$. В такому випадку

$$1 \leq \sum_{j\geq 1} \varphi\big(\|x - (x^0 + h_j)\|^2_{\ell_2(a)}\big).$$

Інтегруючи цю нерівність, враховуючи $\mu(\ell_2(a)) = 1$, отримаємо, що існує вектор $h^* \in \{h_j\}_{j\geq 1}$, такий, що $\pi(x^0 + h^*) > 0$.

Підрахуємо похідну

$$\frac{d}{d\alpha}\pi(x^0 + \alpha h^*) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \varphi(\|y - (x^0 + \alpha h^*)\|^2_{\ell_2(a)}) d\mu(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \varphi' \sum_{k\in \operatorname{supp}(h^*)} [-2a_k h_k^*(y_k - x_k^0 - \alpha h_k^*)]\, d\mu(y) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \sum_{k\in \operatorname{supp}(h^*)} h_k^* \partial_k \varphi\, d\mu(y) = -\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} [\sum_{k\in \operatorname{supp}(h^*)} h_k^* \partial_k U_k]\varphi\, d\mu.$$

На останньому кроці було застосовано формулу інтегрування частинами (1.17) з потенціалами (2.3). З наступного вкладення для $\alpha \in [0, 1]$:

$$\operatorname{supp}\varphi(\|\cdot - (x^0 + \alpha h^*)\|^2_{\ell_2(a)}) \subset B(x^0 + \alpha h^*) \subset$$

$$\subset \Gamma^\varepsilon_{x^0,h^*} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \colon |x_k| \leq |x_k^0| + |h_k^*| + \frac{\varepsilon}{\sqrt{a_k}} \text{ для } k \colon \operatorname{dist}(k, \operatorname{supp}(h^*)) \leq r_0\},$$

і припущень (2.4), (2.5) випливає, що супремум є скінченним

$$\sup_{x\in\Gamma^\varepsilon_{x^0,h^*}} \sum_{k\in \operatorname{supp}(h^*)} |h_k^*|\,|\partial_k U_k| \leq K(x^0, h^*, \varepsilon) < \infty.$$

Тому

$$|\frac{d}{d\alpha}\pi(x^0 + \alpha h^*)\,| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in B(x^0+\alpha h^*,\varepsilon)} \sum_{k\in \operatorname{supp}(h^*)} |h_k^*|\,|\partial_k U_k| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \varphi(\|y - (x^0 + \alpha h^*)\|^2_{\ell_2(a)}) d\mu(x) \leq$$

$$\leq K(x^0, h^*, \varepsilon)\, \pi(x^0 + \alpha h^*),$$

що дає двосторонню оцінку $-K\pi(\alpha) \le \dfrac{d\pi}{d\alpha} \le K\pi(\alpha)$. Враховуючи нерівності

$$0 \le \frac{d\pi}{d\alpha} + K\pi = e^{-K\alpha}\frac{d}{d\alpha}(e^{K\alpha}\pi) \quad \text{та} \quad \frac{d\pi}{d\alpha} - K\pi = e^{K\alpha}\frac{d}{d\alpha}(e^{-K\alpha}\pi) \le 0$$

маємо

$$e^{-K\alpha}\pi(0) \le \pi(\alpha) \le e^{K\alpha}\pi(0).$$

Тому

$$0 = \pi(x^0) = \pi(x^0 + \alpha h^*)\Big|_{\alpha=0} \ge e^{-K(x^0,h^*,\varepsilon)}\pi(x^0 + \alpha h^*)\Big|_{\alpha=1} > 0,$$

що неможливо і суперечить $\mu(B(x^0,\varepsilon)) = 0$. $\square$

Розглянемо простір $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ нескінченно диференційованих циліндричних функцій не більш ніж поліноміального росту з усіма похідними, тобто таких функцій $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, що їх носій циліндричності $\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f \subset \mathbb{Z}^d$ є скінченною множиною та існує така функція $g_f \in C^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f})$, що $f(\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}) = g_f(\{x_k\}_{k\in\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f})$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Причому функція g_f та її похідні зростає на нескінченності не швидше полінома, тобто:

$$\exists\ \{K_j, n_j\}_{j\ge 0}\ \ \forall\, \tau \subset (\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f)^j,\ |\tau| = j$$

$$|\partial_\tau g_f(x)| \le K_j(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^{\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}})^{n_j}, \quad x \in \mathbb{R}^{\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}.$$

Символ $\partial_\tau = \partial_{k_1}\ldots\partial_{k_n}$ позначає частинні похідні в напрямках $\tau = \{k_1,\ldots,k_n\}$.

Означення 2.2. *Гільбертів простір* $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ визначається як замикання множини $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ у нормі

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \sum_{(p,\mathbf{C})\in\Theta}\ \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)\,\langle \mathbf{C}\,\partial^m f, \partial^m f\rangle\, d\mu(x), \tag{2.10}$$

де $z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(1+x_k^2)$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, $\{a_k\} \in \mathbb{P}$. Скінченний набір ваг $\Theta = \{(p, \mathbf{C}\,)\}$ задовольняє наступні вимоги:

1) кожна вага $p(z)$ є монотонно зростаючою функцією не більш ніж поліноміального росту

$$\exists\, \varepsilon, K > 0 \;\text{ такі, що }\; \forall\, z \in [1,\infty)$$

$$p(z) \geq \varepsilon \;\text{ та }\; (1+z)\big(|p'(z)| + |p''(z)|\big) \leq K\, p(z); \tag{2.11}$$

2) матрична мультивага $\mathbf{C} = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m$, $C^j \in \mathbb{P}$, задає скалярний добуток

$$\langle\, \mathbf{C}\, \partial^m f, \partial^m f\rangle = \sum_{k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1} \ldots C^m_{k_m} |\partial_{k_1} \ldots \partial_{k_m} f|^2, \tag{2.12}$$

де $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ та $\partial^m f = \{\partial_{k_1} \ldots \partial_{k_m} f\}_{k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{Z}^d}$ позначає частинну похідну;

3) одна з ваг в (2.10) має вигляд $\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p_0(z)|f(x)|^2\, d\mu(x)$, тобто $(p_0, \varnothing) \in \Theta$.

Зауваження 2.3. (Коректність означення.) З леми 2.1 випливає, що норма $\|f\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ скінченна для довільної функції $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$. Більш того, не потрібно проводити попередню факторизацію $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ в цьому означенні, оскільки для $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ з $\|f\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = 0$ випливає, що $f \equiv 0$. Дійсно, нехай $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ не дорівнює тотожно нулю і $B_{Eucl}(x^0, \delta)$ позначає кулю у скінченно-вимірному просторі $\mathbb{R}^{\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}$, на якій $|f| \geq \gamma > 0$. Оскільки з нерівності $\|x - y\|_{\ell_2(a)} \leq \beta$ випливає:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \; |x_k - y_k|^2 \leq \beta / a_k,$$

то множина $B_{\mathrm{Eucl}}(x^0, \delta) \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d \setminus \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}$ містить $\ell_2(a)$-кулю

$$\widetilde{B} = B_{\ell_2(a)}\big(\,(x_{\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}, 0_{\mathbb{Z}^d \setminus \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f}),\, \delta(\sum_{k\in \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f} 1/a_k)^{-1}\big).$$

З леми 2.1 випливає, що $\mu(\widetilde{B}) > 0$, і тому

$$\|f\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \geq \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p_0(z)|f|^2 d\mu \geq \varepsilon_{p_0} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} |f|^2 d\mu \geq \varepsilon_{p_0}\gamma^2\mu(\widetilde{B}) > 0.$$

Отже факторизація не потрібна.

2.2 Квазі-акретивність операторів H_Q в просторах $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$

Для того, щоб сформулювати наступну теорему введемо деякі позначення. Нехай $(p, \mathbf{C} = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m) \in \Theta$ — деяка вага, що відповідає похідній m-го порядку функції f в означенні (2.10). Введемо позначення $\{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\}_{i<j\in\{1,\dots,m\}}$ для матриці, що відповідає $(m-1)$-шій похідній, яка будується по матриці $\mathbf{C}$ за наступним правилом:

$$\{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\} = C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes \underset{\uparrow j}{(A)^{-(\varkappa+1)}} C^i C^j \otimes \cdots \otimes C^m. \tag{2.13}$$

Скорочення $C^1 \otimes \underset{\widehat{i}}{\ldots} \otimes C^s$ означає, що у тензорному добутку i-тий множник опущений, а $C^1 \otimes \cdots \otimes \underset{\uparrow j}{B} \otimes \cdots \otimes C^s$ означає, що на j-ому місці у тензорному добутку стоїть матриця B. Матриця A є діагональною з елементами $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$.

Теорема 2.4. [54, теорема 3]Нехай скінченний набір ваг Θ такий, що для будь-якої ваги $(p, \mathbf{C}) \in \Theta$ та пари $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i < j$ існує вага $(\widetilde{p}, \widetilde{\mathbf{C}}) \in \Theta$, яка оцінює зверху вагу $(z^{\varkappa+1}p(z), \widehat{\mathbf{C}}^{ij})$, тобто існує така стала K, що

$$\begin{aligned} & z^{\varkappa+1}p(z) \leq K \cdot \widetilde{p}(z), \ z \geq 1, \\ & \{\widehat{\mathbf{C}}^{ij}\}^\ell \leq K\, \widetilde{\mathbf{C}}^\ell, \quad \ell = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

де нерівність (2.14) розуміється як покоординатна нерівність між векторами з $\mathbb{P}$.

Тоді оператори $\{H_Q\}$ рівномірно по $\{Q \subseteq \mathbb{Z}^d,\ |Q| \leq \infty\}$ квазі-акретивні в просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, тобто:

$$\exists\ M_\Theta\ \forall\, u \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}):\ \ (H_Q u, u)_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \geq -M_\Theta \|u\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}. \tag{2.15}$$

Доведення. Скалярний добуток у гільбертовому просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ відновлюється по нормі (2.10), тому

$$(H_Q u, u)_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \sum_{(p,\mathbf{C}\,)\in\Theta} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)\langle\, \mathbf{C}\, \partial^m H_Q u, \partial^m u\rangle\, d\mu, \quad u \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}). \tag{2.16}$$

Для перевірки властивості (2.15) візьмемо один з членів в (2.16), що відповідає вазі $(p, \mathbf{C}\,)$, і перевіримо, що завдяки структурі набору Θ, кожен такий член можна оцінити знизу числом $-M_\Theta\|u\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$. Іде доведення полягає у виділенні півобмеженої знизу діагональної частини в (2.16), після чого, члени з похідними менших порядків оцінюються з використанням ієрархії ваг у нормі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ (2.14).

З представлення (2.1) оператора H_j випливає наступне комутаційне співвідношення

$$\sum_{j\in Q} [\partial_k, H_j] u = \sum_{j\in Q} R_{kj}\partial_j u$$

з матрицею $R_{kj} = \delta_{kj}F'_k + b(k-j)$, яке запишемо в наступній формі:

$$[\partial, H_Q]u = F' I_Q \partial u + B I_Q \partial u. \tag{2.17}$$

Тут діагональна матриця I_Q має елементи

$$\{I_Q\}_{kk} = \begin{cases} 1,\ k \in Q \\ 0,\ k \in \mathbb{Z}^d \backslash Q \end{cases}$$

а матриця $F' I_Q \partial u$ також є діагональною з елементами $\{F'(x_k)\partial_k u\}_{k\in Q}$, що дорівнюють нулю для $k \notin Q$.

Використовуючи (2.17), представимо кожен з членів в (2.16) як суму

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p\,\langle \mathbf{C}\,\partial^m H_Q u, \partial^m u\rangle\, d\mu =$$

$$= \int p\,\langle \mathbf{C}\, H_Q \partial^m u, \partial^m u\rangle\, d\mu + \tag{2.18}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int p\,\langle \mathbf{C}\,\partial^j\{B I_Q \partial^{m-j} u\}, \partial^m u\,\rangle\, d\mu + \tag{2.19}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int p\,\langle \mathbf{C}\,\partial^j\{F' I_Q \partial^{m-j} u\}, \partial^m u\,\rangle\, d\mu. \tag{2.20}$$

Оцінка виразу (2.18). Використовуючи тотожність

$$2\,\langle \mathbf{C}\ H_Q \partial^m u, \partial^m u\,\rangle \,= H_Q\,\langle \mathbf{C}\,\partial^m u, \partial^m u\,\rangle \,+\, \langle\, \big(I_Q \otimes \mathbf{C}\,\big)\partial[\partial^m u], \partial[\partial^m u]\,\rangle \tag{2.21}$$

та симетричність операторів $\{H_Q,\ |Q| \le \infty\}$:

$$\int p \cdot H_Q\,\langle\, \mathbf{C}\,\partial^m u, \partial^m u\,\rangle\, d\mu = \int (H_{Q\cap \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}}\, u}\, p)\,\langle\, \mathbf{C}\,\partial^m u, \partial^m u\,\rangle\, d\mu, \tag{2.22}$$

перетворимо (2.18) до вигляду

$$\begin{aligned}(2.18) =& \frac{1}{4}\int (H_Q p)\,\langle\, \mathbf{C}\,\partial^m u, \partial^m u\,\rangle\, d\mu + \\ &+ \frac{1}{2}\int p\,\langle\, (I_Q \otimes \mathbf{C}\,)\partial\partial^m u, \partial\partial^m u\,\rangle\, d\mu,\end{aligned} \tag{2.23}$$

де вираз $\langle\, (I_Q \otimes \mathbf{C}\,)\partial\partial^m u, \partial\partial^m u\,\rangle$ розуміється у сенсі (2.12), як генерований новою матрицею $\mathbf{C}_1 = I_Q \otimes \mathbf{C} \,= I_Q \otimes C^1 \otimes \cdots \otimes C^m$. Зауважимо, що другий доданок в (2.23) є невід'ємним. Для завершення оцінки виразу (2.18), застосуємо наступну лему.

Лема 2.5. Нехай p є монотонно зростаючою функцією не більше ніж поліноміального росту (2.11). Тоді для будь-якого $\{a_k\} \in \mathbb{P}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, існує така стала M_p, що рівномірно по $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \le \infty$:

$$H_Q p(z) \ge -M_p p(z), \qquad z = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(1+x_k^2).$$

Доведення леми 2.5. Безпосередній підрахунок дає

$$H_Q p(z) = \sum_{k\in Q}\Big\{-\frac{1}{2}\partial_k^2 + [F(x_k)+(Bx)_k]\partial_k\Big\} p\big(1+\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k x_k^2\big) = \tag{2.24}$$
$$= \sum_{k\in Q}\big\{-2a_k^2x_k^2p''(z) - a_kp'(z) + 2a_k[F(x_k)+(Bx)_k]x_kp'(z)\big\}.$$

Монотонність p і F та $F(0)=0$ дають $F(x_k)x_kp'(z)\ge 0$. Завдяки скінченності радіусу взаємодії маємо наступну оцінку:

$$\Big|\sum_{k\in Q} a_kx_k(Bx)_k\Big| = \Big|\sum_{k\in Q, j\in\mathbb{Z}^d} a_kx_kx_jb(k-j)\Big| \le$$
$$\le \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d\ |j-k|\le r_0} \sqrt{a_k}\sqrt{a_j}\,\big|x_kx_jb(k-j)\big|\,\delta_a^{r_0/2} \le$$
$$\le \max_{|j|\le r_0}|b(j)|\,\delta_a^{r_0/2} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d\ |j-k|\le r_0}\{a_kx_k^2/2 + a_jx_j^2/2\} \le$$
$$\le \max_{|j|\le r_0}|b(j)|\,\delta_a^{r_0/2}(2r_0+1)^d z = M'z,$$

де числа δ_a введені в (2.6). Вище також було використано, що

$$\sum_{k:\ |j-k|\le r_0} 1 = (2r_0+1)^d. \tag{2.25}$$

З поліноміальних властивостей ваг p (2.11), отримаємо

$$H_Q p(z) \ge -M'zp'(z) - \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\big)p'(z) - 2(\sup_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k)z|p''(z)|$$
$$\ge -(M'+3)Kp(z),$$

де також використано $a_k \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$. $\square$

Таким чином, з (2.23) і леми 2.5 випливає,

$$(2.18) \ge -\frac{1}{4}M\,\|u\|^2_{\mathcal{W}_{\Theta(\mu)}}.$$

Вираз (2.19) оцінюється зверху наступним чином:

$$\Big|\int p\,\langle\, \mathbf{C}\,\partial^j(BI_Q\partial^{m-j}u),\partial^m u\,\rangle\,d\mu\Big| =$$

$$=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p\sum C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m} b(a-k_{j+1})\times$$

$$\times\,\big\{\,(\partial_{k_1}\dots\partial_{k_j}\partial_a\partial_{k_{j+2}}\dots\partial_m u)\cdot(\partial_{k_1}\dots\partial_{k_m}u)\big\}d\mu\Big|\le$$

$$\le\sup_{|j|\le r_0}|b(j)|\int p\sum C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m}\times$$

$$\times\,\big\{\frac{1}{2}|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_j}\partial_a\partial_{k_{j+2}}\dots\partial_{k_m}u|^2+\frac{1}{2}|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_m}u|^2\big\}d\mu.$$

Вище сума береться по всім скінченним підмножинам ґратки $\mathbb{Z}^d$ наступного вигляду:

$$\{(k_1,\dots,k_m,a)\in(\mathbb{Z}^d)^{m+1}\colon |a-k_{j+1}|\le r_0, k_{j+1}\in\mathbb{Z}^d, a\in Q\}.$$

Виконуючи заміну у першому члені:

$$C^{j+1}_{k_{j+1}}=\frac{C^{j+1}_{k_{j+1}}}{C^{j+1}_a}C^{j+1}_a\le\delta^{|k_{j+1}-a|}_{C^{j+1}}C^{j+1}_a\le\delta^{r_0}_{C^{j+1}}C^{j+1}_a,$$

після пересумування по індексам a, k_{j+1} отримаємо

$$(2.19)\le\frac{1}{2}\sup_{|j|\le r_0}|b(j)|\,(2r_0+1)^d(1+\delta^{r_0}_\Theta)\,\|u\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)},\tag{2.26}$$

де

$$\delta_\Theta=\sup_{(p,\mathbf{C}=C^1\otimes\dots\otimes C^m)\in\Theta}\ \sup_{j=1,\dots,m}\delta_{C^j}<\infty.\tag{2.27}$$

Для оцінки доданку (2.20) використовується ієрархія ваг (2.14). Виберемо один з доданків в (2.20) для $j\in\{1,\dots,m-1\}$ і застосуємо до нього формулу Лейбніца, виділивши окремо член з $|\alpha|=0$:

$$(2.20)_j=\int p(z)<\mathbf{C}\ (I\otimes\dots\otimes \underset{\uparrow(j+1)}{F'I_Q}\otimes\dots\otimes I)\,\partial^m u,\partial^m u\,\rangle\,d\mu+\tag{2.28}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha\cup\beta=\{1,\ldots,j\}\\ \alpha\cap\beta=\varnothing,|\alpha|>0}} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z) < \mathbf{C}\,(\partial^\alpha F' I_Q)\cdot\partial^\beta\partial^{m-j}u, \partial^m u\,\rangle\, d\mu, \tag{2.29}$$

де $\partial^\beta = \prod_{s\in\beta}\partial_{k_s}$. Вище сумування проводиться по всім підрозбиттям множини $\{1,\ldots,j\}$ на дві підмножини, що не перетинаються $\alpha\cap\beta=\varnothing$, $|\alpha|>0$.

З монотонності F випливає невід'ємність доданку (2.28). Нерівність Гельдера і співвідношення $\partial_k F^{(m)}(x_j) = \delta_{kj}F^{(m+1)}(x_j)$ дають

$$|(2.29)| \le \|u\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\Big(\int p(z) < \mathbf{G}_F^{\alpha,\beta}\partial^\beta\partial^{m-j}u, \partial^\beta\partial^{m-j}u\,\rangle\, d\mu\Big)^{1/2}, \tag{2.30}$$

де

$$\mathbf{G}_F^{\alpha,\beta} = \underset{s\in\beta}{\otimes} C^s \otimes C^{\{\alpha\}}C^{j+1}|F^{(1+|\alpha|)}(x_{k_{j+1}})|^2 I_Q \otimes C^{j+2}\otimes\cdots\otimes C^m \tag{2.31}$$

з $C^{\{\alpha\}} = \prod_{r\in\alpha} C^r$. З (2.4) випливає, що $\forall\, m\ge 0$

$$|F^{(m)}(x_k)|^2 \le D_m(1+x_k^2)^{\varkappa+1} \le D_m\frac{(a_k(1+x_k^2)\,)^{\varkappa+1}}{a_k^{\varkappa+1}} \le D_m\frac{z^{\varkappa+1}}{a_k^{\varkappa+1}},$$

тому з $z\ge 1$ і $A^{-\varkappa+1}\ge I$, випливає наступна нерівність, яку слід розуміти як нерівність між діагональними матриця ми:

$$|F^{(2+|\alpha|)}|^2 I_Q \le D_{1+|\alpha|}\, z^{|\alpha|(\varkappa+1)}A^{-|\alpha|(\varkappa+1)}. \tag{2.32}$$

Використовуючи (2.32), вираз (2.30) наступним чином:

$$(2.30) \le \|u\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\Big(\int p(z)z^{|\alpha|(\varkappa+1)}\langle\, \widehat{\mathbf{C}}^{\,\alpha,\beta}\partial^\beta\partial^{m-j}u, \partial^\beta\partial^{m-j}u\,\rangle\, d\mu\Big)^{1/2}, \tag{2.33}$$

де $\widehat{\mathbf{C}}^{\,\alpha,\beta} = \underset{s\in\beta}{\otimes} C^s\otimes(C^{\{\alpha\}}C^{j+1}A^{-|\alpha|(\varkappa+1)})\otimes C^{j+2}\otimes\cdots\otimes\, C^m$.

З припущень (2.14) на структуру набору Θ, випливає, що існує пара $(q,\widetilde{\mathbf{C}}\,)\in\Theta$, яка оцінює пару $(z^{|\alpha|(\varkappa+1)}p(z),\widehat{\mathbf{C}}^{\,\alpha,\beta})$, тому

$$(2.29) \ge -K'\,\|u\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}.$$

Остаточно, збираючи оцінки виразів (2.18)–(2.20), отримаємо (2.15). Зауважимо, що скінченність всіх інтегралів випливає з (1.11) та (2.8) для $u \in \mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ і оцінок (2.11) на функції поліноміального росту p. $\square$

2.3 Розбиття оператора H_Q на скінченну суму локалізованих операторів

Розглянемо куб $\square = [1, \mathbf{n}]^d \cap \mathbb{Z}^d$ з $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, таким, що $\mathbf{n} > 2r_0$, де r_0 — радіус взаємодії, означений в (2.5). Введемо позначення $\mathcal{U}_{(0)} = \mathcal{U}_{(0,\ldots,0)}$ для множини

$$\mathcal{U}_{(0)} = \bigcup_{k \in (2\mathbf{n}\mathbb{Z})^d} \tau_k \square,$$

де τ_k позначає зсув на вектор $k \in \mathbb{Z}^d$: $\tau_k j = j + k$.

Для набору $i = (i_1, \ldots, i_d)$, $i_s \in \{0, 1\}$, $s = 1, \ldots, d$ позначимо через $\mathcal{U}_{(i)} = \mathcal{U}_{(i_1,\ldots,i_d)}$ зсув множини $\mathcal{U}_{(0)}$ на вектор $(i_1\mathbf{n}, \ldots, i_d\mathbf{n}) \in \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{U}_{(i)} = \tau_{(i_1\mathbf{n},0,\ldots,0)} \ldots \tau_{(0,\ldots,0,i_d\mathbf{n})} \mathcal{U}_{(0)}. \tag{2.34}$$

Множини $\{\mathcal{U}_{(i)},\ i \in \{0,1\}^d\}$ формують скінченне розбиття ґратки $\mathbb{Z}^d$ на нескінченні підмножини, що не перетинаються. Таке розбиття ґратки $\mathbb{Z}^d$ приводить до представлення оператора H_Q як скінченної суми "блочних" операторів $H_{Q(i)}$:

$$H_Q = \sum_{i \in \{0,1\}^d} H_{Q(i)}, \tag{2.35}$$

де

$$H_{Q(i)} = \sum_{k \in Q(i)} H_k, \quad Q(i) = Q \cap \mathcal{U}(i). \tag{2.36}$$

Формула (2.35) дає представлення оператора зліченної кількості змінних H_Q як скінченної суми операторів $H_{Q(i)}$ з розділеними змінними: з властивості $[H_k, H_j] = 0$, $|k-j| > 2r_0$ випливає, що “блочні” частини $(\tau_k\square)\cap Q$ кожного з операторів $H_{Q(i)}$ комутують між собою.

Розглянемо один з операторів $H_{Q(i)}, i \in \{0,1\}^d$, наприклад, нехай $i = (0) \in \{0,1\}^d$. Йому відповідає наступна параболічна задача Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f_t(x) = -H_{Q(0)} f_t(x); \\ f_t\big|_{t=0}(x) = f(x) \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}). \end{cases} \tag{2.37}$$

Введемо позначення $\Lambda_f = \bigcup\limits_{k\in S} \tau_k\square$ для скінченного набору блоків з $Q(0)$, які перетинаються з носієм циліндричності функції f, де

$$S = \{k \in (2\mathbf{n}\mathbb{Z})^d \colon \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f \cap \tau_k\square \neq \varnothing\}.$$

Розглянемо допоміжну задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} g_t(x) = -H_{Q\cap\Lambda_f} g_t(x); \\ g_t\big|_{t=0}(x) = f(x) \end{cases} \tag{2.38}$$

з диференціальним оператором $H_{Q\cap\Lambda_f}$, що діє по скінченній кількості змінних, оскільки $|\Lambda_f| \le |\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}}\, f|\cdot|\square|$. З скінченності радіусу залежності змінних r_0 у виразі $H_{Q\cap\Lambda_f}$ випливає, що розв’язок g_t задачі (2.38), якщо існує, буде циліндричною функцією

$$\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}}\, g_t \subseteq \Omega_f := (Q\cap\Lambda_f)_{r_0} \cup \mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}} f, \tag{2.39}$$

де для будь-якої множини Ω:

$$(\Omega)_{r_0} = \{k \colon \ \mathrm{dist}\,(k,\Omega) \le r_0\}.$$

Крім того, розв’язок g_t задачі (2.38) також буде розв’язком задачі Коші (2.37), тому що $g_t\Big|_{t=0} = f$, а частина оператора H_Q за межами носія циліндричності функції g_t не діє: $H_{Q\cap(\mathcal{U}(0)\setminus\Lambda_f)} g_t = 0$, див. (2.39). Тому

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(x) = -H_{Q\cap\Lambda_f} g_t = -H_{Q(0)} g_t, \tag{2.40}$$

і задача (2.37) перетворюється в скінченновимірну задачу Коші над простором $\mathbb{R}^{\Omega_f}$, розмірність якого залежить від носія циліндричності функції $f \in \mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$. Враховуючи таку властивість операторів $H_{Q(i)}$ назвемо їх *локалізованими операторами.*

Різними методами може бути перевірено [7,8,10,30,131,157], що розв'язок скінченновимірної задачі Коші з оператором $\sum_i \{-\partial_i^2 - (\partial_i \Phi)\partial_i\}$ для функції Φ не більш ніж поліноміального росту з усіма похідними є нескінченно диференційовною функцією $f_t \in C^{\infty}([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ не більш ніж поліноміального росту разом з похідними. Зокрема справедлива наступна лема.

Лема 2.6. [54, Твердження 6] Для будь-якої скінченної або нескінченної множини $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \le \infty$ та $(i) \in \{0,1\}^d$ задача Коші (2.38) для "блочних" операторів $H_{Q(i)}$ гладко розв'язна в $\mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, тобто для початкового даного $f \in \mathcal{P}^{\infty}_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ розв'язок $g_t(x)$ задачі (2.38) є циліндричною $C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$-функцією не більше ніж поліноміального росту: $\mathrm{supp}_{\mathrm{cyl}}\, g_t \subseteq \Omega_f$ та для будь-якого $m \ge 0$ існують такі сталі $K^r = K^r_{m,f,Q}, r = 1,2,3$, що для довільного набору $k_1, \ldots, k_m \in \Omega_f^j$

$$\max_{n,j\in\{0,\ldots,m\}} |\partial_{k_n} \ldots \partial_{k_1} [\partial_t^j g_t(x)]\,| \le K_1 e^{tK_2} (1 + \sum_{i\in\Omega_f^j} x_i^2)^{K_3}. \tag{2.41}$$

Зауваження 2.7. *З (2.38) випливає* $\partial_t^j g_t(x) = (-1)^j [H_{Q\cap\Lambda_f}]^j g_t(x)$ *з початковою умовою* $\partial_t^j g_t(x)\Big|_{t=0} = [-H_{Q\cap\Lambda_f}]^j f$*. Тому маємо рекурентне співвідношення* $\Omega_f^j = (\Omega_f^{j-1})_{r_0}$ *та* $\Omega_f^0 = \Omega_f$.

2.4 Регулярні властивості локалізованих півгруп у шкалі просторів $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$

Півгрупи операторів $H_{Q(i)}$ будуються як замикання в топологіях просторів $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ скінченно-вимірних півгруп, що відповідають задачам Коші типу (2.37). Результат спирається на теорему 1.12, яка дає достатні умови того, що замикання оператора H з деякої множини $D \subset \mathcal{D}(H)$ генерує сильно неперервну півгрупу.

В наступній теоремі будуються півгрупи локалізованих операторів $H_{Q(i)}$ (2.36) в просторах $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$.

Теорема 2.8. [1, теорема 3.16] Для кожного $i \in \{0,1\}^d$ та $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \leq \infty$ замикання локалізованого оператора $\widetilde{H_{Q(i)}}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ з областю визначення $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ генерує сильно неперервну квазі-стискаючу півгрупу, і має місце оцінка:

$$\| \exp(-t\widetilde{H_{Q(i)}}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \leq e^{M_\Theta t}.$$

Крім того, для будь-якого підпростору $\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu)$ простору $\mathcal{W}_{\Theta_1}(\mu)$ має місце узгодженість півгруп:

$$\exp(-t\widetilde{H_{Q(i)}}^{\mathcal{W}_{\Theta_1}(\mu)}) \restriction_{\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu)} = \exp(-t\widetilde{H_{Q(i)}}^{\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu)}). \tag{2.42}$$

Зауваження 2.9. Властивість (2.42) фактично означає, що кожна з півгруп $\exp(-t\widetilde{H_{Q(i)}}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})$ зберігає підпростори, що складаються з більш гладких в сенсі L_2 функцій.

Доведення. Проведемо доведення для оператора $H_{Q(0)}$. Для всіх інших випадків $i \in \{0,1\}^d$ доведення аналогічне. Розглянемо сім'ю операторів $P_t = P_t^{Q(0)}, t \geq 0$, заданих на множині $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ формулою

$$P_t^{Q(0)} f = g_t,$$

де g_t позначає розв'язок задачі Коші (2.38). З леми 2.6 випливає:

$$P_t^{Q(0)} \colon \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \to \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}),\ t \geq 0.$$

Крім того, мають місце співвідношення: $P_0 = I,\ P_{t+s} = P_t P_s$. З (2.38) випливає $\partial_t P_t^{Q(0)} f = -H_{Q(0)} P_t^{Q(0)} f$ для $f \in \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, тому з теореми 2.4 маємо

$$\frac{d}{dt}\,\| P_t^{Q(0)} f\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = -2(H_{Q(0)} P_t f, P_t f)_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \leq 2M_\Theta\,\| P_t^{Q(0)} f\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}.$$

Отже

$$\| P_t^{Q(0)}\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \leq e^{M_\Theta t},$$

і існує замикання

$$\widetilde{P}_t := [P_t^{Q(0)}]^{\sim \mathcal{W}_\Theta(\mu)} \tag{2.43}$$

з щільної в просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ множини $\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$.

Це замикання також задовольняє співвідношення: $\widetilde{P_0} = I,\ \widetilde{P}_{t+s} = \widetilde{P}_t \widetilde{P}_s$ і має місце оцінка

$$\|\widetilde{P}_t\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \leq e^{M_\Theta t}.$$

Застосовуючи (2.41), для $g_t := P_t^{Q(0)} f$ маємо:

$$\begin{aligned} \| P_t^{Q(0)} f - f\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} &= \|\int\limits_0^t \frac{\partial g_s}{\partial s} ds\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \leq t^2 \sup_{s\in[0,t]} \|\frac{\partial g_s}{\partial s}\,\|^2_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \\ &= t^2 \sup_{s\in[0,t]} \sum_{(p,\mathbf{C})\in\Theta} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)\langle \mathbf{C}\,\partial^n \frac{\partial g_s}{\partial s}, \partial^n \frac{\partial g_s}{\partial s}\,\rangle\, d\mu \leq \\ &\leq t^2 K K^1 e^{2tK_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} (1 + \sum_{i\in\Omega_f^1} x_i^2)^{2K_3} d\mu \leq t^2 K' e^{2tK_2}, \quad f \in \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Вище було використано, що в $\langle \mathbf{C}\,\cdot, \cdot\,\rangle$ знаходиться лише скінченна кількість ненульових похідних, оскільки для будь-якого $k \in \mathbb{Z}^d \backslash \Omega_f^1 \colon \partial_k g_t = 0$

та $\partial_k(\partial_t g_t) = 0$. Також було застосовано (2.8), (1.11), і в (2.41) обрано m як найбільший порядок диференціювання в $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, після чого зібрано комбінаторну сталу K'. З оцінки (2.44) випливає сильна неперервність півгрупи по t на щільній множині:

$$\forall\, f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}): \quad \|\widetilde{P}_t f - f\,\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \to 0, \quad t \to 0+\,. \tag{2.45}$$

За означенням $\mathcal{W}_\Theta(\mu) = \widetilde{\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}}$, тому (2.45) також дає сильну неперервність замикання $\widetilde{P}_t$ в $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$. З властивостей (2.38), (2.40) і теореми 1.12, застосованої до сильно неперервної квазістискаючої півгрупи $\widetilde{P}_t$ у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ з областю $D = \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ і оператором $A = H_{Q(0)}$, випливає, що генератор $\widetilde{P}_t$ дорівнює $\widetilde{H_{Q(0)}}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$.

Властивість узгодженості (2.42) випливає з того, що півгрупу $\widetilde{P}_t$ побудовано як замикання з області $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$. □

2.5 Регулярні властивості гіббсової еволюції в просторах L_2-диференційованих функцій

Іде побудови півгрупи $e^{-t\widetilde{H_Q}}$ для довільної множини $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$ полягає у відтворенні її за допомогою мультиплікативної формули для півгрупи, генерованої скінченною сумою генераторів півгруп:

$$e^{-t\widetilde{H_Q}} = \lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d} e^{-\frac{t}{n}\widetilde{H_{Q\cap\mathcal{U}(i)}}} \Big)^n, \tag{2.46}$$

оскільки

$$H_Q = \sum_{i\in\{0,1\}^d} H_{Q\cap\mathcal{U}(i)}.$$

Основний результат цього розділу полягає в наступній теоремі, яке в певній мірі є узагальненням результатів роботи [52].

Теорема 2.10. [54] Нехай μ — гіббсова міра помірного росту $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ з потенціалами (2.4)–(2.5) та сім'я операторів $\{H_Q\}_{|Q|\le\infty}$ (2.1) означена на множині $\mathcal{D}(H_Q) = \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$.

Припустимо, що топології просторів $\{\mathcal{W}_\Theta(\mu)\}$ (2.10) задовольняють ієрархії (2.14) з нелінійним параметром $\varkappa$.

Тоді замикання оператора $\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ генерує сильно неперервну квазістискаючу півгрупу у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, і виконана рівномірна оцінка:

$$\exists\ \ M_\Theta\colon\ \forall\, Q \subseteq \mathbb{Z}^d\colon \quad \|\exp(-t\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W}_\Theta(\mu))} \le e^{M_\Theta t}.$$

Крім того має місце узгодженість дії півгрупи в просторах $\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu) \subset \mathcal{W}_{\Theta_1}(\mu)$:

$$\exp(-t\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_{\Theta_1}(\mu)}) \restriction_{\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu)} = \exp(-t\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_{\Theta_2}(\mu)}). \tag{2.47}$$

З теореми 2.8 та теореми Хілле–Іосіди 1.8 випливає, що локалізовані оператори $A_i = \widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ та оператор $B = 0$ задовольняють умови (1.23) теореми Да Прато–Грісварда (теорема 1.14) у просторі $X = \mathcal{W}_\Theta(\mu)$, $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$. Отже, залишилось побудувати простори $Y \subset \mathcal{D}_X(A_i^2)$, які виберемо з шкали $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$.

Лема 2.11. [54, Твердження 5] Для довільної ваги Θ, що задовольняє ієрархію (2.14), існує вага Θ', яка також задовольняє цю ієрархію, і є такою, що $\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}(H_Q)$ щільно, неперервно і рівномірно по $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \le \infty$, тобто існує така стала D_Θ, що для будь-якої множини $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \le \infty$

$$\forall\, f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\colon \quad \|H_Q f\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \le D_\Theta \|f\|_{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}. \tag{2.48}$$

Доведення цієї леми надано після доведення основної теореми 2.10.

Доведення теореми 2.10. Двічі застосовуючи лему 2.11, отримаємо простір $Y = \mathcal{W}_{\Theta''}(\mu) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}(H_Q^2)$ з рівномірною сталою $D_\Theta D_{\Theta'}$.

Зафіксуємо довільну множину $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \leq \infty$ і виберемо у теоремі 1.14 оператори $A_i = \widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$, $i \in \{0,1\}^d$, $B = 0$. Тоді по теоремі 2.8, з врахуванням властивості узгодженості (2.42) оператори A_i задовольняють умови теореми 1.14 для $X = \mathcal{W}_\Theta(\mu)$, $Y = \mathcal{W}_{\Theta''}(\mu)$. Тому оператор

$$L_\Theta = \sum_{i\in\{0,1\}^d} A_i = \sum_{i\in\{0,1\}^d} \widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}, \tag{2.49}$$

заданий на області $\mathcal{D}_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}(L_\Theta) = \mathcal{W}_{\Theta''}(\mu)$, допускає замикання $\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$, що генерує сильно неперервну квазі-стискаючу півгрупу зі сталою M_Θ (2.15) у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$. Ця півгрупа відтворюється по мультиплікативній формулі (1.24):

$$\exp(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})f = \mathcal{W}_\Theta(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}\exp(-\frac{t}{n}\widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\Big)^n f. \tag{2.50}$$

Рівність (2.50) виконується на довільній функції $f \in \mathcal{W}_\Theta(\mu)$ рівномірно по $t \in [0,T]$, $T > 0$. Зауважимо, що з теореми 2.8 випливає, що оператор L_Θ (2.49), звужений на область $\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, дає H_Q:

$$L_\Theta \restriction_{\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})} = \sum_{i\in\{0,1\}^d} \widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \restriction_{\mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})} = \sum_{i\in\{0,1\}^d} H_{Q(i)} = H_Q. \tag{2.51}$$

Для завершення доведення теореми 2.10 залишається показати, що генератор $\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ півгрупи, побудованої в (2.50), співпадає із замиканням $\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ оператора H_Q, $\mathcal{D}(H_Q) = \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ і продемонструвати властивість узгодженості (2.47).

Оскільки оператор H_Q з областю визначення $\mathcal{D}(H_Q) = \mathcal{P}_{\mathrm{cyl}}^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ квазіакретивний зі сталою M_Θ і щільно заданий на просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, тому [84, 85] (див. також лему 1.11) він має єдине замикання $\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$. Залишається довести, що для $\lambda > M_\Theta$

$$\mathrm{Ran}\,(H_Q + \lambda) \ \text{ щільно в } \ \mathcal{W}_\Theta(\mu), \tag{2.52}$$

тоді замикання $\widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ буде генератором сильно неперервної півгрупи, і матиме місце рівність $\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \widetilde{H_Q}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$.

Припустимо, що властивість (2.52) не виконана, тоді існує ненульовий функціонал $\ell \in (\mathcal{W}_\Theta(\mu))^* = \mathcal{W}_\Theta(\mu)$, такий, що

$$\forall\, \mathfrak{p} \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) : \quad \ell\big((H_Q + \lambda)\mathfrak{p}\big) = 0. \tag{2.53}$$

Запишемо (2.50) для деякого $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ і використаємо, що для таких $\mathfrak{p}$ відповідні півгрупи співпадають з розв'язками локалізованих задач Коші (2.38):

$$\begin{aligned}\exp\big(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\big)\mathfrak{p} &= \mathcal{W}_\Theta(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}\exp(-\frac{t}{n}\widetilde{H}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}_{Q(i)})\Big)^n\mathfrak{p} = \\ &= \mathcal{W}_\Theta(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P^{Q(i)}_{t/n}\Big)^n\mathfrak{p}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Використовуючи властивість (2.42) продовжимо ці рівності та перейдемо до локалізованих півгруп у довільному підпросторі $\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu) \subset \mathcal{W}_\Theta(\mu)$:

$$\begin{aligned}\exp\Big(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\Big)\mathfrak{p} &= \mathcal{W}_\Theta(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P^{Q(i)}_{t/n}\Big)^n\mathfrak{p} = \\ &= \mathcal{W}_\Theta(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}\exp(-\frac{t}{n}\widetilde{H}^{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}_{Q(i)})\Big)^n\mathfrak{p} = \\ &= \mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}\exp(-\frac{t}{n}\widetilde{H}^{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}_{Q(i)})\Big)^n\mathfrak{p} \\ &= \exp(-t\widetilde{L_{\Theta'}}^{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)})\mathfrak{p}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Вище оператор $\widetilde{L_{\Theta'}}^{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}$ розуміється в сенсі (2.49) з областю визначення $Y = \mathcal{W}_{\Theta''}(\mu)$, при цьому $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}) \subset \mathcal{W}_{\Theta''}(\mu)$. Застосовуючи лему 2.11 виберемо Θ' таким, що $\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}(H_Q)$ та

$$\forall\, Q \subseteq \mathbb{Z}^d,\ |Q| \le \infty \quad \|H_Q f\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} \le D_\Theta \|f\|_{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}, \quad f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$$

з деякою сталою $D_{\Theta(\mu)}$. Використовуючи означення генератора, збіжність (2.55), припущення (2.53), представлення (2.54), а також рівномірну по $t \in [0,T]$, $T>0$ збіжність параболічних задач Коші у більш сильній, ніж $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$, топології $\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}(H_Q)$, маємо:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ell\Big(\exp(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\mathfrak{p}\Big) &= -\ell\Big(\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\exp(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\mathfrak{p}\Big) = \\
&= -\ell\Big(\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\big[\,\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}\exp(-\frac{t}{n}\widetilde{H}_{Q(i)}^{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)})\,\big)^n\mathfrak{p}\big]\Big) = \\
&= -\ell\Big(\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\big[\,\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)\text{-}\lim_{n\to\infty}\big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P_{t/n}^{Q(i)}\,\big)^n\mathfrak{p}\big]\Big) = \\
&= -\lim_{n\to\infty}\ell\Big(\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\big[\big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P_{t/n}^{Q(i)}\,\big)^n\mathfrak{p}\big]\Big) = \\
&= -\lim_{n\to\infty}\ell\Big(H_Q\big[\big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P_{t/n}^{Q(i)}\,\big)^n\mathfrak{p}\big]\Big) = \\
&= \lambda\lim_{n\to\infty}\ell\Big(\big[\big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P_{t/n}^{Q(i)}\,\big)^n\mathfrak{p}\big]\Big) = \lambda\ell\Big(\exp(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\mathfrak{p}\Big). \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Отже можна винести границю назовні та замінити $(-H_Q)$ на λ на циліндричній функції $\varphi = \big(\prod_{i\in\{0,1\}^d}P_{t/n}^{Q(i)}\,\big)^n\mathfrak{p} \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ з врахуванням, що $\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}\restriction_{\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})} = H_Q$, та припущення (2.53). З формули (2.56) випливає тотожність $\ell(\exp(-t\widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\mathfrak{p}) = e^{\lambda t}\ell(\mathfrak{p})$, а з оцінки

$$
\forall\, t\ge 0 \quad e^{\lambda t}|\ell(\mathfrak{p})| = |\ell(\exp(-t\widetilde{L}_\Theta^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)})\mathfrak{p})| \le \|\ell\,\|_{(\mathcal{W}_\Theta(\mu))^*}\,\|\mathfrak{p}\,\|_{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}e^{M_\Theta t},
$$

та умови $\lambda > M_\Theta$, спрямовуючи $t\to\infty$, маємо, що $\ell(\mathfrak{p}) = 0$. З щільності $\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ у просторі $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ випливає $\ell = 0$. Це приводить до протиріччя з припущенням, що функціонал ℓ є ненульовим.

Таким чином, для $\lambda > M_\Theta$ множина $\mathrm{Ran}\,(H_Q+\lambda)$ є щільною в $\mathcal{W}_\Theta(\mu)$ і замикання $\widetilde{H}_Q^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)} = \widetilde{L_\Theta}^{\mathcal{W}_\Theta(\mu)}$ генерує сильно неперервну квазістискаючу півгрупу. Нарешті, властивість узгодженості (2.47) випливає з (2.54) та

(2.55) після замикання у відповідних топологіях із заміною $\widetilde{L}_{\Theta}^{\mathcal{W}_{\Theta}(\mu)}$ на $\widetilde{H}_{Q}^{\mathcal{W}_{\Theta}(\mu)}$. □

Доведення леми 2.11. Введемо для зручності позначення

$$|\partial^m u|^2_{\mathbf{C}} := \langle \mathbf{C}\, \partial^m u, \partial^m u\rangle \tag{2.57}$$

де скалярний добуток означений в (2.12). Щоб отримати оцінку (2.48), достатньо оцінити кожен доданок нормою $\|u\|^2_{\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)}$ та запропонувати точну процедуру побудови ваг Θ'. З співвідношення (2.17) отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p\left|\partial^m(H_Q u)\right|^2_{\mathbf{C}} d\mu = \int p\left|H_Q\partial^m u + \sum_{j=0}^{m-1}\partial^j\left[(F'I_Q + BI_Q)\partial^{m-j}u\right]\right|^2_{\mathbf{C}} d\mu \leq$$

$$\leq (2m+1)\Big\{\int p\left|H_Q\partial^m u\right|^2_{\mathbf{C}} d\mu + \tag{2.58}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int p\left|\partial^j BI_Q\partial^{m-j}u\right|^2_{\mathbf{C}} d\mu + \tag{2.59}$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int p\left|\partial^j(F'I_Q\partial^{m-j}u)\right|^2_{\mathbf{C}} d\mu\Big\}. \tag{2.60}$$

Послідовно оцінимо вирази (2.58)–(2.60). Щоб оцінити (2.58), застосуємо представлення (2.1) оператора $H_Q = \sum_{k\in Q}\{-\frac{1}{2}\partial_k^2 - [F(x_k) + (Bx)_k]\partial_k\}$. Тоді вираз (2.58) можна оцінити наступною сумою членів, помножених на 3(2m+1):

$$\frac{1}{4}\int p|\,\Big(\sum_{k\in Q}\partial_k^2\Big)\partial^m u|^2_{\mathbf{C}}\, d\mu + \tag{2.61}$$

$$+\int p|\,\Big(\sum_{k\in Q}(Bx)_k\partial_k\Big)\partial^m u|^2_{\mathbf{C}}\, d\mu + \tag{2.62}$$

$$+\int p|\,\Big(\sum_{k\in Q}F'(x_k)\partial_k\Big)\partial^m u|^2_{\mathbf{C}}\, d\mu. \tag{2.63}$$

З нерівності Коші–Буняковського випливає:

$$(2.61) \le \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} 1/d_k\Big)^2 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p\langle (D\otimes D\otimes \mathbf{C}\,)\,\partial^{m+2}u, \partial^{m+2}u\,\rangle\, d\mu, \tag{2.64}$$

де діагональна матриця $D = \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{P}$ така, що $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} 1/d_k < \infty$.

$$(2.62) = \sum_{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m} \int p\,\Big|\sum_{j\in Q}(Bx)_j\,\partial_j\partial_{k_1}\dots\partial_{k_m}u\Big|^2 d\mu \le$$
$$\le \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{d_j}\Big) \sum_{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m} \int p \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} d_j|(Bx)_j\,\partial_j\partial_{k_1}\dots\partial_{k_m}u|^2 d\mu. \tag{2.65}$$

Оскільки для довільних чисел h_j маємо

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} d_j|(Bx)_j h_j|^2 = \sum_{\substack{j,k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d\\ |k_i-j|\le r_0,\, i=1,2}} d_j b(j-k_1)b(j-k_2)x_{k_1}x_{k_2}h_j^2 \le$$
$$\le \sup_{j\in\mathbb{Z}^d}|b(j)|^2 \sum_{\substack{j,k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d\\ |k_i-j|\le r_0,\, i=1,2}} d_j h_j^2\Big(\frac{x_{k_1}^2}{2}+\frac{x_{k_2}^2}{2}\Big) \le$$
$$\le \sup_{j\in\mathbb{Z}^d}|b(j)|^2 \sum_{\substack{j,k_1,k_2\in\mathbb{Z}^d\\ |k_i-j|\le r_0,\, i=1,2}} d_j h_j^2\Big(\frac{z}{2a_{k_1}}+\frac{z}{2a_{k_2}}\Big)$$
$$\le \sup|b(j)|^2\,\delta_a^{2r_0}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\frac{d_j}{a_j}\,h_j^2\cdot z$$

де $z = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(1+x_k^2)$, тому для ([2.62](#)) має місце:

$$(2.62) \le M_B \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} p(z)z\langle\,(DA^{-1}\otimes\mathbf{C}\,)\,\partial\partial^m u, \partial\partial^m u\,\rangle\, d\mu. \tag{2.66}$$

Щоб оцінити (2.63), застосуємо нерівність, яка випливає з (2.4):

$$|F(x_k)|^2 \le K_2'(1+x_k^2)^{\varkappa+1} = K_2'(1+x_k^2)^{\varkappa+1}\frac{a_k^{\varkappa+1}}{a_k^{\varkappa+1}} \le K_2' z^{\varkappa+1}A^{-(\varkappa+1)}$$

з деякою сталою K_1'. Таким чином, маємо

$$(2.63) = \int p \sum_{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m}\Big|\sum_{j\in Q} F(x_j)\partial_j\partial_{k_1}\dots\partial_{k_m}u\Big|^2 d\mu \le$$

$$\le (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{d_k})\int p\,\langle\,(D\otimes\mathbf{C}\,)(F\partial)\partial^m u,(F\partial)\partial^m u\,\rangle\,d\mu \le$$

$$\le K_2'(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{d_k})\int p\,z^{\varkappa+1}\langle\,(DA^{-(\varkappa+1)}\otimes\mathbf{C}\,)\partial^{m+1}u,\partial^{m+1}u\,\rangle\,d\mu. \qquad (2.67)$$

Для оцінки виразу (2.59) зауважимо, що матриця B має скінченну кількість ненульових діагоналей та виконаємо оцінку аналогічно (2.26):

$$\int p\,\big|\partial^j BI_Q\partial^{m-j}u\big|^2_{\mathbf{C}}\,d\mu =$$

$$= \int p \sum_{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m}\big|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_j}\sum_{\substack{i\in Q\\ |i-k_{j+1}|\le r_0}} b(i-k_{j+1})\partial_i\partial_{k_{j+2}}\dots\partial_{k_m}u\big|^2 d\mu \le$$

$$\le (2r_0+1)^d\sup|b(j)|^2\int p \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d\\ i\in\mathbb{Z}^d,\,|i-k_{j+1}|\le r_0}} C^1_{k_1}\dots C^j_{k_j}\Big(C^{j+1}_i\frac{C^{j+1}_{k_{j+1}}}{C^{j+1}_i}\Big)C^{j+2}_{k_{j+2}}C^m_{k_m}\times$$

$$\times\,\big|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_j}\partial_i\partial_{k_{j+2}}\dots\partial_{k_m}u\big|^2 d\mu \le$$

$$\le (2r_0+1)^{2d}\|b\|_\infty\delta_\Theta^{2r_0}\int p(z)\,\langle\,\mathbf{C}\,\partial^m u,\partial^m u\,\rangle\,d\mu \qquad (2.68)$$

Розглянемо (2.60). За правилом Лейбніца маємо

$$\int p\,|\partial^j(F'I_Q\partial^{m-j}u)|^2_{\mathbf{C}}\,d\mu =$$

$$= \int p \sum_{k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{k_1}\dots C^m_{k_m}\big|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_j}(F'(x_{k_{j+1}})\partial_{k_{j+1}}\dots\partial_{k_m}u)\big|^2 d\mu =$$

$$= \int p\Big|\sum_{\substack{\alpha\cup\beta=\{1,\dots,j\}\\ \alpha\cap\beta=\varnothing}}(\partial^\alpha F')\cdot(\partial^\beta\partial\partial^{m-j-1}u)\Big|^2_{\mathbf{C}}\,d\mu \le$$

$$\leq 2^{m+1} \sum_{\substack{\alpha\cup\beta=\{1,\dots,j\}\\ \alpha\cap\beta=\varnothing}} \int p(z)\left|\partial^{\beta}\partial^{m-j}u\right|^2_{\mathbf{C}_F^{\alpha,\beta}} d\mu, \tag{2.69}$$

де $\mathbf{C}_F^{\alpha,\beta} = \bigotimes_{s\in\beta} C^s \otimes [C^{\{\alpha\}}C^{j+1}|F^{(1+|\alpha|)}(x_{k_{j+1}})|^2 I_Q] \otimes C^{j+2} \otimes\cdots\otimes C^m$ і $C^{\{\alpha\}} = \prod_{t\in\alpha} C^t$. Вище також було використано, що $\partial_k F^{(m)}(x_j) = \delta_{kj}F^{(m+1)}(x_j)$. З умови (2.4) маємо

$$\exists\, K'_m \quad |F^{(1+|\alpha|)}(x_k)\,|^2 \leq K'_m(1+x_k^2)^{\varkappa+1}\frac{a_k^{\varkappa+1}}{a_k^{\varkappa+1}} \leq K'_m z^{\varkappa+1}A^{-(\varkappa+1)}, \quad \forall\, |\alpha| \leq m,$$

тому кожен доданок в (2.69) оцінюється зверху наступним виразом:

$$(K'_m)^2 \int p(z)\, z^{\varkappa+1} \left|\partial^{\beta}\partial^{\{j+1,\dots,m\}}u\right|^2_R d\mu. \tag{2.70}$$

Норма $|\cdot|_R$ побудована по матриці R, що породжена матрицями A та $C_1,\dots,C_m$ за формулою

$$R = \bigotimes_{s\in\beta} C^s \otimes [A^{-(\varkappa+1)}C^{j+1}C^{\{\alpha\}}] \otimes C^{j+2} \otimes\cdots\otimes C^m. \tag{2.71}$$

Спосіб побудови набору ваг Θ'. Якщо вага $(p, C^1\otimes\cdots\otimes C^m)$ належить Θ, то наступні ваги повинні належати набору Θ':

(i) (2.64) $\Rightarrow$ $(p(z), D\otimes D\otimes C^1\otimes\cdots\otimes C^m) \in \Theta'$;

(ii) (2.66) $\Rightarrow$ $(p(z)z, DA^{-1}\otimes C^1\otimes\cdots\otimes C^m) \in \Theta'$;

(iii) (2.67) $\Rightarrow$ $(p(z)z^{\varkappa+1}, DA^{-(\varkappa+1)}\otimes C^1\otimes\cdots\otimes C^m) \in \Theta'$;

(iv) (2.68) $\Rightarrow$ $(p(z), C^1\otimes\cdots\otimes C^m) \in \Theta'$;

(v) (2.70), (2.71) $\Rightarrow$ $\forall\,\alpha,\beta,\sigma\subset\{1,\dots,m\}$: $\alpha\cup\beta\cup\sigma = \{1,\dots,m\}$: σ — множина, яка складається з всіх останніх індексів, взятих підряд і $m\in\sigma$, $\alpha\cap\beta=\varnothing$, $\beta\cap\sigma=\varnothing$, $\alpha\cap\sigma=\varnothing$, пара $(p(z)z^{\varkappa+1}, \bigotimes_{s\in\beta} C^s\otimes[A^{-(\varkappa+1)}C^{t_0}C^{\alpha}]\otimes \{\bigotimes_{s\in\sigma\setminus t_0} C^s\}\,) \in \Theta'$, де $C^{\alpha} = \prod_{t\in\alpha} C^t$, $t_0 = \inf\sigma$.

Всі ваги $(p', \mathbf{C}')$, побудовані за цими правилами з набору Θ, позначимо Ψ_0. Оскільки з (iv) випливає $\Psi_0 \supset \Theta$, простір $\mathcal{W}_{\Psi_0}(\mu)$ задовольняє умову рівномірності вкладення (2.48).

Залишається розширити набір ваг Ψ_0 до квазі-стискаючого набору. Для цього застосуємо до кожної ваги в Ψ_0 правила (2.13) та (2.14), тобто добавимо до набору Ψ_0 всі можливі ваги вигляду $(z^{\varkappa+1}p(z), \widehat{\mathbf{C}}^{ij})$ для ваг $(p, \mathbf{C})$ з набору Ψ_0 і всіх $i < j \in \{1, \ldots, m\}$. В результаті отримаємо набір ваг Ψ_1. Продовжуючи подібним чином, приходимо до послідовності наборів ваг $\{\Psi_i\}$. Проте така процедура буде скінченною, оскільки на кожному кроці застосування правил (2.13), (2.14) скорочує порядок диференціювання на 1, а в означенні норми (2.10) максимальний порядок диференціювання є скінченним. Тому для досить великого n_0 маємо $\Psi_{n_0} = \Psi_{n_0+1}$.

Покладемо $\Theta' = \Psi_{n_0}$, тоді відповідний простір $\mathcal{W}_{\Theta'}(\mu)$ задовольняє одночасно умови рівномірної за $Q \subseteq \mathbb{Z}^d$, $|Q| \leq \infty$ квазі-акретивності і рівномірності вкладення, що завершує доведення леми 2.11. □

2.6 Висновки розділу 2

У цьому розділі дисертації побудовано півгрупу, що описує еволюцію гіббсової системи нескінченної кількості часток та простори L_2-диференційованих функцій зліченної кількості змінних, в яких така півгрупа є коректно визначеною. Доведено збереження просторів, що є нескінченновимірними аналогами просторів Соболева, під дією півгрупи, що описує еволюцію гіббсової системи.

РОЗДІЛ 3

РЕГУЛЯРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕВОЛЮЦІЇ В ПРОСТОРАХ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ

Принципова складність, яка може виникати у випадку істотно нелінійних коефіцієнтів генератора півгрупи (еволюції системи), яка розглядається у просторі функцій, наділених супремальною нормою, полягає в тому, що для такої півгрупи може порушуватись властивість сильної неперервності, що унеможливлює застосування класичних аналітичних методів. Проілюструємо цю проблему на прикладі півгрупи

$$(P_t f)(x) = f(y_t(x)), \tag{3.1}$$

пов'язаної із звичайним диференціальним рівнянням

$$y_t(x) = x - \int_0^t F(y_s(x))ds \tag{3.2}$$

з нелінійним монотонним відображенням $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $F(0) = 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} |F(x)| = \infty$. Потік розв'язків $x \to y_t(x)$ представляє собою зсув початкового даного x до нуля з тим більшою швидкістю $F(y_s(x))$, чим далі на нескінченності знаходиться x. Виберемо функцію $f(x) = \sin(x) \in C_b(\mathbb{R}^1)$. Асимптотично $|y_t(x) - x| \approx tF(x)$ при $t \approx 0$ і для зліченної кількості точок $\{t_n \to 0+, x_n \to \infty\}_{n\geq 1}$ зсув початкового даного покриває половину періоду функції sin, тобто $f(x_n) = 1$ і $f(y_{t_n}(x_n)) = -1$. Тому верхня границя

$$\varlimsup_{t\to 0+} \|P_t f - f\|_{C_b(\mathbb{R}^1)} = \varlimsup_{t\to 0+} \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |f(y_t(x)) - f(x)| = 2 \tag{3.3}$$

відтворюється повним коливанням функції sin, і, очевидно, властивість сильної неперервності $P_t f \to f$, $t \to 0+$ порушується на періодичних функціях з простору $f \in C_b(\mathbb{R}^1)$.

Оскільки H_μ (1.3) є оператором другого порядку, пов'язану з ним півгрупу можна відтворити як фелерівську, асоційовану з розв'язком $\xi_t^x = \{\xi_t^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ нелінійного стохастичного диференціального рівняння

$$\xi_t^k = x^k + W_t^k - \frac{1}{2}\int_0^t \{F(\xi_s^k) + \sum_{j:\ |j-k|\le r_0} b(j-k)\xi_s^j\}ds. \tag{3.4}$$

за формулою:

$$(e^{-tH_\mu} f)(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^x), \tag{3.5}$$

де W_t^k позначають копії незалежних одновимірних вінерівських процесів, $\mathbf{E}$ — середнє по циліндричній мірі Вінера $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$, заданій на циліндричному просторі $\Omega_{\mathbb{Z}^d} = \times_{k\in\mathbb{Z}^d} \Omega_k$, $\Omega_k = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}^d$ (див., наприклад, [87,88]). Крім того, для будь-якого $p > 1$ простори

$$\Omega_{\ell_p(a)} = C_0(\mathbb{R}_+, \ell_p(a)) \subset \Omega_{\mathbb{Z}^d},$$

де $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{P}$ такі, що $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, є просторами повної міри: $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}(\Omega_{\ell_p(a)}) = 1$ [88, теорема 3.4].

Такі рівняння вивчалися в роботах Ю. Л. Далецького, Дж. Да Прато, Ж.-Д. Дойчеля, К. Елворсі, Я. Зябчика, Н. В. Крилова, Е. Парду, Б. Л. Розовського, Д. Струка та ін. [10,16,25,80,86,91,95,98,179,182].

3.1 Побудова розв'язку вихідного нелінійного рівняння та збереження просторів $\mathbf{Lip}_r(\boldsymbol{\ell}_m(\boldsymbol{a}))$ під дією півгрупи

Запишемо рівняння (3.4) у вигляді

$$\xi^0(t,x^0) = x + W_t - \int\limits_0^t \{F(\xi^0(t,x^0)) + B\,\xi^0(t,x^0)\}dt. \tag{3.6}$$

з відповідним координатним представленням $\xi^0(t,x^0) = \{\xi^0_k(t,x^0)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$:

$$\xi^0_k(t,x^0) = x^0_k + W_k(t) - \int_0^t \{F(\xi^0_k(s,x^0)) + (B\,\xi^0(s,x^0))_k\}ds, \quad k\in\mathbb{Z}^d. \tag{3.7}$$

Важливою для наступного дослідження властивістю розв'язків цього рівняння є те, що після заміни змінних $\xi^x_k(t) = \eta^x_k(t) + W_k(t),\ k\in\mathbb{Z}^d$, приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta^x_k(t)}{dt} = -[F' + B\,](\eta^x_t + W_t) \tag{3.8}$$

з потраекторно неперервним управлінням W_t — циліндричним вінерівським процесом на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ зі значеннями в $\ell_2(a)$, де $\Omega = \Omega_{\ell_2(a)}$, а σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ генерована множинами:

$$\{\omega\in\Omega_{\ell_2(a)}\colon \quad \sup_{s\in[0,t]} \|\omega(s) - \widetilde{\omega}(s)\|_{\ell_2(a)} < C\} \ \text{ для деякого } \ \widetilde{\omega}\in\Omega_{\ell_2(a)}.$$

Розвиваючи результати [86, 88], в роботі [57] та монографії [1] цю властивість використано для потраекторної побудови і доведення потраекторної оцінки на розв'язки рівняння (3.6) у довільному просторі $\ell_m(a)$, $m\geq 2$. Необхідність перенесення результатів [86, 88] на випадок $m > 2$ викликана тим, що при доведенні теореми 3.15 необхідно розглядати процес $\xi^0(t,x^0)$ у більш вузьких просторах $\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$, в яких будуть розв'язні рівняння на першу та вищого порядку варіацій вихідного рівняння, що виникають в нелінійній оцінці (3.25).

Означення 3.1. Позначимо $\mathrm{Lip}_r(\ell_m(a))$, $m \geq 2$ простір неперервних функцій над $\ell_m(a)$, оснащений нормою

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{Lip}_r} &= \sup_{x\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|_{\ell_m(a)})^{r+1}} + \\ &+ \sup_{x,y\in\ell_m(a)} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|_{\ell_m(a)}(1+\|x\|_{\ell_m(a)}+\|y\|_{\ell_m(a)})^r} \end{aligned} \tag{3.9}$$

для деякого $r \geq 0$.

Означення 3.2. *Сильним розв'язком* $\xi^0(t,x^0)$ задачі (3.6) $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-м.в. $\ell_m(a)$-неперервний по $t \in [0,T]$ $\mathcal{F}_t$-адаптований процес, що задовольняє рівняння (3.6) майже всюди.

Узагальненим розв'язком задачі (3.6) $x^0 \in \ell_m(a)$ називається границя сильних розв'язків $\xi_t^0(x_n)$ для початкових умов $x_n \to x^0$.

Теорема 3.3. Нехай $a \in \mathbb{P}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$ і виконані умови (2.4), (2.5). Тоді для будь-якого $m \geq 2$ і довільного $x^0 \in \ell_{(\varkappa+1)^2m}(a)$ існує єдиний сильний розв'язок $\xi^0(t,x^0)$ задачі (3.6).

Для початкової умови $x^0 \in \ell_m(a)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $\xi_t^0(x^0)$ задачі (3.6), що є єдиною границею сильних розв'язків $\xi_t^0(x_n)$ для початкових умов $x_n \to x^0,\ x_n \in \ell_{(\varkappa+1)^2m}(a)$.

Більш того, для узагальненого розв'язку задачі (3.6) виконані наступні потраекторні оцінки:

1. $\exists\, M_m\ \forall\, x^0, y^0 \in \ell_m(a)$ та $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всюди

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\xi^0(\omega,t,x^0) - \xi^0(\omega,t,y^0)\,\|_{\ell_m(a)} \leq e^{M_mT}\,\|x^0-y^0\,\|_{\ell_m(a)}. \tag{3.10}$$

2. $\exists\, M'_m\ \forall\, x^0 \in \ell_m(a)$ та $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всюди

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\xi^0(\omega,t,x^0)\,\|_{\ell_m(a)} \leq e^{M'_mT}\,\|x^0\,\|_{\ell_m(a)} + K_m(\omega,T) \tag{3.11}$$

з інтегровною $K_m(\cdot, T) \in \bigcap_{p\geq 1} L_p(\Omega, \mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$. Зокрема,

$$\forall\, r \geq 1 \quad \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|\xi^0(\omega, t, x^0)\|^r_{\ell_m(a)} < \infty. \tag{3.12}$$

та півгрупа

$$\forall\, t \geq 0 \quad (P_t f)(x) = \mathbf{E}(f(\xi^0(t, x^0))),\ x^0 \in \ell_m(a) \tag{3.13}$$

зберігає простори $\mathrm{Lip}_r(\ell_m(a))$.

Доведення цього результату приведено у додатку B. Воно в цілому повторює доведення аналогічного результату у випадку гільбертового простору з робіт [87,88] але з використанням методів нелінійного аналізу в банахових просторах [20].

3.2 Нелінійна оцінка на варіації

Для того, щоб дослідити регулярні властивості півгрупи (3.13) у нескінченновимірних просторах диференційованих функцій, запишемо представлення для похідних півгрупи $\partial_\tau P_t f$, де $\tau = \{k_1, \ldots, k_m\}$ позначає множину індексів змінних і $\partial_\tau = \partial^{|\tau|}/\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_m}$. Формальне диференціювання виразу (3.13) дає

$$\partial_\tau (P_t f)(x^0) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_\ell=\tau} \mathbf{E}\,\langle\, \partial^{(\ell)} f(\xi^0_t), \xi_{\gamma_1}(t) \otimes \cdots \otimes \xi_{\gamma_\ell}(t)\,\rangle\,, \tag{3.14}$$

де $\partial^{(\ell)} f = \{\partial_\gamma f\}_{|\gamma|=\ell}$ позначає множину частинних похідних ℓ-го порядку функції f, а також використано позначення

$$\langle\, \partial^{(\ell)} f(\xi^0), \xi_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{\gamma_\ell}\,\rangle \;=\; \sum_{j_1,\ldots,j_\ell\in\mathbb{Z}^d} (\partial_{\{j_1,\ldots,j_\ell\}} f)(\xi^0)\, \xi_{j_1,\gamma_1} \ldots \xi_{j_\ell,\gamma_\ell}.$$

Точний зміст представленню (3.14) буде надано в теоремі 3.19. Вектор $\xi_\tau = \{\xi_{k,\tau}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ інтерпретується як похідна високого порядку процесу ξ^0

за початковою умовою $x^0 = \{x_k^0\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$:

$$\xi_{k,\tau} = \partial_\tau \xi_k^0(t,x^0) = \frac{\partial^{|\tau|}\xi_k^0(t,x^0)}{\partial x_{j_n}^0 \dots \partial x_{j_1}^0}, \quad \tau = \{j_1,\dots,j_n\}, \tag{3.15}$$

та надалі буде називатися *варіацією порядку* τ процесу ξ^0 за початковою умовою.

Рівняння на варіацію ξ_τ може бути отримано у результаті послідовного диференціювання коефіцієнтів рівняння (3.7) по x^0 і є звичайним диференціальним рівнянням

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_{k,\tau}}{dt} = -F'(\xi_k^0)\xi_{k,\tau} - \displaystyle\sum_{j:\ |j-k|\le r_0} b(k-j)\xi_{j,\tau} - \varphi_{k,\tau}; \\ \xi_{k,\tau}(0) = x_{k,\tau}, \end{cases} \tag{3.16}$$

головна частина якого нелінійним чином залежить від розв'язку вихідного рівняння ξ^0, а неоднорідна частина $\varphi_{k,\tau}$ задається наступною формулою:

$$\varphi_{k,\tau}(\xi^0,\xi_\gamma,\gamma\subset\tau,\gamma\ne\tau) = \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ \ell\ge 2} F^{(\ell)}(\xi^0)\xi_{k,\gamma_1}\dots\xi_{k,\gamma_\ell}. \tag{3.17}$$

Сумування $\sum\limits_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\ge 2}$ в (3.17) ведеться по всім можливим підрозбиттям множини $\tau=\{j_1,\dots,j_n\}$, $j_i\in\mathbb{Z}^d$ на підмножини, що не перетинаються $\gamma_1,\dots,\gamma_\ell\subset\tau$ з $|\gamma_1|+\dots+|\gamma_\ell| = |\tau|$, $\ell\ge 2$, $|\gamma_i|\ge 1$. Фактично, підрозбиття множини τ генерується підрозбиттям множини $\{1,\dots,n\}$.

Зауважимо, що в (3.17) не вимагається, щоб всі точки множини τ були різними. Також зауважимо, що значення виразу (3.15) як розв'язку задачі (3.16) може бути надано лише при спеціальних початкових умовах:

$$\widetilde{x}_{k,\tau} = \begin{cases} \delta_{kj}, \quad \text{коли}\ \ |\tau|=1,\ \tau=\{j\}\subset\mathbb{Z}^d; \\ 0, \quad |\tau|>1, \end{cases} \tag{3.18}$$

оскільки в початковій точці $\left.\dfrac{\partial\xi_j^0(t)}{\partial x^k}\right|_{t=0} = \delta_{kj}$, а похідні більш високих порядків дорівнюють нулю.

Таким чином, представлення (3.14) дає зв'язок між частинними похідними півгрупи (3.13) та варіаціями за початковими умовами. Отже, щоб отримати збереження просторів неперервно диференційованих функцій під дією півгрупи P_t, необхідно дослідити диференційовність розв'язку $\xi^0(t,x^0)$ за початковою умовою x^0, та його варіації.

Слід зазначити, що система (3.16) є неавтономною системою диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, які нелінійним чином залежать від розв'язку ξ^0 вихідного рівняння (3.6). Крім того, неавтономна частина системи рівнянь (3.16) нелінійним та мультиплікативним чином залежить від варіацій менших порядків і має місце певна "пропорційність" між її лівою та правою частинами. Фактично в рівнянні на n-ту варіацію $\xi_t^{(n)}$ одночасно виникають перша варіаці в n-тому ступені $\left[\xi_t^{(1)}\right]^n$, а також члени з проміжними порядками диференціювання $\xi_t^{(k_1)}\dots\xi_t^{(k_j)}$ такими, що $k_1+\dots+k_j=n$. Неформально цю симетрію можемо виразити наступним чином:

$$\xi_t^{(k_1)}\dots\xi_t^{(k_j)}\sim\left[\xi_t^{(1)}\right]^{k_1}\dots\left[\xi_t^{(j)}\right]^{k_j}\sim\xi^{(n)}\sim\left[\xi^{(1)}\right]^n,$$

або

$$\|\xi_t^{(1)}\|\sim\sqrt[n]{\|\xi_t^{(n)}\|}. \tag{3.19}$$

Таке спостереження мотивувало введення нелінійного об'єкта, що відображає цю симетрію:

$$\rho_\tau(\xi;t)=\mathbf{E}\sum_{\ell=1}^{n}\Big\{p_\ell(z_t)\sum_{\gamma\subseteq\tau,\ |\gamma|=\ell}\|\xi_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma}\Big\}, \tag{3.20}$$

де $\tau=\{j_1,\dots,j_n\}$, $j_i\in\mathbb{Z}^d$, p_ℓ є поліноміальними функціями, що залежать від $z_t=\|\xi^0(t,x^0)\|_{\ell_2(a)}^2$ та $m_\gamma=m_1/|\gamma|$, де $|\gamma|$ позначає число точок множини $\gamma\subset\mathbb{Z}^d$.

У розділах 3–6 дисертації розроблено підхід, який оснований на апріорних оцінках нелінійного виразу (3.20) та їх застосуванні до доведення гладких властивостей півгрупи (3.13).

Уточнимо структуру ваг c_γ та поліномів p_γ у виразі (3.20), за яких матиме місце нелінійна оцінка на варіації.

Означення 3.4. Зафіксуємо $m_1 > 1,\ a \in \mathbb{P},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$. Сім'я $\{c_\tau\}_\tau \subset \mathbb{P}$ векторів $c_\tau = \{c_{k,\tau}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ занумерованих скінченними впорядкованими наборами $\tau = \{j_1, \dots, j_n\},\ j_\ell \in \mathbb{Z}^d$, називається *векторною вагою з параметром* $\varkappa$, якщо вона задовольняє оцінку:

$\forall\, \tau = \{j_1, \dots, j_n\},\ j_i \in \mathbb{Z}^d$ та для довільного розбиття множини τ на непусті підмножини $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell,\ \ell \geq 2$, що не перетинаються

$$\tau = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell, \quad |\gamma_1| + \dots + |\gamma_\ell| = |\tau|,$$

існує така стала $R_{\tau,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}$, що $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$[c_{k,\tau}]^{|\tau|} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leq R_{\tau,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell} [c_{k,\gamma_1}]^{|\gamma_1|} \dots [c_{k,\gamma_\ell}]^{|\gamma_\ell|}. \tag{3.21}$$

Верхні індекси позначають ступені, параметр $\varkappa$ було введено в (2.4) як порядок нелінійності відображення F.

Зауваження 3.5. Для довільного вектора $\{c_\tau\}$, що задовольняє умову (3.21), та довільного $d \in \mathbb{P}$ вектор $\{d \cdot c_\tau\}$ задовольняє умову (3.21).

Означення 3.6. Нехай $|\tau| < m_1$. Процеси

$$\xi_\gamma(\omega, t, x^0),\ \gamma \subseteq \tau = \{j_1, \dots, j_n\},\ j_\ell \in \mathbb{Z}^d$$

є *сильними розв'язками варіаційної системи* (3.16) у шкалі просторів $\ell_{m_\gamma}(c_\gamma),\ \gamma \subseteq \tau$, якщо для всіх $\gamma \subseteq \tau$ та майже всіх $\omega \in \Omega$ відображення

$$[0, T] \ni t \to \xi_\gamma(\omega, t, x^0; x_\alpha, \alpha \subseteq \gamma) \in \ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$$

є неперервним за Ліпшицем та задовольняє наступним умовам:

1. $\xi_{k,\gamma}(\omega, 0, x^0; x_\alpha, \alpha \subseteq \gamma) = x_{k,\gamma}$ та для майже всіх $t \in [0,T]$ $\xi_\gamma(\omega, t, x^0; x_\alpha, \alpha \subseteq \gamma) \in \mathcal{D}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\big(F'(\xi^0(\omega,t,x^0)) + B\big)$.
2. існує сильна $\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$-похідна $\dfrac{d\xi_\gamma(\omega,t,x^0)}{dt}$ майже всюди на $[0,T]$.
3. варіаційні рівняння (3.16) виконуються у шкалі $\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$, $\gamma \subseteq \tau$, для майже всіх $[0,T]$.
4. процеси $\Omega \times [0,T] \ni (\omega,t) \to \xi_\gamma(\omega,t,x^0; x_\alpha, \alpha \subseteq \gamma) \in \ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$ адаптовані до канонічного потоку σ-алгебр, пов'язаного з циліндричним вінерівським процесом.
5. для $x^0 \in \ell_2(a)$ $\;\forall\, q \geq 1$ $\;\forall\, T > 0$ $\;\forall\, \gamma \subseteq \tau$

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|\xi_\gamma(t)\|^q_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} < \infty, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \Big\|\frac{d\xi_\gamma(t,x^0)}{dt}\Big\|^q_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} < \infty. \tag{3.23}$$

Вище $\mathcal{D}_{\ell_m(c)}(A)$ позначає область визначення оператора A в просторі $\ell_m(c)$.

У наступній теоремі доводиться основний результат даного параграфу про нелінійну оцінку на нелінійний вираз (3.20) в припущеннях, що відповідні процеси ξ_γ є сильними розв'язками системи (3.16). В наступних розділах дисертації буде показана розв'язність системи (3.16) та доведено, що розв'язки цієї системи при вихідних даних (3.18) дійсно є варіаціями вихідного рівняння за початковою умовою.

Теорема 3.7 (Нелінійна оцінка на варіації)**.** Нехай F, B задовольняють умови (2.4), (2.5) та процеси ξ^0, ξ_τ є сильними розв'язками рівнянь (3.6), (3.16) з початковими умовами $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ та $x_\gamma \in \ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)$, $\gamma \subseteq \tau$

для $d_k \geq a_k^{-\frac{\varkappa}{2}m_1}$. Нехай $m_1 \geq |\tau|$ та $\forall\, \gamma \subseteq \tau$, $m_\gamma = m_1/|\gamma|$. Припустимо, що

1. $\{c_\gamma\}_{\gamma \subseteq \tau}$ є векторною вагою з параметром $\varkappa$ у сенсі означення 3.4.

2. $p_i(z)$, $i = 1, \dots, n$ в (3.20) є монотонно зростаючими функціями не більше ніж поліноміального росту (2.11), що задовольняють нелінійну ієрархію: $\exists\, K_p \;\; \forall\, j = 2, \dots, n, \; \forall\, i_1, \dots, i_\ell\colon\; i_1 + \dots + i_\ell = j, \ell \geq 2$
$$[p_j(z)]^j (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leq K_p [p_{i_1}(z)]^{i_1} \dots [p_{i_\ell}(z)]^{i_\ell}. \tag{3.24}$$

Тоді існує така стала $M \in \mathbb{R}^1$, що
$$\rho_\tau(\xi;t) \leq e^{Mt} \rho_\tau(\xi;0). \tag{3.25}$$

Доведення. Розглянемо функції
$$h_\tau^i(\xi;t) = \begin{cases} 0, \quad i = 0; \\ \sum\limits_{\ell=1}^{i} \mathbf{E}\Big\{ p_\ell(z_t) \sum\limits_{\gamma \subseteq \tau,\; |\gamma| = \ell} \|\xi_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} \Big\}, \quad i \geq 1, \end{cases}$$
де $z_t = \|\xi^0(t,x^0)\|_{\ell_2(a)}^2$. Для $|\tau| = n$ функція $h_\tau^n(\xi;t)$ співпадає з нелінійним виразом $\rho_\tau(\xi;t)$ (3.20). Крім того,
$$h_\tau^i(\xi;t) = h_\tau^{i-1}(\xi;t) + \sum_{\gamma \subseteq \tau,\; |\gamma| = i} g_\gamma(t), \tag{3.26}$$
де
$$g_\gamma(t) = \mathbf{E}\left[p_i(z) \|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} \right], \quad |\gamma| = i.$$
Покажемо, що для будь-якого $i = 0, \dots, n$
$$\exists\, M_i \in \mathbb{R}\colon \quad h_\tau^i(\xi;t) \leq e^{M_i t} h_\tau^i(\xi;0), \tag{3.27}$$
тоді у випадку $i = n$ отримаємо твердження теореми.

Доведення проведемо методом індукції. База індукції при $i = 0$ очевидна, оскільки $h_\tau^0(\xi;t) \equiv 0$ і $M_0 = 0$.

Якщо для довільного $\gamma \subseteq \tau,\ |\gamma| = i$ буде показано, що

$$\frac{dg_\gamma(t)}{dt} \leq K_1 g_\gamma(t) + K_2 h_\tau^{i-1}(\xi; t), \tag{3.28}$$

то з нерівності Гронуолла–Беллмана виливає оцінка на $g_\gamma(t)$:

$$g_\gamma(t) \leq e^{K_1 t} g_\gamma(0) + K_2 \int_0^t e^{K_1(t-s)} h_\tau^{i-1}(\xi; s) ds. \tag{3.29}$$

Застосовуючи індуктивне припущення, представлення (3.26) та оцінку (3.29), отримаємо

$$\begin{aligned} h_\tau^i(\xi;t) \leq & e^{M_{i-1}t} h_\tau^{i-1}(\xi;0) + \\ & + \sum_{\gamma \subseteq \tau,\ |\gamma|=i} \{e^{K_1 t} g_\gamma(0) + K_2 \int_0^t e^{K_1(t-s)} e^{M_{i-1}s} h_\tau^{i-1}(\xi;0) ds\} \leq \\ & \leq e^{(M_{i-1}+K_1)t} (1 + 2^{|\tau|} K_2 t) h_\tau^i(\xi;0) \leq e^{(M_{i-1}+K_1+2^{|\tau|}K_2)t} h_\tau^i(\xi;0), \end{aligned}$$

що дає (3.27).

Залишилось довести оцінку (3.28). Перш за все перевіримо диференційовність функції $[0,T] \ni t \to g_\gamma(t) \in \mathbb{R}^1$, $|\gamma| = i$ для майже всіх $t \in [0,T]$ та підрахуємо її похідну.

Для цього застосуємо наступний факт з теорії абсолютно неперервних функцій [148–150] та [72, глава 3, §1, лема 2.1]: для довільної абсолютно неперервної функції $u \in AC([0,T], \ell_p(c))$ зі значеннями в банаховому просторі $\ell_p(c)$ її норма диференційовна майже всюди на $[0,T]$ та

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|_{\ell_p(c)}^p = p \langle u^\#(t), \frac{du(t)}{dt} \rangle . \tag{3.30}$$

Вище для $u \in \ell_p(c)$ використано позначення дуального елемента до u:

$$u^\# = \| u \|_{\ell_p(c)}^{p-2} j(u), \qquad \| u^\# \|_{\ell_p^*(c)} = \| u \|_{\ell_p(c)}^{p-1}. \tag{3.31}$$

Нагадаємо, що відображення дуальності j в банаховому просторі $\ell_p(c)$

(1.21) має вигляд:

$$[j(x)]_k = \frac{x_k|x_k|^{p-2}}{\|x\|_{\ell_p(c)}^{p-2}}, \quad j(x) \in \ell_q(c), \quad \text{при} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

З означення 3.6 сильного розв'язку, для процесу $\|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma}$ скінченної варіації маємо:

$$\|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} = \|\xi_\gamma(0)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} + m_\gamma \int_0^t \langle [\xi_\gamma(s)]^\#, \frac{d\xi_\gamma(s)}{ds} \rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds.$$

Відмітимо, що для будь-яких $T > 0$ та $r \geq 1$:

$$\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} |H_{\mathbb{Z}^d} p|^r(z_t) < \infty. \tag{3.32}$$

Щоб довести це, нагадаємо, що оператор $H_{\mathbb{Z}^d}$ діє на функцію p не більше ніж поліноміального росту по формулі (2.24).

Замінюючи в (2.24) z на $z_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k|\xi_k^0|^2$, застосовуючи (2.4), умову (2.11) та нерівність $\|x\|_{\ell_2(a)} \leq \|x\|_{\ell_{2(\varkappa+1)}(a)}$ (2.9), отримаємо

$$|H_{\mathbb{Z}^d} p|(z_t) \leq Cp(z_t)\big[M + K\,\|\xi^0(t)\|_{\ell_{2(\varkappa+1)}(a)}^{2(\varkappa+1)}\big]. \tag{3.33}$$

Остаточно властивості функції p та оцінка (3.11) для $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ дають (3.32). Застосовуючи формулу Іто до сильного розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} p_i(z_t)\,\|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} &= p_i(z_0)\,\|\xi_\gamma(0)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} + \\ &+ 2\int_0^t p_i'(z_s)\,\|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} \langle (\xi_s^0)^\#, dW_s \rangle + \\ &+ \int_0^t \Big\{ p_i(z_s) m_\gamma \langle [\xi_\gamma(s)]^\#, \frac{d\xi_\gamma(s)}{ds} \rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} - \|\xi_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} (H_{\mathbb{Z}^d} p_i)(z_s) \Big\} ds. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Оцінки (3.12), (3.22), (3.23) і (3.32) дають інтегровність всіх функцій в (3.34) на множині $[0,T] \times \Omega$. Як наслідок, з теореми Фубіні випливає

$$\begin{aligned} g_\gamma(t) = \mathbf{E}\,p_i(z_t)\,\|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} = p_i(z_0)\,\|x_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} + \\ + \int_0^t \mathbf{E}\{p_i(z_s) m_\gamma \langle [\xi_\gamma(s)]^\#, \frac{d\xi_\gamma(s)}{ds} \rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} - \|\xi_\gamma(t)\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} (H_{\mathbb{Z}^d} p_i)(z_s)\} ds. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Таким чином, функція $g_\gamma(t)$ допускає представлення у вигляді інтеграла і виявляється диференційовною майже всюди на $[0,T]$ з похідною

$$\begin{aligned}\frac{dg_\gamma(t)}{dt} =&m_\gamma \mathbf{E}\{p_i(z_t)\,\langle\,[\xi_\gamma(s)]^\#,\frac{d\xi_\gamma(s)}{ds}\,\rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\}- \\ &- \mathbf{E}\{\,\|\xi_\gamma(t)\,\|^{m_\gamma\cdot}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\cdot[H_{\mathbb{Z}^d}p_i](z_t)\}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Щоб отримати (3.28), оцінимо вираз (3.36). З леми 2.5 випливає, що другий доданок в (3.36) оцінюється $M_p\cdot g_\gamma(t)$.

Для оцінки першого доданку в (3.36) використаємо означення 3.6 сильного розв'язку, властивість нелінійного відображення: $F''(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$ та обмеженість скінченно-діагонального відображення B у просторах $\ell_p(c)$, $p\geq 1$, $c\in\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\|B\,x\,\|_{\ell_p(c)} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k|\sum_{j:\ |k-j|\leq r_0} b(k-j)x_j|^p\Big)^{1/p} = \\ &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k|\sum_{a\in\mathbb{Z}^d} b(a)x_{k-a}|^p\Big)^{1/p} \leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^d}|b(a)|\cdot\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k|x_{k-a}|^p\big)^{1/p} = \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}^d}|b(a)|\cdot\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{c_k}{c_{k-a}}c_{k-a}|x_{k-a}|^p\big)^{1/p} \leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^d}|b(a)|\cdot\delta_c^{|a|/p}\cdot\,\|x\,\|_{\ell_p(c)},\end{aligned} \tag{3.37}$$

де $a=(a_1,\ldots,a_d)\in\mathbb{Z}^d$, $|a|=|a_1|+\cdots+|a_d|$, а числа δ_c були означені в (2.6).

Отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}&m_\gamma\,\langle\,[\xi_\gamma(t)]^\#,\frac{d}{dt}\xi_\gamma(t)\,\rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} = \\ &= -m_\gamma\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\gamma}|\xi_{k,\gamma}|^{m_\gamma-2}\xi_{k,\gamma}\{F'(\xi_k^0)\xi_{k,\gamma}+(B\,\xi_\gamma)_k+\varphi_{k,\gamma}\}\leq \\ &\leq m_\gamma\big(\,\|B\,\|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\gamma}(c_\gamma))}+0\big)\,\|\xi_\gamma\,\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}+m_\gamma|\,\langle\,[\xi_\gamma]^\#,\varphi_\gamma\,\rangle\,|\end{aligned} \tag{3.38}$$

де

$$\varphi_{k,\gamma} = \sum_{\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_\ell=\gamma,\ \ell\geq 2} F^{(\ell)}(\xi_k^0)\xi_{k,\gamma_1}\ldots\xi_{k,\gamma_\ell}. \tag{3.39}$$

Сумування в (3.39) проводиться по довільним підрозбиттям $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$, $\ell \geq 2$ множини γ, $|\gamma| = i$ на підмножини, що не перетинаються.

З (3.36) випливає

$$\begin{aligned} \frac{dg_\gamma(t)}{dt} \leq & m_\gamma(\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\gamma}(c_\gamma))} + M_{p_i}) g_\gamma(t) + \\ & + m_\gamma \mathbf{E}\, p_i(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)}) |\langle [\xi_\gamma]^\#, \varphi_\gamma \rangle|. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Якщо $|\gamma| = 1$, то $\varphi_\gamma = 0$, і нерівність (3.28) є доведеною. Розглянемо випадок $|\gamma| \neq 1$. З представлення (3.39) випливає

$$(3.40) \leq m_\gamma \mathbf{E} \Big[\sum_{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_\ell = \gamma,\ \ell \geq 2} p_i(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)}) \cdot |\langle [\xi_\gamma]^\#, F^{(\ell)}(\xi^0) \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_\ell} \rangle| \Big]. \tag{3.41}$$

Застосовуючи (3.31) та нерівність

$$\begin{aligned} |\langle z, x^\# \rangle| \leq & \|z\|_{\ell_m(c)} \|x^\#\|_{\ell^*_m(c)} = \\ & = \|z\|_{\ell_m(c)} \|x\|^{m-1}_{\ell_m(c)} \leq \frac{1}{m} \|z\|^m_{\ell_m(c)} + \frac{m-1}{m} \|x\|^m_{\ell_m(c)}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

отримаємо оцінку на кожен з членів в (3.41):

$$\begin{aligned} m_\gamma \mathbf{E}\, p_i(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})\ |\langle [\xi_\gamma]^\#, F^{(\ell)}(\xi^0) \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_\ell} \rangle| \leq (m_\gamma - 1) g_\gamma(t) + \\ + \mathbf{E}\, p_i(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})\ \|F^{(\ell)}(\xi^0) \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_\ell}\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

З умови (2.4) на відображення F випливає

$$|F^{(\ell)}(\xi^0_k)| \leq C_\ell (1 + |\xi^0_k|)^{\varkappa+1} \leq C_\ell a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}} (1 + \|\xi^0(t)\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}}.$$

Отже маємо оцінку

$$\begin{aligned} (3.43) \leq & C_\ell \mathbf{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} [\, c_{k,\gamma} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2} m_\gamma}\ p_i(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)}) \times \\ & \times (1 + \|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\gamma} |\xi_{k,\alpha_1}|^{m_\gamma} \ldots |\xi_{k,\alpha_\ell}|^{m_\gamma}\,]. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Оскільки $m_\gamma = m_\alpha \cdot |\alpha|/|\gamma|$, маємо

$$|\xi_{k,\alpha_1}|^{m_\gamma} \ldots |\xi_{k,\alpha_\ell}|^{m_\gamma} = \big[|\xi_{k,\alpha_1}|^{m_{\alpha_1}} \big]^{|\alpha_1|/|\gamma|} \ldots \big[|\xi_{k,\alpha_\ell}|^{m_{\alpha_\ell}} \big]^{|\alpha_\ell|/|\gamma|}.$$

Означення 3.4 та ієрархії на функції p_j (3.24) дають наступні нерівності:

$$c_{k,\gamma} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_\gamma} \le R_{\gamma,\alpha_1\dots\alpha_\ell} \, [c_{k,\alpha_1}]^{|\alpha_1|/|\gamma|} \dots [c_{k,\alpha_\ell}]^{|\alpha_\ell|/|\gamma|},$$
$$p_{|\gamma|}(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_\gamma} \le K_p (p_{|\alpha_1|})^{|\alpha_1|/|\gamma|}(z) \dots (p_{|\alpha_\ell|})^{|\alpha_\ell|/|\gamma|}(z).$$

Тому

$$(3.44) \le K_p \, C_\ell \, R_{\gamma,\alpha_1\dots\alpha_\ell} \mathbf{E} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{\ell} \{ p_{|\alpha_i|}(\, \|\xi^0\, \|^2_{\ell_2(a)}) c_{k,\alpha_i} |\xi_{k,\alpha_i}|^{m_{\alpha_i}} \}^{|\alpha_i|/|\gamma|}. \tag{3.45}$$

Нарешті, застосовуючи нерівність $|x_1 \dots x_\ell| \le \frac{|x_1|^{q_1}}{q_1} + \dots + \frac{|x_\ell|^{q_\ell}}{q_\ell}$ з $q_j = |\gamma|/|\alpha_j|$, отримаємо

$$\begin{aligned}(3.45) &\le K_p \, C_\ell \, R_{\gamma,\alpha_1\dots\alpha_\ell} \mathbf{E} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{|\alpha_j|}{|\gamma|} p_{|\alpha_j|}(\, \|\xi^0\, \|^2_{\ell_2(a)}) \ \ \|\xi_{\alpha_j}\, \|^{m_{\alpha_j}}_{\ell_{m_{\alpha_j}}(c_{\alpha_j})} \le \\ &\le K_p \, C_\ell \, R_{\gamma,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell} h^{i-1}_\tau(y;t).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Вище використано те, що при $\ell \ge 2$ для кожної множини у підрозбитті $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_\ell = \gamma$, для $|\gamma| = i$, маємо $|\alpha_j| \le i-1$.

Таким чином, нерівність (3.28) доведено зі сталою

$$K_1 = 2M_{p_i} + \sup_{\gamma\subseteq\tau} (m_\gamma \, \|B\, \|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\gamma}(c_\gamma))} + (m_\gamma - 1) 2^{|\gamma|^2}), \tag{3.47}$$

що формується з сталих в (3.36), лемі 2.5, (3.40) та (3.43), і сталою

$$K_2 = K_p \, 2^{|\tau|^2} \max_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\gamma, \ \gamma\subseteq\tau} C_\ell R_{\gamma,\alpha_1\dots\alpha_\ell}, \tag{3.48}$$

яка виникає з (3.44) і (3.46). □

Зауваження 3.8. 1. Оцінка (3.25) є суттєво нелінійною, оскільки вираз $\rho_\tau(y,t)$ є сумою норм у різних ступенях ($m_\gamma = m_1/|\gamma|$) і не є нормою. Крім того, якщо функція F є глобально ліпшицевою з усіма похідними ($\varkappa = 0$ в (2.4)), тоді достатньо вибрати $p_i \equiv 1$. Проте такий вибір ваг неможливий при суттєво нелінійній F.

2. Для початкових умов спеціального виду (3.18) нелінійна оцінка 3.25 спрощується до наступної

$$\rho(\xi;t) \le Ke^{Mt}p_1(\,\|x^0\|^2_{\ell_2(a)}) \tag{3.49}$$

з $K = \sum_{i=1}^{n}(c_{j_i,j_i})^{1/m_1}$ для $\{j_1,\dots,j_n\} = \tau$.

3. Вище оцінку (3.25) було доведено для сильних розв'язків рівнянь (3.6), (3.16), тобто для досить вузького класу початкових умов. У підрозділі 3.3 буде доказано неперервна залежність варіацій за початковою умовою x^0 і отримано оцінку 3.25 у загальному випадку.

3.3 Побудова розв'язків варіаційних рівнянь

Запишемо систему рівнянь на варіації (3.16) в координатній формі:

$$\begin{cases} d\xi_{k,\tau} = -F'(\xi^0_k)\xi_{k,\tau} - \sum\limits_{j:\,|j-k|\le r_0} b(k-j)\xi_{j,\tau} - \varphi_{k,\tau}; \\ \xi_{k,\tau}(0) = x_{k,\tau}, \end{cases} \tag{3.50}$$

де неоднорідна частина дорівнює

$$\varphi_{k,\tau} = \varphi_{k,\tau}(\xi^0,\xi_\gamma,\gamma\subset\tau,\gamma\ne\tau) = \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ \ell\ge2} F^{(\ell)}(\xi^0_k)\xi_{k,\gamma_1}\dots\xi_{k,\gamma_\ell}. \tag{3.51}$$

Якщо припустити, що рівняння на варіації менших порядків $\xi_\gamma,\gamma\subset\tau,\gamma\ne\tau$ вже розв'язані, то варіація ξ_τ задовольняє нелінійне відносно ξ^0_t неавтономне рівняння з неоднорідною частиною φ_τ.

Для побудови розв'язків варіаційних рівнянь (3.50) буде застосовано підхід Като [136–140], який в різних формах, більш сучасних формах, може бути знайдений в [6, 15, 24, 135].

Нехай X, Y є рефлексивними банаховими просторами з неперервним щільним вкладенням $Y \subset X$. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_t = -A_t y_t - \varphi_t, \quad t \in [0,T]; \\ y_t \Big|_{t=0} = y_0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Припустимо, що

1. для всіх $t \in [0,T]$ оператори A_t у просторі X та їх звуження $A_t \restriction_Y$ генерують сильно неперервні півгрупи відповідно у просторах X і Y, з рівномірними сталими, тобто $\exists\ \lambda_X,\ \lambda_Y\ \ \forall s \geq 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\exp(-sA_t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\lambda_X s},$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|\exp(-sA_t \restriction_Y)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq e^{\lambda_Y s}. \tag{3.53}$$

2. для всіх $t \in [0,T]$ має місце вкладення $Y \subset \mathcal{D}_X(A_t)$. Більш того, відображення

$$[0,T] \ni t \to A_t \restriction_Y \in \mathcal{L}(Y,X)$$

є неперервним:

$$A_\cdot \restriction_Y \in C([0,T], \mathcal{L}(Y,X)). \tag{3.54}$$

3. початкова умова в (3.52) y_0 і неоднорідна частина φ задовольняють:

$$y_0 \in Y, \quad \varphi \in C([0,T],X) \cap L^\infty([0,T],Y). \tag{3.55}$$

Теорема 3.9. [135] За наведених припущень для задачі Коші (3.52) існує єдиний сильний розв'язок

$$y \in C([0,T],X) \cap L^\infty([0,T],Y),$$

який має сильну X-похідну $\dfrac{d}{dt}y_t$ і для майже всіх $t \in [0,T]$ задовольняє рівняння (3.52). Крім того, цей розв'язок y_t допускає представлення

$$y_t = U_{t,0}y_0 - \int_0^t U_{t,s}\varphi_s ds \tag{3.56}$$

у термінах еволюційної системи $U_{t,s}$, що розв'язує (3.52) при неоднорідній частині φ_t, яка дорівнює нулю. Крім того, еволюційна система $U_{t,s}$ має наступні властивості:

$$\begin{aligned}
&1)\ \ U_{t,t}=1,\ \ U_{t,r}U_{r,s}=U_{t,s}\ \text{ та }\ \|U_{t,s}\|_{\mathcal{L}(X)}\le e^{\lambda_X(t-s)};\\
&2)\ \ U_{t,s}\ \text{ сильно неперервно для }\ 0\le s\le t\le T\ \text{ в }\ X;\\
&3)\ \ \forall\, y\in Y\ \ U_{t,s}y\in Y\ \text{ та }\ \|U_{t,s}\restriction_Y\|_{\mathcal{L}(Y)}\le e^{\lambda_Y(t-s)}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Теорема 3.10. [135] Нехай $\{A_t\}$ і $\{\widetilde{A}_t\}$ утворюють дві сім'ї операторів, що задовольняють умови теореми 3.9. Тоді асоційовані з цими операторами еволюційні сім'ї $\{U_{t,s}\}$ і $\{\widetilde{U}_{t,s}\}$ задовольняють оцінку

$$\|U_{t,s}-\widetilde{U}_{t,s}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\le |t-s|e^{(\lambda_X+\lambda_Y)(t-s)}\sup_{\tau\in[s,t]}\|A_\tau-\widetilde{A}_\tau\|_{\mathcal{L}(Y,X)}. \tag{3.58}$$

Для того, щоб застосувати результати теорії Като до розв'язності варіаційних рівнянь (3.50) необхідно довести допоміжну технічну лему.

Лема 3.11. [1, теорема 4.15]Нехай $a\in\mathbb{P}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}a_k=1$, τ — деякий набір індексів, $|\tau|<m_1$, вектори $\{c_\gamma\}_{\gamma\subseteq\tau}$ задовольняють ієрархію (3.21) і вага $d\in\mathbb{P}$, така, що $d_k\ge a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$. Введемо позначення

$$X_\gamma=\ell_{m_\gamma}(c_\gamma),\ \ Y_\gamma=\ell_{m_\gamma}(dc_\gamma),\ \ m_\gamma=m_1/|\gamma|,\ \ \gamma\subseteq\tau.$$

Тоді для функції Q на дійсній вісі $\mathbb{R}$, яка задовольняє умову

$$\exists\, K\quad |Q(x)-Q(y)|\le K|x-y|\big(1+|x|+|y|\big)^{\varkappa},\ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R} \tag{3.59}$$

мають місце наступні нерівності:

1. Відображення $\ell_2(a)\ni\xi\to Q(\xi)\in\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)$, яке покоординатно задано формулою $[Q(\xi)u]_k=Q(\xi_k)u_k$, є неперервним та існує така стала C, що для довільних $\xi,\zeta\in\ell_2(a)$:

$$\|Q(\xi)\|_{\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)}\le C(1+\|\xi\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}, \tag{3.60}$$

$$\|\,\big[\,Q(\xi)-Q(\zeta)\,\big]\,u\,\|_{X_\tau}\le$$
$$\le C\,\|\xi-\zeta\,\|_{\ell_2(a)}(1+\,\|\xi\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\,\|u\,\|_{Y_\tau}. \tag{3.61}$$

$$\|\,\big[Q(\xi)-Q(\zeta)\big]u_{\gamma_1}\dots u_{\gamma_n}\,\|_{X_\tau}\le \tag{3.62}$$
$$\le C\,\|\xi-\zeta\,\|_{\ell_2(a)}(1+\,\|\xi\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\,\|u_{\gamma_1}\,\|_{X_{\gamma_1}}\dots\,\|u_{\gamma_n}\,\|_{X_{\gamma_n}}.$$

2. Розглянемо n-лінійне відображення:

$$\{Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\,\xi_{\gamma_n}\}_k=Q(\xi^0_k)\xi_{k,\gamma_1}\dots\,\xi_{k,\gamma_n},\quad k\in\mathbb{Z}^d$$

при $n\ge 2,\ \gamma_1\cup\dots\cup\gamma_n=\tau$ з індукованою дією $Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\,\xi_{\gamma_r}$ у просторі $\mathop{\times}\limits_{i=r+1}^{n}X_{\gamma_i}$. Тоді для довільного фіксованого $r=1,\dots,n$ мультиплікативне відображення

$$\ell_2(a)\times\mathop{\times}\limits_{i=1}^{r}X_{\gamma_i}\ni(\xi^0,\xi_{\gamma_1},\dots,\xi_{\gamma_r})\to Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_r}\in\mathcal{L}(\mathop{\times}\limits_{i=r+1}^{n}X_{\gamma_i},X_\tau)$$

є неперервним і має місце наступна оцінка з деякою сталою K:

$$\|\,\big[\,Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_r}-Q(\zeta^0)\zeta_{\gamma_1}\dots\zeta_{\gamma_r}\,\big]\,u_{\gamma_{r+1}}\dots u_{\gamma_n}\,\|_{X_\tau}\le$$
$$\le K\big(1+\,\|\xi^0\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta^0\,\|_{\ell_2(a)}\big)^{\varkappa}\prod_{i=1}^{r}\big(1+\,\|\xi_{\gamma_i}\,\|_{X_{\gamma_i}}+\,\|\zeta_{\gamma_i}\,\|_{X_{\gamma_i}}\big)\times$$
$$\times\big(\,\|\xi^0-\zeta^0\,\|_{\ell_2(a)}+\sum_{i=1}^{r}\,\|\xi_{\gamma_i}-\zeta_{\gamma_i}\,\|_{X_{\gamma_i}}\big)\prod_{i=r+1}^{n}\,\|u_{\gamma_i}\,\|_{X_{\gamma_i}}. \tag{3.63}$$

Доведення. З (2.4) випливає

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,\tau}|(Q(\xi_k)-Q(\zeta_k))u_k|^{m_\tau}\le$$
$$\le C\sum_k c_{k,\tau}\big|(\xi_k-\zeta_k)(1+|\xi_k|+|\zeta_k|)^{\varkappa}u_k\big|^{m_\tau}\le$$
$$\le C\sum_k\frac{c_{k,\tau}}{(a_k^{1/2}a_k^{\varkappa/2})^{m_\tau}}\times$$
$$\times\,\big|(a_k(\xi_k-\zeta_k)^2)^{1/2}\cdot(a_k^{1/2}+(a_k|\xi_k|^2)^{1/2}+(a_k|\zeta_k|^2)^{1/2})^{\varkappa}u_k\big|^{m_\tau}\le$$

$$\le C\,\|\xi-\zeta\,\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)}\times$$
$$\times\,(1+\,\|\xi\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_\tau}\sum_k c_{k,\tau}a_k^{-m_\tau(\varkappa+1)/2}|u_k|^{m_\tau}. \tag{3.64}$$

Отже

$$\|(Q(\xi)-Q(\zeta))u\,\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\le$$
$$\le\,C\,\|\xi-\zeta\,\|_{\ell_2(a)}(1+\,\|\xi\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\,\|u\,\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau a^{-m_\tau(\varkappa+1)/2})},$$

що дає (3.61). Для того, щоб отримати (3.60) та (3.62), зауважимо:

$$\|\left[Q(\xi)-Q(\zeta)\right]u_{\gamma_1}\dots u_{\gamma_n}\,\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}=$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,\tau}|Q(\xi_k)-Q(\zeta_k)|^{m_\tau}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}\le$$
$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,\tau}|\xi_k-\zeta_k|^{m_\tau}(1+|\xi_k|+|\zeta_k|)^{m_\tau\varkappa}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}=$$
$$=C\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{c_{k,\tau}}{a_k^{m_\tau/2}a_k^{m_\tau\varkappa/2}}(a_k|\xi_k-\zeta_k|^2)^{m_\tau/2}\times$$
$$\times\,(a_k^{1/2}+(a_k|\xi_k|^2)^{1/2}+(a_k|\zeta_k|^2)^{1/2})^{m_\tau\varkappa}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}\le$$
$$\le C\,\|\xi-\zeta\,\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)}(1+\,\|\xi\,\|_{\ell_2(a)}+\,\|\zeta\,\|_{\ell_2(a)})^{m_\tau\varkappa}\times$$
$$\times\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,\tau}a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}.$$

Враховуючи ієрархію (3.21) та застосовуючи нерівність Гельдера з $q_i=|\tau|/|\gamma_i|$, $\sum 1/q_i=1$ маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,\tau}a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}\le$$
$$\le R\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left[c_{k,\gamma_1}\right]^{|\gamma_1|/|\tau|}\dots\left[c_{k,\gamma_n}\right]^{|\gamma_n|/|\tau|}|u_{k,\gamma_1}\dots u_{k,\gamma_n}|^{m_\tau}=$$

$$=R\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left[c_{k,\gamma_1}|u_{k,\gamma_1}|^{m_{\gamma_1}}\right]^{|\gamma_1|/|\tau|}\dots\left[c_{k,\gamma_n}|u_{k,\gamma_n}|^{m_{\gamma_n}}\right]^{|\gamma_n|/|\tau|}\le$$

$$\leq R\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\gamma_i}|u_{k,\gamma_i}|^{m_{\gamma_i}}\Big)^{|\gamma_i|/|\tau|}, \tag{3.65}$$

що доводить твердження.

Нерівність (3.63) випливатиме з оцінки

$$\|Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_n} - Q(\zeta^0)\zeta_{\gamma_1}\dots\zeta_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq$$
$$\leq C_n(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\times$$
$$\times\Big\{\|\xi^0-\zeta^0\|_{\ell_2(a)}\prod_{i=1}^{n}\big(\|\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}+\|\zeta_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}\big)+ \tag{3.66}$$
$$+(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta^0\|_{\ell_2(a)})\sum_{\ell=1}^{n}\|\xi_{\gamma_\ell}-\zeta_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_{\gamma_\ell}}(c_{\gamma_\ell})}\times \tag{3.67}$$
$$\times\prod_{i=1,i\neq\ell}^{n}\big(\|\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}+\|\zeta_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}\big)\Big\},$$

якщо покласти $\xi_{\gamma_i}=\zeta_{\gamma_i}=u_{\gamma_i}$ для $i=r+1,\dots,n$ в (3.66)–(3.67), після чого відокремити добуток $\prod\limits_{i=r+1}^{n}(2\|u_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})})$ та позначити $K=2^{n-\ell}C(1+|Q(0)|)$.

Доведемо (3.66)–(3.67). Додаючи та віднімаючи проміжні доданки, отримаємо:

$$\|Q(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_n} - Q(\zeta^0)\zeta_{\gamma_1}\dots\zeta_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq$$
$$\leq \|\big(Q(\xi^0)-Q(\zeta^0)\big)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}+ \tag{3.68}$$
$$+\sum_{\ell=1}^{n}\|Q(\zeta^0)\zeta_{\gamma_1}\dots\zeta_{\gamma_{\ell-1}}(\xi_{\gamma_\ell}-\zeta_{\gamma_\ell})\xi_{\gamma_{\ell+1}}\dots\xi_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}. \tag{3.69}$$

Враховуючи (3.62) отримаємо

$$(3.68) = \|(Q(\xi^0)-Q(\zeta^0))\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq$$
$$\leq C\,\|\xi^0-\zeta^0\|_{\ell_2(a)}(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\times$$
$$\times\,\|\xi_{\gamma_1}\|_{\ell_{m_{\gamma_1}}(c_{\gamma_1})}\dots\|\xi_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_{\gamma_n}}(c_{\gamma_n})}\leq$$

$$\le C\ \|\xi^0 - \zeta^0\|_{\ell_2(a)}(1 + \|\xi^0\|_{\ell_2(a)} + \|\zeta^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}(\|\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})} + \|\zeta_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}), \tag{3.70}$$

що дає (3.66). Зауважимо, що кожен з доданків в (3.69) має аналогічну (3.68) структуру, якщо замісить виразу $Q(\xi^0) - Q(\zeta^0)$ підставити $Q(\zeta^0)$, змінні ξ_{γ_i} для $i = 1, \ldots, \ell-1$ замінити на ζ_{γ_i}, а змінну ξ_{γ_ℓ} замінити на $(\xi_{\gamma_\ell} - \zeta_{\gamma_\ell})$. Тому наведені вище міркування також можуть бути застосовані щоб оцінити (3.69). При цьому слід використати:

$$|Q(\zeta_k^0)| \le |Q(0)| + |Q(\zeta_k^0) - Q(0)| \le$$
$$\le |Q(0)| + C|\zeta_k^0|(1 + |\zeta_k^0|)^{\varkappa} \le C(1 + |\zeta_k^0|)^{\varkappa+1}.$$

Таким чином, для довільного фіксованого $\ell = 1, \ldots, n$ маємо

$$(3.69)_\ell = \|Q(\zeta^0)\zeta_{\gamma_1}\ldots\zeta_{\gamma_{\ell-1}}(\xi_{\gamma_\ell} - \zeta_{\gamma_\ell})\xi_{\gamma_{\ell+1}}\ldots\xi_{\gamma_n}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \le$$
$$\le C(1 + \|\zeta^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\cdot(\prod_{i=1}^{\ell-1}\|\zeta_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})})\times$$
$$\times\ \|\xi_{\gamma_\ell} - \zeta_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_{\gamma_\ell}}(c_{\gamma_\ell})}\cdot(\prod_{i=\ell+1}^{n}\|\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}),$$

що дає (3.67). □

Застосовуючи теорію Като та отримані вище оцінки побудуємо варіаційні процеси ξ_τ.

Теорема 3.12. Нехай $a \in \mathbb{P}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, $|\tau| < m_1$, вектори $\{c_\tau\}$ задовольняють ієрархії (3.21) та вага $d \in \mathbb{P}$, така, що $d_k \ge a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \ge 1$. Введемо позначення $X_\gamma = \ell_{m_\gamma}(c_\gamma)$, $\quad Y_\gamma = \ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)$, $\quad m_\gamma = m_1/|\gamma|$, $\quad \gamma \subseteq \tau$. Тоді для $x^0 \in \ell_2(a)$ і $x_\gamma \in Y_\gamma$, $\gamma \subseteq \tau$ і для довільної підмножини $\gamma \subseteq \tau$ існує єдиний $\mathcal{F}_t$-адаптований процес

$$\xi_\gamma(t) \in C([0,T], X_\gamma) \cap L^\infty([0,T], Y_\gamma), \quad \mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}\text{-м.в. } \omega \in \Omega,$$

що є сильним розв'язком рівняння (3.16) на варіацію ξ_γ у просторі X_γ. Крім того, існує $K(\cdot,\tau,R)\in\bigcap_{p\ge1}L_p(\Omega,\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, така, що

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_\gamma(t,x^0)\|_{Y_\gamma}\le K(\omega,\tau,R) \tag{3.71}$$

для $R=\max(\|x^0\|_{\ell_2(a)},\ \|x_\gamma\|_{Y_\gamma},\ \gamma\subseteq\tau)$.

Доведення. Систему (3.16) можна розглядати як сім'ю неавтономних неоднорідних рівнянь, параметризованих $\omega\in\Omega$:

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_\tau}{dt}=-A(t)\xi_\tau-\varphi_\tau,\\ \xi_\tau(0)=x_\tau\end{cases} \tag{3.72}$$

з оператором

$$A(t)=A(\omega,t,x^0)=F''(\xi^0(\omega,t,x^0))+B \tag{3.73}$$

та функцією $\varphi_\tau=\varphi_\tau(\omega,t,x^0)$, введеною в (3.17). Для довільних фіксованих $\omega\in\Omega$, $x^0\in\ell_2(a)$ і $t\in[0,T]$ оператор $A(\omega,t,x^0)$ породжує сильно неперервну півгрупу у будь-якому просторі $\ell_p(c)$, $c\in\mathbb{P}$, $p\ge1$ з рівномірною по $\omega\in\Omega$, $x^0\in\ell_2(a)$ сталою $\lambda=\inf_{t\in\mathbb{R}^1}F''(t)+\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_p(c))}=\|B\|$. Це випливає з m-монотонності лінійного діагонального оператора $F''(\xi)y=\{F''(\xi_k)y_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ при довільному $\xi\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ та обмеженості B в шкалі просторів $\ell_p(c)$, $c\in\mathbb{P}$, $p\ge1$ [72, с.158].

З потраекторної неперервності процесу ξ^0_t і оцінки (3.61) з $Q(\cdot)=F''(\cdot)+B$, $\xi=\xi^0(t,x^0)$, $\zeta=\xi^0(s,x^0)$ випливає (3.54). Отже сім'я операторів $A(\omega,\cdot,x^0)\in C([0,T],\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau))$ породжує еволюційну систему $U^\omega_{x^0}(t,s)$.

Для побудови сильного розв'язку задачі (3.72) перевіримо умову (3.55) на φ_τ. Перевірку будемо проводити рекурентно. Для $|\alpha|=1$, $\varphi_\alpha\equiv0$, тому по теоремі 3.9 існує єдиний процес скінченної варіації

$$\xi_\alpha(\omega,t,x^0;x_\alpha)\in C([0,T],X_\alpha)\cap L^\infty([0,T],Y_\alpha),\quad |\alpha|=1, \tag{3.74}$$

який розв'язує (3.72) та допускає представлення $\xi_\alpha(t, x^0; x_\alpha) = U^\omega_{x^0}(t,0)x_\alpha$, $|\alpha| = 1$.

Припустимо, що твердження (3.74) справедливо для всіх $\alpha \subset \tau$, $|\alpha| \le n_0 - 1$. Тоді для $\alpha \subset \tau$, $|\alpha| = n_0$ з рекурентного припущення, (3.11) та (3.10) маємо що $\varphi_\alpha \in C([0,T], X_\alpha)$, оскільки з (3.63) випливає:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_\alpha(t_1) - \varphi_\alpha(t_2)\|_{X_\alpha} \le \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell = \alpha,\, \ell\ge 2} \|F^{(\ell)}(\xi^0(t_1))\xi_{\gamma_1}(t_1)\dots\xi_{\gamma_\ell}(t_1) - \\
- F^{(\ell)}(\xi^0(t_2))\xi_{\gamma_1}(t_2)\dots\xi_{\gamma_\ell}(t_2)\|_{X_\alpha} \le \\
\le K \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell = \alpha,\, \ell\ge 2} (1 + \|\xi^0(t_1)\|_{\ell_2(a)} + \|\xi^0(t_2)\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa} \times \\
\times \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \|\xi_{\gamma_i}(t_1)\|_{X_{\gamma_i}} + \|\xi_{\gamma_i}(t_2)\|_{X_{\gamma_i}}) \times \\
\times \{ \|\xi^0(t_1) - \xi^0(t_2)\|_{\ell_2(a)} + \sum_{i=1}^{\ell} \|\xi_{\gamma_i}(t_1) - \xi_{\gamma_i}(t_2)\|_{X_{\gamma_i}} \},
\end{aligned}
$$

де у правій частині цієї нерівності всі процеси є потраекторно неперервними. Аналогічно оцінка (3.63) з $n = r = \ell$ та $\zeta_{\gamma_1} = \dots = \zeta_{\gamma_\ell} = 0$ веде до обмеженості неоднорідної частини $\varphi_\alpha \in L^\infty([0,T], Y_\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_\alpha(\omega, x^0, t)\|_{Y_\alpha} \le K \sum_{\gamma_i\cup\dots\cup\gamma_\ell = \alpha,\, \ell\ge 2} \sup_{t\in[0,T]} \left(1 + \|\xi^0(t, x^0)\|_{\ell_2(a)}\right)^{\varkappa} \times \qquad (3.75) \\
\times \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \|\xi_{\gamma_i}(t, x^0)\|_{Y_{\gamma_i}}) \Big(\|\xi^0(t, x^0)\|_{\ell_2(a)} + \sum_{i=1}^{\ell} \|\xi_{\gamma_i}(t, x^0)\|_{Y_{\gamma_i}} \Big).
\end{aligned}
$$

Як наслідок теореми 3.9 для $|\alpha| = n_0$ маємо єдиний сильний розв'язок ξ_α задачі (3.72), що задовольняє (3.74) і має представлення

$$
\xi_\alpha(\omega, t, x^0; x_\gamma, \gamma \subseteq \alpha) = U^\omega_{x^0}(t,0)x_\alpha + \int_0^t U^\omega_{x^0}(t,s)\varphi_\alpha(s)ds. \qquad (3.76)
$$

$\mathcal{F}_t$-адаптовність $\xi_\alpha(t)$ випливає з представлення (3.76) і $\mathcal{F}_t$-адаптованості процесу $U^\omega_{x^0}(t,s)x_\gamma$ для $x_\gamma \in Y_\gamma$, а також (3.58) і (3.61) з $Q(\cdot) = F'(\cdot) + B$,

$\xi = \xi^0(\omega, \sigma, x^0)$, $\zeta = \xi^0(\widetilde{\omega}, \sigma, x^0)$:

$$\|U^{\omega}_{x^0}(t,s)x_\gamma - U^{\widetilde{\omega}}_{x^0}(t,s)x_\gamma\|_{X_\gamma} \le C\,|t-s|\;\|x_\gamma\|_{Y_\gamma}\times$$
$$\times \sup_{\sigma\in[0,t]} \|\xi^0(\omega,\sigma) - \xi^0(\widetilde{\omega},\sigma)\|_{\ell_2(a)} \cdot (1 + \|\xi^0(\omega,\sigma)\|_{\ell_2(a)} + \|\xi^0(\widetilde{\omega},\sigma)\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}.$$

Оцінка (3.71) випливає з представлення (3.76), ітерації нерівності (3.75) із застосуванням (3.11), (3.10) та оцінки

$$\|\xi_\alpha(\omega,t,x^0)\|_{Y_\alpha} \le e^{\lambda T}\|x_\alpha\|_{Y_\alpha} + Te^{\lambda T}\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi_\alpha(x^0,t)\|_{Y_\alpha}. \tag{3.77}$$

Нарешті, властивості (3.22), (3.23) в означенні сильного розв'язку випливають з (3.60), нерівності

$$\|\frac{d\xi_\gamma(t,x^0)}{dt}\|_{X_\gamma} = \|-\big(F'(\xi^0)+B\big)\xi_\gamma - \varphi_\gamma\|_{X_\gamma} \le$$
$$\le C(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\|\xi_\gamma\|_{Y_\gamma} + \|\varphi_\gamma\|_{X_\gamma}$$

і оцінок (3.11), (3.71) та (3.75). □

3.4 Неперервність варіацій за початковими умовами

Наступний результат про неперервність варіацій $\xi_\tau(t,x^0,x_\gamma)$ за початковою умовою x^0 використовується для доведення C^∞-диференційовності процесу $\xi^0(t,x^0)$ по x^0, а також для перенесення шляхом замикання нелінійної (3.25) з сильних розв'язків $\xi^0_t(x^0)$ при початкових умовах $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ до узагальнених розв'язків при $x^0 \in \ell_2(a)$.

Теорема 3.13. За умов теореми 3.12, для x^0, $y^0 \in \ell_2(a)$, $x_\gamma \in Y_\gamma$,$\gamma \subseteq \tau$ існує інтегровна функція $K(\cdot,\tau,R) \in \bigcap_{p\ge1} L_p(\Omega, \mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, така, що $\forall\,\gamma\subseteq\tau$, $|\gamma|\le m_1$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_\tau(t,x^0;x_\gamma) - \xi_\tau(t,y^0;x_\gamma)\|_{X_\tau} \le K(\omega,\tau,R)\,\|x^0-y^0\|_{\ell_2(a)} \tag{3.78}$$

де $R = \max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|y^0\|_{\ell_2(a)}, \|x_\gamma\|_{Y_\gamma}, \gamma\subseteq\tau)$.

Доведення. Застосовуючи оцінки (3.58), (3.61) до еволюційної сім'ї $U^{\omega}_{x^0}(t,s)$, генерованої оператором (3.73), маємо

$$\sup_{t,s\in[0,T]} \|U^{\omega}_{x^0}(t,s) - U^{\omega}_{y^0}(t,s)\|_{\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)} \le$$

$$\le Te^{2\lambda T} \sup_{s\in[0,T]} \|F'(\xi^0(s,x^0)) - F'(\xi^0(s,y^0))\|_{\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)} \le \tag{3.79}$$

$$\le C \sup_{s\in[0,T]} \|\xi^0(s,x^0) - \xi^0(s,y^0)\|_{\ell_2(a)} \Big(1 + \|\xi^0(s,x^0)\|_{\ell_2(a)} + \|\xi^0(s,y^0)\|_{\ell_2(a)}\Big)^{\varkappa} \le$$

$$\le C' \|x^0 - y^0\|_{\ell_2(a)} \big(1 + \|x^0\|_{\ell_2(a)} + \|y^0\|_{\ell_2(a)} + 2K(\omega)\big)^{\varkappa},$$

де $K(\cdot) \in \bigcap\limits_{p\ge1} L_p(\Omega, \mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, що випливає з (3.10) та (3.11).

При $|\tau| = 1$ $\varphi_\tau \equiv 0$ і з представлення (3.76) та оцінки (3.79) одержуємо твердження теореми:

$$\|\xi_\tau(\omega,t,x^0) - \xi_\tau(\omega,t,y^0)\|_{X_\tau} \le K'(\omega,R)\,\|x_\tau\|_{Y_\tau} \cdot \|x^0 - y^0\|_{\ell_2(a)}.$$

Припустимо, що для всіх τ, таких, що $|\tau| \le n-1$ твердження теореми виконано. Враховуючи представлення (3.76) маємо:

$$\|\xi_\tau(\omega,t,x^0) - \xi_\tau(\omega,t,y^0)\|_{X_\tau} \le \|U^{\omega}_{x^0}(t,0)x_\tau - U^{\omega}_{y^0}(t,0)x_\tau\|_{X_\tau} + \tag{3.80}$$

$$+ T \sup_{s,t\in[0,T]} \|\{U^{\omega}_{x^0}(t,s) - U^{\omega}_{y^0}(t,s)\}\varphi_\tau(\omega,s,x^0)\|_{X_\tau} + \tag{3.81}$$

$$+ T \sup_{t\in[0,T]} \|U^{\omega}_{y^0}(t,s)\{\varphi_\tau(\omega,s,x^0) - \varphi_\tau(\omega,s,y^0)\}\|_{X_\tau}. \tag{3.82}$$

Вирази (3.80) і (3.81) оцінюються за допомогою (3.79), (3.75) і (3.71). Крім того, з (3.17) і оцінки (3.63) з $Q(\cdot) = F^{(\ell)}(\cdot)$ маємо

$$(3.82) \le Te^{\lambda T} \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_\tau(\omega,t,x^0) - \varphi_\tau(\omega,t,y^0)\|_{X_\tau} \le$$

$$\le C' \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau} \sup_{t\in[0,T]} \big(1 + \|\xi^0(t,x^0)\|_{\ell_2(a)} + \|\xi^0(t,y^0)\|_{\ell_2(a)}\big)^{\varkappa} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \|\xi_{\gamma_i}(t,x^0)\|_{X_{\gamma_i}} + \|\xi_{\gamma_i}(t,y^0)\|_{X_{\gamma_i}}) \times \tag{3.83}$$

$$\times\Big(\,\|\xi^0(t,x^0)-\xi^0(t,y^0)\,\|_{\ell_2(a)}+\sum_{i=1}^{\ell}\,\|\xi_{\gamma_i}(t,x^0)-\xi_{\gamma_i}(t,y^0)\,\|_{X_{\gamma_i}}\Big)\leq$$

$$\leq K'(\omega,\tau,R)\,\|x^0-y^0\,\|_{\ell_2(a)},$$

з $K'(\cdot,\tau,R)\in L_p(\Omega,\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}),\ p\geq 1$. Вище було використано (3.10), (3.11), (3.71), а також рекурентне припущення. □

Наступна лема є наслідком теореми 3.13 у випадку спеціального вибору початкових даних в системі на варіації (3.18). Ця лема істотним чином буде використовуватися в наступних розділах для доведення гладких властивостей варіацій та півгрупи, оскільки саме при такому виборі початкових умов варіації ξ_τ мають сенс похідних процесу ξ^0_t.

Лема 3.14. [1, наслідок 4.19] Нехай ваги $a,\psi\in\mathbb{P}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}a_k=1$ і ξ_τ є сильним розв'язком задачі (3.16) при початкових умовах $\widetilde{x}_\tau$ (3.18).

Тоді для будь-якого $n\geq 1$ $\exists$ $K_n(\cdot,R,\psi)\in\bigcap\limits_{p\geq 1}L_p(\Omega,\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, такі, що для будь-якого набору τ такого, що $|\tau|\leq n$ мають місце оцінки:

$$\sup_{t\in[0,T]}|\xi_{k,\tau}(t,x^0)|\leq\frac{K_n(\omega,R,\psi)}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}(|\tau|-1)}\prod\limits_{j\in\tau}\psi_{k-j}},\tag{3.84}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}|\xi_{k,\tau}(t,x^0)-\xi_{k,\tau}(t,y^0)|\leq\frac{K_n(\omega,R,\psi)}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}(|\tau|-1)}\prod\limits_{j\in\tau}\psi_{k-j}}\,\|x^0-y^0\,\|_{\ell_2(a)},\tag{3.85}$$

з $R=\max(\,\|x^0\,\|_{\ell_2(a)},\,\|y^0\,\|_{\ell_2(a)})$.

Доведення. Оцінки (3.84) і (3.85) є наслідком (3.71) і (3.78) при спеціальному виборі просторів $\widetilde{X}_\tau=\ell_{m_\tau}(d^{-1}\widetilde{c}_\tau)$ і $\widetilde{Y}_\tau=\ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_\tau)$ з векторами $d_k=a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$ и $\widetilde{c}_{k,\tau}=a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}}\prod\limits_{j\in\tau}\psi_{k-j}^{m_1/|\tau|}$ для деякого $m_1\geq n$. Перш за все зауважимо, що набір ваг $\{\widetilde{c}_\tau\}$ задовольняє властивості (3.21) зі сталою $R_{\tau;\gamma_1\dots\gamma_\ell} = 1$. Дійсно,

$$a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}[\widetilde{c}_{k,\tau}]^{|\tau|} = a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1(|\tau|-2)}\prod_{j\in\tau}\psi_{k-j}^{m_1} \le a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1(|\tau|-\ell)}\prod_{j\in\tau}\psi_{k-j}^{m_1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\ell}[a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_i|-1}{|\gamma_i|}}\prod_{b\in\gamma_i}\psi_{k-b}^{m_1/|\gamma_i|}]^{|\gamma_i|} = [\widetilde{c}_{k,\gamma_1}]^{|\gamma_1|}\dots[\widetilde{c}_{k,\gamma_\ell}]^{|\gamma_\ell|}, \tag{3.86}$$

де $\tau = \gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell$, $|\gamma_1|+\dots+|\gamma_\ell| = |\tau|$, $\ell\ge 2$.

Доведемо оцінку (3.84). При $|\tau| = 1$ $\varphi_\tau\equiv 0$ і $\|\widetilde{x}_\tau\|_{\widetilde{Y}_\tau} = \psi_0$, тому, з представлення (3.76), маємо

$$\sup_{|\tau|=1}\sup_{s,t\in[0,T]}\|\xi_\tau(t,x^0,\widetilde{x}_\tau)\|_{\widetilde{Y}_\tau} \le e^{\lambda T}\|\widetilde{x}_\tau\|_{\widetilde{Y}_\tau} = e^{\lambda T}\psi_0 \tag{3.87}$$

з рівномірною по τ, $|\tau|\le n$, сталою $\lambda = \lambda(n) \ge \max_{|\tau|\le n}\|B\|_{\mathcal{L}(\widetilde{Y}_\tau)}$:

$$\forall\, x\in\widetilde{Y}_\tau \qquad \|B\,x\|_{\widetilde{Y}_\tau} = (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{c}_{k,\tau}|\sum_{j:\,|k-j|\le r_0}b(k-j)x_j|^{m_\tau})^{1/m_\tau} =$$

$$= (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{c}_{k,\tau}|\sum_{|i|\le r_0}b(i)x_{k-i}|^{m_\tau})^{1/m_\tau} \le \sum_{|i|\le r_0}|b(i)|(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{c}_{k,\tau}|x_{k-i}|^{m_\tau})^{1/m_\tau} =$$

$$= \sum_{|i|\le r_0}|b(i)|(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\widetilde{c}_{k,\tau}}{\widetilde{c}_{k-i,\tau}}\widetilde{c}_{k-i,\tau}|x_{k-i}|^{m_\tau})^{1/m_\tau} \le \sum_{|i|\le r_0}|b(i)|\,\delta_{\widetilde{c}_\tau}^{|i|/m_\tau}\,\|x\|_{\widetilde{Y}_\tau} \le$$

$$\le \sum_{|i|\le r_0}|b(i)|\,\delta_a^{\frac{\varkappa+1}{2}|i|(n-1)}\,\delta_\psi^{|i|}\,\|x\|_{\widetilde{Y}_\tau} = \lambda\,\|x\|_{\widetilde{Y}_\tau} < \infty, \tag{3.88}$$

де $\delta_\psi = \sup_{|k-j|=1}|\psi_k/\psi_j| < \infty$ для $\psi\in\mathbb{P}$. Далі доведення проводиться методом індукції по $|\tau|$. Оскільки $\|\widetilde{x}_\tau\|_{\widetilde{Y}_\tau} = 0$ при $|\tau|\ge 2$, з представлення (3.76), індуктивного припущення (3.87) і оцінки (3.75) отримаємо, після застосування (3.11), що $\exists\, K_n(\cdot,R,\psi)\ \forall\,|\alpha|\le n$:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_\alpha(\omega,t,x^0)\|_{\widetilde{Y}_\alpha} \le Te^{\lambda T}\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi_\alpha(\omega,t,x^0)\|_{\widetilde{Y}_\alpha} \le$$
$$\le K_n(\omega,R,\psi). \tag{3.89}$$

Координатна форма цієї нерівності дає (3.84).

Доведення нерівності (3.85) проводиться по схемі теореми 3.13. Відмітимо лише місця, які дають рівномірність по τ: $|\tau| \le n$ сталої $K_n(\omega, R, \psi)$. З (3.88) та аналогічної оцінки у просторі $\widetilde{X}_\tau$ маємо

$$\sup_{s,t\in[0,T]} \|U^\omega_{x^0}(t,s)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{Y}_\tau)}, \sup_{s,t\in[0,T]} \|U^\omega_{x^0}(t,s)\|_{\mathcal{L}(\widetilde{X}_\tau)} \le e^{\lambda T}, \tag{3.90}$$

отже стала C' в (3.79) є рівномірною. Аналогічно теоремі 3.13, оцінка виразів (3.80)–(3.82) доводиться методом індукції із застосуванням (3.90), (3.83), (3.89) а також властивостей: $\|\widetilde{x}_\tau\|_{\widetilde{Y}_\tau} = \psi_0$ при $|\tau| = 1$, і $\|\widetilde{x}_\tau\|_{\widetilde{Y}_\tau} = 0$ при $|\tau| > 1$, і $R_{\tau;\gamma_1\ldots\gamma_\ell} = 1$. Звідси випливає існування $K_n(\cdot, R, \psi)$, такої, що $\forall\ |\alpha| \le n$:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\xi_\alpha(\omega,t,x^0) - \xi_\alpha(\omega,t,y^0)\|_{\widetilde{X}_\alpha} \le K_n(\omega,R,\psi)\,\|x^0 - y^0\|_{\ell_2(a)}$$

і координатна форма якої дає (3.85). □

3.5 C^∞-диференційовність варіацій за початковими умовами

Введемо позначення $\mathbf{X}_\infty([a,b])$ для простору

$$\mathbf{X}_\infty([a,b]) = \bigcap_{p\ge1, c\in\mathbb{P}} AC_\infty([a,b],\ell_p(c)), \tag{3.91}$$

де $AC_\infty([a,b],X) = \{h \in C([a,b],X) \colon \exists\ h' \in L_\infty([a,b],X)\}$ — простір абсолютно неперервних функцій зі значеннями в деякому банаховому просторі X.

3.5.1 Регулярність першого порядку.

Теорема 3.15. Нехай F, B задовольняють умови (2.4)–(2.5). Тоді для всіх $x^0 \in \ell_2(a)$ і $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ та $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всіх $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$:

$$\chi^0(\cdot) := \xi^0(t, x^0 + h(\cdot)) - \xi^0(t, x^0 + h(a)) \in \mathbf{X}_\infty([a,b]). \tag{3.92}$$

Зокрема, у будь-якому просторі $\ell_p(c),\ c\in\mathbb{P},\ p\geq 1$, має місце інтегральне представлення

$$\xi^0(t,x^0+h(\cdot))\Big|_a^b=\int_a^b\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\{j\}}(t,x^0+h(s))h_j'(s)ds \tag{3.93}$$

та

$$\frac{d}{ds}\chi^0(\cdot)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\{j\}}(t,x^0+h(\cdot))h_j'(\cdot)\in L^\infty([a,b],\ell_p(c)). \tag{3.94}$$

При цьому варіації першого порядку $\xi_{\{j\}}$ будуються як розв'язки системи (3.16) при спеціальних початкових умовах (3.18).

Доведення. Спочатку доведемо (3.93) при $x^0\in\ell_{m_1(\varkappa+1)^2}(a)$ і $h\in\mathbf{X}_\infty([a,b])$ у просторі $X_1=\ell_{m_1}(c_1)$ з вагою $c_1\in\mathbb{P}$, такою. що $d_kc_{k,1}\leq a_k,\ d_k\geq a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$. З оцінок (3.10), (3.11) випливає, що для будь-якого $t\in[0,T]$ і для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$ майже всіх $\omega\in\Omega$, відображення $[a,b]\ni s\to\xi^0(\omega,t,x^0+h(s))\in\ell_{m_1}(a)$ є ліпшицевим в просторі $\ell_{m_1}(a)$, а тому і в X_1. З теорії абсолютно неперервних функцій у банаховому просторі [148–150] випливає існування для майже всіх $s\in[a,b]$ сильної X_1-похідної $X_1\dfrac{d}{ds}$ та інтегральне представлення:

$$\xi^0(t,x^0+h(\cdot))\Big|_a^b=\int_a^b X_1\frac{d}{ds}\xi^0(t,x^0+h(s))\,ds.$$

Щоб відтворити сильну X_1-похідну, доведемо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Delta_\varnothing(t,\alpha)\|_{X_1}\leq e^{K'T}(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}+\alpha T\,K(\omega,R)), \tag{3.95}$$

де

$$\Delta_{k,\varnothing}(t)=\frac{\xi_k^0(t,y^\alpha)-\xi_k^0(t,y^0)}{\alpha}-\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{k,\{j\}}(t,y^0)h_j' \tag{3.96}$$

при $y^\alpha=x^0+h(s+\alpha),\ h'=h'(s)$ і $K(\cdot,R)\in L_p(\Omega,\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}),\ \forall\,p\geq 1$ з

$$R=\max(\|x^0\|_{\ell_{m_1}(a)},\max_{s\in[a,b]}\{\|h(s)\|_{\ell_{m_1}(a)},\ \|h'(s)\|_{\ell_{m_1}(a)}\}).$$

Покажемо існування сильної X_1-похідної $X_1\dfrac{d}{dt}\Delta_{\varnothing}(t)$. Зауважимо, що представлення

$$\xi^0(t,y^\alpha)-\xi^0(t,y^0)=\eta^0(t,y^\alpha)-\eta^0(t,y^0),$$

в термінах процесу η^0 заданого в (3.8), дає існування сильної X_1-похідної:

$$X_1\frac{d}{dt}\Big(\frac{\xi^0_k(t,y^\alpha)-\xi^0_k(t,y^0)}{\alpha}\Big).$$

Крім того, з теорем 3.12, 3.9 для сильних розв'язків $\{\xi_{\{j\}}\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ і $v\in\bigcap\limits_{p,c}\ell_p(c)$ випливає представлення

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\{j\}}(t)v_j=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\widetilde{x}_jv_j-\int_0^t\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}v_j(F'(\xi^0)+B\,)U^\omega_{x^0}(s,0)\widetilde{x}_jds \tag{3.97}$$

і оцінка на функцію під інтегралом

$$\begin{aligned}&\|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}v_j(F'(\xi^0)+B\,)U^\omega_{x^0}(s,0)\widetilde{x}_j\,\|_{X_1}\le\\&\le K(1+\ \|\xi^0\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|v_j|\cdot\ \|U^\omega_{x^0}(s,0)\widetilde{x}_j\,\|_{\ell_{m_1}(a)}\le\\&\le Ke^{\lambda T}(1+\sup_{t\in[0,T]}\ \|\xi^0\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|v_j|a_j.\end{aligned}$$

Вище застосовано лему 3.11 (3.60) з $d_kc_{k,1}\le a_k$ і властивості еволюційної сім'ї $U^\omega_{x^0}$. Тому представлення (3.97) дає сильну X_1-диференційовність суми $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\{j\}}(t)v_j$ по $t\in[0,T]$. Як наслідок, існує сильна похідна $X_1\dfrac{d}{dt}\Delta_{\varnothing}(t)$. Таким чином, як випливає з [148–150], для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$ майже всіх $\omega\in\Omega$, $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\|\Delta_{\varnothing}(t)\,\|^{m_1}_{X_1}=m_1\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_{k,1}\Delta^{m_1-1}_{k,\varnothing}\cdot\{-\frac{F(\xi^0_k(y^\alpha))-F(\xi^0_k(y^0))}{\alpha}+\\+\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}F'(\xi^0_k)\xi_{k,\{j\}}h'_j-(B\,\Delta_{\varnothing})_k\}=\end{aligned}$$

$$= m_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,1}\Delta_{k,\varnothing}^{m_1-1}\{-F'(\xi_k^0)\Delta_{k,\varnothing} - (B\,\Delta_\varnothing)_k -$$

$$-\int_0^1 [\,F'(\zeta_{k,\varepsilon,\alpha}) - F'(\xi_k^0)\,]\,\frac{\xi_k^0(y^\alpha) - \xi_k^0(y^0)}{\alpha}\,d\varepsilon\} \le$$

$$\le K'\,\|\Delta_\varnothing(t)\,\|_{X_1}^{m_1} + \int_0^1 \|[F'(\zeta_{\varepsilon,\alpha}) - F'(\xi^0)]\,\frac{\xi^0(y^\alpha) - \xi^0(y^0)}{\alpha}\,\|_{X_1}^{m_1} d\varepsilon \quad (3.98)$$

з $K' = m_1\,\|B\,\|_{\mathcal{L}(X_1)} + m_1 - 1$. Вище використано позначення

$$\zeta_{\varepsilon,\alpha} = \xi^0(y^0) + \varepsilon(\xi^0(y^\alpha) - \xi^0(y^0)),$$

нерівності $F' \ge 0$, $|xy^{m-1}| \le \frac{1}{m}|x|^m + \frac{m-1}{m}|y|^m$ і формула

$$f(y)-f(x) = f'(x)(y-x)+\int_0^1 \{f'(x+\varepsilon(y-x))-f'(x)\}(y-x)d\varepsilon, \quad x,y\in\mathbb{R}^1.$$

З нерівності (3.98) випливає

$$\frac{d}{dt}\,\|\Delta_\varnothing(t)\,\|_{X_1}^{m_1} \le K'\,\|\Delta_\varnothing(t)\,\|_{X_1}^{m_1} + \alpha^{m_1}K(\omega,R), \quad (3.99)$$

де $K(\omega,R)$ виникає з оцінок

$$\|\frac{\xi^0(y^\alpha) - \xi^0(y^0)}{\alpha}\,\|_{Y_1}^{m_1} \le \frac{1}{\alpha}\,\|\xi^0(y^\alpha)-\xi^0(y^0)\,\|_{\ell_{m_1}(a)}^{m_1} \le e^{\lambda T m_1}(\max_{s\in[a,b]}\,\|h'\,\|_{\ell_{m_1}(a)})^{m_1},$$

та

$$\int_0^1 \|F'(\zeta_{\varepsilon,\alpha}) - F'(\xi^0)\,\|_{\mathcal{L}(Y_1,X_1)}^{m_1} d\varepsilon \le$$

$$\le C\int_0^1 \|\varepsilon(\zeta_{\varepsilon,\alpha} - \xi^0(y^0))\,\|_{\ell_2(a)}^{m_1}(1 + \|\xi^0\,\|_{\ell_2(a)} + \|\zeta_{\varepsilon,\alpha}\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_1} d\varepsilon \le$$

$$\le C'(\alpha\max_{s\in[a,b]}\,\|h'\,\|_{\ell_2(a)})^{m_1}(1 + 2\,\|\xi^0(y^0)\,\|_{\ell_2(a)} + \alpha\max_{s\in[a,b]}\,\|h'\,\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_1}.$$

Вище також були застосовані оцінка (3.10), диференційовність функції $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$, оцінка (3.61) з $Y_1 = \ell_{m_1}(dc_1)$, припущення $dc_1 \le a$, а також оцінка (3.11).

З нерівності (3.99) випливає (3.95).

З абсолютної неперервності функції h випливає збіжність

$$\Delta_{\varnothing}(0,\alpha)=\frac{h(s+\alpha)-h(s)}{\alpha}-h'(s)\to 0$$

у просторі X_1 при $\alpha\to 0$ для майже всіх $s\in[a,b]$. Отже, має місце інтегральне представлення (3.93) у просторі $\ell_{m_1}(c_1)$ для початкової умови $x^0\in\ell_{m_1(\varkappa+1)^2}(a)$. Можливість замикання до $x^0\in\ell_2(a)$ випливає з (3.10) і оцінки

$$\begin{gathered}\|\int_a^b\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\{\xi_{\{j\}}(\omega,t,x_n^0+h(s))-\xi_{\{j\}}(\omega,t,x^0+h(s))\}h_j'(s)\,\|_{X_1}\,ds\le\\ \le\int_a^b K_1(\omega,R,\psi)\,\|x_n^0-x^0\,\|_{\ell_2(a)}\,\|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\psi_{\cdot-j}}h_j'(s)\,\|_{\ell_{m_1}(a^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_1)}ds\le\\ \le K_1(\omega,R,\psi)\,\|x_n^0-x^0\,\|_{\ell_2(a)}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\frac{(\delta_a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}\delta_{c_1})^{i/m_1}}{\psi(i)}\int_a^b\|h'\,\|_{\ell_{m_1}(a)}ds,\end{gathered}\tag{3.100}$$

для доведення якої застосовано лему 3.14 (3.85) при $|\tau|=1$ і (3.88) з $b(i)=1/\psi_i$. Підбираючи вагу $\psi\in\mathbb{P}$ можна зробити суму збіжною, що доводить представлення (3.93) у просторі $X_1=\ell_{m_1}(c_1)$ для $x^0\in\ell_2(a)$.

Нарешті, представлення (3.93) і (3.94) у довільному просторі $\ell_p(c)$ випливають із вкладення

$$\forall\,p\ge 1,\ c\in\mathbb{P}\qquad\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\{j\}}(\omega,t,x^0+h(\cdot))h_j'(\cdot)\in L^\infty([a,b],\ell_p(c))$$

і теорії абсолютно неперервних функцій у банаховомму простору [148–150]. Щоб отримати останнє вкладення, необхідно повторити міркування (3.100), застосовуючи (3.84) при $|\tau|=1$ і те, що $h\in\mathbf{X}_\infty([a,b])$. $\square$

3.5.2 Регулярність високого порядку.

Теорема 3.16. Нехай відображення F, B задовольняють умови (2.4), (2.5). Тоді для $x^0 \in \ell_2(a)$ і $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ та $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всіх $\omega \in \Omega$, $t \in [0,T]$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$ $\forall\, \tau$:

$$\frac{d}{ds}\xi_{k,\tau}(t, x^0 + h(\cdot)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{k,\tau\cup\{j\}}(t, x^0 + h(\cdot))h'_j(\cdot) \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^1) \quad (3.101)$$

та

$$\xi_{k,\tau}(t, x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{k,\tau\cup\{j\}}(t, x^0 + h(s))h'_j(s)ds. \quad (3.102)$$

Процеси ξ_τ розуміються як розв'язки системи (3.16) при початкових умовах (3.18).

Доведення. Введемо позначення $X_n = \ell_{m_n}(c_n)$ для $m_n = m_1/n$ при досить великому m_1, з векторами $c_n \in \mathbb{P}$, такими, що

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d\ c_{k,1}d_k \le a_k \ \text{ та } \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ c_{k,n+1}d_k \le c_{k,n},$$

$d_k \ge a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$, $m_1 \ge 2$. Вектори $c_\tau = c_{|\tau|}$ задовольняють умову (3.21) зі сталою $R_{\tau;\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell} = 1$, тому за теоремою 3.13 при початкових умовах $\widetilde{x}_\tau$ (3.18) для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всіх $\omega \in \Omega$, $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ і $t \in [0,T]$ відображення

$$[a,b] \ni s \to \xi_\tau(\omega, t, x^0 + h(s)) \in X_{|\tau|}$$

є ліпшицевим у просторі $X_{|\tau|}$.

З нерівностей $\|\cdot\|_{X_{|\tau|+1}} \le \text{const}\, \|\cdot\|_{X_{|\tau|}}$, з врахуванням теорії абсолютно неперервних функцій у банаховому просторі [148–150] маємо представлення у просторі $X_{|\tau|+1}$:

$$\xi_\tau(t, x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b X_{|\tau|+1}\frac{d}{ds}\xi_\tau(t, x^0 + h(s))\, ds \quad (3.103)$$

з сильною похідною $X_{|\tau|+1}\dfrac{d}{ds}$, яка існує для майже всіх $s \in [a,b]$

Для відтворення сильної $X_{|\tau|+1}$-похідної доведемо методом індукції τ, $|\tau| \geq 1$, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\Delta_\tau(t,\alpha)\|_{X_{|\tau|+1}} \leq e^{KT}\max(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}, \alpha\, K(\omega,\tau,R)), \tag{3.104}$$

де

$$\Delta_{k,\tau}(t,\alpha) = \frac{\xi_{k,\tau}(t,y^\alpha) - \xi_{k,\tau}(t,y^0)}{\alpha} - \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{k,\tau\cup\{j\}} h'_j, \tag{3.105}$$

де $y^\alpha = x^0 + h(s+\alpha)$, $h' = h'(s)$ і $K(\cdot,\tau,R) \in L_p(\Omega, \mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, $\forall\, p \geq 1$ і

$$R = \max(\|x^0\|_{\ell_{m_1}(a)}, \max_{s\in[a,b]}\{\|h(s)\|_{\ell_{m_1}(a)}, \|h'(s)\|_{\ell_{m_1}(a)}\}).$$

Перевіримо сильну $X_{|\tau|+1}$-диференційовність виразу $\Delta_\tau(t,\alpha)$ для майже всіх $t \in [0,T]$.

З означення сильного розв'язку, враховуючи (3.18) та (3.76) маємо, що для довільного вектора $v \in \bigcap_{p\geq 1, c\in\mathbb{P}} \ell_p(c)$:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{\tau\cup j}(t) v_j = -\int_0^t \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} v_j (F'(\xi^0) + B) \int_0^s U^\omega_{x^0}(s,\sigma)\varphi_{\tau\cup j}(\sigma)\, d\sigma\, ds - \\ - \int_0^t \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} v_j \varphi_{\tau\cup j}\, ds, \quad |\tau| \geq 1. \tag{3.106}$$

Комбінуючи (3.76), (3.75) з $Y_n = \ell_{m_n}(dc_n)$, (3.11) і нерівність

$$\|\widetilde{x}_j\|_{Y_1} = (d_j c_{j,1})^{1/m_1} \leq (tr\, a)^{1/m_1} = 1,$$

маємо $\sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{\sigma\in[0,T]} \|\varphi_{\tau\cup j}(\sigma)\|_{Y_{|\tau|+1}} < \infty$. Крім того, з нерівності

$$\|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} v_j (F'(\xi^0) + B) \int_0^s U^\omega_{x^0}(s,\sigma)\varphi_{\tau\cup j}(\sigma)\, d\sigma\|_{X_{|\tau|+1}} \leq$$

$$\leq Te^{\lambda T}(1 + \|\xi^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |v_j| \sup_{\sigma\in[0,T]} \|\varphi_{\tau\cup j}(\sigma)\|_{Y_{|\tau|+1}}$$

випливає обмеженість виразів під інтегралом в (3.106). З цього випливає сильна диференційовність по $t \in [0,T]$ суми $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d} v_j \xi_{\tau\cup j}(t)$ і, як наслідок, виразів $\Delta_\tau(t)$ у просторі $X_{|\tau|+1}$.

Припустимо, що нерівність (3.104) виконана для всіх τ, таких, що $|\tau| \le n_0 - 1$. Оскільки доведення бази індукції при $|\tau| = 1$ співпадає з доведенням кроку індукції при $\varphi_\tau = 0$, $|\tau| = 1$, обидва доведення будуть проведені одночасно. З [148–150] випливає, що наступна норма може бути продиференційована

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\|\Delta_\tau(t)\,\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}} &= m_{|\tau|+1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,|\tau|+1}\Delta_{k,\tau}^{m_{|\tau|+1}-1}\{-(B\,\Delta_\tau)_k - \\
&- \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\ge1} \frac{1}{\alpha}F^{(\ell)}(\xi_k^0(\cdot))\xi_{k,\gamma_1}(\cdot)\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(\cdot)\Big|_{y^0}^{y^\alpha} + \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\substack{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\tau\cup\{j\}\\ \ell\ge1}} F^{(\ell)}(\xi_k^0(y^0))\xi_{k,\alpha_1}(y^0)\dots\xi_{k,\alpha_\ell}(y^0)h'_j\}. \quad (3.107)
\end{aligned}$$

Перепозначаючи індекси сумування з врахуванням $\xi_\varnothing := \xi^0$, приводимо останній доданок до вигляду

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\tau\cup\{j\},\ \ell\ge1} F^{(\ell)}(\xi_k^0(y^0))\xi_{k,\alpha_1}(y^0)\dots\xi_{k,\alpha_\ell}(y^0)h'_j = \\
&= \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\ge1}\Big\{\sum_{q=1}^{\ell} F^{(\ell)}(\xi_{k,\varnothing}(y^0))\xi_{k,\gamma_1}(y^0)\dots(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{k,\gamma_q\cup\{j\}}h'_j)\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(y^0) + \\
&\quad + F^{(\ell+1)}(\xi_{k,\varnothing}(y^0))\xi_{k,\gamma_1}(y^0)\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(y^0)\,(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\xi_{k,\{j\}}h'_j)\,\Big\}.
\end{aligned}$$

Застосовуючи позначення $\zeta_{\varepsilon,\alpha} = \xi(y^0) + \varepsilon(\xi(y^\alpha) - \xi(y^0))$ і формулу

$$f(y_0,\dots,y_\ell) - f(x_0,\dots,x_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell}\frac{\partial f}{\partial i}(\vec{x})(y_i - x_i) +$$

$$+\sum_{i=0}^{\ell}\int_0^1\{\frac{\partial f}{\partial i}(\vec{x}+\varepsilon(\vec{y}-\vec{x}))-\frac{\partial f}{\partial i}(\vec{x})\}(y_i-x_i)d\varepsilon,$$

перепишемо два останніх члена в (3.107) у вигляді

$$\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 1}\frac{1}{\alpha}F^{(\ell)}(\xi_k^0(\cdot))\xi_{k,\gamma_1}(\cdot)\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(\cdot)\Big|_{y^0}^{y^\alpha}-$$

$$-\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\tau\cup\{j\},\,\ell\geq 1}F^{(\ell)}(\xi_k^0(y^0))\xi_{k,\alpha_1}(y^0)\dots\xi_{k,\alpha_\ell}(y^0)h'_j=$$

$$=F'(\xi_{k,\varnothing}(y^0))\Delta_{k,\tau}(t)+ \tag{3.108}$$

$$+\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 2}\sum_{q=1}^{\ell}F^{(\ell)}(\xi_{k,\varnothing}(y^0))\xi_{k,\gamma_1}(y^0)\dots\Delta_{k,\gamma_q}\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(y^0)+ \tag{3.109}$$

$$+\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 1}F^{(\ell+1)}(\xi_{k,\varnothing}(y^0))\xi_{k,\gamma_1}(y^0)\dots\xi_{k,\gamma_\ell}(y^0)\Delta_{k,\varnothing}+ \tag{3.110}$$

$$+\int_0^1 d\varepsilon\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 1}\sum_{q=1}^{\ell}F^{(\ell)}(z_{k,\varnothing})z_{k,\gamma_1}\dots\frac{\xi_{k,\gamma_q}(y^\alpha)-\xi_{k,\gamma_q}(y^0)}{\alpha}\dots z_{k,\gamma_\ell}\Big|_{z=\xi(y^0)}^{z=\zeta_{\varepsilon,\alpha}}+ \tag{3.111}$$

$$+\int_0^1 d\varepsilon\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 1}F^{(\ell+1)}(z_{k,\varnothing})z_{k,\gamma_1}\dots z_{k,\gamma_\ell}\Big|_{z=\xi(y^0)}^{z=\zeta_{\varepsilon,\alpha}}\frac{\xi_{k,\varnothing}(y^\alpha)-\xi_{k,\varnothing}(y^0)}{\alpha}. \tag{3.112}$$

Вище, для того, щоб отримати вираз (3.108), в сумі $\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 1}$ було відокремлено перший доданок при $\ell=1$.

Застосовуючи $F'\geq 0$, продовжимо (3.107):

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_\tau(t)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}=-m_{|\tau|+1}\langle\Delta_\tau^\#,\{F'(\xi^0)+B\}\Delta_\tau(t)\rangle_{X_{|\tau|+1}}-$$

$$-m_{|\tau|+1}\langle\Delta_\tau^\#,(3.109)+(3.110)+(3.111)+(3.112)\rangle\leq$$

$$\leq(m_{|\tau|+1}\|B\|_{\mathcal{L}(X_{|\tau|+1})}+4(m_{|\tau|+1}-1))\,\|\Delta_\tau(t)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}+$$

$$+\|(3.109)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}+\|(3.110)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}+\|(3.111)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}+\|(3.112)\|_{X_{|\tau|+1}}^{m_{|\tau|+1}}. \tag{3.113}$$

Враховуючи властивість $\Delta_\tau(0)=0$, для завершення доведення оцінки (3.104), залишається показати, що всі члени в (3.113) оцінюються зверху виразом $\max(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}, \alpha\, K(\omega,\tau,R))$ з $K(\cdot,\tau,R)\in L_p(\Omega,\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d})$, $p\geq 1$. Для цього застосуємо оцінки отримані в лемі 3.11.

Для оцінки $\|(3.109)\|$ застосуємо (3.11), (3.71), індуктивне припущення (3.104) і нерівність (3.63) з $n=r+1=\ell, X_{\gamma_n}=X_{|\gamma_q|+1},\ u_{\gamma_n}=\Delta_{\gamma_q},\ \xi^0=\xi_\varnothing(y^0)$ та $X_{\gamma_i}=X_{|\gamma_i|}$, $\xi_{\gamma_i}=\xi_{\gamma_i}(y^0)$ при $i\neq q, i=1,\ldots,\ell,\ \zeta_{\gamma_1}=\cdots=\zeta_{\gamma_\ell}=0$. Маємо

$$\|(3.109)\|_{X_{|\tau|+1}}\leq \sum_{\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_\ell=\tau,\,\ell\geq 2}\ \sum_{q=1}^{\ell} K(1+\|\xi_\varnothing(y^0)\|)^{\varkappa}\prod_{i=1,i\neq q}^{\ell}(1+\|\xi_{\gamma_i}(y^0)\|_{X_{|\gamma_i|}})\times$$
$$\times\{\|\xi_\varnothing(y^0)\|_{\ell_2(a)}+\sum_{i=1,\,i\neq q}^{\ell}\|\xi_{\gamma_i}(y^0)\|_{X_{|\gamma_i|}}\}\cdot\|\Delta_{\gamma_q}\|_{X_{|\gamma_q|+1}}\leq$$
$$\leq e^{KT}\max(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}, \alpha\, K(\omega,\tau,R)).$$

Доданок $\|(3.110)\|_{X_{|\tau|+1}}$ оцінюється аналогічно, із застосуванням оцінки (3.95) і нерівності (3.63) з $n=r+1=\ell+1,\ \xi^0=\xi_\varnothing(y^0),\ X_{\gamma_i}=X_{|\gamma_i|},\ \xi_{\gamma_i}=\xi_{\gamma_i}(y^0)$ для $i=1,\ldots,\ell,\ X_{\gamma_n}=X_1,\ u_{\gamma_n}=\Delta_\varnothing,\ \zeta_{\gamma_1}=\cdots=\zeta_{\gamma_\ell}=0$.

Для оцінки $\|(3.111)_\ell\|_{X_{|\tau|+1}}$ при $\ell\geq 2$, використаємо властивості процесу ξ^0 (3.10), (3.11) і процесу ξ_γ (3.71), нерівність $\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]}\|h(s+\alpha)-h(s)\|_{\ell_2(a)}\leq\alpha_0 R$, теорему 3.13 і оцінку (3.63) з $n=r+1=\ell,\ \xi^0=\xi_\varnothing(y^0),\ \zeta^0=\zeta_{\varepsilon,\alpha,\varnothing},\ X_{\gamma_n}=X_{|\gamma_q|+1},\ u_{\gamma_n}=(\xi_{\gamma_q}(y^\alpha)-\xi_{\gamma_q}(y^0))/\alpha$ та

при $i=1,\ldots,q-1\ \ X_{\gamma_i}=X_{|\gamma_i|},\ \xi_{\gamma_i}=\xi_{\gamma_i}(y^0),\ \zeta_{\gamma_i}=\zeta_{\varepsilon,\alpha,\gamma_i}$;

при $j=q,\ldots,\ell-1\ \ X_{\gamma_j}=X_{|\gamma_{j+1}|},\ \xi_{\gamma_i}=\xi_{\gamma_{j+1}}(y^0),\ \zeta_{\gamma_j}=\zeta_{\varepsilon,\alpha,\gamma_{j+1}}$.

Тоді для будь-якого $\ell\geq 2$:

$$\|(3.111)_\ell\|_{X_{|\tau|+1}}\leq\int_0^1\sum_{q=1}^{\ell}\ \sum_{\substack{\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_\ell=\tau\\ \ell\geq 1}} K(1+\|\xi_\varnothing(y^0)\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta_{\varepsilon,\alpha,\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\times$$

$$\times \prod_{i=1, i\neq q}^{\ell} (1 + \|\xi_{\gamma_i}(y^0)\|_{X_{|\gamma_i|}} + \|\zeta_{\varepsilon,\alpha,\gamma_i}\|_{X_{|\gamma_i|}}) \cdot \|\frac{\xi_{\gamma_q}(y^\alpha) - \xi_{\gamma_q}(y^0)}{\alpha}\|_{X_{|\gamma_q|+1}} \times$$

$$\times (\varepsilon \|\xi_\varnothing(y^0) - \xi_\varnothing(y^\alpha)\|_{\ell_2(a)} + \sum_{i=1, i\neq q}^{\ell} \varepsilon \|\xi_{\gamma_i}(y^0) - \xi_{\gamma_i}(y^\alpha)\|_{X_{|\gamma_i|}})\, d\varepsilon \leq$$

$$\leq e^{KT} \max(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}, \alpha\, K(\omega,\tau,R)).$$

Щоб оцінити (3.111) при $\ell = 1$, застосуємо теорему 3.11 (3.61), ієрархію $dc_{n+1} \leq c_n$ і властивість процесу ξ_τ (3.78) у шкалі $\ell_{m_{|\tau|+1}}(dc_{|\tau|+1})$ з $d_k \geq a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2} m_1}$:

$$\|(3.111)_{\ell=1}\|_{X_{|\tau|+1}} \leq \int_0^1 d\varepsilon\, K \|\xi_\varnothing(y^0) - \zeta_{\varepsilon,\alpha,\varnothing}\|_{\ell_2(a)} \times$$

$$\times (1 + \|\xi_\varnothing(y^0)\|_{\ell_2(a)} + \|\zeta_{\varepsilon,\alpha,\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^\varkappa \cdot \|\frac{\xi_{k,\tau}(y^\alpha) - \xi_{k,\tau}(y^0)}{\alpha}\|_{\ell_{m_{|\tau|+1}}(dc_{|\tau|+1})} \leq$$

$$\leq e^{KT} \max(\|\Delta_\varnothing(0,\alpha)\|_{X_1}, \alpha\, K(\omega,\tau,R)).$$

Вище також застосовано співвідношення між нормами

$$\|\cdot\|_{\ell_{m_{|\tau|+1}}(dc_{|\tau|+1})} \leq \text{const}\, \|\cdot\|_{\ell_{m_{|\tau|}}(c_{|\tau|})}.$$

Нарешті, член $\|(3.112)\|_{X_{|\tau|+1}}$ можна оцінити аналогічно, застосовуючи

$$\frac{1}{\alpha} \|\xi_\varnothing(y^\alpha) - \xi_\varnothing(y^0)\|_{X_1} \leq \frac{1}{\alpha} \|\xi^0(y^\alpha) - \xi^0(y^0)\|_{\ell_2(a)} \leq e^{\lambda T} R$$

і нерівність (3.63) при $n = r + 1 = \ell + 1$, $\xi^0 = \xi_\varnothing(y^0)$, $\zeta^0 = \zeta_{\varepsilon,\alpha,\varnothing}$, $X_{\gamma_n} = X_1$, $u_{\gamma_n} = \frac{1}{\alpha}(\xi_\varnothing(y^\alpha) - \xi_\varnothing(y^0))$, а також при $i = 1, \ldots, \ell$ $X_{\gamma_i} = X_{|\gamma_i|}$, $\xi_{\gamma_i} = \xi_{\gamma_i}(y^0)$, $\zeta_{\gamma_i} = \zeta_{\varepsilon,\alpha,\gamma_i}$. Таким чином, оцінку (3.104) доведено. З абсолютної неперервності $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ маємо

$$\Delta_\varnothing(0,\alpha) = \frac{h(s+\alpha) - h(s)}{\alpha} - h'(s) \to 0$$

в X_1 при $\alpha \to 0$ для майже всіх $s \in [a,b]$. Звідси випливає представлення (3.103) для початкового даного $x^0 \in \ell_{m_1(\varkappa+1)^2}(a)$. Зокрема, його координатна форма має вигляд:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \quad \xi_{k,\tau}(t, x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{k,\tau\cup j}(t, x^0 + h(s))h'_j(s)\, ds.$$

Можливість замкнути до $x^0 \in \ell_2(a)$ випливає з $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ і леми 3.14 (3.85).

Остаточно, за теорією абсолютно неперервних функцій у банаховому просторі [148–150], представлення (3.101) і (3.102) у довільному просторі $\ell_p(c)$ випливають з

$$\forall\, p \geq 1,\ c \in \mathbb{P} \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \xi_{\cdot,\tau\cup\{j\}}(\omega, t, x^0 + h(\cdot))h'_j(\cdot) \in L^\infty([a,b], \ell_p(c)).$$

Перевірка цієї властивості проводиться аналогічно (3.100), із застосуванням (3.84) при $|\tau| = 1$ та властивість $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$. $\square$

3.6 Збереження просторів неперервно диференційованих функцій під дією оператора еволюції

Означення простору неперервно диференційованих функцій нескінченної кількості змінних буде надано з використанням наборів ваг $\Theta = \{(p, \mathcal{G})\}$, які складаються з функції p та матричної ваги $\mathcal{G}$, і були введені в § 2.1.

Для $m \in \mathbb{N}$ нехай Θ^m позначає скінченний набір пар ваг $\{(p,\mathcal{G})\colon (p,\mathcal{G}) \in \Theta^m\}$, де $\mathcal{G} = G^1 \otimes \cdots \otimes G^m$ є тензором m-го порядку, побудованим по векторам $G^i \in \mathbb{P}$, $i = 1, \ldots, m$, та p є функцією не більше ніж поліноміального росту (2.11).

Означення 3.17. Нехай $r \geq 0,\ n \geq 1$ і $\Theta = \Theta^1 \cup \cdots \cup \Theta^n$ — деякий набір ваг. *Функція f належить простору неперервно диференційованих функцій $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$*, якщо $f \in \mathrm{Lip}_r(\ell_2(a))$ і виконані наступні припущення:

1. Функція f має частинні похідні $\{\partial^{(1)} f, \dots, \partial^{(n)} f\}$ до порядку n. Тобто для довільного $m \in \{1, \dots, n\}$ існують частинні похідні

$$\{\partial^{(m)} f(x)\}_{j_1 \dots j_m} = \partial_\tau f(x)$$

в напрямку $\tau = \{j_1, \dots, j_m\}$, $j_i \in \mathbb{Z}^d$, які є неперервними в сенсі, що

$$\forall \tau: \ |\tau| \le n \quad \partial_\tau f \in C(\ell_2(a), \mathbb{R}^1)$$

та для будь-якого $x^0 \in \ell_2(a)$ і для довільної $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$ мають місце інтегральні співвідношення:

$$f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_k f(x^0 + h(s)) h'_k(s)\, ds, \tag{3.114}$$

$$\partial_\tau f(x^0 + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\tau \cup \{k\}} f(x^0 + h(s)) h'_k(s)\, ds, \tag{3.115}$$

для τ: $|\tau| \le n - 1$.

2. Наступна норма є скінченною:

$$\|f\|_{C_{\Theta,r}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}_r} + \max_{m=1,n} \|\partial^{(m)} f\|_{\Theta^m} < \infty, \tag{3.116}$$

де

$$\|u^{(m)}\|_{\Theta^m} = \sup_{x \in \ell_2(a)} \max_{(p_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta^m} \frac{\|u^{(m)}(x)\|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(\|x\|^2_{\ell_2(a)})}, \tag{3.117}$$

$$\|u^{(m)}(x)\|^2_{\mathcal{G}^m} = \sum_{\tau = \{j_1 \dots j_m\} \subset \mathbb{Z}^d} G^1_{j_1} \dots G^m_{j_m} |u_\tau(x)|^2$$

для $\mathcal{G}^m = G^1 \otimes \dots \otimes G^m$

Нагадаємо, що простір $\mathbf{X}_\infty([a,b])$ введений в (3.91), а простір $\mathrm{Lip}_r(\ell_m(a))$, $m \ge 2$ означений в (3.9).

Означення 3.18. Набір ваг $\Theta = \Theta^1 \cup \dots \cup \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$ назвемо *квазі-стискаючим з параметром* $\varkappa$, якщо для будь-якого $m = 2, \dots, n$ та пари $(p, \mathcal{G}) \in \Theta^m$, для довільних $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, існує така вага $(\widetilde{p}, \widetilde{\mathcal{G}}) \in \Theta^{m-1}$, що

$$\begin{aligned} &\exists\, K\colon \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^1_+ \ \ (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}} \widetilde{p}(z) \leq K p(z), \\ &(\widehat{\mathcal{G}}^{\{i,j\}})^\ell \leq K\, \widetilde{G}^\ell, \quad \ell = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \tag{3.118}$$

з матрицею $\widehat{\mathcal{G}}^{\{i,j\}}$ побудованою по матриці $\mathcal{G}$ за правилом (2.13).

Основний результат цього розділу полягає у наступній теоремі.

Теорема 3.19. Нехай F, B задовольняють умови (2.4), (2.5), і набір ваг $\Theta = \Theta^1 \cup \dots \cup \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$ є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa$. Тоді півгрупа P_t (3.13) зберігає простори $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$, $r \geq 0$, тобто $\forall\, t \geq 0$ $P_t\colon\ C_{\Theta,r} \to C_{\Theta,r}$ і

$$\exists\, K, M \ \ \forall\, f \in C_{\Theta,r} \qquad \|P_t f\,\|_{C_{\Theta,r}} \leq K e^{Mt}\, \|f\,\|_{C_{\Theta,r}}. \tag{3.119}$$

Доведення. Перш за все покажемо, що для будь-якої функції $f \in C_{\Theta,r}$ та будь-якого скінченного набору напрямків $|\tau| \leq n$ існують частинні похідні півгрупи $\partial_\tau P_t f(\cdot) \in C(\ell_2(a), \mathbb{R}^1)$. Крім того вони задовольняють інтегральні співвідношення (3.114), (3.115) для будь-якого $h \in \mathbf{X}_\infty([a,b])$:

$$(P_t f)(x + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_k P_t f(x + h(s)) h'_k(s) ds; \tag{3.120}$$

$$\partial_\tau P_t f(x + h(\cdot))\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\tau \cup \{k\}} P_t f(x + h(s)) h'_k(s) ds, \tag{3.121}$$

для $|\tau| \leq n - 1$.

Розглянемо вирази, що виникають у правій частині (3.14):

$$\delta_\tau(f,t,x) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \tau} \mathbf{E}\,\langle\, \partial^{(\ell)} f(\xi^0_t(x)), \xi_{\gamma_1}(t,x) \otimes \dots \otimes \xi_{\gamma_\ell}(t,x)\,\rangle. \tag{3.122}$$

Щоб довести, що ці вирази утворюють частинні похідні півгрупи $\delta_\tau = \partial_\tau P_t f$ у сенсі означення 3.17, необхідно довести, що:

1. $\delta_\tau(f,t,\cdot)$ неперервна на просторі $\ell_2(a)$;

2. $\delta_\tau(f,t,\cdot)$ рекурентно задовольняють співвідношення:

$$P_t f(x^0+h(\cdot))\Big|_a^b = \int\limits_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s)\delta_k(f,t,x^0+h(s))\,ds,$$

$$\partial_\tau P_t f(x^0+h(\cdot))\Big|_a^b = \int\limits_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s)\delta_{\tau\cup k}(f,t,x^0 h(s))\,ds, \quad |\tau|\geq 1.$$

Покажемо $\ell_2(a)$-неперервність $\delta_\tau(f,t,\cdot)$. лема 3.14 (3.85), припущення неперервності частинних похідних $\partial_\tau f(\cdot)\in C(\ell_2(a),\mathbb{R}^1)$ (за означенням простору $C_{\Theta,r}$) і (3.10) дають для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всіх $\omega\in\Omega$, $t\in[0,T]$ неперервність по $x^0\in\ell_2(a)$ виразу

$$\partial_{\{j_1\ldots j_\ell\}} f(\xi^0(t,x^0))\xi_{j_1,\gamma_1}(t,x^0)\ldots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell}(t,x^0). \tag{3.123}$$

Неперервність $\delta_\tau(f,t,x)$ по $x\in\ell_2(a)$ випливає з оцінки

$$|\partial_{j_1\ldots j_\ell} f(x)|^2 \leq \frac{1}{G^1_{j_1}\ldots G^\ell_{j_\ell}}\,p^2_\ell(\,\|x\|^2_{\ell_2(a)})\,\|f\|^2_{C_{\Theta,r}},$$

з вагою $(p_\ell,\mathcal{G}^\ell = G^1\otimes\cdots\otimes G^\ell)\in\Theta^\ell\subset\Theta$, і нерівності (3.84) з $\psi_k = e^{M|k|}$ при досить великому M. Враховуючи (3.11), це дає рівномірну по x^0 на кулях в $\ell_2(a)$, сумовну по $j_1,\ldots,j_\ell\in\mathbb{Z}^d$ і $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-інтегровану мажоранту для виразу (3.123). Як наслідок $\delta_\tau(f,t,\cdot)\in C(\ell_2(a),\mathbb{R}^1)$.

Доведемо рекурентні інтегральні співвідношення між функціями $\delta_\tau(f,t,\cdot)$. З теореми 3.15 випливає, що крива $\chi^0(\cdot) = \xi^0(x^0+h(\cdot)) - \xi^0(x^0+h(a))$ належить простору $\mathbf{X}_\infty([a,b])$ і для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-майже всіх $\omega\in\Omega$ має похідну (3.94). Отже, для $f\in C_{\Theta,r}$, з представлення (3.13) та означення 3.17

(3.114) маємо:

$$(P_t f)(x^0+h(\cdot))\Big|_a^b = \mathbf{E}[f(\chi^0(\cdot)+\xi^0(t,x^0+h(a)))]\Big|_a^b =$$

$$= \mathbf{E}\int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \partial_j f(\xi^0(t,x^0+h(a))+\chi^0(s))\cdot(\chi_j^0)'(s)\,ds =$$

$$= \mathbf{E}\int_a^b \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \partial_j f(\xi^0(t,x^0+h(s))) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \xi_{j,\{k\}}(t,x^0+h(s))h_k'(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h_k'(s)\mathbf{E}\langle\partial f(\xi^0),\xi_{\{k\}}\rangle\,ds = \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k(f,t,x^0+h(s))h_k'(s)\,ds.$$

Оцінка $|\partial_j f(x)|^2 \le (G_j^1)^{-1}p_1^2(\|x\|^2_{\ell_2(a)})\|f\|^2_{C_{\Theta,r}}$ з деякою вагою $(p_1,\mathcal{G}^1 = G^1)\in\Theta^1\subset\Theta$, оцінка (3.84) з $\psi_k = e^{M|k|}$ при достатньо великому M та властивість $h'\in\bigcap\limits_{p,c}\ell_p(c)$ дають відповідну мажоранту та виправдовують застосування теореми Фубіні вище.

Щоб отримати аналогічні представлення для похідних півгрупи вищих порядків, зауважимо, що з (3.116) випливає, що для функції $f\in C_{\Theta,r}$ має місце наступне представлення: $\forall\,|\tau|\le n-1$

$$\partial_\tau f(x^0+h(\cdot))\pi(\cdot)\Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \partial_{\tau\cup k} f(x^0+h(s))h_k'(s)\pi(s)\,ds+$$
$$+\int_a^b \partial_\tau f(x^0+h(s))\pi'(s)\,ds,$$

де $h\in\mathbf{X}_\infty([a,b])$ и $\pi\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^1)$. Застосовуючи теорему 3.16 (3.101) та

$$\pi(\cdot) = \{\xi_{j_1,\gamma_1}\ldots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell}\}(x^0+h(\cdot))\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^1),$$

отримаємо:

$$(\partial_\tau P_t f)(x^0+h(\cdot))\Big|_a^b =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{|\tau|} \sum_{\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_\ell=\tau} \mathbf{E} \sum_{j_1\ldots j_\ell\in\mathbb{Z}^d} \Big(\partial_{j_1}\ldots\partial_{j_\ell} f(\xi^0)\xi_{j_1,\gamma_1}\ldots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell}\Big)(t,x^0+h(\cdot))\Big|_a^b =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{|\tau|} \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau} \mathbf{E} \sum_{j_1\dots j_\ell\in\mathbb{Z}^d} \int_a^b \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \partial_{j_1\dots j_\ell,j} f(\xi^0) \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \xi_{j,\{k\}} h'_k \Big) \xi_{j_1,\gamma_1}\dots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\ell} \partial_{j_1\dots j_\ell} f(\xi^0) \xi_{j_1,\gamma_1} \dots \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \xi_{j_q,\gamma_q\cup\{k\}} h'_k \Big) \dots \xi_{j_\ell,\gamma_\ell} \Big\} (t, x^0 + h(s))\, ds = \tag{3.124}$$

$$= \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s) \Big\{ \sum_{\substack{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau\\ \ell=1,\dots,|\tau|}} \mathbf{E}\{ \sum_{j_1\dots j_\ell, j\in\mathbb{Z}^d} \partial_{j_1\dots j_\ell,j} f(\xi^0) \xi_{j_1,\gamma_1}\dots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell}\xi_{j,\{k\}} \} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\ell} \mathbf{E}\{ \sum_{i_1\dots i_\ell\in\mathbb{Z}^d} \partial_{i_1}\dots\partial_{i_\ell} f(\xi^0) \xi_{i_1,\gamma_1}\dots\xi_{i_q,\gamma_q\cup\{k\}}\dots\xi_{i_\ell,\gamma_\ell} \} \Big\} (t, x^0 + h(s))\, ds =$$

$$= \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s) \sum_{\substack{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau\cup\{k\}\\ \ell=1,\dots,|\tau|+1}} \Big[\mathbf{E} \sum_{j_1\dots j_\ell\in\mathbb{Z}^d} \partial_{j_1\dots j_\ell} f(\xi^0) \xi_{j_1,\gamma_1}\dots\xi_{j_\ell,\gamma_\ell} \Big] (x^0 + h(s))\, ds =$$

$$= \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s) \delta_{\tau\cup k}(f, t, x^0 + h(s)) ds = \int_a^b \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} h'_k(s) \partial_{\tau\cup k} P_t f(x^0 + h(s))\, ds,$$

що фактично надає точний зміст представленню (3.14) похідних півгрупи. Вище були перепозначені індекси сумування та використана теорема Фубіні в (3.124). Необхідна мажоранта може бути отримана з (3.11), властивості $h' \in \bigcap_{p,c} \ell_p(c)$, оцінки з рівномірними сталими (3.84) при виборі $\psi_k = e^{M|k|}$ з досить великим M, а також оцінки

$$|\partial_{j_1\dots j_\ell} f(x)|^2 \le (G^1_{j_1}\dots G^\ell_{j_\ell})^{-1} p_\ell^2(\|x\|^2_{\ell_2(a)}) \|f\|^2_{C_{\Theta,r}}$$

для деяких ваг $(p_\ell, \mathcal{G}^\ell = G^1 \otimes \dots \otimes G^\ell) \in \Theta^\ell \subset \Theta$.

Нарешті, для того, щоб отримати оцінки (3.119) на півгрупу перш за все зауважимо, що ваги

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_i &= q(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}(m_1/i - m_1/|\tau|)}, \\ \widetilde{c}_{k,\gamma} &= a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}} \prod_{j\in\tau} \psi_{k-j}^{m_1/|\gamma|}, \quad \gamma = \{j_1, \dots, j_\ell\} \end{aligned} \tag{3.125}$$

задовольняють ієрархії (3.24) і (3.21) зі сталими $K_p = R_{\gamma;\alpha_1,\dots\alpha_\ell} = 1$. За теоремою 3.13 і властивістю (3.10) процесу ξ^0, нелінійна оцінка (3.25) замикається до $x^0 \in \ell_2(a)$ з узагальненим розв'язком ξ^0. Застосування нелінійної оцінки (теорема 3.7) дає

$$\mathbf{E}\sum_{\ell=1}^{n} \widetilde{p}_\ell(\, \|\xi_t^0\,\|^2_{\ell_2(a)}) \sum_{\gamma\subseteq\tau,\, |\gamma|=\ell} \|\xi_\gamma\,\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(\widetilde{c}_\gamma)} \le e^{Mt}\widetilde{p}_1(\, \|x^0\,\|^2_{\ell_2(a)}) \sum_{\ell=1}^{n} \|\widetilde{x}_{\{i_\ell\}}\,\|^{m_1}_{\ell_{m_1}(\widetilde{c}_{\{i_\ell\}})}$$

для $\tau = \{i_1, \dots, i_n\}$, $|\tau| = n$. Вище використано, що $\|\widetilde{x}_\gamma\,\|_{\ell_{m_\gamma}(\widetilde{c}_\gamma)} = 0$, $|\gamma| \ge 2$ для початкових умов $\widetilde{x}_\tau$ (3.18). Підставляючи сюди вирази $\widetilde{p}_i$ і $\widetilde{c}_\gamma$, і опускаючи в лівій частині члени з $\ell < n$, отримаємо координатну форму

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{q(\, \|\xi^0(t,x^0)\,\|^2_{\ell_2(a)})\, |\xi_{k,\tau}(t)|^{m_\tau}\} \le \\ &\le \frac{K_{|\tau|} e^{tM_{|\tau|,\psi}}\, q(\, \|x^0\,\|^2_{\ell_2(a)})(1+\, \|x^0\,\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}}}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}} \prod_{j\in\tau}\psi_{k-j}^{m_1/|\tau|}} \end{aligned} \tag{3.126}$$

з $K_{|\tau|} = |\tau|\psi$. Стала $M_{|\tau|,\psi}$ є рівномірною по τ, $|\tau| \le n$, оскільки норма $\|B\,\|$ (3.88) оцінюється рівномірно і у виразах (3.47) і (3.48) $K_p = R_{\gamma;\alpha_1,\dots,\alpha_\ell} = 1$.

Для того, щоб отримати (3.119), достатньо довести, що для будь-якого $\Theta^m \subset \Theta$:

$$\max_{m=1,\dots,n} \|\partial^{(m)} P_t f\,\|_{\Theta^m} \le K e^{Mt}\, \|f\,\|_{C_{\Theta,r}}. \tag{3.127}$$

З умови (3.118) випливає, що для довільної ваги $(p_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta^m$ і розбиття $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_\ell = \{1, \dots, m\}$, $\ell \le m$ існує вага $(p_\ell, \widetilde{\mathcal{G}}^\ell = \widetilde{G}^1 \otimes \dots \otimes \widetilde{G}^\ell) \in \Theta^\ell$, така, що

$$\forall\,\ell < m \quad p_\ell(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}(m-\ell)} \le L\,p_m(z), \tag{3.128}$$

$$\forall\,k_1,\dots,k_\ell \in \mathbb{Z}^d \quad \prod_{i=1}^{\ell} a_{k_i}^{-(\varkappa+1)(|\gamma_i|-1)} G_{k_i}^{(\beta_i)} \le L \prod_{i=1}^{\ell} \widetilde{G}_{k_i}^{i}, \tag{3.129}$$

де використано позначення $G_k^{(\beta)} = \prod\limits_{i\in\beta} G_k^i,\ k\in\mathbb{Z}^d$.

Функція $\partial^{(m)}P_t f(x^0) = \{\partial_{k_1\dots k_m} P_t f(x^0)\}_{k_1\dots k_m\in\mathbb{Z}^d}$ з координатами (3.14) може бути представлена як скінченна сума

$$\partial^{(m)}P_t f(x^0) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1,\dots,m\}} \mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)} f(\xi^0), \vec{\xi}_{\beta_1}\dots\vec{\xi}_{\beta_\ell}\,\rangle,$$

де функції $\mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)} f(\xi^0), \vec{\xi}_{\beta_1}\dots\vec{\xi}_{\beta_\ell}\,\rangle$, $\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1,\dots,m\}$ мають координати:

$$\Big\{\mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)} f(\xi^0), \vec{\xi}_{\beta_1}\dots\vec{\xi}_{\beta_\ell}\,\rangle\Big\}_{j_1\dots j_m\in\mathbb{Z}^d} = \mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)} f(\xi^0), \xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_\ell}\,\rangle \tag{3.130}$$

з $\gamma_i = \{j_t, t\in\beta_i\},\ i=1,\dots,\ell$, для заданих точок $j_1,\dots,j_m\in\mathbb{Z}^d$.

Тоді для $z_t = \|\xi^0(t,x^0)\,\|^2_{\ell_2(a)}$, $z_0 = \|x^0\,\|^2_{\ell_2(a)}$ маємо

$$\begin{aligned}
&\frac{\|\partial^{(m)}P_t f(x^0)\|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(z_0)} = \\
&= \frac{1}{p_m(z_0)}\Big\|\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1\dots m\}} \mathbf{E}\Big[\sum_{k_1,\dots,k_s\in\mathbb{Z}^d} (\partial_{k_1\dots k_\ell} f)(\xi^0)\vec{\xi}_{k_1,\beta_1}\dots\vec{\xi}_{k_\ell,\beta_\ell}\Big]\Big\|_{\mathcal{G}^m} \le \\
&\le \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1\dots m\}} \Big\|\sum_{k_1\dots k_\ell\in\mathbb{Z}^d} \vec{B}^{\beta_1,\dots,\beta_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell}\Big(\mathbf{E}\frac{|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p_\ell^2(z_t)}\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathcal{G}^m},
\end{aligned} \tag{3.131}$$

де функції $\vec{B}^{\beta_1,\dots,\beta_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell} := \dfrac{1}{p_m(z_0)}\Big(\mathbf{E}\,p_\ell^2(z_t)|\vec{\xi}_{k_1,\beta_1}\dots\vec{\xi}_{k_\ell,\beta_\ell}|^2\Big)^{1/2}$ мають координати: для $\gamma_i = \{j_t,\ t\in\beta_i\}$

$$\{\vec{B}^{\beta_1,\dots,\beta_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell}\}_{j_1\dots j_m\in\mathbb{Z}^d} = B^{\gamma_1\dots\gamma_\ell}_{k_1\dots k_\ell} = \frac{1}{p_m(z_0)}\Big(\mathbf{E}\,p_\ell^2(z_t)|\xi_{k_1,\gamma_1}\dots\xi_{k_\ell,\gamma_\ell}|^2\Big)^{1/2}.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера з $h_i = p_\ell^{2|\gamma_i|/m}|\xi_{k_i,\gamma_i}|^2$, $q_i = m/|\gamma_i|$, $i = 1,\dots,\ell$, $\sum\limits_{i=1}^{\ell} 1/q_i = 1$ і нелінійну оцінку (3.126) з $q = p_\ell^2$, $m_\gamma = 2m/|\gamma|$ та $m_1 = m_\gamma \cdot |\gamma| = 2m$, маємо

$$
\begin{aligned}
B^{\gamma_1\dots\gamma_\ell}_{k_1\dots k_\ell} &\le \frac{1}{p_m(z_0)}\Big(\mathbf{E}\, p_\ell^2(z_t)|\xi_{k_1,\gamma_1}|^{\frac{2m}{|\gamma_1|}}\Big)^{\frac{|\gamma_1|}{2m}}\dots\Big(\mathbf{E}\, p_\ell^2(z_t)|\xi_{k_\ell,\gamma_\ell}|^{\frac{2m}{|\gamma_\ell|}}\Big)^{\frac{|\gamma_\ell|}{2m}} \le \\
&\le \frac{K_m^{1/2}e^{\frac12 M_{n,\psi}t}}{p_m(z_0)}\prod_{r=1}^{\ell}\Bigg(\frac{p_\ell^2(z_0)(1+z_0)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_r|-1}{|\gamma_r|}}}{a_{k_r}^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_r|-1}{|\gamma_r|}}\prod\limits_{j\in\gamma_r}\psi_{k_r-j}^{m_1/|\gamma_r|}}\Bigg)^{\frac{|\gamma_r|}{2m}} = \\
&= K_m^{1/2}e^{\frac12 M_{n,\psi}t}\,\frac{p_\ell(z_0)(1+z_0)^{(m-\ell)\frac{\varkappa+1}{2}}}{p_m(z_0)}\cdot\prod_{r=1}^{\ell}\Big(a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\prod_{j\in\gamma_r}\psi_{k_r-j}^{-1}\Big) \le \\
&\le L\,K_m^{1/2}e^{\frac12 M_{n,\psi}t}\prod_{r=1}^{\ell}\big(a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\prod_{j\in\gamma_r}\psi_{k_r-j}^{-1}\big).
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

Вище було застосовано ієрархію (3.128). Підставляючи (3.132) в (3.131), маємо:

$$
\begin{aligned}
\frac{\|\partial^{(m)}P_tf(x^0)\|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(z_0)} &\le \sum_{\ell=1}^{m}\ \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell=\{1,\dots,m\}} L\,K_m^{1/2}e^{\frac12 M_{n,\psi}t}\Big[\sum_{j_1,\dots,j_m\in\mathbb{Z}^d}G^1_{j_1}\dots G^m_{j_m}\times \\
\times\Big(\sum_{k_1,\dots,k_\ell\in\mathbb{Z}^d}&\big(\mathbf{E}\,\frac{|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_\ell}f(\xi^0)|^2}{p_\ell^2(z_t)}\big)^{1/2}\prod_{\ell=1}^{\ell}\big(a_{k_\ell}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_\ell|-1)}\prod_{j\in\gamma_\ell}\psi_{k_\ell-j}^{-1}\big)\Big)^2\Big]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{3.133}
$$

з $\gamma_r = \{j_i,\, i\in\beta_r\}$ і $\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell = \{1,\dots,m\}$.

Наступна комбінаторна лема дає необхідні оцінки на згортки.

Лема 3.20. Нехай $\delta_d \overset{def}{=} \sup\limits_{|k-j|=1}|d_k/d_j|$ і вага $b\in\mathbb{P}$, така, що $|b(k)|\le 1,\ k\in\mathbb{Z}^d$. Припустимо. що для $d^{(i)}\in\mathbb{P},\ i=1,\dots,n$

$$
C_b(d) = \prod_{\ell=1}^{n}\{1+\sum_{a\in\mathbb{Z}^d}b_a|\delta_{d^{(\ell)}}|^{|a|}\} < \infty. \tag{3.134}
$$

Тоді для довільного розбиття $\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell = \{1,\dots,n\},\ \ell\ge 1$ виконана наступна нерівність

$$\Big(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}\Big|\sum_{k_1\dots k_\ell\in\mathbb{Z}^d} x_{k_1\dots k_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i} b_{k_i-j_r}\Big|^2\Big)^{1/2}\le \tag{3.135}$$
$$\le C_b(d)\cdot\Big(\sum_{k_1\dots k_\ell\in\mathbb{Z}^d} d^{(\beta_1)}_{k_1}\dots d^{(\beta_\ell)}_{k_\ell}|x_{k_1\dots k_\ell}|^2\Big)^{1/2},$$

де використано позначення $d^{(\beta)}_k := \prod_{i\in\beta} d^{(i)}_k$.

Доведення леми 3.20. . Нехай $\alpha(i)=\min\{m\colon\ m\in\beta_i\}$, $i=1,\dots,\ell$. Введемо нові індекси сумування $a_i=k_i-j_{\alpha(i)}$, $i=1,\dots,\ell$, і перепишемо вираз 3.135 у вигляді

$$(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}\Big|\sum_{k_1\dots k_\ell\in\mathbb{Z}^d} x_{k_1\dots k_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i} b_{k_i-j_r}\Big|^2)^{1/2}=$$
$$=(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}|\sum_{k_1\dots k_\ell\in\mathbb{Z}^d} x_{k_1\dots k_\ell}\prod_{i=1}^{\ell} b_{k_i-j_{\alpha(i)}}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)} b_{k_i-j_r}|^2)^{1/2}=$$
$$=(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}|\sum_{a_1\dots a_\ell\in\mathbb{Z}^d} b_{a_1}\dots b_{a_\ell}x_{a_1+j_{\alpha(1)}\dots a_\ell+j_{\alpha(\ell)}}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)} b_{a_i+j_{\alpha(i)}-j_r}|^2)^{1/2}\le$$
$$\le\sum_{a_1\dots a_\ell\in\mathbb{Z}^d} b_{a_1}\dots b_{a_\ell}(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}\{\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)} b^2_{a_i+j_{\alpha(i)}-j_r})\}|x_{a_1+j_{\alpha(1)}\dots a_\ell+j_{\alpha(\ell)}}|^2)^{1/2}=$$
$$=\sum_{a_1\dots a_\ell\in\mathbb{Z}^d} b_{a_1}\dots b_{a_\ell}(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d}[\prod_{\substack{t=1,\dots,n\\ t\ne\alpha(i),\, i=1,\dots,\ell}} d^{(t)}_{j_t}]\prod_{i=1}^{n} d^{(\alpha(i))}_{j_{\alpha(i)}-a_i}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)} b^2_{j_{\alpha(i)}-j_r}|x_{j_{\alpha(1)}\dots j_{\alpha(\ell)}}|^2)^{1/2}. \tag{3.136}$$

Для подальшого оцінювання перепишемо коефіцієнт у вигляді:

$$[\prod_{\substack{t=1,\dots,n\\ t\ne\alpha(i),\, i=1,\dots,\ell}} d^{(t)}_{j_t}]\prod_{i=1}^{n} d^{(\alpha(i))}_{j_{\alpha(i)}-a_i}=d^{(1)}_{j_1}\dots d^{(n)}_{j_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{d^{(\alpha(i))}_{j_{\alpha(i)}-a_i}}{d^{(\alpha(i))}_{j_{\alpha(i)}}},$$

тому

$$(3.136) \leq \sum_{a_1\dots a_\ell\in\mathbb{Z}^d} b_{a_1}\dots b_{a_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}\delta_{d^{(\alpha(i))}}^{|a_i|}\times$$
$$\times\,(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d} d_{j_1}^{(1)}\dots d_{j_n}^{(n)}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)} b^2_{j_{\alpha(i)}-j_r}|x_{j_{\alpha(1)}\dots j_{\alpha(\ell)}}|^2)^{1/2} =$$
$$= \prod_{i=1}^{\ell}(\sum_{a\in\mathbb{Z}^d} b_a\delta_{d^{(\alpha(i))}}^{|a|})\times$$
$$\times\,(\sum_{j_1\dots j_n\in\mathbb{Z}^d}[\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i} d^{(r)}_{j_{\alpha(i)}}]\cdot[\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)}\frac{d^{(r)}_{j_r}}{d^{(r)}_{j_{\alpha(i)}}}b^2_{j_{\alpha(i)}-j_r}]\,|x_{j_{\alpha(1)}\dots j_{\alpha(\ell)}}|^2)^{1/2} \leq$$
$$\leq \prod_{i=1}^{\ell}(\sum_{a\in\mathbb{Z}^d} b_a\delta_{d^{(\alpha(i))}}^{|a|})\cdot\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i\setminus\alpha(i)}(\sum_{a\in\mathbb{Z}^d}\delta^{|a|}_{d^{(r)}}b_a^2)^{1/2}\times$$
$$\times\,(\sum_{j_{\alpha(1)}\dots j_{\alpha(\ell)}\in\mathbb{Z}^d}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{r\in\beta_i} d^{(r)}_{j_{\alpha(i)}}|x_{j_{\alpha(1)}\dots j_{\alpha(\ell)}}|^2)^{1/2}. \tag{3.137}$$

Враховуючи (3.134), остаточно приходимо до

$$(3.137) \leq C_b(d)(\sum_{k_1\dots k_\ell} d^{(\beta_1)}_{k_1}\dots d^{(\beta_\ell)}_{k_\ell}|x_{k_1\dots k_\ell}|^2)^{1/2}.$$

□

Застосовуючи лему 3.20 з $b_a = \psi_a^{-1}$ та

$$x_{k_1\dots k_\ell} = \prod_{r=1}^{\ell} a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\Big(\mathbf{E}\frac{|\partial_{k_1\dots k_\ell}f(\xi^0(t))|^2}{p_\ell^2(z_t)}\Big)^{1/2}$$

і підбираючи вагу $\psi \in \mathbb{P}$ таким чином, щоб

$$K_\psi = \sup_{m=1,\dots,n}\ \sup_{(p_m,\mathcal{G}^m)\in\Theta^m}\ \sup_{\ell=1,\dots,m}\sum_{a\in\mathbb{Z}^d}\psi_a^{-1}[\delta_{G^\ell}]^{|a|} < \infty,$$

отримаємо оцінку на кожен доданок в (3.133):

$$(3.133)_{\beta_1,\dots,\beta_\ell} \leq L\,K_m^{1/2}e^{\frac{1}{2}M_{n,\psi}t}(1+K_\psi)^m\times$$

$$\times \Big\{ \sum_{k_1\ldots k_\ell \in \mathbb{Z}^d} G_{k_1}^{(\gamma_1)} \ldots G_{k_\ell}^{(\gamma_\ell)} \Big| \prod_{r=1}^{\ell} a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)} \Big(\mathbf{E}\, \frac{|\partial_{k_1\ldots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p_\ell^2(z_t)}\Big)^{1/2} \Big|^2 \Big\}^{1/2} =$$

$$= K e^{M_n\, t} \Big(\mathbf{E} \sum_{k_1\ldots k_\ell \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{\ell} \big(a_{k_i}^{-(\varkappa+1)(|\gamma_i|-1)} G_{k_i}^{(\gamma_i)}\big) \frac{|\partial_{k_1\ldots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p_\ell^2(z_t)} \Big)^{1/2}.$$

Застосовуючи ієрархію (3.129) маємо

$$\frac{\|\partial^{(m)} P_t f(x^0)\|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(z)} \leq K' e^{M_n t} \sum_{\substack{\beta_1\cup\cdots\cup\beta_\ell=\{1,\ldots,m\}\\ \ell=1,\ldots,m}} \sup_{\xi^0} \frac{\|\partial^{(\ell)} f(\xi^0)\|_{\mathcal{G}^\ell}}{p_\ell(\, \|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})},$$

що завершує доведення. □

3.7 Щілина між топологіями обмеженості і неперервності на похідні нескінченновимірних півгруп

Розглянемо функції f над банаховим простором $\mathcal{B}_0$ з неперервними похідними Фреше $\partial^{(i)} f$, які означені у просторах $\mathcal{B}_i = \mathcal{L}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{i-1}),\ i \in \mathbb{N}$: $\forall\, i = 1, \ldots, n\ \ \forall\ x, y \in \mathcal{B}_0$:

$$\|\partial^{(i)} f(x)\|_{\mathcal{B}_i} \leq K,$$
$$\|\partial^{(i)} f(x) - \partial^{(i)} f(y)\|_{\mathcal{B}_i} \leq K \|x - y\|_{\mathcal{B}_0}.$$

Тоді, наприклад, для півгрупи $(P_t f)(x) = f(y_t(x))$, генерованої звичайним диференціальним рівнянням $y_t(x) = x - \int_0^t F(y_s(x))ds$, з глобально ліпшицевими коефіцієнтами з обмеженими похідними, мають місце нерівності: $\exists\, M\ \forall\, t \geq 0\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n\ \forall\, x, y \in \mathcal{B}_0$

$$\|\partial^{(i)}(P_t f)(x)\|_{\mathcal{B}_i} \leq K e^{Mt},$$
$$\|\partial^{(i)}(P_t f)(x) - \partial^{(i)}(P_t f)(y)\|_{\mathcal{B}_i} \leq K e^{Mt} \|x - y\|_{\mathcal{B}_0}.$$

Інакше кажучи, якщо розглянути норму, яка одночасно враховує обмеженість та неперервність похідних

$$\|f\|_{\mathcal{E}^n} = \max_{i=0,n}(\sup_{x\in\mathcal{B}_0} \|\partial^{(i)} f(x)\|_{\mathcal{B}_i}, \sup_{x,y\in\mathcal{B}_0} \frac{\|\partial^{(i)} f(x) - \partial^{(i)} f(y)\|_{\mathcal{B}_i}}{\|x-y\|_{\mathcal{B}_0}})$$

то матиме місце квазістискаюча властивість півгрупи в цьому просторі:

$$\exists\, M \;\forall\, f \in \mathcal{E}^n \quad \|P_t f\|_{\mathcal{E}^n} \leq e^{Mt} \|f\|_{\mathcal{E}^n}.$$

В даному параграфі дисертації продемонстровано, що у нелінійному випадку існує певна щілина між топологіями обмеженості і неперервності, яка пов'язана з параметром нелінійності задачі. А саме, для того, щоб простори неперервно диференційованих функцій:

$$\|f\|_{\mathcal{E}^n} = \max_{j=0,\ldots,n}[\sup_x \frac{\|\partial^{(j)} f(x)\|_{\mathcal{B}_j}}{q_j(\|x\|)}, \sup_{x,y} \frac{\|\partial^{(j)} f(x) - \partial^{(j)} f(y)\|_{\widetilde{\mathcal{B}}_j}}{\|x-y\| p_j(\|x\| + \|y\|)}] \qquad (3.138)$$

зберігались під дією півгрупи:

$$\exists\, M = M_{\mathcal{E}^n} \;\forall\, f \in \mathcal{E}^n \quad \|P_t f\|_{\mathcal{E}^n} \leq e^{Mt} \|f\|_{\mathcal{E}^n}$$

повинні мати місце співвідношення:

$$p_j(z) = \mathcal{P}ol_{\varkappa}(z) \cdot q_j(z) \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_j = C_{\varkappa} \mathcal{B}_j.$$

з деякою поліноміальною функцією $\mathcal{P}ol_{\varkappa}$ та матрицею $C_{\varkappa}$, які залежать від параметру нелінійності $\varkappa$ відображення F.

Нехай функції $p_\gamma, q_\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\gamma \subset \tau$ є додатними монотонними функціями не більше ніж поліноміального росту (2.11). Розглянемо нелінійний вираз

$$\rho_\tau(\xi^x, \xi^y; t) = \rho^b_\tau(\xi^x, \xi^y; t) + \rho^c_\tau(\xi^x, \xi^y; t),$$

який складається з двох частин, що відповідають топології обмеженості

ρ^b_τ та неперервності ρ^c_τ:

$$\rho^b_\tau(\xi^x,\xi^y;t) = \sum_{\gamma\subset\tau} \mathbf{E}\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^\delta_{\ell_2(a)}\, p_\gamma(n^{x,y}_t)\{\|\xi^x_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} + \|\xi^y_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\}, \tag{3.139}$$

$$\rho^c_\tau(\xi^x,\xi^y;t) = \sum_{\gamma\subset\tau} \mathbf{E}\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{\delta-m_\gamma}_{\ell_2(a)}\, q_\gamma(n^{x,y}_t)\|\xi^x_\gamma - \xi^y_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(a^{\frac{\varkappa}{2}m_\gamma}c_\gamma)}. \tag{3.140}$$

Вище використано позначення:

$$n^{x,y}_t = \|\xi^x_\varnothing(t)\|^2_{\ell_2(a)} + \|\xi^y_\varnothing(t)\|^2_{\ell_2(a)}, \tag{3.141}$$

відповідно $n^{x,y}_0 = \|x\|^2_{\ell_2(a)} + \|y\|^2_{\ell_2(a)}$, і $\xi^x_\varnothing = \xi^0(t,x)$ — розв'язок вихідного рівняння (3.6), що відповідає початковому даному x.

Теорема 3.21. [60, теорема 4]Нехай F, B задовольняють (2.4), (2.5) та $\xi^x_\varnothing,\xi^y_\varnothing$, $\xi^x_\gamma,\xi^y_\gamma$, $\gamma\subset\tau$ є розв'язками рівнянь (3.6), (3.16) з початковими умовами $x,y\in\ell_2(a)$ і $x_\gamma,y_\gamma\in\ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)$, $d_k \geq a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$ відповідно. Припустимо, що ваги $\{c_\gamma,\ \gamma\subset\tau\}$ задовольняють ієрархії (3.21), а функції $\{p_\gamma,\ \gamma\subset\tau\}$ задовольняють (2.11), (3.24) і $\{q_\gamma,\gamma\subset\tau\}$ такі, що $q_\gamma(z)(1+z)^{\varkappa m_\gamma/2} = p_\gamma(z)$. Тоді для $\delta\geq m_1\geq|\tau|$ існує така стала M_τ, що

$$\rho_\tau(\xi^x,\xi^y;t) \leq e^{M_\tau t}\rho_\tau(\xi^x,\xi^y;0) \tag{3.142}$$

Доведення. цієї теореми проводиться аналогічно теоремі 3.7 і повністю викладено в роботі [60]. Воно спирається на нерівність:

$$g_\gamma(t) \leq e^{C_1 t}g_\gamma(0) + C_2\int_0^t e^{C_1(t-s)}h^{i-1}_\tau(\xi^x,\xi^y;s)ds, \tag{3.143}$$

де $g_\gamma(\xi^x,\xi^y;t) = g^b_\gamma(\xi^x,\xi^y;t) + g^c_\gamma(\xi^x,\xi^y;t)$ і

$$\begin{aligned} g^b_\gamma(t) =&\ \mathbf{E}\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^\delta_{\ell_2(a)}p_\gamma(n^{x,y}_t)\{\|\xi^x_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} + \|\xi^y_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\} \\ g^c_\gamma(t) =&\ \mathbf{E}\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{\delta-m_\gamma}_{\ell_2(a)}q_\gamma(n^{x,y}_t)\|\xi^x_\gamma - \xi^y_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(a^{\frac{\mathbf{k}+1}{2}m_\gamma}c_\gamma)}. \end{aligned}$$

Крім того, для $i = 1, \ldots, |\tau|$ $h^i_\tau(\xi^x, \xi^y; t) = h^i_{\tau,b}(\xi^x, \xi^y; t) + h^i_{\tau,c}(\xi^x, \xi^y; t)$, де

$$h^i_{\tau,b}(\xi^x, \xi^y; t) = \begin{cases} 0, \quad i = 0 \\ \sum\limits_{\gamma \subset \tau,\ |\gamma| \leq i} g^b_\gamma(\xi^x, \xi^y; t), \quad i \geq 1; \end{cases}$$

$$h^i_{\tau,c}(\xi^x, \xi^y; t) = \begin{cases} 0, \quad i = 0 \\ \sum\limits_{\gamma \subset \tau,\ |\gamma| \leq i} g^c_\gamma(\xi^x, \xi^y; t), \quad i \geq 1. \end{cases}$$

В свою чергу нерівність (3.143) випливає з оцінок:

$$g^b_\gamma(t) \leq g^b_\gamma(0) + A_1 \int_0^t g^b_\gamma(s)ds + A_2 \int_0^t h^{i-1}_{\tau,b}(s)ds, \tag{3.144}$$

$$g^c_\gamma(t) \leq g^c_\gamma(0) + B_1 \int_0^t g^c_\gamma ds + B_2 \int_0^t g^b_\gamma ds + B_3 \int_0^t h^{i-1}_\tau ds,$$

з деякими сталими A_1, B_i, які доводяться аналогічно (3.29). Зауважимо, що нерівність (3.144) справедлива для будь-якого $\delta \geq 0$ (див. [60]). $\square$

Теорема 3.21 має наступні важливі наслідки, які будуть використані при доведенні основної теореми 3.27 даного параграфу.

Наслідок 3.22. [42, наслідок 2] Нехай виконані умови теореми 3.21. Тоді для розв'язків ξ^x_τ, ξ^y_τ варіаційних рівнянь (3.16) з початковими даними (3.18), для довільної функції $Q(\cdot)$ не більше ніж поліноміального зростання і вектора $\psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{P}$ існують такі сталі K_1, K_1 і $M_{|\tau|}$, що $\forall\, \delta \geq 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, \|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^\delta_{\ell_2(a)} Q(n^{x,y}_t)\{|\xi^x_{k,\tau}|^{m_\tau} + |\xi^y_{k,\tau}|^{m_\tau}\} \leq \\ \leq \frac{K_1 e^{M_{|\tau|} t} \|x - y\|^\delta_{\ell_2(a)} Q(n^{x,y}_0)(1 + n^{x,y}_0)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau (|\tau|-1)}}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau (|\tau|-1)} \prod\limits_{j \in \tau} \psi^{m_\tau}_{k-j}}. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Доведення. Оцінка (3.145) є наслідком нерівності

$$\rho^b_\tau(\xi^x, \xi^y; t) \leq e^{M_\tau t} \rho^b_\tau(\xi^x, \xi^y; 0) \tag{3.146}$$

яка випливає з (3.144), де ρ_τ^b введені в (3.139). Якщо в лівій частині (3.146) опустити члени, що відповідають множинам $\gamma \subset \tau$, $|\gamma| < |\tau|$ і вибрати $p_\gamma(z) = Q(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}(m_\gamma - m_\tau)}$, $\gamma \subset \tau$, отримаємо:

$$\mathbf{E}\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^\delta_{\ell_2(a)} Q(n^{x,y}_t)\{\|\xi^x_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} + \|\xi^y_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\} \leq$$
$$\leq e^{M_\tau t}\|x-y\|^\delta_{\ell_2(a)} Q(n^{x,y}_0)(1+n^{x,y}_0)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau(|\tau|-1)} 2\sum_{j\in\tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})},$$

оскільки в правій частині, з врахуванням спеціального виду початкових даних (3.18), залишиться тільки член з $|\gamma| = 1$ і $m_\gamma - m_\tau = m_1 - m_\tau = m_\tau(|\tau|-1)$. Вибираючи

$$c_{k,\tau} = a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 \frac{|\tau|-1}{|\tau|}} \prod_{j\in\tau} \psi_{k-j}^{m_1/|\tau|}, \tag{3.147}$$

що задовольняють ієрархію (3.21) з сталою $R_{\tau,\alpha} = 1$ (див. (3.86)), отримаємо оцінку (3.145). □

Лема 3.23. [42, лема 4] Нехай виконані умови теореми 3.21. Тоді для розв'язку ξ^x_τ, варіаційного рівняння (3.16) з початковим даним (3.18), для довільного $q \geq 0$ має місце оцінка:

$$\mathbf{E} \sup_{\sigma\in[0,t]} \|\xi^x_\tau(\sigma)\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq C_\tau e^{M_\tau t}(1+\|x\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} q(|\tau|-1)} \sum_{j\in\tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q|\tau|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}. \tag{3.148}$$

Доведення. Для $\tau = \{j\}$, $|\tau| = 1$ з представлення (3.76), в кому $\varphi_\tau \equiv 0$, випливає

$$\mathbf{E} \sup_{\sigma\in[0,t]} \|\xi^x_\tau(\sigma)\|^q_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})} \leq e^{\lambda q t}\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^q_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})},$$

що дає індуктивне припущення.

Нехай оцінка (3.148) виконана для будь-якого $\gamma \subset \tau$, $|\gamma| < |\tau|$, тоді для $\tau\colon\ |\tau| \geq 2$ з (3.57) маємо

$$\mathbf{E}\sup_{[0,t]} \|\xi^x_\tau\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq \mathbf{E}\Big(e^{\lambda t}\|\widetilde{x}_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} + t e^{\lambda t} \sup_{[0,t]} \|\varphi^x_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\Big)^q \leq$$

$$\leq t^q e^{\lambda q t} \mathbf{E} \sup_{[0,t]} \|\varphi_\tau^x\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}, \tag{3.149}$$

де використано, що при вихідних даних (3.18) $\widetilde{x}_{k,\tau} = 0$ і $\|\widetilde{x}_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} = 0$, якщо $|\tau| \geq 2$. З представлення (3.51) для φ_τ та (3.62) випливає

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \sup_{[0,t]} \|\varphi_\tau^x\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} = \ \mathbf{E} \sup_{[0,t]} \| \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \tau,\ \ell \geq 2} F^{(\ell)}(\xi^x_\varnothing) \xi^x_{\gamma_1} \dots \xi^x_{\gamma_\ell} \|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq \\
\leq C_{q,\tau} \, \mathbf{E} \sup_{[0,t]} (1 + \|\xi^x_\varnothing\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} q} \sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \|\xi^x_{\gamma_r}\|^q_{\ell_{m_{\gamma_r}}(c_{\gamma_r})} \leq \\
\leq C_{q,\tau} \big(\mathbf{E} \sup_{[0,t]} (1 + \|\xi^x_\varnothing\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} q(\ell+1)} \big)^{1/(\ell+1)} \times \\
\times \big(\sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \mathbf{E} \sup_{[0,t]} \|\xi^x_{\gamma_r}\|^{q(\ell+1)}_{\ell_{m_{\gamma_r}}(c_{\gamma_r})} \big)^{1/(\ell+1)}.
\end{aligned} \tag{3.150}$$

З індуктивного припущення, оцінки (3.11), записаної в формі:

$$\mathbf{E} \sup_{\sigma \in [0,T]} (1 + \|\xi^x_\varnothing(\sigma)\|^2_{\ell_2(a)} + \|\xi^y_\varnothing(\sigma)\|^2_{\ell_2(a)})^q \leq K \, e^{qMT} (1 + \|x\|^2_{\ell_2(a)} + \|y\|^2_{\ell_2(a)})^q \tag{3.151}$$

та нерівності $\sum_{r=1}^{\ell} (|\gamma_\ell| - 1) + 1 \leq |\tau| - 1$ для $\ell \geq 2$ випливає

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \sup_{[0,t]} \|\varphi_\tau^x\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq \\
\leq M_1 e^{M_2 t} (1 + \|x\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} q(|\tau|-1)} \sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \big(\sum_{j \in \gamma_r} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q(\ell+1)|\gamma_r|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})} \big)^{1/(\ell+1)} \leq \\
\leq M_1 e^{M_2 t} (1 + \|x\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} q(|\tau|-1)} \sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell} \prod_{r=1}^{\ell} \big(\sum_{j \in \tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q(\ell+1)|\gamma_r|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})} \big)^{1/(\ell+1)}
\end{aligned}$$

Використовуючи еквівалентність норм в просторі $\mathbb{R}^{|\tau|}$:

$$\prod_{r=1}^{\ell} \big(\sum_{j \in \tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q(\ell+1)|\gamma_r|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})} \big)^{1/(\ell+1)} \leq C_{|\tau|} \sum_{j \in \tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q \sum_{r=1}^{\ell} |\gamma_r|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}. \tag{3.152}$$

остаточно отримаємо:

$$\mathbf{E}\sup_{[0,t]}\|\varphi_\tau^x\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \le C_{|\tau|}M_1 e^{M_2 t}(1+\|x\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}q(|\tau|-1)}\sum_{j\in\tau}\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{q|\tau|}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}, \tag{3.153}$$

що завершує доведення леми. □

Теорема 3.24. [42, теорема 5]Нехай виконані умови теореми 3.21. Тоді для розв'язків ξ_τ^x, ξ_τ^y варіаційних рівнянь (3.16) з початковими даними (3.18), для довільної функції $Q(\cdot)$ не більше ніж поліноміального зростання для довільного $\delta \ge 0$ має місце нерівність:

$$\begin{aligned}&\exists\ M_\tau \quad \mathbf{E}\,Q(n_t^{x,y})\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_\tau^x-\xi_\tau^y\|^{\delta m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau}c_\tau)} \le \\ &\le e^{M_\tau T}\|x-y\|^{\delta m_\tau}_{\ell_2(a)}Q(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\delta(\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}+\frac{\varkappa}{2}m_\tau)}\sum_{j\in\tau}\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}.\end{aligned} \tag{3.154}$$

Доведення. Проведемо доведення методом індукції. Для того, щоб отримати базу індукції при $\tau=\{j\}$, $m_\tau=m_1$ використаємо представлення (3.76) і оцінку (3.58), враховуючи, що $\varphi_\tau\equiv 0$ при $|\tau|=1$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,Q(n_t^{x,y})\sup_{t\in[0,T]}\|\xi^x_{\{j\}}-\xi^y_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\{j\}})} = \\ &=\mathbf{E}\,Q(n_t^{x,y})\sup_{t\in[0,T]}\|U^x(t,0)\widetilde{x}_{\{j\}}-U^y(t,0)\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\{j\}})} \le \end{aligned} \tag{3.155}$$

$$\le (Te^{2T(\lambda+\widetilde{\lambda})})^{\delta m_1}\mathbf{E}\,Q(n_t^{x,y})\sup_{\sigma,t\in[0,T]}\|F'(\xi^x_\varnothing)-F'(\xi^y_\varnothing)\|^{\delta m_1}_{\mathcal{L}(Y_{\{j\}},X_{\{j\}})}\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{Y_{\{j\}}}, \tag{3.156}$$

де $X_{\{j\}}=\ell_{m_1}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\{j\}})$, $Y_{\{j\}}=\ell_{m_1}(da^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\{j\}})=\ell_{m_1}(c_{\{j\}})$ з вагою $d_k=a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$ і $\lambda=\|B\|_{\mathcal{L}(X_{\{j\}})}$, $\widetilde{\lambda}=\|B\|_{\mathcal{L}(Y_{\{j\}})}$. Застосовуючи (3.61) з врахування означення $n_t^{x,y}$ (3.141), отримаємо для $u=\widetilde{x}_{\{j\}}\in Y_{\{j\}}$:

$$\|[F'(\xi^x_\varnothing)-F'(\xi^y_\varnothing)]u\|^{\delta m_1}_{X_{\{j\}}} \le C\,\|\xi^x_\varnothing-\xi^y_\varnothing\|^{\delta m_1}_{\ell_2(a)}(1+n_t^{x,y})^{\delta m_1\varkappa/2}\|u\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})},$$

що дає оцінку

$$(3.156) \le C\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}\mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{\sigma\in[0,T]} \|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{\delta m_1}_{\ell_2(a)}(1+n_t^{x,y})^{\delta m_1 \varkappa/2} \le$$

$$\le C\,\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}\big(\mathbf{E}\, Q^3(n_t^{x,y})\big)^{1/3}\,\mathbf{E}\sup_{\sigma\in[0,T]}\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{3\delta m_1}_{\ell_2(a)})^{1/3}\times$$

$$\times\,(\mathbf{E}\sup_{\sigma\in[0,T]}(1+n_t^{x,y})^{3\delta m_1\varkappa/2})^{1/3}. \tag{3.157}$$

Формула Іто, застосована до $Q^3(n_t^{x,y})$, та нерівність:

$$L^{x,y}p(n_t^{x,y}) \ge -M_p p(n_t^{x,y}) \tag{3.158}$$

для довільної поліноміальної функції (див. лему 2.5), де

$$L^{x,y}p(n_t^{x,y}) = -\,2p'(n_t^{x,y})\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k - 2p''(n_t^{x,y})\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k^2(x_k+y_k)^2 + \tag{3.159}$$

$$+\,2p'(n_t^{x,y})\{\langle x, F(x)+B\,x\rangle_{\ell_2(a)} + \langle y, F(y)+B\,y\rangle_{\ell_2(a)}\}$$

дають

$$\mathbf{E}\, Q^3(n_t^{x,y}) = Q^3(n_0^{x,y}) -\ \mathbf{E}\int_0^t L^{x,y}Q^3(n_t^{x,y})dt \le$$

$$\le Q^3(n_0^{x,y}) + M\int_0^t \mathbf{E}\, Q^3(n_t^{x,y})dt. \tag{3.160}$$

З нерівності Гронуолла-Беллмана випливає

$$\mathbf{E}\, Q^3(n_t^{x,y}) \le e^{M\,t}Q^3(n_0^{x,y}). \tag{3.161}$$

Тому, з (3.10) та (3.151) випливає

$$(3.157) \le Ke^{M\,T}\|\widetilde{x}_{\{j\}}\|^{\delta m_1}_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}Q(n_0^{x,y})\|x-y\|^{\delta m_1}_{\ell_2(a)}(1+n_0^{x,y})^{\delta m_1\varkappa/2},$$

що дає твердження теореми 3.24 при $\tau = \{j\}$.

Припустимо, що для всіх підмножин $\gamma \subset \tau$, $|\gamma| < |\tau|$ нерівність (3.154) виконана. Позначимо $X_\tau = \ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_\tau)$ для $\widetilde{c}_\tau = a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau}c_\tau$, тоді $Y_\tau = \ell_{m_\tau}(d\,\widetilde{c}_\tau) =$

$\ell_{m_\tau}(c_\tau)$ з $d_k = a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau}$. Для початкових даних x, y (3.18), використовуючи представлення (3.76) та властивості (3.57), (3.58) еволюцій $U^x(t,s)$, та $U^y(t,s)$ отримаємо:

$$\mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t\in[0,T]} \|\xi_\tau^x - \xi_\tau^y\|_{X_\tau}^{\delta m_\tau} =$$

$$= \mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t\in[0,T]} \| \int_0^t \Big(U^x(t,\sigma)\varphi_\tau^x(\sigma) - U^y(t,\sigma)\varphi_\tau^y(\sigma) \Big)\, d\sigma \|_{X_\tau}^{\delta m_\tau} \le$$

$$\le C\, \mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t,\sigma\in[0,T]} \| \big(U^x(t,\sigma) - U^y(t,\sigma)\big)\varphi_\tau^x(\sigma)\|_{X_\tau}^{\delta m_\tau} +$$

$$+ C\, \mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t,\sigma\in[0,T]} \| \, U^y(t,\sigma)\big(\varphi_\tau^x(\sigma) - \varphi_\tau^y(\sigma)\big)\|_{X_\tau}^{\delta m_\tau} \le$$

$$\le C e^{\delta m_\tau(\lambda+\widetilde{\lambda})T}\, \mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t\in[0,T]} \|F'(\xi_\varnothing^x) - F'(\xi_\varnothing^y)\|_{\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)}^{\delta m_\tau} \|\varphi_\tau\|_{Y_\tau}^{\delta m_\tau} + \tag{3.162}$$

$$+ C\, e^{\lambda \delta m_\tau T}\, \mathbf{E}\, Q(n_t^{x,y}) \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_\tau^x - \varphi_\tau^y\|_{X_\tau}^{\delta m_\tau}. \tag{3.163}$$

Для оцінки виразу (3.162) застосуємо нерівність

$$\Big(\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|F'(\xi_\varnothing^x) - F'(\xi_\varnothing^y)\|_{\mathcal{L}(Y_\tau,X_\tau)}^{3\delta m_\tau}\Big)^{1/3} \le$$

$$\le C\, \|x-y\|_{\ell_2(a)}^{\delta m_\tau}(1 + n_0^{x,y})^{\delta m_\tau \varkappa/2}, \tag{3.164}$$

яка випливає з (3.61), лему 3.148, зокрема оцінку (3.153) з $q = 3\delta m_\tau$, а також (3.161). Враховуючи, що $3\delta m_\tau|\tau| = 3\delta m_1$, матимемо:

$$\big(\mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \|\varphi_\tau^x\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^{3\delta m_\tau}\big)^{1/3} \le M_1 e^{M_2 T}(1+\|x\|_{\ell_2(a)}^2)^{\delta m_\tau \frac{\varkappa+1}{2}(|\tau|-1)} \sum_{j\in\tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}^{\delta m_1},$$

що дасть оцінку на (3.162)

$$(3.162) \le C e^{MT} \|x-y\|_{\ell_2(a)}^{\delta m_\tau} Q(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\delta m_\tau \frac{\varkappa+1}{2}(|\tau|-1) + \delta m_\tau \frac{\varkappa}{2}} \sum_{j\in\tau} \|\widetilde{x}_{\{j\}}\|_{\ell_{m_1}(c_{\{j\}})}^{\delta m_1}. \tag{3.165}$$

Оцінка виразу (3.163) проводиться аналогічно з врахуванням представлення

$$\|\varphi^x_\tau - \varphi^y_\tau\|^{\delta m_\tau}_{X_\tau} \le C \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ \ell\ge 2} \Big\{\| \big[F^{(\ell)}(\xi^x_\varnothing) - F^{(\ell)}(\xi^y_\varnothing)\big]\xi^y_{\gamma_1}\dots\xi^y_{\gamma_\ell}\|^{\delta m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_\tau)} + \\ + \sum_{i=1}^{\ell} \|F^{(\ell)}(\xi^x_\varnothing)\xi^y_{\gamma_1}\dots\xi^y_{\gamma_{i-1}}(\xi^x_{\gamma_i} - \xi^y_{\gamma_i})\xi^x_{\gamma_{i+1}}\dots\xi^x_{\gamma_\ell}\|^{\delta m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_\tau)}\Big\},$$

оцінки

$$\| \big[F^{(\ell)}(\xi^x_\varnothing) - F^{(\ell)}(\xi^y_\varnothing)\big]\xi^y_{\gamma_1}\dots\xi^y_{\gamma_\ell}\|^{\delta m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_\tau)} \le \\ \le C\,\|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{\delta m_\tau}_{\ell_2(a)}(1+n_t^{x,y})^{\delta m_\tau \varkappa/2}\prod_{i=1}^{\ell}\|\xi^y_{\gamma_i}\|^{\delta m_\tau}_{\ell_{m_{\gamma_i}}(\widetilde{c}_{\gamma_i})},$$

яка випливає з (3.62), та індуктивного припущення. □

Наслідок 3.25. [42, наслідок 6] Нехай виконані умови теореми 3.21. Тоді для розв'язків ξ^x_τ, ξ^y_τ варіаційних рівнянь (3.16) з початковими даними (3.18), для довільної функції $Q(\cdot)$ не більше ніж поліноміального зростання для довільного $\delta \ge 0$ має місце оцінка:

$$\mathbf{E}\,Q(n_t^{x,y})|\xi^x_{k,\tau} - \xi^y_{k,\tau}|^{m_\tau} \le \\ \le \frac{K\,e^{M_{|\tau|}t}\|x-y\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)}Q(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}+\varkappa m_\tau/2}}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1/|\tau|}a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\tau|-1}{|\tau|}}\prod_{a\in\tau}\psi_{k-a}^{m_1/|\tau|}}. \tag{3.166}$$

Доведення. Оцінка (3.166) є наслідком теореми 3.24 (3.154), якщо вектора c_τ вибрати як в (3.147). □

Для $n\in\mathbb{N}$ розглянемо набір $\Theta = \Theta^1\cup\dots\cup\Theta^n$ пар ваг $\{(q_m, \mathcal{G}^m)\in\Theta^m\}$, де q_m є гладкою функцією поліноміальної поведінки, тобто задовольняє (2.11), і $\mathcal{G}^m = G^1\otimes\dots\otimes G^m$ є матрицею, побудованою по векторам $G^i\in\mathbb{P}$, $i=1,\dots,m$.

Нехай $\mathrm{Lip}_r(\ell_2(a))$ позначає банахів простір, оснащений нормою (3.9).

Означення 3.26. *Банахів простір* $\mathcal{E}_{\Theta,r}(\ell_2(a))$, $\Theta = \Theta_b \cup \Theta_c$ складається з функцій $f \in \mathrm{Lip}_r(\ell_2(a))$, що мають частинні похідні до n-того порядку $\{\partial^{(1)} f, \ldots, \partial^{(n)} f\}$, $\{\partial^{(m)} f\}_{k_1,\ldots,k_m} = \partial_{\{k_1,\ldots,k_m\}} f(x)$ і наступна норма є скінченною:

$$\|f\|_{\mathcal{E}_{\Theta,r}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}_r} + \max_{m=1,\ldots,n} (\|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_b^m}, \|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_c^m}) < \infty.$$

Тут відповідні півнорми на обмеженість та неперервність похідних мають вигляд:

$$\|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_b^m} = \max_{(q_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta_b^m} \sup_{x \in \ell_2(a)} \frac{\|\partial^{(m)} f(x)\|_{\mathcal{G}^m}}{q_m(\|x\|^2_{\ell_2(a)})}, \tag{3.167}$$

$$\|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_c^m} = \max_{(q_m, \mathcal{H}^m) \in \Theta_c^m} \sup_{x,y \in \ell_2(a)} \frac{\|\partial^{(m)} f(x) - \partial^{(m)} f(y)\|_{\mathcal{C}^m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)} q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}}, \tag{3.168}$$

$$\|\partial^{(m)} f\|^2_{\mathcal{G}^m} = \sum_{\tau = \{j_1,\ldots,j_m\} \subset \mathbb{Z}^d} G^1_{j_1} \ldots G^m_{j_m} |\partial_\tau f(x)|^2,$$

для $\mathcal{G}^m = G^1 \otimes \cdots \otimes G^m$, $\mathcal{C}^m = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m$, $G^i, C^i \in \mathbb{P}$.

Частинні похідні $\{\partial^{(1)} f, \ldots, \partial^{(n)} f\}$ функції $f \in \mathcal{E}_{\Theta,r}$ розуміються у сенсі тотожностей: $\forall\, x \in \ell_2(a)\ \forall\, h \in \mathbf{X}_\infty([a,b]) = \bigcap_{p \ge 1,\ c \in \mathbb{P}} AC_\infty([a,b], \ell_p(c))$

$$f(x+h(\cdot)) \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_k f(x+h(s)) h_k'(s)\, ds, \tag{3.169}$$

$$\partial_\tau f(x+h(\cdot)) \Big|_a^b = \int_a^b \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\tau \cup \{k\}} f(x+h(s)) h_k'(s)\, ds \tag{3.170}$$

для $|\tau| \le n-1$.

Вище простір $AC_\infty([a,b], X)$ введений в (3.91).

Теорема 3.27. [42, теорема 3] Нехай F, B задовольняють умови (2.4), (2.5). Нехай $\Theta = \Theta_b \cup \Theta_c$, де набір ваг $\Theta_c = \{(q, \mathcal{C})\}$ є квазі-стискаючим, а набір Θ_b генерується по набору Θ_c наступним чином:

$$\Theta_b^m = \{\ (q_m, \mathcal{G}_j^m)_{j=1}^m, \ \text{ де }\ \mathcal{G}_j^m = C^1 \otimes \cdots \otimes A^{-(\varkappa+1)} C^j \otimes \cdots \otimes C^m$$

$$\text{для} \quad (q_m, \mathcal{C}^m = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m) \in \Theta_c^m \ \}. \quad (3.171)$$

Тоді для будь-якого $t \geq 0$ $P_t \colon \mathcal{E}_{\Theta,r} \to \mathcal{E}_{\Theta,r}$, тобто існують такі сталі $K_{\Theta,r}, M_{\Theta,r}$, що

$$\forall\, f \in \mathcal{E}_{\Theta,r} \quad \|P_t f\|_{\mathcal{E}_{\Theta,r}} \leq K_{\Theta,r} e^{M_{\Theta,r} t} \|f\|_{\mathcal{E}_{\Theta,r}}. \quad (3.172)$$

Зауваження 3.28. Якщо набір Θ_c є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa$, то відповідний йому набір $\Theta_b = \Theta_b^1 \cup \cdots \cup \Theta_b^n$, генерований за правилом (3.171), також буде квазі-стискаючим з тим самим параметром $\varkappa$.

Доведення. З означення норми в $\mathcal{E}_{\Theta,r}$ випливає, що функція $f \in \mathcal{E}_{\Theta,r}$ має неперервні частинні похідні $\partial_\tau f \in C(\ell_2(a), \mathbb{R}^1)$, $|\tau| \leq n$. В теоремі 3.19 було доведено, що простори $C_{\Theta,r}$ зберігаються під дією півгрупи і має місце оцінка (3.119). Крім того, для $f \in C_{\Theta,r}$ частинні похідні $\partial_\tau P_t f \in C(\ell_2(a), \mathbb{R}^1)$ задовольняють (3.114), (3.115) та має місце представлення (3.14). Оскільки $\mathcal{E}_{\Theta,r} \subset C_{\Theta,r}$, тому для доведення теореми достатньо отримати оцінку (3.172), яка завдяки (3.119), випливатиме з нерівності

$$\max_{m=1,\dots,n} \|\partial^{(m)} P_t f\|_{\Theta_c^m} \leq K_\Theta e^{M_\Theta t} \max_{m=1,\dots,n} (\|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_b^m}, \|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_c^m}). \quad (3.173)$$

Щоб довести (3.173) скористаємось представленням похідних півгрупи $\partial^{(m)} P_t f(x) = \{\partial_{k_1} \dots \partial_{k_m} P_t f(x)\}_{k_1,\dots,k_m}$ (3.14) в наступному вигляді:

$$\partial^{(m)} P_t f(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1,\dots,m\}} \mathbf{E}\, \langle \partial^{(\ell)} f(\xi_\varnothing^x), \vec{\xi}_{\beta_1}^x \dots \vec{\xi}_{\beta_\ell}^x \rangle,$$

де для фіксованого набору $\{j_1, \dots, j_m\} \subset \mathbb{Z}^d$ розбиття $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_\ell = \{j_1, \dots, j_m\}$ генерується розбиттям множини $\{1, \dots, m\}$ на підмножини: $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1, \dots, m\}$. Відповідно будемо використовувати наступну ідентифікацію: $\gamma_i = \{j_r,\ r \in \beta_i\}$ та $\{\vec{\xi}_{\beta_\ell}^x\}_{j_1,\dots,j_m} = \xi_{\gamma_r}^x$, $r = 1, \dots, \ell$.

Зафіксуємо пару $(q_m, \mathcal{C}^m = C^1 \otimes \cdots \otimes C^m) \in \Theta_c^m$ у виразі (3.168) означення півнорми $\|\partial^{(m)} P_t f\|_{\Theta_c^m}$. Додавши та віднявши проміжні доданки, матимемо:

$$\frac{\|\partial^{(m)} P_t f(x) - \partial^{(m)} P_t f(y)\|_{\mathcal{C}^m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)} q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}} \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell} \Big\{ \frac{\| \mathbf{E} \sum\limits_{k_1,\ldots,k_\ell} \big[\partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^x) - \partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^y)\big] \vec{\xi}^x_{k_1,\beta_1} \ldots \vec{\xi}^x_{k_\ell,\beta_\ell} \|_{\mathcal{C}^m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)} q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}} + \tag{3.174}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\|\mathbf{E} \sum\limits_{k_1,\ldots,k_\ell} \partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^y) \vec{\xi}^x_{k_1,\beta_1} \ldots \vec{\xi}^x_{k_{j-1},\beta_{j-1}} (\vec{\xi}^x_{k_j,\beta_j} - \vec{\xi}^y_{k_j,\beta_j}) \vec{\xi}^y_{k_{j+1},\beta_{j+1}} \ldots \vec{\xi}^y_{k_\ell,\beta_\ell} \|_{\mathcal{C}^m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)} q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}} \Big\}, \tag{3.175}$$

де сума $\sum\limits_{k_1,\ldots,k_\ell}$ береться по всім $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{Z}^d$, а $\sum\limits_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell}$ по всім розбиттям $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1, \ldots, m\}$.

Щоб оцінити вираз (3.174) застосуємо наслідок 3.22. Для фіксованого $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ та розбиття $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1, \ldots, m\}$ помножимо та поділимо кожен з доданків в (3.174) на $\|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|^2_{\ell_2(a)} q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^{\varkappa}$, в результаті отримаємо:

$$(3.174) \leq \Big\| \sum_{k_1,\ldots,k_\ell \in \mathbb{Z}^d} \vec{B}^{\beta_1,\ldots,\beta_\ell}_{k_1,\ldots,k_\ell} \Big(\mathbf{E} \frac{|\partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^x) - \partial_{k_1} \ldots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^y)|^2}{\|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|^2_{\ell_2(a)} q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^{\varkappa}} \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathcal{C}^m}, \tag{3.176}$$

де вираз $\vec{B}^{\beta_1,\ldots,\beta_\ell}_{k_1,\ldots,k_\ell}$ має координати: $\{\vec{B}^{\beta_1,\ldots,\beta_\ell}_{k_1,\ldots,k_\ell}\}_{j_1,\ldots,j_m \in \mathbb{Z}^d} = B^{\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell}_{k_1,\ldots,k_\ell}$ для $\gamma_i = \{j_r,\ r \in \beta_i\}$ та

$$B^{\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell}_{k_1,\ldots,k_\ell} := \frac{\big(\mathbf{E}\, \|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|^2_{\ell_2(a)} q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^{\varkappa} |\xi^x_{k_1,\gamma_1} \ldots \xi^x_{k_\ell,\gamma_\ell}|^2 \big)^{1/2}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)}\, q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}} \leq$$

$$\leq \frac{\prod\limits_{r=1}^{\ell} \big(\mathbf{E}\, \|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|^2_{\ell_2(a)} q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^{\varkappa} |\xi^x_{k_r,\gamma_r}|^{2m/|\gamma_r|} \big)^{|\gamma_r|/2m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)}\, q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}}.$$

Вище було використано нерівність Гельдера з

$$x_i = \|\xi^x_\varnothing - \xi^y_\varnothing\|^{2|\gamma_i|/m}_{\ell_2(a)} q_\ell^{2|\gamma_i|/m}(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^{\varkappa|\gamma_i|/m}|\xi^x_{k_i,\gamma_i}|^2,$$

враховуючи, що $\sum_{i=1}^{\ell}|\gamma_i|/m = 1$. Вибираючи в (3.145) $\delta = 2$, $Q(z) = q_\ell^2(z)(1+z)^\varkappa$, $m_1 = 2m$ і замінюючи m_τ на $2m/|\gamma_r|$ отримаємо:

$$B^{\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell} \le \frac{\prod_{r=1}^{\ell}\Big(K_1 e^{M_m t}\|x-y\|^2_{\ell_2(a)} q_\ell^2(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa+\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_r|-1}{|\gamma_r|}}\Big)^{|\gamma_r|/2m}}{\|x-y\|_{\ell_2(a)}\, q_m(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\varkappa/2}\prod_{r=1}^{\ell}\Big(a_{k_r}^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_r|-1}{|\gamma_r|}}\prod_{j\in\gamma_r}\psi_{k_r-j}^{m_1/|\gamma_r|}\Big)^{|\gamma_r|/2m}} =$$

$$= K_1^{1/2} e^{M_m t/2}\frac{q_\ell(n_0^{x,y})(1+n_0^{x,y})^{\frac{\varkappa+1}{2}(m-\ell)}}{q_m(n_0^{x,y})}\prod_{r=1}^{\ell}(a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\prod_{j\in\gamma_r}\psi^{-1}_{k_r-j}), \tag{3.177}$$

оскільки

$$\sum_{r=1}^{\ell}\big(\varkappa+\frac{\varkappa+1}{2}m_1\frac{|\gamma_r|-1}{|\gamma_r|}\big)\frac{|\gamma_r|}{2m} = \frac{\varkappa}{2}+\frac{\varkappa+1}{2}(m-\ell).$$

З властивості (3.118) набору Θ_c випливає, що для будь-якої пари $(q_m, \mathcal{C}^m) \in \Theta_c^m$ та $\ell \le m$ для довільного розбиття $\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell = \{1,\dots,m\}$ існує пара $(q_\ell, \widetilde{\mathcal{C}}^\ell = \widetilde{C}^1\otimes\dots\otimes\widetilde{C}^\ell) \in \Theta_c^\ell$ така, що

$$q_\ell(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}(m-\ell)} \le K^{m-\ell} q_m(z). \tag{3.178}$$

Отже

$$B^{\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell} \le K^{m-\ell}K_1^{1/2}e^{M_m t/2}\prod_{r=1}^{\ell}(a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\prod_{j\in\gamma_r}\psi^{-1}_{k_r-j}). \tag{3.179}$$

Підставляючи це в (3.176) маємо:

$$(3.174) \le K\Bigg[\sum_{j_1,\dots,j_m\in\mathbb{Z}^d} C^1_{j_1}\dots C^m_{j_m}\Big\{\sum_{k_1,\dots,k_\ell\in\mathbb{Z}^d}\big(\prod_{r=1}^{\ell} a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)}\prod_{j\in\gamma_r}\psi^{-1}_{k_r-j}\big)$$

$$\big(\mathbf{E}\,\frac{|\partial_{k_1}\dots\partial_{k_\ell}f(\xi^x_\varnothing)-\partial_{k_1}\dots\partial_{k_\ell}f(\xi^y_\varnothing)|^2}{\|\xi^x_\varnothing-\xi^y_\varnothing\|^2_{\ell_2(a)}q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^\varkappa}\big)^{1/2}\Big\}^2\Bigg]^{1/2}. \tag{3.180}$$

Застосовуючи лему 3.20 з $b_a = \psi_a^{-1}$,

$$x_{k_1,\dots,k_\ell} = \prod_{r=1}^{\ell} a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)} \Big(\mathbf{E} \, \frac{|\partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^x) - \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^y)|^2}{\|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|_{\ell_2(a)}{}^2 q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^\varkappa} \Big)^{1/2}$$

та вектором $\psi \in \mathbb{P}$ вибраним таким чином, що

$$K_\psi = \max_{m=1,\dots,n} \max_{(q_m,\mathcal{C}^m)\in\Theta^m} \max_{\ell=1,\dots,m} \sum_{a\in\mathbb{Z}^d} \psi_a^{-1} [\delta_{C^\ell}]^{|a|} < \infty,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}(3.180) \leq & K'_\psi \Big\{ \sum_{k_1,\dots,k_\ell \in \mathbb{Z}^d} C_{k_1}^{(\gamma_1)} \dots C_{k_\ell}^{(\gamma_\ell)} \Big[\prod_{r=1}^{\ell} a_{k_r}^{-\frac{\varkappa+1}{2}(|\gamma_r|-1)} \\ & \Big(\mathbf{E} \, \frac{|\partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^x) - \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} f(\xi_\varnothing^y)|^2}{\|\xi_\varnothing^x - \xi_\varnothing^y\|_{\ell_2(a)}^2 q_\ell^2(n_t^{x,y})(1+n_t^{x,y})^\varkappa} \Big)^{1/2} \Big]^2 \Big\}^{1/2} \end{aligned} \tag{3.181}$$

з $C_k^{(\gamma)} = \prod_{j\in\gamma} C_k^j$. Використовуючи наступний наслідок властивості (3.118) набору $\Theta_c = \{(q_m, \mathcal{C}^m), m = 1, \dots, n\}$:

$$\forall\, k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{Z}^d \quad \prod_{i=1}^{\ell} a_{k_i}^{-(\varkappa+1)(|\beta_i|-1)} C_{k_i}^{(\beta_i)} \leq K^{m-\ell} \prod_{i=1}^{\ell} \widetilde{C}_{k_i}^i \tag{3.182}$$

остаточно маємо

$$(3.181) \leq K_1 \max_{m=1,\dots,n} \|\partial^{(m)} f\|_{\Theta_c^m}. \tag{3.183}$$

Оцінка виразу (3.175) виконується аналогічним чином з використанням теореми 3.24 та її наслідку 3.25. □

3.8 Регулярні властивості півгруп у випадку змінного дифузійного коефіцієнта

В даному параграфі розвивається підхід нелінійних оцінок на випадок загального нелінійного стохастичного диференціального рівняння у нескінченновимірному просторі зі змінним дифузійним коефіцієнтом. Такі рівняння є природнім узагальненням стохастичних диференціальних рівнянь, що виникали у попередніх розділах.

В даному параграфі розглядається стохастичне диференціальне рівняння

$$\xi^0(t,x^0) = x^0 - \int_0^t \left[F(\xi^0(s)) + B\,\xi^0(s)\right]ds + \int_0^t G(\xi^0(s))dW(s), \quad (3.184)$$

з нелінійними коефіцієнтами F, G, які є діагональними відображеннями в просторі $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \ni x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \longrightarrow G(x) = \{G(x_k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$$
$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \ni x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \longrightarrow F(x) = \{F(x_k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},$$

що генеровані C^∞-гладкими функціями $G, F \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ поліноміальної поведінки разом з похідними. Лінійне скінченно-діагональне відображення $B\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ має вигляд

$$\exists\ r_0\colon \quad (B\,x)_k = \sum_{j\colon\, |j-k|\le r_0} b(k-j)x_j, \qquad k\in\mathbb{Z}^d.$$

Як і раніше циліндричний процес Вінера $W = \{W_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ зі значеннями в просторі $\ell_2(a)$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k = 1$, $a\in\mathbb{P}$ канонічно реалізований на вимірному просторі $(\Omega = C_0([0,T],\ell_2(a)), \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ з канонічною фільтрацією $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s)|0\le s\le t\}$ та циліндричною мірою Вінера $\mathbf{P}$. Процеси $W_k,\ k\in\mathbb{Z}^d$ є незалежними $\mathbb{R}^1$-значними вінерівськими процесами, $\mathbf{E}$ позначає сподівання по мірі $\mathbf{P}$.

Надалі припускається, що коефіцієнти $\{F, G\}$ рівняння (3.184) задовольняють наступні вимоги:

1. Для будь-якого M існують такі сталі $K_M,\ K_1,\ K_2$, що

$$(x-y)(F(x)-F(y)) - M(G(x)-G(y))^2 \ge K_M(x-y)^2, \qquad (3.185)$$

$$xF(x) - M\,G^2(x) \geq -K_1x^2 - K_2. \tag{3.186}$$

2. Функції $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $G\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ є монотонними і такими, що існують деякі сталі $\varkappa_F \geq 0$, $\varkappa_G \geq 0$, $2\varkappa_G \leq \varkappa_F$ такі, що для кожної з функцій F, G виконується умова (2.4), тобто $\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, C_n\; \forall\, i = 0, \ldots, n\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^1$

$$|F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y)| \leq C_n|x-y|(1+|x|+|y|)^{\varkappa_F}, \tag{3.187}$$

$$|G^{(i)}(x) - G^{(i)}(y)| \leq C_n|x-y|(1+|x|+|y|)^{\varkappa_G}. \tag{3.188}$$

Зауважимо, що з нерівності (3.185) зокрема випливає:

$$\forall\, M\; \exists\, K_M \quad -F'(x) + M[G'(x)]^2 \leq K_M. \tag{3.189}$$

Наступна теорема є уточненням відомих результатів стосовно розв'язності нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь в нескінченновимірних банахових просторах, див., наприклад, [16, 86, 179]. Уточнення полягає у доведенні оцінок на розв'язок, що контролюють залежність від початкової умови.

Теорема 3.29. [63, теорема 5] Нехай коефіцієнти рівняння (3.184) F, G, B задовольняють (3.185)-(3.188) і (2.5). Тоді для $x^0 \in \ell_{p(\varkappa_F+1)^2+\varepsilon}(a)$, $\varepsilon > 0$, $p \geq 2$ це рівняння має єдиний сильний розв'язок, тобто $\mathcal{F}_t$-адаптовний неперервний $\ell_p(a)$-значний процес ξ^0, що задовольняє (3.184) в сенсі топології $(\mathbf{E}\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\cdot\|^q_{\ell_p(a)})^{1/q}$, $q \geq 2$.

Цей розв'язок допускає представлення як сума $\ell_p(a)$-значного неперервного мартингалу $M_0(t) = \int_0^t G(\xi^0(s))dW(s)$ та $\ell_p(a)$-значного процесу скінченної варіації $V_0(t) = -\int_0^t (F(\xi^0(s)) + B\xi^0(s))ds$ і задовольняє оцінку

$$\forall\, q \geq 2 \quad \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\xi^0(t,x^0)\|^q_{\ell_{p(\varkappa_F+1)}(a)} < \infty. \tag{3.190}$$

Для $x^0 \in \ell_p(a)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $\xi^0(t, x^0)$ рівняння (3.184), тобто $(\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\cdot\|^q_{\ell_p(a)})^{1/q}$-границя сильних розв'язків, $q \geq 2$, і виконана наступна оцінка:

$$\exists\, C_{q,p}, D_{q,p} \qquad \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\xi^0(t,x^0)\|^q_{\ell_p(a)} \leq e^{C_{q,p}T}(\|x^0\|^q_{\ell_p(a)} + D_{q,p}) \tag{3.191}$$

Крім того, існує така стала $C'_{q,p}$, що $\forall\, x^0, y^0 \in \ell_p(a)$

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\xi^0(t,x^0) - \xi^0(t,y^0)\|^q_{\ell_p(a)} \leq e^{C'_{q,p}T}\|x^0 - y^0\|^q_{\ell_p(a)}. \tag{3.192}$$

Основний результат даного параграфу полягає в наступній теоремі про збереження просторів гладких функцій $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$ (означення 3.17) під дією півгрупи

$$(P_t f)(x) = \mathbf{E}\, f(\xi^0(t,x^0)), \tag{3.193}$$

генерованої розв'язком стохастичного диференціального рівняння (3.184).

Теорема 3.30. [63, теорема 1] Нехай коефіцієнти рівняння (3.184) F, G, B задовольняють (3.185)-(3.188) і (2.5). Припустимо, що набір ваг $\Theta = \Theta^1 \cup \cdots \cup \Theta^n$, $n \in \mathbb{N}$, є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa_F$ і $2\varkappa_G \leq \varkappa_F$. Тоді для будь-якого $t \geq 0$ півгрупа P_t зберігає простори $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$, $r \geq 0$ (означення 3.17), тобто існують такі сталі $K_{\Theta,r}$, $M_{\Theta,r}$, що

$$\forall\, f \in C_{\Theta,r}(\ell_2(a)) \colon \quad \|P_t f\|_{C_{\Theta,r}} \leq K_{\Theta,r} e^{M_{\Theta,r}t}\|f\|_{C_{\Theta,r}}. \tag{3.194}$$

Доведення спирається на теорему про нелінійну оцінку для розв'язків відповідних варіаційних рівнянь.

Нехай $\tau = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $j_\ell \in \mathbb{Z}^d$, як і раніше, позначає деякий набір точок з $\mathbb{Z}^d$. З множиною τ асоційовано процес $\xi_\tau = \{\xi_{k,\tau}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, що задовольняє рівняння, отримане з (3.184) шляхом диференціювання його коефіцієнтів по змінним $\{x^0_{j_n}, \ldots, x^0_{j_1}\}$:

$$\xi_{k,\tau}(s) = \widetilde{x}_{k,\tau} + \int_0^t \big(G'(\xi^0_k(s))\xi_{k,\tau}(s) + \varphi^G_{k,\tau}(s)\big)dW_k(s) - \tag{3.195}$$

$$-\int_0^t \big(F'(\xi_k^0(s))\xi_{k,\tau}(s) + (B\xi_\tau)_k(s) + \varphi_{k,\tau}^F(s)\big)ds, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Неоднорідні частини φ_τ^G та φ_τ^F будуються по G та F за наступним правилом:

$$\varphi_{k,\tau}^D = \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \tau,\ \ell \geq 2} D^{(\ell)}(\xi_k^0)\xi_{k,\gamma_1} \dots \xi_{k,\gamma_\ell}, \tag{3.196}$$

де $\xi_{\gamma_1}, \dots, \xi_{\gamma_\ell}$ — розв'язки варіаційних рівнянь нижчих порядків.

Сумування в (3.196) проводиться по всім можливим розбиттям множини $\tau = \{j_1, \dots, j_n\}$ на підмножини $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell \subset \tau$, що не перетинаються $|\gamma_1| + \dots + |\gamma_\ell| = |\tau|,\ \ell \geq 2,\ |\gamma_i| \geq 1$. Зауважимо, що розв'язок ξ_τ буде мати сенс похідної за початковими умовами вихідного рівняння (3.184): $\xi_{k,\tau} = \partial_\tau \xi_k^0$, у випадку спеціального виду вихідних даних (3.18).

Залежність розв'язків варіаційних рівнянь (3.195) від початкового даного вихідного нелінійного рівняння встановлюється в наступних теоремах. Отримані оцінки є ключовими при доведенні гладких властивостей півгрупи.

Теорема 3.31. [63, теорема 6] Припустимо, що виконані умови теореми 3.29. Нехай $m_1 > |\tau|,\ m_\gamma = m_1/|\gamma|$ і $\{c_\tau\} \subset \mathbb{P}$ є векторною вагою, що задовольняє ієрархію (3.21) з параметром $\varkappa_F$. Тоді для будь-якого $x^0 \in \ell_2(a)$ і початкових умов $\widetilde{x}_\gamma$ (3.18) рівняння (3.195) має єдиний сильний розв'язок ξ_τ у просторі $\ell_{m_\tau}(c_\tau)$, тобто $\mathcal{F}_t$-адаптований $\ell_{m_\tau}(c_\tau)$-значний неперервний процес $\xi_\tau(t, x^0)$, який задовольняє рівняння (3.195) в топології $\big(\mathbf{E} \sup_{t \in [0,T]} \|\cdot\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^q\big)^{1/q}$, $q \geq m_\tau$.

Цей процес має представлення як сума $\ell_{m_\tau}(c_\tau)$-неперервного мартингалу $M_\tau(t) = \int_0^t \big(G'(\xi^0(s))\xi_\tau(s) + \varphi_\tau^G(s)\big)dW(s)$ і $\ell_{m_\tau}(c_\tau)$-неперервного процесу скінченної варіації $V_0(t) = -\int_0^t \big(F'(\xi^0(s))\xi_\tau(s) + B\xi_\tau(s) + \varphi_\tau^F(s)\big)ds$.

Крім того, для будь-якого $q \geq m_\tau$ існує така стала $K_\tau(R)$, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\, \|\xi_\tau(t,x^0)\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq K_\tau(R), \tag{3.197}$$

де $R = \max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}; \|\widetilde{x}_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)},\ \gamma \subset \tau)$.

Доведення цього факту проводиться методом індукції по кількості точок в множині τ і використовує ліпшицеву апроксимацію коефіцієнтів рівняння (3.195). Важливим моментом доведення виявляється те, що рівняння(3.195) є, фактично, лінійним по відношенню до змінної ξ_τ. Детальне доведення теореми викладено в роботі [63].

Теорема 3.32. [63, теорема 8] Припустимо, що виконані умови теореми 3.29. Нехай $m_1 > |\tau|$, $m_\gamma = m_1/|\gamma|$ і $\{c_\tau\} \subset \mathbb{P}$ є векторною вагою, що задовольняє ієрархію (3.21) з параметром $\varkappa_F$. Тоді для початкових даних $\widetilde{x}_\gamma$ (3.18) для будь-якого $q \geq m_\tau$ існує така стала $K_\tau(R)$, що $\forall\, x^0, y^0 \in \ell_2(a)$:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\xi_\tau(t,x^0) - \xi_\tau(t,y^0)\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \leq K_\tau(R)\|x^0 - y^0\|^q_{\ell_2(a)}, \tag{3.198}$$

де $R = \max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|y^0\|_{\ell_2(a)}, \|\widetilde{x}_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(dc_\gamma)})$ і $d_k \geq a_k^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}m_1}$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Доведення. Оскільки $\varphi^G_\tau = \varphi^F_\tau = 0$ при $|\tau| = 1$ тому доведення бази індукції є частиною доведенням кроку індукції по кількості точок в τ.

З формули Іто для $\xi^{x^0}_\tau := \xi_\tau(t,x^0;\widetilde{x}_\gamma)$ та $\xi^{y^0}_\tau := \xi_\tau(t,y^0;\widetilde{x}_\gamma)$ маємо

$$\begin{aligned}
&h(t) := \mathbf{E}\|\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} = \\
&= -q\int_0^t \mathbf{E}\|\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau\|^{q-m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\langle\, (\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau)^{\#}, (\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau)\{B(\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau) + \\
&\qquad + F'(\xi^0(x^0))\xi^{x^0}_\tau - F'(\xi^0(y^0))\xi^{y^0}_\tau + \varphi^F_\tau(x^0) - \varphi^F_\tau(y^0)\}\,\rangle ds + \\
&+ \frac{q(m_\tau - 1)}{2}\int_0^t \mathbf{E}\|\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau\|^{q-m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\langle\, (\xi^{x^0}_\tau - \xi^{y^0}_\tau)^{\#},
\end{aligned}$$

$$\{G'(\xi^0(x^0))\xi_\tau^{x^0} - G'(\xi^0(y^0))\xi_\tau^{y^0} + \varphi_\tau^G(x^0) - \varphi_\tau^G(y^0)\}^2\,\rangle ds+$$
$$+\frac{q(q-m_\tau)}{2}\int_0^t \mathbf{E}\|\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^{q-2m_\tau}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\tau}^2|\xi_{k,\tau}^{x^0} - \xi_{k,\tau}^{y^0}|^{2(m_\tau-1)}\cdot$$
$$\cdot\{G'(\xi_k^0(x^0))\xi_{k,\tau}^{x^0} - G'(\xi_k^0(y^0))\xi_{k,\tau}^{y^0} + \varphi_{k,\tau}^G(x^0) - \varphi_{k,\tau}^G(y^0)\}^2 ds.$$

Використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} F'(\xi^0(x^0))\xi_\tau^{x^0} - F'(\xi^0(y^0))\xi_\tau^{y^0} &= \\ &= F'(\xi^0(x^0))(\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0}) + [F'(\xi^0(x^0)) - F'(\xi^0(y^0))]\xi_\tau^{y^0}, \\ G'(\xi^0(x^0))\xi_\tau^{x^0} - G'(\xi^0(y^0))\xi_\tau^{y^0} &= \\ &= G'(\xi^0(x^0))(\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0}) + [G'(\xi^0(x^0)) - G'(\xi^0(y^0))]\xi_\tau^{y^0} \end{aligned} \tag{3.199}$$

та нерівності

$$\begin{aligned} |x|^{m-p}|y|^p &\le \frac{m-p}{m}|x|^m + \frac{p}{m}|y|^m, \\ (a+b+c)^2 &\le 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \end{aligned} \tag{3.200}$$

отримаємо

$$h(t) \le \Big(q\|B\| + \frac{(q-1)(3q-4)}{2}\Big)\int_0^t h(s)ds+$$
$$+q\int_0^t \mathbf{E}\|\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^{q-m_\tau}\langle\,(\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0})^{\#}, (\xi_\tau^{x^0} - \xi_\tau^{y^0})^2\cdot$$
$$\cdot\{-F'(\xi^0(x^0)) + \frac{3(q-1)}{2}[G'(\xi^0(x^0))]^2\}\,\rangle_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} ds+$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}\|\{F'(\xi^0(x^0)) - F'(\xi^0(y^0))\}\xi_\tau^{y^0}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^q ds+ \tag{3.201}$$
$$+3(q-1)\int_0^t \mathbf{E}\|\{G'(\xi^0(x^0)) - G'(\xi^0(y^0))\}\xi_\tau^{y^0}\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^q ds+ \tag{3.202}$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}\|\varphi_\tau^F(x^0) - \varphi_\tau^F(y^0)\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^q ds \tag{3.203}$$
$$+3(q-1)\int_0^t \mathbf{E}\|\varphi_\tau^G(x^0) - \varphi_\tau^G(y^0)\|_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}^q ds+ \tag{3.204}$$

Проведемо оцінку виразів (3.201) і (3.203). Члени (3.202) та (3.204) оцінюються аналогічно. З (3.61) маємо

$$\mathbf{E}\| \,[F'(\xi^0(x^0)) - F'(\xi^0(y^0))]\xi_\tau^{y^0}\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \le C\,\mathbf{E}\{\|\xi^0(x^0)-\xi^0(y^0)\|^q_{\ell_2(a)}\cdot$$
$$\cdot\,(1+\|\xi^0(x^0)\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^0(y^0)\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa_F\, q}\,\|\xi_\tau^{y^0}\|^q_{\ell_{m_\tau}(dc_\tau)}\} \le \tag{3.205}$$
$$\le K_1(R)\|x^0-y^0\|^q_{\ell_2(a)}, \tag{3.206}$$

де було використано (3.191), (3.192), (3.197) в просторі $\ell_{m_\tau}(dc_\tau)$ та нерівність Гельдера. Застосовуючи (3.62) до (3.203), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,\|\varphi_\tau^F(x^0)-\varphi_\tau^F(y^0)\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)} \le \\
&\le K\sum_{\gamma_1\ldots\gamma_s,s\ge 2}\mathbf{E}\|F^{(s)}(\xi^0(x^0))\xi_{\gamma_1}^{x^0}\ldots\xi_{\gamma_s}^{x^0}-F^{(s)}(\xi^0(y^0))\xi_{\gamma_1}^{y^0}\ldots\xi_{\gamma_s}^{y^0}\|^q_{\ell_{m_\tau}(c_\tau)}\le \\
&\le K\sum_{\gamma_1\ldots\gamma_s,s\ge 2}\mathbf{E}(1+\|\xi^0(x^0)\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^0(y^0)\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa_F\,q}\cdot \\
&\qquad\cdot\prod_{i=1}^{s}(1+\|\xi_{\gamma_i}^{x^0}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}+\|\xi_{\gamma_i}^{y^0}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})})^q\cdot \\
&\qquad\cdot\{\,\|\xi^0(x^0)-\xi^0(y^0)\|_{\ell_2(a)}+\sum_{i=1}^{s}\|\xi_{\gamma_i}^{x^0}-\xi_{\gamma_i}^{y^0}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i})}\}^q\le \\
&\le K_2(R)\|x^0-y^0\|^q_{\ell_2(a)}.
\end{aligned}\tag{3.207}$$

Вище було використано індуктивне припущення:

$$\forall\,\gamma\subset\tau,\ \gamma\ne\tau\qquad \sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}\|\xi_\gamma^{x^0}-\xi_\gamma^{y^0}\|^q_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}\le K_\gamma(R)\|x^0-y^0\|^q_{\ell_2(a)},$$

оцінки (3.191), (3.192), (3.197) в $\ell_{m_\tau}(c_\tau)$ та нерівність Гельдера.

Застосування (3.189) остаточно дає

$$h(t)\le(q\|B\|+K_q')\int_0^t h(s)ds+\widetilde{K}(R)\|x^0-y^0\|^q_{\ell_2(a)}. \tag{3.208}$$

і нерівність Гронуолла–Беллмана завершує доведення. □

Аналогічно до попередніх розділів введемо нелінійний вираз:

$$\rho_\tau(\xi;t) = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} p_i(z_t) \sum_{\gamma\subset\tau,\ |\gamma|=i} \|\xi_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)},$$

де $z_t = 1 + \|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$ і $m_\gamma = m_1/|\gamma|$.

Принциповим інструментом, що буде використовуватися при доведенні основного результату цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 3.33. [63, теорема 2] Нехай F, G та B задовольняють вимоги (3.185)-(3.188) та (2.5), і процеси ξ^0, ξ_τ є розв'язками рівнянь (3.184), (3.195) для $x^0 \in \ell_2(a)$ та $\widetilde{x}_\tau$ (3.18). Нехай $m_1 \geq |\tau|$ і $\varkappa_F \geq 2\varkappa_G$. Припустимо, що $\{c_\gamma\}_{\gamma\subseteq\tau}$ є векторною вагою з параметром $\varkappa_F$ у сенсі означення 3.4, а монотонно зростаючі функції $p_i(z)$, $i = 1,\ldots,n$ не більше ніж поліноміального росту (2.11) задовольняють нелінійну ієрархію (3.24). Тоді існує така стала $M \in \mathbb{R}^1$, що

$$\rho_\tau(\xi;t) \leq e^{Mt}\rho_\tau(\xi;0). \tag{3.209}$$

Доведення. Спочатку розглянемо $x^0 \in \ell_{2(\varkappa_F+1)^2+\varepsilon}(a)$, $\varepsilon > 0$. Для таких початкових даних процес ξ^0 є сильним розв'язком рівняння (3.184) в сенсі теореми 3.29. Введемо позначення

$$h^i_\tau(\xi;t) = \begin{cases} 0, \quad i = 0 \\ \mathbf{E}\sum\limits_{\ell=1}^{i} \left[p_\ell(z_t) \sum\limits_{\gamma\subset\tau,\ |\gamma|=\ell} \|\xi_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} \right], \quad i = 1,\ldots,|\tau| \end{cases}$$

і доведемо методом індукції, що

$$\forall\, i \leq n\ \exists\ M_i \quad h^i_\tau(\xi;t) \leq e^{M_i t} h^i_\tau(\xi;0). \tag{3.210}$$

При $i = n = |\tau|$ це дасть твердження теореми. База індукції при $i = 0$ є тривіальною. Припустимо, що для $i \in \{0,\ldots,n_0-1\}$ має місце (3.210).

Зауважимо, що

$$h^i_\tau(\xi;t) = h^{i-1}_\tau(\xi;t) + \sum_{\gamma\subset\tau,\ |\gamma|=i} g_\gamma(t), \tag{3.211}$$

де

$$g_\gamma(t) = \mathbf{E}\, p_i(z_t)\|\xi_\gamma(t)\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}, \quad |\gamma| = i. \tag{3.212}$$

Отже достатньо довести:

$$g_\gamma(t) \le e^{D_1 t} g_\gamma(0) + D_2 \int_0^t e^{D_1(t-s)} h^{i-1}_\tau(\xi;s)ds, \tag{3.213}$$

що разом з (3.211) та індуктивним припущенням дасть твердження теореми. Доведемо нерівність (3.213). З формули Іто випливає

$$\begin{aligned} g_\gamma(t) = g_\gamma(0) - \int_0^t \mathbf{E}\, \|\xi_\gamma\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} (H^{F,G} p_i)(z_s)ds - \\ - m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s)\langle\, \xi^{\#}_\gamma, \xi_\gamma[F'(\xi^0)\xi_\gamma + B\xi_\gamma + \varphi^F_\gamma]\,\rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds + \\ + \frac{m_\tau(m_\tau-1)}{2}\int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s)\langle\, \xi^{\#}_\gamma, [G'(\xi^0)\xi_\gamma + \varphi^G_\gamma]^2\rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds + \\ + 2m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p'_i(z_s) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k c_{k,\gamma}\, \xi^0_k\, G(\xi^0_k)|\xi_{k,\gamma}|^{m_\gamma-2}\xi_{k,\gamma}\{G'(\xi^0_k)\xi_{k,\gamma} + \varphi^G_{k,\gamma}\}ds. \end{aligned}$$

Оператор $H^{F,G}$ діє на гладкій функції $f(\cdot)$ за правилом:

$$(H^{F,G}f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\{-\frac{1}{2}G^2(x_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + (F(x_k) + (Bx)_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\}f(x).$$

Аналогічно лемі 2.5 для функції p, що задовольняє (2.11) маємо

$$\exists\ C_1 \in \mathbb{R}\ \ H^{F,G}p(z) \ge -C_1 p(z), \tag{3.214}$$

де $z = 1 + \|x\|^2_{\ell_2(a)}$. Дійсно,

$$\begin{aligned} H^{F,G}p(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\{2F(x_k)x_k - G^2(x_k) - 2(Bx)_k x_k\}p'(z) - \\ - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} 2a_k^2 G^2(x_k) x_k^2 p''_i(z) \ge \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -C\,\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_2(a))} z p'(z) + \\
&+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\{2F(x_k)x_k - G^2(x_k)\}p'(z) - 2z|p_i''(z)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k G^2(x_k) \geq \\
&\geq -C'\,\|B\|\, p(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\{2F(x_k)x_k - (1+2C)G^2(x_k)\}p'(z) \geq \\
&\geq -C'\|B\|\, p(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\{-K_1 x_k^2 - K_2\}p'(z) \geq \\
&\geq -(C'\|B\| + (K_1+K_2)C'')p(z) \equiv -C_1 p(z),
\end{aligned}
$$

де було використано $\sum |u_k v_k| \leq \sum |u_k| \sum |v_k|$, (2.11), (3.186) та властивість $\sum a_k = 1$. Застосовуючи (3.200) та (3.214) маємо

$$
\begin{aligned}
&g_\gamma(t) \leq g_\gamma(0) + (C_1 + m_\gamma\|B\| + (m_\gamma - 1)^2) \int_0^t g_\gamma(s)ds + \\
&+ m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \langle\, \xi_\gamma^\#, \xi_\gamma^2\{-F'(\xi_k^0) + (m_\gamma - 1)[G'(\xi_k^0)]^2\}\,\rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds + \\
&+ \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \|\varphi_\gamma^F\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds + 2(m_\gamma - 1) \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \|\varphi_\gamma^G\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds + \\
&+ 2m_\gamma K_4 \int_0^t \mathbf{E}\, z_s p_i'(z_s)\, \langle \xi_\gamma^\#, (1 + [G'(\xi^0)]^2)\xi_\gamma^2 \rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds + \\
&+ 2m_\gamma K_3 \int_0^t \mathbf{E}\, z_s p_i'(z_s)\, \langle\, \xi_\gamma^\#, (1 + |G'(\xi^0)|)\xi_\gamma \varphi_\gamma^G \rangle_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)} ds.
\end{aligned}
$$

Припущення (2.11) та (3.189) дають

$$
\begin{aligned}
g_\gamma(t) \leq g_\gamma(0) + (K' + m_\gamma\|B\|) \int_0^t g_\gamma(s)ds + \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \|\varphi_\gamma^F\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds + \\
+ 2(m_\gamma - 1) \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \|\varphi_\gamma^G\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds + \\
+ 2K_3 C \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \|(1 + |G'(\xi^0)|)\varphi_\gamma^G\|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds
\end{aligned}
\tag{3.215}
$$

Всі доданки в (3.215), крім двох перших, мають однакову структуру:

$$
\int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) \| \sum_{\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_\ell = \gamma,\ \ell \geq 2} \mathbf{D}^\ell(\xi^0)\xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_\ell} \|_{\ell_{m_\gamma}(c_\gamma)}^{m_\gamma} ds, \tag{3.216}
$$

де $\mathbf{D}^\ell(\cdot) = F^{(\ell)}(\cdot)$, $G^{(\ell)}(\cdot)$ або $(1+|G'(\cdot)|)G^{(\ell)}(\cdot)$. З умов (3.187)-(3.188) та властивості $2\varkappa_G \le \varkappa_F$ випливає:

$$
\begin{aligned}
(3.216) \le K_1 &\sum_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\gamma,\ \ell\ge 2} \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s)\times \\
&\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\gamma} [\mathbf{D}^\ell(\xi_k^0)]^{m_\gamma} |\xi_{k,\alpha_1}|^{m_\gamma} \dots |\xi_{k,\gamma_\ell}|^{m_\gamma} ds \le \\
\le K_1 &\sum_{\dots} \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s)\times \\
&\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\gamma} a_k^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}m_\gamma} (a_k + a_k|\xi_k^0|^2)^{\frac{\varkappa_F+1}{2}m_\gamma} |\xi_{k,\alpha_1}|^{m_\gamma} \dots |\xi_{k,\alpha_s}|^{m_\gamma} ds \le \\
\le K_1 &\sum_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\gamma,\ \ell\ge 2} \int_0^t \mathbf{E}\, p_i(z_s) z_s^{\frac{\varkappa_F+1}{2}m_\gamma}\times \\
&\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k,\gamma} a_k^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}m_\gamma} |\xi_{k,\alpha_1}|^{m_\gamma} \dots |\xi_{k,\alpha_\ell}|^{m_\gamma} ds.
\end{aligned}
\tag{3.217}
$$

Враховуючи ієрархії (3.21) та (3.24) отримаємо:

$$
\begin{aligned}
(3.217) \le K_1' &\sum_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\gamma,\ \ell\ge 2} R^{1/|\gamma|}_{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell;\gamma} \int_0^t \mathbf{E} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \{p_{|\alpha_i|}(z_s) c_{k,\alpha_i} |\xi_{k,\alpha_i}|^{m_{\alpha_i}}\}^{|\alpha_i|/|\gamma|} ds \le \\
\le K_1' &\sum_{\dots} R^{1/|\gamma|}_{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell;\gamma} \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{E} \int_0^t p_{|\alpha_i|}(z_s) \|\xi_{\alpha_i}\|^{m_{\alpha_i}}_{\ell_{m_{\alpha_i}}(c_{\alpha_i})} ds \le \\
\le K &\max_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell=\gamma\subset\tau} R^{1/|\gamma|}_{\alpha_1\cup\dots\cup\alpha_\ell;\gamma}\, h_\tau^{i-1}(\xi;t).
\end{aligned}
$$

Вище було використано, що для $i = 1,\dots,\ell$, $|\alpha_i| < |\gamma|$, а також нерівність $|x_1 \dots x_\ell| \le |x_1|^{q_1}/q_1 + \dots + |x_\ell|^{q_\ell}/q_\ell$ з $q_j = |\gamma|/|\alpha_j|$. Остаточно маємо

$$
g_\gamma(t) \le g_\gamma(0) + D_1 \int_0^t g_\gamma(s) ds + D_2 \int_0^t h^{i-1}(\xi;s) ds
$$

з деякими сталими D_1, D_2. Застосування нерівності Гронуолла-Беллмана та замикання до початкових даних з $x^0 \in \ell_2(a)$ завершує доведення теореми. $\square$

Доведення теореми 3.30. Аналогічно доведенню теореми 3.19 спершу зауважимо, що частинні похідні $\partial_\tau P_t f(x)$, які отримані шляхом формального диференціювання виразу (3.193) за початковою умовою $x^0 \in \ell_2(a)$, задаються виразами:

$$\partial_\tau P_t f(x^0) = \sum_{\ell=1}^{|\tau|} \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \tau} \mathbf{E}\,\langle \partial^{(\ell)} f(\xi^0(t,x^0)), \xi_{\gamma_1}(t,x^0) \otimes \dots \otimes \xi_{\gamma_\ell}(t,x^0)\,\rangle, \tag{3.218}$$

де

$$\langle \partial^{(\ell)} f(\xi^0(t,x^0)), \xi_{\gamma_1}(t,x^0) \otimes \dots \otimes \xi_{\gamma_\ell}(t,x^0)\,\rangle =$$
$$= \sum_{j_1,\dots,j_\ell \in \mathbb{Z}^d} \partial_{\{j_1,\dots,j_\ell\}} f(\xi^0(t,x^0)) \xi_{j_1,\gamma_1}(t,x^0) \dots \xi_{j_\ell,\gamma_\ell}(t,x^0).$$

Аналогічно теоремі 3.19 доводиться, що права частина (3.218) задовольняє співвідношення (3.114) та (3.115). Це випливає з представлень, аналогічних (3.93), (3.102) для розв'язків рівнянь (3.184) та (3.195) та співвідношення (3.114) для функції $f \in \mathcal{C}_{\Theta,r}$ [63, теорема 10, 12].

Таким чином, залишилось довести оцінку (3.194). З теореми 3.29 та нерівностей

$$|(P_t f)(x)| = |\mathbf{E}\frac{f(\xi^0(t,x))}{(1+\|\xi^0(t,x)\|^2_{\ell_2(a)})^{r+1}}(1+\|\xi(t,x)\|_{\ell_2(a)})^{r+1}| \le$$
$$\le C_{T,r}\|f\|_{\mathcal{C}_{\Theta,r}}(1+\|x\|_{\ell_2(a)})^{r+1};$$
$$|P_t f(x) - P_t f(x)| = |\mathbf{E}\{f(\xi^0(t,x)) - f(\xi^0(t,y)\}| \le$$
$$\le \|f\|_{\mathcal{C}_{\Theta,r}}\mathbf{E}\{\|\xi^0(x)-\xi^0(y)\|_{\ell_2(a)}(1+\|\xi^0(x)\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^0(y)\|_{\ell_2(a)})^r\} \le$$
$$\le C'_{T,r}\|f\|_{\mathcal{C}_{\Theta,r}}\|x-y\|_{\ell_2(a)}(1+\|x\|_{\ell_2(a)}+\|y\|_{\ell_2(a)})^r$$

випливає збереження просторів $\mathrm{Lip}_r(\ell_2(a))$ під дією півгрупи P_t. Для того, щоб отримати (3.194) достатньо довести, що для будь-якого $\Theta^m \subset \Theta$

$$\max_{m=1,\dots,n} \|\partial^{(m)} P_t f\|_{\Theta^m} \le K e^{Mt}\|f\|_{\mathcal{C}_{\Theta,r}}. \tag{3.219}$$

З нелінійної оцінки (3.209) для деякого $\tau \subset \mathbb{Z}^d$ при спеціальному виборі функцій $\widetilde{p}_i(z) = q(z)(1+z)^{\frac{\varkappa_F+1}{2}(m_1/i - m_1/|\tau|)}$ та вагами $\widetilde{c}_\gamma$ (3.147) при початкових даних $\widetilde{x}_\gamma$ (3.18), аналогічно попереднім розділам, маємо

$$\mathbf{E}\{q(\|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)})\,|\xi_{k,\tau}(t)|^{m_\tau}\} \le \tag{3.220}$$

$$\le \frac{K_{|\tau|,\psi} e^{tM_{|\tau|,\psi}} q(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa_F+1}{2} m_1 \frac{|\tau|-1}{|\tau|}}}{a_k^{\frac{\varkappa_F+1}{2} m_1 \frac{|\tau|-1}{|\tau|}} \prod\limits_{j\in\tau} \psi_{k-j}}.$$

Для $z_t = \|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$, $z_0 = \|x^0\|^2_{\ell_2(a)}$ використовуючи представлення (3.218) отримаємо для деякого $(p_m, \mathcal{G}^m) \in \Theta^m \subset \Theta$:

$$\frac{|\partial^{(m)} P_t f(x^0)|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(z_0)} \le \tag{3.221}$$

$$\le \sum_{\ell=1}^m \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_\ell = \{1,\dots,m\}} \Big| \sum_{k_1,\dots,k_\ell\in\mathbb{Z}^d} \vec{B}^{\beta_1,\dots,\beta_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell} \mathbf{E}\Big(\frac{|\partial_{k_1\dots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p^2_\ell(z_t)}\Big)^{1/2}\Big|_{\mathcal{G}^m},$$

де для $\gamma_i = \{j_r,\ r\in\beta_i\}$

$$\{\vec{B}^{\beta_1,\dots,\beta_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell}\}_{j_1,\dots,j_m\in\mathbb{Z}^d} := B^{\gamma_1,\dots,\gamma_\ell}_{k_1,\dots,k_\ell} = \frac{1}{p_m(z_0)} (\mathbf{E} p^2_\ell(z_t) |\xi_{k_1,\gamma_1}\dots\xi_{k_\ell,\gamma_\ell}|^2)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{p_m(z_0)} \prod_{i=1}^{\ell} (\mathbf{E} p^2_\ell(z_t) |\xi_{k_i,\gamma_i}|^{2m/|\gamma_i|})^{|\gamma_i|/2m} \le$$

$$\le K^{1/2}_{m,\psi} e^{M_{m,\psi}t/2} \frac{p_\ell(z_0)(1+z_0)^{(m-\ell)\frac{\varkappa_F+1}{2}}}{p_m(z_0)} \prod_{\ell=1}^{\ell} \Big(a_{k_\ell}^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}(|\gamma_\ell|-1)} \prod_{j\in\gamma_\ell} \psi^{-|\gamma_\ell|/2m}_{k_\ell - j}\Big) \le$$

$$\le K^{m-\ell} K^{1/2}_{m,\psi} e^{M_{m,\psi}t/2} \prod_{\ell=1}^{\ell} \Big(a_{k_\ell}^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}(|\gamma_\ell|-1)} \prod_{j\in\gamma_\ell} \psi^{-|\gamma_\ell|/2m}_{k_\ell - j}\Big) \tag{3.222}$$

де було використано наслідок (3.220) нелінійної оцінки (3.209) з $q(\cdot) = p^2_\ell(\cdot)$, $m_\gamma = 2m/|\gamma|$ та $m_1 = 2m$, нерівність Гельдера та властивості набору Θ, з яких випливає, що $\exists\ (p_s, \mathcal{G}_s) \in \Theta^s \subset \Theta$ такий, що

$$p_s(z)(1+z)^{\frac{\varkappa_F+1}{2}(m-s)} \le K^{m-s} p_m(z).$$

Підставляючи (3.222) в (3.221) маємо для $\gamma_\ell = \{j_t,\ t \in \beta_\ell\}$ для фіксованих $j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}^d$:

$$\frac{|\partial^{(m)} P_t f(x^0)|_{\mathcal{G}^m}}{p_m(z_0)} \le \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1,\ldots,m\}} K^{m-\ell} K^{1/2}_{m,\psi} e^{M_{m,\psi} t/2} [\sum_{j_1,\ldots,j_m \in \mathbb{Z}^d} G^1_{j_1} \ldots G^m_{j_m}$$

$$\cdot (\sum_{k_1,\ldots,k_\ell \in \mathbb{Z}^d} (\mathbf{E} \frac{|\partial_{k_1 \ldots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p^2_\ell(z_t)})^{1/2} \prod_{\ell=1}^{\ell} \{ a_{k_\ell}^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}(|\gamma_\ell|-1)} \prod_{j \in \gamma_\ell} \psi_{k_\ell - j}^{-|\gamma_\ell|/2m} \})^2]^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1,\ldots,m\}} K^{m-\ell} K^{1/2}_{m,\psi} e^{M_{m,\psi} t/2} (1 + K_\psi)^m$$

$$\cdot (\mathbf{E} \sum_{k_1,\ldots,k_\ell \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{\ell} \{ a_{k_i}^{(\varkappa_F+1)(|\gamma_i|-1)} G_{k_i}^{(\beta_i)} \} \frac{|\partial_{k_1 \ldots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p^2_\ell(z_t)})^{1/2} \le$$

$$\le K^{3m/2} K^{1/2}_{m,\psi} e^{M_{m,\psi} t/2} (1 + K_\psi)^m \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_\ell = \{1,\ldots,m\}} \sup_{\xi^0} \frac{|\partial^{(\ell)} f(\xi^0)|_{\widetilde{\mathcal{G}}^\ell}}{p_\ell(\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})},$$

де було застосовано лему 3.20 з

$$b_a = 1/\psi^{|\gamma_\ell|/2m}; \quad x_{k_1,\ldots,k_\ell} = \prod_{\ell=1}^{\ell} a_{k_\ell}^{-\frac{\varkappa_F+1}{2}(|\gamma_\ell|-1)} (\mathbf{E} \frac{|\partial_{k_1 \ldots k_\ell} f(\xi^0)|^2}{p^2_\ell(z_t)})^{1/2}$$

та $\psi \in \mathbb{P}$ такими, що $K_\psi = \sup\limits_{m=1,\ldots,n} \sup\limits_{(p,\mathcal{G}) \in \Theta^m} \sup\limits_{\ell=1,\ldots,m} \sum\limits_{a \in \mathbb{Z}^d} \dfrac{(\delta_{G^\ell})^{|a|}}{\psi_a} < \infty$. Остаточно, використання властивості набору Θ: про існування ваги $(p_\ell, \widetilde{\mathcal{G}}^\ell = \widetilde{G}^1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{G}^\ell) \in \Theta^\ell \subset \Theta$ такої, що

$$\forall\, k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{Z}^d \qquad \prod_{i=1}^{\ell} a_{k_i}^{-(\varkappa_F+1)(|\gamma_\ell|-1)} G_{k_i}^{(\gamma_i)} \le K^{m-\ell} \prod_{i=1}^{\ell} \widetilde{G}^i_{k_i},$$

завершує доведення теореми. □

3.9 Висновки розділу 3

У даному розділі використано зв'язок між теорією півгруп необмежених операторів та теорією нелінійних стохастичних дифузійних рівнянь. Введено основні відомості з теорії стохастичних диференціальних рівнянь, що використовуються у цьому та наступних розділах, а також сформульовані теореми про розв'язність, неперервну залежність та диференційованість за початковою умовою розв'язків нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь, асоційованих з гіббсовими моделями. Доведено основний інструмент подальших досліджень — нелінійну оцінку на варіації таких стохастичних рівнянь; також доведена розв'язність рівнянь на варіації будь-якого порядку та їхня неперервність і диференційовність за початковою умовою вихідного стохастичного рівняння. На основі цих тверджень доведено збереження під дією півгрупи, що описує еволюцію гіббсової системи, спеціальним чином визначених просторів диференційованих в sup-топології функцій нескінченної кількості змінних; доведено існування щілини між топологіями обмеженості і неперервності на похідні гіббсової півгрупи. Отримані результати узагальнено на випадок змінного дифузійного коефіцієнта нескінченновимірного стохастичного диференціального рівняння.

РОЗДІЛ 4

ПІДВИЩЕННЯ ГЛАДКОСТІ ПІД ДІЄЮ ЕВОЛЮЦІЇ

В даному розділі дисертації досліджуються питання *підвищення* гладкості функції під дією півгрупи, генерованої розв'язком стохастичного диференціального рівняння. При цьому використовуються методи числення Маллявена, або стохастичного аналізу на просторі Вінера, які полягають в дослідженні гладкої залежності розв'язку стохастичного рівняння $\xi^0(t, x^0, \omega)$ від випадкового параметра $\omega \in \Omega$.

4.1 Стохастичні варіації та формула інтегрування частинами

Введемо множину, так званих, *локальних напрямків* $\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$, $\mathcal{F}_t$-адаптованих потраекторно неперервних інтегровних процесів $u_t = \{u_{t,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ таких, що $\exists\, \Lambda_u \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda_u| < \infty$: $\forall\, k \notin \Lambda_u \;\; u_{t,k} \equiv 0$, $t \in [0, T]$ та

$$\forall\, k \in \Lambda_u \;\; \forall\, T > 0,\, p \geq 1\colon \quad \mathbf{E} \int_0^T |u_{t,k}|^p dt < \infty. \tag{4.1}$$

Означення 4.1. Скажемо, що вимірна функція G на просторі Ω є *диференційовною в напрямку* $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ і *має похідну* $D_u G$, якщо

1. $\exists\, \varepsilon_0 > 0\; \forall\, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ функція $G(\omega_\cdot + \varepsilon \int_0^\cdot u_s ds)$ належить $\bigcap\limits_{p\geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$;

2. існує вимірна функція $D_u G \in \bigcap\limits_{p\ge 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$ така, що

$$\forall\, p \ge 1 \quad \lim_{|\varepsilon|\to 0} \mathbf{E} \left| \frac{G(\omega_{\cdot} + \varepsilon \int_0^{\cdot} u_s ds) - G(\omega)}{\varepsilon} - D_u G(\omega) \right|^p = 0. \qquad (4.2)$$

Якщо крім того,

3. для будь-якого $j \in \mathbb{Z}^d$ існує відображення $\mathbf{D}_j G \in \bigcap\limits_{p\ge 1} L^p(\Omega, \mathbf{P}, \mathcal{H})$ таке, що $\forall\, u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ існує стохастична похідна по напрямку $D_u G$, яка допускає представлення

$$D_u G = \sum_{j \in \Lambda_u} \langle\, \mathbf{D}_j G, \int_0^{\cdot} u_{s,j} ds \,\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad (4.3)$$

тоді кажуть, що функція G на вінерівському просторі *стохастично диференціовна в напрямках* $\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$. Позначення $G \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$.

Вище $\mathcal{H}$ позначає простір Камерона–Мартіна абсолютно неперервних функцій $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^1$, $\gamma(0) = 0$, оснащений скалярним добутком

$$\langle\, \gamma, \gamma \,\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^T |\, \dot{\gamma}\, (s)|^2 ds, \qquad \text{де} \qquad \dot{\gamma}\, (s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}.$$

Зауважимо, що для стохастичної похідної D_u мають місце наступні властивості, доведення яких є незначною модифікацією відповідних властивостей стохастичної похідної в скінченновимірному просторі [75, 76, 166–169, 176, 177, 191, 200].

1°. *Ланцюгове правило.* Для будь-якої $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ поліноміального росту разом з похідними на нескінченності та будь-яких $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ маємо $f(G_1, \ldots, G_n) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ та

$$D_u f(G_1, \ldots, G_n) = \sum_{i=1}^n [\partial_i f \circ (G_1, \ldots, G_n)]\, D_u G_i, \quad u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}. \qquad (4.4)$$

2°. Для будь-яких дійсно значних $\mathcal{F}_t$-адаптованих неперервних процесів $H_t \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$, $t \in [0,T]$ таких, що

$$\mathbf{E} \int_0^T |H_s|^p ds < \infty \ \text{ і } \ \forall j \in \mathbb{Z}^d \ \mathbf{E} \int_0^T \|\mathbf{D}_j H_s\|^p_{\mathcal{H}} \, ds < \infty, \quad \forall p \geq 1,$$

маємо

$$\forall t \in [0,T] \ \forall k \in \mathbb{Z}^d \quad \int_0^t H_s ds \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega), \ \int_0^t H_s dW_k(s) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$$

і для будь-якого $u \in \mathcal{J}_{\text{cyl}}$

$$\begin{aligned} D_u \int_0^t H_s ds &= \int_0^t D_u H_s ds \\ D_u \int_0^t H_s dW_k(s) &= \int_0^t H_s u_{s,k} ds + \int_0^t D_u H_s \, dW_k(s). \end{aligned} \tag{4.5}$$

3°. *Формула інтегрування частинами.* Для будь-якої $\mathcal{F}_t$-вимірної функції $\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ та локального напрямку $u \in J_{\text{cyl}}$ маємо

$$\mathbf{E}\, D_u \Psi = \mathbf{E} \sum_{j \in \Lambda_u} \langle \, \mathbf{D}_j \Psi, \int_0^{\cdot} u_{s,j} ds \, \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}\, \Psi \int\limits_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k dW_k. \tag{4.6}$$

Останнє твердження може бути отримано як застосування формули інтегрування частинами в [177, теорема 3.1] до проекції на $\prod\limits_{k \in \Lambda_u} C_0([0,T], \mathbb{R}^1)$ продакт-міри $\mathbf{P}$ з наступним інтегруванням по ω_k, $k \notin \Lambda_u$. При цьому слід вказати на локальну диференційовність та існування похідних $\mathbf{D}_j \Psi \in \mathcal{H}$ згідно [82, 177].

У наступній теоремі перевіряється стохастична диференційовність процесу ξ^0_t (3.7). Ця властивість необхідна для доведення несингулярної формули інтегрування частинами на наступному параграфі.

Теорема 4.2. Нехай виконані умови теореми 3.3. Тоді для будь-якого початкового даного $x^0 \in \ell_2(a)$ узагальнений розв'язок $\xi^0(t, x^0)$ задачі (3.6) має стохастично диференційовні координати $\xi^0_k(t, x^0) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}^d, t \in [0,T]$.

Крім того, для будь-якого напрямку $u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$ похідна $D_u\xi_k^0(t,x^0)$, $k \in \mathbb{Z}^d$ утворює єдиний сильний розв'язок системи

$$D_u\xi_k^0(t,x^0) = \int_0^t u_{s,k}ds - \int_0^t \{[F'(\xi^0(s,x^0)) + B]\, D_u\xi^0(s,x^0)\}_k ds, \quad k \in \mathbb{Z}^d. \tag{4.7}$$

Під *сильним розв'язком* системи (4.7) розуміється $\mathcal{F}_t$-адаптовний $\ell_2(a)$-неперервний процес

$$[0,T] \to D_u\xi^0(t,x^0) \in \mathcal{D}_{\ell_2(a)}(F'(\xi^0(t,x^0)) + B),$$

який $\mathbf{P}$-майже всюди задовольняє рівняння (4.7) у просторі $\ell_2(a)$ та існує така стала M, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|D_u\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)} \le e^{MT}\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds.$$

Доведення цієї теореми проведено в додатку C. У лемах C.1 та C.2 будуються процеси $\xi^0(t,x^0,\omega_\cdot + \varepsilon\int_0^\cdot u_s ds)$ та $D_u\xi^0(t,x^0)$ як розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь та доводиться їх неперервність за початковою умовою $x^0 \in \ell_2(a)$ і відносно напрямку $u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$. В лемі C.3 надається точний зміст $D_u\xi^0(t,x^0)$ в якості стохастичної похідної процесу ξ_t^0 в напрямку $u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$. Остаточно перевірка властивості $\xi_k^0 \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ проведена в лемі C.4. □

4.2 Несингулярне інтегрування частинами для не глобально ліпшицевої дифузії

Нагадаємо, що $\mathcal{P}^\infty_{\rm cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ позначає множину C^∞-гладких циліндричних функцій поліноміального росту з усіма похідними на нескінченності, тобто для будь-якої $f \in \mathcal{P}^\infty_{\rm cyl}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ існує таке число m_f і множина $\Lambda = {\rm supp}_{\rm cyl} f \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, що функція f залежить від скінченної кількості змінних: $\forall\, x \in \ell_2(a)$: $f(x) = h(\{x_k, k \in \Lambda\})$ для деякої $h \in C^\infty(\mathbb{R}^\Lambda)$. Крім того, для $\tau \subset \mathbb{Z}^d$:

$$|\partial_\tau f(x)| \le \mathrm{const}_\tau\, (1 + \sum_{i\in\Lambda} x_i^2)^{m_f}. \tag{4.8}$$

Теорема 4.3. Нехай виконані умови теореми 3.3 і $\xi^0(t, x^0)$ є узагальненим розв'язком рівняння (3.7) з початковим даним $x^0 \in \ell_2(a)$. Розглянемо процес

$$\Gamma_t v = [Id + t(F'(\xi^0(t, x^0)) + B)]v \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}} \tag{4.9}$$

для деякого вектора $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ з скінченною кількістю ненульових координат. Тоді стохастична похідна у напрямку $u_t = \Gamma_t v$ має вигляд

$$D_{\Gamma v}\xi^0(t, x^0) = tv. \tag{4.10}$$

Крім того, має місце наступна формула інтегрування частинами:

$$\mathbf{E}\,\langle\, \partial f(\xi_t^0), v\,\rangle_{\ell_2(1)}\Psi = \frac{1}{t}\mathbf{E}\, f(\xi_t^0)\{\Psi \int_0^t \langle\, \Gamma_s v, dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)} - D_{\Gamma v}\Psi\} \tag{4.11}$$

для всіх $\mathcal{F}_t$-вимірних $\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$, $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, $t > 0$.

Доведення. Властивості узагальненого розв'язку $\xi^0(t, x^0)$ (теорема 4.2), властивості відображення F та скінченність радіусу взаємодії відображення B дають, що $\Gamma_t v \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ для вектору $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ з скінченною кількістю ненульових координат. З теореми 4.2 випливає, що процес $D_{\Gamma v}\xi_k^0(t, x^0)$ задовольняє рівняння

$$D_{\Gamma v}\xi_k^0(t, x^0) = \int_0^t \{\Gamma_s v\}_k ds - \int_0^t [\{F'(\xi^0(s, x^0)) + B\}D_{\Gamma v}\xi^0(s, x^0)]_k ds. \tag{4.12}$$

Підстановка $D_{\Gamma v}\xi_k^0(t, x^0) = tv_k$ в (4.12) перетворює його в тотожність. З єдиності розв'язку випливає співвідношення (4.10). Для $\mathcal{F}_t$-вимірного $\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ та $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ з теореми 4.2 та ланцюгового правила (4.4) отримаємо властивість $f(\xi^0(t,x^0))\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами (4.6) та ланцюгове правило (4.4) маємо

$$\mathbf{E}f(\xi^0(t,x^0))\Psi \int_0^t \langle\, \Gamma_s v, dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)} =$$
$$= \mathbf{E}\sum_{j\in\Lambda_u} \langle\, \mathbf{D}_j\{f(\xi^0(t,x^0))\Psi\}, \int_0^{\cdot} \{\Gamma_s v\}_j ds\,\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}\, D_{\Gamma v}[f(\xi^0(t,x^0))\Psi] =$$
$$= t\mathbf{E}\,\langle\, \partial f(\xi^0(t,x^0)), v\,\rangle_{\ell_2(1)}\Psi + \mathbf{E}f(\xi^0(t,x^0))D_{\Gamma v}\Psi,$$

що дає (4.11).

Слід зазначити, що властивість (4.3) функцій, які належать $\mathcal{D}_{loc}(\Omega)$, з врахуванням [177, теорема 3.1], можна замкнути з обмежених циліндричнозначних $\mathcal{F}_t$-адаптованих неперервних процесів u_t до $L^p(\Omega\times[0,T])$-сумовних процесів. □

4.3 Симетрії стохастичних варіацій та побудова стохастичних похідних варіаційних процесів $\boldsymbol{\xi}_\tau$

В наступних розділах отримана вище формула інтегрування частинами (теорема 4.3) буде застосована до обчислення частинних похідних півгрупи $\partial_\tau P_t f$ (3.14) і дасть можливість отримати представлення з похідними меншого порядку в правій частині. Дійсно, якщо ввести позначення

$$I\!D_k = D_{\Gamma e_k} \tag{4.13}$$

для стохастичної похідної по напрямку, генерованому процесом $\Gamma_t e_k$ (4.9), де $e_k = (\dots,0,1_k,0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, тоді з формули інтегрування частинами (4.11) випливає, що для $\mathcal{F}_t$-вимірної функції $\Psi \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ та $f \in \mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$:

$$\mathbf{E}\,\partial_k f(\xi^0_t)\Psi = \frac{1}{t}\,\mathbf{E}f(\xi^0_t)I\!D^*_k\Psi, \tag{4.14}$$

де

$$\mathbb{D}_k^* \Psi = \Psi \int_0^t \langle \Gamma_s e_k, dW(s) \rangle_{\ell_2(1)} - \mathbb{D}_k \Psi. \tag{4.15}$$

Тому представлення (3.14) похідних півгрупи може може бути записано в наступному вигляді:

$$\partial_\tau P_t f(x) = \sum_{\ell=1}^{|\tau|} \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \tau} \sum_{j_1, \dots, j_\ell \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E} f(\xi_t^0) \frac{\mathbb{D}_{j_1}^* \dots \mathbb{D}_{j_\ell}^* (\xi_{j_1,\gamma_1} \dots \xi_{j_\ell,\gamma_\ell})}{t^\ell}. \tag{4.16}$$

Отже питання підвищення гладкості під дією півгрупи P_t зводиться до питання дослідження властивостей стохастичних похідних від розв'язків ξ_γ варіаційних рівнянь (3.16):

$$\mathbb{D}^\beta \xi_\tau = \mathbb{D}^{j_1} \dots \mathbb{D}^{j_\ell} \xi_\tau, \qquad \beta = \{j_1, \dots, j_\ell\}.$$

В наступній теоремі доводиться стохастична диференційовність варіаційного процесу ξ_τ.

Теорема 4.4. За умов теореми 3.3:

1. Для початкового даного $x^0 \in \ell_2(a)$ варіації $\xi_\tau(t, x^0)$ (3.16) мають стохастично диференційовані координати:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d: \;\; \xi_{k,\tau}(t, x^0) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega).$$

Крім того, для будь-якої підмножини $\beta \subset \mathbb{Z}^d$, $|\beta| \geq 1$ існує $\mathbb{D}^\beta \xi_{k,\tau} \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$.

2. Стохастичні варіації $\mathbb{D}^\beta \xi_{k,\tau}$ є сильними розв'язками в просторах $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$, $m_\tau = m_1/|\tau|$, відповідних рівнянь:

$$\mathbb{D}^\beta \xi_{k,\tau}(t) = \widetilde{x}_{k;\tau,\beta} - \int_0^t [(F'(\xi^0) + B)\mathbb{D}^\beta \xi_\tau]_k ds - \int_0^t \varphi_{k;\tau,\beta}(s) ds, \tag{4.17}$$

де $\widetilde{x}_{\tau,\beta} = 0$, $|\beta| \geq 1$, $\widetilde{x}_{\tau,\varnothing} = \widetilde{x}_\tau$ — початкові умови задані в (3.18), а неоднорідні частини мають вигляд:

$$\varphi_{k;\tau,\beta}(t) = \sum_{\substack{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau \\ |\gamma_i|\ge 1,\,\ell\ge 1}} \sum_{\substack{\sigma_0\cup\dots\cup\sigma_\ell=\beta \\ |\sigma_0|\ge 2-\ell,\,|\sigma_i|\ge 0}} t^{|\sigma_0|}\delta_k^{\sigma_0} F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_k^0)\, I\!\!D^{\sigma_1}\xi_{k,\gamma_1}\dots I\!\!D^{\sigma_\ell}\xi_{k,\gamma_\ell}. \tag{4.18}$$

Вектори $c_{\tau,\beta}\in\mathbb{P}$, що задають простори $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$ задовольняють ієрархію:

$$\exists\ K_c \quad \delta_k^{\sigma_0}[c_{k;\,\tau,\beta}]^{|\tau|} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \le K_c[c_{k;\,\gamma_1,\sigma_1}]^{|\gamma_1|}\dots[c_{k;\,\gamma_\ell,\sigma_\ell}]^{|\gamma_\ell|}, \quad k\in\mathbb{Z}^d. \tag{4.19}$$

Вище $\delta_j^\beta = \prod_{i\in\beta}\delta_j^i$ є добутком відповідних символів Кронекера, а сумування ведеться по всім можливим розбиттям множин $\tau=\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell$, $\beta=\sigma_0\cup\dots\cup\sigma_\ell$, $1\le\ell\le|\tau|$ таким, що при $\ell=1$, то $|\sigma_0|\ge 1$, а якщо $\ell\ge 2$, то $|\sigma_0|\ge 0$.

3. Крім того, стохастичні похідні задовольняють наступну оцінку: $\exists\, K_R\in\bigcap_{p\ge 1}L^p(\Omega,\mathbf{P})$ така, що

$$\forall\,|\beta|\ge 1 \quad \|I\!\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\le t^{|\beta|+1}K_R(\omega), \quad t\in[0,T] \tag{4.20}$$

де $\max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|\widetilde{x}_{\gamma,\varnothing}\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\varnothing})}, \gamma\subseteq\tau)\le R$.

В теоремі 4.4 під *сильним розв'язком* задачі (4.17) розуміється $\mathcal{F}_t$-адаптований $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$-неперервний процес скінченної варіації

$$[0,T]\ni t\to I\!\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0)\in\mathcal{D}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}(F'(\xi^0(t,x^0))+B),\ |\beta|\ge 0,\ |\tau|\ge 1,$$

який для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega\in\Omega$ задовольняє рівняння (4.17) в просторі $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$ для майже всіх $t\in[0,T]$.

Доведення. цієї теореми проводиться у вигляді послідовності лем в додатку C, де перевіряється означення 4.1 стохастичної похідної $I\!\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0)$ від варіації. У лемах C.6 та C.7 процеси $I\!\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0,\omega_\cdot+\varepsilon\int_0^\cdot u_s ds)$ та

$D_u \mathbb{D}^\beta \xi_\tau(t, x^0)$ будуються як розв'язки відповідних неавтономних стохастичних рівнянь та перевіряється їх неперервність по початковому даному $x^0 \in \ell_2(a)$ та напрямку $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$. В лемі C.8 надається зміст $D_u \mathbb{D}^\beta \xi_\tau$ як похідній в напрямку $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$, а в лемі C.9 доводиться, що $\mathbb{D}^\beta \xi_{k,\tau} \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ і встановлюється, що похідна по стохастичному напрямку від розв'язку варіаційного рівняння співпадає з розв'язком відповідного варіаційного рівняння більш високого порядку: $D_{\Gamma e_j} \mathbb{D}^\beta \xi_{k,\tau} = \mathbb{D}^{\beta \cup \{j\}} \xi_{k,\tau}$, крім того, доводяться оцінки (4.20). □

4.4 Нелінійна оцінка на стохастичні варіації

Перш за все зауважимо, що рівняння (4.17) можуть бути отримані шляхом формального застосування операції стохастичного диференціювання $\mathbb{D}^\beta$ до рівняння (3.16). Це випливає з (4.10), ланцюгового правила (4.4) та наступного співвідношення для F, що задовольняє (2.4):

$$\mathbb{D}^\beta F^{(\ell)}(\xi_j^0(t, x^0)) = \delta_j^\beta t^{|\beta|} F^{(\ell+|\beta|)}(\xi_j^0(t, x^0)).$$

З врахуванням цього спостереження, аналогічно до міркувань розділу 3, введемо наступний нелінійний вираз

$$\rho_{\tau,\beta}(t) = \sum_{\gamma \subseteq \tau,\ \sigma \subseteq \beta,\ \gamma \neq \varnothing} \mathbf{E} p_{\gamma,\sigma}(z_t) \| \frac{\mathbb{D}^\sigma \xi_\gamma}{t^{|\sigma|}} \|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})} \tag{4.21}$$

де $m_\gamma = m_1/|\gamma|,\ z_t = \|\xi^0(t, x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$.

В п. 4.5 властивості цього виразу будуть використані для доведення підвищення гладкості під дією півгрупи.

Теорема 4.5. [1, 55] Нехай F задовольняє (2.4), $x^0 \in \ell_2(a)$ і вектори $c_{\gamma,\sigma} \in \mathbb{P}$ задовольняють ієрархію (4.19).

Припустимо, що функції $p_{\gamma,\sigma} \in C^2(\mathbb{R}^1_+)$, є монотонними функціями не більш ніж поліноміального росту (2.11), для яких виконана ієрархія

$$[p_{\tau,\beta}]^{|\tau|}(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \leq K_p[p_{\gamma_1,\sigma_1}]^{|\gamma_1|}\dots[p_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}]^{|\gamma_\ell|} \tag{4.22}$$

для будь-якого розбиття $\tau = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell$, $\beta = \sigma_0 \cup \dots \cup \sigma_\ell$ з $|\sigma_0| \geq 2 - \ell$.

Тоді існує така стала $M = M_{\tau,\beta} \in \mathbb{R}^1$, що має місце нелінійна оцінка

$$\rho_{\tau,\beta}(t) \leq e^{Mt}\rho_{\tau,\beta}(0). \tag{4.23}$$

Границя в правій частині при $t = 0$ розуміється виходячи з оцінки (4.20) та властивості (3.16).

Доведення. Нехай $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$. Введемо позначення $\tau = \{k_1, \dots, k_n\}$, $\beta = \{j_1, \dots, j_m\}$ та функцію

$$h_i(t) = \sum_{\ell=0}^{i} \sum_{\substack{\sigma\subseteq\beta \\ |\sigma|=\ell}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq\tau \\ \gamma\neq\varnothing}} \mathbf{E}p_{\gamma,\sigma}(z_t)\|\frac{I\!D^\sigma \xi_\gamma}{t^{|\sigma|}}\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})}.$$

Покажемо методом індукції, що для будь-якого $i \in \{0, \dots, m\}$

$$h_i(t) \leq e^{M_i t}h_i(0). \tag{4.24}$$

Тоді при $i = m$ матимемо твердження теореми. База індукції при $i = 0$ (тобто при $\beta = \varnothing$) була доведена в теоремі 3.7.

Зауважимо, що

$$h_i(t) = h_{i-1}(t) + \sum_{\sigma\subseteq\beta,\ |\sigma|=i} g_\sigma(t), \tag{4.25}$$

де

$$g_\sigma(t) = \sum_{\gamma\subseteq\tau,\gamma\neq\varnothing} \mathbf{E}p_{\gamma,\sigma}(z_t)\|\frac{I\!D^\sigma \xi_\gamma}{t^{|\sigma|}}\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})}.$$

Тому, щоб отримати (4.24), достатньо довести, що для довільного $\sigma \subseteq \beta$, $|\sigma| = i$ має місце оцінка

$$g_\sigma(t) \le e^{K_1 t} g_\sigma(0) + K_2 \int_0^t e^{K_1(t-s)} h_{i-1}(s) ds. \tag{4.26}$$

Тоді з індуктивного припущення та представлення (4.25) маємо

$$\begin{aligned} h_i(t) \le e^{M_{i-1}t} h_{i-1}(0) + \\ + \sum_{\sigma\subseteq\beta;\,|\sigma|=i} \{e^{K_1 t} g_\sigma(0) + K_2 h_{i-1}(0) \int_0^t e^{K_1(t-s)} e^{M_{i-1}s} ds\} \le \\ \le e^{(M_{i-1}+K_1)t} \{1 + K_2 t\} h_i(0) \le e^{(M_{i-1}+K_1+K_2)t} h_i(0). \end{aligned}$$

Отже залишилось довести (4.26). Введемо позначення $X_{\gamma,\sigma} = \ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})$, $\eta_t = \dfrac{I\!D^\sigma \xi_\gamma}{t^{|\sigma|}}$, де $I\!D^\sigma \xi_\gamma$ задовольняє рівняння (4.17). З властивості властивості (4.20) випливає $\|\eta_0\| = 0$. З формули Іто для $z_t = \|\xi_t^0\|^2_{\ell_2(a)}$ маємо

$$\begin{aligned} p_{\gamma,\sigma}(z_t)\|\eta_t\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} = p_{\gamma,\sigma}(z_0)\|\eta_0\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} + 2\int_0^t p'_{\gamma,\sigma}(z_s)\|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} (\xi^0(s), dW(s))_{\ell_2(a)} + \\ + m_\gamma \int_0^t \{p_{\gamma,\sigma}(z_s) \langle \eta_s^\#, \frac{d\eta_s}{ds} \rangle_{X\gamma,\sigma} - \|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} [H_{\mathbb{Z}^d} p_{\gamma,\sigma}](z_s)\} ds = \\ = p_{\gamma,\sigma}(z_0)\|\eta_0\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} + 2\int_0^t p'_{\gamma,\sigma}(z_s)\|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} (\xi^0(s), dW(s))_{\ell_2(a)} + \\ + m_\gamma \int_0^t p_{\gamma,\sigma}(z_s) \{\frac{1}{s^{|\sigma|}} \langle \eta^\#, \frac{d}{ds} I\!D^\sigma \xi_\gamma \rangle - \frac{|\sigma|}{s} \|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}}\} ds - \\ - m_\gamma \int_0^t \|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} (H_{\mathbb{Z}^d} p_{\gamma,\sigma})(z_s) ds, \end{aligned} \tag{4.27}$$

де оператор $H_{\mathbb{Z}^d}$ виникає аналогічно(3.35).

Оцінки (3.10), (3.11), (4.20) та нерівність (3.33) гарантують інтегровність всіх виразів в формулі Іто. Таким чином, маємо інтегральне представлення:

$$\mathbf{E} p_{\gamma,\sigma}(z_t)\|\eta_t\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} = \mathbf{E} p_{\gamma,\sigma}(z_0)\|\eta_0\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} - m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}} [H_{\mathbb{Z}^d} p_{\gamma,\sigma}](z_s) ds +$$

$$+ m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_{\gamma,\sigma}(z_s)\Big[\frac{1}{s^{|\sigma|}}\,\langle\, \eta^{\#}, \frac{d}{ds} I\!\!D^\sigma \xi_\gamma\rangle - \frac{|\sigma|}{s}\|\eta_s\|^{m_\gamma}_{X_{\gamma,\sigma}}\Big] ds.$$

З нерівності $H_{\mathbb{Z}^d} p_{\gamma,\sigma}(z) \ge K_{\gamma,\sigma} p_{\gamma,\sigma}(z),\ z \in \mathbb{R}_+$ (див. лему 2.5) та $-1/s \le 0$ маємо

$$\begin{aligned} g_\sigma(t) \le g_\sigma(0) + K'_\sigma \int_0^t g_\sigma(s) ds + \\ + \sum_{\gamma \subseteq \tau,\, \gamma \ne \varnothing} m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_{\gamma,\sigma}(z_s) \frac{1}{s^{|\sigma|}}\,\langle\, \eta^{\#}, \frac{d}{ds} I\!\!D^\sigma \xi_\gamma \,\rangle ds. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Залишилось оцінити члени в (4.28). Процес $I\!\!D^\sigma \xi_\gamma$ задовольняє рівняння (4.17), отже

$$\begin{aligned} (4.28) = -\sum_{\gamma \subseteq \tau,\, \gamma \ne \varnothing} m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_{\gamma,\sigma}(z_s)\,\langle\, (F' + B)\frac{I\!\!D^\sigma \xi_\gamma}{s^{|\sigma|}}, \eta_s^{\#}\,\rangle_{X_{\gamma,\sigma}} - \\ - \sum_{\gamma \subseteq \tau,\, \gamma \ne \varnothing} m_\gamma \int_0^t \mathbf{E}\, p_{\gamma,\sigma}(z_s)\,\langle\, \eta^{\#}, \frac{\varphi_{\gamma,\sigma}}{s^{|\sigma|}}\,\rangle_{X_{\gamma,\sigma}} \le \\ \le (K_{\tau,\sigma} + K'_{\tau,\sigma}) \int_0^t g_\sigma(s) ds + \sum_{\gamma \subseteq \tau,\, \gamma \ne \varnothing} \sum_{\substack{\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_\ell = \gamma \\ |\alpha_i| \ge 1,\ \ell \ge 1}} \sum_{\substack{\pi_0 \cup \dots \cup \pi_\ell = \sigma \\ |\pi_0| \ge 2-\ell,\ |\pi_i| \ge 0}} \end{aligned}$$

$$\int_0^t \mathbf{E} p_{\gamma,\sigma}(z_s) \Big\| \frac{s^{|\pi_0|} \delta^{\pi_0} F^{(\ell + |\pi_0|)}(\xi^0) I\!\!D^{\pi_1} \xi_{\alpha_1} \dots I\!\!D^{\pi_\ell} \xi_{\alpha_\ell}}{s^{|\sigma|}} \Big\|^{m_\gamma}_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})} ds \tag{4.29}$$

де $K_{\tau,\sigma} = \sum\limits_{\gamma \subseteq \tau} m_\tau \|B\|_{\mathcal{L}(X_{\gamma,\sigma})}$. Вище було використано властивість $F'(z) \ge 0,\ z \in \mathbb{R}^1$, представлення (4.18) для $\varphi_{\gamma,\sigma}$ та нерівність (3.42). Застосовуючи тотожність $|\sigma| - |\pi_0| = |\pi_1| + \dots + |\pi_\ell|$, отримаємо

$$s^{|\pi_0|} \frac{I\!\!D^{\pi_1} \xi_{\alpha_1} \dots I\!\!D^{\pi_\ell} \xi_{\alpha_\ell}}{s^{|\sigma|}} = \frac{I\!\!D^{\pi_1} \xi_{\alpha_1}}{s^{|\pi_1|}} \dots \frac{I\!\!D^{\pi_\ell} \xi_{\alpha_\ell}}{s^{|\pi_\ell|}}. \tag{4.30}$$

Крім того, з (2.4) випливає

$$|F^{(\ell + |\pi_0|)}(x_k^0)| \le C(1 + |x_k^0|)^{\varkappa + 1} \le C a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}} (1 + \|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}}. \tag{4.31}$$

Застосовуючи (4.30), (4.31), ієрархію (4.19) та властивість (2.11), маємо оцінку для кожного доданку в (4.29):

$$\mathbf{E}p_{\gamma,\sigma}(z_s)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{k;\gamma,\sigma}\delta_k^{\pi_0}|F^{(\ell+|\pi_0|)}(\xi_k^0)\frac{I\!\!D^{\pi_1}\xi_{k,\alpha_1}}{s^{|\pi_1|}}\dots\frac{I\!\!D^{\pi_\ell}\xi_{k,\alpha_\ell}}{s^{|\pi_\ell|}}|^{m_\gamma}\leq$$
$$\leq C^{m_\gamma}K_c^{1/m_\gamma}K_p^{1/m_\gamma}\mathbf{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\prod_{j=1}^{\ell}\{p_{\alpha_j,\pi_j}(z_t)c_{k;\alpha_j,\pi_j}|\frac{I\!\!D^{\pi_j}\xi_{k,\alpha_j}}{s^{|\pi_j|}}|^{m_{\alpha_j}}\}^{|\alpha_j|/|\gamma|}\leq$$
$$\leq K_2\mathbf{E}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{|\alpha_j|}{|\gamma|}p_{\alpha_j,\pi_j}(z_s)\|\frac{I\!\!D^{\pi_j}\xi_{\alpha_j}}{s^{|\pi_j|}}\|^{m_{\alpha_j}}_{X_{\alpha_j,\pi_j}}. \tag{4.32}$$

Вище тако було використано нерівність $|x_1\dots x_\ell|\leq\frac{|x_1|^{q_1}}{q_1}+\dots+\frac{|x_\ell|^{q_\ell}}{q_\ell}$ з $q_j=|\gamma|/|\alpha_j|$.

Нарешті зауважимо, якщо $\ell=1$, то $\pi_0\neq\varnothing$ и для підрозбиття $\sigma=\pi_0\cup\pi_1$ маємо $|\pi_0|,\ |\pi_1|\leq|\sigma|-1$. Отже, до (4.32) можемо застосувати індуктивне припущення (4.26). Якщо $\ell=2$, то навіть у випадку $\pi_0=\varnothing$ існує як мінімум дві підмножини $\pi_1\cup\pi_2=\sigma$, для яких $|\pi_j|\leq|\sigma|-1$. Отже, індуктивне припущення також може бути застосовано. Таким чином, приходимо до нерівності (4.32) $\leq K_2\,h_{i-1}(t)$. З врахуванням (4.28) та (4.29) з цього випливає

$$g_\sigma(t)\leq g_\sigma(0)+K_1\int_0^t g_\sigma(s)ds+K_2\int_0^t h_{i-1}(s)ds.$$

З останньої нерівності випливає (4.26) з $K_1=K'_\sigma+K_{\tau,\sigma}+K'_{\tau,\sigma}$, що завершує доведення нелінійної оцінки (4.23) при $x^0\in\ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$. Замикання до $x^0\in\ell_2(a)$ є простим наслідком лем C.1 (C.2) та C.6 (C.26) з $u^1=u^2=0$. □

Лема 4.6. Нехай F задовольняє (2.4), вага $\psi\in\mathbb{P}$ і функції $Q\in C^2(\mathbb{R}^1)$ задовольняють властивість (2.11). Тоді для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ існує така стала $\exists\ M=M_n(\psi,Q)$, яка не залежить від $|\tau|$, $|\tau|\leq m_1$, що виконана оцінка

$$\forall\, t \in [0,T] \quad \mathbf{E}\, Q(\|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)}) |I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}|^{m_\tau} \leq$$
$$\leq \frac{t^{|\beta| m_\tau} e^{Mt} |\tau| \psi_0 Q(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau (|\tau|+|\beta|-1)}}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau (|\tau|-1)} \prod\limits_{i\in\beta} a_i^{\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau} \prod\limits_{j\in\tau} \psi_{k-j}^{m_1/|\tau|}} \tag{4.33}$$

для будь-якого $1 \leq m_1 \leq n$, $\{k,\tau,\beta\} \subset \mathbb{Z}^d$, $|\beta| \leq n$ і $m_\tau = m_1/|\tau|$.

Доведення. Для фіксованих τ, β введемо ваги

$$\widetilde{p}_{\gamma,\sigma}(z) = Q(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 (\frac{|\beta|-1}{|\tau|} - \frac{|\sigma|-1}{|\gamma|})}, \quad \gamma \subseteq \tau,\ \sigma \subseteq \beta, \tag{4.34}$$

$$\widetilde{c}_{k;\gamma,\sigma} = (\prod_{i\in\sigma} a_i^{\frac{\varkappa+1}{2} \frac{m_1}{|\gamma|}}) a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 \frac{|\gamma|-1}{|\gamma|}} \prod_{j\in\gamma} \psi_{k-j}^{m_1/|\gamma|}, \quad \psi \in \mathbb{P}. \tag{4.35}$$

Ці ваги задовольняють умови (4.19), (4.22) зі сталими$K_{\widetilde{c}} = K_{\widetilde{p}} = 1$. Дійсно, для $\gamma = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_\ell$ и $\sigma = \pi_0 \cup \dots \cup \pi_\ell$ маємо

$$(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 (\frac{|\beta|-1}{|\tau|} - \frac{|\sigma|-1}{|\gamma|})|\gamma|} (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1} \leq (1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 \sum\limits_{j=1}^{\ell} (\frac{|\beta|-1}{|\tau|} - \frac{|\pi_j|-1}{|\alpha_j|})|\alpha_j|},$$

або $2-\ell \leq |\pi_0|$, що випливає з ієрархії (4.22). Підставляючи $\widetilde{c}_{\gamma,\sigma}$ в (4.19), отримаємо

$$\delta_k^{\pi_0} (\prod_{i\in\sigma} a_i^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1}) a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 (|\gamma|-1)} \prod_{j\in\gamma} \psi_{k-j}^{m_1} \cdot a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2} m_1} \leq$$

$$\leq \prod_{q=1}^{\ell} \{ (\prod_{i\in\pi_q} a_i^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1}) a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 (|\alpha_q|-1)} \prod_{j\in\alpha_q} \psi_{k-j}^{m_1} \}.$$

Оскільки $|\gamma| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_\ell|$, ця нерівність еквівалентна наступній:

$$\delta_k^{\pi_0} \prod_{j\in\pi_0} a_j^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1} \cdot a_k^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1 (\ell-2)} \leq 1. \tag{4.36}$$

Враховуючи $a_k \leq tr\, a = 1$ нерівність (4.36) очевидна при $\ell \geq 2$. Якщо $\ell = 1$, множина $\pi_0 \neq \varnothing$, тому можемо переписати ліву частину нерівності

(4.36) у вигляді

$$\delta_k^{\pi_0} \prod_{j\in\pi_0} a_j^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} = \begin{cases} a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} \delta_k^{\pi_0\setminus\{k\}} \prod\limits_{j\in\pi_0\setminus\{k\}} a_j^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}, & k\in\pi_0, \\ 0, \quad k\notin\pi_0, \end{cases}$$

Отже, умова (4.36) виконана.

Оскільки для $\gamma=\tau,\ \sigma=\beta$ вага $\widetilde{p}_{\tau,\beta}(z)=Q(z)$, а для $|\gamma|=1,\ \sigma=\varnothing$ вага має вигляд $\widetilde{p}_{\gamma,\varnothing}(z)=Q(z)(1+z)^{\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau(|\tau|+|\beta|-1)}$, застосування теореми 4.5 дає

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,Q(\|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)})\|\frac{I\!D^\beta\xi_\tau}{t^{|\beta|}}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(\widetilde{c}_{\tau,\beta})} \le \rho_{\tau,\beta}(t)\le e^{Mt}\rho_{\tau,\beta}(0)= \\ &=|\tau|\psi_0 e^{Mt}Q(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}m_\tau(|\tau|+|\beta|-1)}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

де була застосована нерівність (4.20). Крім того, було використано, що для вироджених початкових умов (3.18) норма $\|\widetilde{x}_j\|_{\ell_{m_1}(c_{\{j\},\varnothing})}=\psi_0$. Координатна форма нерівності (4.37) дає (4.33). Рівномірність сталої M по $|\tau|,|\beta|\le n$ випливає з $K_{\widetilde{p}}=K_{\widetilde{c}}=1$, рівномірності $K_{\gamma,\alpha}$ и скінченності норми $\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta}))}$ (3.88). □

4.5 Підвищення гладкості під дією гіббсових півгруп в просторах неперервно диференційованих функцій

Використовуючи властивості стохастичних похідних $I\!D^\beta\xi_\gamma$ у спеціальних напрямках $\Gamma_t v$ (4.9) і теорему 4.3 про інтегрування частинами, в цьому пункті показано, що півгрупа генерована оператором енергії гіббсової міри P_t (3.13) підвищує гладкість початкової функції в шкалі просторів $C_{\Theta,r}(\ell_2(a))$ неперервно диференційовних функцій (означення 3.17).

По набору ваг $\Theta=\{(p,\mathcal{G}=G^1\otimes\cdots\otimes G^s)\}$ введемо новий набір ваг

$T_\varkappa\Theta$ за правилом:

$$T_\varkappa\Theta = \{\big(\,(1+z)^{\varkappa+1}p(z),\, G^1\otimes\ldots G^j\otimes A^{\varkappa+2}\otimes G^{j+1}\otimes\ldots G^s\big), j=0,\ldots,s\},\tag{4.38}$$

тобто на кожне місце в добутку $\mathcal{G} = G^1\otimes\cdots\otimes G^s$ вставлена додаткова вага $A^{\varkappa+2}$, при цьому поліноміальна вага домножується на $(1+z)^{\varkappa+1}$. Введемо позначення $(\Theta)^m = \bigcup\limits_{i=0}^{m} T^i_\varkappa\Theta$, $(\Theta)^0 = \Theta$. Зауважимо, що у разі, якщо набір ваг Θ є квазі-стискаючим у сенсі означення 3.18, тобто задовольняє умови (3.118), то відповідний набір ваг $(\Theta)^m$ також є квазі-стискаючим. Це випливає з представлення $(\Theta)^i = (\Theta)^{i-1}\cup T_\varkappa(\Theta)^{i-1}$, а також умови (3.118). Позначимо $\mathcal{D}_\Theta$ замикання в нормі $C_{\Theta,r}$ функцій $f\in\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ таких, що $\|f\|_{C_{\Theta,r}}<\infty$.

Теорема 4.7. Нехай виконані умови теореми 3.19 і набір ваг Θ є квазі-стискаючим з параметром $\varkappa$. Тоді для будь-якого $m\geq 1$, $f\in\mathcal{D}_\Theta$ та $t>0$ маємо $P_tf\in C_{(\Theta)^m,r}$, і існують такі сталі $K_{\Theta,m},\ M_{\Theta,m}$, що виконана оцінка

$$\|P_tf\|_{C_{(\Theta)^m,r}} \leq \frac{1}{t^{m/2}}K_{\Theta,m}e^{M_{\Theta,m}t}\|f\|_{C_{\Theta,r}},\quad t>0.\tag{4.39}$$

Доведення. Нехай набір ваг $\Theta = \Theta_1\cup\cdots\cup\Theta_n$ задовольняє умову (3.118). Розглянемо $f\in\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ таку, що $\|f\|_{C_{\Theta,r}}<\infty$. З циліндричності функції f та властивості (4.8) випливає, що норма $\|f\|_{C_{(\Theta)^m,r}}$, $m\geq 1$ є скінченною. Тому з теореми 3.19 маємо $P_tf\in C_{(\Theta)^m,r}$ і $\|P_tf\|_{C_{(\Theta)^m,r}}<\infty$.

Для доведення оцінки (4.39) достатньо отримати оцінку для похідних першого порядку півгрупи:

$$\forall\, f\in\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \forall\, t>0\quad \|P_tf\|_{C_{(\Theta)^1,r}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}Ke^{Mt}\|f\|_{C_{\Theta,r}}.\tag{4.40}$$

Тоді (4.39) випливатиме з представлення $P_tf = P_{t/m}\ldots P_{t/m}f$ для $f\in\mathcal{P}^\infty_{\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, оцінки (4.40) і властивості $(\Theta)^i = (\Theta)^{i-1}\cup T_\varkappa(\Theta)^{i-1}$. Доведемо

(4.40). З означення 3.17 (3.116) випливає

$$\|P_t f\|_{C_{(\Theta)^1,r}} = \max(\|P_t f\|_{C_{\Theta,r}}, \max_{i=1,\dots,n} \|\partial^{(i+1)} P_t f\|_{T_\varkappa \Theta_i}).$$

Враховуючи теорему 3.19, оцінка (4.40) матиме місце, якщо буде доведено, що для кожного Θ_i, $i \in \{1,\dots,n\}$ з набору $\Theta = \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_n$:

$$\|\partial^{(i+1)} P_t f\|_{T_\varkappa \Theta_i} \le \frac{1}{\sqrt{t}} K e^{Mt} \|f\|_{C_{\Theta,r}}, \quad t > 0. \tag{4.41}$$

Покажемо методом індукції, що (4.41) випливає з нерівності:

$$\|\partial^{(i+1)} P_t f\|_{T_\varkappa \Theta_i} \le K e^{Mt} \{ \frac{1}{\sqrt{t}} \|\partial^{(i)} f\|_{\Theta_i} + \max_{\ell=1,\dots,i} (\|\partial^{(\ell)} f\|_{\Theta_\ell}, \|\partial^{(\ell)} f\|_{T_\varkappa \Theta_{\ell-1}}) \}. \tag{4.42}$$

Базу індукції отримаємо з (4.42) при $i = 1$. Нехай при $i \le i_0$ оцінка (4.41) має місце. Враховуючи $P_t f = P_{t/2} P_{t/2} f$ і (4.42), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|\partial^{(i_0+2)} P_t f\|_{T_\varkappa \Theta_{i_0+1}} = \|\partial^{(i_0+2)} P_{t/2} P_{t/2} f\|_{T_\varkappa \Theta_{i_0+1}} \le \\
&\le K e^{Mt/2} \{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} \|\partial^{(i_0+1)} P_{t/2} f\|_{\Theta_{i_0+1}} + \\
&+ \max_{\ell=1,\dots,i_0+1} (\|\partial^{(\ell)} P_{t/2} f\|_{\Theta_\ell}, \|\partial^{(\ell)} P_{t/2} f\|_{T_\varkappa \Theta_{\ell-1}}) \} \le \frac{K' e^{M' t}}{\sqrt{t}} \|f\|_{C_{\Theta,r}}.
\end{aligned}$$

Вище була використана оцінка (3.119), індуктивне припущення (4.41) та структура півнорм в просторі $C_{\Theta,r}$. Отже, (4.41) і (4.40) мають місце, якщо виконано (4.42). Доведемо оцінку (4.42). Використовуючи представлення (3.14) частинних похідних $\{\partial^{(i+1)} P_t f\}_{k_1,\dots,k_{i+1}} = \partial_{k_{i+1}} \dots \partial_{k_1} P_t f$ та застосовуючи інтегрування частинами (4.14) до членів при $\ell = i+1$ отримаємо:

$$\partial_{k_{i+1}} \dots \partial_{k_1} P_t f = \sum_{\ell=1}^{i} \sum_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_\ell = \{k_1,\dots,k_{i+1}\}} \mathbf{E} \langle \partial^{(\ell)} f(\xi^0), \xi_{\gamma_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\gamma_\ell} \rangle + \tag{4.43}$$

$$+\frac{1}{t}\sum_{j_1,\dots,j_{i+1}\in\mathbb{Z}^d}\mathbf{E}\,\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1}f(\xi^0)\xi_{j_1,k_1}\dots\xi_{j_{i+1},k_{i+1}}\int_0^t\langle\,\Gamma_s e_{j_{i+1}},dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)}- \tag{4.44}$$

$$-\frac{1}{t}\sum_{\ell=1}^{i+1}\sum_{j_1,\dots,j_{i+1}\in\mathbb{Z}^d}\mathbf{E}\,\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1}f(\xi^0)\xi_{j_1,k_1}\dots I\!\!D^{j_{i+1}}\xi_{j_\ell,k_\ell}\dots\xi_{j_{i+1},k_{i+1}}. \tag{4.45}$$

Оцінимо вирази (4.43)–(4.45). В теоремі 3.19 було доведено, що для будь-якого квазі-стискаючого набору ваг $\Psi=\Psi_1\cup\dots\cup\Psi_n$ для довільного $\ell\le i\in\{1,\dots,n\}$ та $|\gamma_1|+\dots+|\gamma_\ell|=i$:

$$\|\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell}\mathbf{E}\,\langle\,\partial^{(\ell)}f(\xi^0),\xi_{\gamma_1}\otimes\dots\otimes\xi_{\gamma_\ell}\,\rangle\,\|_{\Psi_i}\le Ke^{Mt}\|\partial^{(\ell)}f\|_{\Psi_\ell}.$$

Для квазі-стискаючого набору ваг $\Theta=\Theta_1\cup\dots\cup\Theta_n$ набір ваг $T_\varkappa\Theta_i$ є підмножиною квазі-стискаючого набору $(\Theta)^1=\Theta\cup T_\varkappa\Theta=\Psi_0\cup\dots\cup\Psi_{n+1}$, де $\Psi_1=\Theta_1$, $\Psi_{n+1}=T_\varkappa\Theta_n$ і $\Psi_\ell=\Theta_\ell\cup T_\varkappa\Theta_{\ell-1}$, $\ell=2,\dots,n$. Тому для будь-якого $i\in\{1,\dots,n\}$:

$$\|(4.43)\|_{T_\varkappa\Theta_i}\le Ke^{Mt}\max_{\ell=1,\dots,i}(\|\partial^{(\ell)}f\|_{\Theta_\ell},\|\partial^{(\ell)}f\|_{T_\varkappa\Theta_{\ell-1}}),$$

де $T_\varkappa\Theta_0=\varnothing$. Отже, для завершення доведення оцінки (4.42) досить показати, що для будь-якого $(p,\mathcal{G})\in\Theta_i$:

$$\|(4.44)\|_{T_\varkappa(p,\mathcal{G})}\le\frac{1}{\sqrt{t}}Ke^{Mt}\|\partial^{(i)}f\|_{\Theta_i}, \tag{4.46}$$

$$\|(4.45)\|_{T_\varkappa(p,\mathcal{G})}\le Ke^{Mt}\|\partial^{(i)}f\|_{\Theta_i} \tag{4.47}$$

з $T_\varkappa(p,\mathcal{G})=(\,(1+z)^{\varkappa+1}p(z),\mathcal{G}\otimes A^{\varkappa+2})$, див. (4.38).

Доведемо оцінку (4.46). Застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\|(4.44)\|_{T_\varkappa(p,\mathcal{G})}\le\frac{\Big\|\sum_{j_1,\dots,j_{i+1}\in\mathbb{Z}^d}\Big(\mathbf{E}\frac{|\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1}f(\xi^0)|^2}{p(z_t)}\Big)^{1/2}A_{j_1,\dots,j_{i+1}}\Big\|_{\mathcal{G}\otimes A^{\varkappa+2}}}{t\,(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}}\sqrt{p(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})}}, \tag{4.48}$$

де $A^{k_1,\dots,k_{i+1}}_{j_1,\dots,j_{i+1}} = \Big(\mathbf{E}p(z_t)\,|\xi_{j_1,k_1}\dots\xi_{j_{i+1},k_{i+1}}\int_0^t \langle\,\Gamma_s e_{j_{i+1}}, dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)}|^2\Big)^{1/2}$ і $z_t = \|\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)}$. Простий наслідок скінченновимірної формули Іто:

$$\forall\, v \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}(\Omega) \quad \mathbf{E}\Big(\int_0^t \langle\, v_s, dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)}\Big)^{2n} \le (n(2n-1))^n t^{n-1}\mathbf{E}\int_0^t \|v_s\|^{2n}_{\ell_2(1)}ds$$

дає

$$\Big(\mathbf{E}(\int_0^t \langle\,\Gamma_s e_{j_{i+1}}, dW(s)\,\rangle_{\ell_2(1)})^{2(i+2)}\Big)^{1/2(i+2)} \le Ke^{Mt}\sqrt{t}a_{j_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}}(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}} \tag{4.49}$$

з Γ_s, означеним в (4.9). Тут також було використано $\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_2(1))} < \infty$, властивості (3.10), (3.11) процеса $\xi^0(t,x^0)$ і оцінку

$$|F'(\xi^0_j)| \le C(1+|\xi^0_j|)^{\varkappa+1} \le Ca_j^{-\frac{\varkappa+1}{2}}(1+\|\xi^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}}.$$

Послідовне застосування нерівності Гельдера з $q_\ell = 1/(i+2)$, (4.49) і нелінійної оцінки (4.33) з $|\beta| = 0,\ \tau = \{j\}$, дає

$$A^{k_1,\dots,k_{i+1}}_{j_1,\dots,j_{i+1}} \le \prod_{\ell=1}^{i+1}\Big(\mathbf{E}p^{\frac{i+2}{i+1}}|\xi_{j_\ell,k_\ell}|^{2(i+2)}\Big)^{1/2(i+2)}\Big\{\mathbf{E}(\int_0^t \langle\,\Gamma_s e_{j_{i+1}}, dW >)^{2(i+2)}\Big\}^{1/2(i+2)} \le$$

$$\le Ke^{Mt}\sqrt{t}(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}}\sqrt{p(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})}\,\frac{a_{j_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}}}{\prod\limits_{\ell=1}^{i+1}\psi_{j_\ell-k_\ell}}. \tag{4.50}$$

Підставляючи (4.50) в (4.48), отримаємо

$$\|(4.44)\|_{T_\varkappa(p,\mathcal{G})} \le \frac{Ke^{Mt}}{\sqrt{t}}\Big(\sum_{k_1,\dots,k_{i+1}} G^1_{k_1}\dots G^i_{k_i}a^{\varkappa+2}_{k_{i+1}}\times$$

$$\times\,|\sum_{j_1,\dots,j_{i+1}}(\mathbf{E}\frac{|\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1}f(\xi^0)|^2}{p(z_t)})^{1/2}\frac{a_{j_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}}}{\prod\limits_{\ell=1}^{i+1}\psi_{j_\ell-k_\ell}}|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{Ke^{Mt}}{\sqrt{t}}(\sum a_k)^{1/2}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\frac{\delta_a^{\frac{\varkappa+1}{2}|j|}}{\psi_j}\Big(\sum_{k_1,\dots,k_i} G^1_{k_1}\dots G^i_{k_i}\times$$

$$\times \Big| \sum_{j_1,\dots,j_i} (\mathbf{E}\frac{|\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1} f(\xi^0)|^2}{p(z_t)})^{1/2} \prod_{\ell=1}^{i} \frac{1}{\psi_{j_\ell - k_\ell}}|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{K' e^{Mt}}{\sqrt{t}} K_{G,\psi} \|\partial^{(i)} f\|_{(p,\mathcal{G})} \le \frac{K' e^{Mt}}{\sqrt{t}} K_{G,\psi} \|\partial^{(i)} f\|_{\Theta_i}. \qquad (4.51)$$

Вище була використана нерівність $a_{j_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}} \le \delta_a^{\frac{\varkappa+1}{2}|j_{i+1}-k_{i+1}|} a_{k_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}}$ з $\delta_a = \sup_{|k-j|=1} |a_k/a_j|$ і лема 3.20 з $x_{j_1\dots j_i} = (\mathbf{E}\frac{|\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1} f(\xi^0)|^2}{p(z_t)})^{1/2}$ и $b(k) = 1/\psi_k$. Вектор $\psi \in \mathbb{P}$ вибирається таким, щоб стала $K_{G,\psi} = \prod_{\ell=1}^{i} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_{G^\ell}^{|k|/2}/\psi_k)$ в лемі 3.20 і сума $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_a^{\frac{\varkappa+1}{2}|k|}/\psi_k$ були скінченні. Це завершує доведення нерівності (4.46). Оцінка (4.47) доводиться аналогічно з використанням нелінійної оцінки (4.33) при $|\beta| \in \{0,1\}$, $\tau = \{j\}$:

$$\|(4.45)\|_{T_\varkappa(p,\mathcal{G})} \le \sum_{\ell=1}^{i} \frac{\Big\| \sum_{j_1,\dots,j_{i+1}\in\mathbb{Z}^d} (\mathbf{E}\frac{|\partial_{j_i}\dots\partial_{j_1} f(\xi^0)|^2}{p(z_t)})^{1/2} B^\ell_{j_1,\dots,j_{i+1}} \Big\|_{\mathcal{G}\otimes A^{\varkappa+2}}}{t\,(1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}} \sqrt{p(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})}}$$

з використанням

$$B^{\ell;k_1,\dots,k_{i+1}}_{j_1,\dots,j_{i+1}} = \Big(\mathbf{E}\,\{\prod_{m=1,m\ne\ell}^{i+1} p^{1/(i+1)}(z_t)|\xi_{j_m,k_m}|^2\} p^{1/(i+1)}(z_t)|\mathbb{D}^{j_{i+1}}\xi_{j_\ell,k_\ell}|^2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \prod_{m=1,m\ne\ell}^{i+1} (\mathbf{E}p(z_t)|\xi_{j_m,k_m}|^{2(i+1)})^{1/2(i+1)} \cdot (\mathbf{E}p(z_t)|\mathbb{D}^{j_{i+1}}\xi_{j_\ell,k_\ell}|^{2(i+1)})^{1/2(i+1)} \le$$

$$\le K e^{Mt} t (1+\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})^{\frac{\varkappa+1}{2}} \sqrt{p(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)})} \frac{a_{j_{i+1}}^{-\frac{\varkappa+1}{2}}}{\prod_{\ell=1}^{i+1} \psi_{j_\ell - k_\ell}}. \qquad (4.52)$$

Оскільки вираз (4.52) з точністю до множника $\sqrt{t}$ співпадає з (4.50), то завершення доведення проводиться аналогічно (4.51), що доводить (4.47). $\square$

4.6 Висновки розділу 4

В даному розділі дисертації метод нелінійної оцінки застосовується для доведення властивості підвищення гладкості під дією півгрупи, що описує еволюцію гіббсової системи. Крім метода нелінійної оцінки для отримання цього результату використовується спеціальна формула інтегрування частинами, що доводиться в термінах так званої стохастичної похідної в межах числення Маллявена для функціоналів над простором Вінера. Запропонований в дисертації метод отримання такої формули інтегрування частинами дозволяє позбутися сингулярності, що виникає в численні Маллявена, якщо стохастичне диференціальне рівняння має принципово необмежені коефіцієнти, що зростають на нескінченності. На основі цих результатів доведено теорему про підвищення гладкості під дією гіббсової півгрупи в шкалі просторів неперервно диференційованих функцій, що були введені у попередньому розділі. Для реалізації цієї програми також доведено проміжні результати про розв'язність та неперервність за початковою умовою стохастичних похідних від розв'язку вихідного стохастичного рівняння, а також отримано оцінки на стохастичні похідні від варіацій за початковою умовою. Підвищення гладкості під дією гіббсової півгрупи отримано на основі нелінійної оцінки для виразу, що поєднує стохастичні похідні та варіації за початковою умовою.

РОЗДІЛ 5

РЕГУЛЯРНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ПОТОКІВ НА НЕКОМПАКТНИХ РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

В даному розділі розглядається нелінійне дифузійне рівняння

$$\delta\xi_t^x = A_0(\xi_t^x)dt + \sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha(\xi_t^x)\delta W_t^\alpha, \quad \xi_0^x = x \tag{5.1}$$

на некомпактному орієнтованому C^∞-гладкому повному зв'язному рімановому многовиді M без краю. Вище δW^α позначає диференціали Стратоновича одновимірних незалежних вінерівських процесів W_t^α, $\alpha = 1, \dots, d$. Генератором такого стохастичного диференціального рівняння виступає оператор другого порядку

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha(A_\alpha f) + A_0 f, \tag{5.2}$$

у якого коефіцієнти A_0, A_α є глобально означені C^∞-гладкі векторні поля над M. Розв'язок рівняння (5.1) розуміється у стандартному сенсі [97, 99, 134].

Означення 5.1. Неперервний адаптований локально інтегрований процес ξ_t^x на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ називається *розв'язком рівняння* (5.1), якщо для будь-якої гладкої функції з компактним носієм

$f \in C_0^\infty(M)$ майже всюди виконана тотожність:

$$f(\xi_t^x) = f(x) + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^d (A_\alpha f)(\xi_s^x)\delta W_s^\alpha + \int_0^t (\widetilde{A}_0 f)(\xi_s^x) ds, \tag{5.3}$$

де $\widetilde{A}_0 = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \nabla_{A_\alpha} A_\alpha$. Для того, щоб дослідити питання щодо збереження та підвищення гладкості під дією півгрупи з генератором $\mathcal{L}$, необхідно довести аналог представлення (3.14) на многовиді M. Це, в свою чергу, вимагає геометрично інваріантного (тобто інваріантного відносно заміни координат в будь-якій локальній карті) означення варіації за початковою умовою та її норми.

При стандартному підході до задачі регулярності за початковою умовою розв'язок дифузійного рівняння (5.1) розглядається як випадкове відображення: $M \ni x \to \xi_t^x \in M$, і похідна високого порядку за початковою умовою x розуміється як процес $d_x^n \xi_t^x$. При цьому оператор диференціювання $d\colon TM \to TM$ задається на дотичному просторі TM многовиду наступним чином: для довільної гладкої кривої $\mathfrak{z}\colon [-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\mathfrak{z}(0) = x$, та відображення $f\colon M \to M$ має бути виконана рівність $\dfrac{df(\mathfrak{z}(\varepsilon))}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = df_{\mathfrak{z}(0)}[\mathfrak{z}'(0)]$.

При такому підході варіаційні процеси високого порядку задаються у дотичних просторах вищого порядку $T_x^n M$, $T_{\xi_t^x}^n M$ в сенсі наступної комутативної діаграми

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_x & \xrightarrow{T} & T_x M & \xrightarrow{T} & T_x^2 M & \xrightarrow{T} & \dots & \xrightarrow{T} & T_x^n M \\
\downarrow \xi_t & & \downarrow d\xi_t & & \downarrow d^2\xi_t & & & & \downarrow d^n\xi_t \\
M_{\xi_t^x} & \xrightarrow{T} & T_{\xi_t^x} M & \xrightarrow{T} & T_{\xi_t^x}^2 M & \xrightarrow{T} & \dots & \xrightarrow{T} & T_{\xi_t^x}^n M
\end{array}$$

Проте необхідно зауважити, що лише для першого порядку дотичний оператор $d\colon TM \to TM$, який співпадає з частинною похідною, є тензор-інваріантним. Для вищого порядку необхідно вводити так звані коваріантні похідні для збереження інваріантності.

Додаткові складності виникають у випадку стохастичних дифузійних рівнянь, розв'язки яких принципово не можуть бути кусково- гладкими відображеннями. Для таких рівнянь були запропоновані різній підходи коректного означення розв'язів відповідних рівняння на многовиді, та означення їх варіацій за початковими умовами. Зокрема, з одного боку були запропоновані спеціальні так звані розшарування Іто, також використовувалось представлення розв'язку рівняння в термінах інтеграла Стратоновича [9, 97].

У відомих підходах до задачі гладкості стохастичного диференціального рівняння за початковою умовою [4, 9, 132, 192] припускалася компактність многовиду або існування рівномірного експоненційного атласу, у локальних координатних околах якого задачу регулярності можна звести до локальнних оцінок на різницевий вираз для частинних похідних

$$\frac{\partial_x^{(n)}\xi_t^{x+\varepsilon h} - \partial_x^{(n)}\xi_t^x}{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{\dim M} h^i \frac{\partial(\partial_x^{(n)}\xi_t^x)}{\partial x^i}. \tag{5.4}$$

Проте такий підхід є геометрично неінваріантним і приводить до умов глобальної обмеженості геометрії многовиду або коефіцієнтів рівняння. Отримані у такий спосіб умови регулярності розв'язку за початковою умовою полягають у глобально ліпшицевих припущеннях на коефіцієнти рівняння A_0, A_α та рівномірних оцінках на кривину многовиду з одночасною обмеженістю всіх їх похідних.

Окремо слід сказати про дослідження Х. Куніти [154], які мають геометрично інваріантний характер, проте дають лише якісну відповідь про гладкість розв'язку стохастичного диференціального рівняння за початковою умовою і не дають можливості виписати кількісні оцінки на варіації високих порядків, які б в подальшому можуть бути використані при дослідженні гладких властивостей асоційованої з стохастичним рівнянням півгрупи.

В цьому розділі дисертації доведено співвідношення, що пов'язують коваріантні похідні початкової функції та півгрупи, що діє на неї. В результаті виникають нові геометричні об'єкти $\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x$, які включають в себе варіації високого порядку за початковою умовою x процесу ξ_t^x і одночасно мають інваріантну тензорну властивість.

Виявляється, що використання такого означення варіацій і введення поняття *змішаного тензора* за змінними (x, ξ_t^x) дозволяє в інваріантній формі виписати варіаційні рівняння для процесу ξ_t^x і визначити місце кривини многовиду в коефіцієнтах варіаційних рівнянь. Крім того, поняття змішаного тензора природним чином приводить до визначення інваріантної норми варіації і дає можливість отримувати необхідні оцінки на їх поведінку у випадку, коли многовид не є компактним.

Проте найважливішим наслідком введення поняття змішаного тензора та $\mathbb{V}^{(n)}$-варіацій процесу ξ_t^x є інваріантне представлення похідних півгрупи P_t асоційованої з нелінійним рівнянням (5.1):

$$(P_t f)(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^x). \tag{5.5}$$

Дійсно, застосування коваріантної похідної першого порядку до (5.5) дає

$$\nabla_k P_t f(x) = \frac{\partial}{\partial x^k} \mathbf{E} f(\xi_t^x) = \mathbf{E} \frac{\partial f(\xi_t^x)}{\partial \xi^m} \frac{\partial (\xi_t^x)^m}{\partial x^k}. \tag{5.6}$$

Це представлення є інваріантним відносно локальної заміни координат, оскільки в (5.6) варіації першого порядку $\dfrac{\partial (\xi_t^x)^m}{\partial x^k}$ за початковою умовою є ковекторним полем за індексом k відносно координатних перетворень

$(x) \to (x')$ в околі початкового даного x та векторним полем за індексом m відносно заміни локальних координат $(\xi) \to (\xi')$ в околі "кінцевої" точки, в якій знаходиться процес ξ_t^x, що стартує з x.

Щоб знайти інваріантне представлення для похідних півгруп високих порядків, спочатку обрахуємо коваріантну похідну другого порядку

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j P_t f(x) &= \{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial}{\partial x^h}\} P_t f(x) = \\ &= \mathbf{E}\{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial}{\partial x^h}\} f(\xi_t^x) = \\ &= \mathbf{E}\{\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^m}\frac{\partial^2 \xi^m}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^n}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^n}{\partial \xi^j} - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^m}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h}\},\end{aligned} \tag{5.7}$$

де $\Gamma_{k\ j}^{\ h}$ позначає символ Кристофеля ріманової зв'язності. Сформувавши коваріантні похідні f у правій частині (5.7), використовуючи

$$\begin{aligned}&\nabla_\ell^\xi f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^\ell} f(\xi),\\ &\nabla_m^\xi \nabla_n^\xi f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi^m}\frac{\partial}{\partial \xi^n} f(\xi) - \Gamma_{m\ n}^{\ \ell}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^\ell} f(\xi)\end{aligned}$$

перепишемо (5.7) у вигляді:

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j P_t f(x) = \mathbf{E}\Big\{ &\Big(\nabla_m^\xi \nabla_n^\xi f(\xi) + \Gamma_{m\ n}^{\ \ell}(\xi)\nabla_\ell^\xi f(\xi)\Big)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j} + \\ &+ \nabla_m^\xi f(\xi)\big(\frac{\partial^2 \xi^m}{\partial x^k \partial x^j} - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h}\big)\Big\} =\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{E}\Big\{\nabla_m^\xi \nabla_n^\xi f(\xi)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^j} + \\ &+ \nabla_m^\xi f(\xi)\Big(\frac{\partial^2 \xi^m}{\partial x^k \partial x^j} - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h} + \Gamma_{\ell\ n}^{\ m}(\xi)\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^j}\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Перший доданок $\nabla^\xi \nabla^\xi f \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$, очевидно, є інваріантним відносно перетворень координат $(x) \to (x')$ та $(\xi) \to (\xi')$. Якщо згрупувати перший і другий доданок у дужках в формулі (5.9), то він матиме вигляд:

$$\nabla^x_k(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}) + \Gamma_{\ell\ h}^{\ m}(\xi)\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}. \tag{5.10}$$

в термінах коваріантної похідної по змінній x і, очевидно, буде інваріантним відносно перетворень $(x) \to (x')$ при будь-якому фіксованому ξ. Якщо згрупувати перший і третій доданок у дужках у формулі (5.9), і використати, що $\dfrac{\partial}{\partial x^k} = \dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\dfrac{\partial}{\partial \xi^\ell}$, то цей вираз набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^k}(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}) - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h} + \Gamma_{\ell\ h}^{\ m}(\xi)\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^j} = \\
&= \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial \xi^\ell}(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}) - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h} + \Gamma_{\ell\ h}^{\ m}(\xi)\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^j} = \\
&= \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}\nabla^\xi_\ell(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}) - \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\frac{\partial \xi^m}{\partial x^h},
\end{aligned} \tag{5.11}$$

і очевидно, що він є інваріантним відносно координатних перетворень $(\xi) \to (\xi')$ при фіксованому x. Проте виявляється, що вираз в дужках в (5.9) буде інваріантним тензором, якщо розглядати одночасно перетворення відносно x та ξ координат, тому є підстави ввести новий об'єкт, який можна назвати варіацією процесу ξ^x_t.

Для множини індексів $\gamma = \{k_1, \dots, k_n\}$ *варіацією процесу* ξ^x_t порядку $|\gamma|$ називається процес $\mathbb{V}_\gamma \xi^x_t$, який задається наступними рекурентними співвідношеннями [61, означення 1]:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_k(\xi^x_t)^m = \dfrac{\partial (\xi^x_t)^m}{\partial x^k}, \\ \mathbb{V}_k(\mathbb{V}_\gamma(\xi^x_t)^m) = \nabla^x_k(\mathbb{V}_\gamma(\xi^x_t)^m) + \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi^x_t)\mathbb{V}_\gamma(\xi^x_t)^p\dfrac{\partial (\xi^x_t)^q}{\partial x^k}, \end{cases} \tag{5.12}$$

де $\nabla^x_k(\mathbb{V}_\gamma \xi^m)$ позначає класичну коваріантну похідну по змінній x

$$\nabla^x_k(\mathbb{V}_\gamma \xi^m) = \partial^x_k(\mathbb{V}_\gamma \xi^m) - \sum_{j\in\gamma}\Gamma_{k\ j}^{\ h}(x)\mathbb{V}_{\gamma|_{j=h}}\xi^m \tag{5.13}$$

та $\mathbb{V}_{\gamma|_{j=h}}\xi^m$ означає заміну індексу j у наборі індексів γ на h. Індекси m, p, q відносяться до координатних околів точки, де знаходиться процес

ξ_t^x, а індекси k, j, h до координатних околів початкової точки x. Тензорна інваріантність цього об'єкта була доведена в [48].

Фактично, таким чином введена варіація є векторним полем за змінною ξ_t^x та ковекторним полем $|\gamma|$-го порядку по змінній x:

$$\mathbb{V}^{(n)}\xi_t^x = \{\mathbb{V}_\gamma(\xi_t^x)^m\}_{|\gamma|=n} \in T_{\xi_t^x}M \otimes (T_x^*M)^{\otimes n}.$$

Запропонований підхід дає можливість дати інваріантне означення норми такої варіації наступним чином:

$$\|\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x\|^2 = g_{mn}(\xi_t^x)\left[\prod_{s=1}^{j} g^{i_s k_s}(x)\right]\mathbb{V}_{i_1,\dots,i_j}\xi_t^m \cdot \mathbb{V}_{k_1,\dots,k_j}\xi_t^n, \tag{5.14}$$

де g_{mn} та g^{ik} позначають відповідно метричний і обернений метричний тензори многовиду. Введення такої норми дозволяє коректно ставити задачу про оцінки та поведінку варіацій і використовувати їх при доведенні гладких властивостей асоційованої з процесом ξ_t^x півгрупи.

Використання варіацій $\mathbb{V}_\gamma\xi_t^x$ дає можливість отримати наступні інваріантні представлення для стандартних коваріантних похідних півгрупи (див. теорему 5.17):

$$\nabla_\gamma^x P_t f(x) = \sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_s=\gamma} \mathbf{E}\left(\nabla^\xi_{\{j_1,\dots,j_s\}} f\right)(\xi_t^x)\,\mathbb{V}_{\gamma_1}\xi_t^{j_1}\dots\mathbb{V}_{\gamma_s}\xi_t^{j_s}, \tag{5.15}$$

де використано позначення $\nabla_\gamma^x = \nabla_{k_1}^x \dots \nabla_{k_n}^x$ для $\gamma = \{k_1, \dots, k_n\}$ для коваріантних похідних.

Таким чином, строгий аналіз властивостей півгрупи вихідного стохастичного диференціального рівняння (5.1) вимагає дослідження властивостей введених вище варіацій від його розв'язків.

5.1 Тензори від змішаних координат (x, ξ_t^x) та рекурентна форма варіаційних рівнянь високих порядків

Для того, щоб знайти рівняння, яким мають задовольняти варіації високих порядків необхідно ввести декілька означень.

Означення 5.2. Скажемо, що об'єкт $u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)}$ є *змішаним тензором* відносно координатних перетворень $(x) \to (x')$ і $(\phi) \to (\phi')$, якщо його координати

$$u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)} = u^{i_1 \ldots i_p/\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{j_1 \ldots j_q/\beta_1 \ldots \beta_s}$$

утворюють $T^{p,q}_x M$ тензор за мульти-індексами $(i) = (i_1, \ldots, i_p)$ та $(j) = (j_1, \ldots, j_q)$ відносно локальних координат (x^k) та утворюють $T^{r,s}M$ тензор за мульти-індексами $(\alpha), (\beta)$ відносно локальних координат (ϕ^m). Тобто при одночасній заміні локальних координат $(x^k) \to (x^{k'})$ і $(\phi^m) \to (\phi^{m'})$ маємо наступний закон перетворення:

$$u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial \phi^{(\alpha')}} \frac{\partial \phi^{(\beta')}}{\partial \phi^{(\beta)}} u^{(i'/\alpha')}_{(j'/\beta')} \tag{5.16}$$

з відповідними якобіанами $\dfrac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} = \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \dfrac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}$, $\dfrac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial \phi^{(\alpha')}} = \dfrac{\partial \phi^{\alpha_1}}{\partial \phi^{\alpha'_1}} \ldots \dfrac{\partial \phi^{\alpha_s}}{\partial \phi^{\alpha'_s}}$.

Надалі без спеціального зауваження використовується стандартна в диференціальній геометрії домовленість про сумування по верхнім та нижнім індексам, що співпадають.

Простим прикладом змішаного тензора є добуток двох тензорів $u^{(\alpha)}_{(\beta)}(\xi_t^x) v^{(i)}_{(j)}(x)$, які задані в околах точок (x) і (ξ_t^x) відповідно. Іншим прикладом таких тензорів будуть дають варіації $\mathbb{V}_{j_1} \ldots \mathbb{V}_{j_k} (\xi_t^x)^m$.

Тепер припустимо, що (ϕ^m)-координати змішаного тензора ефективним чином залежать від координат (x^k). Тоді можна ввести аналог коваріантної похідної змішаного тензора за змінною x.

Означення 5.3. $\mathbb{V}$-*похідна* змішаного тензора задається наступним чином:

$$\mathbb{V}_k u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)} = \frac{\partial}{\partial x^k} u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)} + \sum_{s\in(i)} \Gamma_k{}^s{}_h(x) u^{(i/\alpha)|_{s=h}}_{(j/\beta)} - \sum_{s\in(j)} \Gamma_k{}^h{}_s(x) u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)|_{s=h}} + \tag{5.17}$$

$$+ \sum_{\rho\in(\alpha)} \Gamma_\sigma{}^\rho{}_\delta(\phi(x)) u^{(i/\alpha)|_{\rho=\sigma}}_{(j/\beta)} \frac{\partial \phi^\delta}{\partial x^k} - \sum_{\rho\in(\beta)} \Gamma_\rho{}^\sigma{}_\delta(\phi(x)) u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)|_{\rho=\sigma}} \frac{\partial \phi^\delta}{\partial x^k}. \tag{5.18}$$

Вище $(i/a)|_{\rho=\sigma}$ означає, що в мулти-індексі $(a) = (a_1, \dots, a_\ell)$ замість одного з індексів вставлено індекс σ та використана стандартна домовленість про сумування по нижнім та верхнім індексам.

Рядок (5.17) в цьому означенні співпадає з означенням коваріантної похідної тензора за координатами (x^k), рядок (5.18), фактично, відповідає за те, що вираз в цілому є тензором відносно перетворення координат (ϕ^m). Тензорний характер $\mathbb{V}$-похідної перевіряється безпосереднім підрахунком. При цьому $\mathbb{V}$-похідна задає тензор більшої валентності і має місце наступний закон перетворення:

$$\mathbb{V}_k u^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial \phi^{(\alpha')}} \frac{\partial \phi^{(\beta')}}{\partial \phi^{(\beta)}} \mathbb{V}_{k'} u^{(i'/\alpha')}_{(j'/\beta')}.$$

Ця властивість є наслідком закону перетворення коефіцієнтів ріманової зв'язності [48]. Важлива в подальшому властивість $\mathbb{V}$-похідної полягає у наступному законі суперпозиції: якщо $u^{(\alpha)}_{(\beta)}$ є звичайним тензором на многовиді M, то

$$\mathbb{V}_k u^{(\alpha)}_{(\beta)}(\phi(x)) = (\nabla_\ell u^{(\alpha)}_{(\beta)})(\phi(x)) \frac{\partial \phi^\ell}{\partial x^k}. \tag{5.19}$$

Ця властивість також перевіряється безпосереднім обчисленням. Застосуємо її для того, щоб отримати вигляд рівняння, якому мають задовольняти варіації високих порядків. Продиференціюємо рівняння (5.1) по початковій умові x:

$$\delta(\frac{\partial \xi_t^m}{\partial x^k}) = (\frac{\partial}{\partial x^k} A_\alpha^m(\xi_t))\delta W_t^\alpha + (\frac{\partial}{\partial x^k} A_0^m(\xi_t))dt. \tag{5.20}$$

Додаючи та віднімаючи необхідні члени з коефіцієнтами зв'язності $\Gamma(\xi)$ у рівнянні (5.20) та відокремлюючи члени з $\mathbb{V}$-похідною векторних полів $A_0(\xi_t^x)$, $A_\alpha(\xi_t^x)$, отримаємо:

$$\delta(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}) = (\mathbb{V}_k A_\alpha^m(\xi) - \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) A_\alpha^p \frac{\partial \xi^q}{\partial x^k})\delta W^\alpha + (\mathbb{V}_k A_0^m(\xi) - \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) A_0^p \frac{\partial \xi^q}{\partial x^k})dt.$$

Після згрупування членів з коефіцієнтами зв'язності та використання її симетричності $\Gamma_{p\ q}^{\ m} = \Gamma_{q\ p}^{\ m}$, отримаємо:

$$\delta(\frac{\partial \xi_t^m}{\partial x^k}) = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t) \frac{\partial \xi_t^p}{\partial x^k} \delta \xi_t^q + \mathbb{V}_k(A_\alpha^m(\xi_t))\delta W_t^\alpha + \mathbb{V}_k(A_0^m(\xi_t))dt, \tag{5.21}$$

оскільки сам процес ξ_t^x задовольняє рівняння (5.1). Таким чином, з точністю до паралельного переносу (який задається виразом, що містить коефіцієнти зв'язності) рівняння на варіацію першого порядку задається рівнянням, коефіцієнти якого утворені як $\mathbb{V}$-похідні від коефіцієнтів вихідного рівняння. Це спостереження буде використано в подальшому для обчислення варіаційних рівнянь високих порядків.

Теорема 5.4. [61, теорема 7] Припустимо, що рівняння на $\mathbb{V}$-варіацію $\mathbb{V}_\gamma \xi^m, |\gamma| \geq 1$ має вигляд

$$\delta(\mathbb{V}_\gamma \xi^m) = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta \xi^q + M_{\gamma\ i}^{\ m} \delta W^i + N_\gamma^m dt. \tag{5.22}$$

Тоді варіація наступного порядку $\mathbb{V}_k \mathbb{V}_\gamma \xi^m = \mathbb{V}_{\gamma \cup \{k\}}^x \xi^m$ задовольняє рівняння:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{V}_{\gamma \cup \{k\}} \xi^m) = &- \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_{\gamma \cup \{k\}} \xi^p)\delta \xi^q + R_{p\ \ell q}^{\ m}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p) \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} \delta \xi^q + \\ &+ (\mathbb{V}_k M_{\gamma\ i}^{\ m})\delta W^i + (\mathbb{V}_k N_\gamma^m)dt. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Тобто коефіцієнти варіаційних рівнянь рекурентно пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} M_{\gamma\cup\{k\}}{}^{m}{}_{i} = \mathbb{V}_k M_\gamma{}^m{}_i + R_p{}^m{}_{\ell q}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} A_i^q; \\ N_{\gamma\cup\{k\}}^m \quad = \mathbb{V}_k N_\gamma^m + R_p{}^m{}_{\ell q}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\dfrac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} A_0^q, \end{cases} \tag{5.24}$$

де R позначає тензор ріманової кривини многовиду:

$$R_i{}^j{}_{kl} = \frac{\partial \Gamma_i{}^j{}_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_i{}^j{}_l}{\partial x^k} + \Gamma_i{}^p{}_k \Gamma_p{}^j{}_l - \Gamma_i{}^p{}_l \Gamma_p{}^j{}_k. \tag{5.25}$$

Доведення. Для спрощення позначень нижче не буде вказуватись залежність коефіцієнтів зв'язності Γ від змінної ξ_t^x, проте залежність від змінної x вказується завжди. Використаємо означення $\mathbb{V}$-похідної

$$\int \delta(\mathbb{V}_k \mathbb{V}_\gamma \xi^m) = \int \delta\{\, \partial_k^x \mathbb{V}_\gamma \xi^m + \Gamma_p{}^m{}_q(\xi)\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\mathbb{V}_\gamma \xi^q - \sum_{s\in\gamma} \Gamma_k{}^h{}_s(x)\mathbb{V}_{\gamma|_{s=h}} \xi^m\}. \tag{5.26}$$

До першого доданку в (5.26) застосуємо припущення (5.22), тоді застосовуючи властивості інтеграла Стратоновича

$$\int X\,\delta(\int Y\,\delta Z) = \int XY\,\delta Z, \tag{5.27}$$

отримаємо

$$(5.26)_1 = \int \delta(\partial_k^x \int \{-\Gamma_p{}^m{}_q(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta \xi^q + M_\gamma{}^m{}_i \delta W^i + N_\gamma^m dt\}) =$$

$$= -\int \frac{\partial \Gamma_p{}^m{}_q}{\partial \xi^\ell}\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta \xi^q - \int \Gamma_p{}^m{}_q(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta(\frac{\partial \xi^q}{\partial x^k}) - \tag{5.28}$$

$$- \int \Gamma_p{}^m{}_q(\partial_k^x \mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta \xi^q + \int \{\partial_k^x M_\gamma{}^m{}_i \delta W^i + \partial_k^x N_\gamma^m dt\}. \tag{5.29}$$

Другий доданок в (5.26) перепишемо використовуючи формулу Стратоновича-Іто, припущення (5.22) та властивості інтеграла, в результаті отримаємо:

$$(5.26)_2 = \int \Gamma_p{}^m{}_q \frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\delta(\mathbb{V}_\gamma \xi^q) + \int \Gamma_p{}^m{}_q(\mathbb{V}_\gamma \xi^q)\delta(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}) +$$

$$+\int \frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}(\mathbb{V}_\gamma \xi^q)\delta\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) =$$

$$= \int \Gamma_{p\ q}^{\ m}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\{-\Gamma_{\ell\ s}^{\ q}(\mathbb{V}_\gamma \xi^\ell)\delta\xi^s + M_{\gamma\ i}^{\ m}\delta W^i + N_\gamma^q dt\}+ \tag{5.30}$$

$$+\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_\gamma \xi^q)\delta(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}) + \int \frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}(\mathbb{V}_\gamma \xi^q)\frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell}\delta\xi^\ell. \tag{5.31}$$

До останнього доданку в (5.26) також застосуємо припущення (5.22):

$$(5.26)_3 = -\sum_{s\in\gamma}\int \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x)\{-\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)(\mathbb{V}_{\gamma|_{s=h}}\xi^p)\delta\xi^q + M_{\gamma|_{s=h}\ i}^{\ m}\delta W^i + N_{\gamma|_{s=h}}^m dt\}. \tag{5.32}$$

Перетворимо перший вираз в (5.29) використовуючи означення $\mathbb{V}$-похідної:

$$(5.29)_1 = -\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\partial_k^x \mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta\xi^q = -\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_k\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta\xi^q +$$

$$+\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}\Gamma_{\ell\ n}^{\ p}\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}(\mathbb{V}_\gamma \xi^n)\delta\xi^q - \sum_{s\in\gamma}\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)\Gamma_{k\ s}^{\ h}(x)(\mathbb{V}_{\gamma|_{s=h}}\xi^p)\delta\xi^q. \tag{5.33}$$

Зауважимо, що другий вираз в (5.28) скорочується з першим виразом в (5.31), третій вираз в (5.33) скорочується з першим виразом в (5.32), а другий і третій доданки в (5.29), (5.30) та (5.32) задають $\mathbb{V}$-похідні коефіцієнтів M і N. Перепозначаючи індекси сумування у доданках, що залишилися, та збираючи разом члени з коефіцієнтами зв'язності, отримаємо:

$$(5.26) = -\int \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_k\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta\xi^q + \int\{\mathbb{V}_k M_{\gamma\ i}^{\ m}\delta W^i + \mathbb{V}_k N_\gamma^m dt\}+$$

$$+\int \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k}(\mathbb{V}_\gamma \xi^p)\delta\xi^q\{\frac{\partial \Gamma_{\ell\ p}^{\ m}(\xi)}{\partial \xi^q} - \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)}{\partial \xi^\ell} + \Gamma_{s\ q}^{\ m}(\xi)\Gamma_{\ell\ p}^{\ s}(\xi) - \Gamma_{\ell\ s}^{\ m}(\xi)\Gamma_{p\ q}^{\ s}(\xi)\},$$

що доводить твердження теореми. □

5.2 Побудова розв'язків нелінійних дифузійних рівнянь на многовидах

Перш ніж дослідити регулярні властивості варіаційних рівнянь, необхідно отримати достатні умови існування розв'язків вихідного рівняння (5.1) заданого на некомпактному рімановому многовиді. У порівнянні з випадком евклідового простору основна складність полягає у відсутності глобальної системи координат. Тому розв'язки таких рівнянь будуються за допомогою процедури склеювання локальних розв'язків заданих в координатних околах U многовиду за допомогою інтегральних рівнянь на випадкових інтервалах: $t \in (\tau_{in}, \tau_{out})$

$$\begin{cases} \xi^i_{t\wedge\tau_{out}}(x) = \xi^i_{\tau_{in}}(x) + \int\limits_{\tau_{in}}^{t\wedge\tau_{out}} A^i_0(\xi^x_s)ds + \sum\limits_{\alpha=1}^{d} \int\limits_{\tau_{in}}^{t\wedge\tau_{out}} A_\alpha(\xi^x_s)\delta W^\alpha_s, \\ \xi^x_0 = x, \end{cases} \tag{5.34}$$

де τ_{in}, τ_{out} позначають момент входження процесу ξ^x_t в окіл U та виходу з нього. Отриманий таким чином розв'язок означений на деякому випадковому інтервалі $[0, \tau_\infty(\omega))$, проте не обов'язково для всіх $t \geq 0$. Взагалі кажучи, оскільки некомпактний многовид покривається нескінченною кількістю координатних околів, може виникнути ситуація коли процес ξ^x_t покидає довільний обмежений окіл U многовиду в скінченний момент часу τ_∞: $\forall U \subseteq M \;\; \xi^x_{\tau_\infty} \notin U$. В такому випадку розв'язок ξ^x_t може бути означений лише до моменту вибуху τ_∞.

В даному розділі досліджуються умови на коефіцієнти вихідного рівняння (5.1), за яких процес ξ^x_t не вибухає.

Нехай $o \in M$ позначає довільну фіксовану точкою многовиду, а $\rho(o, x)$

– довжину найкоротшої геодезичної $\mathfrak{z}$ між точками o та x.

$$\rho^2(o,x) = \inf\{\int\limits_0^1 |\dot{\mathfrak{z}}(\ell)|^2 d\ell,\ \mathfrak{z}(0) = o,\ \mathfrak{z}(1) = x\}, \tag{5.35}$$

де $\dot{\mathfrak{z}}(\ell) = \dfrac{\partial}{\partial \ell}\mathfrak{z}(\ell)$. Надалі припустимо, що коефіцієнти рівняння (5.1) задовольняють наступні умови:

1. $\forall\, C \in \mathbb{R}_+ \ \exists\ K_C \in \mathbb{R}^1$ що $\forall\, x \in M$

$$\langle\, \widetilde{A}_0(x), \nabla^x \rho^2(o,x)\rangle + C\sum_{\alpha=1}^{d} \|A_\alpha(x)\|^2 \le K_C(1+\rho^2(o,x)); \tag{5.36}$$

2. $\forall\, C, C' \in \mathbb{R}_+ \ \exists\ K_C \in \mathbb{R}^1$ така, що $\forall\, x \in M$, $\forall\, h \in T_xM$

$$\begin{aligned} &\langle\, \nabla\widetilde{A}_0(x)[h], h\,\rangle + C\sum_{\alpha=1}^{d} \|\nabla A_\alpha(x)[h]\|^2 - \\ &- C'\sum_{\alpha=1}^{d} \langle\, R_x(A_\alpha(x), h)A_\alpha(x), h\,\rangle \le K_C\|h\|^2, \end{aligned} \tag{5.37}$$

   де $[R(A,h)A]^m = R_{p\ \ \ell q}^{\ m} A^p A^\ell h^q$ позначає оператор кривини, побудований по тензору кривини (5.25). Позначення $\nabla H[h]$ використовується для коваріантної похідної у напрямку h, що задається формулою

$$(\nabla H(x)[h])^i = \nabla_j H^i(x)\, h^j. \tag{5.38}$$

Зауваження 5.5. 1. Для $M = \mathbb{R}^n$ з глобальною евклідовою системою координат $(x^i)_{i=1}^n$ оператор кривини відсутній. У цьому випадку $\rho(x,y) = \|x-y\,\|$ і можна вибрати точку $o = 0$. Тоді умови (5.36)-(5.37) зводяться до класичних умов [17, 179]

коерцитивності: $\langle\, \widetilde{A}_0(x), x\,\rangle + C\sum_{\alpha=1}^{d} \|\, A_\alpha(x)\,\|^2 \le K_C(1+\|x\|^2)$;

та дисипативності: $\langle\, \nabla\widetilde{A}_0[h], h\,\rangle + C\sum_{\alpha=1}^{d} \|\, \nabla A_\alpha[h]\,\|^2 \le K_C\,\|h\|^2$.

У цьому сенсі наведені вище умови є узагальненням на випадок многовиду стандартних умов для нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь, отриманих в [16, 17, 179].

Теорема 5.6. [62, теорема 1] Нехай виконані умови (5.36)–(5.37), а також для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існують такі сталі $\varkappa_0$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_R$, що для всіх $j = 1, \dots, n$ і $x \in M$:

$$\begin{aligned} \|(\nabla)^j \widetilde{A}_0(x)\| &\le (1+\rho(x,o))^{\varkappa_0}, \\ \|(\nabla)^j A_\alpha(x)\| &\le (1+\rho(x,o))^{\varkappa_\alpha}, \\ \|(\nabla)^j R(x)\| &\le (1+\rho(x,o))^{\varkappa_R}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Тоді рівняння (5.1) має єдиний розв'язок, що не вибухає у скінченний момент часу та задовольняє оцінку:

$$\mathbf{E}\,\rho^2(o,\xi_t^x) \le e^{Kt}(1+\rho^2(o,x)). \tag{5.40}$$

Доведення. Спочатку локалізуємо рівняння (5.1). Для цього для довільної відкритої множини $U \subseteq M$ з компактним замиканням $\overline{U}$ та функції ζ^U з компактним носієм такої, що $\sqrt{\zeta^U} \in C_0^\infty(M,[0,1])$ і $\zeta^U(z) = 1$ для $z \in \overline{U}$ та $0 \le \zeta^U < 1$ ззовні замикання $\overline{U}$, розглянемо оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^U f &= \zeta^U \mathcal{L} f = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \sqrt{\zeta^U} A_\alpha(\sqrt{\zeta^U} A_\alpha f) + \zeta^U A_0 f - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \sqrt{\zeta^U}(A_\alpha \sqrt{\zeta^U}) A_\alpha f, \end{aligned}$$

що відповідає локалізованому дифузійному рівнянню:

$$\begin{aligned} \delta\xi_t^U(x) = \Big(\zeta^U A_0 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \sqrt{\zeta^U}(A_\alpha\sqrt{\zeta^U})A_\alpha\Big)(\xi_s^x)ds + \\ + \sum_{\alpha=1}^d \sqrt{\zeta^U}(\xi_t^x)A_\alpha(\xi_t^x)\delta W_t^\alpha, \quad \xi_0^x = x. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Рівняння (5.41) має глобально ліпшицеві коефіцієнти з усіма обмеженими похідними, отже має єдиний розв'язок, що є C^∞-регулярним за початковою умовою x [4, 132, 154, 192]. Оскільки для початкових умов x ззовні носія ζ^U маємо $\xi_t^U(x) = x$ для всіх $t \geq 0$, півгрупа $(P_t^U f)(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^U(x))$, асоційована з рівнянням (5.41), зберігає простір $C_{0,+}^\infty(M)$ невід'ємних C^∞ – регулярних функцій з компактним носієм.

Для доведення теореми 5.6 необхідно декілька допоміжних тверджень.

Лема 5.7. $\exists\, K \ \ \forall \zeta^U \in C_0^\infty(M,[0,1]),\ \zeta^U\Big|_{\overline{U}} = 1 \ \ \forall \varphi \in C_{0,+}^\infty(M)$

$$\int_M ([\mathcal{L}^U]^*\varphi)\rho^2(o,x)d\sigma(x) \leq K \int_M \varphi(x)(1+\rho^2(o,x))d\sigma(x), \tag{5.42}$$

де $d\sigma$ позначає ріманову міру на M, а $[\mathcal{L}^U]^*$ — спряжений оператор.

Доведення. Оскільки $[\mathcal{L}^U]^* = [\zeta^U\mathcal{L}]^* = \mathcal{L}^*\zeta^U$, оцінка (5.42) випливатиме з слабкої оцінки на оператор $\mathcal{L}$: $\quad \exists\, K \ \ \forall \psi \in C_{0,+}^\infty(M)$

$$\int_M (\mathcal{L}^*\psi(x))\rho^2(o,x)d\sigma(x) \leq K \int_M \psi(x)(1+\rho^2(o,x))d\sigma(x) \tag{5.43}$$

якщо вибрати $\psi = \zeta^U\varphi$ і використати, що $0 \leq \zeta^U \leq 1$. Вище $\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha=1}^{d}[A_\alpha^*]^2 + A_0^*$, де X^* — спряжене векторне поле до векторного поля X означається наступним чином: $X^*f = -(\operatorname{div} X)f - Xf$.

Введемо позначення z^ε для диференціального потоку вздовж поля X: $z^\varepsilon = z + \int_0^\varepsilon X(z^s)ds$. Щоб довести (5.43) спершу зауважимо, що для довільного гладкого векторного поля X, заданого у околі деякої точки z многовиду N та гладкої функції f на N мають місце представлення

$$Xf(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon Xf(z^s)ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{d}{ds}f(z^s)ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(z^\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon},$$

$$X(Xf)(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon ds\int_{-s}^{s} X(Xf)(z^\ell)d\ell = \tag{5.44}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon ds\int_{-s}^{s}\frac{d}{d\ell}(Xf)(z^\ell)d\ell = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\{(Xf)(z^s)-(Xf)(z^{-s})\}ds =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon \frac{d}{ds}\{f(z^s)+f(z^{-s})\}ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(z^\varepsilon)+f(z^{-\varepsilon})-2f(z)}{\varepsilon^2}.$$

Тому з компактності носія функції ψ в (5.43) випливає наступне представлення лівої частини в (5.43):

$$\int_M(\mathcal{L}^*\psi(x))\rho^2(o,x)d\sigma(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_M\psi(x)\left\{\frac{\rho^2(o,z_0^\varepsilon(x))-\rho^2(o,z_0^0(x))}{\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\rho^2(o,z_\alpha^\varepsilon(x))+\rho^2(o,z_\alpha^{-\varepsilon}(x))-2\rho^2(o,z_\alpha^0(x))}{\varepsilon^2}\right\}d\sigma(x), \tag{5.45}$$

де $z_0^\varepsilon(x), z_\alpha^\varepsilon(x)$ позначають зсув вздовж векторних полів A_0, A_α з початковими умовами $z_0^0(x)=x,\ z_\alpha^0(x)=x$.

Представлення (5.45) випливає з (5.44) та представлення для спряженого поля X^*, оскільки згідно формули Стокса $\int_{\partial D}X\cdot dS=\int_D \operatorname{div}X\,d\sigma$ приріст ріманового об'єму вздовж поля X дорівнює $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\frac{d\sigma(z_X^\varepsilon(x))}{d\sigma(x)} = (\operatorname{div}X)(x)$. Отже, для $\varphi,\psi\in C_0^\infty(M)$ маємо

$$\int_M(\mathcal{L}^*\psi)\varphi\,d\sigma = \int_M\psi(\mathcal{L}\varphi)\,d\sigma =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_M\psi(x)\left\{\frac{\varphi(z_0^\varepsilon(x))-\varphi(z_0^0(x))}{\varepsilon}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\varphi(z_\alpha^\varepsilon(x))+\varphi(z_\alpha^{-\varepsilon}(x))-2\varphi(z_\alpha^0(x))}{\varepsilon^2}\right\}d\sigma(x) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_M d\sigma(x)\cdot\varphi(x)\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\psi(z_0^{-\varepsilon}(x))\frac{d\sigma(z_0^{-\varepsilon}(x))}{d\sigma(x)}-\psi(x)\right]+\right. \tag{5.46}$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon^2}\sum_{\alpha=1}^{d}\left[\psi(z_\alpha^{-\varepsilon}(x))\frac{d\sigma(z_\alpha^{-\varepsilon}(x))}{d\sigma(x)}+\psi(z_\alpha^\varepsilon(x))\frac{d\sigma(z_\alpha^\varepsilon(x))}{d\sigma(x)}-\right.$$
$$\left.\left.-2\psi(z_\alpha^0(x))\frac{d\sigma(z_\alpha^0(x))}{d\sigma(x)}\right]\right\}.$$

На останньому кроці було використано зворотній зсув вздовж векторних полів $\{-A_0, -A_\alpha\}$. Якщо $\psi \in C_0^\infty(M)$ і векторні поля A_0, A_α є гладкими, то вираз у фігурних дужках в (5.46) збігається до $\mathcal{L}^*\psi$ рівномірно на M. З щільності множини функцій ψ випливає, що співвідношення (5.46) може бути замкнено, зокрема, до функцій такого ж класу гладкості, до якого належить $\rho^2(o,x)$. Виконуючи обернений зсув вздовж полів A_0, A_α, отримаємо представлення (5.45).

Оцінимо праву частину (5.45). В околі геодезичної $\gamma(\ell)$, $\ell \in [0,1]$ з $\gamma(0) = o$ до $\gamma(1) = x$, що мінімізує (5.35), розглянемо гладке векторне поле H. Введемо сім'ю кривих $[0,1]\times(-\delta,\delta) \ni (\ell,s) \to \gamma(\ell,s) \in M$ таких, що при $s = 0$ крива $\gamma(\ell,s)\big|_{s=0} = \gamma(\ell)$ дає геодезичну γ з початком в точці o та кінцевою точкою x, параметр s відповідає еволюції вздовж поля H:

$$\frac{\partial}{\partial s}\gamma(\ell,s) = H(\gamma(\ell,s)). \tag{5.47}$$

Зауважимо, що на відміну від класичних формул девіацій геодезичних для $s \neq 0$ криві $\{\gamma(\ell,s),\ \ell \in [0,1]\}$ не повинні бути геодезичними. Пізніше поле H буде вибрано таким чином, що $H(\ell,s) = \ell^2 A_0(\gamma(\ell,s))$ або $H(\ell,s) = \ell A_\alpha(\gamma(\ell,s))$ для різницевих виразів першого і другого порядку в (5.45) відповідно.

Лема 5.8. [62, лема 1]. Мають місце наступні оцінки

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon)) - \rho^2(o,x)}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2 d\ell + \int_0^\varepsilon\int_0^1 \Big|\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2\Big| d\ell\, ds, \tag{5.48}$$

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon)) + \rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,-\varepsilon)) - 2\rho^2(o,x)}{\varepsilon^2} \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2 d\ell + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon\int_0^1 \Big|\frac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot\gamma(\ell,s)|^2\Big| d\ell\, ds, \tag{5.49}$$

де використано позначення $\dot{\gamma}(\ell, s) = \dfrac{\partial}{\partial \ell}\gamma(\ell, s)$. Члени у правій частині (5.48)-(5.49) мають наступний вигляд у термінах поля H:

$$\frac{\partial}{\partial s}|\dot{\gamma}(\ell, s)|^2 = 2\,\langle\, \dot{\gamma}, \nabla H[\dot{\gamma}]\rangle, \tag{5.50}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot{\gamma}(\ell, \varepsilon)|^2 = |\nabla H[\dot{\gamma}]\,|^2 - \langle\, \dot{\gamma}, R(H, \dot{\gamma})H\rangle + \langle\, \dot{\gamma}, \nabla(\nabla_H H)[\dot{\gamma}]\rangle, \tag{5.51}$$

Третя похідна має представлення $\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot{\gamma}(\ell, s)|^2 = \langle\, \dot{\gamma}, \mathcal{D}[\dot{\gamma}]\rangle$ з виразом $\mathcal{D}$, що залежить від поля H, його третьої коваріантної похідної та від тензора кривини і його коваріантної похідної.

Доведення леми 5.8 приведено у додатку D, (див. лему D.1). Застосуємо лему 5.8 для оцінювання різницевих виразів (5.45). Виберемо $H_0(\ell, s) = \ell^2 A_0(\gamma_0(\ell, s))$ та $H_\alpha(\ell, s) = \ell A_\alpha(\gamma_\alpha(\ell, s))$ в з $\gamma_0(\ell, s)$, $\gamma_\alpha(\ell, s)$, генерованими векторними полями H_0, H_α. Тоді, оскільки $H(0, s) = 0$, точка $\gamma(0, s) = o$ для всіх $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, отже отримаємо

$$\frac{\rho^2(o, \gamma_0(1, \varepsilon)) - \rho^2(o, x)}{\varepsilon} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\rho^2(o, \gamma_\alpha(1, \varepsilon)) + \rho^2(o, \gamma_\alpha(1, -\varepsilon)) - 2\rho^2(o, x)}{\varepsilon^2} \le \tag{5.52}$$

$$\le \int_0^1 I(\dot{\gamma}(\ell, 0))d\ell + \int_0^\varepsilon \int_0^1 J(\dot{\gamma}(\ell, s))d\ell\, ds, \tag{5.53}$$

де

$$I(\dot{\gamma}) = 2\,\langle\, \nabla\Big(\ell^2 A_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\nabla_{\ell A_\alpha}[\ell A_\alpha]\Big)[\dot{\gamma}], \dot{\gamma}\,\rangle +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{d}\big\{|\nabla(\ell A_\alpha)[\dot{\gamma}]\,|^2 - \langle\, R(\ell A_\alpha, \dot{\gamma})\ell A_\alpha, \dot{\gamma}\,\rangle\big\},$$

$$J(\dot{\gamma}(\ell, s)) = |\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot{\gamma}_0(\ell, s)|^2| + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}|\frac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot{\gamma}(\ell, s)|^2|.$$

Використовуючи $\nabla\ell[\dot\gamma] = \dfrac{\partial\ell}{\partial\ell} = 1$ та $\nabla_{A_\alpha}\ell = \dfrac{\partial\ell}{\partial s} = 0$, маємо

$$\nabla(\nabla_{\ell A_\alpha}[\ell A_\alpha])[\dot\gamma] = \nabla_{\dot\gamma}(\ell^2\nabla_{A_\alpha}A_\alpha) = \ell^2\nabla(\nabla_{A_\alpha}A_\alpha)[\dot\gamma] + 2\ell\nabla_{A_\alpha}A_\alpha,$$

отже

$$\begin{aligned} I(\dot\gamma) = {} & 2\ell^2 \langle \nabla A_0[\dot\gamma], \dot\gamma \rangle + 4\ell \langle A_0, \dot\gamma \rangle + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{d} \Big\{ \ell^2 |\nabla A_\alpha[\dot\gamma]|^2 + 2\ell \langle A_\alpha, \nabla A_\alpha[\dot\gamma] \rangle + |A_\alpha|^2 \\ & - \ell^2 \langle R(A_\alpha, \dot\gamma)A_\alpha, \dot\gamma \rangle + \ell^2 \langle \nabla(\nabla_{A_\alpha}A_\alpha)[\dot\gamma], \dot\gamma \rangle + \\ & + 2\ell \langle \nabla_{A_\alpha}A_\alpha, \dot\gamma \rangle \Big\}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Застосовуючи оцінку

$$|\langle \nabla A_\alpha[\dot\gamma], A_\alpha \rangle| \le \frac{\ell}{2}|\nabla A_\alpha[\dot\gamma]|^2 + \frac{1}{2\ell}|A_\alpha|^2$$

маємо

$$\begin{aligned} I(\dot\gamma) \le {} & \ell^2 \Big(2 \langle \nabla \widetilde{A}_0[\dot\gamma], \dot\gamma \rangle + 2\sum_{\alpha=1}^{d} |\nabla A_\alpha[\dot\gamma]|^2 - \sum_{\alpha=1}^{d} \langle R(A_\alpha, \dot\gamma)A_\alpha, \dot\gamma \rangle \Big) + \\ & + 4\ell \langle \widetilde{A}_0(\gamma), \dot\gamma \rangle + 2\sum_{\alpha=1}^{d} |A_\alpha|^2. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Оскільки

$$\nabla^{\gamma(\ell)}\rho^2(o,\gamma(\ell)) = 2\rho(o,\gamma(\ell))\nabla^{\gamma(\ell)}\rho(o,\gamma(\ell)) = 2\ell\rho(o,x)\frac{\dot\gamma(\ell)}{\rho(o,x)} = 2\ell\dot\gamma,$$

тому

$$2\ell \langle \widetilde{A}_0(\gamma), \dot\gamma \rangle = \langle \widetilde{A}_0(\gamma), \nabla^{\gamma(\ell)}\rho^2(o,\gamma(\ell)) \rangle.$$

Нарешті, застосування умов (5.36)–(5.37) до (5.55), дає

$$\int\limits_0^1 I(\dot\gamma)d\ell \le \int_0^1 \Big\{ 2K_C\ell^2|\dot\gamma|^2 + K_{C'}(1+\rho^2(o,\gamma(\ell))) \Big\} d\ell \le K(1+\rho^2(o,x)), \tag{5.56}$$

де також використано, що крива $\gamma(\ell, 0) = \gamma(\ell)$ є геодезичною між o та x. Застосовуючи (5.50), (5.51) та аналогічне представлення для третьої похідної, доданок $J(\dot\gamma)$ в (5.53) оцінюється наступним чином:

$$J(\dot\gamma) \le T_0 \, |\dot\gamma_0(\ell, s)|^2 + \sum_{\alpha=1}^{d} T_\alpha \, |\dot\gamma_\alpha(\ell, s)|^2,$$

де T_0, T_α — деякі вирази, що залежать від коефіцієнтів вихідного рівняння та їх коваріантних похідних до третього порядку. Оскільки в (5.45) носій функції ψ є компактним, а границя береться в деякому околі точки x, тому без порушення загальності можна вважати, що крива $\gamma(\ell, s)$ належить обмеженій множині

$$Z_{\psi,o,\delta} = \{ y \in M \colon y \ \text{ належить деякій геодезичній, що поєднує} \quad \text{точки } o \text{ та } x \in B(\operatorname{supp}\psi, \delta) \,\}. \tag{5.57}$$

Отже

$$\int_0^1 J(\dot\gamma) d\ell \le \sup_{z \in Z_{\psi,o,\delta}} |\{T_0, T_\alpha\}(z)| \cdot \left(\int_0^1 |\dot\gamma_0(\ell, s)|^2 d\ell + \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^1 |\dot\gamma_\alpha(\ell, s)|^2 d\ell \right).$$

З врахуванням (5.50) інтеграл $v_s = \int_0^1 |\dot\gamma(\ell, s)|^2 d\ell$ оцінюється наступним чином

$$v_s \le v_0 + \int_0^s v'_\tau d\tau = \rho^2(o, x) + \int_0^s \int_0^1 \langle \nabla H[\dot\gamma(\ell, \tau)], \dot\gamma(\ell, \tau) \,\rangle \, d\ell \, d\tau \le$$
$$\le \rho^2(o, x) + \sup_{y \in Z_{\psi,o,\delta}} |\nabla H(y)| \cdot \int_o^s v_\tau d\tau,$$

що дає

$$v_s \le \rho^2(o, x) \exp\{s \sup_{y \in Z_{\psi,o,\delta}} |\nabla H|(y)\}.$$

Отже маємо

$$\int_0^\varepsilon \int_0^1 J(\dot\gamma) d\ell \, ds \le \varepsilon \, C \rho^2(o, x) \cdot$$

з деякою сталою C, що залежить від A_0, A_α, R та їх похідних. Об'єднуючи цю оцінку з (5.56) і (5.45), та прямуючи $\varepsilon \to 0+$ отримаємо (5.43), що завершує доведення леми 5.7. □

Для того, щоб завершити доведення теореми 5.6, необхідно нагадати ще одне означення з теорії випадкових процесів і довести наступну лему.

Процес X_t називається *супермартингалом* по відношенню до потоку σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, якщо для будь-якого $0 \le s \le t$ він задовольняє нерівність $\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \le X_s$, де $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_s)$ позначає умовне математичне сподівання по відношенню до σ-алгебри $\mathcal{F}_s$.

Лема 5.9. Нехай виконані умови коерцитивності і дисипативності (5.36)-(5.37) та (5.39), тоді існує незалежна від будь-якої множини $U \subseteq M$ стала K така, що процес

$$[1 + \rho^2(o, \xi_t^U(x))] - K \int_0^t [1 + \rho^2(o, \xi_s^U(x))] ds \tag{5.58}$$

є інтегрованим супермартингалом по відношенню до канонічного потоку σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, пов'язаного з d-мірним вінерівським процесом W_t^α, $\alpha = 1, \dots, d$ в (5.1).

Доведення леми 5.9. Перш за все зауважимо, що півгрупа P_t^U генерована процесом $\xi_t^U(x)$ (5.41), зберігає простори $C_{0,+}^\infty(M)$ додатних неперевно-диференційованих функцій з компактним носієм. Отже наступні інтегральні вирази є обмеженими, і з оцінки (5.43) випливає: $\forall\, \varphi \in C_{0,+}^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_M \varphi(x) \left\{ P_t^U (1 + \rho^2(o, \cdot)) \right\}(x) d\sigma(x) = \\
&\frac{d}{dt} \int_M \left\{ [P_t^U]^* \varphi \right\}(x) (1 + \rho^2(o, x)) d\sigma(x) = \\
&= \int_M [\mathcal{L}^U]^* \left\{ [P_t^U]^* \varphi \right\}(x) \cdot (1 + \rho^2(o, x)) d\sigma(x) =
\end{aligned}$$

$$= \int_M [\mathcal{L}]^* \left(\zeta^U(x) \left\{[P_t^U]^* \varphi\right\}(x)\right) \cdot (1+\rho^2(o,x)) d\sigma(x) \le$$
$$\le K \int\limits_M \left\{[P_t^U]^* \varphi\right\}(x) \cdot (1+\rho^2(o,x)) d\sigma(x) =$$
$$= K \int_M \varphi(x) \left\{P_t^U(1+\rho^2(o,\cdot))\right\}(x) d\sigma(x).$$

Вище також було використано компактність носія функції $\zeta^U \ge 0$, нерівність $\zeta^U \le 1$, властивість $\mathcal{L}1 = 0$, а також те, що функція $\psi = \zeta^U(x)\left\{[P_t^U]^*\varphi\right\}$ належить простору $C^\infty_{0,+}(M)$. Отже для будь-якої $\varphi \in C^\infty_{0,+}(M)$ маємо

$$\int_M \varphi(x) \cdot \left[P_t^U(1+\rho^2(o,\cdot))\right](x) d\sigma(x) \le$$
$$\le \int_M \varphi(x) \cdot \left((1+\rho^2(o,x)) + K \int_0^t \left[P_s^U(1+\rho^2(o,\cdot))\right](x) ds\right) d\sigma(x),$$

або його поточковий наслідок:

$$\left[P_t^U(1+\rho^2(o,\cdot))\right](x) \le (1+\rho^2(o,x)) + K \int_0^t \left[P_s^U(1+\rho^2(o,\cdot))\right](x) ds. \quad (5.59)$$

Використовуючи марківську властивість процесу $\xi_t^U(x)$, яка дає

$$(P_t^U f)(\xi_s^U(x)) = \mathbf{E}(f(\xi_{t+s}^U(x)) \,|\, \mathcal{F}_s), \quad t, s \ge 0, \quad (5.60)$$

для функції $h(x) = 1 + \rho^2(o,x)$ з (5.60) маємо:

$$\mathbf{E}\left(h(\xi_{t+\tau}^U(x)) \middle| \mathcal{F}_\tau\right) = (P_t^U h)(\xi_\tau^U(x)) \le h(\xi_\tau^U(x)) + K \int_0^t \left\{P_s^U h\right\}(\xi_\tau^U(x)) ds =$$
$$= h(\xi_\tau^U(x)) + K\,\mathbf{E}(\int_\tau^{t+\tau} h(\xi_s^U(x)) ds \,|\mathcal{F}_\tau). \quad (5.61)$$

Остання нерівність означає, що процес (5.58) є супермартингалом, оскільки супермартингальна властивість:

$$\mathbf{E}\left(h(\xi_{t+\tau}^U(x)) - K \int_0^{t+\tau} h(\xi_s^U(x)) ds \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right) \le h(\xi_\tau^U(x)) - K \int_0^\tau h(\xi_s^U(x)) ds$$

співпадає з (5.61). Інтегровність процесу (5.58) випливає з компактності замикання множини $\{x\colon \zeta^U(x) > 0\}$. $\square$

Завершення доведення теореми 5.6. Припустимо, що $x \in U$. Введемо момент зупинки $\tau^U(\omega) = \inf\{t \geq 0\colon\ \xi_t^x \notin U\}$. Використовуючи властивість супермартингала $\mathbf{E}\,(X_T|\mathcal{F}_S) \leq X_S$ для скінченних моментів зупинки $S = 0$ та $T = t \wedge \tau^U$ (див., наприклад, [19, розділ VI, §2]) до супермартингала (5.58), враховуючи, що $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(\cdot)$ маємо

$$
\begin{aligned}
m_t = \mathbf{E}(1 + \rho^2(o, \xi^U_{t\wedge\tau^U}(x))) \leq (1 + \rho^2(o, x)) + \\
+ K\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau^U} (1 + \rho^2(o, \xi^U_s(x)))ds \leq \\
\leq m_0 + K\mathbf{E}\int_0^t (1 + \rho^2(o, \xi^U_{s\wedge\tau^U}(x)))ds = m_0 + K\int_0^t m_s ds,
\end{aligned}
$$

де $\xi^U_{s\wedge\tau^U}(x) = \xi^U_{\tau^U}(x)$ для $s \geq \tau^U$, що означає, що процес зупиняється на границі множини U, тому можна підвищити верхню границю інтеграла. З нерівності Гроноулла-Беллмана випливає:

$$
\mathbf{E}(1 + \rho^2(o, \xi^U_{t\wedge\tau^U}(x))) \leq e^{Kt}(1 + \rho^2(o, x)). \tag{5.62}
$$

Виберемо послідовність куль $U_n = \{z \in M\colon\ \rho(o, z) < n\}$. Після деякого номера n_0 такого, що $\rho(o, x) > n_0$, послідовність моментів зупинки τ^{U_n} є монотонно зростаючою. З (5.62) випливає:

$$
\mathbf{E}\,1_{\{\omega\colon\, t\geq\tau^{U_n}(\omega)\}}\cdot(1+\rho^2(o, \xi^U_{t\wedge\tau^U}(x))) \leq \mathbf{E}(1+\rho^2(o, \xi^U_{t\wedge\tau^U}(x))) \leq e^{Kt}(1+\rho^2(o, x)),
$$

де 1_A позначає характеристичну функцію множини A. Оскільки для $t \geq \tau^{U_n}$ маємо $\rho(o, \xi_t^x) = n$, тому

$$
\mathbf{E}\,1_{\{\omega\colon\, t\geq\tau^{U_n}(\omega)\}} \leq \frac{e^{Kt}(1 + \rho^2(o, x))}{1 + n^2} \to 0, \quad n \to \infty
$$

і майже всюди

$$
\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau^{U_n} = \infty. \tag{5.63}
$$

Оскільки $\zeta^U\big|_{\overline{U}} = 1$, процеси $\xi_t^{U_n}(x)$ та $\xi_t^{U_m}(x)$ співпадають до моменту першого виходу з околу $U_{n\wedge m}$. Отже єдиний розв'язок ξ_t^x рівняння (5.1) співпадає з розв'язком $\xi_t^{U_n}(x)$ до моменту першого виходу $t \le \tau^{U_n}$. З властивості (5.63) випливає, що граничний процес $\xi_t^x = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_t^{U_n}(x)$ визначений для всіх $t \ge 0$, є єдиним розв'язком рівняння (5.1). Зокрема він не вибухає у скінчений момент часу, що доводить теорему 5.6. $\square$

Має місце узагальнення леми 5.9 на будь-яку функцію поліноміальної поведінки від метричної функції.

Лема 5.10. [62, теорема 2]. Нехай P є додатною монотонною поліноміальною функцією на півосі $\mathbb{R}_+$, такою, що

$$\exists\, C \quad \forall\, z \ge 0 \quad (1+z)P'(z) \le C\, P(z), \quad (1+z)|P''(z)| \le C\, P'(z).$$

Нехай виконані умови (5.36)-(5.37) та (5.39), тоді існує така стала K_P, що для довільного околу U процес

$$P(\rho^2(o, \xi_t^U(x))) - K_P \int_0^t P(\rho^2(o, \xi_s^U(x)))ds$$

є інтегрованим супермартінгалом. Більш того, для розв'язку ξ_t^x задачі (5.1) має місце оцінка:

$$\mathbf{E}\, P(\rho^2(o, \xi_t^x)) \le e^{K_P t} P(\rho^2(o, x)) \tag{5.64}$$

і процес

$$P(\rho^2(o, \xi_t^x)) - K_P \int_0^t P(\rho^2(o, \xi_s^x))ds \tag{5.65}$$

є супермартингалом.

Доведення цього факту знаходиться у додатку D (лема D.2).

5.3 Неперервність за початковою умовою розв'язку стохастичного рівняння на некомпактному многовиді

В цьому розділі використовуючи метод слабких оцінок на генератор (лема 5.7) доведено неперервну залежність розв'язку вихідного рівняння (5.1) за початковими умовами, тобто оцінки вигляду

$$\exists\, K: \quad \mathbf{E}\,\rho^2(\xi_t^x, \xi_t^y) \le e^{K\,t}\rho^2(x,y). \tag{5.66}$$

Основний результат цього підрозділу полягає у наступній теоремі.

Теорема 5.11. [64, теорема 6]Нехай виконані умови (5.36)-(5.37) та (5.39). Тоді для невід'ємної монотонної функції Q поліноміальної поведінки, тобто такої, що

$$\exists\, C \ \ \forall\, z \ge 0 \quad z\,Q'(z) \le C\,Q(z), \quad z\,|Q''(z)| \le C\,Q'(z),$$

існує така стала K_Q, що рівномірно по U процес

$$Q(\rho^2(\xi_t^U(x,y))) - K_Q \int_0^t Q(\rho^2(\xi_s^U(x,y)))ds$$

є інтегрованим супермартингалом. Крім того, для розв'язку ξ_t^x задачі (5.1) має місце оцінка

$$\mathbf{E}\,Q(\rho^2(\xi_t^x, \xi_t^y)) \le e^{K_Q t} Q(\rho^2(x,y)). \tag{5.67}$$

*Доведення*цього факту в цілому повторює схему доведення теореми 5.6 і передбачає отримання аналогів леми 5.7 та леми 5.9 для оператора $\mathcal{L}$, що діє по двом змінним. Доведення цієї теореми наведено у додатку D.

5.4 Нелінійна апріорна оцінка на варіації на многовидах з гладкою метричною функцією

Продовжуючи підхід нелінійних оцінок, розвинутий в попередніх розділах дисертації, введемо нелінійний вираз:

$$r_n(\xi,t)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,p_j(\rho^2(\xi_t^x,o))\|\,\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x\,\|^{\,q/j}, \tag{5.68}$$

який можна розглядати як певну нелінійну норму гладкості процесу ξ_t^x за початковою умовою. Вище $\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x$ використано як умовне позначення розв'язку варіаційного рівняння j-го порядку за початковою умовою (5.23), $o\in M$ — деяка фіксована точка многовиду, $\rho(x,y)$ — геодезична відстань між точками x,y, означення норми варіації дано в (5.14).

Для многовидів з гладкими метричними структурами, зокрема з гладкою метричною функцією, справедлива наступна нелінійна апріорна оцінка на варіації.

Теорема 5.12. [61, теорема 11] Нехай виконані умови (5.36)-(5.37) та (5.39). Припустимо, що $\rho^2(x,o)$ є C^∞-гладкою функцією. Нехай монотонні зростаючі функції поліноміальної поведінки $p_j\ge 1$, (тобто такі, що $\exists\ C\colon p_j''(u)u\le Cp_j'(u)$) у нелінійному виразі (5.68) задовольняють ієрархію:

$$\forall\, j_1+\dots+j_s=i\le n\quad [p_i(u)]^i(1+|u|^2)^{\varkappa q}\le[p_{j_1}(u)]^{j_1}\dots[p_{j_s}(u)]^{j_s}, \tag{5.69}$$

Тоді має місце нелінійна оцінка:

$$\exists\ K\quad \forall\, t\ge 0\quad r_n(\xi,t)\le e^{Kt}r_n(\xi,0). \tag{5.70}$$

Доведення. Тимчасово покладемо $2q=m/i$. Застосовуючи формулу Іто до одного з доданків у виразі (5.68) маємо:

$$h(t)=\mathbf{E}\,p_i\left(\rho^2(\xi_t^x,o)\right)\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_t^x\,\|^{\,2q}=h(0)+$$

$$+\mathbf{E}\int_0^t \{p_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x,o))\,d\,\|\,\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\|^{\,2q} +\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2q}dp_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x,o))+$$
$$+\frac{1}{2}d\,[\,p_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x,o)),\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2q}]\,\} =$$

$$= h(0)+\int_0^t \mathbf{E}\,p_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x,o))\,2q\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2(q-1)}d\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^2+ \tag{5.71}$$
$$+\,q(q-1)\int_0^t \mathbf{E}\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2(q-2)}d\,[\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^2,\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^2]+ \tag{5.72}$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2q}\,p_i'(\rho^2(\xi_\tau^x,o)\,d\rho^2(\xi_\tau^x,o)+ \tag{5.73}$$
$$+\,\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\,p_i''(\rho^2(\xi_\tau^x,o))\,d\,[\rho^2(\xi_\tau^x,o),\rho^2(\xi_\tau^x,o)]+ \tag{5.74}$$
$$+\,\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\,p_i'(\rho^2(\xi_\tau^x,o))\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^{2(q-1)}\,d\,[\rho^2(\xi_\tau^x,o),\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\,\|^2], \tag{5.75}$$

де $[X,Y]$ позначає квадратичну варіацію процесів X та Y. Знайдемо рекурентні співвідношення для диференціалів норм $\|\,\mathbb{V}^{(j)}\xi_t^x\|^2$, означених в (5.14). Нагадаємо, що згідно теореми 5.4 рівняння на варіації мають наступний вигляд

$$\delta(X_\gamma^m) = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}X_\gamma^p\delta\xi^q + M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}\delta W^\alpha + N_\gamma^m dt, \tag{5.76}$$

де коефіцієнти $M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}$, N_γ^m пов'язані рекурентними співвідношеннями (5.24).

Введемо допоміжні позначення:

$$\delta X_\varnothing^m = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}X_\varnothing^p\delta\xi^q + A_\alpha^m\delta W^\alpha + A_0^m dt,$$
$$M_{\varnothing\ \alpha}^{m} = A_\alpha^m(\xi_t^x),\quad N_\varnothing^m = A_0^m(\xi_t^x). \tag{5.77}$$

Тоді співвідношення (5.24), які пов'язують коефіцієнти варіаційних рівнянь (5.21), (5.23), матимуть наступний вигляд:

$$M_{\gamma\cup\{k\}\ \alpha}^{\ m} = \begin{cases} \mathbb{V}_k M_{\varnothing\ \alpha}^{\ m}, & \text{для } \gamma=\varnothing; \\ \mathbb{V}_k M_{\gamma\ \alpha}^{\ m} + R_{p\ \ell q}^{\ m}X_\gamma^p(\mathbb{V}_k\xi^\ell)A_\alpha^q, & \text{для } \gamma\neq\varnothing; \end{cases} \tag{5.78}$$

$$N^m_{\gamma\cup\{k\}} = \begin{cases} \mathbb{V}_k N^m_\varnothing, & \text{для } \gamma = \varnothing; \\ \mathbb{V}_k N^m_\gamma + R_p{}^m{}_{\ell q} X^p_\gamma (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A^q_0, & \text{для } \gamma \neq \varnothing. \end{cases} \tag{5.79}$$

Для подальших розрахунків використаємо лему, яка була доведена в [40]. (Див. також лему D.6).

Лема 5.13. [40] *Іто диференціал норми процесу X^m_γ, що задається рівнянням (5.76), має вигляд:*

$$\begin{aligned} d\,\|X\,\|^2 = g^{\gamma\varepsilon}(x)\,\{\, & g_{mn}(X^m_\gamma M_\varepsilon{}^n{}_\alpha + X^n_\varepsilon M_\gamma{}^m{}_\alpha) dW^\alpha + \\ & + g_{mn}(X^m_\gamma N^n_\varepsilon + X^n_\varepsilon N^m_\gamma + M_\gamma{}^m{}_\alpha M_\varepsilon{}^n{}_\alpha) dt + \\ & + \frac{1}{2} g_{mn}(X^m_\gamma P^n_\varepsilon + X^n_\varepsilon P^m_\gamma\,) dt\,\}, \end{aligned} \tag{5.80}$$

де вирази P^m_γ рекурентно пов'язані співвідношеннями:

$$P^m_k = \mathbb{V}_k(\nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha) + R_p{}^m{}_{\ell q} A^p_\alpha A^q_\alpha (\mathbb{V}_k \xi^\ell); \tag{5.81}$$

$$P^m_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{V}_k P^m_\gamma + 2R_p{}^m{}_{\ell q} M_\gamma{}^p{}_\alpha (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A^q_\alpha + \tag{5.82}$$

$$+ (\nabla_s R_p{}^m{}_{\ell q}) X^p_\gamma (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A^q_\alpha A^s_\alpha + R_p{}^m{}_{\ell q} X^p_\gamma (\mathbb{V}_k A^\ell_\alpha) A^q_\alpha + \tag{5.83}$$

$$+ R_p{}^m{}_{\ell q} X^p_\gamma (\mathbb{V}_k \xi^\ell)(\nabla_{A_\alpha} A_\alpha).$$

Застосуємо лему 5.13, щоб виділити умову дисипативності (5.37) в головній частині виразу (5.71)–(5.75). Для $i = 1$ та $X^m_k = \mathbb{V}_k \xi^m$, згідно (5.81) і (5.19), маємо:

$$\begin{aligned} P^m_k &= \mathbb{V}_k(\nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha(\xi)) + R_p{}^m{}_{\ell q} A^p_\alpha A^q_\alpha \mathbb{V}_k \xi^\ell = \\ &= \nabla^\xi_\ell \nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha \cdot \mathbb{V}_k \xi^\ell + R(A_\alpha, \mathbb{V}_k \xi) A_\alpha. \end{aligned}$$

Для $|\gamma| \geq 2$, оскільки в (5.83) $P^m_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{V}_k P^m_\gamma + \dots$, коефіцієнти варіаційних рівнянь високих порядків допускають представлення:

$$P^m_\gamma = \nabla_\ell \nabla_{A_\alpha} A^m_\alpha \cdot \mathbb{V}_\gamma \xi^\ell + R(A_\alpha, \mathbb{V}_\gamma \xi) A_\alpha + \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K_{\beta_1,\dots,\beta_s} \mathbb{V}_{\beta_1}\xi \dots \mathbb{V}_{\beta_s}\xi,$$

де $K_{\beta_1,\dots,\beta_s}$ залежать від A_0, A_α, R та їх коваріантних похідних. З співвідношень (5.24) випливає:

$$M_k{}^m{}_\alpha = \mathbb{V}_k A_\alpha^m(\xi) = \nabla_\ell^\xi A_\alpha^m(\xi)\cdot \mathbb{V}_k\xi^\ell, \qquad N_k{}^m = \mathbb{V}_k A_0^m(\xi) = \nabla_\ell^\xi A_0^m(\xi)\cdot \mathbb{V}_k\xi^\ell$$

$$M_\gamma{}^m{}_\alpha = \nabla_\ell^\xi A_\alpha^m[\mathbb{V}_\gamma\xi^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K'_{\beta_1,\dots,\beta_s}\mathbb{V}_{\beta_1}\xi\dots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi;$$

$$N_\gamma{}^m = \nabla_\ell^\xi A_\alpha^0[\mathbb{V}_\gamma\xi^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} K''_{\beta_1,\dots,\beta_s}\mathbb{V}_{\beta_1}\xi\dots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi \tag{5.84}$$

де K', K'' мають поліноміальний порядок поведінки за A_0, A_α, R та їх коваріантними похідними. Отже, з (5.80) маємо:

$$d\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_t^x\|^2 = 2\,\langle\, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t, \nabla_\ell^\xi A_\alpha[\mathbb{V}^{(i)}\xi_t^\ell]\,\rangle dW_t^\alpha +$$
$$+\Big\{\, 2\,\langle\, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t, \nabla_\ell^\xi \widetilde{A}_0[\mathbb{V}^{(i)}\xi_t^\ell]\,\rangle + \tag{5.85}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^d \|\nabla A_\alpha[\mathbb{V}^i\xi_t]\,\|^2 + \sum_{\alpha=1}^d \langle\, R(A_\alpha, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t)A_\alpha, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t\,\rangle\Big\}dt +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^d \sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} K^1_{j_1,\dots,j_s,\alpha}\,\langle\, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t,\ \mathbb{V}^{(j_1)}\xi_t\dots\mathbb{V}^{(j_s)}\xi_t\,\rangle\, dW_t^\alpha +$$
$$+\sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} K^2_{j_1,\dots,j_s}\,\langle\, \mathbb{V}^{(i)}\xi_t, \mathbb{V}^{(j_1)}\xi_t\dots\mathbb{V}^{(j_s)}\xi_t\,\rangle\, dt. \tag{5.86}$$

Таким чином, в фігурних дужках в (5.85) виникає ліва частина умови дисипативності (5.37). Зауважимо, що з врахуванням (5.81), (5.83) коефіцієнти K^1, K^2 мають поліноміальний порядок поведінки $(1+\rho^2(x,o))^\varkappa$, де $\varkappa$ виникає як $2\max(\varkappa_0, \varkappa_\alpha, \varkappa_R)$ в (5.39).

Перейдемо до оцінок виразів (5.71)–(5.75). З представлення (5.86) та умови (5.37) випливає:

$$(5.71) + (5.72) \leq K_C\,\mathbf{E}\int_0^t p_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x, o))\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\|^{2(q-1)}\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\|^2 d\tau +$$
$$+\sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} \mathbf{E}\int_0^t p_i\,(\rho^2(\xi_\tau^x, o))\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau^x\|^{2(q-1)}.$$

$$\cdot\; K^3_{j_1,\ldots,j_s}\,\langle\,\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau,\mathbb{V}^{(j_1)}\xi_\tau\ldots\mathbb{V}^{(j_s)}\xi_\tau\,\rangle\,d\tau. \tag{5.87}$$

Для оцінки доданків (5.73), (5.74) застосуємо властивості монотонної зростаючої функції p_i поліноміальної поведінки $\big(\exists\, C\colon p_j''(u)u \le Cp_j'(u)\big)$, а також наслідок формули Іто для функції $f(\xi_t^x)=\rho^2(\xi_t^x,o)$:

$$\rho^2(\xi_t^x,o)=\rho^2(x,o)+\sum_{\sigma=1}^{d}\int_0^t A^1_\sigma\rho^2(\xi^x_\tau,o)\,dW^\sigma_\tau+$$
$$+\int_0^t\{A^1_0+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}(A^1_\alpha)^2\}\rho^2(\xi^x_\tau,o)d\tau, \tag{5.88}$$

де використано позначення A^1 для векторного поля A, що діє на першу змінну x функції $\rho(x,o)$: $A^1\rho^2(x,o)=\langle\,A(x),\nabla_x\rangle\rho^2(x,o)$. Отже маємо

$$(5.73)+(5.74)=\int\limits_0^t\mathbf{E}\Big\{\|\mathbb{V}^{(i)}\xi^x_\tau\|^{2q}\,p_i'(\rho^2(\xi^x_\tau,o)d\rho^2(\xi^x_\tau,o)+$$
$$+\frac{1}{2}p_i''(\rho^2(\xi^x_\tau,o))d\,[\rho^2(\xi^x_\tau,o),\rho^2(\xi^x_\tau,o)]\,)\Big\}=$$
$$=\int_0^t\mathbf{E}\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau\|^{2q}\Big\{p_i'(\rho^2(\xi_\tau,o))\mathcal{L}^1\rho^2(\xi_\tau,o)+$$
$$+\frac{1}{2}\,p_i''(\rho^2(\xi_\tau,o))\rho^2(\xi_\tau,o)\frac{1}{\rho^2(\xi_\tau,o)}\sum_{\alpha=1}^{d}(A^1_\alpha\rho^2(\xi_\tau,o))^2\Big\}d\tau\le$$
$$\le\int_0^t\mathbf{E}\,\|\mathbb{V}^{(i)}\xi_\tau\|^{2q}p_i'(\rho^2(\xi_\tau,o))\{\mathcal{L}^1\rho^2(\xi_\tau,o)+$$
$$+\frac{C}{\rho^2(\xi_\tau,o)}\sum_{\alpha=1}^{d}(A^1_\alpha\rho^2(\xi_\tau,o)\,)^2\}d\tau. \tag{5.89}$$

Для проведення подальших оцінок буде застосуємо наступну теорему.

Теорема 5.14. [51] Припустимо, що виконані умови (5.36)-(5.37) і метрична відстань $\rho(x,y)$ є C^2-диференційовною. Тоді існує така стала K,

що
$$\mathcal{L}^1\rho^2(x,o) \le K(1+\rho^2(x,o)). \tag{5.90}$$
Крім того, для будь-якої C існує така стала K_C, що
$$\mathcal{L}^1\rho^2(x,o) + C\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{(A^1_\alpha\rho^2(x,o))^2}{\rho^2(x,o)} \le K_C(1+\rho^2(x,o)). \tag{5.91}$$

Враховуючи представлення (5.86) та нерівність $2a\|x\|\,\|y\| \le \frac{a^2\|x\|^2}{\rho^2} + \|y\|^2\rho^2$, маємо:
$$\begin{aligned}(5.75) &= \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\,|p_i'(\rho^2)\ \|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau\|^{2(q-1)}d\,[\rho^2,\ \|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau\|^2]\,| = \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\,p_i'(\rho^2)\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau\|^{2q}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{(A^1_\alpha\rho^2)^2}{\rho^2} + p_i'(\rho^2)\rho^2\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau\|^{2(q-1)}\cdot \\ &\cdot\ \|\nabla A_\alpha[\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau] + \sum_{j_1+\dots+j_s,\ s\ge 2} K'_{j_1,\dots,j_s}\nabla\!\!\!\nabla^{(j_1)}\xi_\tau\dots\nabla\!\!\!\nabla^{(j_s)}\xi_\tau\,\|^2d\tau. \end{aligned} \tag{5.92}$$
Перший доданок оцінюється разом з (5.89) з використанням (5.91). Другий доданок має структуру, аналогічну (5.71), (5.87). Таким чином, з врахуванням умов (5.36)–(5.37) маємо оцінку
$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbf{E}p_i(\rho^2(\xi^x_t,o))\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi^x_t\|^{2q} \le h(0) + C\int_0^t h(\tau)d\tau + \\ &+ \sum_{j_1+\dots+j_s=i}\int_0^t \mathbf{E}\,p_i(\rho^2(\xi_\tau,o))\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi_\tau\|^{2(q-1)}K^5_{j_1,\dots,j_s}\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_1)}\xi_\tau\dots\nabla\!\!\!\nabla^{(j_s)}\xi_\tau\|^2d\tau. \end{aligned}$$
Подальші міркування проводяться аналогічно доведенню теореми 3.7. З врахуванням (5.39) та нерівності $|x^{q-1}y| \le |x|^q/q + (q-1)|y|^q/q$ маємо
$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,p_i(\rho^2)\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi\|^{2(q-1)}K^5_{j_1,\dots,j_s}\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_1)}\xi\dots\nabla\!\!\!\nabla^{(j_s)}\xi\|^2 \le \\ &\le \mathbf{E}\,p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{\varkappa}\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi\|^{2(q-1)}\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_1)}\xi\|^2\dots\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_s)}\xi\|^2 \le \\ &\le C\mathbf{E}p_i\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(i)}\xi\|^{2q} + C'\mathbf{E}p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{2q\varkappa}\,\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_1)}\xi\|^{2q}\dots\|\nabla\!\!\!\nabla^{(j_s)}\xi\|^{2q}. \end{aligned}$$

Перший доданок вже має необхідну форму. Для того, щоб оцінити другий доданок нагадаємо, що $2q = m/i$ (5.68), тому

$$\|x_{j_1}\|^{m/i} \dots \|x_{j_s}\|^{m/i} = (\|x_{j_1}\|^{m/j_1})^{j_1/i} \dots (\|x_{j_s}\|^{m/j_s})^{j_s/i}.$$

Використовуючи ієрархії поліноміальних ваг (5.69) маємо

$$\begin{aligned}
&p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{\varkappa m/i} \|\nabla^{(j_1)}\xi\|^{m/i} \dots \|\nabla^{(j_s)}\xi\|^{m/i} \le \\
&\le (p_{j_1}(\rho^2)\ \|\nabla^{(j_1)}\xi\|^{m/j_1})^{j_1/i} \dots (p_{j_s}(\rho^2)\ \|\nabla^{(j_s)}\xi\|^{m/j_s})^{j_s/i} \le \\
&\le \frac{j_1}{i} p_{j_1}(\rho^2)\ \|\nabla^{(j_1)}\xi\|^{m/j_1} + \dots + \frac{j_s}{i} p_{j_s}(\rho^2)\ \|\nabla^{(j_s)}\xi\|^{m/j_s}.
\end{aligned}$$

Остаточно

$$h_i(t) = \mathbf{E}\, p_i(\rho^2)\ \|\nabla^{(i)}\xi\|^{q/i} \le h_i(0) + C\int_0^t r_n(\xi,\tau)d\tau,$$

що завершує доведення теореми 5.12. □

5.5 Диференційовність процесу ξ_t^x за початковою умовою

Відомо, що за умов глобальної ліпшицевості коефіцієнтів та обмеженості геометрії многовиду дифузійний процес ξ_t^x є диференційовним за початковою умовою, тобто існує його перша варіація $\dfrac{\partial \xi_t^x}{\partial x}$ [9, розд.4, §3], [97, розд.VIII]. Проте відповідні методи доведення є локальними і використовують супремальні оцінки на вирази для частинних похідних

$$\frac{\xi_t^{x+\varepsilon h} - \xi_t^x}{\varepsilon} - \frac{\partial \xi_t^x}{\partial x}[h]. \tag{5.93}$$

Підхід даного розділу спирається на методи теорії абсолютно неперервних функцій, а також підхід нелінійних оцінок, за допомогою якого, зокрема, можна отримати оцінки типу (5.66).

Позначимо через $\mathrm{Lip}([a,b],M)$ простір ліпшицевих кривих на відрізку $[a,b]$ зі значеннями в M. Цей простір складається з неперервних кривих $h \in C([a,b],M)$, для яких існує така стала K_h, що для будь-яких

$c, d \in [a, b]$ має місце оцінка $\rho(h(c), h(d)) \leq K_h|c - d|$. Зокрема, з теорії абсолютно неперервних функцій випливає $\|h'\| \in L^\infty([a, b], TM)$ і $K_h = \sup\limits_{z \in [a,b]} \|h'(z)\|_{T_{h(z)}M}$.

Зауважимо, що варіаційні рівняння (5.23), з використанням позначень $\xi_{t,x}^{(n)}$ для $\mathbb{V}_\gamma \xi_t^x \equiv \mathbb{V}^{(n)} \xi_t^x$ при $|\gamma| = n$, можуть бути переписані в наступному вигляді:

$$\delta[\,\xi_{t,x}^{(n)}] = -\,\Gamma_{\xi_t^x}(\,\xi_{t,x}^{(n)}, \delta\xi_t^x) + \left\{\nabla A_\alpha[\xi_{t,x}^{(n)}] + \varphi_\alpha^{(n)}(A_\alpha, R, \{\,\xi_{t,x}^{(i)}\,\}_{i=1,\dots,n-1})\right\}\delta W_t^\alpha + \\ + \left\{\nabla A_0[\xi_{t,x}^{(n)}] + \varphi_0^{(n)}(A_0, R, \{\,\xi_{t,x}^{(i)}\,\}_{i=1,\dots,n-1})\right\}dt, \qquad (5.94)$$

з початковими даними $\xi_{0,x}^{(1)} = Id_x$, $\xi_{0,x}^{(i)} = 0$, $i \geq 2$, де $[\Gamma(u, v)]^m = \Gamma_{p\ q}^{\ m} u^p v^q$ і $[\nabla A[H]\,]^m = H^p \nabla_p A^m$ — коваріантна похідна в напрямку векторного поля H, а неоднорідні частини $\varphi_0^{(n)}$, $\varphi_\alpha^{(n)}$ рівнянь (5.94) мають рекурентне представлення:

$$\begin{aligned} &\varphi_\alpha^{(1)} = \varphi_0^{(1)} = 0, \\ &\varphi_\alpha^{(n+1)} = \nabla\nabla A_\alpha[\xi_{t,x}^{(n)}, \xi_{t,x}^{(1)}] + \mathbb{V}\varphi_\alpha^{(n)} + R(\xi_{t,x}^{(n)}, A_\alpha)\xi_{t,x}^{(1)}, \\ &\varphi_0^{(n+1)} = \nabla\nabla A_0[\xi_{t,x}^{(n)}, \xi_{t,x}^{(1)}] + \mathbb{V}\varphi_\alpha^{(n)} + R(\xi_{t,x}^{(n)}, A_0)\xi_{t,x}^{(1)}. \end{aligned} \qquad (5.95)$$

Лема 5.15. За умов (5.36), (5.37), (5.39) кожне варіаційне рівняння (5.23) має єдиний сильний розв'язок, і цей розв'язок задовольняє оцінку

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ M_n \quad \mathbf{E}\,\|\mathbb{V}^{(n)} \xi_t^x\ \|^{2q} \leq e^{2qM_n t}(1 + \rho^2(x, o))^{q(n-1)\varkappa}. \qquad (5.96)$$

При цьому під сильним розв'язком (5.23) розуміється неперервний адаптований інтегрований процес

$$\mathbb{R}_+ \times M \ni (t, x)\ \longrightarrow \eta_t(x) \in T_{\xi_t^x} M \otimes T_x^{0,n} M$$

такий, що

$$\forall\, T > 0,\ p \geq 1 \quad \mathbf{E} \sup_{t \in [0,T]} ||\eta_t||^p_{T_{\xi_t^x} M \otimes T_x^{0,n} M} < \infty \qquad (5.97)$$

і для будь-якої $f \in C_0^\infty(M)$ наступне співвідношення виконано майже всюди

$$\langle \nabla f(\xi_t^x), \eta_t \rangle_{T_{\xi_t^x} M} = \langle \nabla f(x), \eta_0 \rangle_{T_x M} +$$

$$+ \int_0^t \{ \langle \nabla (A_\alpha f)(\xi_\tau^x), \eta_\tau(x) \rangle + \langle \nabla f(\xi_\tau^x), \varphi_\alpha(\tau) \rangle \} \delta W_\tau^\alpha + \tag{5.98}$$

$$+ \int_0^t \Big\{ \langle \nabla (\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^x), \eta_\tau(x) \rangle + \langle \nabla f(\xi_\tau^x), \varphi_0(\tau) \rangle \Big\} d\tau. \tag{5.99}$$

Доведення. Згідно теореми 5.4 варіаційне рівняння (5.23) відносно процесу $\nabla^{(i)} \xi_t^x$ є лінійним неавтономним неоднорідним рівнянням, якщо варіації менших порядків $\nabla^{(j)} \xi_t^x,\ j < i$ розглядати як відомі процеси. Для такого типу рівнянь сильний розв'язок може бути побудований стандартним чином за допомогою зклеювання розв'язків варіаційних рівнянь, локалізованих у різних координатних околах многовиду (див., наприклад, [154]), або, використовуючи ліпшицеві апроксимації коефіцієнтів рівняння (5.1), як в [58, лема 3.1]. З (5.85)-(5.86) та умови дисипативності (5.37) маємо

$$h(t) = \mathbf{E} \,\| \nabla^{(i)} \xi_\tau^x \|^{2q} \le h(0) + K \int_o^t h(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j_1 + \dots + j_s = i,\ s \ge 2} \mathbf{E} \int_0^t \| \nabla^{(i)} \xi_\tau^x \|^{2(q-1)} \langle \nabla^{(i)} \xi_\tau, K_{j_1,\dots,j_s} \nabla^{(j_1)} \xi_\tau \dots \nabla^{(j_s)} \xi_\tau \rangle d\tau. \tag{5.100}$$

З нерівності $|x^{q-1} y| \le |x|^q/q + (q-1)|y|^q/q$ та умови (5.39) випливає:

$$\mathbf{E} \,\| \nabla^{(i)} \xi_\tau \|^{2(q-1)} \big| K_{j_1,\dots,j_s} \langle \nabla^{(j_1)} \xi_\tau, \nabla^{(i)} \xi_\tau \dots \nabla^{(j_s)} \xi_\tau \rangle \big| \le$$
$$\le \mathbf{E} (1 + \rho^2(o, \xi_\tau^x))^{\varkappa/2} \| \nabla^{(i)} \xi_\tau \|^{2q-1} \| \nabla^{(j_1)} \xi_\tau \| \dots \| \nabla^{(j_s)} \xi_\tau \| \le$$
$$\le C \mathbf{E} \,\| \nabla^{(i)} \xi_\tau \|^{2q} + C' \mathbf{E} (1 + \rho^2(o, \xi_\tau^x))^{q\varkappa} \| \nabla^{(j_1)} \xi_\tau \|^{2q} \dots \| \nabla^{(j_s)} \xi_\tau \|^{2q}.$$

Для перетворення останнього доданку застосуємо індуктивне припущення (5.96) для варіацій нижчих порядків. Аналогічно міркуванням теореми 5.12 з (5.100) та теореми 5.10 випливає

$$h(t) \leq e^{Ct}h(0) + \sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} C' \int_0^t e^{C(t-\tau)} \mathbf{E}\left(1+\rho^2(\xi_\tau^x, o)\right)^{q\varkappa} \cdot$$

$$\cdot \, \| \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_\tau^x \|^{2q} \cdot \dots \cdot \| \mathbb{V}^{(j_s)} \xi_\tau^x \|^{2q} d\tau \leq$$

$$\leq e^{Ct}h(0) + \sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} e^{(C+C')t} \sup_{\tau\in[0,t]} \mathbf{E}\left(1+\rho^2(\xi_\tau^x, o)\right)^{q\varkappa} \cdot$$

$$\cdot \sup_{\tau\in[0,t]} \prod_{p=1}^{s} \left(\mathbf{E} \, \| \mathbb{V}^{(j_p)} \xi_\tau^x \|^{2qj_p} \right)^{1/j_p} \leq$$

$$\leq e^{(C+C'+2qM)t} \sum_{j_1+\dots+j_s=i,\ s\geq 2} (1+\rho^2(x,o))^{q\varkappa} \prod_{p=1}^{s} (1+\rho^2(x,o))^{q(j_p-1)\varkappa} \leq$$

$$\leq e^{2qM't} (1+\rho^2(x,o))^{q(i-1)\varkappa},$$

що дає (5.96). □

Теорема 5.16. [64, теорема 8] За умов (5.36)-(5.37) та (5.39) розв'язок ξ_t^x рівняння (5.1) є диференційовним за початковою умовою $x \in M$. При цьому його похідна $\xi_t^{(1)}(x) = \dfrac{\partial \xi_t^x}{\partial x}$ є єдиним розв'язком варіаційного рівняння, що має наступний вигляд у локальних координатах

$$\delta[\xi_t^{(1)}(x)]_k^m = -\,\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t^x)\,[\xi_t^{(1)}(x)]_k^p\,\delta(\xi_t^x)^q +$$
$$+ \nabla_p A_\alpha^m(\xi_t^x)[\xi_t^{(1)}(x)]_k^p \delta W_t^\alpha + \nabla_p A_0^m(\xi_t^x)[\xi_t^{(1)}(x)]_k^p dt \qquad (5.101)$$

і початкову умову $\xi_0^{(1)}(x) = I$.

Крім того, для довільної кривої $h \in \mathrm{Lip}([a,b], M)$ та функції $f \in C_0^\infty(M)$ майже всюди має місце наступне представлення:

$$f(\xi_t^{h(b)}) - f(\xi_t^{h(a)}) = \int_a^b \langle\, \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \xi_t^{(1)}(h(z))[h'(z)] \,\rangle_{T_{\xi_t^{h(z)}}} dz. \qquad (5.102)$$

Під розв'язком рівняння (5.101) розуміється неперервний адаптований інтегрований процес

$$\mathbb{R}_+ \times M \ni (t,x) \ \to \ \xi_t^{(1)}(x) \in L^\infty([0,T], L^p(\Omega, T_{\xi_t^x}M \otimes T_x^* M)),$$

$T > 0$, $p > 1$, такий, що для довільних $f \in C_0^\infty(M)$, $h \in T_xM$

$$\langle \nabla f(\xi_t^x), \xi_t^{(1)}(x)[h] \rangle_{T_{\xi_t^x}M} = \langle \nabla f(x), \xi_0^{(1)}(x)[h] \rangle_{T_xM} +$$
$$+ \int_0^t \langle \nabla(A_\alpha f)(\xi_\tau^x), \xi_\tau^{(1)}(x)[h] \rangle \, \delta W_\tau^\alpha + \int_0^t \langle \nabla(\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^x), \xi_\tau^{(1)}(x)[h] \rangle \, d\tau. \tag{5.103}$$

Доведення. Розглянемо довільну гладку криву $h \in C^\infty([a,b], M)$ з початком в точці $x = h(a)$. Формальне диференціювання (5.3) дає рівняння на першу варіацію $\xi_t^{(1)}(x)[h'(a)] = \dfrac{d}{du}\Big|_{u=0} \xi_t^{h(u)}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\xi_t^x), \xi_t^{(1)}(x)[h'(a)] \rangle = \langle \nabla f(x), h'(a) \rangle +& \\ + \sum_\alpha \int_0^t \langle \nabla(A_\alpha f)(\xi_\tau^x), \xi_\tau^{(1)}(x)[h'(a)] \rangle \delta W_\tau^\alpha +& \\ + \int_0^t \langle \nabla(\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^x), \xi_\tau^{(1)}(x)[h'(a)] \rangle d\tau.&\end{aligned} \tag{5.104}$$

Відповідно в локальних координатах це рівняння має вигляд:

$$\delta[\xi_t^{(1)}(x)]_j^m = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t^x)[\xi_t^{(1)}(x)]_j^p \delta(\xi_t^x)^q + \sum_\alpha \nabla_p A_\alpha^m(\xi_t^x)[\xi_t^{(1)}(x)]_j^p \delta W_t^\alpha +$$
$$+ \nabla_p A_0^m(\xi_t^x)[\xi_t^{(1)}(x)]_j^p dt. \tag{5.105}$$

з початковою умовою $\xi_0^{(1)} = I$.

Спершу доведемо тотожність (5.102) для функцій f з досить малим носієм, після чого використовуючи розбиття одиниці матимемо (5.102) для довільної $f \in C_0^\infty(M)$.

Зауважимо, що для довільної точки $o \in M$ існує досить малий окіл $U = U(o) \ni o$ і точки зовні цього околу $o_i = o_i(o) \notin U$, $i = 1, \ldots, \dim M$ такі, що вони генерують гладку локальну координатну систему в U

$$\overline{\theta}(x) = (\theta^i(x))_{i=1}^{dim\,M} \colon U \to \mathbb{R}^{dim\,M} \quad \text{за правилом} \quad \theta^i(x) = \rho(o_i, x).$$

Вище $\theta^i(x) = \rho(o_i, x)$ позначає геодезичну відстань від $x \in U$ до точки o_i, $i = 1, \ldots, dim\, M$. Розглянемо процес $\theta^i(\xi_t^x) = \rho(o_i, \xi_t^x)$, тоді з нерівності трикутника

$$|\rho(o_i, x) - \rho(o_i, z)| \leq \rho(x, z),$$

та (5.67) для довільних $p \geq 1$ та $T > 0$ маємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}|\theta^i(\xi_t^x) - \theta^i(\xi_t^z)|^p \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[\rho(\xi_t^x, \xi_t^z)]^p \leq e^{K_p T} \rho^p(x, z).$$

Отже, відображення $[a, b] \in z \to \theta^i(\xi_t^{h(z)}) \in L^\infty([0, T], L^p(\Omega, \mathcal{W}))$ є ліпшицевим, якщо крива $h \in \mathrm{Lip}([a, b], M)$, що також задовольняє умову Ліпшиця:

$$\forall\, c, d \in [a, b] \quad \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}|\theta^i(\xi_t^{h(c)}) - \theta^i(\xi_t^{h(d)})|^p \leq |c - d|^p e^{K_p T} \cdot \|h'\|^p_{L^\infty([a,b],TM)}.$$

З теорії абсолютно неперервних функцій випливає, що

$$\frac{d\theta^i(\xi_t^{h(z)})}{dz} \in L^\infty([a, b] \times [0, T], L^p(\Omega, \mathcal{W})\,)$$

$$\sup_{z\in[a,b],t\in[0,T]} \mathbf{E}\,\|\frac{d\theta^i(\xi_t^{h(z)})}{dz}\|^p_{T_{\xi_t^{h(z)}}M\otimes T^*_{h(z)}M} \leq e^{K_p T} \cdot \|h'\|^p_{L^\infty([a,b],TM)}, \tag{5.106}$$

та майже всюди має місце співвідношення

$$\theta^i(\xi_t^{h(b)}) - \theta^i(\xi_t^{h(a)}) = \int_a^b \frac{d\theta^i(\xi_t^{h(z)})}{dz} dz. \tag{5.107}$$

Для довільної $f \in C_0^\infty(U)$ з компактним носієм в U існує гладка функція $\bar{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{dim\, M})$ така, що

$$f(x) = 1_U(x)\bar{f}(\overline{\theta}(x)), \tag{5.108}$$

де $1_U(x)$ позначає характеристичну функцію множини U. Наприклад, функцію $\bar{f}$ можна задати як координатну версію f в координатах $\overline{\theta}$, після чого гладким чином продовжити на весь простір $\mathbb{R}^{dim\, M}$ нулем зовні деякого околу відкритої множини $\overline{\theta}(U)$. Для функції $f \in C_0^\infty(U)$ з компактним носієм в U маємо:

$$(Af)(x) = (\nabla_A f)(x) = 1_U(x) \sum_{j=1}^{dim\, M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(x)) \nabla_A \theta^j(x) =$$
$$= 1_U(x) \sum_{j=1}^{dim\, M} (\bar{A}^j \partial_j \bar{f})(\overline{\theta}(x)) = 1_U(x)\, (\bar{A}\bar{f})(\overline{\theta}(x)),$$

де $\bar{A}^j$ позначає локальні координати $\bar{A}^j(\overline{\theta}(x)) = A\theta^j(x)$ векторного поля A в околі U. Для суперпозиції гладкої функції з компактним носієм та ліпшицевої функції, враховуючи (5.107), маємо:

$$f(\xi_t^{h(b)}) - f(\xi_t^{h(a)}) = 1_U(\xi_t^{h(z)}) \bar{f}(\overline{\theta}(\xi_t^{h(z)})) \Big|_{z=a}^{z=b} =$$
$$= \int_a^b 1_U(\xi_t^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\, M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(\xi_t^{h(z)})) \frac{d\theta^j(\xi_t^{h(z)})}{dz} dz. \tag{5.109}$$

З іншого боку, з означення (5.3) розв'язку ξ_t^x випливає:

$$f(\xi_t^{h(b)}) - f(\xi_t^{h(a)}) = f(h(b)) - f(h(a)) +$$
$$+ \sum_\alpha \int_0^t \left[(A_\alpha f)(\xi_\tau^{h(b)}) - (A_\alpha f)(\xi_\tau^{h(a)}) \right] \delta W_\tau^\alpha +$$
$$+ \int_0^t \left[(\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^{h(b)}) - (\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^{h(a)}) \right] d\tau =$$
$$= 1_U(h(b)) \bar{f}(\overline{\theta}(h(b))) - 1_U(h(a)) \bar{f}(\overline{\theta}(h(b))) +$$
$$+ \sum_\alpha \int_0^t \left[1_U(\xi_\tau^{h(b)})\, (\bar{A}_\alpha \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(b)})) - 1_U(\xi_\tau^{h(a)})\, (\bar{A}_\alpha \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(a)})) \right] \delta W_\tau^\alpha +$$
$$+ \int_0^t \left[1_U(\xi_\tau^{h(b)})\, (\bar{\widetilde{A}}_0 \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(b)})) - 1_U(\xi_\tau^{h(a)})\, (\bar{\widetilde{A}}_0 \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(a)})) \right] d\tau. \tag{5.110}$$

Застосовуючи знов, що суперпозиція гладкого $\bar{A}.\bar{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ та ліпшицевого відображення $[a, b] \to \theta^i(\xi_\tau^{h(z)})$ є неперервним за Ліпшицем, враховуючи (5.109) та (5.110), отримаємо:

$$\int_a^b 1_U(\xi_t^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(\xi_t^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_t^{h(z)})}{dz} dz =$$

$$= \int_a^b 1_U(h(z)) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(h(z)))\, \frac{d\theta^j(h(z))}{dz} dz +$$

$$+ \sum_\alpha \int_0^t \left[\int_a^b 1_U(\xi_\tau^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} (\partial_j \bar{A}_\alpha \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_\tau^{h(z)})}{dz} dz \right] \delta W_\tau^\alpha +$$

$$+ \int_0^t \left[\int_a^b 1_U(\xi_\tau^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} (\partial_j \bar{\widetilde{A}}_0 \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_\tau^{h(z)})}{dz} dz \right] d\tau.$$

З (5.96) та (5.106) випливає, що доданки під інтегралами належать простору $L^\infty([a,b]\times[0,T], L^p(\Omega,\mathcal{W}))$, $p \geq 1, T > 0$, отже порядок інтегрування можна змінити. Оскільки $h \in \mathrm{Lip}([a,b],M)$ та $[a,b]$ були довільними, члени під інтегралом $\int_a^b$ співпадають для майже всіх $z \in [a,b]$:

$$1_U(\xi_t^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(\xi_t^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_t^{h(z)})}{dz} =$$

$$= 1_U(h(z)) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{f}(\overline{\theta}(h(z)))\, \frac{d\theta^j(h(z))}{dz} +$$

$$+ \sum_\alpha \int_0^t \Big[1_U(\xi_\tau^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{A}_\alpha \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_\tau^{h(z)})}{dz} \Big] \delta W_\tau^\alpha +$$

$$+ \int_0^t \Big[1_U(\xi_\tau^{h(z)}) \sum_{j=1}^{dim\,M} \partial_j \bar{\widetilde{A}}_0 \bar{f})(\overline{\theta}(\xi_\tau^{h(z)}))\, \frac{d\theta^j(\xi_\tau^{h(z)})}{dz} \Big] d\tau.$$

Отже, в термінах інваріантних позначень для полів на M, маємо

$$\langle \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \frac{d\xi_t^{h(z)}}{dz} \rangle = \langle \nabla f(h(z)), \frac{dh(z)}{dz} \rangle + \tag{5.111}$$
$$+ \sum_\alpha \int_0^t \langle \nabla(A_\alpha f)(\xi_\tau^{h(z)}), \frac{d\xi_\tau^{h(z)}}{dz} \rangle \delta W_\tau^\alpha + \int_0^t \langle \nabla(\widetilde{A}_0 f)(\xi_\tau^{h(z)}), \frac{d\xi_\tau^{h(z)}}{dz} \rangle d\tau.$$

Вище також було використано, що, коли $\xi_\tau^{h(z)} \in U$, всі доданки з індексом j представляють собою координати відповідних тензор-інваріантних об'єктів. З іншого боку, коли $\xi_\tau^{h(z)} \notin U$, члени з індексом j вже не є координатами, проте $1_U(\xi_\tau^{h(z)}) = 0$, а носії f, $A_\alpha f$, $A_0 f$ лежать в U.

Нарешті зауважимо, що рівняння (5.111) та (5.104) мають однакову структуру. Тому при початкових умовах, що співпадають, $\frac{d\theta^j(h(z))}{dz} = [h'(z)]^j$ з єдиності розв'язку рівняння (5.104) випливає: $\xi_t^{(1)}(h(z))[h'(z)] = \frac{d\xi_t^{h(z)}}{dz}$. Остаточно після підстановки в рівняння (5.109) маємо (5.102). $\square$

5.6 Збереження гладкості під дією півгрупи на некомпактному рімановому многовиді

Нехай $\vec{q}_\varkappa = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \geq 1$ позначає набір монотонних функцій на $\mathbb{R}_+$ поліноміальної поведінки, що задовольняють ієрархію

$$\forall\, i \geq 1 \quad q_i(z)(1+z)^{\varkappa/2} \leq q_{i+1}(z), \quad z \geq 0. \tag{5.112}$$

Позначимо через $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ простір n-разів неперервно диференційованих функцій на многовиді M, оснащений нормою

$$\| f \|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)} = \max_{i=0,\ldots,n} \sup_{x\in M} \frac{\| (\nabla^x)^i f(x) \|}{q_i(\rho^2(x,o))}. \tag{5.113}$$

Теорема 5.17. [61, теорема 2]За умов (5.36), (5.37), (5.39) для довільної $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$ півгрупа $P_t f(x)$, асоційована з стохастичним диференціальним рівнянням (5.1), є n-разів неперервно диференційованою по $x \in M$ для будь-якого $t \geq 0$. Крім того, її коваріантні похідні задаються наступним чином:

$$\nabla_x^{(n)} P_t f(x) = \sum_{j_1+\cdots+j_\ell = n, \ell \geq 1} \mathbf{E} \langle \nabla^{(\ell)}_{\xi_t^x} f(\xi_t^x), \mathbb{W}^{(j_1)} \xi_t^x \otimes \cdots \otimes \mathbb{W}^{(j_\ell)} \xi_t^x \rangle_{T^{0,\ell}_{\xi_t^x} M}. \tag{5.114}$$

Доведення цієї теореми міститься у додатку E (теорема E.4).

Теорема 5.18. [61, теорема 17] За умов (5.36), (5.37), (5.39) для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ зберігається під дією півгрупи $\forall t \geq 0 \;\; P_t \colon C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$ та існують сталі K, M, такі, що

$$\forall\, f \in C^n_{\vec{q}}(M) \qquad \|P_t f\,\|_{C^n_{\vec{q}}(M)} \leq K e^{Mt}\,\|f\,\|_{C^n_{\vec{q}}(M)}. \tag{5.115}$$

Доведення. Застосуємо (5.96) і (5.40), щоб оцінити відповідні півнорми

$$\frac{\|(\nabla^x)^i P_t f(x)\,\|_{T_x^{(0,i)}}}{q_i(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq \sum_{j_1+\cdots+j_\ell,\;\ell\geq 1} \frac{\|\mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^\xi)^\ell f(\xi_t^x)\,,\mathbb{\nabla}^{(j_1)}\xi_t^x\otimes\cdots\otimes\mathbb{\nabla}^{(j_\ell)}\xi_t^x\,\rangle_{T_\xi^{(0,i)}}\,\|_{T_x^{(0,i)}}}{q_i(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq \sum_{j_1+\cdots+j_\ell,\;\ell\geq 1} \left(\sup_{\xi_t^x\in M} \frac{\|(\nabla^\xi)^\ell f(\xi_t^x)\,\|_{T_\xi^{(0,\ell)}}}{q_\ell(\rho^2(\xi_t^x,o))}\right) \frac{\mathbf{E} q_\ell(\rho^2(\xi_t^x,o))\,\|\mathbb{\nabla}^{(j_1)}\xi_t^x\,\|\ldots\|\mathbb{\nabla}^{(j_\ell)}\xi_t^x\,\|}{q_i(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq \|f\,\|_{C^n_{\vec{q}}} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell,\;\ell\geq 1} \frac{\left(\mathbf{E} q_\ell^{\ell+1}(\rho^2(\xi_t^x,o))\right)^{1/(\ell+1)} \prod_{m=1}^{\ell} \left(\mathbf{E}\,\|\mathbb{\nabla}^{(j_m)}\xi_t^x\,\|^{\ell+1}\right)^{1/(\ell+1)}}{q_i(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq K^2 e^{M't}\,\|f\,\|_{C^n_{\vec{q}}} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell,\;\ell\geq 1} \frac{q_\ell(\rho^2(x,o)) \prod_{m=1}^{\ell} (1+\rho^2(x,o))^{\varkappa(j_m-1)/2}}{q_i(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq K^2 e^{M't}\,\|f\,\|_{C^n_{\vec{q}}} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell,\;\ell\geq 1} \frac{q_\ell(\rho^2(x,o))(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa(i-\ell)/2}}{q_i(\rho^2(x,o))}.$$

Останній рядок приводить до ієрархії ваг (5.112). Вище також було використано, що для функції $q_i \geq 1$ поліноміальної поведінки існує така стала K, що $\frac{1}{K}(1+b)^{deg(q_i)} \leq q_i(b) \leq K(1+b)^{deg(q_i)}$, тому з (5.40) випливає

$$\mathbf{E}\left[q_i(\rho^2(o,\xi_t^x))\right]^n \leq K^n \mathbf{E}\left[1+\rho^2(o,\xi_t^x)\right]^{n\cdot deg(q_i)} \leq$$
$$\leq K^n e^{n\cdot deg(q_i)Mt}\left[1+\rho^2(o.x)\right]^{n\cdot deg(q_i)} \leq K^{2n} e^{n\cdot deg(q_i)Mt} q_i(\rho^2(o,x)).$$

$\square$

5.7 Висновки розділу 5

У цьому розділі попередні результати переносяться на випадок дифузійних рівнянь на некомпактному гладкому рімановому многовиді. З цією метою вирішується проблема геометрично-інваріантного представлення похідних півгрупи, асоційованої з деяким стохастичним диференціальним рівнянням на многовиді. Для цього вводиться нове означення варіацій на многовиді, що мають тензорний характер. За допомогою таких варіацій коваріантні похідні півгрупи в інваріантний спосіб пов'язуються з коваріантними похідними функції, на яку ця півгрупа діє. Це дає можливість застосувати метод нелінійної оцінки та довести результат про збереження просторів диференційованих функцій з sup-топологією під дією півгрупи на некомпакному рімановому многовиді. З метою реалізації цієї програми досліджуються властивості нових варіацій та доводиться їх неперервність за початковою умовою вихідного стохастичного рівняння. Крім того, у даному розділі доводиться результати про відсутність вибуху для розв'язку нелінійного стохастичного диференціального рівняння на некомпактному рімановому многовиді.

РОЗДІЛ 6

ПІДВИЩЕННЯ ГЛАДКОСТІ ПІД ДІЄЮ ЕВОЛЮЦІЇ НА НЕКОМПАКТНОМУ РІМАНОВОМУ МНОГОВИДІ

Наступне означення узагальнює поняття високого порядку класичної коваріантної похідної ∇^x_k та стохастичної похідної D_z для змішаного тензора в сенсі означень розділу 5. Нагадаємо, що випадкова функція $F(\omega)$, визначена на вінерівському просторі $\omega \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, називається *стохастично диференційованою* [77, 169] в напрямку, який задається обмеженим неперервним адаптованим по відношенню до канонічної фільтрації процесом $z_t(\omega) \in I\!R^d$, якщо для множини повної міри існує похідна:

$$D_z F(\omega) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(\{\omega_t + \varepsilon \int_0^t z_s ds\}_{t\in\mathbb{R}^+}) \tag{6.1}$$

Означення 6.1. *Інваріантна стохастична похідна* $I\!D_z$ змішаного тензора $u^{(i/a)}_{(j/b)}$ задається наступною формулою:

$$\begin{aligned} I\!D_z u^{(i/a)}_{(j/b)} = D_z u^{(i/a)}_{(j/b)} &+ \sum_{\rho\in(a)} \Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\delta}(\phi(x)) u^{(i/a)|_{\rho=\sigma}}_{(j/b)} D_z \phi^\delta \\ &- \sum_{\rho\in(b)} \Gamma_{\rho}{}^{\sigma}{}_{\delta}(\phi(x)) u^{(i/a)}_{(j/b)|_{\rho=\sigma}} D_z \phi^\delta. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Вище, як в означенні 5.3, $(i/a)|_{\rho=\sigma}$ означає, що в мульти-індексі $(a) = (a_1, \dots, a_\ell)$ замість одного з індексів $\rho \in \{a_1, \dots, a_\ell\}$ підставлено індекс

σ, по якому проводиться сумування за стандартною домовленістю про сумування по нижнім та верхнім індексам.

$$\mathbb{D}_z u^{(i/a)}_{(j/b)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial \phi^{(a)}}{\partial \phi^{(a')}} \frac{\partial \phi^{(b')}}{\partial \phi^{(b)}} \mathbb{D}_z u^{(i'/a')}_{(j'/b')}$$

6.1 Рекурентне представлення високого порядку стохастичних похідних

Враховуючи властивості стохастичної похідної (6.1) [77, 169]:

$$\begin{aligned}
&D_z(f \circ (F_1, \dots, F_n)) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f \circ (F_1, \dots, F_n)) D_z F_j, \\
&D_z \int_0^t u(\tau) d\tau = \int_0^t D_z u(\tau)\, d\tau, \\
&D_z \int_0^t u_\sigma(\tau) \delta W^\sigma_\tau = \int_0^t (D_z u_\sigma) \delta W^\sigma_\tau + \int_0^t u_\sigma(\tau) z^\sigma_\tau\, d\tau
\end{aligned}$$

запишемо рівняння на першу стохастичну похідну розв'язку вихідного стохастичного рівняння (5.1) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta(D_z \xi^m_t) &= (D_z A^m_0(\xi_t) + A^m_\sigma(\xi_t) z^\sigma) dt + D_z A^m_\sigma(\xi_t)\, \delta W^\sigma_t = \\
&= (\mathbb{D}_z A^m_0(\xi_t) - \Gamma_p{}^m{}_q(\xi_t) D_z \xi^p_t A^q_0 + A^m_\sigma(\xi_t) z^\sigma) dt + \\
&+ (\mathbb{D}_z A^m_\sigma(\xi_t) - \Gamma_p{}^m{}_q(\xi_t) D_z \xi^p_t A^q_\sigma)\, \delta W^\sigma_t = \qquad (6.3)\\
&= (\mathbb{D}_z A^m_0(\xi_t) + A^m_\sigma(\xi_t) z^\sigma) dt + \mathbb{D}_z A^m_\sigma(\xi_t)\, \delta W^\sigma_t - \Gamma_p{}^m{}_q \mathbb{D}_z \xi^p_t\, \delta \xi^q_t,
\end{aligned}$$

де було додано та віднято члени зі зв'язністю, щоб сформувати інваріантні стохастичні похідні із означення 6.1 та виділено диференціал $\delta\xi_t$.

Введемо позначення X^m_γ для змішаних $\mathbb{D}$ та $\mathbb{W}$ похідних процесу ξ_t порядку $|\gamma|$:

$$X^m_\gamma = \mathfrak{D}_\gamma \xi^m, \;\; \mathfrak{D}_\gamma = \mathfrak{D}_{k_n} \dots \mathfrak{D}_{k_1} \;\; \text{де} \;\; \gamma = \{k_1, \dots, k_n\}, \qquad (6.4)$$

$$\mathfrak{D}_k = \mathbb{V}_k, \text{ або } \mathbb{D}_{z_k}. \tag{6.5}$$

Припустимо, що рівняння на процес X_γ^m має наступний вигляд:

$$\delta(X_\gamma^m) = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) X_\gamma^p \delta\xi^q + M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}\, \delta W^\sigma + N_\gamma^m dt \tag{6.6}$$

з деякими коефіцієнтами $M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}$, N_γ^m, і введемо позначення $X_\varnothing$ для процесу

$$\delta X_\varnothing^m = -\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi_t) X_\varnothing^p\, \delta\xi_t^q + A_\sigma^m(\xi_t)\, \delta W_t^\sigma + A_0^m(\xi_t)\, dt,$$

який формально відповідає індексу $\gamma = \varnothing$ в (6.6).

Теорема 6.2. Коефіцієнти $M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}$, N_γ^m рівняння (6.6) на X_γ^m пов'язані наступними рекурентними співвідношеннями:

$$M_{\varnothing\ \sigma}^{\ m} = A_\sigma^m(\xi_t^x), \quad N_\varnothing^m = A_0^m(\xi_t^x) \tag{6.7}$$

$$M_{\gamma\cup\{k\}\ \sigma}^{\ m} = \begin{cases} \mathfrak{D}_k M_{\varnothing\ \sigma}^{\ m}, & \text{для } \gamma = \varnothing \\ \mathfrak{D}_k M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} + R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathfrak{D}_k \xi^\ell) A_\sigma^q, & \text{для } \gamma \neq \varnothing \end{cases} \tag{6.8}$$

$$N_{\gamma\cup\{k\}}^m = \begin{cases} \mathfrak{D}_k N_\varnothing^m + \lambda A_\sigma^m z_k^\sigma, & \text{для } \gamma = \varnothing \\ \mathfrak{D}_k N_\gamma^m + \lambda M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} z_k^\sigma + R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathfrak{D}_k \xi^\ell) A_\sigma^q, & \text{для } \gamma \neq \varnothing. \end{cases} \tag{6.9}$$

В (6.9) стала $\lambda = 0$, якщо похідна $\mathfrak{D}_k$ є $\mathbb{V}_k$-похідною (тобто, якщо $X_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{V}_k X_\gamma$) і дорівнює 1, якщо $\mathfrak{D}_k$ є стохастичною похідною (тобто $X_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{D}_{z_k} X_\gamma$).

Доведення теореми 6.2 наведено у додатку E.

Наслідок 6.3. Коефіцієнти $M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}$ та N_γ^m мають наступний вигляд:

$$M_{k\ \sigma}^{\ m} = \mathfrak{D}_k A_\sigma^m(\xi) = \nabla_\ell^\xi A_\sigma^m(\xi) \cdot \mathfrak{D}_k \xi^\ell;$$

$$N_k^{\ m} = \mathfrak{D}_k A_0^m(\xi) + \lambda A_\sigma^m z_k^\sigma;$$

$$M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} = \nabla_\ell^\xi A_\sigma^m [\mathfrak{D}_\gamma \xi^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} L^1_{\beta_1,\dots,\beta_s} \cdot \mathfrak{D}_{\beta_1}\xi \dots \mathfrak{D}_{\beta_s}\xi; \tag{6.10}$$

$$N_\gamma{}^m = \nabla^\xi_\ell A^m_0[\mathbb{D}_\gamma \xi^\ell] + \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_s=\gamma,\ s\geq 2} L^2_{\beta_1,\dots,\beta_s}\cdot \mathbb{D}_{\beta_1}\xi\dots\mathbb{D}_{\beta_s}\xi +$$
$$+\lambda \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\cup\varepsilon_b=\gamma} K_{\beta_1,\dots,\beta_a,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_b}\cdot \mathbb{D}_{\beta_1}\xi\dots\mathbb{D}_{\beta_a}\xi\cdot \mathbb{D}_{\varepsilon_1\setminus k_1} z_{k_1}\dots\mathbb{D}_{\varepsilon_b\setminus k_b} z_{k_b}. \tag{6.11}$$

Сумування в (6.10) відбувається по всім можливим підрозбиттям множини індексів γ на підмножини $\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\cup\varepsilon_b=\gamma$, що не перетинаються. Функції L^1, L^2 та K залежать від коефіцієнтів A_0, A_σ вихідного рівняння (5.1) та кривини многовиду R, а також їх похідних порядку не вище $|\gamma|$. В (6.11) множник $\mathbb{D}_{\varepsilon\setminus k} z_k$ виникає тільки, якщо індекс k відповідає стохастичній похідній. В такому випадку $\lambda = 1$ і позначення $\varepsilon\setminus k$ означає, що з множини $\varepsilon = \{k_1,\dots,k_{|\varepsilon|}\}$ один з індексів $k\in\varepsilon$ видалений. Якщо множина ε складається з однієї точки k, тоді похідна $\mathbb{D}_{\varepsilon\setminus k}$ замінюється на множник z_k. Якщо індексів, що відповідають стохастичній похідній в множині γ немає, тоді $\lambda = 0$.

6.2 Представлення похідних півгрупи в термінах вихідної функції

Нагадаємо, що у розділі 5 було доведено наступне представлення похідних півгрупи:

$$(\nabla^x)^i P_t f(x) = \sum_{i_1+\dots+i_s=i,\ s=1,\dots,i} \mathbf{E}\,\langle (\nabla^\xi)^s f(\xi^x_t), (\mathbb{V}^x)^{i_1}\xi^x_t\otimes\dots\otimes(\mathbb{V}^x)^{i_s}\xi^x_t\,\rangle. \tag{6.12}$$

Щоб отримати представлення, яке дозволить довести властивість підвищення гладкості для півгрупи P_t, зауважимо, що головні частини рівнянь на звичайну та стохастичну похідну (5.21) та (6.3) співпадають, що дає можливість знайти такий спеціальний стохастичний напрямок $\widetilde{z}_k$, для якого має місце наступне співвідношення:

$$D_{\widetilde{z}_k}\xi_t^m = t\mathbb{V}_k\xi_t^m. \tag{6.13}$$

З властивостей диференціала Стратоновича та рівняння (5.21) маємо:

$$\delta(t\frac{\partial\xi_t^m}{\partial x^k}) = \frac{\partial\xi_t^m}{\partial x^k}dt - t\{\Gamma_p{}^m{}_q\frac{\partial\xi^p}{\partial x^k}\delta\xi^q + \mathbb{V}_k A_\sigma^m(\xi)\delta W^\sigma + \mathbb{V}_k A_0^m(\xi)dt\}. \tag{6.14}$$

Використовуючи (6.13), з якого випливає $I\!\!D_{\widetilde{z}_k}A_\sigma^m(\xi_t^x) = t\mathbb{V}_k A_\sigma^m(\xi_t^x)$, рівняння (6.14) можна трансформувати в (6.3), якщо $\widetilde{z}_t$ вибрати таким, що:

$$\frac{\partial\xi_t^m}{\partial x^k} = A_\sigma^m(\xi_t^x)\widetilde{z}_k^\sigma(t). \tag{6.15}$$

Надалі спеціальний напрямок, який задовольняє співвідношення (6.15) будемо позначати $\widetilde{z}_k$. Таким чином, аналогічно розділу 4, (6.13) дає можливість отримати наступне представлення:

$$\begin{aligned}\nabla_k P_t f(x) &= \mathbf{E}\,\nabla_m^\xi f(\xi_t^x)\cdot\frac{\partial\xi_t^m}{\partial x^k} = \\ &= \frac{1}{t}\,\mathbf{E}\,\nabla_m^\xi f(\xi_t^x)\cdot D_{\widetilde{z}_k}\xi_t^m = \frac{1}{t}\,\mathbf{E}\,D_{\widetilde{z}_k}f(\xi_t^x) = \\ &= \frac{1}{t}\mathbf{E}\,f(\xi_t^x)\int_0^t\sum_{\sigma=1}^d\widetilde{z}_k^\sigma dW^\sigma. \end{aligned}\tag{6.16}$$

Вище було використано характеризацію міри Вінера в термінах інтегрування частинами [77, 169], (див. також [200]):

$$\mathbf{E}\,D_zF = \mathbf{E}\,F\int_0^t\sum_{\sigma=1}^d z^\sigma(\tau)dW_\tau^\sigma.$$

Теорема 6.4. Для змішаних тензорів $F_{(b)}^{(a)}$ та $G_{(a)}^{(b)}$ (див. означення 5.2), що залежать від ξ_t^x, має місце наступна формула інтегрування частинами:

$$\mathbf{E}(I\!\!D_zF_{(b)}^{(a)})\,G_{(a)}^{(b)} = -\mathbf{E}\,F_{(b)}^{(a)}\,I\!\!D_zG_{(a)}^{(b)} + \mathbf{E}\,F_{(b)}^{(a)}\,G_{(a)}^{(b)}\int_0^t\sum_{\sigma=1}^d z^\sigma dW^\sigma \tag{6.17}$$

Вище розуміється домовленість про сумування по верхнім та нижнім індексам, що співпадають.

Доведення. З означення 6.1 випливає:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(I\!\!D_z F^{(a)}_{(b)})G^{(b)}_{(a)} = \\
&= \mathbf{E}\Big\{ D_z F^{(a)}_{(b)} + \sum_{s\in(a)} \Gamma_{p\ q}^{\ s}(D_z\xi^q) F^{(a)|_{s=p}}_{(\beta)} - \sum_{s\in(b)} \Gamma_{s\ q}^{\ p}(D_z\xi^q) F^{(a)}_{(b)|_{s=p}} \Big\} G^{(b)}_{(a)} = \\
&= \mathbf{E}\Big\{ - F^{(a)}_{(b)} D_z G^{(b)}_{(a)} + F^{(a)}_{(b)} G^{(b)}_{(a)} \int_0^t \sum_{\sigma=1}^d z^\sigma dW^\sigma + \\
&+ \sum_{s\in(a)} \Gamma_{s\ q}^{\ p}(D_z\xi^q) F^{(a)}_{(b)} G^{(b)}_{(a)|_{s=p}} - \sum_{s\in(b)} \Gamma_{p\ q}^{\ s}(D_z\xi^q) F^{(a)}_{(b)} G^{(b)|_{s=p}}_{(a)} \Big\},
\end{aligned}
$$

що дає (6.17). Вище було використано формулу інтегрування частинами для міри Вінера та перепозначено індекси p та s. □

Введемо наступні позначення: $Y_k = t\mathbb{V}^x_k - \widetilde{I\!\!D}_k + \int_0^t \sum\limits_{\sigma=1}^d \widetilde{z}^\sigma_k dW^\sigma$ де

$$
\widetilde{I\!\!D}_k = I\!\!D_{\widetilde{z}_k} \tag{6.18}
$$

— інваріантна стохастична похідна в спеціальному напрямку $\widetilde{z}_k$, який вибрано відповідно до (6.15).

Теорема 6.5. Високого порядку похідні півгрупи P_t допускають представлення:

$$
\nabla^x_\gamma P_t f(x) = \frac{1}{t^{|\gamma|}} \mathbf{E} f(\xi^x_t) Y_\gamma 1, \tag{6.19}
$$

де $Y_\gamma = Y_{k_n} \dots Y_{k_1}$ для множини $\gamma = \{k_1, \dots, k_n\}$.

Доведення. Базою індукції для представлення (6.19) є стандартне представлення пігрупи: $P_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi^x_t)$. Припустимо, що (6.19) виконано для деякого $\gamma = \{k_1, \dots, k_n\}$, тоді для наступного порядку похідної виконано:

$$\nabla_k \nabla_\gamma P_t f(x) = \partial_k \nabla_\gamma P_t f - \sum_{j\in\gamma} \Gamma_{j\ k}^{\ h}(x) \nabla_{\gamma|_{j=h}} P_t f =$$

$$= \partial_k (\frac{1}{t^{|\gamma|}} \mathbf{E} f Y_\gamma 1) - \frac{1}{t^{|\gamma|}} \sum_{j\in\gamma} \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x) \mathbf{E} f Y_{\gamma|_{j=h}} =$$

$$= \frac{1}{t^{|\gamma|}} \mathbf{E} f \{\partial_k Y_\gamma 1 - \sum_{j\in\gamma} \Gamma_{k\ j}^{\ h}(x) Y_{\gamma|_{j=h}}\} + \frac{1}{t^{|\gamma|}} \mathbf{E} \partial_k^x f(\xi) \cdot Y_\gamma 1 =$$

$$= \frac{1}{t^{|\gamma|+1}} \mathbf{E} f(\xi_t^x) \{t \nabla_k - D_{\widetilde{z}_k} + \int_0^t \widetilde{z}_k^\varepsilon dW^\varepsilon\} Y_\gamma 1.$$

Залишилось виділити інваріантні похідні та використати, що з (6.15):

$$t \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) X_\gamma^p \frac{\partial \xi^q}{\partial x^k} = \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) X_\gamma^p D_k \xi^q.$$

$\square$

6.3 Нелінійна оцінка на змішані варіації

Надалі символом $\mathbb{D}_k$ будемо позначати $\mathbb{V}_k$-похідну, якщо індекс k відповідає "звичайній" похідній в сенсі означення 5.3 і буде означати $\widetilde{I\!\!D}_k$, якщо індекс k відповідає інваріантній стохастичній похідній в сенсі означення 6.1. При цьому $\widetilde{I\!\!D}_k$ — стохастична похідна в спеціальному напрямку $\widetilde{z}_k$ (6.15). Крім того, символ $\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x$ означатиме, що від процесу ξ_t^x взято $|\alpha|$ "звичайних" $\mathbb{V}$-похідних та $|\beta|$ інваріантних стохастичних похідних, і множина $\alpha\cup\beta = \{1,\ldots,i\}$ утворює деяку множину індексів, які нумерують напрямки диференціювання. Продовжуючи методологію нелінійних оцінок, розроблену в попередніх розділах, розглянемо нелінійний вираз:

$$Q_n^{n'}(\xi,t) = \sum_{\alpha\cup\beta=\{1,\ldots,i\}, |\alpha|\le n, |\beta|\le n'} \mathbf{E}\, p_i(\rho^2(\xi_t^x, o))\, \| \frac{1}{t^{|\beta|}} \mathbb{D}^{\alpha\cup\beta} \xi_t^x \|^{r/i}, \ \ r \ge 2(n+n'). \tag{6.20}$$

Теорема 6.6. [59]Нехай виконані умови (5.36)-(5.37) та (5.39). Припустимо, що $\rho^2(x,o)$ є C^∞-гладкою функцією. Нехай монотонні зростаючі функції поліноміальної поведінки $p_j \geq 1$ (тобто такі, що існує стала $C\colon p_j''(u)u \leq Cp_j'(u)$) задовольняють ієрархію:

$$\forall\, j_1 + \dots + j_s = i \leq n \quad [p_i(|\cdot|^2)]^i (1 + |\cdot|^2)^{r\varkappa} \leq [p_{j_1}(|\cdot|^2)]^{j_1} \dots [p_{j_s}(|\cdot|^2)]^{j_s}. \tag{6.21}$$

Нехай, крім того, існує така стала $\varkappa_1$, що

$$\inf \frac{\|A^\sigma(x)\|}{(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa_1}} > 0. \tag{6.22}$$

Тоді має місце наступна нелінійна оцінка:

$$\exists\, K \ \ \forall\, t \geq 0 \quad Q_n^{n'}(\xi,t) \leq e^{Kt} Q^0_{n+n'}(\xi,0). \tag{6.23}$$

Цей результат є узагальненням результатів роботи [58].

Доведення. Розглянемо один з доданків у виразі (6.20), що відповідає множині $\alpha \cup \beta = \{1,\dots,i\}$ і не має множника $\frac{1}{t^{|\beta|}}$. Покладемо для зручності $\dfrac{r}{i} = 2q$ і будемо надалі використовувати позначення $\rho(\xi_s^t)$ замість $\rho(\xi_t^s, o)$. З формули Іто випливає:

$$\begin{aligned} h(t) = \mathbf{E} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q} = h(0) + \\ + \mathbf{E}\int_0^t p_i(\rho^2(\xi_t^x))\, d\|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q} + \quad (6.24) \\ + \mathbf{E}\int_0^t \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q} dp_i(\rho^2(\xi_t^x)) + \quad (6.25) \\ + \frac{1}{2}\mathbf{E}\int_0^t d[p_i(\rho^2(\xi_t^x)), \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}]. \quad (6.26) \end{aligned}$$

Вираз $[X,Y]$ позначає квадратичну варіацію процесів X та Y. Продовжуючи далі, маємо:

$$(6.24) = q\int\limits_0^t \mathbf{E} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)} d\|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}q(q-1)\int_0^t \mathbf{E}p_i(\rho^2(\xi_t^x))\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-2)}d[\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2,\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2]; \tag{6.27}$$

$$(6.25)=\int_0^t \mathbf{E}\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}p_i'(\rho^2(\xi_t^x))d\rho^2(\xi_t^x)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}p_i''(\rho^2(\xi_t^x))d[\,\rho^2(\xi_t^x),\rho^2(\xi_t^x)\,]; \tag{6.28}$$

$$(6.26)=\frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)}d[\rho^2(\xi_t^x),\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2]. \tag{6.29}$$

Для оцінки виразу (6.24) використаємо наступну лему, яка доводиться аналогічно лемі D.6 (див. додаток D).

Лема 6.7. Диференціал норми процесу X_γ^m (6.6) має наступний вигляд

$$d\|X_\gamma^m\|^2=g^{\gamma\varepsilon}(x)\,\{\,g_{mn}(X_\gamma^m M_{\varepsilon\ \sigma}^{\ n}+X_\varepsilon^n M_{\gamma\ \sigma}^{\ m})dW^\sigma+$$

$$+g_{mn}(X_\gamma^m N_\varepsilon^n+X_\varepsilon^n N_\gamma^m+M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}M_{\varepsilon\ \sigma}^{\ n})dt+\frac{1}{2}g_{mn}(X_\gamma^m P_\varepsilon^n+X_\varepsilon^n P_\gamma^m)dt\,\}, \tag{6.30}$$

де вирази P_γ^m задовольняють наступні рекурентні співвідношення:

$$P_k^m=\mathcal{D}_k(\nabla_{A_\sigma}A_\sigma^m)+R_{p\ \ell q}^{\ m}A_\sigma^p A_\sigma^q(\mathcal{D}_k\xi^\ell) \tag{6.31}$$

$$P_{\gamma\cup\{k\}}^m=\mathcal{D}_kP_\gamma^m+2R_{p\ \ell q}^{\ m}M_{\gamma\ \sigma}^{\ p}(\mathcal{D}_k\xi^\ell)A_\sigma^q+(\nabla_sR_{p\ \ell q}^{\ m})X_\gamma^p(\mathcal{D}_k\xi^\ell)A_\sigma^qA_\sigma^s+$$

$$+R_{p\ \ell q}^{\ m}X_\gamma^p(\mathcal{D}_kA_\sigma^\ell)A_\sigma^q+R_{p\ \ell q}^{\ m}X_\gamma^p(\mathcal{D}_k\xi^\ell)(\nabla_{A_\sigma}A_\sigma) \tag{6.32}$$

З наслідку 6.3 випливає наступна структура коефіцієнтів P_γ^m:

$$P_k^m=\nabla_\ell^\xi\nabla_{A_\sigma}A_\sigma^m\cdot\mathcal{D}_k\xi^\ell+R(A_\sigma,\mathcal{D}_k\xi)A_\sigma;$$

$$P_\gamma=\nabla_\ell\nabla_{A_\sigma}A_\sigma\cdot\mathcal{D}_\gamma\xi^\ell+R(A_\sigma,\mathcal{D}_\gamma\xi)A_\sigma+\sum_{\delta_1\cup\dots\cup\delta_s=\gamma,\ s\ge2}L_{\delta_1,\dots,\delta_s}\cdot\mathcal{D}_{\delta_1}\xi\dots\mathcal{D}_{\delta_s}\xi$$

де $L_{\delta_1,\dots,\delta_s}$ залежать від A_0,A_σ,R та їх коваріантних похідних. Підставляючи в (6.30) маємо:

$$d\|\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2=2\,\langle\,\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi,\nabla_\ell^\xi A_\sigma[\mathcal{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^\ell]\,\rangle_{T_x^{(0,i)}\otimes T_\xi}dW^\sigma+ \tag{6.33}$$

$$+\,2\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi,\nabla^{\xi}_{\ell}\widetilde{A_0}[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^{\ell}]\,\rangle_{T_x^{(0,i)}\otimes T_\xi}dt+ \tag{6.34}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{d}\|\nabla A_\sigma[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi]\,\|^2_{T_x^{(0,i)}\otimes T_\xi}dt+ \tag{6.35}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{d}\langle\,R(A_\sigma,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi)A_\sigma,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi\,\rangle_{T_x^{(0,i)}\otimes T_\xi}\,dt+ \tag{6.36}$$

$$+\sum_{\delta_1+\cdots+\delta_s=\alpha\cup\beta,\ s\geq 2}L^3_{\delta_1,\dots,\delta_s,\sigma}\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi\,\rangle dW^\sigma+ \tag{6.37}$$

$$+\sum_{\delta_1+\cdots+\delta_s=\alpha\cup\beta,\ s\geq 2}L^4_{\delta_1,\dots,\delta_s,\sigma}\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi\,\rangle dt+ \tag{6.38}$$

$$+\,\lambda\sum_{\beta_1,\dots,\beta_a,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_b}K^1_{\beta_1,\dots,\beta_a,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_b}\times$$

$$\times\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi,\mathbb{D}^{\beta_1}\xi\dots\mathbb{D}^{\beta_a}\xi\cdot\mathbb{D}^{\varepsilon_1\setminus k_1}\widetilde{z}_{k_1}\dots\mathbb{D}^{\varepsilon_b\setminus k_b}\widetilde{z}_{k_b}\,\rangle dt. \tag{6.39}$$

В рядках (6.37) та (6.38) множини δ містять індекси, які відповідають як "звичайним" $\mathbb{\nabla}$ так і інваріантним стохастичним похідним. Сумування в (6.39) проводиться по всім розбиттям множини $\{1,\dots,i\}$ на підмножини $\beta_1\cup\cdots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\cdots\cup\varepsilon_b=\{1,\dots,i\}$, що не перетинаються. З (6.33) та (6.37) випливає, що вирази $\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t\|^2$ оцінюються наступним чином:

$$d\,[\,\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t\|^2,\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t\|^2\,]\leq 4\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t\|^2\cdot\sum_{\sigma=1}^{d}\|\nabla^{\xi}A_\sigma[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t]\|^2dt+ \tag{6.40}$$

$$+\sum_{\delta_1+\cdots+\delta_s=\alpha\cup\beta,s\geq 2}L^5_{\delta_1,\dots,\delta_s,\sigma}\,\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t\|^2\cdot\|\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi^x_t\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi^x_t\,\rangle\|\,dt+ \tag{6.41}$$

$$+\sum_{\delta_1+\cdots+\delta_s=\alpha\cup\beta,s\geq 2}L^6_{\delta_1,\dots,\delta_s,\sigma}\,\|\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^x_t,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi^x_t\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi^x_t\,\rangle\|^2dt \tag{6.42}$$

Збираючи разом члени, які виникають з (6.34), (6.35), (6.36) та (6.40), маємо:

$$(6.24) \leq 4q \int_0^t \mathbf{E} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)} \langle\, \mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi, \nabla_\ell^\xi \widetilde{A_0}[\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi^\ell]\,\rangle dt+ \tag{6.43}$$

$$+ (2q+4)\int_0^t \mathbf{E} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)} \sum_{\sigma=1}^d \|\nabla A_\sigma[\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi]\,\|^2 dt+ \tag{6.44}$$

$$+ 2q\int_0^t \mathbf{E} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)} \sum_{\sigma=1}^d \langle\, R(A_\sigma, \mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi)A_\sigma, \mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi\,\rangle dt+ \tag{6.45}$$

$$+ I_1 + I_2 + I_3, \tag{6.46}$$

де

$$I_1 = \frac{1}{2}q(q+1)\int_o^t \sum_{\delta_1\ldots\delta_s} \mathbf{E}\, L^7_{\delta_1,\ldots,\delta_s} p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \times$$

$$\times \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q-1} \|\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x \ldots \mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|\, dt; \tag{6.47}$$

$$I_2 = \lambda q \int_0^t \sum_{\beta_1\ldots\beta_a,\varepsilon_1\ldots\varepsilon_b} \mathbf{E}\, K^1_{\beta_1,\ldots,\beta_a,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_b}\, p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q-1} \times$$

$$\times \|\mathfrak{D}^{\beta_1}\xi_t^x \ldots \mathfrak{D}^{\beta_a}\xi_t^x \cdot \mathfrak{D}^{\varepsilon_1\setminus k_1}\widetilde{z}_{k_1} \ldots \mathfrak{D}^{\varepsilon_b\setminus k_b}\widetilde{z}_{k_b}\|\, dt; \tag{6.48}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}q(q-1)\int_0^t \sum_{\delta_1\ldots\delta_s} \mathbf{E}\, L^6_{\delta_1,\ldots,\delta_s,\sigma}\, p_i(\rho^2(\xi_t^x)) \times$$

$$\times \|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q-2} \|\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x \ldots \mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^2 dt. \tag{6.49}$$

Вирази (6.28) та (6.29) оцінюються аналогічним чином. Застосовуючи формулу Іто до $\rho^2(\xi_t^x)$ та монотонність поліноміальних функцій $p_i(\cdot)$, маємо:

$$(6.28) = \int_0^t \mathbf{E}\|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}\Big\{ p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\mathcal{L}\rho^2(\xi_t^x)+$$

$$+\frac{1}{2}p_i''(\rho^2(\xi_t^x))\rho^2(\xi_t^x)\frac{1}{\rho^2(\xi_t^x)}\sum_{\sigma=1}^d (A_\sigma\rho^2(\xi_t^x))^2\Big\} dt \leq$$

$$\leq \int_0^t \mathbf{E}\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\Big\{\mathcal{L}\rho^2(\xi_t^x)+\frac{C}{\rho^2(\xi_t^x)}\sum_{\sigma=1}^d\|A_\sigma\rho^2(\xi_t^x)\|^2\Big\}dt. \tag{6.50}$$

Враховуючи (6.33)–(6.39), маємо:

$$d[\rho^2(\xi_t^x),\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^2]=2\sum_{\sigma=1}^d A_\sigma\rho^2(\xi_t^x)\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x,\{\nabla A_\sigma[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x]+$$
$$+\sum_{\delta_1,\dots,\delta_s}L^3_{\delta_1,\dots,\delta_s,\sigma}\,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi_t^x\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi_t^x\}\,\rangle dt.$$

Застосування нерівності $2a\|x\|\,\|y\|\leq\frac{a^2\|x\|^2}{\rho^2}+\|y\|^2\rho^2$ дає оцінку:

$$(6.29)\leq\int_0^t\mathbf{E}\,p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\,\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)}\times$$
$$\times\,|\sum_{\sigma=1}^d A_\sigma\rho^2(\xi_t^x)\cdot\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x,\nabla A_\sigma[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x]\,\rangle\,|\,dt+ \tag{6.51}$$
$$+\int_0^t\mathbf{E}\,p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\,\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)}\times \tag{6.52}$$
$$\times\,|\sum_{\sigma=1}^d A_\sigma\rho^2(\xi_t^x)\sum_{\delta_1\dots\delta_s}L^3_{\delta_1,\dots,\delta_s}\,\langle\,\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x,\mathbb{D}^{\delta_1}\xi_t^x\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi_t^x\,\rangle\,dt\leq \tag{6.53}$$
$$\leq C\int_0^t\mathbf{E}\,p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}\sum_{\sigma=1}^d\frac{\|A_\sigma\rho^2(\xi_t^x)\|^2}{\rho^2(\xi_t^x)}dt+ \tag{6.54}$$
$$+\,C\int_0^t\mathbf{E}p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\rho^2(\xi_t^x)\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)}\|\nabla A_\sigma[\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x]\,\|^2+ \tag{6.55}$$
$$+\,C\int_0^t\mathbf{E}p_i'(\rho^2(\xi_t^x))\rho^2(\xi_t^x)\|\mathbb{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2(q-1)}\sum_{\delta_1\dots\delta_s}L^3_{\delta_1,\dots,\delta_s}\|\mathbb{D}^{\delta_1}\xi_t^x\dots\mathbb{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^2dt. \tag{6.56}$$

Член (6.54) разом з (6.50) оцінюється $\int_0^t h(\tau)d\tau$ після застосування теореми 5.14. Член (6.55) разом з (6.44) з врахуванням (6.43) – (6.45) приводить до умови коерцитивності зі сталою K_C. Для того, щоб врахувати множник $1/t^{2q|\beta|}$ в $Q_n(t)$ необхідна наступна лема.

Лема 6.8. [58] Нехай $h_0 = 0$ і

$$h_t \le M \int_0^t h_t dt + \int_0^t [\, L_t + h_t^{1-1/\alpha} K_t \,]\, dt \tag{6.57}$$

з $L_t, K_t \ge 0$ такими, що

$$\int_0^t \frac{L_s}{s^\alpha} ds < \infty \quad \text{та} \quad \sup_{s\in[0,t]} K_s < \infty$$

Тоді

$$\sup_{s\in[0,t]} \frac{h_s}{s^\alpha} \le ce^{Mt} \int_0^t \frac{L_s}{s^\alpha} ds + \frac{e^{\alpha Mt}}{\alpha^\alpha} \sup_{s\in[0,t]} K_s^\alpha \tag{6.58}$$

Доведення. З припущення (6.57) для $\psi_t = L_t + h_t^{1-1/q} K_t$ випливає, що

$$e^{Mt} \frac{d}{dt}(e^{-Mt} \int\limits_0^t h_t dt) \le \int\limits_0^t \psi_t dt.$$

Це дає

$$\int\limits_0^t h_t dt \le \int\limits_0^t e^{M(t-s)} \int\limits_0^s \psi_\sigma d\sigma ds \le \frac{e^{Mt}-1}{M} \int\limits_0^t \psi_s ds$$

Підставляючи цю нерівність в (6.57) маємо

$$h_t \le e^{Mt} (\int\limits_0^t L_t dt + \int\limits_0^t h_t^{1-1/q} K_t dt).$$

Отже

$$a_t = \sup_{s\in[0,t]} \frac{h_s}{s^q} \le$$

$$\le \sup_{s\in[0,t]} \frac{e^{Ms}}{s^q} (\int\limits_0^s \frac{L_\sigma}{\sigma^q} \sigma^q d\sigma + \int\limits_0^s (\frac{h_\sigma}{\sigma^q})^{1-1/q} \sigma^{q-1} K_\sigma d\sigma) \le \tag{6.59}$$

$$\le e^{Mt} \int\limits_0^t \frac{L_\sigma}{\sigma^q} d\sigma + e^{Mt} a_t^{1-1/q} \sup_{\sigma\in[0,t]} K_\sigma \sup_{s\in[0,t]} \frac{1}{s^q} \int\limits_0^s \sigma^{q-1} d\sigma. \tag{6.60}$$

Застосовуючи нерівність $x^{1-1/q}y \le (1-1/q)x + y^q/q$ до другого члена в (6.60) маємо

$$a_t \le e^{Mt}\int\limits_0^t \frac{L_s}{s^q}ds + (1-1/q)a_t + \frac{(e^{Mt}\sup\limits_{s\in[0,t]} K_s/q)^q}{q},$$

що дає (6.58). □

Зауважимо, що з (5.39) випливає, що найвищий порядок поведінки функцій L^7, K^1, L^6 та L^3 в I_1, I_2, I_3 та (6.56) є $(1+\rho^2(\xi_t^x))^{\varkappa'}$ з деяким $\varkappa'$. Застосовуючи нерівність

$$\mathbf{E}px^{2q-1}y \le \left(\mathbf{E}px^{2q}\right)^{1-1/2q}\left(\mathbf{E}\,p\xi^{2q}\right)^{1/2q}$$

оцінимо I_2 наступним чином:

$$I_2 \le C_1\int_0^t \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_a,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_b}\left(\mathbf{E}\,p_i(\rho^2)\|\mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta}\xi_t^x\|^{2q}\right)^{1-1/2q}\Big(\mathbf{E}\,p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{2q\varkappa}\cdot$$
$$\cdot\,\|\mathfrak{D}^{\beta_1}\xi_t^x\ldots\mathfrak{D}^{\beta_a}\xi_t^x\mathfrak{D}^{\varepsilon_1\setminus k_1}\widetilde{z}_{k_1}\ldots\mathfrak{D}^{\varepsilon_b\setminus k_b}\widetilde{z}_{k_b}\|^{2q}\Big)^{1/2q}. \tag{6.61}$$

Щоб отримати форму (6.57) оцінимо I_1, I_3 та (6.56) використовуючи нерівність $x^{m-n}\xi^n \le \frac{m-n}{m}x^m + \frac{n}{m}\xi^m$ з $m=2q$ та $n=1$ або 2. В результаті отримаємо:

$$h(t) \le C_1\int_0^t h(\tau)d\tau + C_2\int_0^t L_\tau d\tau + C_3\int_0^t h(\tau)^{1-1/2q}K_\tau d\tau,$$

де

$$L_t = \sum_{\delta_1,\ldots,\delta_s}\mathbf{E}p_i(1+\rho^2)^{2q\varkappa}\|\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x\ldots\mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^{2q}; \tag{6.62}$$

$$K_t = \sum_{\beta_1,\ldots,\beta_a,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_b}\Big(\mathbf{E}\,p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{2q\varkappa}\times$$
$$\times\,\|\mathfrak{D}^{\beta_1}\xi_t^x\ldots\mathfrak{D}^{\beta_a}\xi_t^x\mathfrak{D}^{\varepsilon_1\setminus k_1}\widetilde{z}_{k_1}\ldots\mathfrak{D}^{\varepsilon_b\setminus k_b}\widetilde{z}_{k_b}\|^{2q}\Big)^{1/2q}. \tag{6.63}$$

Щоб застосувати лему 6.8 залишилось оцінити вирази L_τ та K_τ. Для оцінки L_τ використаємо нерівність

$$\|x_{\delta_1}\dots x_{\delta_s}\|^{m/i} \le (\|x_{\delta_1}\|^{m/|\delta_1|})^{|\delta_1|/i}\dots(\|x_{\delta_s}\|^{m/|\delta_s|})^{|\delta_s|/i}.$$

Оскільки $2q = m/i$ і $\delta_1\cup\dots\cup\delta_s = \{1,\dots,i\}$ маємо

$$\frac{1}{\tau^{2q|\beta|}}L_\tau \le \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s}\mathbf{E}\,p_i(\rho^2)(1+\rho^2)^{\varkappa m/i}\|\frac{1}{\tau^{|\delta_1'|}}\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x\|^{m/i}\dots\|\frac{1}{\tau^{|\delta_s'|}}\mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^{m/i} \le$$
$$\le \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s}\mathbf{E}\left(p_{|\delta_1|}(\rho^2)\,\|\frac{1}{\tau^{|\delta_1'|}}\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x\|^{m/|\delta_1|}\right)^{|\delta_1|/i}\dots\left(p_{|\delta_s|}(\rho^2)\,\|\frac{1}{\tau^{|\delta_s'|}}\mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^{m/|\delta_s|}\right)^{|\delta_s|/i}\le$$
$$\le \sum_{\delta_1,\dots,\delta_s,s\ge 2}\mathbf{E}\Big(\frac{|\delta_1|}{i}p_{|\delta_1|}(\rho^2)\,\|\frac{1}{\tau^{|\delta_1'|}}\mathfrak{D}^{\delta_1}\xi_t^x\|^{m/|\delta_1|}+\dots$$
$$+\frac{|\delta_s|}{i}p_{|\delta_s|}(\rho^2)\,\|\frac{1}{\tau^{|\delta_s'|}}\mathfrak{D}^{\delta_s}\xi_t^x\|^{m/|\delta_s|}\Big), \tag{6.64}$$

де δ' позначає “стохастичну” частину індексів в множині δ. Вище було використано умову ієрархії поліноміальних ваг (6.21), а також нерівність $|z_1\dots z_n| \le |z_1|^{q_1}/q_1+\dots+|z_n|^{q_n}/q_n$ з $1/q_1+\dots+1/q_n=1$. Отже маємо:

$$\frac{L_\tau}{\tau^{2q|\beta|}} \le (6.64) \le CQ_{n-1}^{n'}(\xi,\tau)+C'Q_n^{n'-1}(\xi,\tau). \tag{6.65}$$

Щоб оцінити (6.63) зауважимо:

$$K_\tau \le \sum_{\beta,\varepsilon}\Big(\mathbf{E}\,p_i(1+\rho^2)^{2q\varkappa'}\prod_{j=1}^{a}\|\mathfrak{D}^{\beta_j}\xi_t^x\|^{2q}\cdot\prod_{j=1}^{b}\|\mathfrak{D}^{\varepsilon_j\setminus k_j}\widetilde{z}_{k_j}\|^{2q}\Big)^{1/2q}. \tag{6.66}$$

Розглянемо один з членів в (6.66) вигляду $\|\mathfrak{D}^{\varepsilon_j\setminus k_j}\widetilde{z}_{k_j}\|^{2q}$. З (6.15) випливає:

$$\widetilde{z}_k^\sigma = [A^{-1}(\xi_t^x)]_p^\sigma\frac{\partial\xi^p}{\partial x^k} \tag{6.67}$$

Тому

$$\mathfrak{D}^{\varepsilon\setminus k}\widetilde{z}_k = \mathfrak{D}^{\varepsilon\setminus k}\Big[(A^{-1})\frac{\partial\xi}{\partial x^k}\Big] =$$

$$= \sum_{\mu_1\cup\dots\cup\mu_\ell=\varepsilon\backslash k, |\mu_1|\ge 0} (A^{-1})^\ell \mathbb{D}^{\mu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^k}\cdot \mathbb{D}^{\mu_2}\xi_t^x\dots\mathbb{D}^{\mu_\ell}\xi_t^x. \qquad (6.68)$$

Вище сумування проходить по всім розбиттям множини $\varepsilon\backslash k$ на підмножини, що не перетинаються: $\mu_1\cup\dots\cup\mu_\ell = \varepsilon\backslash k$, де $\ell = 1,\dots,|\varepsilon\backslash k|$, і множина μ_1 може бути порожньою. Застосовуючи (6.22) маємо

$$\prod_{j=1}^b \|\mathbb{D}^{\varepsilon_j\backslash k_j}\widetilde{z}_{k_j}\|^{2q} \le \prod_{j=1}^b \sum_{\mu_1\cup\dots\cup\mu_\ell=\varepsilon_j\backslash k_j, |\mu_1|\ge 0} (1+\rho^2(\xi_t^x))^{2q\varkappa_1\ell}\cdot$$
$$\cdot \|\mathbb{D}^{\mu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_j^k}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\mu_\ell}\xi\|^{2q} = \qquad (6.69)$$
$$= \sum_{\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\bigcup\limits_{j=1}^b(\varepsilon_j\backslash k_j)} (1+\rho(\xi_t^x))^{2q\varkappa_1(\sum\limits_{j=1}^b|\varepsilon_j|-b)}\cdot$$
$$\cdot \|\mathbb{D}^{\nu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_1}}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_b}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_b}}\|^{2q}\|\mathbb{D}^{\nu_{b+1}}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_\ell}\xi\|^{2q}$$

В (6.69) індекс ℓ змінюється від 1 до $\sum\limits_{j=1}^b |\varepsilon_j\backslash k_j| = \sum\limits_{j=1}^b|\varepsilon_j| - b$, і для перших b членів у добутку множини $\nu_1,\dots,\nu_\ell$ можуть бути порожніми: $|\nu_1|,\dots,|\nu_b|\ge 0$. Для інших $|\nu_{b+1}|,\dots,|\nu_\ell|\ge 1$. Застосовуючи (6.69) продовжимо оцінку (6.66) виразів K_τ:

$$K_\tau \le \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\cup\varepsilon_b=\{1,\dots,i\}} \Big[\mathbf{E}\, p_i(1+\rho^2(\xi_t^x))^{2q\varkappa'}\prod_{j=1}^a\|\mathbb{D}^{\beta_j}\xi\|^{2q}\times$$
$$\times \sum_{\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\bigcup\limits_{j=1}^b(\varepsilon_j\backslash k_j)} (1+\rho^2(\xi_t^x))^{2q\varkappa_1(\sum\limits_{j=1}^b|\varepsilon_j|-b)}\times$$
$$\times \|\mathbb{D}^{\nu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_1}}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_b}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_b}}\|^{2q}\|\mathbb{D}^{\nu_{b+1}}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_\ell}\xi\|^{2q}\Big]^{1/2q}. \qquad (6.70)$$

Виберемо $\varkappa = \max\Big(\varkappa', \varkappa_1(\sum\limits_{j=1}^b|\varepsilon_j|-b)\Big)$ і продовжимо

$$(6.70) = \sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\cup\varepsilon_b=\{1,\dots,i\}} \Big[\mathbf{E}\, p_i(1+\rho(\xi_t^x))^{2q\varkappa}\times$$

$$\times \sum_{\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\cup(\varepsilon_j\setminus k_j)} \|\mathbb{D}^{\beta_1}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\beta_a}\xi\|^{2q}\times$$

$$\times \|\mathbb{D}^{\nu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_1}}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_b}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_b}}\|^{2q}\cdot\|\mathbb{D}^{\nu_{b+1}}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_\ell}\xi\|^{2q}\Big]^{1/2q}\le$$

$$\le C\sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\cup\varepsilon_b=\{1,\dots,i\}}\ \sum_{\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\bigcup\limits_{j=1}^{b}(\varepsilon_j\setminus k_j)}\Big[\mathbf{E}\,p_i(1+\rho^2(\xi_t^x))^{2q\varkappa}\times$$

$$\times\|\mathbb{D}^{\beta_1}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\beta_a}\xi\|^{2q}\times$$

$$\times \|\mathbb{D}^{\nu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_1}}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_b}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_b}}\|^{2q}\|\mathbb{D}^{\nu_{b+1}}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\nu_\ell}\xi\|^{2q}\Big]^{1/2q}. \quad (6.71)$$

Оскільки $\bigcup\limits_{j=1}^{b}(\varepsilon_j\setminus k_j)=\{1,\dots,i\}\setminus\Big(\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\{k_1,\dots,k_b\}\Big)$ перепишемо сумування наступним чином:

$$\sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\varepsilon_1\cup\dots\varepsilon_b=\{1,\dots,i\}}\ \sum_{\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\bigcup\limits_{j=1}^{b}(\varepsilon_j\setminus k_j)}=$$

$$=\sum_{\beta_1\cup\dots\cup\beta_a\cup\nu_1\cup\dots\cup\nu_\ell=\{1,\dots,i\}\setminus\{k_1,\dots,k_b\}}=\sum_{\mu_1\cup\dots\cup\mu_\ell=\{1,\dots,i\}\setminus\{k_1,\dots,k_b\}}$$

Останнє сумування відбувається по всім розбиттям множини $\{1,\dots,i\}\setminus\{k_1,\dots,k_b\}$ на підмножини $\mu_1,\dots,\mu_\ell$, які не перетинаються, такі, що $|\mu_1|,\dots,|\mu_b|\ge 0$ і $|\mu_{b+1}|,\dots,|\mu_\ell|\ge 1$. Отже маємо

$$(6.71)\le\sum_{\mu_1\cup\dots\cup\mu_\ell=\{1,\dots,i\}\setminus\{k_1,\dots,k_b\}}\Big[\mathbf{E}\,p_i(1+\rho^2(\xi_t^x))^{2q\varkappa}\times \quad (6.72)$$

$$\times\|\mathbb{D}^{\mu_1}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_1}}\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\mu_b}\frac{\partial\xi}{\partial x^{k_b}}\|^{2q}\cdot\|\mathbb{D}^{\mu_{b+1}}\xi\|^{2q}\dots\|\mathbb{D}^{\mu_\ell}\xi\|^{2q}\Big]^{1/2q}.$$

Таким чином, загальна кількість стохастичних похідних в (6.72) зменшена на величину b, оскільки властивість (6.67) дає можливість замінити стохастичну похідну з індексом k у напрямку $\widetilde{z}_k$ на звичайну похідну. Отже, далі можна міркувати аналогічно оцінці виразу (6.64), використовуючи при цьому ієрархії поліноміальних ваг (6.21) та враховуючи, що

$|\mu_1| + \cdots + |\mu_\ell| = i - b$, маємо

$$(6.72) \le \sum_{\mu_1 \ldots \mu_\ell} \Big[\mathbf{E}\, p_i (1 + \rho^2(\xi^x_t))^{2q\varkappa} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_1|}} \mathfrak{D}^{\mu_1} \frac{\partial \xi}{\partial x^{k_1}} \|^{2q} \ldots \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_\ell|}} \mathfrak{D}^{\mu_\ell} \xi \|^{2q} \Big]^{1/2q} \le$$

$$\le e^{M\,t} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell} \Big[\Big(\mathbf{E}\, p_{|\mu_1|+1} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_1|}} \mathfrak{D}^{\mu_1} \frac{\partial \xi}{\partial x^{k_1}} \|^{m/(|\mu_1|+1)} \Big)^{(|\mu_1|+1)/i} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \Big(\mathbf{E}\, p_{|\mu_b|+1} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_b|}} \mathfrak{D}^{\mu_b} \frac{\partial \xi}{\partial x^{k_b}} \|^{m/(|\mu_b|+1)} \Big)^{(|\mu_b|+1)/i} \cdot$$

$$\cdot \Big(\mathbf{E}\, p_{|\mu_{b+1}|} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_{b+1}|}} \mathfrak{D}^{\mu_{b+1}} \xi \|^{m/|\mu_{b+1}|} \Big)^{|\mu_{b+1}|/i} \ldots \Big(\mathbf{E}\, p_{|\mu_\ell|} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_\ell|}} \mathfrak{D}^{\mu_\ell} \xi \|^{m/|\mu_\ell|} \Big)^{|\mu_\ell|/i} \Big]^{1/2q} \le$$

$$\le e^{M\,t} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell} \Big[\mathbf{E} \Big(\frac{|\mu_1|+1}{i} p_{|\mu_1|+1} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_1|}} \mathfrak{D}^{\mu_1} \frac{\partial \xi}{\partial x^{k_1}} \|^{m/(|\mu_1|+1)} + \cdots +$$

$$+ \frac{|\mu_\ell|}{i} p_{|\mu_\ell|} \| \frac{1}{\tau^{|\mu'_\ell|}} \mathfrak{D}^{\mu_\ell} \xi \|^{m/|\mu_\ell|} \Big) \Big]^{1/2q} \le$$

$$\le C e^{M\,t} \Big(\sum_{\pi=1}^{b} Q^{n'-\pi}_{n+\pi}(\xi, \tau) \Big)^{1/2q} \tag{6.73}$$

Вище було також використано, що $\tau^{i-b} \le e^{(i-b)\tau}$. Таким чином, маємо оцінку на кожен з членів у виразі $Q^{n'}_n$ (6.20):

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}\, p_i \| \frac{1}{s^{|\beta|}} \mathfrak{D}^{\alpha\cup\beta} \xi^x_s \|^{m/i} \le C e^{(M+1)t} \sup_{s\in[0,t]} (Q^{n'}_{n-1}(s) + Q^{n'-1}_n(s) + \sum_{\pi=1}^{b} Q^{n'-\pi}_{n+\pi}(s)),$$

де було застосовано оцінки (6.65) та (6.73) на вирази L_τ, K_τ в (6.58). Отже

$$\sup_{s\in[0,t]} Q^{n'}_n(s) \le C' e^{M' t} \sup_{s\in[0,t]} (Q^{n'}_{n-1}(s) + Q^{n'-1}_n(s) + \sum_{\pi=1}^{b} Q^{n'-\pi}_{n+\pi}(s)).$$

Ітерація цієї оцінки проводить до

$$\sup_{s\in[0,t]} Q^{n'}_n(s) \le K e^{M\,t} \sup_{s\in[0,t]} Q^0_{n+n'}(s).$$

Зауважимо, що вираз $Q^0_{n+n'}$ вже не містить “стохастичних” похідних, тому можемо застосувати звичайну нелінійну оцінку на варіації: $Q_m(s) \le e^{M\,s} Q_m(0)$, що остаточно доводить твердження теореми. □

6.4 Підвищення гладкості під дією півгрупи у випадку некомпактного многовиду

Введемо простори диференційованих функцій $C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M)$, оснащені нормою

$$\|f\|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}} = \max_{i=0,\dots,n} \sup_{x\in M} \frac{\|(\nabla^x)^i f(x)\|}{q_i(\rho^2(x,o))},$$

де монотонні додатні ваги q_i мають поліноміальну поведінку та задовольняють ієрархію:

$$\exists\,\varkappa\ \ \forall\, i=1,\dots,n \quad q_{i+1}(u) \geq (1+|u|)^{\varkappa} q_i(u), \quad u \geq 0. \tag{6.74}$$

Основний результат даного розділу полягає в наступній теоремі.

Теорема 6.9. Нехай виконані умови (5.36)-(5.37), (5.39) та (6.22). Тоді існують такі сталі K та N, що

$$\forall\, t>0 \quad P_t\colon C^n_{\vec{q}(\varkappa)}(M) \to C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa),q_{n+1}(\varkappa),\dots,q_{n+m}(\varkappa)}(M)$$

і виконана оцінка:

$$\|P_t f\|_{C^{n+m}_{\vec{q}(\varkappa),q_{n+1}(\varkappa),\dots,q_{n+m}(\varkappa)}} \leq \frac{Ke^{Nt}}{t^{m/2}} \|f\|_{C^n_{\vec{q}(\varkappa)}}. \tag{6.75}$$

Доведення. З мультиплікативної властивості півгрупи $P_t = (P_{t/m})^m$ та нерівності

$$\|P_t f\|_{C^{n+m}} = \|(P_{t/m})^m f\|_{C^{n+m}} \leq \frac{K' e^{N't}}{\sqrt{t}} \|(P_{t/m})^{m-1} f\|_{C^{n+m-1}} \leq$$

$$\leq \frac{K'K'' e^{(N'+N'')t}}{t} \|(P_{t/m})^{m-2} f\|_{C^{n+m-2}} \leq \dots \leq \frac{Ke^{Nt}}{t^{m/2}} \|f\|_{C^n}$$

випливає, що достатньо отримати оцінку (6.75) тільки для $m=1$.

Розглянемо представлення (6.12) і продиференціюємо його один раз:

$$\nabla^x (\nabla^x)^i P_t f(x) = \sum_{j_1+\dots+j_s=i+1,\ s\geq 1} \mathbf{E}\,\langle\, (\nabla^\xi)^s f(\xi_t^x), (\mathbb{W}^x)^{j_1} \xi_t^x \otimes \dots \otimes (\mathbb{W}^x)^{j_s} \xi_t^x \,\rangle =$$

$$= \mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^{\xi})^{i+1}f(\xi_t^x), \mathbb{W}^x\xi_t^x\otimes\cdots\otimes\mathbb{W}^x\xi_t^x\,\rangle + \{\text{члени з } s\geq 2\}. \tag{6.76}$$

Враховуючи (6.13)

$$(\nabla^{\xi})^{i+1}f(\xi_t^x)\mathbb{W}^x\xi_t^x = \mathbb{W}^x(\nabla^{\xi})^i f(\xi_t^x) = \frac{1}{t}\widetilde{I\!D}(\nabla^{\xi})^i f(\xi_t^x)$$

аналогічно (6.15)-(6.19) із застосуванням інтегрування частинами (6.17), маємо:

$$\nabla^x(\nabla^x)^i P_t f(x) =$$

$$= \mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^{\xi})^i f(\xi_t^x), (\frac{1}{t}\widetilde{I\!D} + \frac{1}{t}\int_0^t \widetilde{z}^{\sigma}dW^{\sigma})(\mathbb{W}^x\xi_t^x\otimes\ldots.\otimes\mathbb{W}^x\xi_t^x)\,\rangle + \tag{6.77}$$

$$+ \sum_{j_1+\cdots+j_s=i+1,\ s\geq 2}\mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^{\xi})^s f(\xi_t^x), (\mathbb{W}^x)^{j_1}\xi_t^x\otimes\cdots\otimes(\mathbb{W}^x)^{j_s}\xi_t^x\,\rangle \tag{6.78}$$

Виберемо ваги $p_j(u) = P(u)(1+|u|)^{m\varkappa(1/j-1/i)}$. Неважко перевірити, що вони задовольняють ієрархію (6.21). Отже, з нелінійної оцінки (6.23) випливає:

$$\mathbf{E}P(\rho^2(\xi_t^x,o))\,\|\frac{1}{t^{|\beta|}}(\mathbb{D})^i\xi_t^x\|^{q/i}\leq Ke^{Nt}Q_i^0(\xi,0) =$$

$$= Ke^{Nt}P(\rho^2(x,o))(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa q(i-1)/i}. \tag{6.79}$$

Зауважимо, що всі члени в (6.77)–(6.78) мають вигляд:

$$\mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^{\xi})^s f(\xi_t^x), \eta^{(j_1)}\otimes(\mathbb{W}^x)^{j_2}\xi_t^x\otimes\cdots\otimes(\mathbb{W}^x)^{j_s}\xi_t^x\,\rangle, \tag{6.80}$$

де $\eta^{(j_1)}$ відповідає $(\mathbb{W}^x)^{j_1}\xi_t^x$ для ((6.78) та $\frac{1}{t}\widetilde{I\!D}\xi_t^x$ або $\int_0^t\widetilde{z}^{\sigma}dW^{\sigma}$ для (6.77). Застосуємо (6.79), щоб оцінити (6.80) в нормі простору $C_{\vec{q}}^n(M)$:

$$\frac{\|(\nabla^x)^{i+1}P_t f(x)\|_{T_x^{(0,i+1)}}}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))}\leq$$

$$\leq\sum\frac{\|\mathbf{E}\,\langle\,(\nabla^{\xi})^s f(\xi_t^x)\,,\eta^{(j_1)}\otimes(\mathbb{W}^x)^{j_2}\xi_t^x\otimes\cdots\otimes(\mathbb{W}^x)^{j_s}\xi_t^x>\|}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))}\leq$$

$$\leq\sum\left(\sup_{\xi_t^x\in M}\frac{\|(\nabla^{\xi})^s f(\xi_t^x)\|_{T_{\xi}^{(0,s)}}}{q_s(\rho^2(\xi_s^x,o))}\right).$$

$$\cdot \frac{\mathbf{E} q_s(\rho^2(\xi_s^x, o)) \|\eta^{(j_1)}\| \, \|(\mathbb{V}^x)^{j_2} \xi_t^x\| \ldots \|(\mathbb{V}^x)^{j_s} \xi_t^x\|}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))} \leq$$

$$\leq \sum \|f\|_{C^n_{\vec{q}}} \frac{(\mathbf{E} q_s(\rho^2(\xi_s^x, o)) \|\eta^{(j_1)}\|^{i/j_1})^{j_1/i}}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\ell=2}^{s} (\mathbf{E} q_s(\rho^2(\xi_s^x, o)) \|(\mathbb{V}^x)^{j_\ell} \xi_t^x\|^{i/j_\ell})^{j_\ell/i}. \tag{6.81}$$

Оцінка таких членів у випадку, коли $\eta^{(j)}$ представлені "звичайною" $\mathbb{V}$ або стохастичною похідною від варіації з множником $1/t$, може бути виконана з використанням нелінійної оцінки (6.79). Якщо $\eta^{(j)}$ представлені стохастичними інтегралами, тоді додатково необхідно використати стандартну оцінку

$$\mathbf{E}(\int_0^t \widetilde{z}_s^\sigma dW_s^\sigma)^{2q} \leq K_q t^{q-1} \mathbf{E} \int_0^t \|\widetilde{z}_s\|^{2q} ds, \tag{6.82}$$

а також представлення (6.15) та умову (6.22), щоб отримати:

$$(6.82) \leq K_q t^{q-1} \mathbf{E} \int_0^t (1+\rho^2(\xi_s^x, o))^{2q\varkappa_1} \|\mathbb{V}^x \xi_t^x\|^{2q} ds \leq K\, t^q e^{Nt} (1+\rho^2(x,o))^{2q\varkappa_1}.$$

Таким чином остаточно маємо:

$$\frac{1}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))} (\mathbf{E} q_s(\rho^2(\xi_s^x, o)) \|\eta^{(j_1)}\|^{i/j_1})^{j_1/i} \prod_{\ell=2}^{s} (\mathbf{E} q_i(\rho^2(\xi_s^x, o)) \|(\mathbb{V}^x)^{j_\ell} \xi_t^x\|^{i/j_\ell})^{j_\ell/i} \leq$$

$$= \frac{const}{\sqrt{t}} e^{Nt} \frac{q_s(\rho^2(x,o))(1+\rho^2(x,o))^{\varkappa_1 + \varkappa(i+1-s)}}{q_{i+1}(\rho^2(x,o))} \leq \frac{K\, e^{Nt}}{\sqrt{t}},$$

де було використано ієрархію (6.74) з деякою сталою $\widetilde{\varkappa} = \varkappa + \varkappa_1$ для порядку диференціювання $n+1$, а також (6.79) з $q = i,\ n = j_\ell$ та $j_1 + \cdots + j_s = i+1$ в позначеннях (6.20). □

6.5 Висновки розділу 6

Основний результат даного розділу полягає в доведенні теореми про підвищення гладкості під дією півгрупи на некомпактному рімановому многовиді. Ці результати отримані на основі методу нелінійної оцінки, застосованої до спеціальних стохастичних похідних, що узагальнюють відповідні похідні з попередніх розділів. Крім того в даному розділі доводиться геометрично-інваріантне представлення коваріантних похідних півгрупи через коваріантні похідні вихідної функції менших порядків. Це представлення виписується в термінах спеціальних стохастичних похідних на многовиді, а також інваріантних варіацій, введених в попередніх розділах.

РОЗДІЛ 7

ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИФУЗІЇ

Починаючи з часів Лейбніца, Мопертюї та Ейлера сформувалося розуміння того, що всі фізичні явища мають описуватися виходячи з принципу найменшої дії для деякого функціонала енергії. В роботах Лагранжа та Гамільтона такий підхід був реалізований для задач класичної механіки. Проте тільки в 1966 В.І. Арнольд [69] вперше сформулював та довів принцип найменшої дії для ідеальної рідини, що описується рівнянням Ейлера.

Щоб це зробити Арнольд розширив простір, над яким задається функціонал енергії, до нескінченновимірного простору — групи дифеоморфізмів, що зберігають об'єм $\mathcal{D}_\mu(M)$ многовиду M. Тут μ позначає міру, або елемент об'єму, на многовиді M. Виявляється, що саме цей простір дифеоморфізмів є прийнятним конфігураційним простором для задач гідродинаміки нестискаючої рідини. В такому підході розв'язки рівняння Ейлера є геодезичними кривими по відношенню до право-інваріантної метрики на $\mathcal{D}_\mu$, яка в точці $g \in \mathcal{D}_\mu$ задається співвідношенням:

$$\big(X, Y\big) = \int_M \langle X(x), Y(x)\rangle_x d\mu(x), \tag{7.1}$$

де $X, Y \in T_g\mathcal{D}_\mu$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ — метрика на T_xM з відповідною нормою $\| \cdot \|_x$, і μ – елемент об'єму M, генерований метрикою на M. Зв'язок між геодезичними на $\mathcal{D}_\mu$ та рівнянням Ейлера в подальшому були досліджені Ебіном і Марсденом в [96]. Коротко такий взаємозв'язок може бути описаний наступним чином. Нехай $t \mapsto g_t \in \mathcal{D}_\mu$ є геодезична по відношенню до право-інваріантної метрики $(\cdot, \cdot)$ (7.1). Нехай $v_t = \frac{d}{dt} g_t$ — відповідна швидкість, і $u_t = v_t \circ g_t^{-1}$ — змінне в часі векторне поле на M. Тут $\circ$ позначає суперпозицію. Тоді u_t є розв'язком рівняння Ейлера для ідеальної рідини:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_t}{\partial t} + \nabla_{u_t} u_t = \nabla p_t, \\ div\ u_t = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

де $p_t \colon M \mapsto \mathbb{R}$ — функція тиску, а ∇ — коваріантна похідна. Крім того, відображення $t \mapsto g_t$ визначено на деякому інтервалі $[0, T]$ і мінімізує функціонал енергії:

$$S(g) = \frac{1}{2} \int_0^T \Big(\int_M \| \frac{dg_t}{dt} \|_x^2 \, d\mu(x) \Big) \, dt,$$

а рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціоналу — це і є рівняння Ейлера ідеальної рідини.

Такий підхід отримав свій розвиток в роботах [68], [81], де методами стохастичного аналізу було показано, що нестискаючий стохастичний потік $g_t(u)$ з генератором $\dfrac{1}{2}\Delta + u_t$ є критичною точкою для деякого стохастичного функціоналу енергії

$$g \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{T}} \|Dg(t,x)(\omega)\|^2 \, d\mu(x) \, dt \right], \text{ де } Dg(t,x)(\omega) = u(t, g(t,x)(\omega))$$

тоді і лише тоді, коли u є розв'язком рівняння Навье-Стокса, що описує в'язку нестискаючу рідину, тобто існує така функція $P(x)$, що

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \nabla + \frac{1}{2}\Delta u + \nabla P.$$

Також необхідно згадати роботи [83, 102] та [115], в яких розвивались інші стохастичні підходи до питання характеризації розв'язків рівнянь Навье-Стокса.

Цей розділ дисертації присвячений доведенню стохастичного принципу найменшої дії для нелінійного рівняння, яке є узагальненням так званого рівняння пористого середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(\|u\|^{m-1}u). \tag{7.3}$$

Рівняння (7.3) вперше виникло при дослідженні газових потоків, які проходять через пористі породи (див., наприклад, [174, Глава 3.4]). Це рівняння також описує інші процеси, необхідні у застосуваннях, зокрема, воно виникає при моделюванні дифузії електронно-іонної плазми [162], а також використовується для опису динаміки біологічної популяції, чия мобільність залежить від щільності (див. [118]). В останній час в літературі також з'явилися дослідження, присвячені так званому ваговому рівнянню пористого середовища [94], [163], яке є узагальненням рівняння (7.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u \cdot \nabla + \frac{1}{2}\Delta\right)\left(\|u\|^{q-2}u\right) + \nabla P. \tag{7.4}$$

В даному розділі доводиться, що це рівняння також може бути отримано з принципу найменшої дії. Зауважимо, що у випадку, коли $q = 2$, рівняння (7.4) є рівнянням Навье-Стокса.

7.1 Операторне формулювання принципу найменшої дії

Для спрощення викладок в цьому розділі розглядається многовид, який є N-вимірним тором $\mathbb{T}$. Надалі будемо використовувати позначення dx для інтегрування по нормованій мірі Лебега на торі.

Означення 7.1. Для деякого гладкого бездивергентного змінного за часом векторного поля $(t, x) \mapsto v_t(x) \in T_x\mathbb{T}$ визначимо *потік, генерований* $\dot{v}_t$: $e_t(v) \in \mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$ як розв'язок звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{de_t(v)}{dt} = \dot{v}_t(e_t(v)), \quad e_0(v) = I_{\mathbb{T}}. \tag{7.5}$$

Зауважимо, що в деякому сенсі $e_t(v)$ є збуренням тотожного відображення у просторі $\mathcal{D}_\mu(\mathbb{T})$. Розв'язність рівняння (7.5) випливає з компактності $\mathbb{T}$ та гладкості v.

Розглянемо залежне від часу бездивергентне векторне поле u, задане на $[0, T]\times\mathbb{T}$. Отже u приймає значення в дотичному розшаруванні тору $\mathbb{T}$, яке в кожній точці може бути ототожнено з $\mathbb{R}^N$. Бездивергентність означає, що $\sum_{j=1}^N \partial_j u^j \equiv 0$. Задамо оператор $L(u_t)\colon C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^N)$ формулою: $L(u_t)f = \dfrac{1}{2}\Delta f + u_t \cdot \nabla f$.

Означення 7.2. *Функціоналом q-енергії для* $q > 1$ називається наступна величина:

$$\mathcal{E}_q(u, v) = \frac{1}{q}\int_0^T \int_{\mathbb{T}} \left\| \Big[\big(\partial_t + L(u_t)\big)e_t(v)\Big](e_t^{-1}(v)(x)) \right\|^q dx\, dt, \tag{7.6}$$

де $e_t^{-1}(v)$ — обернене відображення до дифеоморфізма $e_t(v)\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.

Означення 7.3. Скажемо, що u *є критичною точкою функціонала* $\mathcal{E}_q$, якщо для всіх бездивергентних змінних у часі векторних полів v таких, що $v_0 = 0$ і $v_T = 0$ має місце співвідношення:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}_q(u, \varepsilon v) = 0.$$

Теорема 7.4. Бездивергентне векторне поле u_t є критичною точкою функціонала $\mathcal{E}_q$, $q \geq 2$ тоді і лише тоді, коли існує функція $P(x)$ така, що виконано рівняння (7.4).

Доведення. Для $e_t(\varepsilon v)_*\big(u_t\big)(x) = T_{e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)} e_t(\varepsilon v)\left(u_t\left(e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)\right)\right)$, обраховуємо:

$$\Big[\big(\partial_t + L(u_t)\big)e_t(\varepsilon v)\Big]\big(e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)\big) =$$
$$= \varepsilon\dot{v}(t, e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)) + e_t(\varepsilon v)_*\big(u_t\big)(x) + \frac{1}{2}\left(\Delta e_t(\varepsilon v)\right)\big(e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)\big),$$

де $T_y e_t(\varepsilon v)(\cdot)$ позначає дотичне відображення до $e_t(\varepsilon v)$ в точці y. Маємо:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big[\big(\partial_t + L(u_t)\big)e_t(\varepsilon v)\Big]\big(e_t^{-1}(\varepsilon v)(x)\big) = \dot{v}_t(x) + [u_t, v_t](x) + \frac{1}{2}\Delta v_t(x).$$

Оскільки $u_t = \big(\partial_t + L(u_t)\big)(I)$, для тотожного відображення

$$I = e_t(0)\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T},$$

тому

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{E}_q(u, \varepsilon v) =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \|\big(\partial_t + L(u_t)\big)(id)\|^{q-2}\langle \dot{v}_t + [u_t, v_t] + \frac{1}{2}\Delta v_t, u_t\rangle dx\, dt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \|u_t\|^{q-2}\langle \dot{v}_t + [u_t, v_t] + \frac{1}{2}\Delta v_t, u_t\rangle\, dx\, dt.$$

З іншого боку

$$0 = \int\limits_{\mathbb{T}} \|u_T\|^{q-2}\langle u_T, v_T\rangle dx = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \Big\{\|u_t\|^{q-2}\langle u_t, \dot{v}_t\rangle +$$
$$+ \langle \|u_t\|^{q-4}(q-2)\langle \dot{u}_t, u_t\rangle u_t + \|u_t\|^{q-2}\dot{u}_t, v_t\rangle\Big\} dx\, dt.$$

Отже, підставляючи $u = u_t$ та $v = v_t$, маємо:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{E}_q(u, \varepsilon v) + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \Big\{\|u\|^{q-2}\Big(\langle \dot{u}, v\rangle - \langle [u, v], u\rangle - \frac{\langle \Delta v, u\rangle}{2}\Big) +$$

$$+ (q-2)\|u\|^{q-4}\langle \dot{u}, u\rangle\langle u, v\rangle\Big\} dx\, dt.$$

Враховуючи співвідношення

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \|u\|^{q-2}\langle \nabla_v u, u\rangle dx = \frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{T}} \langle \nabla \|u\|^q, v\rangle dx = \\ = -\frac{1}{q}\int\limits_{\mathbb{T}} \|u\|^q \operatorname{div} v\, dx = 0$$

для $\operatorname{div} v = 0$, та використовуючи, що $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u$, отримаємо:

$$-\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}_q\Big(u, (\varepsilon v)\Big) = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \Big\{ - \|u\|^{q-2}\langle \nabla_u v, u\rangle - \frac{1}{2}\langle v, \Delta\Big(\|u\|^{q-2}u\Big)\rangle + \\ + (q-2)\|u\|^{q-4}\langle \dot{u}, u\rangle\langle u, v\rangle + \|u\|^{q-2}\langle \dot{u}, v\rangle \Big\}\, dx\, dt = \\ = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \langle \nabla_u\Big(\|u\|^{q-2}u\Big) - \frac{1}{2}\Delta\Big(\|u\|^{q-2}u\Big) + \\ + (q-2)\|u\|^{q-4}\langle \dot{u}, u\rangle u + \|u\|^{q-2}\dot{u}, v\rangle\, dx\, dt = \\ = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{T}} \langle \big(\partial_t + u\cdot\nabla - \frac{1}{2}\Delta\big)\|u\|^{q-2}u, v\rangle\, dx\, dt.$$

Щоб отримати другу рівність було використано:

$$\int_{\mathbb{T}} u\left(\langle v, \|u\|^{q-2}\rangle\right) dx = \int_{\mathbb{T}} \operatorname{div}\, u\langle v, \|u\|^{q-2}\rangle dx = 0.$$

Оскільки це справедливо для для будь-якого бездивергентного поля v, маємо доведеним твердження теореми. □

7.2 Стохастичний варіаційний принцип для нелінійної дифузії

Нехай M — деякий компактний орієнтований ріманів многовид без границі розмірності $N \geq 2$. Будемо використовувати позначення dx для інтегрування по нормованій мірі Лебега, що відповідає рімановому об'єму на M. Нехай $\mathcal{H}$ — деякий гільбертів простір.

Означення 7.5. *Стохастичний потік Іто* $g_t(x)(\omega)$ на многовиді M, $x \in M$, $t \in [0,T]$, $T > 0$ означимо як стохастичний процес, який задовольняє:

1. $g_0(x)(\omega) = x$;
2. $g_t(x)(\omega)$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння Іто:
$$dg_t(x)(\omega) = \sigma(g_t(x)(\omega))dW_t + u_t(g_t(x)(\omega),\omega)\,dt, \qquad (7.7)$$
де $\sigma \in \Gamma(Hom(\mathcal{H},TM))$ — C^2-відображення, для якого $\forall\, x \in M$ $(\sigma\sigma^*)(x) = I_{T_xM}$; W_t — циліндричний вінерів процес в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, і $(t,x,\omega) \to u_t(x,\omega) \in T_xM$ — деяке змінне у часі векторне поле з локально обмеженою варіацією по змінній x.

Надалі будемо опускати випадковий параметр. Зауважимо, що дифузійний процес $\{g_t(u)(x)\}_{t\varkappa 0}$ має генератор $L(u_t) = \frac{1}{2}\Delta + u_t$.

Нагадаємо, що для паралельного переносу $P(g(x))_t \colon T_xM \to T_{g(t)(x)}M$ вздовж поля $g_t(x)$ має місце співвідношення:
$$dg_t(x) = P(g(x))_t d\left(\int_0^{\cdot} P(g(x))_s^{-1} \circ dg_s(x)\right)_t.$$
Зауважимо, що на даному етапі ми не вимагаємо будь-якої додаткової гладкості $u_t(x,\omega)$. Взагалі кажучи розв'язок рівняння (7.7) може бути не єдиним, проте для будь-якого фіксованого $x \in M$ процес $u_t(g_t(x),\omega)$ визначається по $g_t(x)(\omega)$ однозначно.

Скажемо, що стохастичний потік Іто $g_t(u)(x)(\omega)$ є *нестискаючим*, якщо для м.в. ω та будь-якого $t \geq 0$ відображення $x \mapsto g_t(u)(x)(\omega)$ є дифеоморфізмом, що зберігає об'єм на M.

Твердження 7.6. *Припустимо, що виконані наступні умови:*

(i) $u_t(x,\omega)$ *є неперервною одночасно по* t *та* x *і є* C^2 *по* x *з рівномірно м.в. обмеженими по* ω *похідними;*

(ii) для всіх $t \in [0,T]$: $\operatorname{div} u_t(\cdot,\omega) = 0$ *м.в.;*

(iii) $tr\, \nabla_{\sigma(\cdot)}\sigma(\cdot) = 0$*;*

(iv) для всіх $v \in \mathcal{H}$: $div\, \sigma(v)(\cdot) = 0$.

Тоді стохастичний потік Іто g_t *є нестискаючим, тобто для* ω *м.в. для всіх* $t \in [0,T]$*, та всіх* $f \in C(M)$

$$\int\limits_M f\big(g_t(x)(\omega)\big)\, dx = \int_M f(x)\, dx. \tag{7.8}$$

Стосовно умов (i) та (ii) на регулярність u необхідно згадати [161], де вказані більш загальні вимоги, але в згаданій роботі u не залежить від ω.

Доведення. При вказаних вище умовах для м.в. t відображення $x \mapsto g_t(x)(\omega)$ є дифеоморфізмом M. Отже для $f \in C(M)$

$$\int\limits_M f\big(g_t(x)(\omega)\big)\, dx = \int\limits_M f(y) |\det T_y g_t^{-1}(\cdot)(\omega)|\, dy, \tag{7.9}$$

де $T_y g_t^{-1}(\cdot)(\omega)$ позначає дотичне відображення до $y \mapsto g_t^{-1}(y)(\omega)$. З іншого боку з умови (iii) випливає, що рівняння (7.7) еквівалентно рівнянню Стратоновича:

$$dg_t(x)(\omega) = \sigma(g_t(x)(\omega))\delta W_t + u_t(g_t(x)(\omega),\omega)\, dt. \tag{7.10}$$

Беручи похідну за початковою умовою, отримаємо:

$$d\left(P(g(x))_t^{-1} T_x g_t\right) = P(g(x))_t^{-1}\left(\nabla_{T_x g_t}\sigma\, \delta W_t + \nabla_{T_x g_t} u_t\, dt\right), \tag{7.11}$$

де $P(g(x))_t$ позначає паралельний перенос вздовж $g_t(x)$. Використовуючи факт, що

$$T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t P(g(x))_t^{-1} T_x g_t \equiv I_{T_x M}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} & d\left(T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t\right) = \\ & = T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t P(g(x))_t^{-1} \left(-\nabla_{P(g(x))_t} \sigma\, \delta W_t - \nabla_{P(g(x))_t} u_t\, dt\right), \end{aligned} \tag{7.12}$$

що дає:

$$\begin{aligned} & d\left(\det T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t\right) = \\ & = \det T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t \operatorname{tr}\left\{P(g(x))_t^{-1}\left(-\nabla_{P(g(x))_t} \sigma\, \delta W_t - \nabla_{P(g(x))_t} u_t\, dt\right)\right\} = \\ & = \det T_{g_t(x)} g_t^{-1} P(g(x))_t \left(-\operatorname{div} \sigma(g_t(x)))\, \delta W_t - \operatorname{div} u_t(g_t(x)))\, dt\right) = \\ & = 0. \end{aligned} \tag{7.13}$$

З початкової умови $\det T_x g_0^{-1} P(g(x))_0 = 1$ та властивості $\det P(g(x))_t \equiv 1$ маємо

$$\det T_{g_t(x)} g_t^{-1}(\cdot)(\omega) \equiv 1 \tag{7.14}$$

м.в. для всіх t та $x \in M$. Проте м.в. відображення $x \mapsto g_t(x)(\omega)$ є дифеоморфізмом M, отже м.в. для всіх t та $y \in M$

$$\det T_y g_t^{-1}(\cdot)(\omega) \equiv 1. \tag{7.15}$$

Як наслідок маємо:

$$\int\limits_M f\left(g_t(x)(\omega)\right) dx = \int_M f(y)\, dy.$$

$\square$

Інші приклади нестискаючих потоків можуть бути знайдені в [81]. Зауважимо, що необхідною умовою для цього є $\operatorname{div} u_t = 0$.

Означення 7.7. Для стохастичного потоку Іто g_t (7.7) визначимо його *похідну за часом* як коефіцієнт зсуву для стохастичного рівняння (7.7): $Dg_t(\omega) := u_t(g_t, \omega)$, тоді для $q > 1$ відповідний *функціонал q-енергії* визначається наступною формулою:

$$\mathcal{E}_q(g) := \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_M \|Dg_t(x)(\omega)\|^q \, dx \, dt\right]. \tag{7.16}$$

Збурення функціоналу у просторі дифеоморфізмів, фактично, є зсувом по відношенню до операції конволюції, тобто: $g_t^v(u) = e_t(v) \circ g_t(u)$, де v — гладке бездивергентне змінне у часі векторне поле, а $e_t(v)$ задано в (7.5).

Означення 7.8. Скажемо, що $g_t(u)$ — *критична точка* функціоналу q-енергії $\mathcal{E}_q$, якщо для будь-якого змінного у часі бездивергентного векторного поля v на TM такого, що $v_0 = v_T = 0$, має місце співвідношення:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}_q(g^{\varepsilon v}(u)) = 0.$$

Теорема 7.9. Нехай $q \geq 2$, $M = \mathbb{T}$. Нестискаючий стохастичний потік Іто $g_t(u)$ з генератором $L(u_t)$ є критичною точкою функціонала q-енергії $\mathcal{E}_q$ тоді і лише тоді, коли існує функція $P(x)$ така, що u_t задовольняє рівняння (7.4).

Доведення. Після застосування формули Іто, маємо:

$$Dg_t^{\varepsilon v}(u)(x) = \Big[\left(\partial_t + L(u_t)\right)\left(e_t(\varepsilon v)\right)\Big]\left(e_t(\varepsilon v)^{-1}(g_t^{\varepsilon v}(u)(x))\right),$$

отже

$$\mathcal{E}_q(g^{\varepsilon v}(u)) = \frac{1}{q}\mathbb{E}\int_0^T \int_{\mathbb{T}} \left\|\Big[\left(\partial_t + L(u_t)\right)\left(e_t(\varepsilon v)\right)\Big]\left(e_t(\varepsilon v)^{-1}(g_t^{\varepsilon v}(u)(x))\right)\right\|^q dx\, dt.$$

Враховуючи, що для м.в. ω і для всіх $t \in [0,T]$ відображення $x \mapsto g_t^{\varepsilon v}(u)(x)(\omega)$ зберігає міру. Отже, виконуючи заміну змінних $g_t^{\varepsilon v}(u)(x)(\omega) = y$ маємо $\mathcal{E}_q(g^{\varepsilon v}(u)) = \mathcal{E}_q(u, \varepsilon v)$. Завершення доведення випливає з теореми 7.4. $\square$

7.3 Узагальнені стохастичні потоки

Для нестискаючого потоку Іто $g_t(x)$, розглянемо білінійне відображення Θ_t^g, яке двом довільним елементам $\varphi, \psi \in L_2(M)$ ставить у відповідність процес:

$$\Theta_t^g(\varphi, \psi) = \int_M \varphi(x)\psi\big(g_t(x)\big)dx. \tag{7.17}$$

Означення 7.10. Скажемо, що таке білінійне відображення Θ_t^g *є g-потоком, асоційованим з стохастичним потоком Іто g_t.*

Для фіксованих $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ потік Θ_t^g є дійсно-значним стохастичним процесом, який задовольняє рівняння:

$$\begin{aligned} \Theta_t^g(\varphi, \psi) \;&=\; (\varphi, \psi)_{L_2(M)} + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \Theta_s^g\big(\varphi, \langle \nabla\psi, \sigma_i\rangle\big)\, dW_s^i + \\ &+\; \int_0^t \Theta_s^g\big(\varphi, \langle \nabla\psi, u_s(\cdot,\omega)\rangle\big)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s^g\big(\varphi, \Delta\psi\big)\, ds. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Вище для фіксованого ортонормованого базису $e_i, i \geq 1$ в $\mathcal{H}$ використано позначення $W_s^i = \langle W_s, e_i\rangle$ та $\sigma_i = \sigma(e_i)$.

Якщо g_t є потоком дифеоморфізмів, тоді

$$\Theta_t^g(\varphi, \psi) = (\theta^\varphi(t, \cdot), \psi)_{L^2(M)}, \tag{7.19}$$

де $x \mapsto \theta^\varphi(t,x)(\omega)$ — функція $M \to \mathbb{R}$ означена рівністю:

$$\theta^\varphi(t,x) = \varphi\left(\big(g(t)(\cdot)(\omega)\big)^{-1}(x)\right). \tag{7.20}$$

Зауважимо, що для борелєвої множини A в M та $\varphi = 1_A$ маємо: $\theta^\varphi(t,x) = 1_{g(t)(A)}(x)$.

Означення 7.11. Скажемо, що білінійне відображення $\Theta_t(\cdot,\cdot)$ *є узагальненим потоком*, якщо кожній парі $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ ставиться у відповідність неперервний семімартингал $t \mapsto \Theta_t(\varphi,\psi)$, визначений на спільному ймовірнісному просторі з спільною для всіх φ, ψ фільтрацією, і для якого, крім того, для всіх $\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1 \in C^\infty(M)$ виконані наступні умови:

(1) $\Theta_t(\varphi, 1) \equiv \int_M \varphi(x)\,dx,$

(2) $\Theta_t(1, \psi) \equiv \int_M \psi(x)\,dx,$ м.в. для всіх $t \in [0,T]$,

(3) $\Theta_0(\varphi,\psi) = (\varphi,\psi)_{L^2(M)}$;

(4) для $\varphi, \psi \geq 0$ випливає $\Theta_t(\varphi,\psi) \geq 0$ м.в.;

(5) $|\Theta_t(\varphi,\psi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(M)} \|\psi\|_{L^2(M)}$, м.в. для всіх $t \in [0,T]$;

(6) $d\,[\Theta(\varphi,\psi), \Theta(\varphi_1,\psi_1)]_t = \sum_{i \varkappa 1} \Theta_t\big(\varphi, \langle \nabla\psi, \sigma_i\rangle\big) \cdot \Theta_t\big(\varphi_1, \langle \nabla\psi_1, \sigma_i\rangle\big)\,dt.$

Зауважимо, що з (5) та (6) випливає:

$$d\,[\Theta(\varphi,\psi), \Theta(\varphi,\psi)]_t \leq \|\varphi\|^2_{L^2(M)} \cdot \|\nabla\psi\|^2_{L^2(M)}\;dt. \tag{7.21}$$

Для $\varphi, \psi \in C^2(M)$ введемо позначення

$$\widetilde{\Theta}_t(\varphi,\psi) = \Theta_t(\varphi,\psi) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s(\varphi, \Delta\psi)\,ds. \tag{7.22}$$

Якщо процес $\widetilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)$ є семімартингалом, тобто може бути представлений як сума мартингала і процеса обмеженої варіації, і має абсолютно неперервну частину (тобто частину обмеженої варіації), позначимо $D\widetilde{\Theta}(\varphi,\psi)$ його коефіцієнт зсуву в представленні (7.7).

Означення 7.12. Нехай $q > 1$. Скажемо, що узагальнений потік $\Theta_t(\cdot, \cdot)$ має *скінченну узагальнену q-енергію*, якщо

(i) семімартингал $\widetilde{\Theta}_t(\varphi, \psi)$ має абсолютно неперервну частину;

(ii) наступний функціонал є скінченним:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta) = \frac{1}{q} \sup_{\varphi, \psi, \ell, m} \left\{ \mathbb{E} \int_0^T \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\left(D\widetilde{\Theta}_t(\varphi_j, \psi_k)\right)^2}{\Theta_t(\varphi_j, 1)^\alpha} \right]^{q/2} dt \right\}, \quad (7.23)$$

де $\alpha = \dfrac{2(q-1)}{q}$, sup береться по всім векторам $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_\ell)$ для будь-яких $m, \ell \geq 1$ таким, що $\varphi_j, \psi_k \in C^\infty(M)$, $\varphi_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^m \varphi_j = 1$ і ψ_k такі, що для всіх $v \in TM$: $\sum\limits_{k=1}^{\ell} \langle \nabla \psi_k, v\rangle^2 \leq ||v||^2$.

Функціонал $\mathcal{E}'_q(\Theta)$ назвемо *узагальненою q-енергією* узагальненого потоку $\Theta_t(\cdot, \cdot)$.

Нехай η — ймовірнісна міра на $M \times M$ з маргінальними розподілами, що дорівнюють dx. Зокрема має місце співвідношення $\eta(dx, dx) = dx\, \eta_x(dy)$.

Означення 7.13. Скажемо, що узагальнений потік Θ_t *має конфігурацію η на кінцях*, якщо

$$\mathbb{E}\left[\Theta_T(\varphi, \psi)\right] = \int_{M \times M} \varphi(x)\psi(y)\, \eta(dx, dy). \quad (7.24)$$

Твердження 7.14. *Нехай $g_t(x)$ — нестискаючий потік Іто на M, що задовольняє умови Твердження 7.6 і для кожного $x \in M$ $g_T(x)$ має розподіл η_x. Тоді g-потік Θ^g_t, асоційований з стохастичним потоком Іто g_t згідно формули (7.17), є узагальненим потоком з конфігурацією η на кінцях.*

Доведення. Для перевірки даного твердження необхідно перевірити виконання умов означень 7.11 та 7.13. Умови (1)-(5) перевіряються тривіально. Так, наприклад, для доведення (2) достатньо зауважити, що

$$\Theta_t^g(1,\psi) = \int\limits_M \psi(g_t(x))\,dx = \int\limits_M \psi(x)\,dx.$$

Властивість (6) випливає з (7.18). Остаточно (7.24) випливає з того, що $g_T(x)$ має розподіл η_x. □

Лема 7.15. Для узагальненого потоку Θ_t має місце наступна оцінка:

$$\mathbb{E}\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)\right|^q dt \le 2^q q\,\mathcal{E}_q'(\Theta)\|\varphi\|_{L^\infty(M)}^q\,\|\nabla\psi\|_{L^\infty(M)}^q\,.$$

Доведення. Припустимо, що $\|\varphi\|_\infty > 0$ (інакше ліва частина дорівнює тотожно нулю). Припустимо, що $\varphi \ge 0$. Тоді $\int_M \varphi > 0$, отже

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T |D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)|^q dt = \\
&= \|\varphi\|_\infty^q \cdot \|\nabla\psi\|_\infty^q \cdot \left(\int_M \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_\infty}\,dx\right)^{\alpha q/2} \cdot \mathbb{E}\int\limits_0^T \frac{\left|D\tilde{\Theta}\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}, \frac{\psi}{\|\nabla\psi\|_\infty}\right)\right|^q}{\left(\int_M \frac{\varphi}{\|\varphi\|_\infty}\right)^{\alpha q/2}}\,dt \\
&\le \|\varphi\|_\infty^q \cdot \|\nabla\psi\|_\infty^q \cdot q\,\mathcal{E}_q'(\Theta)
\end{aligned}$$

за означенням $\mathcal{E}_q'(\Theta)$. Для загальної φ використаємо представлення $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ через її позитивну і негативну частини. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned}
|D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)|^q &= |D\tilde{\Theta}_t(\varphi_+,\psi) - D\tilde{\Theta}_t(\varphi_-,\psi)|^q \\
&\le 2^{q-1}\left(|D\tilde{\Theta}_t(\varphi_+,\psi)|^q + |D\tilde{\Theta}_t(\varphi_-,\psi)|^q\right)
\end{aligned}$$

після чого залишилось застосувати першу частину доведення, використовуючи, що $\|\varphi_+\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$ та $\|\varphi_-\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$. □

Теорема 7.16. Нехай $q > 1$ і g_t — стохастичний потік Іто. Для функціоналів енергії $\mathcal{E}'_q(\Theta^g)$ та $\mathcal{E}_q(g)$ має місце наступна нерівність:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta^g) \leq \mathcal{E}_q(g). \tag{7.25}$$

Доведення. Якщо $\mathcal{E}_q(g) = \infty$ то дане твердження є очевидним і доведення не вимагає. Припустимо, що $\mathcal{E}_q(g) < \infty$. Розглянемо узагальнений потік Θ^g_t, що відповідає звичайному потоку g в сенсі (7.17), тоді

$$D\widetilde{\Theta}^g_t(\varphi_j, \psi_k) = \int\limits_M \varphi_j(x)\big\langle u_t\big(g_t(x)\big), \nabla\psi_k\big(g_t(x)\big)\big\rangle_{T_xM} dx =: \int\limits_M \varphi_j b_k dx,$$

де

$$b_k := b_k(t,x) = \big\langle u_t\big(g_t(x)\big), \nabla\psi_k\big(g_t(x)\big)\big\rangle_{T_xM}. \tag{7.26}$$

В цих позначеннях перепишемо функціонал кінетичної енергії $\mathcal{E}'_q(\Theta^g)$ у вигляді:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta^g) \ = \ \frac{1}{q} \sup_{\varphi,\psi,\ell,m} \left\{ \mathbb{E}\int_0^T \sum_{j=1}^m \Big[\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\big(\int\limits_M \varphi_j(x) b_k(x) dx\big)^2}{\big(\int\limits_M \varphi_j(x)dx\big)^\alpha} \Big]^{q/2} \right\}$$

і позначимо через $E'_q(\Theta^g)$ вираз під супремумом. Тоді

$$E'_q(\Theta^g) \ \leq \ \mathbb{E}\int_0^T \sum_{j=1}^m \Big[\sum_{k=1}^{\ell} \Big(\int\limits_M \varphi_j(x)dx\Big)^{(1-\alpha)} \int\limits_M \varphi_j(x) b_k^2(x) dx \Big]^{q/2} dt.$$

Вище, для $r = 2$, була використана нерівність

$$\Big(\int\limits_M \varphi_j b_k dx\Big)^r \leq \Big(\int\limits_M \varphi_j \, dx\Big)^{r-1} \int\limits_M \varphi_j b_k^r dx. \tag{7.27}$$

Враховуючи, що ψ_k є такими, що для будь-якого $u \in TM$:

$$\sum_{k=1}^{\ell} \langle \nabla\psi_k, u\rangle^2 =: \sum_{k=1}^{\ell} b_k^2 \leq ||u||^2,$$

маємо:

$$E'_q(\Theta^g) \ \leq \ \mathbb{E}\int_0^T \sum_{j=1}^m \Big[\Big(\int\limits_M \varphi_j dx\Big)^{(1-\alpha)} \int\limits_M \varphi_j ||u||^2 dx \Big]^{q/2} dt \leq$$

$$\leq \ \mathbb{E}\int_0^T \sum_{j=1}^{m} \Big[\Big(\int\limits_M \varphi_j dx\Big)^{(1-\alpha)q/2}\Big(\int\limits_M \varphi_j dx\Big)^{q/2-1}\int\limits_M \varphi_j ||u||^q dx\Big]^{q/2} dt.$$

Вище також була застосована нерівність (7.27) з $r = q/2$ до останнього множника у квадратних дужках: $\int\limits_M \varphi_j ||u||^2 dx$. Оскільки для $\alpha = \frac{2(q-1)}{q}$ маємо $\frac{(1-\alpha)q}{2} + \frac{q}{2} - 1 = 0$ отримаємо твердження (7.25). □

Наслідок 7.17. За умов Твердження 7.14, якщо стохастичний потік Іто g_t має скінченну q-енергію $\mathcal{E}_q(g)$, тоді асоційований g-потік Θ_t^g також має скінченну узагальнену q-енергію $\mathcal{E}'_q(\Theta^g)$.

Теорема 7.18. Нехай $q > 1$ і g_t — стохастичний потік Іто.

Тоді $\mathcal{E}'_q(\Theta^g) = \mathcal{E}_q(g)$.

Доведення. З врахуванням попередньої теореми достатньо довести, що $\mathcal{E}'_q(\Theta^g) \geq \mathcal{E}_q(g)$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати функції $\varphi_1^\varepsilon, \ldots, \varphi_{m_\varepsilon}^\varepsilon$ такі, що $\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ та M, $\operatorname{supp}(\varphi_j^\varepsilon) \subset B(x_j, \varepsilon)$ і для деякого фіксованого δ, що не залежить від ε та j:

$$\int_M \varphi_j^\varepsilon(x) dx \geq \delta \varepsilon^d. \tag{7.28}$$

Враховуючи позначення (7.26) та $b = (b_1, \ldots, b_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, $\|b\| := \|b\|_{\mathbb{R}^\ell}$ маємо:

$$0 \leq \mathcal{E}_q(g) - \mathcal{E}'_q(\Theta^g) \leq \frac{1}{q}\mathbb{E}\int\limits_0^T \Bigg\{ \int\limits_M \big\|b(y)\big\|^q dy - \sum_{j=1}^{m} \frac{\big\|\int\limits_M \varphi_j(x) b(x) dx\big\|^q}{\Big(\int\limits_M \varphi_j(x) dx\Big)^{q-1}} \Bigg\} dt =$$

$$= \frac{1}{q}\mathbb{E}\int\limits_0^T \int\limits_M \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) \Bigg\{ \big\|b(y)\big\|^q - \frac{\big\|\int\limits_M \varphi_j(x) b(x) dx\big\|^q}{\Big(\int\limits_M \varphi_j(x) dx\Big)^q} \Bigg\} dy\, dt \leq$$

$$= \mathbb{E}\int\limits_0^T \int\limits_M \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) \big\|b(y)\big\|^{q-2} \Big\langle b(y), b(y) - \frac{\int\limits_M \varphi_j(x) b(x) dx}{\int\limits_M \varphi_j(x) dx} \Big\rangle\, dy\, dt. \tag{7.29}$$

Вище була використана властивість опуклості функції $f(x) = x^q$ і застосована нерівність: $f(x) - f(x_0) \leq \langle f'(x), x - x_0\rangle$. Виконуючи заміну змінних, маємо

$$(7.29) = \mathbb{E}\int\limits_0^T \sum_{j=1}^m \frac{1}{\int\limits_M \varphi_j dx} \int\limits_M \varphi_j(y) \big\|b(y)\big\|^{q-2} \cdot$$

$$\cdot \Big\langle b(y), \int\limits_M b(y)\varphi_j(x)dx - \int\limits_M \varphi_j(x)b(x)dx\Big\rangle \, dy\, dt =$$

$$= \mathbb{E}\int\limits_0^T \sum_{j=1}^m \frac{1}{\int\limits_M \varphi_j dx} \int\limits_{M\times M} \varphi_j(y)\big\|b(y)\big\|^{q-2}\big\langle b(y), b(y)\varphi_j(x) - \varphi_j(x)b(x)\big\rangle \, dx\, dy\, dt =$$

$$= \mathbb{E}\int\limits_0^T \sum_{j=1}^m \frac{1}{\int\limits_M \varphi_j dx} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \int\limits_M \varphi_j(y)\big\|b(y)\big\|^{q-2} \cdot$$

$$\cdot \Big\langle b(y), \varphi_j(y+r)\big(b(y) - b(y+r)\big)\Big\rangle dy\, dr\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta\varepsilon^d} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\int\limits_0^T \int\limits_M \varphi_j(y)\big\|b(y)\big\|^{q-1}\big\|b(y) - b(y+r)\big\| dy\, dt\, dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta\varepsilon^d} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \left(\mathbb{E}\int\limits_0^T \int\limits_M \big\|b(y)\big\|^q dy\, dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left(\mathbb{E}\int\limits_0^T \int\limits_M \big\|b(y) - b(y+r)\big\|^q dy\, dt\right)^{1/q} dr \leq$$

$$\leq \frac{Vol(B(0,\varepsilon))}{\delta\varepsilon^d} q^{\frac{q-1}{q}} \mathcal{E}(g)^{\frac{q-1}{q}} \sup_{r\in B(0,\varepsilon)} \big\|\tau_r b - b\big\|_q,$$

де $\big\|\cdot\big\|_q$ позначає L_q-норму на M, $\tau_a b(y) := b(y-a)$. Вище також було використано властивість (7.28) функцій φ_j. З неперервності в просторі $L_q(M^\ell)$ відображення $a \mapsto \tau_a b$ для $b \in L_q(M^\ell)$ випливає, що вираз вище прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, що завершує доведення. $\square$

7.4 Існування узагальнених потоків, що мінімізують енергію

Цей параграф присвячений дослідженню умов, за яких існує узагальнений потік Θ_t, який мінімізує функціонал енергії $\mathcal{E}'_q(\Theta)$, визначений в (7.23). Для $q > 1$ нехай $\mathcal{H}_q(\eta) = \mathcal{H}_q(\sigma, \eta, T)$ позначає множину розподілів нестискаючих стохастичних потоків Іто g_t, які є розв'язками рівняння (7.7), що задовольняють умови Твердження 7.6 і мають скінченну q-енергію $\mathcal{E}_q(g)$ та конфігурацію η в кінцевих точках. Покладемо

$$\mathcal{E}_q(\eta) = \mathcal{E}_q(\sigma, \eta, T) := \inf \{\mathcal{E}_q(g), \quad \mathcal{L}(g) \in \mathcal{H}_q(\eta)\}, \tag{7.30}$$

де за означенням $\mathcal{E}_q(\eta) = \infty$, якщо $\mathcal{H}_q(\eta)$ є порожньою множиною, $\mathcal{L}(g)$ позначає розподіл g. Крім того, позначимо через $\mathcal{H}'_q(\eta) = \mathcal{H}'_q(\sigma, \eta, T)$ множину розподілів узагальнених потоків Θ_t заданих в означенні 7.11, які мають скінченну узагальнену q-енергію (7.23) та конфігурацію η в кінцевих точках. Покладемо

$$\mathcal{E}'_q(\eta) = \mathcal{E}'_q(\sigma, \eta, T) := \inf \left\{\mathcal{E}'_q(\Theta), \quad \mathcal{L}(\Theta) \in \mathcal{H}'_q(\eta)\right\}, \tag{7.31}$$

де за означенням $\mathcal{E}'(\eta) = \infty$, якщо не існує узагальнених потоків з конфігурацією η в кінцевих точках. Зауважимо, що з Твердження 7.14 та теореми 7.18 випливає

$$\mathcal{E}'_q(\eta) \leq \mathcal{E}_q(\eta). \tag{7.32}$$

Теорема 7.19. Якщо $\mathcal{E}'_q(\eta) < \infty$, тоді існує узагальнений потік Θ з розподілом з $\mathcal{H}'_q(\eta)$ такий, що $\mathcal{E}'_q(\Theta) = \mathcal{E}'_q(\eta)$.

Іншими словами, інфімум функціонала узагальненої q-енергії з заданою конфігурацією η в кінцевих точках досягається на елементах множини $\mathcal{H}'_q(\eta)$.

Доведення. Припустимо $\mathcal{E}'_q(\eta) < \infty$. Нехай $\{\Theta^n\}_{n\geq 1}$ — послідовність розподілів узагальнених стохастичних потоків в $\mathcal{H}'_q(\eta)$, енергія яких збігається до мінімального значення при заданій конфігурації η у кінцевих точках:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}'_q(\Theta^n) = \mathcal{E}'_q(\eta). \tag{7.33}$$

Розглянемо дві послідовності $\Phi = \{\Phi^j\}_{j\geq 1}$, $\Psi = \{\Psi^k\}_{k\geq 1}$ елементів з $C^\infty(M)$, де послідовність Φ — щільна в топології рівномірної збіжності, а Ψ – щільна в топології рівномірної збіжності разом з першою і другою похідними. Доведемо, що існує підпослідовність $\{\Theta^{n_\ell}\}_{\ell\geq 1}$ узагальнених потоків така, що сім'я семімартингалів $\left\{\Theta^{n_\ell}_t(\Phi^j, \Psi^k)\right\}_{j,k\geq 1}$ збігається при $\ell \to \infty$ до деякої сім'ї семімартингалів $\left\{\Theta_t(\Phi^j, \Psi^k)\right\}_{j,k\geq 1}$, і всі $\Theta_t(\Phi^j, \Psi^k)$, $j, k \geq 1$ визначені на тому самому ймовірнісному просторі.

Для цього достатньо довести, що для фіксованих $j, k \geq 1$ та $\Phi^j \in \Phi$, $\Psi^k \in \Psi$ сім'я семімартингалів $\left\{\Theta^n_t(\Phi^j, \Psi^k)\right\}_{n\geq 1}$ є C-щільною в сенсі означення роботи [203], що вимагає перевірки умов теореми 3 з [203], після чого метод діагональної послідовності дає необхідний результат.

Щоб перевірити умови теореми 3 з [203], для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ означимо $\{Y^n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ як послідовність всіх $\tilde{\Theta}^n(\Phi^j, \Psi^k)$ та $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\cdot \Theta^n_s(\Phi^j, \Delta\Psi^k)\, ds$, для $j, k \geq 1$ та їх коваріацій занумерованих деяким чином. Це є можливим, враховуючи зліченність цієї множини. З леми 7.15 маємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}^n_t(\Phi^j, \Psi^k)\right|^q dt &\leq q2^q \left\|\Phi^j\right\|^q_{L^\infty(M)} \left\|\nabla\Psi^k\right\|^q_{L^\infty(M)} \mathcal{E}'_q(\Theta^n)\\ &\leq q2^q \left\|\Phi^j\right\|^q_{L^\infty(M)} \left\|\nabla\Psi^k\right\|^q_{L^\infty(M)} (\mathcal{E}'_q(\eta)+1)\end{aligned} \tag{7.34}$$

для досить великого n. Крім того, з означення 7.11 маємо:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\Theta^n_s(\Phi^j, \Delta\Psi^k)\right|^2 ds\right] \leq T\, \|\Phi^j\|^2_{L^2(M)} \left\|\Delta\Psi^k\right\|^2_{L^2(M)}. \tag{7.35}$$

З іншогоб боку, з (7.21) випливає, що коваріації процесів $\tilde{\Theta}^n_t(\Phi^j, \Psi^k)$ задовольняють:

$$d\left[\tilde{\Theta}^n(\Phi^j, \Psi^k), \tilde{\Theta}^n(\Phi^j, \Psi^k)\right]_t \leq \|\Phi^j\|^2_{L^2(M)} \left\|\nabla\Psi^k\right\|^2_{L^2(M)} dt. \tag{7.36}$$

Отже, похідні цих коваріацій є рівномірно обмеженими.

З (7.34), (7.35) та (7.36) по теоремі 3 в [203] випливає, що для будь-якого фіксованого $d \in \mathbb{N}$ існує підпослідовність $n \mapsto \gamma_d(n)$ така, що послідовність векторів $\left\{(Y_i^{\gamma_d(n)})_{1\leq i\leq d}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в сенсі розподілів до вектора $(Y_i^d)_{1\leq i\leq d}$. Використовуючи метод діагональної підпослідовності та теорему Колмогорова можемо отримати підпослідовність $n \mapsto \gamma(n)$ та набір випадкових величин $(Y_i)_{1\leq i\leq d}, d \in \mathbb{N}$ такий, що послідовність скінченних векторів $\left\{(Y_i^{\gamma(n)})_{1\leq i\leq d}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до вектора $(Y_i)_{1\leq i\leq d}$. Для спрощення подальших викладок перепозначимо $Y_i^{\gamma(n)}$ через Y_i^n.

Крім того,

$$\tilde{\Theta}_t(\Phi^j, \Psi^k) := \mathcal{L}\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{\Theta}^n_t(\Phi^j, \Psi^k) \tag{7.37}$$

$$A_t(\Phi^j, \Psi^k) := \mathcal{L}\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^n_s(\Phi^j, \Delta\Psi^k)\, ds, \tag{7.38}$$

де $\mathcal{L}$- lim позначає границю в сенсі розподілів. Тоді процес

$$\Theta_t(\Phi^j, \Psi^k) := \tilde{\Theta}_t(\Phi^j, \Psi^k) + A_t(\Phi^j, \Psi^k) \tag{7.39}$$

є шуканим граничним процесом. Доведемо, що процес Θ_t може бути подовжений до узагальненого потоку в сенсі означення 7.11, який має конфігурацію η у кінцевих точках і мінімізує функціонал узагальненої q-енергії $\mathcal{E}'_q(\Theta)$. З наведеної вище процедури побудови послідовності $Y_i^n := Y_i^{\gamma(n)}$ випливає, що для будь-якого фіксованого d лінійна комбінація процесів Y_i^n, $1 \leq i \leq d$ збігається до такої ж лінійної комбінації процесів Y_i, $1 \leq i \leq d$, оскільки лінійна комбінація є неперервною функцією від скінченної кількості змінних. Зауважимо, що

$$\tilde{\Theta}_0(\Phi^j, \Psi^k) = (\Phi^j, \Psi^k)_{L^2(M)}. \tag{7.40}$$

З теореми 10 в [170] (яка встановлена для $q = 2$, але легко продовжується до будь-якого $q > 1$ за допомогою нерівності Гельдера) маємо:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T dt \left(D\tilde{\Theta}_t(\Phi^j, \Psi^k)\right)^q\right] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T dt \left(D\tilde{\Theta}_t^n(\Phi^j, \Psi^k)\right)^q\right]. \tag{7.41}$$

З цієї нерівності та леми 7.15 випливає:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T dt \left(D\tilde{\Theta}_t(\Phi^j, \Psi^k)\right)^q\right] \leq q2^q \left\|\Phi^j\right\|_{L^\infty(M)}^q \left\|\nabla\Psi^k\right\|_{L^\infty(M)}^q (\mathcal{E}_q'(\eta) + 1). \tag{7.42}$$

Тому, з теореми 3 в [203] маємо, що коваріації процесів Y_i^n та Y_j^n збігаються до коваріації Y_i та Y_j. Отже, нерівність (7.36) може бути продовжена на граничний процес:

$$d\left[\tilde{\Theta}(\Phi^j, \Psi^k), \tilde{\Theta}(\Phi^j, \Psi^k)\right]_t \leq \|\Phi^j\|_{L^2(M)}^2 \left\|\nabla\Psi^k\right\|_{L^2(M)}^2 dt. \tag{7.43}$$

Враховуючи білінійсність $\tilde{\Theta}_t^n$, твердження (7.40), (7.42) та (7.43) залишаються справедливими для функцій φ та ψ, які є лінійними комбінаціями Φ^j та Ψ^k. При цьому границя $\tilde{\Theta}_t$ також є білінійною для цих комбінацій. Таким чином (7.39) визначає $\Theta_t(\Phi^j, \Psi^k)$ для множин $\{\Phi^j\}_{j\geq 1}$ та $\{\Psi^k\}_{k\geq 1}$, які є щільними в $C^\infty(M)$ у відповідних топологіях. Для того, щоб визначити $\Theta_t(\varphi, \psi)$ на будь-яких $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$, зауважимо, що для всіх j, k $\Theta_t(\Phi^j, \Psi^k)$ визначені на одному фільтрованому ймовірнісному просторі, на якому також буде визначений $\Theta_t(\varphi, \psi)$.

Для $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ існують підпослідовності $\{\Phi^{j_\ell}\}_{\ell\geq 1}$ та $\{\Psi^{k_\ell}\}_{\ell\geq 1}$, які збігаються рівномірно до φ та ψ у відповідній топології. З (7.40), (7.42), та (7.43), а також білінійності $\tilde{\Theta}_t$ випливає, що $\tilde{\Theta}_t(\Phi^{j_\ell}, \Psi^{k_\ell})$ збігається до семімартингала $\tilde{\Theta}(\varphi, \psi)$ незалежно від вибору підпослідовностей $\{\Phi^{j_\ell}\}_{\ell \varkappa 1}$ і $\{\Psi^{k_\ell}\}_{\ell \varkappa 1}$. Неважко також перевірити, що $(\varphi, \psi) \mapsto \tilde{\Theta}_t(\varphi, \psi)$ є білінійним відображенням, і що для всіх $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ процес $\tilde{\Theta}_t(\varphi, \psi)$ є границею $\{\tilde{\Theta}^n_t(\varphi, \psi)\}_{n \geq 1}$ в сенсі збіжності відповідних розподілів. Останнє твердження випливає з того факту, що оцінки в правій частині (7.34) та (7.36) не залежать від n, що дає можливість ідентифікувати границю підпослідовності $\{\tilde{\Theta}^n_t(\varphi, \psi)\}_{n \geq 1}$ з $\tilde{\Theta}_t(\varphi, \psi)$).

Аналогічно, для $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in C^\infty(M)$ процес $[\tilde{\Theta}(\varphi_1, \psi_1), \tilde{\Theta}(\varphi_2, \psi_2)]_t$ є границею процесів $\{[\tilde{\Theta}^n(\varphi_1, \psi_1), \tilde{\Theta}^n(\varphi_2, \psi_2)]_t\}_{n \geq 1}$ в сенсі збіжності відповідних розподілів.

З (7.38) з врахуванням білінійності Θ^n_t та (7.35) маємо, із застосуванням аналогічної процедури вибору підпослідовності, що для всіх $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$:

$$A_t(\varphi, \psi) = \mathcal{L}\text{-}\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^n_s(\varphi, \Delta\psi). \tag{7.44}$$

Це разом з (7.37) дає:

$$\Theta_t(\varphi, \psi) = \mathcal{L}\text{-}\lim_{n \to \infty} \Theta^n_t(\varphi, \psi), \tag{7.45}$$

зокрема:

$$\Theta_t(\varphi, \Delta\psi) = \mathcal{L}\text{-}\lim_{n \to \infty} \Theta^n_t(\varphi, \Delta\psi). \tag{7.46}$$

Інтегруючи, маємо:

$$\int_0^t \Theta_s(\varphi, \Delta\psi) = \mathcal{L}\text{-}\lim_{n \to \infty} \int_0^t \Theta^n_s(\varphi, \Delta\psi). \tag{7.47}$$

Остаточно, ототожнюючи границі в (7.44) та (7.47), маємо:

$$A_t(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_s(\varphi, \Delta\psi)\, ds. \tag{7.48}$$

Таким чином для $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$

$$\Theta_t(\varphi,\psi) = \tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi) + \frac{1}{2}\int_0^t \Theta(\varphi,\Delta\psi)\,ds. \tag{7.49}$$

Залишилось довести, що розподіл процесу Θ_t належить простору $\mathcal{H}'(\eta)$ і

$$\mathcal{E}'_q(\Theta) \le \mathcal{E}'_q(\eta). \tag{7.50}$$

Переходячи до границі в (1)-(6) в означенні 7.11, отримаємо ці твердження для Θ_t. Залишилось довести (7.50). Для цього достатньо показати (7.42). Для $\ell \ge 1$, $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_\ell \in C^\infty(M)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_\ell)$ покладемо

$$|D\tilde{\Theta}^n_t(\varphi,\psi)| := \left(\sum_{k=1}^{\ell} D\tilde{\Theta}^n_t(\varphi,\psi_k)^2\right)^{1/2}.$$

З теореми 10 в [170] (продовженої до будь-якого $q > 1$) випливає, що для будь-яких $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ та довільного $K > 0$, якщо для всіх $n \ge 1$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}^n_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right] \le K,$$

тоді

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right] \le K.$$

Нехай

$$K = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}^n_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right].$$

Розглянемо підпослідовність Θ^{n_ℓ} таку, що

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}^{n_\ell}_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right] = K.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та застосуємо отримані вище результати до послідовності $\tilde{\Theta}^{n_\ell}$, тоді для досить великого ℓ маємо:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right] \le K + \varepsilon.$$

Прямуючи $\varepsilon \to 0$ отримаємо:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}_t(\varphi,\psi)\right|^q dt\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|D\tilde{\Theta}_t^n(\varphi,\psi)\right|^q dt\right]. \tag{7.51}$$

Вибираючи φ^j, ψ^k як в (7.23) з $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_\ell)$, маємо:

$$\sum_{j=1}^m \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\left|D\tilde{\Theta}_t(\varphi^j,\psi)\right|^q}{\Theta_t(\varphi^j,1)^\alpha} dt\right] \le \sum_{j=1}^m \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\left|D\tilde{\Theta}_t^n(\varphi^j,\psi)\right|^q}{\Theta_t^n(\varphi^j,1)^\alpha} dt\right]$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\left|D\tilde{\Theta}_t^n(\varphi^j,\psi)\right|^q}{\Theta_t^n(\varphi^j,1)^\alpha} dt\right] \le \mathcal{E}'_q(\eta).$$

Остаточно, беручи супремум в лівій частині множині, як в (7.23), отримаємо:

$$\mathcal{E}'_q(\Theta) \le \mathcal{E}'_q(\eta), \tag{7.52}$$

що завершує доведення. □

7.5 Висновки розділу 7

В даному обґрунтовано метод найменшої дії для рівняння пористого середовища, тобто доведено, що розв'язки цього рівняння є критичними точками певного неквадратичного функціонала енергії. Крім того доведено стохастичний варіаційних принцип для відповідної нелінійної дифузії і введено поняття узагальнених стохастичних потоків, що розширюють клас розв'язків нелінійного рівняння пористого середовища. Наведені достатні умови існування узагальнених стохастичних потоків, що мінімізують відповідний функціонал енергії.

РОЗДІЛ 8

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КАСПІДАЛЬНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

Вперше рівняння теплопровідності в нециліндричній множині було досліджено в 1913 р. в роботі М. Жевре, який отримав умови регулярності особливої точки границі для області з регулярною межею. Пізніше, в 1934 році І. Г. Петровський сформулював необхідну і достатню умову регулярності граничної точки для параболічного рівняння, яка формулювалася в термінах порядку дотику границі області до характеристики рівняння. Такі задачі інтенсивно досліджувалися 60-ті роки 20 сторіччя в роботах О. А. Олєйник, Й. Кона, В. О. Кондратьєва, В. Г. Мазьї, В. П. Михайлова, Л. Ніренберга, О. А. Олєйник, В. О. Солоннікова та інших.

Кондратьєв В. А. в 1966 розі розглянув граничну задачу для загального параболічного рівняння в області, в якій порядок дотику характеристики до границі області співпадає з головним порядком рівняння, що відповідає так званому випадку конічних сингулярностей. В цій роботі він також запропонував підхід для отримання асимптотичного розкладу розв'язку відповідної граничної задачі в околі особливої конічної точки.

Якщо порядок дотику є більшим порядку оператора, то така задача відповідає випадку сингулярної особливої точки і може бути розглянута в межах аналізу вироджених параболічних (еліптичних) рівнянь, або аналізу псевдодиференціальних операторів з повільно змінним символом.

Останнім часом в літературі особлива увага звертається саме на такі задачі, коли на границі знаходиться сингулярна особлива точка типу каспу. Зокрема, в роботах М. М. Тарханова, В. Рабіновича, Б.-В. Шульце, В. О. Галактіонова, В. Г. Мазьї були досліджені умови існування і єдиності класичних розв'язків таких еліптичних граничних задач та подібних до них рівнянь з псевдодиференціальними операторами.

В даному розділі отримані асимптотичні розклади для розв'язку рівняння теплопровідності в околі каспідальної точки та запропоновано шкалу просторів, в сенсі яких ці розклади є асимптотичними.

Розглядається задача Діріхле для рівняння теплопровідності в обмеженій нециліндричній області $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$. Границя області $\mathcal{G}$ припускається гладкою за виключенням однієї точки, яка має сингулярну особливість типу каспу. На рис. 8.1 приблизно зображено типовий вигляд такої області в околі сингулярної точки. В даному випадку — це точка (0,0).

Слід зазначити, що структура асимптотичного розкладу в околі конічної точки повністю визначається спектром граничної задачі з постійним замороженим в особливій точці коефіцієнтом. Так власному значенню λ_n кратності μ_n відповідає власні функції $|x|^{-\imath\lambda_n}(\log|x|)^j$ для $j = 0, 1, \dots, \mu_n - 1$. При цьому кожна горизонтальна смуга в комплексній площині λ містить скінчену кількість значень λ_n. Розклади для розв'язків загальної задачі по цим власним функціям, як правило, розбіжні в околі сингулярної особливої точки, тому доводиться ставити питання про по-

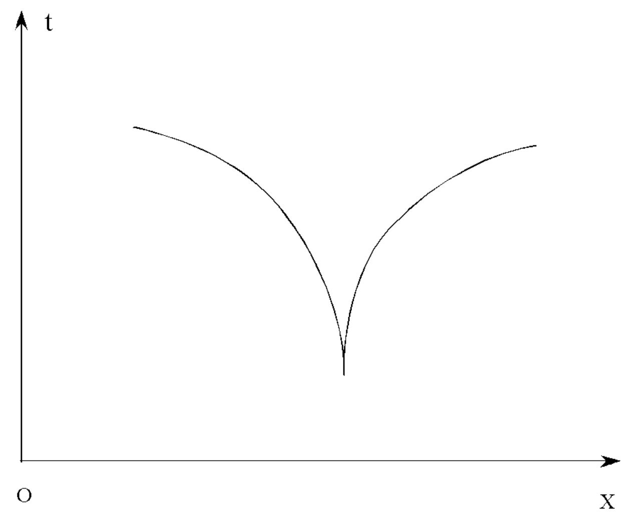

Рис. 8.1: Особлива точка у вигляді каспу.

будову асимптотичних розкладів. Крім того, відсутність теорем вкладення в даному випадку, які б могли давати поточкову гладкість відповідного розв'язку, унеможливлює постановку питання про асимптотичний розклад у класичному сенсі Пуанкаре. Тому питання про асимптотичне представлення розв'язку граничної задачі в околі сингулярної особливої точки природніше ставити у наступному сенсі.

Нехай $\mathcal{F}_n$ позначає деяку послідовність підпросторів деякого простору $\mathcal{F}$, де індекс n пробігає цілі значення. Нехай $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ для будь-якого n. Позначимо через $\mathcal{F}_{-\infty}$ об'єднання всіх $\mathcal{F}_n$. Для даного $f \in \mathcal{F}_{-\infty}$, під асимптотичним розкладом елемента f розуміється ряд

$$f \sim \sum_{n=n_f}^{\infty} f_n, \quad f_n \in \mathcal{F}_n \tag{8.1}$$

такий, що $f - \sum\limits_{n=n_f}^{N} f_n \in \mathcal{F}_{N+1}$ для будь-якого $N \geq n_f$.

Розглянемо першу граничну задачу Діріхле в обмеженій області $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$. Припускається, що границя області $\mathcal{G}$ є гладкою за виключенням кінченої кількості сингулярних точок. Згідно принципу локальності Симоненка [186,187] достатньо вивчати дану задачу в досить малому околі будь-якої характеристичної (сингулярної) точки. Припустимо, що область $\mathcal{G}$ обмежена зверху кривою $t = |x|^p$ з деяким дійсним $p > 0$, а знизу — горизонтальним відрізком $[-1, 1]$.

Тоді у випадку $p > 2$ початок координат буде характеристичною точкою границі, а для $0 < p \leq 2$ — сингулярною особливою точкою. Причому при $p = 2$ дана особливість буде конічного типу, а при $p < 2$ — каспідального. Як зазначалося вище схема дослідження випадку $p \geq 2$ була розроблена в [151] фактично на основі використання так званих операторів Фухса.

Сучасний підхід до вивчення граничних задач з каспідальними особливостями на границі полягає в використанні так званої техніки "підриву сингулярності" (див. [181]). Цей підхід дає можливість надати повну характеризацію умов фредгольмовості задачі, проте не дає можливості записати та довести існування асимптотичних розкладів для розв'язків в околі сингулярної точки.

В даному розділі розвинуто підхід, який дозволив не тільки побудувати формальні асимптотичні розклади розв'язків для параболічного рівняння типу теплопровідності та рівнянь більш високого порядку похідних за просторовими змінними, але і довести, що ці розклади насправді є асимптотичними у сенсі (8.1). При цьому в ролі асимптотичних просторів з'являються простори типу Слободецького [29].

8.1 Формальні асимптотичні розклади для однорідної задачі

Розглядається перша крайова задача для рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} u'_t - u''_{x,x} &= f \quad \text{in} \quad \mathcal{G}, \\ u &= u_0 \quad \text{at} \quad \partial\mathcal{G} \setminus \Sigma. \end{aligned} \tag{8.2}$$

в області $\mathcal{G}$, де Σ позначає множину характеристичних точок границі $\partial\mathcal{G}$. Функції f в $\mathcal{G}$ та u_0 на $\partial\mathcal{G} \setminus \Sigma$ є деякими гладкими функціями.

З локального принципу Симоненка [186,187] випливає, що властивість фредгольма задачі (8.2) в належному функціональному просторі еквівалентна локальній оберненості задачі в кожній точці замикання області $\mathcal{G}$. Тому без порушення загальності можемо вважати, що особлива точка, в околі якої буде досліджуватися задача (8.2) співпадає з початком координат: $P = (0,0)$. Припустимо, що область $\mathcal{G}$ в околі особливої точки задається нерівністю

$$t > |x|^p, \tag{8.3}$$

де p — деяке позитивне дійсне число. Без порушення загальності можемо вважати, що $|x| \le 1$.

Основна ідея полягає у введенні нової системи координат (ω, r) за допомогою заміни змінних:

$$\begin{aligned} x &= r^{1/p}\,\omega, \\ t &= r, \end{aligned} \tag{8.4}$$

де $|\omega| < 1$ і $r \in (0,1)$. Таким чином в нових координатах особлива точка $P = (0,0)$ перетворюється в цілий сегмент $[-1,1]$ на осі ω. При цьому в області змінних (ω, r) задача (8.2) зводиться до звичайного диференціального рівняння за змінною r з операторними коефіцієнтами. Більш точно, при перетвореннях (8.4) похідні по змінним t та x перетворюються наступним чином:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\omega}{p}\frac{\partial u}{\partial \omega},\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{r^{1/p}}\frac{\partial u}{\partial \omega},\end{aligned}$$

і рівняння (8.2) переходить в:

$$\begin{aligned} r^Q U'_r - U''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} U'_\omega &= r^Q F \quad \text{in} \quad (-1,1)\times(0,1),\\ U &= U_0 \quad \text{at} \quad \{\pm 1\}\times(0,1), \end{aligned} \tag{8.5}$$

де $U(\omega,r)$ та $F(\omega,r)$ — відповідні функції, які отримуються з $u(x,t)$ та $f(x,t)$ при перетворенні (8.4), і $Q=\frac{2}{p}$.

Для того, щоб визначити придатні функціональні простори, в яких задача (8.5) має розглядатися та побудувати формальні асимптотичні розклади, розглянемо однорідну крайову задачу наступного вигляду:

$$\begin{aligned} r^Q U'_r - U''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} U'_\omega &= 0 \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,\infty),\\ U(\pm 1, r) &= 0 \quad \text{на} \quad (0,\infty). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Розглянемо випадок $p \neq 2$. Будемо шукати формальні розв'язки (8.6) у вигляді:

$$U(\omega,r) = e^{S(r)}\,V(\omega,r), \tag{8.7}$$

де S — деяка диференційовна функція від $r>0$ і V розкладається в ряди Пьєзо з нетривіальною головною частиною

$$V(\omega,r) = \frac{1}{r^{\varkappa N}}\sum_{j=0}^{\infty} V_j(\omega)\, r^{\varkappa j}.$$

Показники N та $\varkappa$ мають бути визначені в подальшому. Підставляючи (8.7) в (8.6) маємо:

$$\begin{aligned} r^Q\,(S'V + V'_r) - V''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} V'_\omega &= 0 \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,\infty),\\ V(\pm 1, r) &= 0 \quad \text{на} \quad (0,\infty). \end{aligned}$$

Для того, щоб звести граничну задачу до задачі на власні значення будемо вимагати, щоб функція S задовольняла рівняння $r^Q S' = \lambda$ з деякою сталою λ. Якщо $Q \neq 1$, тобто $p \neq 2$, маємо:

$$S(r) = \lambda \frac{r^{1-Q}}{1-Q}$$

з точністю до деякої сталої, що включена як множник в $\exp S$. Таким чином задача зводиться до наступної:

$$\begin{aligned} r^Q V'_r - V''_{\omega,\omega} - r^{Q-1}\frac{\omega}{p} V'_\omega &= -\lambda V \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,\infty), \\ V(\pm 1, r) &= 0 \qquad \text{на} \quad (0,\infty). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Якщо $\varkappa = \dfrac{Q-1}{k}$ для деякого дійсного k, тоді

$$\begin{aligned} r^Q V'_r &= \sum_{j=k}^{\infty} \varkappa(j-N-k)\, V_{j-k} r^{\varkappa(j-N)}, \\ V''_{\omega,\omega} &= \sum_{j=0}^{\infty} V''_j r^{\varkappa(j-N)}, \\ r^{Q-1} V'_\omega &= \sum_{j=k}^{\infty} V'_{j-k} r^{\varkappa(j-N)}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (8.8) та прирівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями r отримаємо низку задач Штурма–Ліувілля:

$$\begin{aligned} -V''_j + \lambda V_j &= 0 \quad \text{в} \quad (-1,1), \\ V_j &= 0 \quad \text{при} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{8.9}$$

для $j = 0, 1, \ldots, k-1$, та

$$\begin{aligned} -V''_j + \lambda V_j &= \frac{\omega}{p} V'_{j-k} - \varkappa(j-N-k)\, V_{j-k} \quad \text{в} \quad (-1,1), \\ V_j &= 0 \qquad \text{при} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{8.10}$$

для $j = mk, mk+1, \ldots, mk+(k-1)$, де m приймає цілі значення.

Для будь-якого $j = 0, 1, \ldots, k-1$, задача Штурма-Ліувілля (8.9), що розглядається в просторі $L^2(-1,1)$ має прості власні значення $\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{2}n\right)^2$ для $n \geq 1$ та відповідні ненульові власні функції $\sin \dfrac{\pi}{2} n(\omega+1)$. Тому

$$V_{n,j}(\omega) = c_{n,j}\,\sin \frac{\pi}{2} n(\omega+1), \tag{8.11}$$

для $j = 0, 1, \ldots, k-1$, де $c_{n,j}$ — деякі сталі. Без порушення загальності можна вважати, що перший коефіцієнт $V_{n,0}$ в розкладі Пьєзо функції V є відмінним від нуля. Отже, $V_{n,j} = c_{n,j} V_{n,0}$ для $j = 1, \ldots, k-1$.

Визначивши функції $V_{n,0}, \ldots, V_{n,k-1}$, що належать просторам Соболєва $H^2(-1,1)$, розглянемо задачу (8.10) для $j = k, \ldots, 2k-1$. Покладемо

$$f_{n,j} = \frac{\omega}{p} V'_{n,j-k} - \varkappa(j-N-k)\, V_{n,j-k}.$$

Для того, щоб неоднорідна задача (8.10) мала ненульовий розв'язок $V_{n,j}$ необхідно і достатньо, щоб права частина $f_{n,j}$ була ортогональною всім розв'язкам відповідної однорідної задачі, тобто $V_{n,0}$. Отже в сенсі $L^2(-1,1)$ маємо:

$$\big(f_{n,j}, V_{n,0}\big) = 0, \quad \text{для} \;\; j = k, \ldots, 2k-1.$$

Визначимо скалярний добуток $(f_{n,j}, V_{n,0})$ для $j = k, \ldots, 2k-1$. Отримаємо:

$$(f_{n,j}, V_{n,0}) = c_{n,j-k}\Big(\frac{1}{p}\,(\omega V'_{n,0}, V_{n,0}) - \varkappa(j-N-k)\,(V_{n,0}, V_{n,0})\Big),$$

отже

$$\begin{aligned}(\omega V'_{n,0}, V_{n,0}) &= \omega\,|V_{n,0}|^2 \Big|_{-1}^{1} - (V_{n,0}, V_{n,0}) - (V_{n,0}, \omega V'_{n,0}) \\ &= -(V_{n,0}, V_{n,0}) - (\omega V'_{n,0}, V_{n,0}).\end{aligned}$$

Остання тотожність отримана з врахуванням того, що $V_{n,0}$ є дійснозначними функціями, які зануляються при ± 1. Тому

$$(\omega V'_{n,0}, V_{n,0}) = -\frac{1}{2}\,(V_{n,0}, V_{n,0})$$

і

$$(f_{n,j}, V_{n,0}) = -c_{n,j-k}\left(\frac{1}{2p} + \varkappa(j-N-k)\right)(V_{n,0}, V_{n,0}) \tag{8.12}$$

для $j = k, \ldots, 2k-1$.

Оскільки $V_{n,0} \neq 0$, умова $(f_{n,j}, V_{n,0}) = 0$ виконується для $j = k$ тоді і лише тоді, коли

$$\varkappa N = \frac{1}{2p}. \tag{8.13}$$

За такої умови задача (8.10) при $j = k$ є розв'язною, і її узагальнений розв'язок має вигляд:

$$V_{n,k} = W_{n,k} + c_{n,k}V_{n,0} \in H^2(-1,1)$$

де $W_{n,k}$ — деякий частковий розв'язок задачі (8.10) із довільними сталими $c_{n,k}$. Більше того, для того, щоб рівність $(f_{n,j}, V_{n,0}) = 0$ виконувалась для $j = k+1, \ldots, 2k-1$ необхідно і достатньо, щоб $c_{n,1} = \ldots = c_{n,k-1} = 0$, тобто всі $V_{n,1}, \ldots, V_{n,k-1}$ тотожно дорівнюють нулю. З цього, в свою чергу, випливає, що $f_{n,k+1} = \ldots = f_{n,2k-1} = 0$, де $V_{n,j} = c_{n,j}V_{n,0}$ для всіх $j = k+1, \ldots, 2k-1$, де $c_{n,j}$ — довільні сталі. Виберемо сталі $c_{n,k+1}, \ldots, c_{n,2k-1}$ таким чином, щоб була виконана умова розв'язності наступних k рівнянь. Розглянемо задачу (8.10) для $j = 2k$. Відповідна права частина дорівнює:

$$\begin{aligned} f_{n,2k} &= \left(\frac{\omega}{p}\,W'_{n,k} - \varkappa(k-N)\,W_{n,k}\right) + c_{n,k}\Big(\frac{\omega}{p}\,V'_{n,0} - \varkappa(k-N)\,V_{n,0}\Big) \\ &= \left(\frac{\omega}{p}\,W'_{n,k} - \varkappa(k-N)\,W_{n,k}\right) + c_{n,k}\Big(f_{n,k} - \varkappa k\,V_{n,0}\Big). \end{aligned}$$

Комбінуючи (8.12) та (8.13), маємо:

$$(f_{n,k} - \varkappa k\,V_{n,0}, V_{n,0}) \;=\; -\varkappa k\,(V_{n,0}, V_{n,0})$$

$$= \ (1-Q)\,(V_{n,0},V_{n,0})$$

є відмінним від нуля. Отже, стала $c_{n,k}$ може бути визначена таким чином, що $(f_{n,2k},V_{n,0})=0$. Більш того, функції $f_{n,2k+1},\ldots,f_{n,3k-1}$ є ортогональними до $V_{n,0}$ тоді і лише тоді, коли $c_{n,k+1}=\ldots=c_{n,2k-1}=0$. З цього випливає, що $V_{n,j}$ тотожно дорівнюють нулю при $j=k+1,\ldots,2k-1$.

Продовжуючи аналогічним чином, побудуємо послідовність функцій $V_{n,j}\in H^2(-1,1)$, для $j=0,1,\ldots$, що задовольняє рівняння (8.9) та (8.10). Функції $V_{n,j}(\omega)$ визначені однозначно з точністю до спільного сталого множника $c_{n,0}=c_n$. Крім того, $V_{n,j}$ тотожно дорівнюють нулю крім значень $j=mk$, де $m=0,1,\ldots$. Отже

$$\begin{aligned} V_n(\omega,r) &= \frac{1}{r^{\varkappa N}}\sum_{m=0}^{\infty}V_{n,mk}(\omega)\,r^{\varkappa mk} \\ &= \frac{1}{r^{Q/4}}\sum_{m=0}^{\infty}V_{n,mk}(\omega)\,r^{(Q-1)m} \end{aligned} \tag{8.14}$$

є єдиним з точністю до постійного множника розв'язком задачі (8.8), що відповідає $\lambda=\lambda_n$.

З (8.14) видно, що формальний розклад не залежить від параметра k, а відповідні функції $V_{n,mk}(\omega)$ відтворюються з системи (8.9) з правою частиною, яка залежить від функції $V_{n,m(k-1)}$. Тому, без втрати загальності, можемо покласти $k=1$ і записати формальний асимптотичний розклад у вигляді:

$$V_n(\omega,r)=\frac{1}{r^{Q/4}}\sum_{m=0}^{\infty}V_{n,m}(\omega)\,r^{(Q-1)m}.$$

Крім того, враховуючи (8.10), маємо наступні рекурентні співвідношення для функцій $V_{n,m}$:

$$\begin{aligned} -V''_{n,0} + \lambda_n V_{n,0} &= 0 \quad \text{в} \qquad (-1,1), \\ V_{n,0} &= 0 \quad \text{при} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{8.15}$$

і

$$\begin{aligned} -V''_{n,m} + \lambda_n V_{n,m} &= \frac{\omega}{p} V'_{n,m-1} + \Big(\frac{Q}{4} + (m-1)(1-Q)\Big) V_{n,m-1} \quad \text{в} \qquad (-1,1), \\ V_{n,m} &= 0 \qquad\qquad \text{при} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{8.16}$$

для $m \geq 1$.

Теорема 8.1. Нехай $p \neq 2$. Тоді довільний розв'язок однорідної задачі (8.6) має формальний асимптотичний розклад наступного вигляду:

$$U(\omega, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r^{Q/4}} \exp\Big(\lambda_n \frac{r^{1-Q}}{1-Q}\Big) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{r^{(1-Q)m}},$$

де $\lambda_n = -\Big(\frac{\pi}{2} n\Big)^2$ — власні значення задачі Штурма–Ліувілля (8.9).

Доведення. Доведення теореми випливає з викладеного вище. □

В термінах вихідних координат (x, t) в околі точки $P = (0, 0)$ області $\mathcal{G}$ формальний розклад розв'язку задачі (8.2) має наступний вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{Q/4}} \exp\Big(\lambda_n \frac{t^{1-Q}}{1-Q}\Big) \sum_{m=0}^{\infty} V_{n,m}\Big(\frac{x}{t^{1/p}}\Big) \Big(\frac{1}{t}\Big)^{(1-Q)m}. \tag{8.17}$$

Для повноти дослідження особливий випадок асимптотичного розкладу при $p = 2$, що відповідає так званим конічній сингулярній точці, розглянуто у додатку F.

8.2 Фредгольмовість першої крайової задачі

Надалі будемо припускати $0 < p < 2$, тобто $Q = 2/p$ більше за 1, що відповідає особливій точці типу каспу.

Для того, щоб розглянути питання про локальну розв'язність вихідної задачі (8.5) в околі $r = 0$, необхідно належним чином підібрати простори функцій, в яких ця задача розглядатиметься. Для цього необхідно виконати деякі додаткові перетворення, а саме розглянемо заміну координат $s = \delta(r)$ на інтервалі $(0,1)$ таку, що

$$r^Q \frac{d}{dr} = \frac{d}{ds}.$$

Відповідна функція δ визначається з точністю до сталої з наступної рівності $\delta'(r) = r^{-Q}$ і задається рівнянням:

$$\delta(r) = \frac{r^{1-Q}}{1-Q} \tag{8.18}$$

для $r > 0$. Зауважимо, що $\delta(0+) = -\infty$. Тоді задача (8.5) набуває вигляду:

$$\begin{array}{rclll} U'_s - U''_{\omega,\omega} + \dfrac{1}{2-p}\dfrac{1}{s}\,\omega U'_\omega & = & \left(\dfrac{\delta(1)}{s}\right)^{\frac{2}{2-p}} F & \text{в} & (-1,1)\times(-\infty,\delta(1)), \\ U & = & U_0 & \text{при} & \{\pm 1\}\times(-\infty,\delta(1)), \end{array} \tag{8.19}$$

де ми використовуємо те саме позначення U для образу функції U при перетворенні $s = \delta(r)$, та аналогічно для F. Вище $\delta(1) = \frac{1}{1-Q} < 0$.

Таким чином, гранична задача (8.2) зведена до граничної задачі (8.19) з оператором

$$\mathcal{A}(s)U = U'_s - U''_{\omega,\omega} + \frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}\,U'_\omega, \tag{8.20}$$

що діє у просторі $\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))$ функцій U таких, що $U = U_0$ при $\omega = \pm 1$, $s \in (-\infty, \delta(1))$ та

$$||U||^2_{\mathcal{H}^1_0(-\infty,\delta(1))} = \int\limits_{-\infty}^{\delta(1)} \Big(||U'(s)||^2_{L^2(-1,1)} + ||U(s)||^2_{H^2(-1,1)}\Big)|s|^{\frac{3}{p-2}}\, d\omega\, ds < \infty. \tag{8.21}$$

Множник $s^{3/(p-2)}$ виникає в результаті заміни міри Лебега $dx\,dt$, по якій будується стандартний простір Соболева, при перетворенні координат (8.4), (8.18).

Запишемо формальний асимптотичний розклад задачі (8.6) в нових координатах (ω, s). Підставляючи (8.18) в теорему 8.1, отримаємо:

$$U(\omega, s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left((1-Q)s\right)^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} \exp(\lambda_n s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{((1-Q)s)^m} \tag{8.22}$$

для s, що знаходиться в околі точки $-\infty$. При цьому $\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{2}n\right)^2$.

Для того, щоб отримати розв'язність трансформованої граничної задачі (8.19), введемо шкалу просторів $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty, T)$ функцій, які приймають значення в стандартному просторі Соболєва $H^{2k}(-1,1)$. Скажемо, що функція U зі значеннями в просторі $H^{2k}(-1,1)$ належить простору $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty, T)$, $T \le \infty$ для $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \le 0$ та деякого $\mu > \mu_0$, $\mu_0 = \frac{3}{2(p-2)}$ якщо наступна норма є скінченною:

$$\|U\|_{\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} := \Big(\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\, s^{2\mu} \sum_{j=0}^{k} \|U^{(j)}(s)\|^2_{H^{2(k-j)}(-1,1)} ds \Big)^{1/2}. \tag{8.23}$$

У спеціальному випадку, коли $k = 1$, $\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$ та $T = \delta(1)$ ці простори співпадають з простором $\mathcal{H}^1_0(-\infty, \delta(1))$, введеним вище, таким чином $\mathcal{H}^1_0(-\infty, \delta(1)) = \mathcal{H}^1_{0,\mu_0}(-\infty, \delta(1))$. Якщо $k = 0$ і $\mu = 0$, позначимо простір $\mathcal{H}^0_{\gamma,0}(-\infty, T)$ через $\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty, T)$. Головний результат цього пункту полягає в наступній теоремі.

Теорема 8.2. Нехай $\gamma < 0$, $\gamma \ne \lambda_n, n \ge 0$, де λ_n — власні значення оператора Δ в просторі $L^2(-1,1)$. Тоді для будь-якого $\mu > -1$ існує таке $T_0(\mu) \in \mathbb{R}$, що для всіх $T < T_0$ оператор (8.20) задачі (8.19), що діє у просторі

$$\mathcal{A}(s)\colon \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty, T) \mapsto \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty, T) \tag{8.24}$$

є оберненим, і виконана наступна оцінка:

$$||U||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} \leq C\, ||\mathcal{A}(s)U||_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)}. \tag{8.25}$$

Доведення цієї теореми розбито на декілька лем.

Лема 8.3. Нехай $\gamma < 0$, $\gamma \neq \lambda_n$, $n \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ і $T < 0$. Тоді оператор

$$(\partial_s - \Delta)^{-1} \colon \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T) \mapsto \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$$

є обмеженим і виконана наступна оцінка:

$$||U||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} \leq C\, ||F||_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)}, \tag{8.26}$$

$$U(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Im m\, \sigma = \gamma} e^{i\sigma s}(-i\sigma - \Delta)^{-1}\hat{F}(\sigma)\, d\sigma. \tag{8.27}$$

Твердження цієї леми також є справедливим при $\gamma = 0$. В цьому випадку μ повинно бути менше, ніж $-\frac{1}{2}$.

Доведення. Розглянемо $F \in \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)$. Для $|s| > |T|$ продовжимо функцію F нулем, тоді $F \in \mathcal{L}^2_\gamma(\mathbb{R})$. Застосовуючи перетворення Фур'є по змінній s до рівняння

$$\partial_s U(s) - \Delta U(s) = F(s), \tag{8.28}$$

отримаємо:

$$-\, i\sigma\hat{U} - \Delta\hat{U} = \hat{F}. \tag{8.29}$$

Оскільки пряма $\Im m\, \sigma = \gamma$ для $\gamma \neq \lambda_n$ складається з регулярних точок оператора Δ і $\hat{F} \in L^2(-1,1)$, маємо, що оператор

$$(-i\sigma - \Delta)^{-1} \colon L^2(-1,1) \mapsto H^2(-1,1) \;\text{ є обмеженим}, \tag{8.30}$$

і для будь-якого $v \in L^2(-1,1)$:

$$|\sigma| \cdot ||(i\sigma + \Delta)^{-1}v||_{L^2(-1,1)} \leq C'||v||_{L^2(-1,1)}, \tag{8.31}$$

з сталою C', що не залежить від σ. Тому розв'язок $\hat{U}$ рівняння (8.29) задається наступним чином: $\hat{U} = \big(-i\sigma - \Delta\big)^{-1}\hat{F} \in H^2(-1,1)$. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до розв'язку рівняння (8.28), маємо представлення (8.27).

Позначимо $H_1 = H^2(-1,1)$ і $H_0 = L^2(-1,1)$. Для $\gamma < 0$ маємо:

$$\begin{aligned}
||U||^2_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\, s^{2\mu}\,\Big\|\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma}(i\sigma)\,e^{i\sigma s}(-i\sigma-\Delta)^{-1}\hat{F}(\sigma)d\sigma\Big\|^2_{H_0} ds\, + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\, s^{2\mu}\,\Big\|\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma} e^{i\sigma s}(-i\sigma-\Delta)^{-1}\hat{F}(\sigma)d\sigma\Big\|^2_{H_1} ds \le \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-4\gamma s}\, s^{2\mu}\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma}|\sigma|^2\,\big\|(i\sigma+\Delta)^{-1}\hat{F}(\sigma)\big\|^2_{H_0} d\sigma\, ds\, + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-4\gamma s}\, s^{2\mu}\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma}\big\|(i\sigma+\Delta)^{-1}\hat{F}(\sigma)\big\|^2_{H_1} d\sigma\, ds. \qquad (8.32)
\end{aligned}$$

З (8.30), (8.31) та теореми Парсеваля:

$$||F||^2_{\mathcal{L}^2_\gamma(\mathbb{R})} = 2\pi\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma}||\hat{F}(\sigma)||^2_{L^2(-1,1)}\,d\sigma$$

маємо:

$$\begin{aligned}
||U||^2_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} &\le C\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-4\gamma s}\, s^{2\mu}\int\limits_{\Im m\,\sigma=\gamma}\big\|\hat{F}(\sigma)\big\|^2_{H_0} d\sigma\, ds = \qquad (8.33)\\
&= C'\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-4\gamma s}\, s^{2\mu}\,\|F\|^2_{\mathcal{L}^2_\gamma(\mathbb{R})} ds = C''\,\|F\|^2_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)}.
\end{aligned}$$

Щоб оцінити вираз в (8.32) у випадку $\gamma = 0$, необхідно зауважити, що оператор Δ з граничними умовами Діріхле не має власних функцій, що відповідають нульовому власному значенню, а отже допускає обернення.

Тому оцінка (8.34) також виконана для $\gamma = 0$. В цьому випадку μ повинна бути меншою за $-\frac{1}{2}$, щоб інтеграл вище збігався. $\square$

Лема 8.4. Нехай $T < 0$ — фіксовано. Тоді для всіх $\gamma \le 0$, $\gamma \ne \lambda_n$, $n \ge 0$ та $\mu > -1$ оператор

$$B(s) = \frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}\frac{\partial}{\partial\omega} : \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T) \mapsto \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)$$

є обмеженим, і для всіх $\varphi \in \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$

$$||B(\cdot)\varphi||_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)} \le \frac{C}{|T|^{\mu+1}}\,||\varphi||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)}. \tag{8.34}$$

Доведення. Як у лемі 8.3 покладемо $H_1 = H^2(-1,1)$ і $H_0 = L^2(-1,1)$. Для $\varphi \in \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)$ маємо

$$\begin{aligned}
\|B(\cdot)\varphi\|^2_{\mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)} &= \int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\,\|B(s)\varphi(s)\|^2_{H_0}\,ds = \\
&= C\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\,s^{-2}\Big\|\omega\frac{\partial\varphi(s)}{\partial\omega}\Big\|^2_{H_0}\,ds \le \\
&\le C\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\,s^{-2}\left(\|\varphi'_s\|^2_{H_0} + \|\varphi\|^2_{H_1}\right)ds = \\
&= C\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\,\frac{s^{2\mu}}{s^{2(\mu+1)}}\left(\|\varphi'_s\|^2_{H_0} + \|\varphi\|^2_{H_1}\right)ds \le \\
&\le \frac{C}{|T|^{2(\mu+1)}}\int_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}\,s^{2\mu}\left(\|\varphi'_s\|^2_{H_0} + \|\varphi\|^2_{H_1}\right)ds = \\
&= \frac{C}{|T|^{2(\mu+1)}}\,\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}},
\end{aligned}$$

оскільки $|s| > |T|$. $\square$

Доведення теореми 8.2. Для $F \in \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty,T)$ представимо задачу

$$\mathcal{A}(s) \equiv \partial_s U - \Delta U + B(s)U = F$$

у вигляді:

$$U - (\partial_s - \Delta)^{-1} B(s) U = (\partial_s - \Delta)^{-1} F. \tag{8.35}$$

Застосовуючи леми 8.3 та 8.4, можемо гарантувати, що для $\mu > -1$ існує таке T_0, що для будь-якого $T > T_0$ норма оператора

$$(\partial_s - \Delta)^{-1} B(s) \colon \ \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty, T) \mapsto \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty, T)$$

буде меншою, ніж деяке $\delta < 1$:

$$||(\partial_s - \Delta)^{-1} B(s)||_{\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T) \to \mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty,T)} < \delta. \tag{8.36}$$

З цього випливає, що рівняння (8.35) має єдиний розв'язок для $F \in \mathcal{L}^2_\gamma(-\infty, T)$, що доводить теорему 8.2. $\square$

Зауважимо, що виконуючи заміну координат

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{x}{t^{1/p}}, \\ s &= \frac{t^{1-Q}}{1-Q}, \end{aligned}$$

і виконуючи перехід від простору $\mathcal{H}^1_{\gamma,\mu}(-\infty, \delta(1))$ до вихідної області $\mathcal{G}$ отримаємо, що теорема 8.2 дає умови для локальної розв'язності задачі (8.2) в околі особливої точки ([47]).

8.3 Асимптотична властивість формального розв'язку

В цьому пункті доводиться асимптотична властивість розв'язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в околі особливої точки типу каспу. Позначимо через $\mathcal{H}^k_{\gamma,m}(-\infty, T)$ простір $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu}$ для $\mu = \mu_0 + m$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu_0 = \frac{3}{2(p-2)}$ і $\mathcal{H}^k_{\gamma,\mu_0}$ для $m = 0$. Зауважимо, що для будь-яких $k, m \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $T < \delta(1)$

$$\mathcal{H}^k_{\gamma,m+1}(-\infty, T) \subset \mathcal{H}^k_{\gamma,m}(-\infty, T) \subset \mathcal{H}^1_0(-\infty, \delta(1)) \equiv \mathcal{H}^1_{0,\mu_0}(-\infty, \delta(1)).$$

Основний результат цього пункту полягає в наступній теоремі.

Теорема 8.5. Припустимо, що $\lambda_{K+1} < \gamma < \lambda_K$. Тоді формальний розклад (8.22) розв'язку $U \in \mathcal{H}_0^1(-\infty, \delta(1))$ задачі (8.19) є асимптотичним розкладом в сенсі означення (8.1).

Доведення. З (8.22) випливає, що розв'язок однорідної граничної задачі (8.19) в просторі $\mathcal{H}_0^1(-\infty, \delta(1))$ має вигляд:

$$U(\omega, s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\omega, s), \tag{8.37}$$

де

$$U_n(\omega, s) = c_{n,Q}\, s^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} \exp\left(\lambda_n s\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{V_{n,m}(\omega)}{((1-Q)s)^m}$$

і $\lambda_n = -\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $c_{n,Q} = c_n(1-Q)^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}}$.

Для $M \geq 0$ і $K \geq 0$ введемо функцію

$$U_{K,M}(\omega, s) = \sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} \exp\left(\lambda_n s\right) \sum_{m=0}^{M} \frac{V_{n,m}(\omega)}{(1-Q)^m s^m}$$

на $(-1, 1) \times (-\infty, S)$. Прямі обчислення дають, що для будь-якого скінченного K ці функції належать простору $\mathcal{H}_{\gamma,M}^1(-\infty, S)$ для $M > \mu_0$. Зафіксуємо цілі M та K і покладемо

$$R_{K+1,M+1}(\omega, s) = U(\omega, s) - \sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s} \sum_{m=0}^{M} \frac{V_{n,m}(\omega)}{(1-Q)^m s^m}$$

для $(\omega, s) \in [-1, 1] \times (-\infty, S)$. Тоді маємо:

$$U(\omega, s) = U_{K,M}(\omega, s) + R_{K+1,M+1}(\omega, s).$$

З теореми 8.2 випливає, що розв'язок U задачі (8.19) належить простору $\mathcal{H}_{\gamma,M}^1$, отже $R_{K+1,M+1} \in \mathcal{H}_{\gamma,M}^1$ також. Доведення теореми 8.5 буде завершено, якщо буде встановлено, що $R_{K+1,M+1}(\omega, s) \in \mathcal{H}_{\gamma,M+1}^1$.

Обрахуємо дію оператора $\mathcal{A}(s)$ на функції $U_{K,M}$. Маємо:

$$\begin{aligned}
\Big(U_{K,M}(\omega,s)\Big)'_s &= \sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s}\Bigg(\sum_{m=0}^{M} \frac{\lambda_n V_{n,m}(\omega)}{(1-Q)^m s^m} - \\
&- \sum_{m=1}^{M+1} \Big(\frac{Q}{4} + (m-1)(Q-1)\Big)\frac{V_{m-1,n}(\omega)}{(1-Q)^m s^m}\Bigg); \\
\Big(U_{K,M}(\omega,s)\Big)''_{\omega\omega} &= \sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s} \sum_{m=0}^{M} \frac{V''_{n,m}(\omega)}{(1-Q)^m s^m}; \\
\frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}\Big(U_{K,M}(\omega,s)\Big)'_\omega &= \sum_{n=0}^{K} \frac{c_{n,Q}}{2-p}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s} \sum_{m=0}^{M} \frac{\omega V'_{n,m}(\omega)}{(1-Q)^m s^{m+1}} = \\
&= -\sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s} \sum_{m=1}^{M+1} \frac{\omega}{p}\frac{V'_{m-1,n}(\omega)}{(1-Q)^m s^m},
\end{aligned}$$

де було використано, що $\frac{1-Q}{2-p} = -\frac{1}{p}$. Отже для оператора $\mathcal{A}(s)$ (8.20) граничної задачі (8.19) маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(s)U_{K,M} &= \sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s} \cdot \Bigg(\sum_{m=0}^{M} \frac{-V''_{n,m} + \lambda_n V_{n,m}}{(1-Q)^m s^m} - \\
&- \sum_{m=1}^{M+1} \frac{\dfrac{\omega V'_{n,m-1}}{p} + \Big(\dfrac{Q}{4} + (m-1)(1-Q)\Big)V_{n,m-1}}{(1-Q)^m s^m}\Bigg) = \\
&= -\sum_{n=0}^{K} c_{n,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_n s}\, \frac{\dfrac{\omega}{p}V'_{n,M} + \Big(\dfrac{Q}{4} + M(1-Q)\Big)V_{n,M}}{(1-Q)^{M+1} s^{M+1}}.
\end{aligned} \tag{8.38}$$

Визначимо функцію $X_{K+1,M+1}(\omega,s)$ з рівності

$$R_{K+1,M+1}(\omega,s) = c_{K,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_K s}\, \frac{X_{K+1,M+1}(\omega,s)}{(1-Q)^{M+1} s^{M+1}}. \tag{8.39}$$

Маємо

$$\mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1} = \frac{c_{K,Q}\, s^{\frac14 \frac{Q}{Q-1}} e^{\lambda_K s}}{(1-Q)^{M+1} s^{M+1}}\, Y_{K+1,M+1}(\omega,s), \tag{8.40}$$

де

$$\begin{aligned} Y_{K+1,M+1}(\omega,s) &= X_{K+1,M+1}\big)''_{\omega\omega} - \frac{1}{2-p}\frac{\omega}{s}\big(X_{K+1,M+1}\big)'_{\omega} + \\ &+ \Big(\lambda_K - \big(M+1-\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}\big)\frac{1}{s}\Big)X_{K+1,M+1}. \end{aligned}$$

Отже для однорідної крайової задачі (8.19), з врахуванням (8.39), маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s)U &= \mathcal{A}(s)U_{K,M} + \mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1} = \\ &= -\sum_{n=0}^{K}\frac{c_{n,Q}\, s^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}}e^{\lambda_n s}}{(1-Q)^{M+1}s^{M+1}}\Big(\frac{\omega}{p}V'_{n,M} + \Big(\frac{Q}{4}+M(1-Q)\Big)V_{n,M}\Big) + \\ &+ \frac{c_{K,Q}\, s^{\frac{1}{4}\frac{Q}{Q-1}}e^{\lambda_K s}}{(1-Q)^{M+1}s^{M+1}}Y_{K+1,M+1}(\omega,s) = 0. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} Y_{K+1,M+1}(\omega,s) &= \sum_{n=0}^{K}c'_{n,Q}e^{(\lambda_n-\lambda_K)s}\Big(\frac{\omega}{p}V'_{n,M} + \Big(\frac{Q}{4}+M(1-Q)\Big)V_{n,M}\Big) = \\ &\overset{(8.16)}{=} \sum_{n=0}^{K}c'_{n,Q}e^{(\lambda_n-\lambda_K)s}\Big(-V''_{n,M+1}+\lambda_n V_{n,M+1}\Big). \end{aligned}$$

Оскільки $V_{n,M+1}\in H^2(-1,1)$, маємо, що $Y_{K+1,M+1}\in\mathcal{H}^0_{0,\mu_0}(-\infty,T)$. Тому, з представлення (8.40) легко отримати, що

$$\mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1}\in\mathcal{H}^0_{\gamma,M+1}(-\infty,T)\subset\mathcal{L}^2_{\gamma}(-\infty,T). \tag{8.41}$$

Дійсно, з представлення (8.40) випливає

$$\mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1} = C\, s^{\alpha}e^{\lambda_K s}Y_{K+1,M+1},$$

де $\alpha = \dfrac{1}{4}\dfrac{Q}{Q-1}-(M+1)$. За означенням простору $\mathcal{H}^0_{\gamma,M+1}(-\infty,T)$ маємо

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1}\|_{\mathcal{H}^0_{\gamma,M+1}(-\infty,T)} = \\ &= \Big(\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2\gamma s}s^{2(\mu_0+M+1)}\|\mathcal{A}(s)R_{K+1,M+1}\|^2_{L_2(-1,1)}ds\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= C\Big(\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-2s(\gamma-\lambda_K)} s^{2(\mu_0+M+1)} s^{2\alpha} \|Y_{K+1,M+1}\|^2_{L_2(-1,1)} ds\Big)^{1/2}.$$

Останній інтеграл є скінченним для $\gamma < \lambda_K$, з чого випливає (8.41).

Отже, за теоремою 8.2, існує $T_0 = T_0(M+1)$ таке, що $R_{K+1,M+1} \in \mathcal{H}^1_{\gamma,M+1}$, як вимагалось, що завершує доведення. □

8.4 Висновки розділу 8

В даному розділі для рівняння теплопровідності в нециліндричній області з каспідальною особливістю на її межі побудовано формальний асимптотичний розклад для розв’язку відповідної крайової задачі в околі особливої точки. Доведено, що цей розклад є асимптотичним в сенсі шкали просторів типу Слободецького, параметри якого визначаються геометрією області та порядком диференціального оператора задачі.

РОЗДІЛ 9

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЕНТРОПІЇ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ В ТЕРМІНАХ ВПОРЯДКОВАНИХ РОЗБИТТІВ

Основним об'єктом, що розглядається в даному розділі є динамічна система $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, де Ω — непорожня множина елементів, яка інтерпретується як множина станів динамічної системи, $\mathcal{A}$-σ-алгебра на Ω, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ — ймовірнісна міра та $T\colon \Omega \to \Omega$ є $\mathcal{A}-\mathcal{A}$-вимірне перетворення, що зберігає міру, тобто $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$. При цьому міра μ називається T-інваріантною.

На перетворення T робиться додаткове припущення його регулярності, яке полягає в тому, що T є *ергодичним* по відношенню до міри μ, тобто $\mu(A) \in \{0,1\}$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$ такого, що $T^{-1}(A) = A$. Крім того, при доведенні деяких тверджень припускається, що множина Ω може бути вкладена в деякий компактний метричний простір таким чином, що $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, де $\mathcal{B}(\Omega)$ позначає борелєву σ-алгебру на Ω.

Нагадаємо означення *ентропії Колмогорова–Сіная*. Нехай $q \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_q\} \subset \mathcal{A}$ скінченне розбиття множини Ω, тобто $\Omega = \bigcup\limits_{\ell=1}^{q} P_\ell$, $P_\ell \neq \varnothing$ для $\ell = 1, \ldots, q$, $P_{\ell_1} \cap P_{\ell_2} = \varnothing$ для різних $\ell_1, \ell_2 \in \{1, \ldots, q\}$ і нехай $A = \{1, \ldots, q\}$ позначає відповідний *алфавіт*. Кожне *слово* $a_1 a_2 \ldots a_t$

довжини $t \in \mathbb{N}$ визначає множину

$$P_{a_1\dots a_t} := \{\omega \in \Omega \colon (\omega, T(\omega), \dots, T^{\circ t-1}(\omega) \in P_{a_1} \times \dots \times P_{a_t})\},$$

де $T^{\circ t}(\omega) := \overbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}^{t \text{ разів}}(\omega)$ і $\circ$ позначає суперпозицію. Набір непустих підмножин, отриманих таким чином для слів довжини t, задає розбиття $\mathcal{P}_t \subset \mathcal{A}$ множини Ω. Зокрема, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$.

Ентропійний показник перетворення T по відношенню до розбиття $\mathcal{P}$ задається як границя $h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} H_\mu(\mathcal{P}_t)$, де $H_\mu(\mathcal{C})$ позначає *ентропію Шеннона* скінченного розбиття $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_q\} \subset \mathcal{A}$ множини Ω, $q \in \mathbb{N}$: $H_\mu(\mathcal{C}) = -\sum\limits_{\ell=1}^{q} \mu(C_\ell) \ln \mu(C_\ell)$ з врахуванням домовленості $0 \cdot \ln 0 := 0$.

Ентропія Колмогорова–Сіная за означенням дорівнює

$$h_\mu^{KS}(T) = \sup_{\substack{\mathcal{P}-\text{ скінченне} \\ \text{розбиття}}} h_\mu(T, \mathcal{P}),$$

В деяких випадках ентропію Колмогорова–Сіная можна означити через так звані *генеруючі розбиття* множини Ω (див., наприклад, [196]), проте в загальному випадку для її обчислення необхідно враховувати незлічені набори скінченних розбиттів. Тому виникає питання про звуження можливих класів підмножин, по яким може відбуватися розбиття множини станів динамічної системи, таким чином, щоб тим не менше не втратити інформацію щодо ентропії системи.

Впорядковані розбиття. В даному розділі під *спостережуваними* розуміється набір $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ випадкових $\mathbb{R}^1$-значних величин, заданих надо ймовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Таким чином заданий деякий випадковий вектор

$$\Theta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо приклад однієї спостережуваної ξ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$. Для довільних $s, t \in \mathbb{N}$ таких, що $s < t$ розглянемо розбиття множини Ω на дві множини:

$$\mathcal{P}^{\xi,T}_{s,t} = \Big\{ \{\omega \in \Omega \colon \xi(T^{\circ s}(\omega)) < \xi(T^{\circ t}(\omega))\}, \\ \{\omega \in \Omega \colon \xi(T^{\circ s}(\omega)) \geq \xi(T^{\circ t}(\omega))\} \Big\}$$

Тоді для набору спостережуваних $\Theta = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ над $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ та довільного $d \in \mathbb{N}$ розбиття

$$\mathcal{P}^{\Theta,T}_{d} = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{0 \leq s < t \leq d} \mathcal{P}^{\xi_i,T}_{s,t} \tag{9.1}$$

називається *впорядкованим розбиттям порядку* d *множини* Ω, *асоційованим з* Θ.

За означенням для двох довільних розбиттів $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ та $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ множини Ω утворення нового розбиття за допомогою операції подрібнення $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ задається наступним чином:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}\}.$$

Враховуючи ці означення *впорядкована ентропія* динамічної системи задається як верхня границя при $d \to \infty$ ентропії Шеннона, що визначається по підрозбиттю $\mathcal{P}^{\Theta,T}_{d}$.

Основним результатом даного розділу є теорема про те, що без додаткового припущення на перетворення T щодо розділення точок простору станів динамічної системи ентропія Колмогорова–Сіная може бути обрахована наступним чином:

$$h^{KS}_{\mu}(T) = \lim_{d \to \infty} h_{\mu}(T, \mathcal{P}^{\Theta,T}_{d}). \tag{9.2}$$

З цього, зокрема, випливає, що впорядкована ентропія системи є не меншою, ніж ентропія Колмогорова–Сіная, а також те, що питання про еквівалентність двох означень зводиться до певної комбінаторної проблеми співпадіння впорядкованої ентропії та правої частини (9.2) (див. [144]).

Основною складовою твердження (9.2) є еквівалентність двох σ-алгебр по відношенню до міри μ у випадку, якщо перетворення T є ергодичним:

$$\Sigma^{\Theta,T} \overset{\circ}{=} \mathcal{F}, \tag{9.3}$$

де $\Sigma^{\Theta,T}$ — σ-алгебра генерована $\bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{P}_d^{\Theta,T}$. Для того, щоб пояснити основні аргументи, введемо σ-алгебру $\sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\geq 0}\big)$, генеровану випадковим вектором Θ та його "зсувами" $\Theta\circ T, \Theta\circ T^2, \ldots$. Основне твердження цього розділу полягаю в тому, що для ергодичного перетворення T

$$\sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\geq 0}\big) \overset{\circ}{\subset} \Sigma^{\Theta,T}. \tag{9.4}$$

Оскільки

$$\Sigma^{\Theta,T} \subset \sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\geq 0}\big), \tag{9.5}$$

що може бути перевірено з використанням стандартних аргументів, з цього випливає, що для ергодичного T

$$\sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\geq 0}\big) \overset{\circ}{=} \mathcal{F} \tag{9.6}$$

є еквівалентним (9.3), а отже і (9.2). Наступна складова доведення твердження (9.2) — це розклад на ергодичні складові.

Зауважимо, що умови (9.6) є значно слабкішими, ніж відповідні умови роботи [141].

9.1 Основні поняття та формулювання результату

9.1.1 Ентропія Колмогорова–Сіная

Нехай Ω — деяка непорожня множина. Для сім'ї підмножин $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I} \subset \Omega$ позначимо $\sigma(\mathcal{A})$ σ-алгебру генеровану $\mathcal{A}$.

Якщо $\Theta\colon \Omega \to X$ є відображенням в деякий топологічний простір X, то $\sigma(\Theta)$ позначає σ-алгебру на Ω генеровану прообразами σ-алгебри $\mathcal{B}(X)$ борелевих підмножин множини X при відображенні Θ.

Якщо $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ і $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ — два розбиття множини Ω, тоді нове розбиття $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ множини Ω задається наступним чином:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}\}.$$

Будемо писати

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B},$$

якщо кожен елемент $A \in \mathcal{A}$ є об'єднанням скінченної кількості елементів з $\mathcal{B}$.

Нехай $\mathcal{F}$ позначає σ-алгебру підмножин Ω і задана деяка міра μ на $\mathcal{F}$. Позначимо $\Pi(\mathcal{F})$ множину всіх *скінченних розбиттів* $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ множини Ω таких, що $A_i \in \mathcal{F}$ для кожного $i = 1, \dots .n$. Тоді *ентропія*, що відповідає набору $\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$ по відношенню до міри μ визначається наступним чином:

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Нехай $T\colon \Omega \to \Omega$ — деяке вимірне перетворення. Позначимо $T^{-1}\mathcal{A}$ розбиття множини Ω, що складається з всіх прообразів елементів з набору множин $\mathcal{A}$:

$$T^{-1}\mathcal{A} = \{T^{-1}(A_1), \dots, T^{-1}(A_n)\}.$$

Для кожного $k \geq 1$ означимо розбиття

$$\tau_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots T^{-(k-1)}\mathcal{A}.$$

Очевидно,

$$\tau_1(\tau_k(\mathcal{A})) = \tau_{k+1}(\mathcal{A}).$$

Означення 9.1. Нехай $T\colon \Omega \to \Omega$ — вимірне перетворення. Тоді *ентропія Колмогорова–Сіная* означається наступною формулою:

$$h_\mu^{KS}(T) = \sup_{\mathcal{A}\in\Pi(\mathcal{F})} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(\mathcal{A})).$$

Зауважимо, що означення ентропії Колмогорова–Сіная вимагає врахування *всіх* скінченних підрозбиттів множини Ω, що належать $\Pi(\mathcal{F})$. Проте, наступна лема вказує на те, що для обрахунку достатньо використати певну зростаючу послідовність скінченних підрозбиттів.

Лема 9.2. [196, лема 4.2] Нехай $\{\mathcal{A}_d\}_{d\geq 1}$ — послідовність скінченних розбиттів з $\mathcal{F}$ така, що

$$\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{A}_d \prec \cdots$$

і $\sigma\left(\{\mathcal{A}_d\}_{d=1}^{\infty}\right) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Тоді $h_\mu^{KS}(T) = \lim\limits_{d\to\infty} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(\mathcal{A}_d))$.

Означення 9.3. Якщо $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — дві під-σ-алгебри, будемо писати $\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$, якщо для кожного $B \in \mathcal{B}$ існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $\mu(B \triangle A) = 0$. Відповідно будемо писати $\mathcal{B} \overset{\circ}{=} \mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{B}$ і $\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$.

9.1.2 Впорядковане розбиття $\mathcal{O}_d$ множини $\mathbb{R}^{d+1}$

Для перестановки $\pi = (i_0, \ldots, i_d)$ множини $\{0, \ldots, d\}$ означимо множину O_π of $\mathbb{R}^d$ за наступним правилом: точка $(x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ належить множині $O_{i_0,\ldots,i_d}$, якщо

$$x_{i_0} \geq x_{i_1} \geq \cdots \geq x_{i_d},$$

і у разі $x_{i_\tau} = x_{i_{\tau+1}}$ для деякого $\tau \in \{0, \ldots, d-1\}$, то

$$i_\tau > i_{\tau+1}.$$

Зауваження 9.4. Зауважимо, що будь-який вектор $x = (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ може розглядатися як набір $(d+1)$ пар

$$\big((x_0, 0),\ (x_1, 1),\ \dots,\ (x_d, d)\big). \tag{9.7}$$

При цьому цей набір є лексикографічно впорядкованим спадаючим чином: спочатку цей набір є впорядкований за спаданням по значенням x_i, після чого він впорядкований за індексами i. Таким чином з кожною точкою $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ може бути єдиним способом асоційована перестановка π індексів $\{0, \dots, d\}$, яка сортує вказаним вище чином пари (9.7).

Позначимо через O_π множину всіх $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, які можуть бути відсортовані однією перестановкою π.

Очевидно, що набір множин

$$\mathcal{O}_d = \{O_\pi \mid \pi = (i_0, \dots, i_d) \text{ is a permutation of } \{0, \dots, d\}\}$$

є розбиттям $\mathbb{R}^{d+1}$.

9.1.3 Впорядковане розбиття множини Ω

Нехай Ω — деяка множина, $T\colon \Omega \to \Omega$ — перетворення і $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Для кожного $d \in \mathbb{N}$ означимо відображення

$$\Lambda_d = (\xi, \xi \circ T, \dots, \xi \circ T^d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$$

і розбиття $\mathcal{P}_d^{\xi,T} = \{P_\pi^{\xi,T}\}$ множини Ω, де

$$P_\pi^{\xi,T} = \Lambda_d^{-1}(O_\pi),$$

і π пробігає множину всіх перестановок множини $\{0, \dots, d\}$. Тоді $\mathcal{P}_d^{\xi,T}$ — це прообраз розбиття $\mathcal{O}_d$ множини $\mathbb{R}^{d+1}$ при відображенні Λ_d.

Зауваження 9.5. Зауважимо, що кожна множина $P_{\pi}^{\xi,T}$, $\pi = (i_0, \dots, i_d)$ складається з всіх $\omega \in \Omega$ таких, що

$$\xi \circ T^{i_0}(\omega) \ \geq \ \xi \circ T^{i_1}(\omega) \ \geq \ \cdots \ \geq \ \xi \circ T^{i_d}(\omega),$$

і у разі $\xi \circ T^{i_\tau}(\omega) = \xi \circ T^{i_{\tau+1}}(\omega)$, то $i_\tau > i_{\tau+1}$.

Зауваження 9.6. Розбиття $\mathcal{P}_d^{\xi,T}$ також може бути описано наступним чином. Для будь-якої пари (i,j) такої, що $0 \leq i < j \leq d$ означимо розбиття множини Ω на дві підмножини:

$$\begin{aligned} R_d^{i,j} &= \{\omega \in \Omega \mid \xi \circ T^i(\omega) < \xi \circ T^j(\omega)\}, \\ R_d^{j,i} &= \{\omega \in \Omega \mid \xi \circ T^i(\omega) \geq \xi \circ T^j(\omega)\}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Тоді

$$\mathcal{P}_d^{\xi,T} = \bigvee_{i \neq j \in \{0,\dots,d\}} R_d^{i,j}. \tag{9.9}$$

Означення 9.7. *Впорядкованою σ-алгеброю, побудованою по парі (ξ,T),* називається σ-алгебра

$$\Sigma^{\xi,T} \ = \ \sigma\big(\{\mathcal{P}_d^{\xi,T}\}_{d=1}^{\infty}\big)$$

на множині Ω.

В більш загальній ситуації, нехай $\Theta = (\xi_1, \dots, \xi_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — деяке відображення. Означимо розбиття

$$\mathcal{P}_d^{\Theta,T} = \bigvee_{i=1}^{n} P_d^{\xi_i,T}, \qquad d \geq 1.$$

Тоді σ-алгебра на Ω

$$\Sigma^{\Theta,T} := \sigma\left(\{\mathcal{P}_d^{\Theta,T}\}_{d=1}^{\infty}\right) = \sigma\left(\{\Sigma^{\xi_i,T}\}_{i=1}^{n}\right),$$

називається *впорядкованою σ-алгеброю, побудованою по* (Θ,T).

Припустимо, що $\mathcal{F}$ — деяка σ-алгебра підмножин Ω така, що перетворення $T\colon \Omega \to \Omega$ є $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$-вимірним і $\Theta\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ є $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-вимірним. Тоді

$$\Sigma^{\Theta,T} \subset \mathcal{F}.$$

Крім того, з (9.8) і (9.9) випливає:

$$\Sigma^{\Theta,T} \subset \sigma\big(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geq 0}\big). \tag{9.10}$$

9.1.4 Основний результат розділу

Наступна теорема дає достатні умови справедливості твердження (9.2). Нагадаємо, що визначення відношення еквівалентності $\mathcal{A} \overset{\circ}{=} \mathcal{B}$ між двома σ-алгебрами $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ дано в означенні 9.3.

Теорема 9.8. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ позначає ймовірнісний простір, $T\colon \Omega \to \Omega$ — вимірне μ-інваріантне перетворення, і $\Theta = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — вимірне відображення таке, що $\sigma\big(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geq 0}\big) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Припустимо, що виконано одна з наступних умов:

(a) T є ергодичним, або

(b) T не є ергодичним, проте Ω може бути вкладеним в деякий компактний метричний простір таким чином, що $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Тоді

$$h_\mu^{KS}(T) = \lim_{d\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\, H_\mu\left(\tau_k(\mathcal{P}_d^{\Theta,T})\right).$$

9.2 Еквівалентність σ-алгебр

9.2.1 Властивості функції розподілу

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір і $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна функція. Нехай також $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ позначає функцію розподілу для ξ, тобто

$$F(a) = \mu\{\omega \mid \xi(\omega) \leq a\} = \mu\big(\xi^{-1}(-\infty, a]\big)$$

Добре відомо, F є неспадаючою, неперервною справа і такою, що

$$\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0, \qquad \lim_{a\to+\infty} F(a) = 1.$$

Має місце наступна діаграма

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "F\circ\xi"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "F"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd} \tag{9.11}$$

з якої, зокрема, випливає, що $F\circ\xi$ є $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-вимірною, а отже $\sigma(F\circ\xi) \subset \mathcal{F}$. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ введемо позначення:

$$q_* = \inf(F^{-1}F(a)), \qquad q^* = \sup(F^{-1}F(a)), \qquad C_a = (-\infty, a).$$

Лема 9.9. Для $a \in \mathbb{R}$ мають місце наступні твердження:

(1) $F^{-1}F(a)$ співпадає або з $[q_*, q^*)$ або з $[q_*, q^*]$.

(2) $F^{-1}F(C_{q_*}) = C_{q_*}$.

(3) Якщо $q_* < a$, то $F^{-1}F(C_a) = C_{q_*} \cup F^{-1}F(a)$, отже $F^{-1}F(C_a)$ дорівнює або $(-\infty, q^*)$ або $(-\infty, q^*]$. Крім того, нехай $Z = F^{-1}F(C_a) \setminus C_a$. Тоді $\mu(\xi^{-1}(Z)) = 0$.

Доведення. (1) Очевидно, що $F^{-1}F(a) \subset [q_*, q^*]$. Доведемо, що $[q_*, q^*) \subset F^{-1}F(a)$. За означенням інфімуму та супремуму множини $F^{-1}F(a)$ існують дві послідовності $\{x_i\}, \{y_i\} \subset F^{-1}F(a)$ такі, що

$$q_* \leq \cdots \leq x_{i+1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_1 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_i \leq y_{i+1} \leq \cdots \leq q^*,$$

$\lim\limits_{i\to\infty} x_i = q_*$ і $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = q^*$. Оскільки F є неспадаючою і $F(x_i) = F(y_i) = F(a)$ для будь-якого i, з цього випливає, що F є сталою на кожному сегменті $[x_i, y_i]$, отже $(q_*, q^*) = \bigcup_i [x_i, y_i] \subset F^{-1}F(a)$. Крім того, з неперервності F з права випливає, що $F(q_*) = \lim\limits_{i\to\infty} F(x_i) = F(a)$, тому $[q_*, q^*) \subseteq F^{-1}F(a)$.

(2) Вкладення $C_{q_*} \subset F^{-1}F(C_{q_*})$ є очевидним. Припустимо, що існує деякий $t \in F^{-1}F(C_{q_*}) \setminus C_{q_*}$. Це означає, що

(i) $t \geq q_*$, і

(ii) $F(t) \in F(C_{q_*})$, тобто $F(t) = F(s)$ для деякого $s < q_*$,

Отже $s < q_* \leq t$. Оскільки F є неспадаючою, $F(s) = F(q_*) \overset{(1)}{=} F(a) = F(t)$, тобто $s \in F^{-1}F(a)$, отже $q_* \leq s$, що суперечить припущенню. Тому $F^{-1}F(C_{q_*}) = C_{q_*}$.

(3) Оскільки $q_* < a$, $F(q_*) = F(a)$, і F є неспадаючою, з цього випливає, що

$$F(C_a) = F((-\infty, q_*)) \cup F([q_*, a)) = F(C_{q_*}) \cup \{F(a)\},$$

тому

$$\begin{aligned} F^{-1}F(C_a) &= F^{-1}\big(F(C_{q_*}) \cup \{F(a)\}\big) \\ &= F^{-1}F(C_{q_*}) \cup F^{-1}F(a) \overset{(2)}{=} C_{q_*} \cup F^{-1}F(a). \end{aligned}$$

Тому Z дорівнює $[a, q^*]$ або $[a, q^*)$. Припустимо $Z = [a, q^*]$, тоді

$$\mu(\xi^{-1}(Z)) = \mu(\xi^{-1}[a, q^*]) = \mu(\xi^{-1}(-\infty, q^*]) - \mu(\xi^{-1}(-\infty, a))$$

$$= F(q^*) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} \mu(\xi^{-1}(-\infty,t])$$

$$= F(a) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} F(t) = F(a) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} F(a) = 0$$

Нехай $Z = [a, q^*)$. Тоді аналогічно

$$\begin{aligned} \mu(\xi^{-1}(Z)) &= \mu(\xi^{-1}[a,q^*)) = \mu(\xi^{-1}(-\infty,q^*)) - \mu(\xi^{-1}(-\infty,a)) \\ &= \lim_{\substack{s\to q^* \\ s\in(q_*,q^*)}} \mu(\xi^{-1}(-\infty,s]) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} \mu(\xi^{-1}(-\infty,t]) \\ &= \lim_{\substack{s\to q^* \\ s\in(q_*,q^*)}} F(s) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} F(t) = \lim_{\substack{s\to q^* \\ s\in(q_*,q^*)}} F(a) - \lim_{\substack{t\to a \\ t\in(q_*,a)}} F(a) = 0, \end{aligned}$$

що доводить лему. □

Лема 9.10. $\sigma(F\circ\xi) \overset{\circ}{=} \sigma(\xi)$.

Доведення. Неважко бачити, що $\sigma(F\circ\xi) \subset \sigma(\xi)$. Дійсно, нехай $A \in \sigma(F\circ\xi)$, тому $A = (F\circ\xi)^{-1}(B) = \xi^{-1}F^{-1}(B)$ для деякого $B \in \mathcal{B}([0,1])$. Але $F^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, отже $A \in \sigma(\xi)$.

Покажемо, що $\sigma(F\circ\xi) \overset{\circ}{\supset} \sigma(\xi)$. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ нехай $P_a = \xi^{-1}(C_a)$. Тоді $\sigma(\xi)$ генерована множинами P_a, отже достатньо довести, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ існує деяка множина $Q_a \in \sigma(F\circ\xi)$ така, що $\mu(Q_a \bigtriangleup P_a) = 0$. Покладемо $Q_a = \xi^{-1}F^{-1}F(C_a) = (F\circ\xi)^{-1}F(C_a)$. Оскільки F є неспадною, то $F(C_{q_*})$ є борелевою підмножиною $[0,1]$, отже $Q_{q_*} \in \sigma(F\circ\xi)$. Залишилось довести, що $\mu(Q_a \bigtriangleup P_a) = 0$ для кожного $a \in \mathbb{R}$.

Спочатку припустимо, що $a = q_*$. Тоді з (2) у лемі 9.9 випливає

$$P_a = P_{q_*} = \xi^{-1}(C_{q_*}) \overset{(2)}{=\!=} \xi^{-1}F^{-1}F(C_{q_*}) = Q_{q_*} = Q_a,$$

тому $Q_a \bigtriangleup P_a = \varnothing$, а отже $\mu(Q_a \bigtriangleup P_a) = 0$.

Припустимо, що $q_* < a$. Тоді для $Z = F^{-1}F(C_a) \setminus C_a$ виконано

$$Q_a = \xi^{-1}F^{-1}F(C_a) = \xi^{-1}(C_a) \cup \xi^{-1}(Z) = P_a \cup \xi^{-1}(Z),$$

Отже, з (4) випливає $\mu(Q_a \triangle P_a) = \mu(Q_a \setminus P_a) = \mu(\xi^{-1}(Z)) = 0$, що доводить лему. $\square$

9.2.2 Ергодичність та її наслідки

Нехай $T\colon \Omega \to \Omega$ — вимірне перетворення. Визначимо функцію $I_d\colon \Omega \to \mathbb{R}$ наступним чином:

$$I_d(\omega) = \#\{r = 1, \dots, d-1 \mid \xi \circ T^r(\omega) \le \xi(\omega)\}.$$

Таким чином $I_d(\omega)$ — це число точок серед перших $d-1$ точки T-орбіти точки ω, в якій ξ приймає значення не більші, ніж $\xi(\omega)$.

Теорема 9.11. Якщо T — ергодичне перетворення і зберігає міру μ, тоді

$$F \circ \xi(\omega) = \lim_{d\to\infty} \frac{I_d(\omega)}{d} \text{ for a.e. } \omega \in \Omega. \tag{9.12}$$

Доведення. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ розглянемо множину

$$K_a = \xi^{-1}(-\infty, a].$$

За означенням

$$F(a) = \mu(K_a) = \mu(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le a).$$

Крім того, оскільки T — ергодичне перетворення, то з теореми Біркгофа випливає, що існує підмножина $\Omega_a \subset \Omega$ така, що $\mu(\Omega_a) = 1$, і для будь-якого $\bar\omega \in \Omega_a$

$$\begin{aligned}\mu(K_a) &= \lim_{d\to\infty} \frac{1}{d}\#\{r < d \mid T^r(\bar\omega) \in K_a\} \\ &= \lim_{d\to\infty} \frac{1}{d}\#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar\omega) \le a\}.\end{aligned}$$

Візьмемо довільну залічену щільну підмножину $S \subset \mathbb{R}$, що містить всі точки не неперервності функції F і покладемо

$$\bar{\Omega} = \bigcap_{a \in S} \Omega_a.$$

Тоді для кожного $a \in S$ і $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ маємо

$$\mu(K_a) = \lim_{d \to \infty} \frac{1}{d} \#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le a\}.$$

Зокрема, якщо $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ таке, що $a = \xi(\bar{\omega}) \in S$, то

$$\begin{aligned} F(\xi(\bar{\omega})) &= F(a) = \mu(K_a) = \mu(K_{\xi(\bar{\omega})}) = \\ &= \lim_{d \to \infty} \frac{1}{d} \#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le \xi(\bar{\omega})\} = \lim_{d \to \infty} \frac{I_d(\bar{\omega})}{d}. \end{aligned}$$

Отже $\dfrac{I_d}{d}$ збігається до $F \circ \xi$ на множині $\xi^{-1}(S) \cap \bar{\Omega}$. Покажемо, що з цього випливає збіжність до $F \circ \xi$ на $\bar{\Omega}$.

Нехай $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ таке, що $a = \xi(\bar{\omega}) \in \mathbb{R} \setminus S$. Отже, F є неперервною в a. Виберемо дві послідовності

$$\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} \ \subset \ S \cap (-\infty, a), \qquad \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \ \subset \ S \cap (a, +\infty),$$

що збігаються до a. Тоді за конструкцією $\bar{\Omega}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} F(b_i) &= \mu(K_{b_i}) = \lim_{d \to \infty} \frac{1}{d} \#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le b_i\}, \\ F(c_i) &= \mu(K_{c_i}) = \lim_{d \to \infty} \frac{1}{d} \#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le c_i\}. \end{aligned}$$

Оскільки $b_i < a < c_i$, то

$$\#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le b_i\} \quad \le \quad I_d(\bar{\omega}) \quad \le \quad \#\{r < d \mid \xi \circ T^r(\bar{\omega}) \le c_i\}.$$

Hence

$$F(a) = \lim_{i \to \infty} F(b_i) \le \varliminf_{i \to \infty} I_d(\bar{\omega}) \le \varlimsup_{i \to \infty} I_d(\bar{\omega}) \le \lim_{i \to \infty} F(c_i) = F(a).$$

Отже $\lim_{d\to\infty} \dfrac{I_d(\bar{\omega})}{d}$ існує і співпадає з $F(a) = F(\xi(\bar{\omega}))$, що доводить лему. $\square$

Наслідок 9.12. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — вимірний простір, $T\colon \Omega \to \Omega$ і

$$\Theta = (\xi_1, \dots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

— вимірне відображення. Якщо T — ергодичне і зберігає міру μ, то

$$\sigma(\Theta) \ \overset{\circ}{\subset}\ \Sigma^{\Theta, T}.$$

Доведення. Припустимо $n = 1$, тоді $\Theta = \xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ є функцією. Отже за лемою 9.10 $\sigma(\xi) \overset{\circ}{=} \sigma(F \circ \xi)$. Зауважимо, що $\frac{I_d}{d}$ є $\Sigma^{\xi,T}$-$\mathcal{B}([0,1])$-вимірним для кожного d, і з леми 9.11 випливає, що послідовність $\frac{I_d}{d}$ збігається м.в. до $F \circ \xi$. Отже $F \circ \xi$ є також $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}([0,1])$-вимірною. Це означає, що $\sigma(\xi) \overset{\circ}{=} \sigma(F \circ \xi) \overset{\circ}{\subset} \Sigma^{\xi,T}$.

Якщо $n \geq 2$, то для кожного $i = 1, \dots, n$ маэмо вкладення:

$$\sigma(\xi_i) \ \overset{\circ}{\subset}\ \Sigma^{\xi_i, T}.$$

Оскільки $\Sigma^{\Theta,T}$ генерована $\Sigma^{\xi_i,T}$, то для всіх $i = 1, \dots, n$ маємо $\sigma(\Theta) \ \overset{\circ}{\subset}\ \Sigma^{\Theta,T}$. $\square$

Наслідок 9.13. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір, $T\colon \Omega \to \Omega$ і $\Theta = (\xi_1, \dots, \xi_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ вимірне відображення. Якщо T є ергодичним і зберігає міру μ, то

$$\sigma\bigl(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geq 0}\bigr) \overset{\circ}{=} \Sigma^{\Theta,T}. \tag{9.13}$$

Доведення. Оскільки $\Sigma^{\Theta,T} \subset \sigma\bigl(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geq 0}\bigr)$, див. (9.10), достатньо довести, що

$$\sigma\bigl(\{\Theta \circ T^k\}_{k\geq 0}\bigr) \overset{\circ}{\subset} \Sigma^{\Theta,T}. \tag{9.14}$$

Аналогічно доведенню наслідку 9.12, можемо розглянути тільки випадок $n = 1$ з $\Theta = \xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, оскільки $\Sigma^{\Theta, T}$ генерована $\Sigma^{\xi_i, T}$, $i = 1, \ldots, n$.

Покажемо, що

$$\Sigma^{\xi\circ T^k, T} \subset \Sigma^{\xi, T}, \qquad k \geq 1. \tag{9.15}$$

Тоді з наслідку 9.12 матимемо

$$\sigma(\xi \circ T^k) \overset{\circ}{\subset} \Sigma^{\xi\circ T^k, T} \overset{(9.15)}{\subset} \Sigma^{\xi, T},$$

що дає (9.14) з $\Theta = \xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Щоб довести (9.15) достатньо показати, що розбиття $\mathcal{P}^{\xi, T}_{d+1}$ є дрібнішим, ніж $\mathcal{P}^{\xi\circ T, T}_d$ для будь-якого $d \geq 1$:

$$\mathcal{P}^{\xi\circ T, T}_d \prec \mathcal{P}^{\xi, T}_{d+1}, \qquad d \geq 1.$$

Нехай $\pi = (i_0, \ldots, i_d)$ — перестановка множини $\{0, \ldots, d\}$ і $P^{\xi\circ T, T}_\pi$ — відповідний елемент розбиття $\mathcal{P}^{\xi\circ T, T}_d$, отже $P^{\xi, T}_\pi$ складається з усіх $\omega \in \Omega$ таких, що

$$\xi \circ T \circ T^{i_0}(\omega) \geq \xi \circ T \circ T^{i_1}(\omega) \geq \cdots \geq \xi \circ T \circ T^{i_d}(\omega),$$

і, якщо $\xi \circ T \circ T^{i_\tau}(\omega) = \xi \circ T \circ T^{i_{\tau+1}}(\omega)$, то $i_\tau > i_{\tau+1}$.

Іншими словами, $\omega \in P^{\xi\circ T, T}_\pi$ тоді і лише тоді, коли

$$\xi \circ T^{i_0+1}(\omega) \geq \xi \circ T^{i_1+1}(\omega) \geq \cdots \geq \xi \circ T^{i_d+1}(\omega), \tag{9.16}$$

і як тільки $\xi \circ T^{i_\tau+1}(\omega) = \xi \circ T^{i_{\tau+1}+1}(\omega)$, то $i_\tau > i_{\tau+1}$ для $\tau \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Розглянемо наступну перестановку множини $\{0, \ldots, d+1\}$:

$$\alpha_0 = (0,\, i_0+1,\, i_1+1,\, \ldots,\, i_d+1),$$

$$\alpha_1 = (i_0+1,\, 0,\, i_1+1,\, \ldots,\, i_d+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{d+1} = (i_0+1,\, i_1+1,\, \ldots,\, i_d+1,\, 0),$$

Доведемо, що

$$P_{\pi}^{\xi\circ T,T} = P_{\alpha_0}^{\xi,T} \cup P_{\alpha_1}^{\xi,T} \cup \cdots \cup P_{\alpha_{d+1}}^{\xi,T}, \tag{9.17}$$

що доводить, що розбиття $\mathcal{P}_{d+1}^{\xi,T}$ є дрібнішим, ніж $\mathcal{P}_{d}^{\xi\circ T,T}$.

Очевидно, що для будь-якого $\omega \in \bigcup_{j=0}^{d+1} P_{\alpha_j}^{\xi,T}$ виконана умова (9.16) тобто $\omega \in P_{\pi}^{\xi\circ T,T}$.

Покладемо $\omega \in P_{\pi}^{\xi\circ T,T}$. Якщо $\xi(\omega) > \xi\circ T^{i_0+1}(\omega)$, то $\omega \in P_{\alpha_0}^{\xi,T}$. З іншого боку, покладемо $\tau = \max\{b \in \{0,\dots,d\} \mid \xi\circ T^{i_b+1}(\omega) \geq \xi(\omega)\}$. Тоді $\omega \in P_{\alpha_\tau}^{\xi,T}$, що завершує доведення (9.14). □

9.2.3 Доведення теореми 9.8

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — ймовірнісний простір, $T\colon \Omega \to \Omega$ — вимірне перетворення, що зберігає міру μ, і $\Theta\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ вимірне відображення таке, що $\sigma\big(\{\Theta\circ T^k\}_{k\geq 0}\big) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Покажемо, що

$$h_{\mu}^{KS}(T) = \lim_{d\to\infty}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_{\mu}\left(\tau_k(P_d^{\Theta,T})\right), \tag{9.18}$$

якщо

(a) T є ергодичним, або

(b) T не є ергодичним, проте Ω може бути вкладеним в деякий компактний метричний простір таким чином, що $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Випадок (a) випливає з наслідку 9.13 і наведеного припущення:

$$\Sigma^{\Theta,T} \overset{\circ}{=} \mathcal{F},$$

з якого, згідно леми 9.2, випливає (9.18).

У випадку (b) рівність (9.18) випливає з теореми про ергодичний розклад та аргументів доведення [141, Theorem 2.1]. □

9.3 Висновки розділу 9

Доведено характеризацію ентропії Колмогорова–Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі запропоновано новий підхід до розв'язання задачі регулярності еволюції оператора енергії стохастичної моделі Ізінга нескінченної кількості часток з необмеженою взаємодією, а також розвинуто варіаційні та асимптотичні методи дослідження нелінійних дифузійних рівнянь типу рівняння пористого середовища та рівняння теплопровідності з каспідальною особливістю на межі нециліндричної області. Крім того, в роботі вдосконалено метод обчислення впорядкованої ентропії спостережуваних величин, що є образами випадкових векторів при дії відображення, яке задає динамічну систему. Отримано такі результати:

1. Розроблено метод нелінійних оцінок розв'язання проблеми регулярності (збереження та підвищення гладкості) півгрупою операторів, що описують еволюцію стохастичної моделі Ізінга нескінченної кількості часток.

2. Доведено теореми про регулярність еволюції системи нескінченної кількості часток у шкалах просторів функцій нескінченної кількості змінних з топологією, що задається супремальною нормою, та нормою диференційованих у середньо квадратичному функцій.

3. Досліджено вплив характеру нелінійності взаємодії між частками на структуру топологій нескінченновимірних просторів, що зберігаються під дією півгрупи.

4. Розроблено геометрично-інваріантний підхід до задачі регулярності за початковою умовою розв'язків нелінійних стохастичних дифузійних рівнянь на гладкому рімановому многовиді. Побудовано відповідний апарат тензорного числення.

5. Виділено місце тензора кривини многовиду в інваріантній структурі варіаційних рівнянь за початковою умовою. Виявлено вплив тензора кривини на регулярність будь-якого порядку відповідної півгрупи.

6. Отримано умови відсутності вибуху для розв'язку нелінійного стохастичного дифузійного рівняння на некомпактному рімановому многовиді.

7. Виявлено ефект наявності щілини між топологіями обмеженості та неперервності в задачах регулярності високого порядку над нескінченно-вимірними просторами.

8. Доведено несингулярне інтегрування частинами для нелінійної не глобально ліпшицевої дифукції, за допомогою якого та методу нелінійних оцінок доведено теореми про підвищення гладкості під дією півгрупи на некомпактному рімановому многовиді.

9. Доведено принцип найменшої дії для нелінійного рівняння, що описує дифузію у пористому середовищі та отримано достатні умови існування узагальнених розв'язків відповідної варіаційної задачі.

10. Отримано формальні асимптотичні розклади для рівняння теплопровідності в нециліндричній області з особливістю типу каспу на межі області та доведено асимптотичний характер таких розкладів у спеціальних просторах, що залежать від характеру дотику межі області в околі особливої точки.

11. Доведено характеризацію ентропії Колмогорова–Сіная в термінах впорядкованих розбиттів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антонюк, О. Нелинейные эффекты в задачах регулярности для бесконечномерных эволюций классических гиббсовских моделей / О.В. Антонюк, О.В. Антонюк. — Киев: Наукова Думка, 2006. — 208 с.

2. Антонюк, О. В. Регулярні властивості півргуп, породжених нелінійними потоками на многовидах / О. Вікт. Антонюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Vol. 47, no. 4. — P. 56–62.

3. Биллингсли, П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М.: Наука, 1977. — 352 с.

4. Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икеда. — М.: Наука, 1986. — 448 с.

5. Глимм, Д. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов / Дж. Глимм, А. Джаффе. — М.: Мир, 1968. — 353 с.

6. Голдштейн, Д. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж Голдштейн. — Київ: Вища школа, 1989. — 347 с.

7. Далецкий, Ю. Эллиптические операторы в функциональных производных и связанные с ними диффузионные уравнения / Ю.Л Далецкий // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171. — С. 21–24.

8. Далецкий, Ю. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю.Л Далецкий // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. 22, № 4. — С. 1–53.

9. Далецкий, Ю. Стохастическая геометрия и дифференциальные уравнения / Ю.Л. Далецкий, Я.И. Белопольская. — Киев: Вища школа, 1989. — 296 с.

10. Далецкий, Ю. Меры и дифференциальные уравнения на бесконечномерных пространствах / Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1983. — 384 с.

11. Данфорд, Н. Линейные операторы: В 3 т. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — Т. 1: Общая теория. — 896 с.

12. Добрушин, Р. Описание случайного поля в терминах условных вероятностей и условия его регулярности / Р.Л. Добрушин // Теор. вероятн. и ее прил. — 1968. — Т. 13. — С. 197–224.

13. Добрушин, Р. Проблема единственности гиббсовского поля и задача фазовых переходов / Р.Л. Добрушин // Функ. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2. — С. 302–312.

14. Добрушин, Р. Описание системы случайных переменных в терминах условных распределений / Р.Л. Добрушин // Теор. вероятн. и ее прил. — 1970. — Т. 15. — С. 458–486.

15. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

16. Крылов, Н. Задача коши для линейных стохастических уравнений в частных производных / Н.В. Крылов, Б.Л. Розовский // Изв. Акад. наук СССР. — 1977. — Т. 6. — С. 1329–1347.

17. Крылов, Н. Об эволюционных стохастических уравнениях / Н.В. Крылов, Б.Л. Розовский // Итоги науки и техники. Современ-

ные проблемы математики: М. ВИНИТИ. — 1979. — Т. 14. — С. 71–146. — KrRo.

18. Малышев, В. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений / В.А. Малышев, Р.А. Минлос. — М.: Наука, 1985. — 288 с.
19. Мейер, П.-А. Вероятность и потенциалы / П.-А. Мейер. — М.: Мир, 1973. — 322 с.
20. Обен, Ж.-П. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — М.: Мир, 1988. — 512 с.
21. Петрина, Д. Квантовая теория поля / Д.Я. Петрина. — Киев: Вища школа, 1984. — 248 с.
22. Престон, К. Гиббсовские случайные поля на счётных множествах / К. Престон. — М.: Мир, 1977. — 246 с.
23. Рашевский, П. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. — М.: Наука, 1967. — 8644 с.
24. Рид, М. Методы современной математической физики: В 4 т. / М. Рид, Б. Саймон. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 395 с.
25. Розовский, Б. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов / Б.Л. Розовский. — М.: Наука, 1983. — С. 208.
26. Саймон, Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля / Б. Саймон. — М.: Мир, 1976. — 357 с.
27. Синай, Я. Теория фазовых переходов. Строгие результаты / Я.Г. Синай. — М.: Мир, 1980. — 208 с.

28. Скороход, А. Интегрирование в гильбертовом пространстве / А.В. Скороход. — М.: Наука, 1975. — 230 с.

29. Слободецкий, Л. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных / Л.Н. Слободецкий // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. — 1958. — Т. 197. — С. 54–112.

30. Фридман, А. Уравнения в частных производных параболического типа / А. Фридман. — М.: Мир, 1968. — 424 с.

31. Шнирельман, А. О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости. / А.И. Шнирельман // Матем. сб. — 1985. — Т. 128(170):1(9). — С. 82 – 109.

32. Albeverio, S. Stochastic analysis on product manifolds: Dirichlet operators on differential forms / S. Albeverio, A. Daletskii, Yu. Kondratiev // J. Funct. Anal. — 2000. — Vol. 176, no. 2. — P. 280–316.

33. Albeverio, S. Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert space / S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn // Z.Wahrsch. verw. Geb. — 1977. — Vol. 10. — P. 1–57.

34. Albeverio, S. Energy forms, Hamiltonians, and distorted Brownian paths / S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, L. Streit // J. Mathematical Phys. — 1977. — Vol. 18, no. 5. — P. 907–917.

35. Albeverio, S. An approximate criterium of essential self-adjointness of Dirichlet operators / S. Albeverio, Y. Kondratiev, M. Röckner // Potential Analysis. — 1992. — Vol. 1. — P. 307–317.

36. Albeverio, S. Dirichlet operators via stochastic analysis / S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Röckner // J. Funct. Anal. — 1995. — Vol. 128, no. 1. — P. 102–138.

37. Albeverio, S. Classical Dirichlet forms on topological vector spaces—the construction of the associated diffusion process / Sergio Albeverio, Michael Röckner // Probab. Theory Related Fields. — 1989. — Vol. 83, no. 3. — P. 405–434.

38. Amigó, J. Permutation complexity in dynamical systems. Ordinal patterns, permutation entropy and all that / J.M. Amigó. Springer Series in Synergetics. — Springer-Verlag, Berlin, 2010.

39. Amigó, J. The equality of Kolmogorov-Sinai entropy and metric permutation entropy generalized / J.M. Amigó // Physica D. — 2012. — Vol. 241. — P. 789–793.

40. Antoniouk, A. Regularity of nonlinear flows on manifolds: Nonlinear estimates on new type variations or why generalizations of classical covariant derivatives are required? / A.Val. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2005. — Т. 15. — С. 3–20.

41. Antoniouk, A. Nonlinear calculus of variations and regularity of parabolic problems / A.V. Antoniouk, A.V. Antoniouk // Збірник наукових праць Інституту математики НАНУ "Нелінійний аналіз: труди 1-го Українського математичного конгресу". — Т. 10. — Киев: Інститут математики НАНУ, 2006. — С. 7–19.

42. Antoniouk, A. Nonlinear estimates approach to the non-lipschitz gap between boundedness and continuity in C^{∞}-properties of infinite di-

mensional semigroups / A.Val. Antoniouk, A.Vict. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2006. — Т. 16. — С. 3–26.

43. Antoniouk, A. Variational principle for weighted porous media equation / A. Antoniouk, M. Arnaudon // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2014. — Vol. 352, no. 1. — P. 31–34.

44. Antoniouk, A. Generalized stochastic flows and applications to incompressible viscous fluids / A. Antoniouk, M. Arnaudon, A. B. Cruzeiro // Bull. Sci. Math. — 2014. — Vol. 138, no. 4. — P. 565–584.

45. Antoniouk, A. Kolmogorov-Sinai entropy via separation properties of order-generated σ-algebras / A. Antoniouk, K. Keller, S. Maksymenko // Discrete and Continuous Dynamical System - A. — 2014. — Vol. 34. — P. 1793–1809.

46. Antoniouk, A. Asymptotic solutions of the dirichlet problem for the heat equation at a characteristic point / A. Antoniouk, O. Kiselev, Tarkhanov N. // Український Мат. Журн. — 2014. — Т. 66, № 10. — С. 1299–1317.

47. Antoniouk, A. The Dirichlet problem for the heat equation in domains with cuspidal points on the boundary / A. Antoniouk, N. Tarkhanov // Operator theory, pseudo-differential equations, and mathematical physics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013. — Vol. 228 of Oper. Theory Adv. Appl. — P. 1–20.

48. Antoniouk, A. V. Nonlinear symmetries of variational calculus and regularity properties of differential flows on non-compact manifolds /

A. Val. Antoniouk // Symmetry in nonlinear mathematical physics. Part 1, 2, 3. — Natsional. Akad. Nauk Ukrainy, Inst. Mat., Kiev, 2004. — Vol. 2 of Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., 50, Part 1. — P. 1228–1235.

49. Antoniouk, A. V. Regularity properties of infinite-dimensional evolutions, related with anharmonic lattice systems / A. Vict. Antoniouk // Symmetry in nonlinear mathematical physics. Part 1, 2, 3. — National. Akad. Nauk Ukraïni, Inst. Mat., Kiev, 2004. — Vol. 2 of Proc. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., 50, Part 1. — P. 1236–1243.

50. Antoniouk, A. V. Nonsingular smoothing representations for differential flows on manifolds / A. Vict. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2005. — Т. 15. — С. 21–30.

51. Antoniouk, A. V. Upper bounds on second order operators, acting on metric function / A. Val. Antoniouk // Ukr. Math. Bull. — 2007. — Vol. 4, no. 2. — P. 161–172.

52. Antoniouk, A. V. Smoothing properties of semigroups for Dirichlet operators of Gibbs measures / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Funct. Anal. — 1995. — Vol. 127, no. 2. — P. 390–430.

53. Antoniouk, A. V. Decay of correlations and uniqueness of Gibbs lattice systems with nonquadratic interaction / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, no. 11. — P. 5444–5454.

54. Antoniouk, A. V. How the unbounded drift shapes the Dirichlet semigroups behaviour of non-Gaussian Gibbs measures / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // J. Funct. Anal. — 1996. — Vol. 135, no. 2. — P. 488–518.

55. Antoniouk, A. V. Non-Lipschitz singularities in the Malliavin calculus: raise of smoothness for infinite-dimensional semigroups / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Nats. Akad. Nauk Ukraïn. Inst. Mat. Preprint. — 1996. — no. 23. — P. 38.

56. Antoniouk, A. V. Nonlinear estimates on regularity of non-Lipschitz diffusions / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk. — National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, Kiev, 1999. — P. 84.

57. Antoniouk, A. V. High order symmetries of variations and nonlinear quasi-contractive estimates approach to the parabolic regularity problems / A. Val. Antoniouk, A. Vict Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2002. — № 12. — С. 3–12.

58. Antoniouk, A. V. Nonlinear estimates approach to the regularity properties of diffusion semigroups / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 1, 2. — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003. — P. 165–226.

59. Antoniouk, A. V. Nonlinear calculus of variations for differential flows on manifolds: geometrically correct introduction of covariant and stochastic variations / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Ukr. Math. Bull. — 2004. — Vol. 1, no. 4. — P. 453–488.

60. Antoniouk, A. V. Nonlinear-estimate approach to the regularity of infinite-dimensional parabolic problems / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2006. — Vol. 58, no. 5. — P. 579–596.

61. Antoniouk, A. V. Regularity of nonlinear flows on noncompact Riemannian manifolds: differential geometry versus stochastic geometry or what kind of variations is natural? / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 8. — С. 1011–1034.

62. Antoniouk, A. V. Non-explosion and solvability of nonlinear diffusion equations on noncompact manifolds / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 11. — С. 1632–1652.

63. Antoniouk, A. V. Regularity of infinite dimensional heat dynamics of unbounded lattice spins with non-constant diffusion coefficients / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Нелинейные граничные задачи. — 2007. — Т. 17. — С. 88–129.

64. Antoniouk, A. V. Continuity with respect to the initial data and absolute-continuity approach to the first-order regularity of nonlinear diffusions on noncompact manifolds / A. V. Antoniouk, A. V. Antoniouk // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 10. — С. 1509–1527.

65. Antonyuk, O. V. Higher-order formulas for derivatives of nonlinear diffusion semigroups / O. V. Antonyuk, O. V. Antonyuk // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 1. — С. 134–140.

66. Aref'ev, V. N. Asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem for a parabolic equation in domains with singularities / V. N. Aref'ev, L. A. Bagirov // Mat. Zametki. — 1996. — Vol. 59, no. 1. — P. 12–23, 157.

67. Aref'ev, V. N. Solutions of the heat equation in domains with singularities / V. N. Aref'ev, L. A. Bagirov // Mat. Zametki. — 1998. — Vol. 64, no. 2. — P. 163–179.

68. Arnaudon, M. Lagrangian Navier-Stokes diffusions on manifolds: variational principle and stability / M. Arnaudon, A. B. Cruzeiro // Bull. Sci. Math. — 2012. — Vol. 136, no. 8. — P. 857–881.

69. Arnold, V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits / V. Arnold // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1966. — Vol. 16, no. fasc. 1. — P. 319–361.

70. Bandt, C. Entropy of interval maps via permutations / C. Bandt, G. Keller, Pompe // Nonlinearity. — 2002. — Vol. 15. — P. 1595–1602.

71. Bandt, C. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series / C. Bandt, B. Pompe // Phys. Rev. Lett. — P. 174–102.

72. Barbu, V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces / V. Barbu. — Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest; Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976. — P. 352.

73. Bendikov, A. Potential theory on infinite-dimensional abelian groups / Alexander Bendikov. — Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995. — Vol. 21 of de Gruyter Studies in Mathematics. — P. vi+184. — Translated from the Russian manuscript by Carol Regher.

74. Beurling, A. Dirichlet spaces / A. Beurling, J. Deny // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1959. — Vol. 45. — P. 208–215.

75. Bismut, J.-M. Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions / J.-M. Bismut // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1981. — Vol. 56, no. 4. — P. 469–505.

76. Bismut, J.-M. Large deviations and the Malliavin calculus / J.-M. Bismut. — Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984. — Vol. 45 of Progress in Mathematics. — P. viii+216.

77. Bismut, J.-M. Large deviations and the Malliavin calculus / J.-M. Bismut. — Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984. — Vol. 45 of Progress in Mathematics. — P. viii+216.

78. Brenier, Y. The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids / Y. Brenier // J. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 2, no. 2. — P. 225–255.

79. Carmona, R. Regularity properties of Schrödinger and Dirichlet semigroups / René Carmona // J. Funct. Anal. — 1979. — Vol. 33, no. 3. — P. 259–296.

80. Cerrai, S. A Hille-Yosida theorem for weakly continuous semigroups / S. Cerrai // Semigroup Forum. — 1994. — Vol. 49, no. 3. — P. 349–367.

81. Cipriano, F. Navier-Stokes equation and diffusions on the group of homeomorphisms of the torus / F. Cipriano, A. B. Cruzeiro // Comm. Math. Phys. — 2007. — Vol. 275, no. 1. — P. 255–269.

82. Clark, J. M. C. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals / J. M. C. Clark // Ann. Math. Statist. — 1970. — Vol. 41. — P. 1282–1295.

83. Constantin, P. A stochastic Lagrangian representation of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations / Peter Constantin, Gautam Iyer // Comm. Pure Appl. Math. — 2008. — Vol. 61, no. 3. — P. 330–345.

84. Da Prato, G. Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles / G. Da Prato, P. Grisvard // J. Math. Pures Appl. (9). — 1975. — Vol. 54, no. 3. — P. 305–387.

85. Da Prato, G. Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique / G. Da Prato, P. Grisvard // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1979. — Vol. 120. — P. 329–396.

86. Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge University Press, Cambridge, 1992. — Vol. 44 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — P. xviii+454.

87. Da Prato, G. Evolution equations with white-noise boundary conditions / G. Da Prato, J. Zabczyk // Stochastics Stochastics Rep. — 1993. — Vol. 42, no. 3-4. — P. 167–182.

88. Da Prato, G. Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems / G. Da Prato, J. Zabczyk // Probab. Theory Related Fields. — 1995. — Vol. 103, no. 4. — P. 529–552.

89. Deny, J. Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel / J. Deny // Potential Theory (C.I.M.E., I Ciclo, Stresa, 1969). — Edizioni Cremonese, Rome, 1970. — P. 121–201.

90. Deuschel, J.-D. Infinite-dimensional diffusion processes as Gibbs measures on $C[0,1]^{\mathbf{Z}^d}$ / J.-D. Deuschel // Probab. Theory Related Fields. — 1987. — Vol. 76, no. 3. — P. 325–340.

91. Deuschel, J.-D. Hypercontractivity and spectral gap of symmetric diffusions with applications to the stochastic Ising models / J.-

D. Deuschel, D. W. Stroock // J. Funct. Anal. — 1990. — Vol. 92, no. 1. — P. 30–48.

92. Dobrushin, R. Completely analytical Gibbs fields / R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman // Statistical Physics and Dynamical Systems. Rigorous results. / Ed. by Szasz Fritz, Jaffe. — Basel: Birkhäuser, 1985. — P. 371–404.

93. Dobrushin, R. Constrictive criterion for the uniqueness of Gibbs field / R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman // Statistical Physics and Dynamical Systems. Rigorous results / Ed. by Szasz Fritz, Jaffe. — Basel: Birkhäuser, 1985. — P. 347–370.

94. Dolbeault, J. On the Bakry-Emery criterion for linear diffusions and weighted porous media equations / J. Dolbeault, B. Nazaret, G. Savaré // Commun. Math. Sci. — 2008. — Vol. 6, no. 2. — P. 477–494.

95. Doss, H. Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}}$ / H. Doss, G. Royer // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1978/79. — Vol. 46, no. 1. — P. 107–124.

96. Ebin, D. G. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. / D. G. Ebin, J. Marsden // Ann. of Math. (2). — 1970. — Vol. 92. — P. 102–163.

97. Elworthy, K. D. Stochastic differential equations on manifolds / K. D. Elworthy. — Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. — Vol. 70 of London Mathematical Society Lecture Note Series. — P. xiii+326.

98. Elworthy, K. D. Stochastic flows on Riemannian manifolds /

K. D. Elworthy // Diffusion processes and related problems in analysis, Vol. II (Charlotte, NC, 1990). — Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992. — Vol. 27 of Progr. Probab. — P. 37–72.

99. Émery, M. Stochastic calculus in manifolds / M. Émery. Universitext. — Springer-Verlag, Berlin, 1989. — P. x+151.

100. Existence and uniqueness of DLR measures for unbounded spin systems / M. Cassandro, E. Olivieri, A. Pellegrinotti, E. Presutti // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. — 1977/78. — Vol. 41, no. 4. — P. 313–334.

101. Existence of and a priori estimates for Euclidean Gibbs states / S. Albeverio, Yu. Kondrat'ev, T. Pazurek, M. Röckner // Tr. Mosk. Mat. Obs. — 2006. — Vol. 67. — P. 3–103.

102. Eyink, G. L. Stochastic least-action principle for the incompressible Navier-Stokes equation / G. L. Eyink // Phys. D. — 2010. — Vol. 239, no. 14. — P. 1236–1240.

103. Faris, W. G. The stochastic Heisenberg model / W. G. Faris // J. Funct. Anal. — 1979. — Vol. 32, no. 3. — P. 342–352.

104. Faris, W. G. The Rayleigh-Schrödinger expansion of the Gibbs state of a classical Heisenberg ferromagnet / W. G. Faris // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 261, no. 2. — P. 579–587.

105. Föllmer, H. A covariance estimate for Gibbs measures / H. Föllmer // J. Funct. Anal. — 1982. — Vol. 46. — P. 387–395.

106. Frigg, R. A field guide to recent work on the foundations of statisti-

cal mechanics / R. Frigg // The Ashgate companion to contemporary philosophy of physics. — Ashgate, Aldershot, 2008. — P. 99–196.

107. Fritz, J. Stationary measures of stochastic gradient systems, infinite lattice models / J. Fritz // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1982. — Vol. 59, no. 4. — P. 479–490.

108. Fukushima, M. Dirichlet forms and Markov processes / M. Fukushima. — North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1980. — Vol. 23 of North-Holland Mathematical Library. — P. x+196.

109. Fukushima, M. On a stochastic calculus related to Dirichlet forms and distorted Brownian motions / M. Fukushima // Phys. Rep. — 1981. — Vol. 77, no. 3. — P. 255–262. — New stochasitic methods in physics.

110. Galaktionov, V. A. On regularity of a boundary point for higher-order parabolic equations: towards Petrovskii-type criterion by blow-up approach / V. A. Galaktionov // Nonlinear Differential Equations Appl. — 2009. — Vol. 16, no. 5. — P. 597–655.

111. Galaktionov, V. A. Boundary characteristic point regularity for semilinear reaction-diffusion equations: towards an ODE criterion / V. A. Galaktionov, V. Maz'ya // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2011. — Vol. 175, no. 3. — P. 249–283. — Problems in mathematical analysis. No. 56.

112. Gevrey, M. Sur les équations partielles du type parabolique / M. Gevrey // J. math. pure appl. Paris. — 1913. — Vol. 9, no. 1. — P. 305–471.

113. Glauber, R. J. Time-dependent statistics of the Ising model /

R. J. Glauber // J. Mathematical Phys. — 1963. — Vol. 4. — P. 294–307.

114. Glauber dynamics for quantum lattice systems / S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Röckner, T. V. Tsikalenko // Rev. Math. Phys. — 2001. — Vol. 13, no. 1. — P. 51–124.

115. Gliklikh, Y. Global analysis in mathematical physics. Geometric and stochastic methods / Yuri Gliklikh. — Springer-Verlag, New York, 1997. — Vol. 122 of Applied Mathematical Sciences. — P. xvi+213.

116. Gross, L. Decay of correlations in classical lattice models at high temperatures / L. Gross // Comm. Math. Phys. — 1979. — Vol. 68. — P. 9–27.

117. Gross, L. Absence of the second-order phase transitions in the Dobrushin's uniqueness region / L. Gross // J. Stat. Phys. — 1981. — Vol. 25. — P. 57–72.

118. Gurtin, M. E. On the diffusion of biological populations / M. E. Gurtin, R. C. MacCamy // Math. Biosci. — 1977. — Vol. 33, no. 1-2. — P. 35–49.

119. Hille, E. On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions / E. Hille // Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] Tome Supplémentaire,. — 1952. — Vol. 1952. — P. 122–134.

120. Holley, R. A class of interactions in an infinite particle system / R. Holley // Advances in Math. — 1970. — Vol. 5. — P. 291–309 (1970).

121. Holley, R. Markovian interaction processes with finite range interacti-

ons / R. Holley // Ann. Math. Statist. — 1972. — Vol. 43. — P. 1961–1967.

122. Holley, R. Recent results on the stochastic Ising model / R. Holley // Rocky Mountain J. Math. — 1974. — Vol. 4. — P. 479–496. — Papers arising from a Conference on Stochastic Differential Equations (Univ. Alberta, Edmonton, Alta., 1972).

123. Holley, R. The one-dimensional stochastic X-Y model / Richard Holley // Random walks, Brownian motion, and interacting particle systems. — Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991. — Vol. 28 of Progr. Probab. — P. 295–307.

124. Holley, R. Diffusions on an infinite-dimensional torus / R. Holley, D. Stroock // J. Funct. Anal. — 1981. — Vol. 42, no. 1. — P. 29–63.

125. Holley, R. Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models / R. Holley, D. Stroock // J. Statist. Phys. — 1987. — Vol. 46, no. 5-6. — P. 1159–1194.

126. Holley, R. A. Applications of the stochastic Ising model to the Gibbs states / R. A. Holley, D. W. Stroock // Comm. Math. Phys. — 1976. — Vol. 48, no. 3. — P. 249–265.

127. Holley, R. A. L_2 theory for the stochastic Ising model / R. A. Holley, D. W. Stroock // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. — 1976. — Vol. 35, no. 2. — P. 87–101.

128. Holley, R. A. A martingale approach to infinite systems of interacting processes / R. A. Holley, D. W. Stroock // Ann. Probability. — 1976. — Vol. 4, no. 2. — P. 195–228.

129. Holley, R. A. Uniform and L^2 convergence in one-dimensional stochastic Ising models / Richard A. Holley, Daniel W. Stroock // Comm. Math. Phys. — 1989. — Vol. 123, no. 1. — P. 85–93.

130. Hooton, J. G. Dirichlet forms associated with hypercontractive semigroups / J. G. Hooton // Trans. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 253. — P. 237–256.

131. Hörmander, L. Hypoelliptic second order differential equations / L. Hörmander // Acta Math. — 1967. — Vol. 119. — P. 147–171.

132. Hsu, E. P. Stochastic analysis on manifolds / E. P. Hsu. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. — Vol. 38 of Graduate Studies in Mathematics. — P. xiv+281.

133. Israel, R. High-temperature analyticity in classical lattice systems / R.B. Israel // Comm. Math. Phys. — 1976. — Vol. 50. — P. 245–257.

134. Itô, K. The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold / K. Itô // Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962). — Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963. — P. 536–539.

135. Jochmann, F. A semigroup approach to $W^{1,\infty}$-solutions to a class of quasilinear hyperbolic systems / F. Jochmann // J. Math. Anal. Appl. — 1994. — Vol. 187, no. 3. — P. 723–742.

136. Kato, T. Integration of the equation of evolution in a Banach space / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. — 1953. — Vol. 5. — P. 208–234.

137. Kato, T. On linear differential equations in Banach spaces / T. Kato // Comm. Pure Appl. Math. — 1956. — Vol. 9. — P. 479–486.

138. Kato, T. Linear evolution equations of “hyperbolic” type / T. Kato // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. — 1970. — Vol. 17. — P. 241–258.

139. Kato, T. Linear evolution equations of “hyperbolic” type. II / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. — 1973. — Vol. 25. — P. 648–666.

140. Kato, T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems / T. Kato // Arch. Rational Mech. Anal. — 1975. — Vol. 58, no. 3. — P. 181–205.

141. Keller, K. Permutations and the Kolmogorov-Sinai entropy / K. Keller // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2012. — Vol. 32. — P. 891–900.

142. Keller, K. A standardized approach to the Kolmogorov-Sinai entropy / K. Keller, M. Sinn // Nonlinearity. — 2009. — Vol. 22. — P. 2417–2422.

143. Keller, K. Kolmogorov-Sinai entropy from the ordinal viewpoint / K. Keller, M. Sinn // Physica D. — 2010. — Vol. 239. — P. 997–1000.

144. Keller, K. On the Relation of KS Entropy and Permutation Entropy / K. Keller, A. Unakafov, V. Unakafova // Physica D. — 2012. — Vol. 241. — P. 1477–1481.

145. Kiselev, O. Asymptotics of solutions to the Laplace-Beltrami equation on a rotation surface with a cusp / O. Kiselev, I. Shestakov // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — Vol. 362, no. 2. — P. 393–400.

146. Klein, D. Dobrushin uniqueness techniques and the decay of correlations in continuum stastistical mechanics / D. Klein // Comm. Math. Phys. — 1982. — Vol. 86. — P. 227–246.

147. Kohn, J. J. Degenerate elliptic-parabolic equations of second order / J. J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — Vol. 20. — P. 797–872.

148. Kōmura, T. Semigroups of operators in locally convex spaces / T. Kōmura // J. Functional Analysis. — 1968. — Vol. 2. — P. 258–296.

149. Kōmura, Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Kōmura // J. Math. Soc. Japan. — 1967. — Vol. 19. — P. 493–507.

150. Kōmura, Y. Differentiability of nonlinear semigroups / Y. Kōmura // J. Math. Soc. Japan. — 1969. — Vol. 21. — P. 375–402.

151. Kondrat'ev, V. A. Boundary value problems for parabolic equations in closed regions / V. A. Kondrat'ev // Trudy Moskov. Mat. Obšč. — 1966. — Vol. 15. — P. 400–451.

152. Kondratiev, J. G. Infinite-dimensional Dirichlet operators. I. Essential selfadjointness and associated elliptic equations / Ju. G. Kondratiev, T. V. Tsycalenko // Potential Anal. — 1993. — Vol. 2, no. 1. — P. 1–21.

153. Kondratiev, Y. Gibbs measures of continuous systems: an analytic approach / Yu. Kondratiev, T. Pasurek, M. Röckner // Rev. Math. Phys. — 2012. — Vol. 24, no. 10. — P. 1250026, 54.

154. Kunita, H. Stochastic flows and stochastic differential equations / H. Kunita. — Cambridge University Press, Cambridge, 1990. — Vol. 24 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. — P. xiv+346.

155. Künsch, D. Decay of correlations under Dobrushin's uniqueness condition and its applications / D. Künsch // Comm. Math. Phys. — 1979. — Vol. 84. — P. 207–222.

156. Kusuoka, S. Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces / Shigeo Kusuoka // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. — 1982. — Vol. 29, no. 1. — P. 79–95.

157. Kusuoka, S. Some boundedness properties of certain stationary diffusion semigroups / S. Kusuoka, D. Stroock // J. Funct. Anal. — 1985. — Vol. 60, no. 2. — P. 243–264.

158. Lanford III, O. E. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics / O. E. Lanford, III, D. Ruelle // Comm. Math. Phys. — 1969. — Vol. 13. — P. 194–215.

159. Lattice systems with a continuous symmetry. ii. Decay of correlations / J. Bricmont, J-R. Fontaine, J.L. Lebowitz, Spencer T. // Comm. Math. Phys. — 1981. — Vol. 78. — P. 363–371.

160. Lebowitz, J. L. Statistical mechanics of systems of unbounded spings / J. L. Lebowitz, E. Presutti // Comm. Math. Phys. — 1976. — Vol. 50, no. 3. — P. 195–218.

161. Lee, H. Quasi-invariant flows associated with irregular vector fields / H. Lee // PhD Dissertation. — 2011.

162. Longmire, C. L. Elementary Plasma Physics / C. L. Longmire. — Wiley-Interscience, New York, 1963. — P. 296.

163. L^q-functional inequalities and weighted porous media equations / J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, F.-Y. Wang // Potential Anal. — 2008. — Vol. 28, no. 1. — P. 35–59.

164. Lumer, G. Dissipative operators in a Banach space / G. Lumer, R. S. Phillips // Pacific J. Math. — 1961. — Vol. 11. — P. 679–698.

165. Ma, Z. M. Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms / Zhi Ming Ma, Michael Röckner. Universitext. — Springer-Verlag, Berlin, 1992. — P. vi+209.

166. Malliavin, P. C^k-hypoellipticity with degeneracy / Paul Malliavin // Stochastic analysis (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1978). — Academic Press, New York-London, 1978. — P. 199–214.

167. Malliavin, P. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators / P. Malliavin // Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976). — Wiley, New York-Chichester-Brisbane, 1978. — P. 195–263.

168. Malliavin, P. Infinite-dimensional analysis / P. Malliavin // Bull. Sci. Math. — 1993. — Vol. 117, no. 1. — P. 63–90.

169. Malliavin, P. Stochastic analysis / P. Malliavin. — Springer-Verlag, Berlin, 1997. — Vol. 313 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. — P. xii+343.

170. Meyer, P.-A. Tightness criteria for laws of semimartingales / P.-A. Meyer, W. A. Zheng // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. — 1984. — Vol. 20, no. 4. — P. 353–372.

171. Mihaĭlov, V. P. The Dirichlet problem for a parabolic equation. I / V. P. Mihaĭlov // Mat. Sb. (N.S.). — 1963. — Vol. 61 (103). — P. 40–64.

172. Mihaĭlov, V. P. The Dirichlet problem for a parabolic equation. II /

V. P. Mihaĭlov // Mat. Sb. (N.S.). — 1963. — Vol. 62 (104). — P. 140–159.

173. Morandi, G. Statistical mechanics. An intermediate course / G. Morandi, E. Ercolessi, F. Napoli. — World Scientific Pub Co Inc, 1995. — P. 648.

174. Muskat, M. The flow of homogeneous fluids through porous media / M. Muskat. — McGraw-Hill Book Co., New York, London, 1937. — P. 763.

175. Nakagomi, T. Stochastic variational derivations of the Navier-Stokes equation / T. Nakagomi, K. Yasue, J.-C. Zambrini // Lett. Math. Phys. — 1981. — Vol. 5, no. 6. — P. 545–552.

176. Nualart, D. The Malliavin calculus and related topics / David Nualart. Probability and its Applications (New York). — Springer-Verlag, New York, 1995. — P. xii+266.

177. Ocone, D. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes / D. Ocone // Stochastics. — 1984. — Vol. 12, no. 3-4. — P. 161–185.

178. Oleĭnik, O. A. On linear equations of the second order with a non-negative characteristic form / O. A. Oleĭnik // Mat. Sb. (N.S.). — 1966. — Vol. 69 (111). — P. 111–140.

179. Pardoux, E. Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes / E. Pardoux // Stochastics. — 1979. — Vol. 3, no. 2. — P. 127–167.

180. Petrowsky, I. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung / I. Petrowsky // Compositio Math. — 1935. — Vol. 1. — P. 383–419.

181. Rabinovich, V. A calculus of boundary value problems in domains with non-Lipschitz singular points / Vladimir Rabinovich, Bert-Wolfgang Schulze, Nikolai Tarkhanov // Math. Nachr. — 2000. — Vol. 215. — P. 115–160.

182. Royer, G. Étude des champs euclidiens sur un réseau Z^ν / G. Royer // J. Math. Pures Appl. (9). — 1977. — Vol. 56, no. 4. — P. 455–478.

183. Royer, G. Processus de diffusion associé à certains modèles d'Ising à spins continus / G. Royer // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1978/79. — Vol. 46, no. 2. — P. 165–176.

184. Ruelle, D. Probability estimates for continuous spin systems / D. Ruelle // Comm. Math. Phys. — 1976. — Vol. 50, no. 3. — P. 189–194.

185. Simon, B. A remark on Dobrushin's uniqueness theorem / B. Simon // Comm. Math. Phys. — 1979. — Vol. 68. — P. 183–186.

186. Simonenko, I. B. A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type. II / I. B. Simonenko // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1965. — Vol. 29. — P. 757–782.

187. Simonenko, I. B. A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type. I / I. B. Simonenko // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1965. — Vol. 29. — P. 567–586.

188. Solonnikov, V. A. On boundary value problems for linear parabolic

systems of differential equations of general form / V. A. Solonnikov // Trudy Mat. Inst. Steklov. — 1965. — Vol. 83. — P. 3–163.

189. Stochastic dynamics of compact spins: ergodicity and irreducibility / Sergio Albeverio, Alexei Daletskii, Yuri Kondratiev, Michael Röckner // Acta Appl. Math. — 2000. — Vol. 63, no. 1-3. — P. 27–40. — Recent developments in infinite-dimensional analysis and quantum probability.

190. Stroock, D. On the ergodic properties of Glauber dynamics / D. Stroock, B. Zegarlinski // J. Statist. Phys. — 1995. — Vol. 81, no. 5-6. — P. 1007–1019.

191. Stroock, D. W. The Malliavin calculus, a functional analytic approach / D. W. Stroock // J. Funct. Anal. — 1981. — Vol. 44, no. 2. — P. 212–257.

192. Stroock, D. W. An introduction to the analysis of paths on a Riemannian manifold / D. W. Stroock. — American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. — Vol. 74 of Mathematical Surveys and Monographs. — P. xviii+269.

193. Stroock, D. W. The equivalence of the logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin-Shlosman mixing condition / D. W. Stroock, B. Zegarlinski // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 144, no. 2. — P. 303–323.

194. Stroock, D. W. The logarithmic Sobolev inequality for continuous spin systems on a lattice / D. W. Stroock, B. Zegarlinski // J. Funct. Anal. — 1992. — Vol. 104, no. 2. — P. 299–326.

195. Stroock, D. W. The logarithmic Sobolev inequality for discrete spin

systems on a lattice / Daniel W. Stroock, Boguslaw Zegarlinski // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 149, no. 1. — P. 175–193.

196. Walters, P. An introduction to ergodic theory / P. Walters. — Springer-Verlag, 1982. — Vol. 79 of Graduate Texts in Mathematics.

197. Werndl, C. Reconceptualising equilibrium in Boltzmannian statistical mechanics and characterising its existence / C. Werndl, R. Frigg // Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys. — 2015. — Vol. 49. — P. 19–31.

198. Yasue, K. A variational principle for the Navier-Stokes equation / K. Yasue // J. Funct. Anal. — 1983. — Vol. 51, no. 2. — P. 133–141.

199. Yosida, K. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators / K. Yosida // J. Math. Soc. Japan. — 1948. — Vol. 1. — P. 15–21.

200. Zakai, M. The Malliavin calculus / M. Zakai // Acta Appl. Math. — 1985. — Vol. 3, no. 2. — P. 175–207.

201. Zegarlinski, B. Dobrushin uniqueness theorem and logarithmic Sobolev inequalities / B. Zegarlinski // J. Funct. Anal. — 1992. — Vol. 105, no. 1. — P. 77–111.

202. Zegarlinski, B. The strong decay to equilibrium for the stochastic dynamics of unbounded spin systems on a lattice / B. Zegarlinski // Comm. Math. Phys. — 1996. — Vol. 175, no. 2. — P. 401–432.

203. Zheng, W. A. Tightness results for laws of diffusion processes application to stochastic mechanics / W. A. Zheng // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. — 1985. — Vol. 21, no. 2. — P. 103–124.

Додаток А

ДОВЕДЕННЯ ОКРЕМИХ ТВЕРДЖЕНЬ РОЗДІЛУ 1

Лема А.1 (лема 1.4)**.** Нехай виконані умови (1.5) та (1.8). Тоді гіббсові розподіли в скінчених об'ємах задовольняють систему рівнянь Добрушина–Ланфорда–Рюеля [12, 14, 158] :

$$\forall\, \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d\colon \quad |\Lambda_2| < \infty \quad \forall\, f \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$$
$$\mu_{\Lambda_2}^{x_{\Lambda_2^c}}(\mu_{\Lambda_1}^{\cdot}(f)) = \mu_{\Lambda_2}^{x_{\Lambda_2^c}}(f). \tag{A.1}$$

Крім того, для будь-якою помірної гіббсової міри $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ з локальними розподілами $\{\mu_\Lambda\}$ має місце формула інтегрування частинами :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} h_k \partial_k u \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} u\{h_k \partial_k U_k - \partial_k h_k\}\, d\mu \tag{A.2}$$

для всіх $u, h_k \in C^1_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, а оператори H_Q, $|Q| \le \infty$ є симетричними у просторі $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$. Ці оператори пов'язані з відповідними локальними енергетичними формами:

$$(H_Q u, v)_{L_2(\mu)} = \frac{1}{2} \sum_{k\in Q} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \partial_k u \cdot \partial_k v \, d\mu, \qquad u, v \in C^2_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}).$$

Доведення. Нехай $\mu \in \mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ і функції $f, g \in C_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$, при цьому g є $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_2}$-вимірною. З означення 1.2 для $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ випливає $\mu(\mu_{\Lambda_2}^{\cdot}(fg)) = \mu(\mu_{\Lambda_1}^{\cdot}(fg))$. Користуючись властивостями умовного математичного сподівання (1.12) та $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_2}$-вимірністю функції g отримаємо:

$$\mu(g\,\mu^{\cdot}_{\Lambda_2}(f)) = \mu(\mu^{\cdot}_{\Lambda_2}(fg)) = \mu(\mu^{\cdot}_{\Lambda_1}(fg)) = \mu(g\,\mu^{\cdot}_{\Lambda_1}(f)).$$

Користуючись повторно означенням (1.10) з μ_{Λ_2} після повторної перестановки функції g маємо

$$\mu(g\,\mu^{\cdot}_{\Lambda_2}(f)) = \mu(g\,\mu^{\cdot}_{\Lambda_2}(\mu^{\cdot}_{\Lambda_1}(f))).$$

Оскільки функція g була обрана довільною, приходимо до рівняння (A.1).

Формула інтегрування частинами (A.2) випливає з формули інтегрування частинами для локальних мір $\{\mu_\Lambda\}$. Дійсно, для міри

$$\mu_k(dx_k|y_{\mathbb{Z}^d\setminus k}) = \frac{1}{Z_k(y_{\mathbb{Z}^d\setminus k})}\exp(-U_k(x_k, y_{\mathbb{Z}^d\setminus k})\,)\,dx_k$$

простим обчисленням отримується наступна формула інтегрування частинами:

$$\mu_k^{y_{\mathbb{Z}^d\setminus k}}[h_k\partial_k u] = \mu_k^{y_{\mathbb{Z}^d\setminus k}}[u\{h_k\,\partial_k U_k - \partial_k h_k\}\,].$$

Використовуючи означення гіббсової міри, приходимо до

$$\mu(\ h_k\partial_k u\ ) = \mu(\mu^{\cdot}_k[\ h_k\partial_k u]\ ) = \mu(u\{h_k\partial_k U_k - \partial_k h_k\}\,).$$

Остаточно сумування $k\in\mathbb{Z}^d$ дає (A.2).

Підставляючи $h_k = \partial_k v$ отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \partial_k u\,\partial_k v\;d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} v\{-\partial_k^2 u + (\partial_k U_k)\partial_k u\}\;d\mu.$$

Отже кожен оператор $\{H_Q, |Q|\le\infty\}$ є симетричним в просторі $L_2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mu)$. Зауважимо, що всі інтеграли в (A.2) є скінченими, що випливає з помірності міри $\mu\in\mathcal{G}\{\mu_\Lambda\}$ та циліндричності функцій u, $h_k\in C^1_{0,\mathrm{cyl}}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$. $\square$

Теорема A.2 (теорема 1.10)**.** Генератор H сильно неперервної квазістискаючої півгрупи P_t є квазі-акретивним по відношенню до будь-якого перетину двоїстості.

Доведення. Оскільки півгрупа P_t є квазі-стискаючою, з врахуванням (1.21) маємо

$$|\langle\, j(x), P_t x\,\rangle\,| \leq \|P_t x\|_X \|j(x)\|_{X^*} \leq e^{Mt}\|x\|^2.$$

Тому

$$\forall\, x \in X \quad \langle\, j(x), e^{Mt}x - P_t x\,\rangle\, \geq 0.$$

Вибираючи $x \in \mathcal{D}(H)$, отримаємо

$$\langle\, j(x), (H+M)x\,\rangle\, = \lim_{t\to 0+} \langle\, j(x), \frac{e^{Mt}x - x}{t} - \frac{P_t x - x}{t}\,\rangle\, \geq 0,$$

Отже, оператор H є квазі-акретивним зі сталою M. □

Лема А.3 (лема 1.11)**.** Квазі-акретивний щільно заданий оператор має єдине квазі-акретивне замикання.

Доведення. Для доведення достатньо встановити, що із збіжності в просторі X послідовностей $x_n \to 0$ та $Hx_n \to v$ випливає $v = 0$. Квазі-акретивність оператора H дає існування деякої сталої θ, такої що для довільного $y \in \mathcal{D}(L)$: $\langle\, j(x), (H+\theta)y\,\rangle_X \geq 0$ для будь-якого відображення двоїстості $j\colon X \to X^*$. Тому

$$\|y\|_X^2 = \langle\, j(y), y\,\rangle\, \leq\, \langle j(y), y + \alpha(H+\theta)y\,\rangle \leq \|y + \alpha(H+\theta)y\|_X \|y\|_X,$$

отже для довільного $\alpha > 0$

$$\forall\;\, y \in Y: \quad \|y\|_X \leq \|\, \big[1 + \alpha(H+\theta)\big]y\|_X. \tag{A.3}$$

Виберемо в (A.3) $y = x_n + \alpha z,\;\, z \in \mathcal{D}(H)$, тоді

$$\|x_n + \alpha z\|_X \leq \|x_n + \alpha z + \alpha(H+\theta)\big[x_n + \alpha z\big]\,\|_X.$$

Прямуючи $n \to \infty$, отримаємо

$$\alpha\|z\|_X \leq \|\alpha v + \alpha\{z + \alpha(H+\theta)z\}\,\|_X$$

або, після ділення на α та прямуючи $\alpha \to 0+$, маємо

$$\|z\|_X \leq \|v + z\|_X \quad \forall\, z \in \mathcal{D}(H).$$

Щільність області визначення оператора $\mathcal{D}(H)$ в X дає $v = 0$ в X, і як наслідок єдиність квазі-акретивного замикання $\widetilde{H}$. $\square$

Додаток В

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 3.3

В.1 Побудова сильного розв'язку $\xi_t^0(x^0)$ при $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$

Розглянемо систему (3.6). Перш за все зауважимо, що звуження відображення

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \ni x = \{x_k\}_{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow F(x) = \{F(x_k)\}_{\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$$

на будь-який простір $\ell_p(c) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ є максимально монотонним. Простою перевіркою не важко пересвідчитися, що F є монотонним відображенням:

$$\langle\, F(x) - F(y), j(x-y)\,\rangle_{\ell_p(c)} = \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(F(x_k) - F(y_k))(x_k - y_k)^{p-1}}{\|x-y\|_{\ell_p(c)}^{p-2}} \geq 0.$$

Враховуючи, що $F(0) = 0$ та монотонність координатних відображень $F(x_k)$, отримаємо:

$$\forall\, y \in \ell_p(c)\ \ x + F(x) = y \ \Leftrightarrow\ x_k + F(x_k) = y_k \ \Rightarrow\ |x_k| \leq |y_k| \ \Rightarrow\ x \in \ell_p(c).$$

Отже $\operatorname{Ran}(1+F) = \ell_p(c)$ відображення F є максимально монотонним.

Розглянемо рівняння, що апроксимує рівняння (3.6):

$$\xi^\lambda(t, x^0) = x^0 + W(t) - \int\limits_0^t \{F_\lambda(\xi^\lambda(s, x^0)) + B\xi^\lambda(s, x^0)\}ds, \tag{B.1}$$

де

$$F_\lambda(x) = (F \circ R_\lambda)(x) = F((1+\lambda F)^{inv}(x)), \tag{B.2}$$

$R_\lambda = (1+\lambda F)^{inv}$ — позначає так звану нелінійну резольвенту, яка означається в термінах оберненого відображення inv. Відображення F_λ називається апроксимацією Іосіди і має деякі спеціальні властивості, зокрема воно є ліпшицевим (див., наприклад, [20]). Отже, рівняння (B.1) є рівнянням з ліпшицевими коефіцієнтами і має наступну координатну форму:

$$\xi_k^\lambda(t,x^0) = x_k^0 + W_k(t) - \int\limits_0^t \{F_\lambda(\xi_k^\lambda(s,x^0)) + (B\xi^\lambda(t,x^0))_k\}ds. \tag{B.3}$$

Введення нової змінної $\xi_t^\lambda(x^0,\omega) = \eta_t^\lambda(x^0,\omega) + W_t(\omega)$ дає можливість звести рівняння (B.1) до звичайного диференціального рівняння з керуванням W_t:

$$\eta^\lambda(t,\omega) = x^0 - \int_0^t \{F_\lambda(\eta^\lambda(s,x^0)+W_t(\omega)) + B[\eta^\lambda(t,x^0)+W_t(\omega)]\,\}ds. \tag{B.4}$$

Процес W_t є $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-м.в. неперервною функцією в просторі $\ell_p(a)$ при $p > 1$, тому існує єдиний розв'язок рівняння (B.4). Розв'язок рівняння (3.6) будується як границя процесу $\xi^\lambda(t,\omega) = \eta^\lambda(t,\omega) + W(t,\omega)$ при $\lambda \to 0+$.

Доведемо спочатку, що для $\mathbf{P}$-м.в. $\omega \in \Omega$ і початкових даних $x^0 \in \ell_p(a)$ маємо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\eta_t^\lambda(x^0,\omega)\|_{\ell_p(a)} \le K(\omega) \tag{B.5}$$

з рівномірною по $\lambda \ge 0$ функцією $K(\omega) \in \cap_{p\ge 1} L^p(\Omega,\mathbf{P})$. З (3.30) випливає, що

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\eta_t^\lambda(x^0,\omega)\|^p_{\ell_p(a)} = p\,\langle\, \frac{d\eta_t^\lambda}{dt}, [\eta_t^\lambda]^\#\rangle = \\
&= p\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k|\eta_{t,k}^\lambda|^{p-2}(-F_\lambda(\eta_k^\lambda + W_k) - [B(\eta^\lambda + W)]_k)\eta_k^\lambda \le \\
&\qquad \le K\,\|\eta_t^\lambda\|^p_{\ell_p(a)} + \|F_\lambda(W_t)\|^p_{\ell_p(a)} + \|B\|\,\|W_t\|^p_{\ell_p(a)},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

де $K = 2p - 2 + \|B\|_{\mathcal{L}(\ell_p(a))}$. Вище було додано та віднято член $F_\lambda(W_t)$, застосована монотонність відображення F_λ та використана нерівність $|x^{q-p}y^p| \le \frac{q-p}{q}|x|^q + \frac{p}{q}|y|^q$.

Враховуючи нерівність $\forall\, x \in \mathcal{D}(F)$: $\|F_\lambda(x)\|_X \le \|F(x)\|$ [20] та (2.4) маємо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F_\lambda(W_t)\|_{\ell_p(a)} \le \sup_{t\in[0,T]} \|F(W_t)\|_{\ell_p(a)} \le C_1(1+\sup_{t\in[0,T]} \|W_t\|_{\ell_{p(\varkappa+1)}(a)})^{\varkappa+1}.$$

Отже, з (B.6) отримаємо

$$\|\eta_t^\lambda(x^0,\omega)\|^p_{\ell_p(a)} \le e^{Kt}\|x^0\|^p_{\ell_p(a)}+ \\ + te^{Kt}[1+\sup_{s\in[0,t]}\|W_s\|^{p(\varkappa+1)}_{\ell_{p(\varkappa+1)}(a)}+\|B\|\sup_{s\in[0,t]}\|W_s\|^p_{\ell_p(a)}]. \tag{B.7}$$

Враховуючи властивості вінерівського процесу, зокрема:

$$\mathbf{E}_{\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}}\sup_{\tau\in[0,t]}\|W(\tau)\|^q_{\ell_p(a)} \le C_q|t|^{q/2}, \tag{B.8}$$

$$\mathbf{E}_{\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}}\sup_{\tau\in[0,t]}\|W(\tau)-W(s)\|^q_{\ell_p(a)} \le C_q|t-s|^{q/2}, \tag{B.9}$$

маємо інтегровність членів $\|W_s\|$ в (B.7), що дає (B.5). Зокрема маємо рівномірну по $\lambda \ge 0$ оцінку

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\lambda\|_{\ell_p(a)} \le \sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t^\lambda\|_{\ell_p(a)}+\sup_{t\in[0,T]}\|W_t\|_{\ell_p(a)} \le K'(\omega). \tag{B.10}$$

Покажемо, що для $\mathbf{P}$-м.в. $\omega\in\Omega$ і початкового даного $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$ маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\lambda-\xi_t^\delta\|_{\ell_m(a)} \le (\lambda+\delta)K''(\omega) \tag{B.11}$$

з $K'' \in \cap_{p\ge1} L^p(\Omega,\mathbf{P})$.

Дійсно, використовуючи (3.30), (B.2) та властивість $x = R_\lambda(x)+\lambda F_\lambda(x)$, також те, що $\xi^\lambda-\xi^\delta = \eta^\lambda-\eta^\delta$, маємо:

$$\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\|\eta_t^\lambda-\eta_t^\delta\|^m_{\ell_m(a)} = -\|\eta^\lambda-\eta^\delta\|^{m-2}\,\langle\, F_\lambda(\xi^\lambda)-F_\delta(\xi^\delta)+B(\xi^\lambda-\xi^\delta), j(\xi^\lambda-\xi^\delta)\rangle =$$

$$= -\|\eta^\lambda-\eta^\delta\|^{m-2}\cdot$$

$$\cdot\,\langle\, F(R_\lambda(\xi^\lambda)) \mp F(\xi^\lambda) \mp F(\xi^\delta) - F(R_\delta(\xi^\delta)) + B(\xi^\lambda-\xi^\delta), j(\xi^\lambda-\xi^\delta)\rangle \le$$

$$\le \|B\|\,\|\eta^\lambda - \eta^\delta\|^m +$$
$$+\,\|\eta^\lambda - \eta^\delta\|^{m-1}\{\|F(R_\lambda(\xi^\lambda)) - F(\xi^\lambda)\| + \|F(R_\delta(\xi^\delta)) - F(\xi^\delta)\|\}.$$

Обидва доданки оцінюються з врахуванням (2.4), стискаючої властивості відображення R_λ та $R_\lambda(0) = 0$

$$\|F(R_\lambda(\xi^\lambda)) - F(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le C_0\|R_\lambda(\xi^\lambda) - \xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)}\times$$
$$\times\,(1 + \|R_\lambda(\xi^\lambda)\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)} + \|\xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)})^\varkappa \le$$
$$\le \lambda C_0\|F_\lambda(\xi^\lambda)\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)}(1 + 2\|\xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)})^\varkappa \le \lambda C_0^2(1 + 2\|\xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)})^{2\varkappa+1},$$

де також було застосовано: $\forall\, c \in X$

$$\|F_\lambda(x)\| \le \|F(x)\| \tag{B.12}$$

. Нарешті, з врахуванням (B.10), в якому покладено $p = m(\varkappa + 1)^2$, та $\eta^\lambda - \eta^\delta\Big|_{t=0} = 0$, отримаємо твердження (B.11):

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\lambda - \xi_t^\delta\|^m_{\ell_m(a)} = \sup_{t\in[0,T]}\|\eta_t^\lambda - \eta_t^\delta\|^m_{\ell_m(a)} \le$$
$$\le (\lambda+\delta)e^{KT}K'\int_0^T\{\|\xi_t^\lambda\|^{m(2\varkappa+1)}_{\ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)} + \|\xi_t^\delta\|^{m(2\varkappa+1)}_{\ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)}\}dt \le (\lambda+\delta)K''(\omega).$$

Побудова розв'язку ξ_t^0. Перш за все зауважимо, що для просторів

$$Y = L_\infty([0,T], \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)) \subset X = L_\infty([0,T], \ell_m(a))$$

має місце властивість замкнутості кулі, тобто будь-яка обмежена в Y послідовність, що збігається в X, має граничну точку в Y: $\forall\, x_n \in Y$ такої, що $\exists\ K\ \|x_n\|_Y \le K$ і $\exists\ x^\# \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x^\#\|_X = 0$, випливає $x^\# \in Y$ і $\|x^\#\|_Y \le K$. Тому із збіжності (B.11) і обмеженості (B.10) випливає існування X-границі $\lim\limits_{\lambda\to0+}\xi^\lambda = \xi^0$:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\lambda - \xi_t^0\|_{\ell_m(a)} \le \lambda K''(\omega) \to 0, \quad \lambda \to 0+, \tag{B.13}$$

яка має властивість

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\xi_t^0\|_{\ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)} \le K'(\omega). \tag{B.14}$$

Перевіримо, що ξ_t^0 є сильним розв'язком задачі (3.6). Враховуючи, що $x = R_\lambda(x) + \lambda F_\lambda(x)$, (B.12) та (2.4) маємо

$$\|\xi^\lambda - R_\lambda(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le \lambda \|F_\lambda(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le$$
$$\le \lambda \|F(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le \lambda C_1 (1 + \|\xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)})^{\varkappa+1}.$$

З (B.13) випливає сильна $\ell_m(a)$-збіжність послідовності $R_\lambda(\xi^\lambda)$ до ξ^0 при $\lambda \to 0+$:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R_\lambda(\xi^\lambda) - \xi^0\|_{\ell_m(a)} \le \lambda K'''(\omega) \to 0. \tag{B.15}$$

Використовуючи нерівність:

$$\|F_\lambda(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le \|F(\xi^\lambda)\|_{\ell_m(a)} \le C_1 (1 + \|\xi^\lambda\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)})^{\varkappa+1},$$

(B.10) та слабку компактність одиничної кулі в $\ell_m(a)$, $m > 1$, отримаємо слабку збіжність $F_\lambda(\xi_t^\lambda) \to v_t$ для $\mathbf{P}$-м.в. $\omega \in \Omega$ та всіх $t \in [0,T]$. Представлення $F_\lambda(\xi^\lambda) = F(R_\lambda(\xi^\lambda))$, сильна збіжність (B.15) та сильно-слабка замкненість графіку максимально монотонного відображення F дають

$$\xi_t^0 \in \mathcal{D}_{\ell_m(a)}(F) \quad \text{та} \quad w - \lim_{\lambda\to 0+} F_\lambda(\xi^\lambda) = v_t = F(\xi_t^0). \tag{B.16}$$

Нарешті, оцінка (B.11) та слабка збіжність (B.16) дозволяють замкнути (B.1) і отримати слабке представлення у просторі $\ell_m(a)$ для початкового даного $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$:

$$\xi^0(t, x^0) \overset{w}{=} x^0 + W(t) - \int_0^t [v_t + B\xi_t^0] dt \overset{w}{=}$$
$$\overset{w}{=} x^0 + W(t) - \int_0^t [F(\xi_t^0) + B\xi_t^0] dt. \tag{B.17}$$

З іншого боку, для $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$ оцінка (B.14) дає інтегровану мажоранту

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F(\xi_t^0)\|_{\ell_m(a)} \le C_1(1+\sup_{t\in[0,T]} \|\xi_t^0\|_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)})^{\varkappa+1} \le C_1(1+K'(\omega)), \tag{B.18}$$

тому члени в (B.17) є сильно інтегрованими і слабка тотожність (B.17) перетворюється у сильну, що дає сильний розв'язок задачі (3.6) при $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$.

B.2 Побудова узагальненого розв'язку $\xi_t^0(x^0)$ для початкового даного $\xi_t^0(x^0)$

Розглянемо $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$. Щойно було доведено, що сильний розв'язок $\xi^0(t,x^0)$ задачі (3.6) представляється у вигляді:

$$\xi^0(\omega,t,x^0) = \eta^0(\omega,t,x^0) + W(\omega,t), \tag{B.19}$$

де $\eta^0(\omega,t,x^0)$ задовольняє рівняння

$$\eta^0(\omega,t,x^0) = x^0 - \int_0^t (F+B)(\xi^0(\omega,s,x^0))ds. \tag{B.20}$$

З (B.14) та (B.18) маємо, що для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-м.в. $\omega \in \Omega$:

$$(F+B)(\xi^0(\omega,\,\cdot\,,x^0)) \in L_\infty([0,T],\ell_m(a)). \tag{B.21}$$

З представлення (B.20) випливає, що для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-м.в. $\omega \in \Omega$ функція $\eta^0(\omega,t,x^0)$ є абсолютно неперервною по $t \in [0,T]$:

$$\eta^0(\omega,\,\cdot\,,x^0) \in AC([0,T],\ell_m(a)),$$

отже, враховуючи (3.30), диференціювання, що виконується нижче є коректним.

Щоб отримати (3.10), запишемо для $x^0, y^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$:

$$\frac{d}{dt}\|\xi^0(t,x^0)-\xi^0(t,y^0)\|^m_{\ell_m(a)} = \frac{d}{dt}\|\eta^0(t,x^0)-\eta^0(t,y^0)\|^m_{\ell_m(a)} \le$$
$$\le -m\,\langle\,(F+B)(\eta^0(x^0)+W)-(F+B)(\eta^0(y^0)+W),[\eta^0(x^0)-\eta^0(y^0)]^{\#}\rangle \le$$
$$\le m\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_m(a))}\|\eta^0(t,x^0)-\eta^0(t,y^0)\|^m_{\ell_m(a)} = M_m\|\xi^0(t,x^0)-\xi^0(t,y^0)\|^m_{\ell_m(a)},$$

що дає (3.10) для $x^0, y^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$. Виконуючи замикання $x^0_n \to x^0$ в $\ell_m(a)$ для $x^0_n \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$ та використовуючи неперервність по $t \in [0,T]$ розв'язку $\xi^0(t,x^0_n)$ при $x^0_n \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$, маємо неперервність узагальненого розв'язку $\xi^0(t,x^0)$ і оцінку (3.10) для $x^0, y^0 \in \ell_m(a)$. Вище також використовувалась обмеженість оператора B в просторі $\ell_p(c),\ c \in \mathbb{P},\ p > 1$, що випливає з оцінки (3.37).

Щоб отримати (3.11), розглянемо $x^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$, тоді для $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}^d}$-м.в. $\omega \in \Omega$ маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\eta^0(\omega,t,x^0)\|^m_{\ell_m(a)} &= -m\,\langle\,(F+B)(\eta^0_t+W_t),[\eta^0_t]^{\#}\rangle = \\ &= -m\,\langle\,(F+B)(\eta^0_t+W_t)-(F+B)(W_t),[\eta^0_t]^{\#}\rangle - \\ &- m\,\langle\,(F+B)(W_t),[\eta^0_t]^{\#}\rangle \le m\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_m(a))}\|\eta^0_t\|^m_{\ell_m(a)} + \\ &+ (m-1)\|\eta^0_t\|^m_{\ell_m(a)} + \|(F+B)(W_t(\omega))\|^m_{\ell_m(a)}.\end{aligned}$$

Отже

$$\|\eta^0_t\|^m_{\ell_m(a)} \le e^{Ct}\|x^0\|^m_{\ell_m(a)} + \int_0^t e^{C(t-s)}\|(F+B)(W(s))\|^m_{\ell_m(a)}ds.$$

Нарешті, використовуючи представлення (B.19), маємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi^0(t,x^0)\|_{\ell_m(a)} \le e^{M'_mT}\|x^0\|_{\ell_m(a)} + \sup_{t\in[0,T]}\|W(t)\|_{\ell_m(a)} +$$
$$+ e^{M'_mT}(\int_0^T \|(F+B)(W(t))\|^m_{\ell_m(a)}ds)^{1/m} \le e^{M'_mT}\|x^0\|_{\ell_m(a)} + K_m(\omega,T)$$

з функцією

$$K_m(\omega,T) = (1 + e^{M'_m T} T^{1/m} \|B\|_{\mathcal{L}(\ell_m(a))}) \sup_{t\in[0,T]} \|W(\omega,t)\|_{\ell_m(a)} +$$
$$+ e^{M'_m T} T^{1/m} \sup_{t\in[0,T]} \|F(W(\omega,t))\|_{\ell_m(a)}.$$

Враховуючи (2.4), маємо

$$\|F(W_t)\|_{\ell_m(a)} \le C(1 + \|W_t\|^{\varkappa+1}_{\ell_{m(\varkappa+1)}(a)}).$$

Отже, з (B.8) та (B.9) отримаємо інтегрованість $K_m(\,\cdot\,,T)$. Замикання $x_n^0 \to x^0 \in \ell_m(a)$, $x_n^0 \in \ell_{m(\varkappa+1)^2}(a)$ і застосування оцінки (3.10) завершує доведення теореми 3.3.

Додаток C

СТОХАСТИЧНА ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ПРОЦЕСУ $\boldsymbol{\xi_t^0(x,\omega)}$ ТА ЙОГО ВАРІАЦІЙ

В цьому додатку доводиться теорема 4.2, якій перевіряється стохастична диференційованість першого порядку процесу $\xi_t^0(x,\omega)$, що задовольняє рівняння (3.6). Цей результат було використано для доведення формули інтегрування частинами в просторі Вінера у розділі 4. Фактично в § C.1–§ C.4 послідовно перевіряються вимоги означення стохастичної диференційованості в означенні 4.1.

C.1 Збурення вихідного процесу в просторі Вінера.

В цьому параграфі досліджується зсуви процесу ξ_t^0 по простору Вінера і перевіряється властивість 1 в означенні 4.1. Цей результат є узагальненням теореми 3.3 на випадок зсувів розв'язків стохастичних рівнянь в локальних напрямках $u \in J_{\rm cyl}$, визначених в (4.1).

Лема C.1. Для початкового даного $x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ та локального напрямку $u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$ процес

$$\xi^\varepsilon(t,x^0,u,\omega) = \xi^0(t,x^0,\omega_\cdot + \varepsilon\int_0^\cdot u_s ds)$$

є єдиним сильний розв'язком рівняння

$$\xi_k^\varepsilon(t,x^0,u) = x_k^0 + W_k(t) + \varepsilon\int_0^t u_{s,k}ds - \\ - \int_0^t [F(\xi_k^\varepsilon(s,x^0,u)) + \{B\xi^\varepsilon(s,x^0,u)\}_k]ds, \qquad (C.1)$$

тобто є $\ell_2(a)$-неперервним $\mathcal{F}_t$-адаптованим процесом $\xi^\varepsilon(t,x^0)\in\mathcal{D}_{\ell_2(a)}(F)$, $t\in[0,T]$, для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega\in\Omega$, який задовольняє рівняння (C.1) в просторі $\ell_2(a)$ $\mathbf{P}$-майже всюди.

Крім того, для довільного $x^0\in\ell_2(a)$ існує єдиний узагальнений розв'язок $\xi^\varepsilon(t,x^0,u)$ рівняння (C.1), який є рівномірною по $[0,T]$, $\mathbf{P}$-м.в. границею сильних розв'язків, і для цього розв'язку виконані наступні оцінки: $\exists\ M\ \forall\, x^0,y^0\in\ell_2(a),\ u^1,u^2\in\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$

$$\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\varepsilon(x^0,u^1)-\xi_t^\varepsilon(y^0,u^2)\|_{\ell_2(a)}^2 \le \qquad (C.2)$$

$$\le e^{MT}\Big(\|x^0-y^0\|_{\ell_2(a)}^2 + \varepsilon_0^2\int_0^T\|u_s^1-u_s^2\|_{\ell_2(a)}^2ds\Big),$$

$$\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\varepsilon(x^0,u)\|_{\ell_2(a)}^2 \le \qquad (C.3)$$

$$\le K(\omega) + e^{MT}\Big(\|x^0\|_{\ell_2(a)}^2 + \varepsilon_0^2\int_0^T\|u_s\|_{\ell_2(a)}^2ds\Big),$$

де $K\in\bigcap\limits_{p\ge1}L^p(\Omega,\mathbf{P})$.

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 3.3, в силу представлення

$$\xi_k^\varepsilon(t,x^0,u) = \eta_k^\varepsilon(t,x^0,u) + W_k(t) + \varepsilon\int_0^t u_{s,k}ds \qquad (C.4)$$

сильна розв'язність рівняння (C.1) еквівалентна розв'язності рівняння

$$\eta_k^\varepsilon(t) = x_k^0 - \int_0^t\Big[(F+B)\Big(\eta^\varepsilon(s)+W(s)+\varepsilon\int_0^s u_\tau d\tau\Big)\Big]_k ds. \qquad (C.5)$$

Для $u\in\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ процес $\int_0^s u_\tau d\tau$ є $\ell_p(a)$-неперервним для довільного $p\ge1$. З $\ell_p(a)$-неперервності процесу $W(s)$, як в теоремі 3.3, випливає, що для

$x^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ рівняння (C.5) є сильно розв'язним в просторі $\ell_2(a)$, і його розв'язок $\eta^\varepsilon(t)$ є $\ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$-значним рівномірно по $t \in [0,T]$ обмеженим процесом скінченної варіації. Крім того, для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega \in \Omega$ маємо

$$\Big(F+B\Big)\big(\eta^\varepsilon(\cdot)+W(\cdot)+\varepsilon\int_0^{\cdot} u_\tau d\tau\big) \in L_\infty([0,T],\ell_2(a)).$$

З представлення (C.5) випливає, що функція $[0,T] \ni t \to \eta^\varepsilon(t,x^0,u)$ є $\mathbf{P}$-майже всюди абсолютно неперервною у просторі $\ell_2(a)$ і, як наслідок, майже всюди диференційованою по $t \in [0,T]$. Це обґрунтовує коректність наступних диференціювань.

Введемо позначення $\xi_1^\varepsilon = \xi^\varepsilon(t,x^0,u^1)$, $\xi_2^\varepsilon = \xi^\varepsilon(t,y^0,u^2)$ для $x^0,y^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$ і $u^1,u^2 \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$, тоді

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\xi_1^\varepsilon-\xi_2^\varepsilon\|^2_{\ell_2(a)} = \frac{d}{dt}\|\eta_t^\varepsilon(x^0,u^1)-\eta_t^\varepsilon(y^0,u^2)+\varepsilon\int_0^t(u_s^1-u_s^2)ds\|^2_{\ell_2(a)} = \\
&= -2\,\langle\, \xi_1^\varepsilon-\xi_2^\varepsilon, [F(\xi_1^\varepsilon)-F(\xi_2^\varepsilon)]+B(\xi_1^\varepsilon-\xi_2^\varepsilon)+\varepsilon(u_t^1-u_t^2)\,\rangle \le \\
&\le (2\|B\|+1)\|\xi_1^\varepsilon-\xi_2^\varepsilon\|^2_{\ell_2(a)}+\varepsilon^2\|u_t^1-u_t^2\|^2_{\ell_2(a)}.
\end{aligned}$$

Вище було використано монотонність відображення $F\colon \ell_2(a) \to \ell_2(a)$. Остання нерівність дає (C.2) для початкових даних $x^0,y^0 \in \ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$. Вибираючи $y^0 = x^0$ і $u^2 \equiv 0$, маємо, як наслідок (C.2), що

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t^\varepsilon(x^0,u^1)-\xi_t^0(x^0)\|^2_{\ell_2(a)} \le \varepsilon^2 e^{MT}\int_0^T\|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds.$$

Враховуючи (3.10) і (3.11), отримаємо оцінку (C.3). Замикання оцінок (C.2) і (C.3) до $x^0,y^0 \in \ell_2(a)$ завершує доведення. □

C.2 Рівняння на стохастичні похідні в локальних напрямках.

В наступній лемі перевіряється властивість 2 означення 4.1 для процесу ξ_t^0, і будується його перша стохастична похідна в локальному напрямку $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$.

Лема C.2. Для $x^0 \in \ell_2(a)$, $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ рівняння на стохастичну похідну по напрямку $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$

$$D_u\xi_k^0(t,x^0) = \int_0^t u_{s,k}ds - \int_0^t \left\{\left[F'(\xi^0(s,x^0)) + B\right] D_u\xi^0(s,x^0)\right\}_k ds \quad (C.6)$$

має єдиний сильний розв'язок в просторі $\ell_2(a)$. Крім того, виконані наступні оцінки

$$\sup_{t\in[0,T]} \|D_u\xi^0(t,x^0)\|^2_{\ell_2(a)} \leq e^{MT}\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds, \quad (C.7)$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|D_u\xi^0(t,x^0) - D_u\xi^0(t,y^0)\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} \leq$$

$$\leq e^{MT}K_R(\omega)\|x^0 - y^0\|^2_{\ell_2(a)}\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds \quad (C.8)$$

де $K_R \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega,\mathbf{P})$, $R = \max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|y^0\|_{\ell_2(a)})$.

Доведення. Для довільного $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ неоднорідна частина рівняння (C.6) є неперервною $u_{\cdot} \in C([0,T],\ell_2(c))$ для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega \in \Omega$ і для будь-якого $c \in \mathbb{P}$. Міркуючи як в доведенні теореми 3.12, маємо, що лінійне неавтономне рівняння (C.6) має єдиний $\ell_2(a)$-неперервний $\mathcal{F}_t$-адаптований сильний розв'язок $D_u\xi^0(t,x^0) \in \mathcal{D}_{\ell_2(a)}(F'(\xi^0(t,x^0)))$ $\mathbf{P}$-м.в. Цей розв'язок має сильну $\ell_2(a)$-похідну $\dfrac{d}{dt}D_u\xi^0(t,x^0)$ і допускає представлення, аналогічне (3.76):

$$D_u\xi^0(t,x^0,\omega) = \int_0^t U^{\omega}_{x^0}(t,s)u_s ds \quad (C.9)$$

з $\mathcal{F}_t$-адаптованою сильно неперервною в $\ell_2(a)$ еволіцією $\{U^{\omega}_{x^0}(t,s), 0 \leq s \leq t\}$, що породжена сім'єю операторів $A(t,x^0,\omega) = F'(\xi^0(t,x^0)) + B$.

Нерівність (C.7) випливає з $D_u\xi^0(0,x^0) = 0$ і оцінки

$$\frac{d}{dt}\|D_u\xi_t^0(x^0)\|^2_{\ell_2(a)} = 2\,\langle\, D_u\xi_t^0(x^0), u_t - (F'(\xi^0) + B)D_u\xi_t^0\,\rangle \leq$$

$$\leq (2\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_2(a))} + 1)\|D_u\xi_t^0(x^0)\|^2_{\ell_2(a)} + \|u_t\|^2_{\ell_2(a)}.$$

Щоб отримати (C.8), запишемо

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|D_u\xi_t^0(x^0)-D_u\xi_t^0(y^0)\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})}=\\
&=-2\,\langle\, D_u\xi^0(x^0)-D_u\xi^0(y^0), B[D_u\xi^0(x^0)-D_u\xi^0(y^0)]\,\rangle-\\
&-2\,\langle\, D_u\xi^0(x^0)-D_u\xi^0(y^0), F'(\xi^0(x^0))D_u\xi^0(x^0)-F'(\xi^0(y^0))D_u\xi^0(y^0)\,\rangle_{\ell_2(a^{\varkappa+2})}\le\\
&\le(2\|B\|+1)\|D_u\xi^0(x^0)-D_u\xi^0(y^0)\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})}+\\
&+\|[F'(\xi^0(x^0))-F'(\xi^0(y^0))]D_u\xi^0(x^0)\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})}\le\\
&\le M\|D_u\xi^0(x^0)-D_u\xi^0(y^0)\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})}+\\
&+K(1+\|\xi^0(x^0)\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^0(y^0)\|_{\ell_2(a)})^{2\varkappa}\|\xi^0(x^0)-\xi^0(y^0)\|^2_{\ell_2(a)}\|D_u\xi_t^0(x^0)\|^2_{\ell_2(a)}.
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

Вище було використано властивості відображення F і наступна нерівність для $c\in\mathbb{P}$:

$$
\begin{aligned}
\|[F'(\xi)-F'(\zeta)]y\|^2_{\ell_2(c)}&\le K^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}c_k|(\xi_k-\zeta_k)(1+|\xi_k|+|\zeta_k|)^{\varkappa}y_k|^2\le\\
&\le K^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{c_k}{a_k^{\varkappa+1}}|y_k|^2\cdot\|\xi-\zeta\|^2_{\ell_2(a)}(1+\|\xi\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta\|_{\ell_2(a)})^{2\varkappa}\le\\
&\le K^2\|\xi-\zeta\|^2_{\ell_2(a)}(1+\|\xi\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta\|_{\ell_2(a)})^{2\varkappa}\|y\|^2_{\ell_2(dc)}
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

з $d_k\ge a_k^{-\varkappa+1}$. Властивості (3.10), (3.11) процесу ξ^0 і оцінки (C.10), (C.7) дають (C.8). □

C.3 Стохастична диференційованість першого порядку процесу ξ_t^0 над простором Вінера

В даному параграфі перевіряється властивість 3 означення 4.1 для процесу ξ_t^0.

Лема C.3. Для будь-якого $u\in\mathcal{J}_{\text{cyl}}$ розв'язки ξ^ε та $D_u\xi^0$ рівнянь (C.1), (C.6) задовольняють оцінку: $\forall\, R>0\ \exists\ K_{u,R}\in\bigcap_{p\ge1}L^p(\Omega,\mathbf{P})$ така, що

$\forall \, \|x^0\|_{\ell_2(a)} \le R$

$$\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_0} \sup_{t\in[0,T]} \| \frac{\xi_t^\varepsilon(x^0,u)-\xi_t^0(x^0)}{\varepsilon} - D_u\xi_t^0(x^0)\|_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} \le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega). \qquad \text{(C.12)}$$

Доведення. Введемо позначення $\Delta_\varnothing(t) = \dfrac{\xi_t^\varepsilon(x^0,u)-\xi_t^0(x^0)}{\varepsilon} - D_u\xi_t^0(x^0)$. Використовуючи представлення (C.4), властивості сильного розв'язку $D_u\xi_t^0(x^0)$ рівняння (C.6), тотожність

$$f(y)-f(x) = f'(y-x) + \int_0^1 [f'(x+\lambda(y-x)) - f'(x)](y-x)d\lambda,$$

з $\zeta_\lambda = \xi^0 + \lambda(\xi^\varepsilon - \xi^0)$ та монотонність відображення $F\colon\, F'(z)\ge 0,\ z\in\mathbb{R}^1$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\Delta_\varnothing\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} = -2\,\langle\, \Delta_\varnothing, B\Delta_\varnothing\,\rangle_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} - \\
&-2\,\langle\, \Delta_\varnothing, F(\xi^\varepsilon) - F(\xi^0) + u_t - u_t - F'D_u\xi_t^0\,\rangle_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} \le \\
&\le (2\|B\|+1)\|\Delta_\varnothing\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} - 2\int_0^1 \Big\| [F'(\zeta_\lambda) - F'(\xi^0)]\,\frac{\xi^\varepsilon-\xi^0}{\varepsilon}\Big\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} d\lambda \le \\
&\le K\|\Delta_\varnothing\|^2_{\ell_2(a^{\varkappa+2})} \\
&+2\int_0^1 K'(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)} + \|\zeta_\lambda\|_{\ell_2(a)})^{2\varkappa}\|\xi^0-\zeta_\lambda\|^2_{\ell_2(a)}\,\|\frac{\xi^\varepsilon-\xi^0}{\varepsilon}\|^2_{\ell_2(a)}\,d\lambda \le \\
&\le K\|\Delta_\varnothing\|^2 + \varepsilon^2 K''_u(\|x^0\|^2_{\ell_2(a)}). \qquad \text{(C.13)}
\end{aligned}$$

Вище були використані оцінки (C.11), (3.10), (3.11) і властивості процесів ξ^0 та ξ^ε, що були отримані у лемі C.1. Оскільки $\Delta_\varnothing(0)=0$, а також враховуючи оцінки (C.13), маємо (C.12) при $x^0\in\ell_{2(\varkappa+1)^2}(a)$. Застосування (C.2) і (C.8) дозволяє замкнути цю оцінку до $x^0\in\ell_2(a)$ для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega\in\Omega$. $\square$

C.4 Властивість $\xi_t^0 \in \mathcal{D}_{loc}$

Залишилось перевірити для процесу ξ_t^0 властивість 4 в означенні 4.1.

Лема C.4. Для $x^0 \in \ell_2(a)$ і $u \in \mathcal{J}_{\text{cyl}}$ координати процесу ξ^0 є стохастично диференційованими $\xi_k^0(t,x^0) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega)$ для всіх $t \in [0,T]$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Доведення. З оцінки (C.12) випливає: $\forall\, x^0 \in \ell_2(a),\ u \in \mathcal{J}_{\text{cyl}},\ k \in \mathbb{Z}^d$

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} \Big|\frac{\xi_k^\varepsilon(t,x^0,u)-\xi_k^0(t,x^0)}{\varepsilon} - D_u\xi_k^0(t,x^0)\Big|^p = 0, \quad \forall\, p \geq 1. \quad \text{(C.14)}$$

З нерівностей (C.3) і (C.7) випливає, що процес $D_u\xi_k^0(t,x^0)$ є похідною процесу $\xi_k^0(t,x^0)$ в сенсі означення 4.1. З представлення (C.9) випливає властивість (4.3) в означенні стохастичної диференційованості: $\forall\, u \in \mathcal{J}_{\text{cyl}}$

$$D_u\xi_k^0(t,x^0) = \int_0^t \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} [U_{x^0}^\omega(t,s)]_{kj} u_{s,j} ds = \sum_{j\in\Lambda_u} \langle\, \mathbf{D}_j\xi_k^0(t,x^0), \int_0^\cdot u_{s,j} ds\,\rangle_{\mathcal{H}}$$

з $\mathcal{F}_t$-адаптовним процесом $\mathbf{D}_j\xi_k^0(t,x^0) = \int_0^\cdot \chi_{s\leq t}[U_{x^0}^\omega(t,s)]_{kj} ds \in \mathcal{H}$. З оцінки (C.7)для $\mathbf{P}$-майже всіх $\omega \in \Omega$ маємо:

$$\forall\, u \in \mathcal{J}_{\text{cyl}} \quad |D_u\xi_k^0(t,x^0)|^2 \leq \frac{1}{a_k} e^{Mt} \int_0^t \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds,$$

тому

$$\int_0^t \|\, [U_{x^0}^\omega(t,s)]_{k\cdot}\|^2_{\ell_2(a^{-1})} ds \leq \frac{1}{a_k} e^{Mt}.$$

Отже

$$\|\mathbf{D}_j\xi_k^0(t,x^0)\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^t |\,[U_{x^0}^\omega(t,s)]_{k,j}|^2 ds \leq \frac{a_j}{a_k} e^{Mt}$$

і $\mathbf{D}_j\xi_k^0(t,x^0) \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega,\mathbf{P},\mathcal{H})$. □

C.5 Допоміжні леми

Для доведення теореми 4.4 необхідно побудувати стохастичні варіації $I\!D^\beta\xi_{k,\tau}$ та довести їх регулярність в сенсі просторів Вінера. В даному параграфі отримано основний інструмент, який використовується при вивченні стохастичних варіацій, що задовольняють рівняння (4.17). Він є аналогом леми 3.11.

Лема C.5. Нехай вектори $\{c_{\gamma,\sigma}\}_{\gamma\subseteq\tau,\sigma\subseteq\beta}$ задовольняють ієрархію (4.19) і функція Q така, що $\exists\, K>0$

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^1:\quad |Q(x)-Q(y)|\le K|x-y|(1+|x|+|y|)^{\varkappa}.$$

Нехай $d_k=a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$. Тоді

$$\exists\, C\,\forall\, x,y\in\ell_2(a)\quad \|Q(y)\|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\tau}(dc_{\tau,\beta}),\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta}))}\le C(1+\|y\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1},\ \text{(C.15)}$$

$$\|\,[Q(y)-Q(x)]u\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\le C\|y-x\|_{\ell_2(a)}(1+\|y\|_{\ell_2(a)}+\|x\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\|u\|_{\ell_{m_\tau}(dc_{\tau,\beta})},\tag{C.16}$$

де діагональне відображення Q задається формулою $[Q(y)u]_k=Q(y_k)u_k$ і $m_\tau=m_1/|\tau|\ge 1$.

Нехай $\tau=\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell$, $\beta=\sigma_0\cup\dots\cup\sigma_\ell$ с $|\sigma_0|\ge 2-\ell$ и $|\gamma_i|\ge 1$, $|\sigma_i|\ge 0$ для $i=1,\dots,\ell$, $\ell\ge 1$. Тоді $\exists\, K\ \forall\, n=1,\dots,\ell$

$$\begin{gathered}\|\delta^{\sigma_0}[Q(y^0)y_{\gamma_1,\sigma_1}\dots y_{\gamma_n,\sigma_n}-Q(x^0)x_{\gamma_1,\sigma_1}\dots x_{\gamma_n,\sigma_n}]u_{\gamma_{n+1},\sigma_{n+1}}\dots u_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\le\\ \le K(1+\|y^0\|_{\ell_2(a)}+\|x^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\prod_{j=1}^{n}(1+\|y_{\gamma_j,\sigma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}+\|x_{\gamma_j,\sigma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})})\times\\ \times\left\{\|y^0-x^0\|_{\ell_2(a)}+\sum_{j=1}^{n}\|y_{\gamma_j,\sigma_j}-x_{\gamma_j,\sigma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}\right\}\prod_{j=n+1}^{\ell}\|u_{\gamma_j,\sigma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})},\end{gathered}\tag{C.17}$$

де $\delta_k^{\sigma_0}=\prod_{j\in\sigma_0}\delta_k^j$ — добуток символів Кронекера і координати вектора задаються наступним чином

$$\begin{aligned}&[\delta^{\sigma_0}Q(y^0)y_{\gamma_1,\sigma_1}\dots y_{\gamma_n,\sigma_n}u_{\gamma_{n+1},\sigma_{n+1}}\dots u_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}]_k=\\ &\qquad\qquad=\delta_k^{\sigma_0}Q(y_k^0)y_{k;\gamma_1,\sigma_1}\dots y_{k;\gamma_n,\sigma_n}u_{k;\gamma_{n+1},\sigma_{n+1}}\dots u_{k;\gamma_\ell,\sigma_\ell}.\end{aligned}$$

Доведення. Нерівності (C.15) і (C.16) випливають з оцінки

$$\| [Q(y) - Q(x)]u\|^m_{\ell_m(c)} \le K^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k |(y_k - x_k)(1 + |y_k| + |x_k|)^{\varkappa} u_k|^m \le$$

$$\le K^m (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{c_k}{a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m}} |u_k|^m) \, \|y - x\|^m_{\ell_2(a)} (1 + \|y\|_{\ell_2(a)} + \|x\|_{\ell_2(a)})^{m\varkappa}.$$

Щоб довести (C.17), зауважимо спочатку, що

$$\|\delta^{\sigma_0} Q(y^0) y_{\gamma_1,\sigma_1} \dots y_{\gamma_\ell,\sigma_\ell} - \delta^{\sigma_0} Q(x^0) x_{\gamma_1,\sigma_1} \dots x_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le$$

$$\le \|\delta^{\sigma_0}[Q(y^0) - Q(x^0)] y_{\gamma_1,\sigma_1} \dots y_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} + \tag{C.18}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} \|\delta^{\sigma_0} Q(x^0) x_{\gamma_1,\sigma_1} \dots x_{\gamma_{j-1},\sigma_{j-1}} (y_{\gamma_j,\sigma_j} - x_{\gamma_j,\sigma_j}) y_{\gamma_{j+1},\sigma_{j+1}} \dots y_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}. \tag{C.19}$$

Використовуючи ієрархію (4.19), оцінюємо (C.18):

$$(C.18)^{m_\tau} = \|\delta^{\sigma_0}[Q(y^0) - Q(x^0)] y_{\gamma_1,\sigma_1} \dots y_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le$$

$$\le K^{m_\tau} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k^{\sigma_0} c_{k;\tau,\beta} |(y_k^0 - x_k^0)(1 + |y_k^0| + |x_k^0|)^{\varkappa} y_{k;\gamma_1,\sigma_1} \dots y_{k;\gamma_\ell,\sigma_\ell}|^{m_\tau} \le$$

$$\le K^{m_\tau} \|y^0 - x^0\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)} (1 + \|y^0\|_{\ell_2(a)} + \|x^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_\tau} \times$$

$$\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k^{\sigma_0} c_{k;\tau,\beta} a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2} m_\tau} \prod_{j=1}^{\ell} (|y_{k;\gamma_j,\sigma_j}|^{m_{\gamma_j}})^{|\gamma_j|/|\tau|} \le$$

$$\le K^{m_\tau} K_c^{1/|\tau|} \|y^0 - x^0\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)} (1 + \|y^0\|_{\ell_2(a)} + \|x^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_\tau} \times$$

$$\times \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^{\ell} (c_{k;\gamma_j,\sigma_j} |y_{k;\gamma_j,\sigma_j}|^{m_{\gamma_j}})^{|\gamma_j|/|\tau|} \le$$

$$\le K^{m_\tau} K_c^{1/|\tau|} \|y^0 - x^0\|^{m_\tau}_{\ell_2(a)} (1 + \|y^0\|_{\ell_2(a)} + \|x^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa m_\tau} \prod_{j=1}^{\ell} \|y_{\gamma_j,\sigma_j}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}. \tag{C.20}$$

Аналогічно отримаємо

$$(C.19)^{m_\tau} = \|\delta^{\sigma_0} Q(x^0) x_{\gamma_1,\sigma_1} \dots x_{\gamma_{j-1},\sigma_{j-1}} (y_{\gamma_j,\sigma_j} - x_{\gamma_j,\sigma_j}) y_{\gamma_{j+1},\sigma_{j+1}} \dots y_{\gamma_\ell,\sigma_\ell}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le$$

$$\leq K^{m_\tau}(1+|Q(0)|)^{m_\tau} K_c^{1/|\tau|}(1+\|x^0\|_{\ell_2(a)})^{(\varkappa+1)m_\tau}\|y_{\gamma_j,\sigma_j}-x_{\gamma_j,\sigma_j}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}\times$$
$$\times (\prod_{i=1}^{j-1}\|x_{\gamma_i,\sigma_i}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i,\sigma_i})})(\prod_{i=j+1}^{\ell}\|y_{\gamma_i,\sigma_i}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_{\gamma_i}}(c_{\gamma_i,\sigma_i})}). \tag{C.21}$$

Оцінка (C.17) випливає з (C.20) та (C.21), де $y_{\gamma_j,\sigma_j} = x_{\gamma_j,\sigma_j} = u_{\gamma_j,\sigma_j}$ для $j = n+1,\dots,\ell$. □

C.6 Побудова стохастичних варіацій

В наступній лемі перевіряється вимога 1 означення 4.1 для стохастичних варіацій вихідного процесу.

Лема C.6. Нехай вектори $\{c_{\tau,\beta}\}\subset\mathbb{P}$ задовольняють ієрархію (4.19). Тоді для довільних $x^0\in\ell_2(a)$ і $u\in\mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}^1$, $\forall\,\beta,\ |\beta|\geq 0$, існує єдиний сильний розв'язок $I\!D^\beta\xi^\varepsilon_\tau(t,x^0,u)$ задачі

$$I\!D^\beta\xi^\varepsilon_{k,\tau}(t) = \widetilde{x}_{k;\tau,\beta} - \int_0^t\{(F'(\xi^\varepsilon_\varnothing)+B)I\!D^\beta\xi^\varepsilon_\tau\}_k ds - \int_0^t\varphi^\varepsilon_{k;\tau,\beta}(s)ds \tag{C.22}$$

в шкалі просторів $\{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\sigma})\}_{\gamma\subseteq\tau,\sigma\subseteq\beta}$, $m_\gamma = m_1/|\gamma|$. Вихідні дані $\widetilde{x}_{\tau,\beta}\equiv 0$, $|\beta|\geq 1$, $\widetilde{x}_{\tau,\varnothing}=\widetilde{x}_\tau$ були означені в (3.18), а збурений процес $\xi^\varepsilon_\varnothing\stackrel{df}{=}\xi^\varepsilon(t,x^0,u)$ — в (C.1). Неоднорідна частина рівняння (C.22) має вигляд:

$$\varphi^\varepsilon_{k;\tau,\beta}(t) = \sum_{\substack{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau\\ |\gamma_i|\geq 1,\,\ell\geq 1}}\ \sum_{\substack{\sigma_0\cup\dots\cup\sigma_\ell=\beta\\ |\sigma_0|\geq 2-\ell,\,|\sigma_i|\geq 0}} t^{|\sigma_0|}\delta_k^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^\varepsilon_{k,\varnothing})I\!D^{\sigma_1}\xi^\varepsilon_{k,\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi^\varepsilon_{k,\gamma_\ell}. \tag{C.23}$$

Зокрема, при $\varepsilon=0$ процес $I\!D^\beta\xi^\varepsilon_\tau(t,x^0,u)|_{\varepsilon=0}$ є розв'язком $I\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0)$ задачі (4.17), і виконано наступне співвідношення

$$I\!D^\beta\xi^\varepsilon_\tau(t,x^0,u,\omega) = I\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0,\omega_\cdot+\varepsilon\int_0^\cdot u_s ds). \tag{C.24}$$

Крім того, $\forall\, R > 0$ існують $K_R \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$ і деякий поліном P такі, що что для довільних $x^0, y^0 \in \ell_2(a)$, $u^1, u^2 \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ мають місце оцінки:

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_0} \sup_{t\in[0,T]} \|I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau(t, x^0, u)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \leq K_R(\omega) P(\varepsilon_0 \int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds), \quad (C.25)$$

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_0} \sup_{t\in[0,T]} \|I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau(x^0, u^1) - I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau(y^0, u^2)\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} \leq$$
$$\leq K_R(\omega)(\|x^0 - y^0\|^2_{\ell_2(a)} +$$
$$+ \varepsilon_0^2 \int_0^T \|u^1_s - u^2_s\|^2_{\ell_2(a)} ds)^{1/2} P(\varepsilon_0 \int_0^T \|u^1_s\|^2_{\ell_2(a)} + \|u^2_s\|^2_{\ell_2(a)} ds), \quad (C.26)$$

рівномірно по $\max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|y^0\|_{\ell_2(a)}, \|\widetilde{x}_{\gamma,\varnothing}\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\varnothing})}, \gamma \subseteq \tau) \leq R$.

Доведення. Сильна розв'язність лінійного рівняння (C.22) при початковій умові $\widetilde{x}_{\tau,\beta} \in \bigcap_{p\geq 1, c\in\mathbb{P}} \ell_p(c)$ може бути легко отримана як наслідок теорії Като (§ 3.3) аналогічно до теореми 3.12. Для цього достатньо показати, що неоднорідна частина

$$\varphi^\varepsilon_{\tau,\beta} \in C([0,T], \ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})) \cap L_\infty([0,T], \ell_{m_\tau}(dc_{\tau,\beta})) \ \ \text{для} \ \ d_k = a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}.$$

Це твердження доводиться по індукції із застосуванням потраекторної неперервності процесу $\xi^\varepsilon(t, x^0, u)$ (лема C.1) і леми C.5 замість леми 3.11. Як наслідок, для $\mathbf{P}$-м.в. $\omega \in \Omega$ розв'язок $I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau$ системи (C.22) задовольняє

$$I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau \in C([0,T], \ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})) \cap L_\infty([0,T], \ell_{m_\tau}(dc_{\tau,\beta})), \quad (C.27)$$

імає сильну $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$-похідну $\dfrac{d}{dt} I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau(t, x^0)$ м.в. на $[0,T]$ і допускає представлення (3.76):

$$I\!\!D^\beta \xi_\tau(t, x^0) = -\int_0^t U^\omega_{x^0}(t,s) \varphi_{\tau,\beta}(s) ds \quad (C.28)$$

в термінах $\mathcal{F}_t$-адаптованої еволюційного сім'ї операторів $U^\omega_{x^0}(t,s)$, $0 \leq$

$s \le t$, породженої $F'(\xi^0(t,x^0,\omega)) + B$. Крім того, має місце оцінка

$$\sup_{t\in[0,T]} \|U^{\omega}_{x^0}(t,s)\|_{\mathcal{L}(\ell_p(c))} \le \exp(T\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_p(c))}). \tag{C.29}$$

Оцінка (C.25) доводиться методом індукції. Враховуючи, що $F' \ge 0$, і нерівність (3.42) маємо:

$$\frac{d}{dt}\|I\!\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau}(t)\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} = m_\tau \,\langle\, \frac{d}{dt} I\!\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau}, (I\!\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau})^{\#}\,\rangle_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le (m_\tau\|B\| + m_\tau - 1)\|I\!\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau}(t)\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} + \|\varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}. \tag{C.30}$$

З представлення (C.23) для $\varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}$ випливає:

$$\|\varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le \sum_{\{\gamma,\sigma\}} t^{|\sigma_0|}\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^{\varepsilon}_{\varnothing}) I\!\!D^{\sigma_1}\xi^{\varepsilon}_{\gamma_1}\dots I\!\!D^{\sigma_\ell}\xi^{\varepsilon}_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le K\sum_{\{\gamma,\sigma\}} t^{|\sigma_0|}(1+\|\xi^{\varepsilon}_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\prod_{j=1}^{\ell}(1+\|I\!\!D^{\sigma_j}\xi^{\varepsilon}_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}), \tag{C.31}$$

де була використана лема C.5, нерівність (C.17). Індуктивне припущення і властивість (C.3) процесу ξ^{ε}_t, застосовані до (C.30) та (C.31), дають необхідну оцінку (C.25). Також було використано, що $I\!\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau}(0) = \widetilde{x}_{\tau,\beta}$ (C.22), і для бази індукції $\varphi^{\varepsilon}_{\{j\},\varnothing} \equiv 0$.

Для того, щоб оцінити (C.26) введемо позначення $\xi^1_\tau = \xi^{\varepsilon}_{\tau}(x^0,u^1)$, $\xi^2_\tau = \xi^{\varepsilon}_{\tau}(y^0,u^2)$. Аналогічно (C.30) для $x^0, y^0 \in \ell_2(a)$ і $u^1,u^2 \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$ маємо:

$$\frac{d}{dt}\|I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})} \le m_\tau\|B\|_{\mathcal{L}(\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta}))}\|I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})} -$$
$$- m_\tau\,\langle\,(I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau)^{\#}, F'(\xi^1_{\varnothing})I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - F'(\xi^2_{\varnothing})I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau\,\rangle_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})} -$$
$$- m_\tau\,\langle\,(I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau)^{\#}, \varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}(x^0,u^1) - \varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}(y^0,u^2)\,\rangle_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le (m_\tau\|B\| + 2(m_\tau-1))\|I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau - I\!\!D^{\beta}\xi^2_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})} +$$

$$+\|\{F'(\xi^1_{\varnothing}) - F'(\xi^2_{\varnothing})\}I\!\!D^{\beta}\xi^1_\tau\|^{m_\tau} + \|\varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}(x^0,u^1) - \varphi^{\varepsilon}_{\tau,\beta}(y^0,u^2)\|^{m_\tau}, \tag{C.32}$$

де було додано та віднято член $F'(\xi^2_\varnothing)I\!\!D^\beta\xi^1_\tau$ і використано властивість $F'\geq 0$ та нерівність (3.42).

Перший член в (C.32) оцінюється за допомогою леми C.5, оцінка (C.16):

$$\|\{F'(\xi^1_\varnothing)-F'(\xi^2_\varnothing)\}I\!\!D^\beta\xi^1_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})}\leq K\|\xi^1_\varnothing-\xi^2_\varnothing\|_{\ell_2(a)}\times$$
$$\times(1+\|\xi^1_\varnothing\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^2_\varnothing\|_{\ell_2(a)})^\varkappa\|I\!\!D^\beta\xi^1_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}. \tag{C.33}$$

лема C.32, (C.17) дає можливість оцінити другий член в (C.32):

$$\|\varphi^\varepsilon_{\tau,\beta}(x^0,u^1)-\varphi^\varepsilon_{\tau,\beta}(y^0,u^2)\|_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})}\leq\sum_{\substack{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau\\|\gamma_i|\geq1,\,\ell\geq1}}\ \sum_{\substack{\sigma_0\cup\dots\cup\sigma_\ell=\beta\\|\sigma_0|\geq2-\ell,\,|\sigma_i|\geq0}}t^{|\sigma_0|}\times$$
$$\times\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^1_\varnothing)I\!\!D^{\sigma_1}\xi^1_{\gamma_1}\dots I\!\!D^{\sigma_\ell}\xi^1_{\gamma_\ell}-\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^2_\varnothing)I\!\!D^{\sigma_1}\xi^2_{\gamma_1}\dots I\!\!D^{\sigma_\ell}\xi^2_{\gamma_\ell}\|\leq$$
$$\leq K\sum_{\gamma,\sigma}\{\|\xi^1_\varnothing-\xi^2_\varnothing\|_{\ell_2(a)}+\sum_{j=1}^{\ell}\|I\!\!D^{\sigma_j}\xi^1_{\gamma_j}-I\!\!D^{\sigma_j}\xi^2_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}\}\times$$
$$\times(1+\|\xi^1_\varnothing\|_{\ell_2(a)}+\|\xi^2_\varnothing\|_{\ell_2(a)})^\varkappa\cdot\prod_{j=1}^{\ell}(1+\|I\!\!D^{\sigma_j}\xi^1_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}+\|I\!\!D^{\sigma_j}\xi^2_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}), \tag{C.34}$$

де також було використано нерівність між нормами $\|\cdot\|_{\ell_{m_\tau}(d^{-1}c_{\tau,\beta})}\leq\|\cdot\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}$.

Підставляючи (C.33) і (C.34) в (C.32), використовуючи індуктивне припущення і властивості (C.25), (C.2), (C.3), а також тотожність $(I\!\!D^\beta\xi^1_\tau-I\!\!D^\beta\xi^2_\tau)|_{t=0}=0$, отримаємо оцінку (C.26).

Нарешті властивість (C.24) є наслідком єдиності розв'язку задачі (C.22) і зв'язку між $\xi^\varepsilon(t,x^0,u)$ та $\xi^0(t,x^0)$. □

C.7 Існування та властивості похідної стохастичних варіацій

В наступній лемі перевіряється вимога 1 означення 4.1 стохастичної варіації для процесу ξ_τ, тобто будується стохастична похідна процесу $I\!\!D^\beta\xi_\tau(t,x^0)$

по локальному напрямку $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$.

Лема C.7. Нехай $x^0 \in \ell_2(a)$, вектори $\{c_{\tau,\beta}\} \subset \mathbb{P}$ задовольняють ієрархію (4.19) і $I\!\!D^\beta \xi_\tau$ позначає сильний розв'язок рівняння (C.22) в просторі $\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})$ при $\varepsilon = 0$. Тоді для довільного $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ і будь-якого β, $|\beta| \geq 0$, існує єдиний сильний розв'язок $D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau(t, x^0)$ рівняння

$$D_u I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}(t) = -\int_0^t [(F'(\xi_k^0) + B) D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau]_k - \int_0^t \psi^u_{k;\tau,\beta}(s) ds \qquad (C.35)$$

в шкалі просторів $\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})$. Вище

$$\begin{aligned} \psi^u_{k;\tau,\beta} = {} & F''(\xi_k^0) D_u \xi_k^0 I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau} + \\ & + \sum_{\{\gamma,\sigma\}} t^{|\sigma_0|} \delta_k^{\sigma_0} F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi_k^0) D_u \xi_k^0 \, I\!\!D^{\sigma_1} \xi_{k,\gamma_1} \dots I\!\!D^{\sigma_\ell} \xi_{k,\gamma_\ell} + \qquad (C.36) \\ & + \sum_{\{\gamma,\sigma\}} \sum_{j=1}^{\ell} t^{|\sigma_0|} \delta^{\sigma_0} F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_k^0) I\!\!D^{\sigma_1} \xi_{k,\gamma_1} \dots (D_u I\!\!D^{\sigma_j} \xi_{k,\gamma_j}) \dots I\!\!D^{\sigma_\ell} \xi_{k,\gamma_\ell}, \end{aligned}$$

а сумування $\sum\limits_{\{\gamma,\sigma\}}$ визначено в (C.23).

Крім того, для довільного $R > 0 \ \exists \ K_R \in \bigcap\limits_{p \geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$, така, що має місце наступна потраекторна оцінка

$$\sup_{t \in [0,T]} \|D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau(t, x^0)\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} \leq K_R(\omega) \Big(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds\Big)^{1/2} \qquad (C.37)$$

рівномірно по $\max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|\widetilde{x}_{\gamma,\varnothing}\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\varnothing})}, \gamma \subseteq \tau) \leq R$.

Доведення. Сильна розв'язність лінійного рівняння (C.35) випливає з теорії Като аналогічно § 3.3. Подібно до леми C.6 та теореми 3.12, достатньо довести, що неоднорідна частина

$$\psi^u_{\tau,\beta} \in C([0,T], \ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})) \cap L^\infty([0,T], \ell_{m_\tau}(a^{m_1/2} c_{\tau,\beta})). \qquad (C.38)$$

Як наслідок будемо мати існування єдиного $\mathcal{F}_t$ -адаптованого сильного розв'язку рівняння (C.35) в просторі $\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})$, який $\mathbf{P}$-майже всюди задовольняє властивість

$$D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau \in C([0,T], \ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})) \cap L^\infty([0,T], \ell_{m_\tau}(a^{m_1/2} c_{\tau,\beta})), \quad (C.39)$$

має сильну $\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1} c_{\tau,\beta})$-похідну $\frac{d}{dt} D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau$ майже всюди на $[0,T]$ і має представлення вигляду (3.76):

$$D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau(t, x^0, \omega) = -\int_0^t U^\omega_{x^0}(t,s) \psi^u_{\tau,\beta}(s, x^0) ds \quad (C.40)$$

в термінах $\mathcal{F}_t$ -адаптованої еволюційної сім'ї $U^\omega_{x^0}(t,s),\ 0 \le s \le t$, породженої оператором $F'(\xi^0(t, x^0, \omega)) + B$.

Властивість $\psi^u_{\tau,\beta} \in L^\infty$ (C.38) доводиться аналогічно теоремі 3.12 методом індукції з використанням нерівності

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \quad |D_u \xi^0_k(t, x^0)| \le \frac{1}{\sqrt{a_k}} \|D_u \xi^0(t, x^0)\|_{\ell_2(a)} \quad (C.41)$$

та потраекторної неперервності процесу $D_u \xi^0$ (лема C.2). Дійсно, для першого члену в (C.36) маємо:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|F''(\xi^0) D_u \xi^0 I\!\!D^\beta \xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(a^{m_1/2} c_{\tau,\beta})} \le \\ &\le \sup_{t\in[0,T]} \|D_u \xi^0\|_{\ell_2(a)} \|F''(\xi^0) I\!\!D^\beta \xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \le \\ &\le K \sup_{t\in[0,T]} \|D_u \xi^0(t)\|_{\ell_2(a)} (1 + \|\xi^0(t)\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1} \|I\!\!D^\beta \xi_\tau(t)\|_{\ell_{m_\tau}(d c_{\tau,\beta})} < \infty, \end{aligned} \quad (C.42)$$

де було використано нерівність (C.41), лему C.5, (C.15), властивість (C.27) з $d_k = a_k^{-\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$, а також потраекторну неперервність процесів $\xi^0,\ D_u \xi^0$.

Властивість $\psi^u_{\tau,\beta} \in C$ (C.38) випливає з (C.42) та аналогічної оцінки на другий та третій члени в (C.36), де також застосовуються лема C.5, (C.17) та індуктивне припущення (C.40) на $D_u I\!\!D^\sigma \xi_\gamma,\ \sigma \subseteq \beta,\ \gamma \subseteq \tau$. Модифікація оцінки (C.42) з використанням нерівності

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \quad |D_u \xi^0_k(t) - D_u \xi^0_k(s)| \le \frac{1}{\sqrt{a_k}} \|D_u \xi^0(t) - D_u \xi^0(s)\|_{\ell_2(a)}$$

та потраекторної неперервності процесу $D_u\xi^0$ (лема C.2) дають неперервність $\psi^u_{\tau,\beta}$ (C.38) і завершують доведення по індукції властивості (C.38), оскільки для бази індукції $\psi^u_{\{j\},\varnothing} \equiv 0$.

Оцінка (C.37) доводиться методом індукції по порядку диференціювання β:

$$\frac{d}{dt}\|D_u I\!D^\beta\xi_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} = m_\tau \langle \frac{d}{dt}D_u I\!D^\beta\xi_\tau, (D_u I\!D^\beta\xi_\tau)^{\#}\rangle \leq$$

$$\leq (m_\tau\|B\| + K_{|\tau|,|\beta|})\|D_u I\!D^\beta\xi_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} +$$

$$+ \|F''(\xi^0)D_u\xi^0\, I\!D^\beta\xi_\tau\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} + \tag{C.43}$$

$$+ \sum_{\{\gamma,\sigma\}} t^{|\sigma_0|m_\tau}\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi^0)D_u\xi^0 I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} + \tag{C.44}$$

$$+ \sum_{\{\gamma,\sigma\}}\sum_{j=1}^{\ell} t^{|\sigma_0|m_\tau}\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^0)I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots(D_u I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j})\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}, \tag{C.45}$$

де було використано монотонність F та нерівність (3.42).

Для того, щоб оцінити вираз (C.43) зауважимо, що з властивості (C.7) випливає:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \quad \sup_{t\in[0,T]} |D_u\xi^0_k(t,x^0)| \leq \frac{1}{\sqrt{a_k}}e^{MT/2}(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}. \tag{C.46}$$

Використовуючи (C.46), лему C.5 (C.15) та (C.3), (C.25) при $\varepsilon_0 = 0$, отримаємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \|F''(\xi^0(t))D_u\xi^0(t)I\!D^\beta\xi_\tau(t)\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+2}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq e^{MT/2}(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}\|F''(\xi^0)I\!D^\beta\xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq Ke^{MT/2}(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\|I\!D^\beta\xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq K_R(\omega)(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds)^{1/2}.$$

Вирази (C.44), (C.45) оцінюються за допомогою (C.46), леми C.5, (C.17), індуктивного припущення (C.37) та (C.3), (C.25) при $\varepsilon_0 = 0$.

Остаточно, оцінки (C.43)–(C.45) мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\|D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau\|^{m_\tau} \leq K' \|D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau\|^{m_\tau} + K_R(\omega)(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds)^{m_\tau/2},$$

що, в силу, $D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau|_{t=0} = 0$, приводять до (C.37). База індукції отримується з врахуванням того, що $\psi^u_{\{j\},\varnothing} \equiv 0$. □

В наступній лемі перевіряється властивість 2 означення 4.1 стохастичної похідної, тобто показується, що процес $D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau$, побудований у лемі C.7, є стохастичною похідною по напрямку u від $I\!\!D^\beta \xi_\tau$.

Лема C.8. Нехай вектори $\{c_{\tau,\beta}\} \subset \mathbb{P}$ задовольняють ієрархію (4.19). Тоді для будь-якого $u \in \mathcal{J}_{\mathrm{cyl}}$ розв'язки $I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau$, $D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau$ рівнянь (C.22), (C.35) задовольняють оцінці: $\forall\, R > 0\ \exists\, K_{u,R} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$:

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_0} \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau - I\!\!D^\beta \xi_\tau}{\varepsilon} - D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} \leq \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega) \quad \text{(C.47)}$$

рівномірно по $\max(\|x^0\|_{\ell_2(a)}, \|\widetilde{x}_{\gamma,\varnothing}\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\varnothing})}, \gamma \subseteq \tau) \leq R$.

Доведення. Введемо позначення $\xi_\varnothing = \xi^0(t,x^0)$, $\xi^\varepsilon_\varnothing = \xi^\varepsilon(t,x^0,u)$ і

$$\Delta_{\tau,\beta}(t) = \frac{I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_\tau - I\!\!D^\beta \xi_\tau}{\varepsilon} - D_u I\!\!D^\beta \xi_\tau.$$

Маємо:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_{\tau,\beta}(t)\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} = m_\tau \langle \frac{d}{dt}\Delta_{\tau,\beta}, \Delta^\#_{\tau,\beta} \rangle_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq m_\tau \|B\| \cdot \|\Delta_{\tau,\beta}\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1} c_{\tau,\beta})} - m_\tau \langle \Upsilon, \Delta^\#_{\tau,\beta} \rangle_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1} c_{\tau,\beta})}, \quad \text{(C.48)}$$

де

$$\Upsilon = \frac{1}{\varepsilon}F'(\xi_{\varnothing}^{\cdot})I\!D^{\beta}\xi_{\tau}^{\cdot}\Big|_0^{\varepsilon} - F'(\xi_{\varnothing})D_u I\!D^{\beta}\xi_{\tau} - F''(\xi_{\varnothing})D_u\xi_{\varnothing}I\!D^{\beta}\xi_{\tau}+$$
$$+\sum_{\gamma,\sigma} t^{|\sigma_0|}\delta^{\sigma_0}\{\frac{1}{\varepsilon}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_{\varnothing}^{\cdot})I\!D^{\sigma_1}\zeta_{\gamma_1}^{\cdot}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\zeta_{\gamma_\ell}^{\cdot}\Big|_0^{\varepsilon}-$$
$$-F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi_{\varnothing})D_u\xi_{\varnothing}I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}-$$
$$-\sum_{j=1}^{\ell}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_{\varnothing})I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots(D_u I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j})\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\}$$

і сумування $\sum_{\gamma,\sigma}$ введено в (C.23). Застосуємо формулу

$$f(y_0,\dots,y_\ell) - f(x_0,\dots,x_\ell) = \sum_{j=0}^{\ell}\partial_j f(\vec{x})(y_i - x_i)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell}\int_0^1[\partial_i f(\vec{x}+\lambda(\vec{y}-\vec{x})) - \partial_j f(\vec{x})](y_i - x_i)d\lambda$$

і позначення $\zeta_{\tau}^{\lambda} = \xi_{\tau} + \lambda(\xi_{\tau}^{\varepsilon} - \xi_{\tau})$ з відповідним змістом похідних $I\!D^{\beta}\zeta_{\tau}^{\lambda}$. Запишемо вираз Υ у вигляді:

$$\Upsilon = F'(\xi_{\varnothing})\Delta_{\tau,\beta} + F''(\xi_{\varnothing})\Delta_{\varnothing,\varnothing}I\!D^{\beta}\xi_{\tau}+ \tag{C.49}$$
$$+\int_0^1 F''(\zeta_{\varnothing}^{\cdot})I\!D^{\beta}\zeta_{\tau}^{\cdot}\Big|_0^{\lambda}\frac{\xi_{\varnothing}^{\varepsilon}-\xi_{\varnothing}}{\varepsilon}d\lambda + \int_0^1 F'(\zeta_{\varnothing}^{\cdot})\Big|_0^{\lambda}\frac{I\!D^{\beta}\xi_{\tau}^{\varepsilon} - I\!D^{\beta}\xi_{\tau}}{\varepsilon}d\lambda+ \tag{C.50}$$
$$+\sum_{\gamma,\sigma} t^{|\sigma_0|}\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi_{\varnothing})\Delta_{\varnothing,\varnothing}I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}+ \tag{C.51}$$
$$+\sum_{\gamma,\sigma}\sum_{j=1}^{\ell}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_{\varnothing})I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots(\Delta_{\gamma_j,\sigma_j})\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}+ \tag{C.52}$$
$$+\sum_{\gamma,\sigma}\int_0^1 F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\zeta_{\varnothing}^{\cdot})I\!D^{\sigma_1}\zeta_{\gamma_1}^{\cdot}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\zeta_{\gamma_\ell}^{\cdot}\Big|_0^{\lambda}\frac{\xi_{\varnothing}^{\varepsilon}-\xi_{\varnothing}}{\varepsilon}d\lambda+ \tag{C.53}$$

$$+\sum_{\gamma,\sigma}\sum_{j=1}^{\ell}\int_0^1 F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\zeta_\varnothing^{\cdot})I\!D^{\sigma_1}\zeta_{\gamma_1}^{\cdot}\dots(\frac{I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}^{\varepsilon}-I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}}{\varepsilon})\dots I\!D^{\sigma_\ell}\zeta_{\gamma_\ell}^{\cdot}\Big|_0^\lambda d\lambda. \tag{C.54}$$

Застосовуючи монотонність відображення $F\colon\ F'\geq 0$, отримаємо оцінку на (C.48):

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_{\tau,\beta}(t)\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}\leq\big(m_\tau\|B\|+\mathrm{const}\big)\|\Delta_{\tau,\beta}(t)\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}+$$
$$+\|(\text{C.49})_2\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}+\dots+\|(\text{C.54})\|^{m_\tau}_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}, \tag{C.55}$$

де для другого члена в (C.49) використано позначення $(\text{C.49})_2$.

Оцінимо послідовно всі вирази в (C.55). Для того, щоб оцінити $(\text{C.49})_2$, застосуємо координатну форму нерівності (C.12):

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}^d\quad \sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T]}|\Delta_{k,\varnothing,\varnothing}(t)|\leq\varepsilon_0 a_k^{-\frac{\varkappa+2}{2}}K_{u,R}(\omega) \tag{C.56}$$

і лему C.5, (C.15):

$$\|(\text{C.49})_2\|=\|F''(\xi_\varnothing)\Delta_{\varnothing,\varnothing}I\!D^\beta\xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}\leq$$
$$\leq\varepsilon_0 K_{u,R}(\omega)\|F''(\xi_\varnothing)I\!D^\beta\xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}\leq \tag{C.57}$$
$$\leq\varepsilon_0 K'_{u,R}(\omega)(1+\|\xi_\varnothing\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\|I\!D^\beta\xi_\tau\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\leq\varepsilon_0 K_{u,R}(\omega). \tag{C.58}$$

На останньому кроці також використано (C.3) і (C.25) при $\varepsilon_0=0$.

Оцінка виразу $(\text{C.50})_1$ проводиться аналогічно з використанням координатної форми нерівності (C.2) з $x^0=y^0$ і $u^2=0$:

$$\|(\text{C.50})_1\|\leq\sup_{\lambda\in[0,1]}\|F''(\zeta^{\cdot})I\!D^\beta\zeta_\tau^{\cdot}\Big|_0^\lambda\frac{\xi_\varnothing^\varepsilon-\xi_\varnothing}{\varepsilon}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}\leq$$
$$\leq e^{MT/2}(\int_0^T\|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}\|F''(\zeta_\varnothing^{\cdot})I\!D^\beta\zeta_\tau^{\cdot}\Big|_0^\lambda\|_{\ell_{m_\tau}(a^{(\varkappa+1)m_1}c_{\tau,\beta})}\leq$$
$$\leq Ke^{MT/2}(\int_0^T\|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}(1+\|\xi_\varnothing\|_{\ell_2(a)}+\|\zeta_\varnothing^\lambda\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\times$$

$$\times (1 + \|I\!D^{\beta}\xi_{\tau}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} + \|I\!D^{\beta}\zeta^{\lambda}_{\tau}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})})\times$$
$$\times \{\|\zeta^{\lambda}_{\varnothing} - \xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)} + \|I\!D^{\beta}\zeta^{\lambda}_{\tau} - I\!D^{\beta}\xi_{\tau}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})}\} \le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega). \quad \text{(C.59)}$$

Вище були використані лема C.5, (C.15), (C.16), оцінки (C.2), (C.3) і властивості (C.25), (C.26) з $x^0 = y^0$.

Оцінка виразу $(\text{C.50})_2$ випливає з леми C.5, (C.15):

$$\|(\text{C.50})_2\| \le \sup_{\lambda\in[0,1]} \|F'(\zeta^{\cdot}_{\varnothing})\Big|_0^{\lambda} \frac{I\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau} - I\!D^{\beta}\xi_{\tau}}{\varepsilon}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le \sup_{\lambda\in[0,1]} K\|\zeta^{\lambda}_{\varnothing} - \xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)}(1 + \|\zeta^{\lambda}_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)} + \|\xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa}\times$$
$$\times \|\frac{I\!D^{\beta}\xi^{\varepsilon}_{\tau} - I\!D^{\beta}\xi_{\tau}}{\varepsilon}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega), \quad \text{(C.60)}$$

де на останньому кроці застосовано (C.2), (C.3) і (C.26) з $x^0 = y^0$. Для оцінки кожного з членів в (C.51) застосуємо лему C.5, (C.17) і (C.56):

$$\|(\text{C.51})\| = \|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi_{\varnothing})\Delta_{\varnothing,\varnothing}I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega)\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\xi_{\varnothing})I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega)(1 + \|\xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\prod_{j=1}^{\ell}(1 + \|I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}) \le \varepsilon_0 K'_{u,R}(\omega).$$
$$\text{(C.61)}$$

Вище було використано (3.10), (3.11), (C.25), нерівність між нормами $\|\cdot\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le \|\cdot\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}$, і те, що вага $\{a^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}c_{\gamma,\sigma}\}_{\gamma\subseteq\tau,\sigma\subseteq\beta}$ задовольняє ієрархію (4.19).

Оцінка виразу (C.52) проводиться з використанням леми C.5, (C.17) та індуктивного припущення (C.47) для $\{\gamma,\sigma\} \subseteq \{\tau,\beta\}$:

$$\|(\text{C.52})\| = \|F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi_{\varnothing})I\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots(\Delta_{\gamma_j,\sigma_j})\dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\tau,\beta})} \le$$
$$\le K(1 + \|\xi_{\varnothing}\|)^{\varkappa+1}\|\Delta_{\gamma_j,\sigma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\gamma_j,\sigma_j})}\times$$

$$\times \prod_{i=1, i\neq j}^{\ell} (1 + \|I\!D^{\sigma_i} \xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2} m_1} c_{\gamma_i,\sigma_i})}) \leq \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega). \tag{C.62}$$

Вище також було застосовано (3.10), (3.11) і (C.25).

Вираз (C.53) оцінюється за допомогою леми C.5, (C.17) з використанням координатної форми нерівності (C.2) при $x^0 = y^0$, $u^2 = 0$:

$$\|(C.53)\| \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \|F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\zeta^{\cdot}_{\varnothing}) I\!D^{\sigma_1}\zeta^{\cdot}_{\gamma_1} \dots I\!D^{\sigma_\ell}\zeta^{\cdot}_{\gamma_\ell}\Big|_0^\lambda \frac{\xi^{\varepsilon}_{\varnothing} - \xi_{\varnothing}}{\varepsilon}\|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2} m_1} c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq e^{MT/2}(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds)^{1/2} \sup_{\lambda\in[0,1]} \|F^{(\ell+|\sigma_0|+1)}(\zeta^{\cdot}_{\varnothing}) \times$$

$$\times I\!D^{\sigma_1}\zeta^{\cdot}_{\gamma_1} \dots I\!D^{\sigma_\ell}\xi^{\cdot}_{\gamma_\ell}\Big|_0^\lambda \|_{\ell_{m_\tau}(a^{(\varkappa+1)m_1} c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq K e^{MT/2}(\int_0^T \|u_s\|^2_{\ell_2(a)} ds)^{1/2} \sup_{\lambda\in[0,1]} (1 + \|\zeta^{\lambda}_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)} + \|\xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} (1 + \|I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(a^{(\varkappa+1)m_1} c_{\gamma_j,\sigma_j})} + \|I\!D^{\sigma_j}\zeta_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(a^{(\varkappa+1)m_1} c_{\gamma_j,\sigma_j})}) \times$$

$$\times \{\|\zeta^{\lambda}_{\varnothing} - \xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)} + \sum_{j=1}^{\ell} \|I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j} - I\!D^{\sigma_j}\zeta^{\lambda}_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(a^{(\varkappa+1)m_1} c_{\gamma_j,\sigma_j})}\} \leq \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega). \tag{C.63}$$

Вище було використано (C.2), (C.3), (C.25), (C.26) і нерівність між нормами $\|\cdot\|_{\ell_{m_\gamma}(a^{(\varkappa+1)m_1} c_{\gamma,\sigma})} \leq \|\cdot\|_{\ell_{m_\gamma}(a^{\frac{\varkappa+1}{2} m_1} c_{\gamma,\sigma})}$.

Нарешті, оцінка виразу (C.54) випливає з леми C.5, (C.17) і нерівності (C.26) з $x^0 = y^0$ и $u^2 = 0$:

$$\|(C.54)\| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \|F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\zeta^{\cdot}_{\varnothing}) I\!D^{\sigma_1}\zeta^{\cdot}_{\gamma_1} \dots \frac{I\!D^{\sigma_j}\xi^{\varepsilon}_{\gamma_j} - I\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}}{\varepsilon} \dots I\!D^{\sigma_\ell}\zeta^{\cdot}_{\gamma_\ell}\Big|_0^\lambda \|_{\ell_{m_\tau}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2} m_1} c_{\tau,\beta})} \leq$$

$$\leq K \sup_{\lambda\in[0,1]} (1 + \|\zeta^{\lambda}_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)} + \|\xi_{\varnothing}\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1} \times$$

$$\times \prod_{i=1, i\neq j}^{\ell} (1 + \|I\!\!D^{\sigma_i}\zeta^\lambda_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\gamma_i,\sigma_i})} + \|I\!\!D^{\sigma_i}\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\gamma_i,\sigma_i})})\times$$
$$\times \{\|\zeta^\lambda_\varnothing - \xi_\varnothing\|_{\ell_2(a)} + \sum_{i=1, i\neq j}^{\ell} \|I\!\!D^{\sigma_i}\zeta^\lambda_{\gamma_i} - I\!\!D^{\sigma_i}\xi_{\gamma_i}\|_{\ell_{m_{\gamma_i}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\gamma_i,\sigma_i})}\}\times$$
$$\times \|\frac{I\!\!D^{\sigma_j}\xi^\varepsilon_{\gamma_j} - I\!\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}}{\varepsilon}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(a^{\frac{2\varkappa+3}{2}m_1}c_{\gamma_j,\sigma_j})} \le \varepsilon_0 K_{u,R}(\omega), \tag{C.64}$$

де на останньому кроці було використано (C.2), (C.3) і (C.25), (C.26). Підставляючи оцінки (C.58)–(C.64) в (C.55) і застосовуючи $\Delta_{\tau,\beta}|_{t=0} = 0$, остаточно отримаємо (C.47. □

Для завершення доведення теореми 4.4 залишилось перевірити умову 3 в означенні 4.1 стохастичної похідної та довести оцінку (4.20).

Лема C.9. $\forall\, x^0 \in \ell_2(a)\, \forall\, u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}\, \forall\, k \in \mathbb{Z}^d,\ \tau, \beta \subset \mathbb{Z}^d$ координати розв'язків рівняння (C.22) задовольняють властивість

$$I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}(t, x^0) \in \mathcal{D}_{loc}(\Omega), \quad \forall\, |\beta| \ge 0,\ |\tau| \ge 1,\ t \in [0, T].$$

Крім того, $\forall\, j \in \mathbb{Z}^d$ похідна $D_{\Gamma e_j} I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}$ в напрямку Γe_j (4.13) співпадає з координатою сильного розв'язку $I\!\!D^{\beta\cup\{j\}}\xi_{k,\tau}$ рівняння (C.22) і виконана оцінка (4.20).

Доведення. З (C.47) випливає

$$\lim_{|\varepsilon|\to 0} \mathbf{E} \sup_{t\in[0,T]} |\frac{I\!\!D^\beta \xi^\varepsilon_{k,\tau} - I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}}{\varepsilon} - D_u I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}|^p = 0, \quad \forall\, p \ge 1,\ k \in \mathbb{Z}^d. \tag{C.65}$$

Використовуючи координатну форму нерівностей (C.25) і (C.37), які забезпечують належність всіх об'єктів до $\cap_{p\ge 1} L^p(\Omega, \mathbf{P})$, отримаємо, що $D_u I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}(t, x^0)$ є похідною $I\!\!D^\beta \xi_{k,\tau}(t, x^0)$ в сенсі означення 4.1 при $u \in \mathcal{J}_{\rm cyl}$.

Представлення (C.9), (C.36) та індуктивне застосування представлення (C.40) дають

$$D_u I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0,\omega)=\int_0^t\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}[V_{x^0}^{\tau,\beta}(t,s)]_{kj}u_{j,s}ds$$

з деякою $\mathcal{F}_t$-адаптованою функцією $[V_{x^0}^{\tau,\beta}(t,s)]_{kj},\ 0\le s\le t$. Координатна форма оцінки (C.37)

$$\forall\, u\in\mathcal{J}_{\rm cyl}\quad |D_u I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0)|\le\frac{K_R(\omega)}{a_k^{\frac{\varkappa+2}{2}|\tau|}c_{k;\tau,\beta}^{1/m_\tau}}(\int_0^t\|u_s\|^2_{\ell_2(a)}ds)^{1/2}$$

означає, що

$$\int_0^t\|\,[V_{x^0}^{\tau,\beta}(t,s)]_{k\cdot}\|^2_{\ell_2(a^{-1})}ds\le\frac{K_R(\omega)}{a_k^{\frac{\varkappa+2}{2}|\tau|}c_{\tau,\beta}^{1/m_\tau}}.$$

Тому, для $\mathbf{D}_j I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0)\overset{df}{=}\int_0^{\cdot}\chi_{s\le t}[V_{x^0}^{\tau,\beta}(t,s)]_{kj}ds$ маємо

$$\|\mathbf{D}_j I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0)\|^2_{\mathcal{H}}=\int_0^t|\,[V_{x^0}^{\tau,\beta}(t,s)]_{kj}|^2ds\le\frac{a_jK_R(\omega)}{a_k^{\frac{\varkappa+2}{2}|\tau|}c_{k;\tau,\beta}^{1/m_\tau}},$$

що дає представлення (4.3) в формі

$$D_u I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0)=\sum_{j\in\Lambda_u}\langle\,\mathbf{D}_j I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0),\int_0^{\cdot}u_{s,j}ds\,\rangle_{\mathcal{H}}$$

з $\mathbf{D}_j I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}(t,x^0)\in\cap_{p\ge1}L^p(\Omega,\mathbf{P},\mathcal{H})$. З цього випливає $I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}\in\mathcal{D}_{loc}(\Omega)$.

Вибираючи $u=\Gamma e_j\in\mathcal{J}_{\rm cyl}$ в (C.65) і застосовуючи $D_u\xi_k^0(t,x^0)=t\delta_k^j$ (4.10) до коефіцієнтів рівняння (C.35), отримаємо властивість $D_{\Gamma e_j}I\!\!D^{\beta}\xi_{k,\tau}=I\!\!D^{\beta\cup\{j\}}\xi_{k,\tau}$. При цьому сильний розв'язок (C.22) розуміється в довільному просторі $\ell_{m_\tau}(z^n c_{\tau,\beta})$, $n\in\mathbb{N}$, при $z_k=a_k^{\frac{\varkappa+1}{2}m_1}$, оскільки початкові дані $\widetilde{x}_{\tau,\beta}\in\bigcap_{p\ge1,c\in\mathbb{P}}\ell_p(c)$.

Щоб отримати оцінку (4.20), використаємо представлення (C.28), властивість (C.29) і лему C.5 (C.17):

$$\|I\!\!D^{\beta}\xi_\tau(t,x^0)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\le te^{Mt}\sup_{s\in[0,T]}\|\varphi_{\tau,\beta}(s,x^0)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\le$$

$$\leq e^{Mt}\sum_{\gamma,\sigma} t^{|\sigma_0|+1}\|\delta^{\sigma_0}F^{(\ell+|\sigma_0|)}(\xi^0)I\!\!D^{\sigma_1}\xi_{\gamma_1}\dots I\!\!D^{\sigma_\ell}\xi_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\beta})}\leq$$

$$\leq Ke^{Mt}\sum_{\gamma,\sigma} t^{|\sigma_0|+1}(1+\|\xi^0\|_{\ell_2(a)})^{\varkappa+1}\prod_{j=1}^{\ell}(1+\|I\!\!D^{\sigma_j}\xi_{\gamma_j}\|_{\ell_{m_{\gamma_j}}(c_{\gamma_j,\sigma_j})}), \quad (C.66)$$

де сумування $\sum\limits_{\gamma,\sigma}$ було введено в (4.18).

Індуктивна перевірка (C.66). Припустимо, що $\forall\,\sigma\subset\beta,\ |\sigma|<|\beta|$ нерівність (4.20) доведена. Тоді в силу (3.10), (3.11) та індуктивного припущення маємо:

$$\forall\,t\in[0,T]\quad (C.66)\leq e^{Mt}K_R(\omega)\sum_{\gamma,\sigma} t^{|\sigma_0|+1}\,t^{\sum_{j=1}^{\ell}(|\sigma_j|+1)}\leq e^{Mt}K_R(\omega)t^{|\beta|+1},$$

оскільки $|\sigma_0|+\sum\limits_{j=1}^{\ell}|\sigma_j|=|\beta|$.

Для завершення доведення необхідно перевірити базу індукції при $|\beta|=1$. По лемі C.5, (C.15) отримаємо

$$\|I\!\!D^k\xi_\tau(t)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\{k\}})}\leq te^{Mt}\sup_{s\in[0,T]}\|\varphi_{\tau,\{k\}}(s)\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\{k\}})}\leq$$

$$\leq te^{Mt}\sup_{s\in[0,T]}\|\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ell\geq 2} s\delta^{\{k\}}F^{(\ell+1)}(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots\xi_{\gamma_\ell}+s\delta^{\{k\}}F''(\xi^0)\xi_\tau+$$

$$+\sum_{\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_\ell=\tau,\ell\geq 2}\sum_{j=1}^{\ell}F^{(\ell)}(\xi^0)\xi_{\gamma_1}\dots(I\!\!D^k\xi_{\gamma_j})\dots\xi_{\gamma_\ell}\|_{\ell_{m_\tau}(c_{\tau,\{k\}})}\leq$$

$$\leq t^2K_R(\omega)\sum_{\gamma\subseteq\tau}\|\xi_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\varnothing})}+tK_R(\omega)\sum_{\gamma\subseteq\tau,\gamma\neq\tau}\|I\!\!D^k\xi_\gamma\|_{\ell_{m_\gamma}(c_{\gamma,\{k\}})}. \quad (C.67)$$

При $\tau=\{j\},\ j\in\mathbb{Z}^d$, тобто $|\tau|=1$, і з (C.67) маємо

$$\|I\!\!D^k\xi_{\{j\}}(t,x^0)\|_{\ell_{m_1}(c_{\{j\},\{k\}})}\leq t^2K_R(\omega).$$

Ітеруючи (C.67) по $|\tau|\geq 1$, отримаємо базу індукції (4.20) при $|\beta|=1$. $\square$

Додаток D

ДОПОМІЖНІ ЛЕМИ ДО РОЗДІЛУ 5

Лема D.1 (лема 5.8)**.** Мають місце наступні оцінки

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon))-\rho^2(o,x)}{\varepsilon}\le$$
$$\le\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell+\int_0^\varepsilon\int_0^1\Big|\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2\Big|d\ell\,ds, \tag{D.1}$$

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon))+\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,-\varepsilon))-2\rho^2(o,x)}{\varepsilon^2}\le$$
$$\le\int\limits_0^1\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell+\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon\int_0^1\Big|\frac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot\gamma(\ell,s)|^2\Big|d\ell\,ds, \tag{D.2}$$

де використано позначення $\dot\gamma(\ell,s)=\dfrac{\partial}{\partial\ell}\gamma(\ell,s)$.

Члени у правій частині (D.1)-(D.2) мають наступний вигляд у термінах поля H:

$$\frac{\partial}{\partial s}|\dot\gamma(\ell,s)|^2=2\,\langle\,\dot\gamma,\nabla H[\dot\gamma]\rangle, \tag{D.3}$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2=|\nabla H[\dot\gamma]\,|^2-\,\langle\,\dot\gamma,R(H,\dot\gamma)H\rangle+\,\langle\,\dot\gamma,\nabla(\nabla_H H)[\dot\gamma]\rangle, \tag{D.4}$$

Третя похідна має представлення $\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot\gamma(\ell,s)|^2=\langle\,\dot\gamma,\mathcal{D}[\dot\gamma]\rangle$ з виразом $\mathcal{D}$, що залежить від поля H, його третьої коваріантної похідної та від тензора кривини і його коваріантної похідної.

Доведення. Застосуємо (5.44) з $N = M \times M$, $X = H^I \otimes H^{II}$ та функцією $f(z) = \rho(o,x)$, застосовуючи позначення $z = (o,x)$. Використовуючи властивість мінімальності геодезичної, тобто те, що крива $\gamma(\ell,s)$ довша за геодезичну з $\gamma(0,s)$ до $\gamma(1,s)$, оцінимо вирази в (5.45) зверху

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon)) - \rho^2(o,x)}{\varepsilon} \le \frac{\int_0^1 |\dot\gamma(\ell,\varepsilon)|^2 d\ell - \int_0^1 |\dot\gamma(\ell,0)|^2 d\ell}{\varepsilon}, \tag{D.5}$$

$$\frac{\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon)) + \rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,-\varepsilon)) - 2\rho^2(o,x)}{\varepsilon^2} \le$$
$$\le \frac{\int_0^1 |\dot\gamma(\ell,\varepsilon)|^2 d\ell + \int_0^1 |\dot\gamma(\ell,-\varepsilon)|^2 d\ell - 2\int_0^1 |\dot\gamma(\ell,0)|^2 d\ell}{\varepsilon^2}. \tag{D.6}$$

Нехай $h(s) = \int_0^1 |\dot\gamma(\ell,s)|^2 d\ell$, тоді з оцінок

$$h(\varepsilon) - h(0) = \int_0^\varepsilon h'(s)ds = \varepsilon h'(0) + \int_0^\varepsilon [h'(s) - h'(0)]ds =$$
$$= \varepsilon h'(0) + \int_0^\varepsilon \int_0^s h''(\tau)\,d\tau\,ds = \varepsilon h'(0) + \int_0^\varepsilon \int_{\varepsilon-\tau}^\varepsilon h''(\tau) ds\,d\tau =$$
$$= \varepsilon h'(0) + \int_0^\varepsilon \tau h''(\tau) d\tau \le \varepsilon(h'(0) + \int_0^\varepsilon |h''(\tau)| d\tau),$$
$$h(s) + h(-s) - 2h(0) = \int_0^\varepsilon h'(s)ds - \int_{-\varepsilon}^0 h'(s)ds = \int_0^\varepsilon (h'(s) - h'(-s))ds =$$
$$= \int_0^\varepsilon [\int_{-s}^s h''(\tau)d\tau]ds = \varepsilon^2 h''(0) + \int_0^\varepsilon (\int_{-s}^s [h''(\tau) - h''(0)]d\tau)ds \le$$
$$\le \varepsilon h''(0) + \int_0^\varepsilon (\int_{-s}^s \{\int_0^\tau |h'''(\delta)|d\delta\}d\tau)ds \le \varepsilon^2 (h''(0) + \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon |h'''(\delta)|d\delta),$$

враховуючи (D.5)-(D.6) маємо (D.1)-(D.2). Обчислимо вирази $\frac{\partial^m}{\partial s^m}|\dot\gamma(\ell,s)|^2$ в (D.1) та (D.2). Не порушуючи загальності можемо вважати, що для довільного ℓ і досить малих $\delta(\ell)$ крива $\{\gamma(\ell,z)\}_{z\in(-\delta(\ell),\delta(\ell))}$ повністю лежить у деякому координатному околі U в якому вибрані локальні координати (x^i). В цих координатах співвідношення (5.47) має інтегральну форму

$$\gamma^i(\ell,s) = \gamma^i(\ell) + \int_0^s H^i(\gamma(\ell,z))dz \tag{D.7}$$

з початковою точкою $\gamma(\ell)$ на геодезичній, яка виходить з o і в x. Тому

$$\dot\gamma^i(\ell,s)=\dot\gamma^i(\ell)+\int_0^s\partial_k H^i(\gamma(\ell,z))\dot\gamma^k(\ell,z)dz$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\dot\gamma^i(\ell,s)=\partial_k H^i(\gamma(\ell,s))\dot\gamma^k(\ell,s)=(\nabla_k H^i-\Gamma_{k\ h}^{\ i}H^h)\dot\gamma^k(\ell,s). \tag{D.8}$$

Враховуючи це, формулу (5.47) та співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \ell}\gamma^i(\ell,s)=\frac{\partial}{\partial \ell}\frac{\partial}{\partial s}\gamma^i(\ell,s),$$

а також автопаралельну властивість ріманової зв'язності:

$$\partial_k g_{mn}(x)=g_{hn}\Gamma_{k\ m}^{\ h}+g_{mh}\Gamma_{k\ n}^{\ h} \tag{D.9}$$

маємо (D.3):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}|\dot\gamma(\ell,s)|^2&=\frac{\partial}{\partial s}[g_{ij}(\gamma(\ell,s))\dot\gamma^i(\ell,s)\dot\gamma^j(\ell,s)]=\\&=\partial_k g_{ij}\frac{\partial}{\partial s}\gamma^k\cdot\dot\gamma^i\dot\gamma^j+2g_{ij}\dot\gamma^i\frac{\partial}{\partial s}\dot\gamma^j=\\&=2g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k H^j)\dot\gamma^k=2\,\langle\,\dot\gamma,\nabla H[\dot\gamma]\,\rangle.\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2=\frac{\partial}{\partial s}\,\langle\,\dot\gamma(\ell,s),\nabla H[\dot\gamma(\ell,s)]\,\rangle=\frac{\partial}{\partial s}\{\,g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i[\nabla_k H^j(\gamma)]\dot\gamma^k\,\}=\\&=\partial_m g_{ij}(\gamma)H^m\dot\gamma^i[\nabla_k H^j(\gamma)]\dot\gamma^k+g_{ij}\{\,(\nabla_m H^i-\Gamma_{m\ h}^{\ i})\dot\gamma^m\,\}[\nabla_k H^j(\gamma)]\dot\gamma^k+\\&+g_{ij}\dot\gamma^i[\partial_m\nabla_k H^j(\gamma)\cdot H^m(\gamma)]\dot\gamma^k+g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i[\nabla_k H^j(\gamma)]\{\,(\nabla_m H^k-\Gamma_{m\ h}^{\ k})\dot\gamma^m\,\},\end{aligned}$$

де, після диференціювання добутку, підставлено співвідношення (5.47) та (D.8). Застосовуючи властивість (D.9), перетворюючи частинну похідну $\partial_m\nabla_k H^j$ у коваріантну $\nabla_m\nabla_k H^j$ та скорочуючи доданки зі зв'язністю Γ, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2&=g_{ij}(\nabla_m H^i)\dot\gamma^m(\nabla_k H^j)\dot\gamma^k+\\&+g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_m\nabla_k H^j)H^m\dot\gamma^k+g_{ij}(\gamma)\dot\gamma^i(\nabla_k H^j)(\nabla_m H^k)\dot\gamma^m.\end{aligned}$$

Після комутації коваріантних похідних у другому доданку $\nabla_m\nabla_k H^j = \nabla_k\nabla_m H^j + R_{h\ km}^{\ j}H^h$ отримаємо:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}|\dot\gamma(\ell,s)|^2 = |\nabla H[\dot\gamma]\,|^2 + g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k\nabla_m H^j + R_{h\ km}^{\ j}H^h)H^m\dot\gamma^k +$$
$$+ g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k H^j)(\nabla_m H^k)\dot\gamma^m = |\nabla H[\dot\gamma]\,|^2 - \langle\,\dot\gamma, R(H,\dot\gamma)H\,\rangle +$$
$$+ g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k\nabla_m H^j)H^m\dot\gamma^k + g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k H^j)(\nabla_m H^k)\dot\gamma^m$$

з оператором кривини $R(H,\dot\gamma)$. Оскільки третій та четвертий доданки дорівнюють

$$g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_m\nabla_k H^j)H^k\dot\gamma^m + g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_k H^j)(\nabla_m H^k)\dot\gamma^m = g_{ij}\dot\gamma^i(\nabla_m\{H^k\nabla_k H^j\})\dot\gamma^m,$$

це приводить до (D.4). Виконуючи аналогічні обчислення для похідних третього порядку $\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}|\dot\gamma(\ell,s)|^2$ матимемо, що вони залежать від поля H та його коваріантних похідних до третього порядку та від тензору кривини R і його коваріантної похідної. □

Лема D.2. (лема 5.10.) Нехай P є додатною монотонною поліноміальною функцією на півосі $\mathbb{R}_+$, такою, що

$$\exists\, C \;\; \forall\, z \geq 0 \quad (1+z)P'(z) \leq C\,P(z), \quad (1+z)|P''(z)| \leq C\,P'(z).$$

За умов (5.36)–(5.37) існує така стала K_P, що для довільного околу U процес

$$P(\rho^2(o,\xi_t^U(x))) - K_P\int_0^t P(\rho^2(o,\xi_s^U(x)))ds \tag{D.10}$$

є інтегрованим супермартингалом. Більш того, для розв'язку ξ_t^x задачі (5.1) має місце оцінка

$$\mathbf{E}\,P(\rho^2(o,\xi_t^x)) \leq e^{K_P t}P(\rho^2(o,x)) \tag{D.11}$$

і процес

$$P(\rho^2(o,\xi_t^x)) - K_P\int_0^t P(\rho^2(o,\xi_s^x))ds \tag{D.12}$$

є супермартингалом.

Доведення. Доведення цього факту проводиться аналогічно теоремі 5.6 з використанням наступних міркувань, що замінюються оцінки (D.1) та (D.2):

$$\frac{P(\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon)))-P(\rho^2(o,x))}{\varepsilon}\le\frac{P(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,\varepsilon)|^2d\ell)-P(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,0)|^2d\ell)}{\varepsilon}\le$$
$$\le\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}P(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell)+\int_0^\varepsilon\Big|\frac{\partial^2}{\partial s^2}P\Big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big)\Big|ds=$$
$$=P'(\rho^2(o,x))\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell+\int_0^\varepsilon J_P(\dot\gamma_s)ds,\tag{D.13}$$

де $J_P(\dot\gamma_s)=\Big|\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}P\Big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big)\Big|$. Аналогічно

$$\frac{P\big(\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,\varepsilon))\big)+P\big(\rho^2(\gamma(0,\varepsilon),\gamma(1,-\varepsilon))\big)-2P(\rho^2(o,x))}{\varepsilon^2}\le$$
$$\le\frac{P\big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,\varepsilon)|^2d\ell\big)+P\big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,-\varepsilon)|^2d\ell\big)-2P\big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,0)|^2d\ell\big)}{\varepsilon^2}\le$$
$$\le\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}P\Big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big)+\frac12\int_0^\varepsilon\Big|\frac{\partial^3}{\partial s^3}P\Big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big)\Big|ds=$$
$$=P'(\rho^2(o,x))\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell+$$
$$+P''(\rho^2(o,x))\Big[\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big]^2+\int_0^\varepsilon\frac12\Big|\frac{\partial^3}{\partial s^3}P\Big(\int_0^1|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell\Big)\Big|ds,\tag{D.14}$$

По відношенню до доведення теореми 5.6, див. (5.49), виникає додатковий член з множником P''. Для його оцінювання використаємо наступну нерівність:

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2d\ell=2\int_0^1\langle\,\nabla(\ell A_\alpha)[\dot\gamma],\dot\gamma\,\rangle\,d\ell=$$
$$=2\int_0^1\langle\,A_\alpha+\ell\nabla A_\alpha[\dot\gamma],\dot\gamma\,\rangle\,d\ell\le2\Big(\int_0^1\big|A_\alpha+\ell\nabla A_\alpha[\dot\gamma]\big|^2d\ell\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1|\dot\gamma|^2d\ell\Big)^{1/2}.$$

Крім того, в силу $\int_0^1 |\dot\gamma(\ell,o)|^2 d\ell = \rho^2(o,x)$, маємо:

$$P''(\rho^2(o,x))\Big[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}|\dot\gamma(\ell,s)|^2 d\ell\Big]^2 \le$$
$$\le 4\big|P''(\rho^2(o,x))\big|\,\rho^2(o,x)\int_0^1 \big|A_\alpha + \ell\nabla A_\alpha[\dot\gamma]\,\big|^2 d\ell \le$$
$$\le 8C\,P'(\rho^2(o,x))\int_0^1 \big(|A_\alpha|^2 + \ell^2|\nabla A_\alpha[\dot\gamma]\,|^2\big)\,d\ell.$$

Застосування, як раніше, умов коерцитивності та дисипативності (5.36)-(5.37) дає можливість оцінити вирази (D.13) та (D.14):

$$(\text{D.13}) + (\text{D.14}) \le P'(\rho^2(o,x))\cdot K(1+\rho^2(o,x)) + \int_0^\varepsilon \{J_P(\dot\gamma_s) + N_P(\dot\gamma_s)\}ds \le$$
$$\le KC\,P(\rho^2(o,x)) + \int_0^\varepsilon \{J_P(\dot\gamma_s) + N_P(\dot\gamma_s)\}ds,$$

де $N_p(\dot\gamma_s) = \frac{1}{2}\Big|\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}P\big(\int_0^1 |\dot\gamma(\ell,s)|^2 d\ell\big)\,\Big|$. Отже (5.53) набуває вигляду:

$$\Big\{\frac{P(\rho^2(o,\gamma_0(1,\varepsilon))) - P(\rho^2(o,x))}{\varepsilon} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{P(\rho^2(o,\gamma_\alpha(1,\varepsilon))) + P(\rho^2(o,\gamma_\alpha(1,-\varepsilon))) - 2P(\rho^2(o,x))}{\varepsilon^2}\Big\} \le$$
$$\le KC\,P(\rho^2(o,x)) + \varepsilon \sup_{\gamma_s\subset Z_{\psi,o,\delta}}\{J_P(\dot\gamma_s) + N_P(\dot\gamma_s)\}. \qquad (\text{D.15})$$

Аналогічно доведенню леми 5.7, прямуючи $\varepsilon \to 0+$ отримаємо оцінку:

$$\int_M (\mathcal{L}^*\psi(x))P(\rho^2(o,x))d\sigma(x) \le K_P\int_M \psi(x)P(\rho^2(o,x))d\sigma(x). \qquad (\text{D.16})$$

Продовжуючи далі міркування як у лемі 5.9, отримаємо, що процес (D.10) є супермартингалом, зокрема має місце оцінка:

$$\mathbf{E}\,P(\rho^2(o,y^U_{t\wedge\tau^U}(x))) \le e^{K_P t}P(\rho^2(o,x)). \qquad (\text{D.17})$$

Розглянемо вимірну множину $V_n(t) = \{\omega\colon\ \forall\, s\in[0,t]\ \xi^x_t(\omega)\in U_n\,\}$. Тоді $\xi^x_t(\omega) = \xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x,\omega)$ для всіх $\omega\in V_n(t)$, і з (D.17) випливає:

$$\mathbf{E}\,1_{V_n(t)}P(\rho^2(o,\xi^x_t(x))) \le \mathbf{E}P(\rho^2(o,\xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x))) \le e^{K_P t}P(\rho^2(o,x)). \quad (\text{D.18})$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \tau^{U_n}(\omega) = \infty$, див. (5.63), послідовність множин $V_n(t)$ є зростаючою і вичерпує весь ймовірнісний простір, отже $\underline{\lim}_{n\to\infty} 1_{V_n(t)}(\omega) = 1$ м.в. Застосування леми Фату до лівої частини (D.18) дає:

$$\mathbf{E}\, P(\rho^2(o, \xi_t^x(x))) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E} P(\rho^2(o, \xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x))) \le e^{K_P t} P(\rho^2(o,x)),$$

що приводить до оцінки (D.11). Щоб перевірити, що процес (D.12) є супермартингалом, необхідно застосувати супермартингальну властивість для скінченних моментів зупинки $S = s\wedge\tau^U$ and $T = t\wedge\tau^U$ (див., наприклад, [19, розділ VI, §2]) до супермартингалу (D.10). Отримаємо, що процес

$$\theta_t^n = P(\rho^2(o, \xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}})) - K_P\int_0^{t\wedge\tau^{U_n}} P(\rho^2(o,\xi^{U_n}_{s\wedge\tau^{U_n}}))ds$$

є супермартингалом, тобто для всіх $0\le s\le t$ та $A\in\mathcal{F}_s$

$$\mathbf{E}\,\theta_t^n 1_A \le \mathbf{E}\,\theta_s^n 1_A. \tag{D.19}$$

Оскільки для всіх $\omega\in V_n(t)$ та $s\in[0,t]$ процес θ_t^n співпадає з граничним процесом

$$\theta_s^n(\omega) = \theta_s^\infty(\omega) \stackrel{def}{=} P(\rho^2(o,\xi_t^x(\omega))) - K_P\int_0^s P(\rho^2(o,\xi_s^x(\omega)))ds,$$

можемо замінити θ_s^n на θ_s^∞, $s\in[0,t]$, на множині $V_n(t)$ в наступних міркуваннях:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(1_{V_n(t)}\theta_t^\infty + (1-1_{V_n(t)})\theta_t^n\right)1_A = \mathbf{E}\theta_t^n 1_A \le \mathbf{E}\theta_s^n 1_A = \\ = \mathbf{E}\left(1_{V_n(t)}\theta_s^\infty + (1-1_{V_n(t)})\theta_s^n\right)1_A,\end{aligned} \tag{D.20}$$

де також було застосовано (D.19). Крім того, зауважимо, що в силу (D.17) застосованою до функції P^2 замість P, має місце наступна оцінка, що не залежить від n:

$$\sup_{n\ge1}\sup_{s\in[0,t]}\mathbf{E}[\theta_s^n]^2 < \infty$$

Оскільки $(1-1_{V_n(t)})1_A \to 1_A$ м.в. при $n \to \infty$, член з $(1-1_{V_n(t)})$ в (D.20) прямує до нуля. З оцінки (D.11) випливає, що процес $|\theta_s^\infty|$ є інтегровним $\sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}|\theta_s^\infty| < \infty$ і дає інтегровну мажоранту для $1_{V_n(t)}\theta_s^\infty 1_A$ при $s \in [0.t]$. Використовуючи, що $1_{V_n(t)} \to 1$ м.в., можемо перейти до границі в (D.20) і отримати супермартингальну властивість $\mathbf{E}\,\theta_t^\infty 1_A \le \mathbf{E}\,\theta_s^\infty 1_A$, $0 \le s \le t$ для процесу θ_t^∞ (D.12). □

Теорема D.3. (теорема 5.11) Нехай виконані умови (5.36)-(5.37) та (5.39) Тоді для невід'ємної монотонної функції Q поліноміальної поведінки, тобто такої, що

$$\exists\, C \;\; \forall\, z \ge 0 \quad z\,Q'(z) \le C\,Q(z), \quad z\,|Q''(z)| \le C\,Q'(z),$$

існує така стала K_Q, що рівномірно по U процес

$$Q(\rho^2(\xi_t^U(x,y))) - K_Q \int_0^t Q(\rho^2(\xi_s^U(x,y)))ds$$

є інтегрованим супермартингалом. Крім того, для розв'язку ξ_t^x задачі (5.1) має місце оцінка

$$\mathbf{E}\,Q(\rho^2(\xi_t^x,\xi_t^y)) \le e^{K_Q t} Q(\rho^2(x,y)). \tag{D.21}$$

Доведення. Розглянемо відкриту множину $U{\subseteq}M$ з компактним замиканням $\overline{U}$ та функцію ζ^U таку, що $\sqrt{\zeta^U} \in C_0^\infty(M,[0,1])$ і $\zeta^U(z) = 1$ для всіх $z \in \overline{U}$ і $0 \le \zeta^U < 1$ у інших випадках. Розглянемо диференціальний оператор

$$\mathcal{L}^U f(x,y) = \zeta^U(x)\zeta^U(y)\mathcal{L}f(x,y),$$

який відповідає наступному локалізованому дифузійному процесу $\xi_t^U(x,y)$ на добутку $M \times M$:

$$\delta\xi_t^U(x,y) = \sum_{\alpha=1}^d \sqrt{\zeta^U(\xi_t^{I,U})}\sqrt{\zeta^U(\xi_t^{II,U})}\left\{A_\alpha^I(\xi_t^{I,U}) + A_\alpha^{II}(\xi_t^{II,U})\right\}\delta W^\alpha +$$

$$+\zeta^U(\xi_t^{II,U})\Big\{\zeta^U(\xi_t^{I,U})A_0^I(\xi_t^{I,U})-\frac{1}{2}\sqrt{\zeta^U(\xi_t^{I,U})}\sum_{\alpha=1}^{d}(A_\alpha\sqrt{\zeta^U})(\xi_t^{I,U})A_\alpha^I(\xi_t^{I,U})\Big\}dt+$$

$$+\zeta^U(\xi_t^{I,U})\Big\{\zeta^U(\xi_t^{II,U})A_0^{II}(\xi_t^{II,U})- \tag{D.22}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\zeta^U(\xi_t^{II,U})}\sum_{\alpha=1}^{d}(A_\alpha\sqrt{\zeta^U})(\xi_t^{II,U})A_\alpha^{II}(\xi_t^{II,U})\Big\}dt,$$

з початковою умовою $\xi_0^U(x,y)=(x,y)$, де $\xi_t^{I,U}$ і $\xi_t^{II,U}$ є відповідно першою та другою компонентами процесу $\xi_t^U=(\xi_t^{I,U},\xi_t^{II,U})$ на добутку $M\times M$. Зауважимо, що оскільки $\zeta^U\big|_U=1$, для початкових даних $x,y\in U$, тому процес $\xi_t^U(x,y)$ співпадає з процесом (ξ_t^x,ξ_t^y) до першого моменту виходу $t\le\tau(\omega)=\inf\{t\colon\ \xi_t^x(\omega)\notin U$ або $\xi_t^y(\omega)\notin U\}$.

Рівняння (D.22) має глобально ліпшицеві коефіцієнти з усіма обмеженими похідними. Тому воно має єдиний розв'язок, що C^∞-регулярно залежить від початкових умов x [4,132,154,192]. Його півгрупа $(P_t^Uf)(x)=\mathbf{E}f(\xi_t^U(x,y))$ зберігає простір $C_{0,+}^\infty(M\times M)$ невід'ємних C^∞-гладких функцій з компактним носієм.

Лема D.4. [64, теорема 2] За умов (5.36)-(5.37) та (5.39) існує така стала K, що $\forall\,\zeta^U\in C_0^\infty(M,[0,1])$ з $\zeta^U\big|_{\overline{U}}=1$ та $\forall\,\varphi\in C_{0,+}^\infty(M\times M)$

$$\int\limits_{M\times M}\big([\mathcal{L}^U]^*\varphi\big)\rho^2(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y)\le K\int\limits_{M\times M}\varphi(x,y)\rho^2(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y). \tag{D.23}$$

Доведення. цього факту аналогічно доведенню леми 5.7. Зокрема, важливі моменти доведення полягають у наступних кроках. Оскільки $[\mathcal{L}^U]^*=[\zeta^U(x)\zeta^U(y)\mathcal{L}]^*=\mathcal{L}^*\zeta^U(x)\zeta^U(y)$, оцінка (D.23) буде випливати з слабкої оцінки на оператор $\mathcal{L}$ наступного вигляду: $\exists\, K\ \ \forall \psi \in C^\infty_{0,+}(M\times M)$

$$\int\limits_{M\times M} \big(\mathcal{L}^*\psi(x,y)\big)\rho^2(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y) \le K \int\limits_{M\times M} \psi(x,y)\rho^2(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y). \tag{D.24}$$

Аналогічно до (5.45) маємо наступне представлення лівої частини (D.24):

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M\times M} \big(\mathcal{L}^*\psi(x,y)\big)\rho^2(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{M\times M} \psi(x,y)\Big\{\frac{\rho^2(\eta_0^\varepsilon(x),\eta_0^\varepsilon(y)) - \rho^2(x,y)}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^d \frac{\rho^2(\eta_\alpha^\varepsilon(x),\eta_\alpha^\varepsilon(y)) + \rho^2(\eta_\alpha^{-\varepsilon}(x),\eta_\alpha^{-\varepsilon}(y)) - 2\rho^2(x,y)}{\varepsilon^2}\Big\} d\sigma(x)d\sigma(y), \end{aligned} \tag{D.25}$$

де $\eta_0^\varepsilon, \eta_\alpha^\varepsilon$ позначаються зсуви вздовж векторних полів A_0, A_α відповідно, при цьому $\eta_0^0(x) = x$, $\eta_\alpha^0(x) = x$.

Для того, щоб оцінити вирази в правій частині (D.25) у околі геодезичної $\gamma(\ell)$, $\ell \in [0,1]$ з $\gamma(0) = x$ до $\gamma(1) = y$, що мінімізує (5.35), розглянемо гладке векторне поле H. Введемо сім'ю кривих $[0,1]\times(-\delta,\delta) \ni (\ell,s) \to \gamma(\ell,s) \in M$ таких, що при $s = 0$ крива $\gamma(\ell,s)\big|_{s=0} = \gamma(\ell)$ дає цю геодезичну, а параметр s відповідає еволюції вздовж поля H:

$$\frac{\partial}{\partial s}\gamma(\ell,s) = H(\gamma(\ell,s)).$$

Аналогічно доведенню леми 5.7 використовується лема 5.8, щоб отримати слабку оцінку (D.24) на оператор $\mathcal{L}$. Це завершує доведення леми D.4. На відміну від леми 5.7 в якості векторного поля H вибираються $H(\gamma(\ell,s)) = A_0(\gamma(\ell,s))$ або $H(\gamma(\ell,s)) = A_\alpha(\gamma(\ell,s))$ для різниць першого і другого порядку в (D.25). $\square$

Лема D.5. За умов коерцитивності і дисипативності (5.36)-(5.37) існує незалежна від будь-якої множини $U \subseteq M$ стала K така, що процес

$$\rho^2(\xi_t^U(x,y)) - K\int_0^t \rho^2(\xi_s^U(x,y))ds \tag{D.26}$$

є інтегрованим супермартингалом по відношенню до канонічного потоку σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, пов'язаного з d-мірним вінерівським процесом $W_t^\alpha,\ \alpha = 1,\dots,d$ в (5.1). Позначення $\rho^2(\xi_t^U(x,y))$ означає квадрат геодезичної відстані між першою та другою компонентами процесу $\xi_t^U(x,y)$ (5.41).

Більш того, розв'язок рівняння (5.1) неперервно залежить від початкового даного і виконана оцінка (5.66).

Доведення. проводиться аналогічно лемі 5.9. Вкажемо тільки принципові моменти цього доведення. Нагадаємо, що півгрупа P_t^U, генерована локалізованим процесом $\xi_t^U(x,y)$ (D.22), зберігає простори $C_{0,+}^\infty(M\times M)$ гладких додатних функцій з компактним носієм, отже всі інтегральні вирази нижче є обмеженими. Застосування слабкої оцінки (D.24) дає: $\forall\,\varphi \in C_{0,+}^\infty(M\times M)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{M\times M}\varphi(x,y)\big\{P_t^U\rho^2(\cdot,\cdot)\big\}(x,y)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) = \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\int_{M\times M}\big\{[P_t^U]^*\varphi\big\}(x,y)\rho^2(x,y)\,d\sigma(x)d\sigma(y) = \\
&\qquad = \int_{M\times M}[\mathcal{L}^U]^*\big\{[P_t^U]^*\varphi\big\}(x,y)\cdot\rho^2(x,y)\,d\sigma(x)d\sigma(y) = \\
&\qquad = \int_{M\times M}[\mathcal{L}]^*\big(\zeta^U(x)\zeta^U(y)\big\{[P_t^U]^*\varphi\big\}(x,y)\big)\cdot\rho^2(x,y)\,d\sigma(x)d\sigma(y) \le \\
&\qquad \le K\int_{M\times M}\big\{[P_t^U]^*\varphi\big\}(x,y)\cdot\rho^2(x,y)\,d\sigma(x)d\sigma(y) = \\
&\qquad = K\int_{M\times M}\varphi(x,y)\big\{P_t^U\rho^2(\cdot,\cdot))\big\}(x,y)\,d\sigma(x)d\sigma(y),
\end{aligned}$$

де було використано, що $\mathcal{L}1 = 0$ та $\zeta^U \le 1$, компактність носія функції $\zeta^U \ge 0$, з чого випливає, що вираз $\psi = \zeta^U(x)\zeta^U(y)\left\{[P_t^U]^*\varphi\right\}$ належить простору $C^{\infty}_{0,+}(M\times M)$.

Отже, для будь якої $\varphi\in C^{\infty}_{0,+}(M\times M)$ має місце оцінка:

$$\int_{M\times M}\varphi(x,y)\cdot\left\{P^U_t\rho^2(\cdot,\cdot)\right\}(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y)\le$$
$$\le\int_{M\times M}\varphi(x,y)\cdot\Big(\rho^2(x,y)+K\int_0^t\left\{P^U_s\rho^2(\cdot,\cdot)\right\}(x,y)ds\Big)d\sigma(x)d\sigma(y),$$

або її поточковий наслідок

$$\left\{P^U_t\rho^2(\cdot,\cdot)\right\}(x,y)\le\rho^2(x,y)+K\int_0^t\left\{P^U_s\rho^2(\cdot,\cdot)\right\}(x,y)ds.$$

З марковості процесу $\xi^U_t(x,y)$ випливає

$$(P^U_tf)(\xi^U_s(x,y))=\mathbf{E}(f(\xi^U_{t+s}(x,y))\,|\,\mathcal{F}_s),\quad t,s\ge 0,$$

що дає

$$\mathbf{E}\left(\rho^2(\xi^U_{t+\tau}(x,y))|\mathcal{F}_\tau\right)=\left(P^U_t\rho^2(\cdot,\cdot)\right)\left(\xi^U_\tau(x,y)\right)\le$$
$$\le\rho^2\big(\xi^U_\tau(x,y)\big)+K\int_0^t\left\{P^U_s\rho^2(\cdot,\cdot)\right\}\big(\xi^U_\tau(x,y)\big)ds= \tag{D.27}$$
$$=\rho^2(\xi^U_\tau(x,y))+K\,\mathbf{E}\Big(\int_\tau^{t+\tau}\rho^2\big(\xi^U_s(x,y)\big)\,ds\,\big|\mathcal{F}_\tau\Big). \tag{D.28}$$

Це означає, що процес (D.26) є супермартингалом, оскільки супермартингальна властивість:

$$\mathbf{E}\Big(\rho^2(\xi^U_{t+\tau}(x,y))-K\int_0^{t+\tau}\rho^2(\xi^U_s(x,y))ds\,|\,\mathcal{F}_\tau\Big)\le$$
$$\le\rho^2(\xi^U_\tau(x,y))-K\int_0^\tau\rho^2(\xi^U_s(x,y))ds$$

співпадає з (D.28).

Надалі припустимо, що початкові дані $x,y\in U$. Введемо момент зупинки

$$\tau^U(\omega)=\inf\{t\ge 0\colon\ \xi^U_t(x,y)\notin U\times U\}.$$

Використовуючи властивість, що для будь-яких моментів зупинки S, T таких, що $0 \le S \le T$, для супермартингалу X_t має місце наступна нерівність $\mathbf{E}\left(X_T|\mathcal{F}_S\right) \le X_S$ (див., наприклад, [19, Ch.VI,§2]). Застосуємо це для $S = 0$ та $T = t \wedge \tau^U$ до супермартингалу (D.26), враховуючи, що $\mathbf{E}\left(\cdot|\mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}(\cdot)$, отримаємо:

$$
\begin{gathered}
m_t = \mathbf{E}\,\rho^2(\xi^U_{t\wedge\tau^U}(x,y)) \le \rho^2(x,y) + K\,\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau^U} \rho^2(\xi^U_s(x,y))ds \le \\
\le m_0 + K\,\mathbf{E}\int_0^t \rho^2(\xi^U_{s\wedge\tau^U}(x,y))ds = m_0 + K\int_0^t m_s ds,
\end{gathered}
$$

де $\xi^U_{s\wedge\tau^U}(x,y) = \xi^U_{\tau^U}(x,y)$ для $s \ge \tau^U$ є процесом, що зупинений на границі U, це дає можливість збільшити верхній ліміт інтегралу. З нерівності Гронуолла-Беллмана випливає:

$$
\mathbf{E}\,\rho^2(\xi^U_{t\wedge\tau^U}(x,y)) \le e^{Kt}\rho^2(x,y). \tag{D.29}
$$

Нехай U_n позначають відкриті шари навколо точки o радіусу n, тоді для достатньо великого n точки $x, y \in U_n$. Розглянемо вимірні множини $V_n(t) = \{\omega\colon \forall\, s \in [0,t]\ \xi^x_t(\omega) \in U_n$ та $\xi^y_t(\omega) \in U_n\}$, що відповідають тому, що процеси $\xi^x_t(\omega)$ та $\xi^y_t(\omega)$ знаходяться в U_n до моменту t. Тоді $(\xi^x_t(\omega), \xi^y_t(\omega)) = \xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x,y,\omega)$ м.в. для $\omega \in V_n(t)$, і з (D.29) випливає:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\,1_{V_n(t)}\rho^2(\xi^x_t, \xi^y_t) = \mathbf{E}\,1_{V_n(t)}\rho^2(\xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x,y)) \le& \\
\le \mathbf{E}\rho^2(\xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x,y)) \le e^{Kt}\rho^2(x,y),&
\end{aligned} \tag{D.30}
$$

де $1_{V_n(t)}$ позначає характеристичну функцію множини $V_n(t)$.

Оскільки процес ξ^x_t не вибухає $\lim\limits_{n\to\infty} \tau^{U_n}(\omega) = \infty$ м.в., послідовність множин є зростаючою і $\varliminf\limits_{n\to\infty} 1_{V_n(t)}(\omega) = 1$ м.в. Застосування леми Фату до лівої частини (D.30) дає твердження леми:

$$
\mathbf{E}\,\rho^2(\xi^x_t, \xi^y_t) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\rho^2(\xi^{U_n}_{t\wedge\tau^{U_n}}(x,y)) \le e^{Kt}\rho^2(x,y). \tag{D.31}
$$

□

Завершення доведення теореми D.3 проводиться аналогічно лемі D.2, із використанням представлення (D.14). □

Лема D.6. [40]. Диференціал норми процесу X_γ^m, що задається рівнянням (5.76), має вигляд:

$$d\,\|X\,\|^2 = g^{\gamma\varepsilon}(x)\,\{\,g_{mn}(X_\gamma^m M_\varepsilon{}^n{}_\alpha + X_\varepsilon^n M_\gamma{}^m{}_\alpha)dW^\alpha +$$
$$+\,g_{mn}(X_\gamma^m N_\varepsilon^n + X_\varepsilon^n N_\gamma^m + M_\gamma{}^m{}_\alpha M_\varepsilon{}^n{}_\alpha)dt + \frac{1}{2}g_{mn}(X_\gamma^m P_\varepsilon^n + X_\varepsilon^n P_\gamma^m\,)dt\,\}, \tag{D.32}$$

де вирази P_γ^m рекурентно пов'язані співвідношеннями:

$$P_k^m = \mathbb{\nabla}_k(\nabla_{A_\alpha} A_\alpha^m) + R_p{}^m{}_{\ell q} A_\alpha^p A_\alpha^q(\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell); \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned} P^m_{\gamma\cup\{k\}} &= \mathbb{\nabla}_k P_\gamma^m + 2R_p{}^m{}_{\ell q} M_\gamma{}^p{}_\alpha(\mathbb{\nabla}_k\xi^\ell)A_\alpha^q + \\ &+ (\nabla_s R_p{}^m{}_{\ell q})X_\gamma^p(\mathbb{\nabla}_k\xi^\ell)A_\alpha^q A_\alpha^s + R_p{}^m{}_{\ell q}X_\gamma^p(\mathbb{\nabla}_k A_\alpha^\ell)A_\alpha^q + \\ &+ R_p{}^m{}_{\ell q}X_\gamma^p(\mathbb{\nabla}_k\xi^\ell)(\nabla_{A_\alpha}A_\alpha). \end{aligned} \tag{D.34}$$

Доведення. Детальне доведення цього факту міститься в [40]. Нижче викладено основну ідею. Для диференціала Стратоновича маємо:

$$\begin{aligned} \delta\|X\|^2 &= \delta(g_{mn}(\xi)g^{\gamma\varepsilon}(x)X_\gamma^m X_\varepsilon^n) = \\ &= g^{\gamma\varepsilon}(x)\Big(X_\gamma^m X_\varepsilon^n \delta g_{mn}(\xi) + g_{mn}(X_\gamma^m \delta X_\varepsilon^n + X_\varepsilon^n \delta X_\gamma^m)\Big). \end{aligned}$$

Використовуючи $\nabla_\ell g_{mn} = 0$ в формі:

$$\delta g_{mn}(\xi) = \frac{\partial g_{mn}}{\partial \xi^\ell}\delta\xi^\ell = (g_{hn}\Gamma_k{}^h{}_m + g_{mh}\Gamma_k{}^h{}_n)\,\delta\xi^\ell$$

з врахуванням (5.76) маємо

$$\begin{aligned} \delta\|X\|^2 &= g^{\gamma\varepsilon}(x)\{g_{mn}(X_\gamma^m M_\varepsilon{}^n{}_\alpha + X_\varepsilon^n M_\gamma{}^m{}_\alpha)\delta W^\alpha + g_{mn}(X_\gamma^m N_\varepsilon^n + X_\varepsilon^n N_\gamma^m)dt\} = \\ &= g^{\gamma\varepsilon}(x)\,\Big\{\,g_{mn}(X_\gamma^m M_\varepsilon{}^n{}_\alpha + X_\varepsilon^n M_\gamma{}^m{}_\alpha)dW^\alpha + g_{mn}(X_\gamma^m N_\varepsilon^n + X_\varepsilon^n N_\gamma^m)dt + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}d\,[g_{mn}(X^m_\gamma M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}+X^n_\varepsilon M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha}),W^\alpha]\,\},\tag{D.35}$$

де було виконано перехід від диференціала Стратоновича к диференціалу Іто, і $[X,Y]$ позначає квадратичну варіацію процесів X та Y.

Використовуючи $\nabla_\ell\, g_{mn}=0$ та (5.76), обрахуємо квадратичну варіацію в (D.35):

$$\begin{aligned}d\,[g_{mn}(X^m_\gamma M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}+X^n_\varepsilon M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha}),W^\alpha] &= (X^m_\gamma M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}+X^n_\varepsilon M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha})d\,[g_{mn}(\xi),W^\alpha]+\\ &+g_{mn}(X^m_\gamma d\,[M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha},W^\alpha]+X^n_\varepsilon d\,[M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha])+\\ &+g_{mn}(M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}d\,[X^m_\gamma,W^\alpha]+M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha}d\,[X^n_\varepsilon,W^\alpha])=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(X^m_\gamma M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}+X^n_\varepsilon M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha})\big(g_{hn}\Gamma_{k}{}^{h}{}_{m}+g_{mh}\Gamma_{k}{}^{h}{}_{n}\big)A^\ell_\alpha dt+\\ &+g_{mn}(X^m_\gamma d\,[M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha},W^\alpha]+X^n_\varepsilon d\,[M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha])+\\ &+g_{mn}M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}(-\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}X^p_\gamma A^q_\alpha+M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha})\,dt+\\ &+g_{mn}M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha}(-\Gamma_{p}{}^{n}{}_{q}X^p_\varepsilon A^q_\alpha+M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha})\,dt=\\ &=2g_{mn}M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha}M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha}dt+\\ &+g_{mn}X^n_\varepsilon(\,d\,[M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}M_{\gamma}{}^{p}{}_{\alpha}A^q_\alpha dt\,)+\\ &+g_{mn}X^m_\gamma(\,d\,[M_{\varepsilon}{}^{n}{}_{\alpha},W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{n}{}_{q}M_{\varepsilon}{}^{p}{}_{\alpha}A^q_\alpha dt\,)\end{aligned}\tag{D.36}$$

Введемо позначення для виразу в круглих дужках в (D.36):

$$P^m_\gamma dt=d\,[M_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}M_{\gamma}{}^{p}{}_{\alpha}A^q_\alpha dt\tag{D.37}$$

та знайдемо для P^m_γ рекурентні співвідношення. Згідно (5.78) маємо:

$$\begin{aligned}P^m_{\gamma\cup\{k\}}dt&=d\,[M_{\gamma\cup\{k\}}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}M_{\gamma\cup\{k\}}{}^{p}{}_{\alpha}A^q_\alpha dt=\\ &=d\,[\mathbb{\nabla}_kM_{\gamma}{}^{m}{}_{\alpha},W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}(\mathbb{\nabla}_kM_{\gamma}{}^{p}{}_{\alpha})A^q_\alpha dt+ \qquad (D.38)\\ &+d\,[R_{p}{}^{m}{}_{\ell q}X^p_\gamma(\mathbb{\nabla}_k\xi^\ell)A^q_\alpha,W^\alpha]+\Gamma_{p}{}^{m}{}_{q}(R_{i}{}^{p}{}_{\ell j}X^i_\gamma(\mathbb{\nabla}_k\xi^\ell)A^j_\alpha)A^q_\alpha dt.\end{aligned}\tag{D.39}$$

Зауважимо, що рядок (D.39) виникає тільки для $\gamma \neq \varnothing$. Обрахуємо вираз (D.38), використовуючи означення 5.3 $\mathbb{V}$-похідної:

$$(D.38) = d\,[\partial^x_k M_{\gamma\ \alpha}^{\ m} + \Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} \mathbb{V}_k \xi^q - \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) M_{\gamma|_{s=h}\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha] + \tag{D.40}$$

$$+ \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\partial^x_k M_{\gamma\ \alpha}^{\ m} + \Gamma_{i\ j}^{\ p} M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}(\mathbb{V}_k \xi^j) - \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) M_{\gamma|_{s=h}\ \alpha}^{\ p}) A^q_\alpha dt. \tag{D.41}$$

Для першого члена в (D.40) маємо:

$$d\,[\partial^x_k M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha] = \partial^x_k (d\,[M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha]) =$$

$$= \mathbb{V}_k (d\,[M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha]) - \Gamma_{p\ q}^{\ m} d\,[M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}, W^\alpha] \mathbb{V}_k \xi^q + \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) d\,[M_{\gamma|_{s=h}\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha] \tag{D.42}$$

Другий та третій члени в (D.40) обраховуються наступним чином

$$(D.40)_{2+3} = M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\mathbb{V}_k \xi^q) d\,[\Gamma_{p\ q}^{\ m}, W^\alpha] + \Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} d\,[\mathbb{V}_k \xi^q, W^\alpha] +$$

$$+ \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{V}_k \xi^q) d\,[M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}, W^\alpha] - \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) d\,[M_{\gamma|_{s=h}\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha]. \tag{D.43}$$

Зауважимо, що два члени в рядку (D.43) компенсуються відповідними членами в (D.42). Отже, підставляючи вираз для диференціала $\mathbb{V}_k \xi^q$ з (5.76) маємо:

$$(D.40) = (D.42) + (D.43) = \mathbb{V}_k (d\,[M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}, W^\alpha]) + \tag{D.44}$$

$$+ M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\mathbb{V}_k \xi^q) \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell} A^\ell_\alpha dt + \Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(-\Gamma_{i\ j}^{\ q}(\mathbb{V}_k \xi^j) A^i_\alpha + M_{k\ \alpha}^{\ q}) dt. \tag{D.45}$$

Перший член в (D.41) перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned}(D.41)_1 = {} & \partial^x_k (\Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} A^q_\alpha) dt - [\partial^x_k \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)] M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} A^q_\alpha dt - \\ & - \Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} (\partial^x_k A^q_\alpha) dt = \mathbb{V}_k (\Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} A^q_\alpha) dt - \\ & - \Gamma_{h\ \ell}^{\ m}(\Gamma_{p\ q}^{\ h} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} A^q_\alpha) \mathbb{V}_k \xi^\ell dt + \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x)(\Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma|_{s=h}\ \alpha}^{\ p} A^q_\alpha) dt - \end{aligned} \tag{D.46}$$

$$-\frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell}(\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} A_\alpha^q dt - \Gamma_{p\ q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\partial_k^x A_\alpha^q)dt. \tag{D.47}$$

Зауважимо, що перший член в (D.41)$_3$ компенсується виразом (D.46)$_2$, а в силу (5.78):

$$M_{k\ \alpha}^{\ q} = \mathbb{\nabla}_k A_\alpha^q(\xi) = \partial_k^x A_\alpha^q(\xi) + \Gamma_{i\ j}^{\ q} A_\alpha^i (\mathbb{\nabla}_k \xi^j),$$

отже (D.45)$_2$+(D.45)$_3$ компенсують (D.47)$_2$. Збираючи всі члени, що залишилися, маємо:

$$\begin{aligned}
&(D.38) = (D.40) + (D.41) = \mathbb{\nabla}_k P_\gamma^m dt + \\
&+ \{\frac{\partial \Gamma_{p\ \ell}^{\ m}}{\partial \xi^q} - \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell} + \Gamma_{h\ q}^{\ m}\Gamma_{p\ \ell}^{\ h} - \Gamma_{h\ \ell}^{\ m}\Gamma_{p\ q}^{\ h}\} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q dt = && (D.48)\\
&= \{\mathbb{\nabla}_k P_\gamma^m + R_{p\ \ell q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}(\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q\} dt, && (D.49)
\end{aligned}$$

де члени в рядку (D.48) виникають з (D.45)$_1$, (D.47)$_1$, (D.41)$_2$ та (D.46)$_1$, що доводить (D.33) при $\gamma = \varnothing$, оскільки з (5.77) та (D.37) випливає

$$\begin{aligned}
P_\varnothing^m dt &= d\,[A_\alpha^m(\xi), W^\alpha] + \Gamma_{\ell\ h}^{\ m} A_\alpha^\ell A_\alpha^h dt = \\
&= [\frac{\partial A_\alpha^m}{\partial \xi^\ell} + \Gamma_{\ell\ h}^{\ m} A_\alpha^h] A_\alpha^\ell dt = (\nabla_\ell A_\alpha^m)\cdot A_\alpha^\ell dt = (\nabla_{A_\alpha} A_\alpha^m) dt.
\end{aligned}$$

Обчислимо вираз (D.39). Для першого члена в (D.39) маємо:

$$\begin{aligned}
(D.39)_1 &= d\,[R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q, W^\alpha] = \\
&= \frac{\partial R_{p\ \ell q}^{\ m}}{\partial \xi^s} X_\gamma^p (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q A_\alpha^s dt + R_{p\ \ell q}^{\ m} (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q d\,[X_\gamma^p, W^\alpha] + \\
&+ R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p A_\alpha^q d\,[\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell, W^\alpha] + R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) \frac{\partial A_\alpha^q}{\partial \xi^s} A_\alpha^s dt = \\
&= \frac{\partial R_{p\ \ell q}^{\ m}}{\partial \xi^s} X_\gamma^p (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q A_\alpha^s dt + && (D.50)\\
&+ R_{p\ \ell q}^{\ m} (\mathbb{\nabla}_k \xi^\ell) A_\alpha^q [-\Gamma_{i\ j}^{\ p} X_\gamma^i A_\alpha^j + M_{\gamma\ \alpha}^{\ p}] dt + && (D.51)\\
&+ R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p A_\alpha^q [-\Gamma_{i\ j}^{\ \ell} (\mathbb{\nabla}_k \xi^i) A_\alpha^j + M_{k\ \alpha}^{\ \ell}] dt + && (D.52)
\end{aligned}$$

$$+ R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k \xi^\ell)[\nabla_s A_\alpha^q - \Gamma_{s\ h}^{\ q} A_\alpha^h] A_\alpha^s dt. \tag{D.53}$$

Збираючи разом вирази вище та (D.39)$_2$, маємо:

$$(\text{D.39}) = \{\frac{\partial R_{p\ \ell q}^{\ m}}{\partial \xi^s} - \Gamma_{p\ s}^{\ h} R_{h\ \ell q}^{\ m} + \Gamma_{h\ s}^{\ m} R_{p\ \ell q}^{\ h} - \tag{D.54}$$

$$- \Gamma_{\ell\ s}^{\ h} R_{p\ hq}^{\ m} - \Gamma_{q\ s}^{\ h} R_{p\ \ell h}^{\ m}\} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A_\alpha^q A_\alpha^s dt + \tag{D.55}$$

$$+ R_{p\ \ell q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A_\alpha^q dt + R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k A_\alpha^\ell) A_\alpha^q dt + \tag{D.56}$$

$$+ R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k \xi^\ell)(\nabla_s A_\alpha^q) A_\alpha^s dt. \tag{D.57}$$

Тут (D.56)$_1$ =(D.51)$_2$, (D.56)$_2$ =(D.52)$_2$ і (D.57)=(D.53)$_1$. Вирази в дужках в (D.54)-(D.55) виникають з (D.50), (D.51)$_1$, (D.39)$_2$, (D.52)$_1$, (D.53)$_2$ та коваріантної похідної тензора кривини. Таким чином $P_{\gamma\cup\{k\}}^m$ в (D.39) має вигляд

$$P_{\gamma\cup\{k\}}^m = (\nabla_s R_{p\ \ell q}^{\ m}) X_\gamma^p (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A_\alpha^q A_\alpha^s + R_{p\ \ell q}^{\ m} M_{\gamma\ \alpha}^{\ p} (\mathbb{V}_k \xi^\ell) A_\alpha^q +$$
$$+ R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k A_\alpha^\ell) A_\alpha^q + R_{p\ \ell q}^{\ m} X_\gamma^p (\mathbb{V}_k \xi^\ell)(\nabla_{A_\alpha} A_\alpha^q),$$

що разом з (D.49) дає (D.34). $\square$

Додаток Е

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ 5.17 ТА 6.2.

Доведення теореми 5.17 вимагає введення додаткових понять, паралельного переносу $\mathbb{T}_a^b$ для високого порядку варіацій та аналога абсолютної похідної, див., наприклад, [23, §96]. Ці конструкції призначені для збереження тензорного характеру перетворень для змішаних $T^{1,0}_{\xi_t^{h(z)}}M\otimes T^{0,n}_{h(z)}M$-тензорів при переносі вздовж кривої $[a,b]\ni z\to (h(z),\xi_t^{h(z)})\in M\times M$.

Означення Е.1. *Паралельний перенос* $\Psi(z)$ тензора $u_{(h(a),\xi_t^{h(a)})}\in T^{p,q}_{h(a)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}M$ з точки $(h(a),\xi_t^{h(a)})$ вздовж кривої $(h(\cdot),\xi_t^{h(\cdot)})\in \mathrm{Lip}([a,b],M)$ представляє сообою $T^{p,q}_{h(z)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(z)}}M$ змішаний тензор в кожній точці $(h(z),\xi_t^{h(z)})$, $z\in[a,b]$ цієї кривої і позначається $\mathbb{T}^{(h(z),\xi_t^{h(z)})}_{(h(a),\xi_t^{h(a)})}u_{(h(a),\xi_t^{h(a)})}=:$ $\Psi(z)$, або скорочено $\mathbb{T}_a^z u_{h(a)}$. Крім того, для його *абсолютної похідної*:

$$\frac{I\!D}{I\!Dz}\Psi^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)}(z)\overset{def}{=}\frac{\partial}{\partial z}\Psi^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)}(z)+\sum_{s=1}^{i}\Gamma_{k\ \ell}^{\ i_s}(h(z))\,\Psi^{i_1,\ldots,i_{s-1},k,i_{s+1},\ldots,i_p/\alpha}_{(j/\beta)}(z)[h'(z)]^{\ell}-$$
$$-\sum_{s=1}^{j}\Gamma_{j_s\ \ell}^{\ k}(h(z))\,\Psi^{(i/\alpha)}_{j_1,\ldots,j_{s-1},k,j_{s+1},.,j_q/\beta}(z)+$$
$$+\sum_{\ell=1}^{r}\Gamma_{m\ n}^{\ \alpha_\ell}(\xi_t^{h(z)})\Psi^{(i/\alpha_1,\ldots,\alpha_{\ell-1},m,\alpha_{\ell+1},\ldots,\alpha_r)}_{(j/\beta)}(z)\frac{\partial(\xi_t^{h(z)})^n}{\partial h(z)^k}[h'(z)]^k-$$
$$-\sum_{\ell=1}^{s}\Gamma_{\beta_\ell\ n}^{\ m}(\xi_t^{h(z)})\Psi^{(i/\alpha)}_{(j/\beta_1,\ldots,\beta_{\ell-1},m,\beta_{\ell+1},\ldots,\beta_s)}(z)\frac{\partial(\xi_t^{h(z)})^n}{\partial h(z)^k}[h'(z)]^k,$$

норма $||\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}\Psi(z)||_{T^{p,q}_{h(z)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(z)}}M}=0$ в $L^\infty([a,b])$ для м.в. $\omega\in\Omega$.

Зауваження E.2. Перші два рядки в означення абсолютної похідної $\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}\Psi^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)}(z)$ вздовж кривої $\{h(z),\xi_t^{h(z)}\}_{z\in[a,b]}$ відповідають класичному означенню абсолютної похідної $\frac{D}{Dz}\Psi^{(i/\alpha)}_{(j/\beta)}(z)$ вздовж деякої кривої $\{h(z)\}_{z\in[a,b]}$. Останні два рядки відповідають виразам, які гарантуються інваріантність змішаного тензора при його паралельному переносі.

Застосовуючи автопаралельну властивість ріманової зв'язності:

$$\partial_k g_{ij}(x)=\Gamma_{k\ i}^{\ \ell}(x)g_{\ell j}(x)+\Gamma_{k\ j}^{\ \ell}(x)g_{i\ell}(x), \tag{E.1}$$

похідна скалярного добутку в $T^{p,q}_x M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^x}M$ змішаних тензорів виражається наступним чином в термінах абсолютної похідної, заданої в означенні E.1:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\langle\, u(h(z)),v(h(z))\rangle_{T^{p,q}_{h(z)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(z)}}M}= \\ &=\langle\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}u(h(z)),v(h(z))\rangle_{T^{p,q}_{h(z)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(z)}}M}+\langle u(h(z)),\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}v(h(z))\rangle_{T^{p,q}_{h(z)}M\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(z)}}M}.\end{aligned} \tag{E.2}$$

Розглянемо змішаний тензор $\psi_{h(a)}\in T^{p,q}_{h(a)}\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}$ в точці $(h(a),\xi_t^{h(a)})$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\langle\psi_{h(a)},\mathbf{I\!I}^a_z u_{h(z)}\rangle_{T^{p,q}_{h(a)}\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}}=\frac{d}{dz}\langle\mathbf{I\!I}^z_a\psi_{h(a)},u_{h(z)}\rangle_{T^{p,q}_{h(z)}\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}}= \\ &=\langle\mathbf{I\!I}^z_a\psi_{h(a)},\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}u_{h(z)}\rangle_{T^{p,q}_{h(z)}\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}}=\langle\psi_{h(a)},\mathbf{I\!I}^a_z\Big[\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}u_{h(z)}\Big]\rangle_{T^{p,q}_{h(a)}\otimes T^{r,s}_{\xi_t^{h(a)}}}.\end{aligned}$$

Вище було використано, що похідна від паралельного переносу дорівнює нулю: $\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}\mathbf{I\!I}^z_a\psi_{h(a)}=0$. Інтегруючи за змінною $z\in[a,b]$ отримаємо:

$$\begin{aligned}&\langle\psi_{h(a)},\int_a^b\mathbf{I\!I}^a_z\Big[\frac{I\!\!D}{I\!\!Dz}u_{h(z)}\Big]\,dz\rangle=\int_a^b\frac{d}{dz}\langle\psi_{h(a)},\mathbf{I\!I}^a_z u_{h(z)}\rangle dz= \\ &=\langle\psi_{h(a)},\mathbf{I\!I}^a_z u_{h(z)}\rangle\Big|_{z=a}^{z=b}=\langle\psi_{h(a)},\mathbf{I\!I}^a_b u_{h(b)}-u_{h(a)}\rangle.\end{aligned}$$

Оскільки $\psi_{h(a)}$ був довільним, отримаємо наступне представлення приросту змішаного тензора вздовж кривої

$$\mathbb{T}_b^a u_{h(b)} - u_{h(a)} = \int_a^b \mathbb{T}_z^a \left[\frac{\mathbb{D} u_{h(z)}}{\mathbb{D} z} \right] dz. \tag{E.3}$$

Зауважимо, що варіації високих порядків $\mathbb{V}^{(n)} \xi_t^x$ є частковим випадком змішаних тензорів, тому для них мають місце представлення (E.3).

Лема E.3. За умов теореми 5.17 для $n \in \mathbb{N}$ і довільної $h \in \mathrm{Lip}([a,b], M)$ має місце наступне представлення:

$$\mathbb{V}^{(n)} \xi_t^{h(b)} - \mathbb{T}_a^b \left[\mathbb{V}^{(n)} \xi_t^{h(a)} \right] = \int_a^b \mathbb{T}_z^b \left[\left(\mathbb{V}^{(n+1)} \xi_t^{h(z)} \right) [h'(z)] \right] dz. \tag{E.4}$$

Доведення. Аналогічно міркуванням теореми 5.4 можна довести, що рівняння для паралельного переносу $\Psi^n(z) = \mathbb{T}_a^z \xi_{t,h(a)}^{(n)}$ має аналогічний (5.22) вигляд:

$$\delta \left[\Psi^n(z) \right] = -\Gamma \left(\Psi^n(z), \delta \xi_t^{h(b)} \right) + \sum_\alpha K_\alpha^{(n)}(z) \delta W^\alpha + L^{(n)}(z) dt. \tag{E.5}$$

При цьому відповідні коефіцієнти пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}z} K_\alpha^{(1)}(z) = R(\Psi^1(z), A_\alpha(\xi_t^{h(z)})) \xi_{t,h(z)}^{(1)} [h'(z)], \\ \dfrac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}z} L^{(1)}(z) = R(\Psi^1(z), A_0(\xi_t^{h(z)})) \xi_{t,h(z)}^{(1)} [h'(z)], \end{cases} \tag{E.6}$$

$$\begin{cases} K_\alpha^{(n)}(z) = \mathbb{T}_a^z M_\alpha^{(n)} + \int\limits_a^z \mathbb{T}_u^z \left\{ R_{\xi_t^{h(u)}} \left(\Psi^n(u), A_\alpha(\xi_t^{h(u)}) \right) \xi_{t,h(u)}^{(1)} [h'(u)] \right\} du; \\ L^{(n)}(z) = \mathbb{T}_a^z N^{(n)} + \int\limits_a^z \mathbb{T}_u^z \left\{ R_{\xi_t^{h(u)}} \left(\Psi^n(u), A_0(\xi_t^{h(u)}) \right) \xi_{t,h(u)}^{(1)} [h'(u)] \right\} du, \end{cases} \tag{E.7}$$

де $K_\alpha^{(n)}(a) = M_\alpha^{(n)}$, $L^{(n)}(a) = N^{(n)}$ означені в (5.78), (5.79) з врахуванням $\mathbb{T}_a^a = Id$. Для того, щоб пересвідчитися, необхідно розглянути інтегральну форму рівняння на паралельний перенос: $\dfrac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}z} (\mathbb{T}_a^z \xi_{t,h(a)}^{(n)}) = 0$, що дозволить отримати представлення виразу $\frac{\partial}{\partial z}(\mathbb{T}_a^z \xi_{t,h(a)}^{(n)})$ в термінах коефіцієнтів зв'язності. Наступне застосування формули Ньютона-Лейбніца дасть можливість представити локальні прирости $\mathbb{T}_a^z \xi_{t,h(a)}^{(n)} - \xi_{t,h(a)}^{(n)}$ в якості інтегралів на $[a,z]$. Нарешті застосування формули Стратоновича і порівняння з представленням (E.5) дозволить отримати представлення (E.6), (E.7).

Зауважимо, що згідно схеми розділу 3 ключовим моментом доведення представлення типу (E.4) є наступні оцінки, які мають бути виконані для будь-якого $h \in \mathrm{Lip}([a,b],M)$:

$$\mathbf{E}\,\|\,\xi_{t,h(b)}^{(n)} - \mathbb{T}_a^b\,\xi_{t,h(a)}^{(n)}\,\|^p_{T^{1,0}_{\xi_t^{h(b)}}\otimes T^{0,n}_{h(b)}} \leq \tag{E.8}$$
$$\leq |b-a|^p \|h'\|^p_{L^\infty([a,b],TM)} e^{K_{p,n}t} P_{\varkappa,n}\left(1+\rho(h(a),o)+|b-a|\cdot\|h'\|\right);$$

$$\mathbf{E}\,\|\,\xi_{t,h(b)}^{(n)} - \mathbb{T}_a^b\,\xi_{t,h(a)}^{(n)} - \xi_{t,h(b)}^{(n+1)}\Big[\int_a^b \overset{h}{\mathbf{T}}{}_z^b\, h'(z)dz\Big]\,\|^p_{T^{1,0}_{\xi_t^{h(b)}}\otimes T^{0,n}_{h(b)}} \leq \tag{E.9}$$
$$\leq |b-a|^p \|h'\|^p_{L^\infty([a,b],TM)} e^{K_{p,n}t} P_{\varkappa,n}\left(1+\rho(h(a),o)+|b-a|\cdot\|h'\|\right)$$

з деяким поліномом $P_{\varkappa,n}(\cdot)$, $\overset{h}{\mathbf{T}}{}_z^b$ позначає класичний паралельний перенос тензора вздовж кривої h з точки $h(z)$ в $h(b)$. Тоді з теорії абсолютно неперервних функцій випливатиме, що оцінка (E.8) дає існування похідної $\frac{I\!D}{I\!Dz}\mathbb{T}_z^b \xi_{t,h(z)}^{(n)}$, а з оцінки (E.9) випливатиме представлення (E.4).

Щоб отримати (E.8), зауважимо, що з (5.84) випливає:

$$M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}(b) - \mathbb{T}_a^b M_{\gamma\ \alpha}^{\ m}(a) =$$
$$= \nabla_\ell^\xi A_\alpha^m(\xi_t^{h(b)})[\mathbb{V}_\gamma \xi_t^{h(b)}]^\ell - \mathbb{T}_a^b\big(\nabla_\ell^\xi A_\alpha^m(\xi_t^{h(a)})[\mathbb{V}_\gamma \xi_t^{h(a)}]^\ell\big) +$$
$$+ \sum_{\beta_1\ldots\beta_s}\left\{K'^{,h(b)}_{\beta_1,\ldots,\beta_s}\mathbb{V}_{\beta_1}\xi_t^{h(b)}\ldots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi_t^{h(b)} - \mathbb{T}_a^b K'^{,h(a)}_{\beta_1,\ldots,\beta_s}\mathbb{V}_{\beta_1}\xi_t^{h(a)}\ldots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi_t^{h(a)}\right\} =$$
$$= \nabla_\ell^\xi A_\alpha^m(\xi_t^{h(b)})\Big[[\mathbb{V}_\gamma \xi_t^{h(b)}]^\ell - \mathbb{T}_a^b[\mathbb{V}_\gamma \xi_t^{h(a)}]^\ell\Big] +$$

$$+\left\{\nabla^{\xi}_{\ell}A^{m}_{\alpha}(\xi^{h(b)}_t)-\mathbb{T}^b_a\nabla^{\xi}_{\ell}A^{m}_{\alpha}(\xi^{h(a)}_t)\right\}\mathbb{T}^b_a[\mathbb{V}_{\gamma}\xi^{h(a)}_t]^{\ell}+ \tag{E.10}$$

$$+\sum_{\beta_1\ldots\beta_s=\gamma}\left\{K'^{,h(b)}_{\beta_1,\ldots,\beta_s}-\mathbb{T}^b_a K'^{,h(a)}_{\beta_1,\ldots,\beta_s}\right\}\mathbb{V}_{\beta_1}\xi^{h(b)}_t\ldots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi^{h(b)}_t+ \tag{E.11}$$

$$+\sum_{\beta_1\ldots\beta_s}\sum_{j=1}^{s}[\mathbb{T}^b_a K'^{,h(a)}_{\beta_1,\ldots,\beta_s}]\mathbb{T}^b_a\mathbb{V}_{\beta_1}\xi^{h(a)}_t\ldots\mathbb{T}^b_a\mathbb{V}_{\beta_{j-1}}\xi^{h(a)}_t\cdot \tag{E.12}$$

$$\cdot\left(\mathbb{V}_{\beta_j}\xi^{h(b)}_t-\mathbb{T}^b_a\mathbb{V}_{\beta_j}\xi^{h(a)}_t\right)\mathbb{V}_{\beta_{j+1}}\xi^{h(b)}_t\ldots\mathbb{V}_{\beta_s}\xi^{h(b)}_t.$$

З (E.3) випливає, що вирази (E.10), (E.11), (E.12) можуть бути представлені як інтеграли на $[a,b]$. Отже, з врахуванням (E.5) та (E.7) для $\varepsilon^{(n)}_t=\left[\xi^{h(b)}_t\right]^{(n)}-\mathbb{T}^b_a\left[\xi^{h(a)}_t\right]^{(n)}$ маємо:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon^{(n)}_t&=-\Gamma(\varepsilon^{(n)}_t,\delta\xi^{h(b)}_t)+\\&+\sum_{\alpha}\left\{\nabla A_{\alpha}[\varepsilon^{(n)}_t]+S^{(n)}_{\alpha}(A_{\alpha},R,\ \varepsilon^{(1)}_t,\ldots,\varepsilon^{(n-1)}_t)\right\}\delta W^{\alpha}_t+\\&+\left\{\nabla A_0[\varepsilon^{(n)}_t]+S^{(n)}_{\alpha}(A_{\alpha},R,A_0\ \varepsilon^{(1)}_t,\ldots,\varepsilon^{(n-1)}_t)\right\}dt,\end{aligned}$$

з виразами $S^{(n)}_{\alpha}$, $S^{(n)}_0$, що залежать поліноміальним чином від A_{α}, A_0 та кривини R. Продовжуючи міркування аналогічно оцінці виразу (5.86) з використанням умови дисипативності, та умови $\varepsilon^{(n)}_0=0$ оцінка (E.8) отримується методом індукції. Аналогічні аргументи, застосовані до виразу $\Delta^{(n)}_t=\left[\xi^{h(b)}_t\right]^{(n)}-\mathbb{T}^b_a\left[\xi^{h(a)}_t\right]^{(n)}-\left[\xi^{h(b)}_t\right]^{(n+1)}\left[\int_a^b \overset{h}{\mathbf{T}}{}^b_z\, h'(z)dz\right]$ приводять до наступних рівнянь:

$$\begin{aligned}\delta(\Delta^{(n)}_t)&=-\Gamma(\Delta^{(n)}_t,\delta\xi^{h(b)}_t)+\\&+\sum_{\alpha}\left\{\nabla A_{\alpha}[\Delta^{(n)}_t]+Q^{(n)}_{\alpha}(A_{\alpha},R,\ \Delta^{(1)}_t,\ldots,\Delta^{(n-1)}_t)\right\}\delta W^{\alpha}_t+\\&+\left\{\nabla A_0[\Delta^{(n)}_t]+Q^{(n)}_{\alpha}(A_{\alpha},R,A_0\ \Delta^{(1)}_t,\ldots,\Delta^{(n-1)}_t)\right\}dt.\end{aligned}$$

Повторюючи попередні міркування з врахуванням $\Delta^{(n)}_0=0$ матимемо (E.9). □

Теорема Е.4 (теорема 5.17)**.** Для довільної $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$ півгрупа $P_t f(x)$, асоційована з стохастичним диференціальним рівнянням (5.1), є n-разів неперервно диференційованою по $x \in M$ для будь-якого $t \geq 0$. Крім того, її коваріантні похідні задаються наступним чином:

$$\nabla^{(n)}_x P_t f(x) = \sum_{j_1+\cdots+j_\ell=n, \ell\geq 1} \mathbf{E} \, \langle \, \nabla^{(\ell)}_{\xi^x_t} f(\xi^x_t), \mathbb{V}^{(j_1)}\xi^x_t \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)}\xi^x_t \, \rangle_{T^{0,\ell}_{\xi^x_t}M}. \tag{E.13}$$

Доведення. Введемо позначення

$$\delta_m(f,x,t) = \sum_{j_1+\cdots+j_\ell=m, \ell\geq 1} \mathbf{E} \, \langle \, \nabla^{(\ell)}_{\xi^x_t} f(\xi^x_t), \mathbb{V}^{(j_1)}\xi^x_t \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)}\xi^x_t \, \rangle_{T^{0,\ell}_{\xi^x_t}M} \tag{E.14}$$

для лівої частини (Е.13). Спочатку покажемо, що для $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$ вирази $\delta_m(f,x,t) \in T^{0,m}_x M$ є неперервними по $x \in M$ для кожного $m = 1,\dots,n,\ t \geq 0$.

Розглянемо довільну ліпшицеву криву $h \in \mathrm{Lip}([a,b],M)$. З властивості (5.102) та $\|\nabla_x \rho(x,o)\| \leq 1$ випливає:

$$\begin{aligned} \rho(o,\xi^{h(z)}_t) &\leq \rho(o,\xi^{h(a)}_t) + \int_a^z \|\nabla_{\xi^{h(\theta)}_t}\rho(o,\xi^{h(\theta)}_t)\| \cdot \|\frac{d\xi^{h(\theta)}_t}{d\theta}\| \, d\theta \leq \\ &\leq \rho(o,\xi^{h(a)}_t) + \int_a^b \|\mathbb{V}^{(1)}\xi^{h(\theta)}_t\| \cdot \|h'(\theta)\| \, d\theta. \end{aligned}$$

Оскільки $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$, маємо

$$\begin{aligned} \|\nabla^{(\ell)} f(\xi^{h(z)}_t)\| &\leq \|f\|_{C^n_{\vec{q}}} q_\ell(\rho^2(o,\xi^{h(z)}_t)) \leq K_{q_\ell} \|f\|_{C^n_{\vec{q}}} \Big(1+\rho(o,\xi^{h(z)}_t)\Big)^{2\,d_{q_\ell}} \leq \\ &\leq K_{q_\ell} \|f\|_{C^n_{\vec{q}}} \Big(1+\rho(o,\xi^{h(a)}_t) + \|h'\|_{L^\infty[a,b]} \int_a^b \|\mathbb{V}^{(1)}\xi^{h(\theta)}_t\| d\theta\Big)^{2\,d_{q_\ell}}, \end{aligned} \tag{E.15}$$

що дає рівномірну по $z \in [a,b]$ інтегровну по Ω мажоранту, відповідно до (5.96) та (5.40). Вище d_{q_ℓ} позначає ступінь полінома q_ℓ. Аналогічним чином, використовуючи (Е.4), знайдемо мажоранту для варіаційних процесів в (E.14):

$$\| \mathbb{V}^{(j)} \xi_t^{h(z)} \| \le \| \mathbb{V}^{(j)} \xi_t^{h(a)} \| + \|h'\|_{L^\infty[a,b]} \int_a^b \| \mathbb{V}^{(\ell+1)} \xi_t^{h(\theta)} \| \, d\theta, \qquad \text{(E.16)}$$

де норми розуміються в сенсі (5.14). Права частина (E.16) є інтегровною у довільному ступені, що випливає з (5.96).

Таким чином, з властивості (E.4), враховуючи мажоранти, отримані з (E.15),(E.16), випливає неперервність м.в. за параметром $z \in [a, b]$ виразів під $\mathbf{E}$ в $\delta_m(f, h(z), t),\ m = 0, \dots, n$. Застосування теореми Лебега остаточно дає неперервність відображень

$$[a, b] \ni z \to \delta_m(f, h(z), t), \quad m = 0, \dots, n,$$

для довільної ліпшицевої кривої $h \in \mathrm{Lip}([a, b], M)$ та $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$, а отже і неперервність $M \ni x \to \delta_m(f, x, t) \in T^{0,m} M$.

Отримаємо рекурентні співвідношення для $\nabla^{(m)} P_t f(x) = \delta_m(f, x, t)$. Спочатку зауважимо, що з (5.102) випливає $\dfrac{d\xi_t^{h(z)}}{dz} = \mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)]$. Крім того, з співвідношень (E.4), які виконані м.в., маємо:

$$\nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(b)}) - \mathbf{T}_a^b \left[\nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(a)}) \right] =$$

$$= \int_a^b \mathbf{T}_z^b \left(\nabla^{(\ell+1)} f(\xi_t^{h(z)}) \left[\mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)] \right] \right) dz \qquad \text{(E.17)}$$

для довільної $f \in C^n_0(M)$, $h \in \mathrm{Lip}([a, b], M)$ та $\ell = 0, \dots, n-1$. Представлення (E.17) допускає замикання до $f \in C^n_{\vec{q}}(M)$.

Застосовуючи (E.17) при $\ell = 0$ до $P_t f(x) = \mathbf{E} f(\xi_t^x)$, маємо:

$$P_t f(h(b)) - P_t f(h(a)) = \mathbf{E} \left[f(\xi_t^{h(b)}) - f(\xi_t^{h(a)}) \right] =$$

$$= \mathbf{E} \int_a^b \langle \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)] \rangle \, dz =$$

$$= \int_a^b \mathbf{E} \langle \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)] \rangle \, dz,$$

де було використано існування відповідних мажорант (E.15), (E.16) для зміни порядку інтегрування. Таким чином, для довільної $h \in \mathrm{Lip}([a,b],M)$, отримаємо:

$$P_t f(h(b)) - P_t f(h(a)) = \int_a^b \mathbf{E} \langle \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)] \rangle \, dz,$$

з чого, за теорією абсолютно неперервних функцій, випливає існування похідної

$$\frac{dP_t f(h(z))}{dz} = \mathbf{E} \langle \nabla f(\xi_t^{h(z)}), \mathbb{V}^{(1)} \xi_t^{h(z)} [h'(z)] \rangle = \langle \delta_1(f, h(z), t), h'(z) \rangle .$$

Оскільки вираз $\delta_1(f,x,t)$ є неперервним по змінній x, отримаємо існування неперервної першої похідної $\nabla P_t f(x)$ та тотожність $\nabla_x P_t f(x) = \delta_1(f,x,t)$.

Припустимо, що співвідношення $\nabla_x^{(\ell)} P_t f(x) = \delta_\ell(f,x,t)$ вже доведено для довільного $\ell = 0, \ldots, m < n$. Покажемо його для $m+1$. Розглянемо відповідну різницю

$$\nabla^{(m)} P_t f(h(b)) - \mathbb{T}_a^b \Big[\nabla^{(m)} P_t f(h(a)) \Big] =$$
$$= \mathbf{E} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell=m,\ \ell\geq 1} \Big[\langle \nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(b)}), \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_t^{h(b)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)} \xi_t^{h(b)} \rangle_{T^{0,\ell}_{\xi_t^{h(b)}}} -$$
$$- \mathbb{T}_a^b \langle \nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(a)}), \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_t^{h(a)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)} \xi_t^{h(a)} \rangle_{T^{0,\ell}_{\xi_t^{h(a)}}} \Big].$$

З (E.17) і (E.4) випливає:

$$\sum_{j_1 \ldots j_\ell} \Big[\langle \nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(b)}), \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_t^{h(b)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)} \xi_t^{h(b)} \rangle -$$
$$- \mathbb{T}_a^b \langle \nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(a)}), \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_t^{h(a)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)} \xi_t^{h(a)} \rangle \Big] =$$

$$= \int_a^b \sum_{j_1 \ldots j_\ell} \mathbb{T}_z^b \Big[\langle \nabla^{(\ell)} f(\xi_t^{h(z)}), \mathbb{V}^{(j_1)} \xi_t^{h(z)} \otimes \ldots \cdots \otimes \mathbb{V}^{(j_\ell)} \xi_t^{h(z)} \rangle [h'(z)] \Big] dz,$$

тобто відтворюють структуру членів під інтегралом в (E.14). Існування мажорант (E.15) і (E.16) дозволяє змінити порядок інтегрування і математичного сподівання, що дає

$$\nabla^{(m)} P_t f(h(b)) - \mathbb{T}_a^b \left[\nabla^{(m)} P_t f(h(a))\right] = \int_a^b \mathbb{T}_z^b \left[\delta_{m+1}(f, h(z), t)[h'(z)]\right] dz.$$

Тому відображення $[a, b] \ni z \to \mathbb{T}_z^b \left[\nabla^{(m)} P_t f(h(z))\right]$ є абсолютно неперервним з похідною

$$\frac{d\mathbb{T}_z^b \left[\nabla^{(m)} P_t f(h(z))\right]}{dz} = \mathbb{T}_z^b \left[\delta_{m+1}(f, h(z), t)[h'(z)]\right].$$

Оскільки $\delta_{m+1}(f, x, t)$ неперервні по x, маємо, що похідна $(m+1)$-го порядку півгрупи співпадає з $\delta_{m+1}(f, x, t)$. $\square$

Сформулюємо та доведемо теорему 6.2.

Теорема E.5 (теорема 6.2)**.** Коефіцієнти $M_{\gamma}{}^{m}{}_{\sigma}$, N_{γ}^{m} рівняння (6.6) на X_{γ}^{m} пов'язані наступними рекурентними співвідношеннями:

$$M_{\varnothing}{}^{m}{}_{\sigma} = A_{\sigma}^{m}(\xi_t^x), \quad N_{\varnothing}^{m} = A_0^{m}(\xi_t^x) \tag{E.18}$$

$$M_{\gamma\cup\{k\}}{}^{m}{}_{\sigma} = \begin{cases} \mathfrak{D}_k M_{\varnothing}{}^{m}{}_{\sigma}, & \text{для } \gamma = \varnothing \\ \mathfrak{D}_k M_{\gamma}{}^{m}{}_{\sigma} + R_{p}{}^{m}{}_{\ell q} X_{\gamma}^{p}(\mathfrak{D}_k \xi^{\ell}) A_{\sigma}^{q}, & \text{для } \gamma \neq \varnothing \end{cases} \tag{E.19}$$

$$N_{\gamma\cup\{k\}}^{m} = \begin{cases} \mathfrak{D}_k N_{\varnothing}^{m} + \lambda A_{\sigma}^{m} z_k^{\sigma}, & \text{для } \gamma = \varnothing \\ \mathfrak{D}_k N_{\gamma}^{m} + \lambda M_{\gamma}{}^{m}{}_{\sigma} z_k^{\sigma} + R_{p}{}^{m}{}_{\ell q} X_{\gamma}^{p}(\mathfrak{D}_k \xi^{\ell}) A_{\sigma}^{q}, & \text{для } \gamma \neq \varnothing. \end{cases} \tag{E.20}$$

В (E.20) стала $\lambda = 0$, якщо похідна $\mathfrak{D}_k$ є $\mathbb{V}_k$-похідною (тобто, якщо $X_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{V}_k X_{\gamma}$) і дорівнює 1, якщо $\mathfrak{D}_k$ є стохастичною похідною (тобто $X_{\gamma\cup\{k\}} = \mathbb{D}_{z_k} X_{\gamma}$).

Доведення. База індукції при $\gamma = \varnothing$, фактично, випливає з (5.21) та (6.3). Залишилось показати індуктивний крок. Отримаємо відповідні представлення для стохастичного $\mathbb{D}_z$ та звичайного $\mathbb{V}$ випадків окремо.

Для скорочення позначень нижче будемо опускати залежність коефіцієнтів зв'язності Γ від змінної ξ в той же час залежність від x завжди буде вказана.

Підставляючи означення $\mathbb{W}$-похідної в стохастичний інтеграл, маємо:

$$\int_0^t \delta(\mathbb{W}_k X_\gamma^m) = \int_0^t \delta\{\,\partial_k^x X_\gamma^m + \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k} X_\gamma^q - \sum_{s\in\gamma} \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x) X_{\gamma|_{s=h}}^m\} \quad \text{(E.21)}$$

Використовуючи властивості інтеграла Стратоновича

$$\int_0^t X\,\delta(\int_0^t Y\,\delta Z) = \int_0^t XY\,\delta Z,$$
$$\partial^x \int_0^t M\delta N = \int_0^t (\partial^x M)\delta N + \int_0^t M\delta(\partial^x N), \quad \text{(E.22)}$$

для першого члена в (E.21) з врахуванням індуктивного припущення (6.6) отримаємо:

$$(\text{E.21})_1 = \int_0^t \delta(\partial_k^x \int_0^t \{-\Gamma_{p\ q}^{\ m} X_\gamma^p\,\delta\xi^q + M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}\delta W^\sigma + N_\gamma^m dt\}) =$$
$$= -\int_0^t \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell}\frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^k} X_\gamma^p\,\delta\xi^q - \int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m} X_\gamma^p\,\delta(\frac{\partial \xi^q}{\partial x^k}) - \quad \text{(E.23)}$$
$$-\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\partial_k^x X_\gamma^p)\delta\xi^q + \int_0^t \{\partial_k^x M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}\delta W^\sigma + \partial_k^x N_\gamma^m dt\} \quad \text{(E.24)}$$

Перепишемо другий член в (E.21) використовуючи формулу Іто–Стратоновича:

$$\delta\Big(XYZ\Big) = YZ\delta X + XZ\delta Y + XY\delta X,$$

індуктивне припущення (6.6) та властивості інтеграла Стратоновича (E.22):

$$(\text{E.21})_2 = \int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\delta(X_\gamma^q) + \int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m} X_\gamma^q\,\delta(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}) + \int_0^t \frac{\partial \xi^p}{\partial x^k} X_\gamma^q\,\delta\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi) =$$
$$= \int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}\{-\Gamma_{\ell\ s}^{\ q} X_\gamma^\ell\,\delta\xi^s + M_{\gamma\ \sigma}^{\ q}\delta W^\sigma + N_\gamma^q dt\} + \quad \text{(E.25)}$$
$$+\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m} X_\gamma^q\,\delta(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^k}) + \int_0^t \frac{\partial \xi^p}{\partial x^k} X_\gamma^q\,\frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell}\,\delta\xi^\ell. \quad \text{(E.26)}$$

До останнього члена в (E.21) знов застосуємо індуктивне припущення (6.6), в результаті отримаємо:

$$(E.21)_3 = -\sum_{s\in\gamma}\int_0^t \Gamma_{k\ s}^{\ h}(x)\{-\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)X^p_{\gamma|_{s=h}}\delta\xi^q + M^{\ m}_{\gamma|_{s=h}\ \sigma}\delta W^\sigma + N^m_{\gamma|_{s=h}}dt\} \tag{E.27}$$

Крім того, перепишемо перший вираз в (E.24) в термінах інваріантної похідної $\mathbb{W}$:

$$\begin{aligned}(E.24)_1 = &-\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}\mathbb{W}_k X^p_\gamma \delta\xi^q + \\ &+\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}\Gamma_{\ell\ n}^{\ p}\frac{\partial\xi^\ell}{\partial x^k}X^n_\gamma\,\delta\xi^q - \sum_{s\in\gamma}\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)\Gamma_{k\ s}^{\ h}(x)X^p_{\gamma|_{s=h}}\,\delta\xi^q\end{aligned} \tag{E.28}$$

Скорочуючи другий вираз в (E.23) з першим виразом в (E.26), другий вираз в (E.28) з першим виразом в (E.27) та формуючи з другого та третього членів в (E.24), (E.25) та (E.27) $\mathbb{W}$-похідну коефіцієнтів M та N, для членів, що залишились, маємо:

$$\begin{aligned}(E.21) = &-\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m}\,\mathbb{W}_k X^p_\gamma\,\delta\xi^q + \int_0^t\{\mathbb{W}_k M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}\delta W^\sigma + \mathbb{W}_k N^m_\gamma dt\} + \\ &+\int_0^t \frac{\partial\xi^\ell}{\partial x^k}X^p_\gamma\,\delta\xi^q\Big\{\frac{\partial\Gamma_{\ell\ p}^{\ m}(\xi)}{\partial\xi^q} - \frac{\partial\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)}{\partial\xi^\ell} + \Gamma_{s\ q}^{\ m}(\xi)\Gamma_{\ell\ p}^{\ s}(\xi) - \Gamma_{\ell\ s}^{\ m}(\xi)\Gamma_{p\ q}^{\ s}(\xi)\Big\}.\end{aligned} \tag{E.29}$$

Члени в фігурних дужках в (E.29) виникають відповідно з другого члена в (E.26), першого члена в (E.23), першого члена в (E.28) та першого члена в (E.25). Зауважимо, що вираз в дужках в (E.29) є кривиною в точці ξ^x_t, отже маємо:

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(\mathbb{W}_k X^m_\gamma) = \int_0^t \Big\{ &-\Gamma_{p\ q}^{\ m}(\mathbb{W}_k X^p_\gamma)\delta\xi^q + R_{p\ \ell q}^{\ m}X^p_\gamma\frac{\partial\xi^\ell}{\partial x^k}\delta\xi^q + \\ &+\mathbb{W}_k M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}\delta W^\sigma + \mathbb{W}_k N^m_\gamma dt\Big\},\end{aligned}$$

що доводить індуктивний крок у випадку $\mathbb{W}$-похідної.

Представлення для стохастичної похідної отримаємо аналогічним чином. Підставляючи індуктивне припущення та означення інваріантної стохастичної похідної $\mathbb{D}_z$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\delta(\mathbb{D}_z X^m_\gamma) = \delta[D_z X^m_\gamma + \Gamma_{p\ q}^{\ m} X^p_\gamma D_z \xi^q] = \\
&= \delta(D_z[-\int_0^t \Gamma_{p\ q}^{\ m} X^p_\gamma \delta\xi^q + M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} \delta W^\sigma + N^m_\gamma dt]) + \delta(\Gamma_{p\ q}^{\ m} X^p_\gamma D_z \xi^q) = \\
&= -\Gamma_{p\ q}^{\ m} D_z X^p_\gamma \delta\xi^q - \Gamma_{p\ q}^{\ m} X^p_\gamma \delta(D_z \xi^q) - \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)}{\partial \xi^\ell} D_z \xi^\ell X^p_\gamma \delta\xi^q + \qquad \text{(E.30)} \\
&+ (D_z M_{\gamma\ \sigma}^{\ m}) \delta W^\sigma + (M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} z^\sigma + D_z N^m_\gamma) dt + \\
&+ \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}(\xi)}{\partial \xi^\ell} X^p_\gamma D_z \xi^q \delta\xi^\ell + \Gamma_{p\ q}^{\ m} X^p_\gamma \delta(D_z \xi^q) + \Gamma_{p\ q}^{\ m} D_z \xi^q \delta(X^p_\gamma). \qquad \text{(E.31)}
\end{aligned}$$

Вище було застосовано властивості інтеграла Стротоновича (E.22), зокрема:

$$D_z \int_0^t M \delta N = \int_0^t (D_z M) \delta N + \int_0^t M \delta(D_z N).$$

Скорочуючи відповідні члени в (E.30) та (E.31), виконуючи перехід від D_z до інваріантної похідної $\mathbb{D}_z$ та застосовуючи індуктивне припущення (6.6) до третього члена в (E.31), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbb{D}_z X^m_\gamma) = &-\Gamma_{p\ q}^{\ m} (\mathbb{D}_z X^p_\gamma - \Gamma_{i\ j}^{\ p} X^i_\gamma D_z \xi^j) \delta\xi^q + (\frac{\partial \Gamma_{p\ \ell}^{\ m}}{\partial \xi^q} - \frac{\partial \Gamma_{p\ q}^{\ m}}{\partial \xi^\ell}) X^p_\gamma D_z \xi^\ell \delta\xi^q + \\
&+ (\mathbb{D}_z M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} - \Gamma_{i\ j}^{\ m} M_{\gamma\ \sigma}^{\ i} D_z \xi^j) \delta W^\sigma + (\mathbb{D}_z N^m_\gamma - \Gamma_{i\ j}^{\ m} N^i_\gamma D_z \xi^j) dt + \\
&+ M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} z^\sigma dt + \Gamma_{p\ q}^{\ m} D_z \xi^q [-\Gamma_{i\ j}^{\ p} D_z \xi^i \delta\xi^j + M_{\gamma\ \sigma}^{\ p} \delta W^\sigma + N^p_\gamma dt] = \\
&= -\Gamma_{p\ q}^{\ m} \mathbb{D}_z X^p_\gamma \delta\xi^q + \mathbb{D}_z M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} \delta W^\sigma + \\
&+ (\mathbb{D}_z N^m_\gamma + M_{\gamma\ \sigma}^{\ m} z^\sigma) dt + R_{p\ \ell q}^{\ m} X^p_\gamma D_z \xi^\ell \delta\xi^q.
\end{aligned}$$

□

Додаток F

ОСОБЛИВИЙ ВИПАДОК АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ

В цьому розділі будується асимптотичний розклад розв'язку рівняння теплопровідності в околі особливої точки при $p = 2$, що відповідає випадку так званої конічної сингулярності.

Для $p = 2$ задача (8.6) має вигляд

$$\begin{aligned} r\,U'_r - U''_{\omega,\omega} - \frac{\omega}{2}\,U'_\omega &= 0 \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,\infty), \\ U(\pm 1, r) &= 0 \quad \text{на} \quad (0,\infty). \end{aligned} \tag{F.1}$$

Як у розділі 8 формальний розв'язок задачі (F.1) шукається у вигляді: $U(\omega, r) = e^{S(r)}\,V(\omega, r)$, тоді рівняння ейконала $rS' = \lambda$ дає $S(r) = \lambda \ln r$, отже $e^{S(r)} = r^\lambda$, з деякою сталою λ. В такому випадку не має підстав шукати розклад для $V(\omega, r)$ у вигляді формальних рядів Пьєзо з дробовим ступенем від r. В даному випадку більш придатним є розклад за ступенями функції $1/\ln r$. Отже функція V

$$V(\omega, r) = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(\omega)\left(\frac{1}{\ln r}\right)^{j-N}.$$

має бути формальним розкладом розв'язку задачі:

$$\begin{aligned} r\,V'_r - V''_{\omega,\omega} - \frac{\omega}{2}\,V'_\omega &= -\lambda V \quad \text{в} \quad (-1,1)\times(0,\infty), \\ V(\pm 1, r) &= 0 \qquad \text{на} \quad (0,\infty), \end{aligned}$$

N — ціле число. Підставляючи розклад для $V(\omega, r)$ в ці рівняння і прирівнюючи відповідні коефіцієнти при однакових степенях $\ln r$, отримаємо наступну низку задач Штурма–Ліувілля:

$$\begin{aligned} -V_0'' - \frac{\omega}{2} V_0' + \lambda V_0 &= 0 \quad \text{в} \quad (-1, 1), \\ V_0 &= 0 \quad \text{на} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{F.2}$$

для $j = 0$, і

$$\begin{aligned} -V_j'' - \frac{\omega}{2} V_j' + \lambda V_j &= (j - N - 1) V_{j-1} \quad \text{в} \qquad (-1, 1), \\ V_j &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad \mp 1, \end{aligned} \tag{F.3}$$

для $j \geq 1$.

Задача (F.2) має ненульові розв'язки V_0 тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням оператора $Lv = v'' + \frac{1}{2}\omega\, v'$ з областю визначення, які складається з функцій v з простору Соболєва $H^2(-1, 1)$, що зануляються при ∓ 1. Рівняння (F.3) для $j = 1, \ldots, N$ означають, що $V_1, \ldots, V_N$, фактично, є корінними функціями оператора, що відповідають власному значенню λ. Іншими словами, $V_{n,0}, \ldots, V_{n,N}$ — це Жорданів ланцюг довжини $N + 1$, що відповідає власному значенню λ_n. Зауважимо, що для $j = N + 1$ права частина (F.3) зникає. Це означає, що починаючи з $j = N + 1$ Жорданів ланцюг переривається.

З теорії задач Штурма-Лівувілля випливає, що задача (F.2) має дискретний спектр $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$, що складається з дійсних значень.

Якщо

$$-v'' - \frac{1}{2}\omega\, v' + \lambda v = 0$$

на $(-1, 1)$ для деякої функції $v \in H^2(-1, 1)$, що зануляється при ∓ 1, тоді

$$\|v'\|^2 + \lambda \|v\|^2 = \frac{1}{2}\,(\omega v', v), \tag{F.4}$$

де скалярний добуток розуміється в сенсі простору $L^2(-1,1)$. Використовуючи нерівність Шварца, маємо: $|(\omega v', v)| \leq \|v'\|\,\|v\|$. Оскільки

$$\begin{aligned}\|v'\|^2 + \lambda\|v\|^2 &= \frac{1}{2}\,\|v'\|\,\|v\| + \Big(\|v'\| - \frac{1}{4}\,\|v\|\Big)^2 + \Big(\lambda - \frac{1}{16}\Big)\|v\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\,\|v'\|\,\|v\| + \Big(\lambda - \frac{1}{16}\Big)\|v\|^2.\end{aligned}$$

Таким чином, можна дійти висновку, що рівність (F.4) виконана тільки для функції $v = 0$ за виключенням випадку, коли $\lambda \leq 1/16$. Отже, $\lambda_n \leq \frac{1}{16}$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема F.1. Припустимо, що $p = 2$. Тоді розклад розв'язку однорідної задачі (8.6) має вигляд: $U(\omega, r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n}\, V_{n,0}(\omega)$, де λ_n — власні значення задачі (F.2).

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з наведених вище міркувань. □

У вихідних координатах (x,t) в околі точки $P = (0,0)$ в $\mathcal{G}$ формальний розклад має наступний вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, t^{\lambda_n}\, V_{n,0}\Big(\frac{x}{t^{1/2}}\Big).$$