Національна академія наук України
Інститут математики

Замрій Ірина Вікторівна

УДК 517.51

Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України і у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України
Самойленко Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор, завідувач відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Маслюченко Володимир Кирилович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри математичного аналізу;

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Назаренко Микола Олексійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться «6» вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «4» серпня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Робота присвячена дослідженню неперервних функцій з сингулярними та фрактальними властивостями, які означені в термінах наперед заданого трисимвольного зображення дійсних чисел відрізка $[0;1]$ з самоподібною геометрією, а саме: Q_3 – зображення чисел.

Актуальність теми. Метричний простір $C_{[0;1]}$ неперервних функцій з рівномірною метрикою багатий функціями зі складною локальною структурою і «масивними» множинами різних особливостей. До таких відносяться неперервні ніде не монотонні, звивисті, недиференційовні функції (відомі теореми Банаха-Мазуркевича (1931 р.) і Козирєва (1983 р.) констатують топологічне багатство їх сімей — це множини другої категорії Бера), а також сингулярні функції (неперервна функція, відмінна від константи, називається сингулярною, якщо її похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Топологічно масивною є і множина всіх сингулярних функцій, про що свідчить теорема Замфіреску (1981 р.): сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера.

Добре відома теорема Лебега стверджує, що кожна дійсна функція дійсної змінної обмеженої варіації є або функцією стрибків, або абсолютно неперервною функцією, або сингулярною, або нетривіальною сумішшю попередніх трьох чистих лебегівських типів. При цьому кожна неперервна функція є або абсолютно неперервною, або сингулярною, або їх сумішшю. Серед чистих лебегівських типів сингулярні функції представляють найменш вивчений клас, хоча є окремим предметом дослідження вже більше 100 років. Їх перші приклади належать видатним математикам: Г. Кантору, Е. Хелінгеру, В. Серпінському, Г. Мінковському та ін.. Запропоновані ними конструкції стосувались функцій монотонних і навіть строго зростаючих (за виключенням функції Кантора — неспадної функції «рівномірного» розподілу ймовірностей на множині Кантора, яка зростає виключно у точках цієї множини). Складається враження, що тривалий час відбувалось неоголошене змагання на побудову найпростішого прикладу строго зростаючої сингулярної функції. І дехто вважав, що таким є приклад Р. Салема (1943 р.). Але, на наш погляд, більш простим прикладом є інверсор цифр Q_2 – зображення дробової частини дійсного числа, аналог якого ми досліджуємо у даній роботі.

Монотонні сингулярні функції тісно пов'язані з сингулярними розподілами ймовірностей (це розподіли, зосереджені на нуль-множинах Лебега). Домінування таких розподілів переконливо доведено у різних класах випадкових величин, цифри зображення яких у тій чи іншій системі кодування чисел є незалежними.

На основі загального інтересу до сингулярних функцій виникає природний інтерес до немонотонних сингулярних функцій та нетривіальних сумішей сингулярних і абсолютно неперервних функцій. Легко будуються приклади немонотонних сингулярних функцій канторівського типу (функцій, проміжки сталості яких утворюють множину повної міри). Перші приклади ніде не монотонних сингулярних функцій були побудовані у 50-х роках XX століття індійськими математиками (Shukla U. K., Gard K. M.). Нескладні приклади сингулярних ніде не монотонних функцій фігурують і у роботах М. В. Працьовитого, А. Н. Агаджанова. Існує лише кілька робіт, присвячених таким функціям. Суміші сингулярних та абсолютно неперервних функцій до цих пір не стали предметом серйозного вивчення. Логічним є запитання: в яких «відносно простих» класах такі функції є домінуючими? І де вони природнім чином «з'являються»?

Існує ряд проблем, пов'язаних з сингулярними функціями, однією з яких є проблема ефективних способів їх задання та дослідження. В останній час з цією метою використовуються різні системи зображення дійсних чисел як зі скінченним, так і нескінченним алфавітом, однією з таких є Q – зображення чисел, вперше введене у 1986 році М. В. Працьовитим. Воно використовувалось для дослідження сингулярних функцій розподілу. Ми ж використовуємо Q – зображення чисел для дослідження немонотонних кусково-сингулярних функцій. Нас цікавить, зокрема фрактальний аспект дослідження.

Фрактальна геометрія з групової точки зору є теорією інваріантів групи перетворень метричного простору, які зберігають фрактальну розмірність, зокрема Гаусдорфа-Безиковича. Її плідними ідеями є ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності тощо. Графіки функцій зі складною локальною будовою як множини простору R^2 потенційно мають фрактальні властивості.

У дисертації досліджується нескінченний клас неперервних функцій, які, взагалі кажучи, є сумішами кусково-сингулярних та кусково-лінійних функцій, і для цього використовуємо поліосновне Q_3 – зображення чисел, яке є узагальненням класичного трійкового.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень об'єктів математичного аналізу зі складною локальною будовою і автомодельними властивостями, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалось у рамках науково-дослідних тем:

— «Дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість» (№ держ. реєстрації 0115U000557);
— «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (№ державної реєстрації 0111U000053);
— «Системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали» (№ державної реєстрації 0113U003009).

Об'єкт дослідження. Основними об'єктами дослідження є:

1) неперервні функції, які зберігають цифру 1 (без її «примноження») у заданому Q_3 – зображенні чисел;

2) модифікація Q_3 – зображення чисел, яка ґрунтується на перекодуванні числа засобами нескінченного алфавіту.

Предмет дослідження.

1. Локальні та глобальні структурні, самоафінні, автомодельні та фрактальні, варіаційні, диференціальні та інтегральні властивості функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел;

2. Геометрія модифікованого $\overline{Q_3}$ – зображення чисел, його тополого-метричні властивості.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційного дослідження* є опис властивостей класу функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, і розгорнутий аналіз властивостей його окремих представників; обґрунтування модифікації Q_3 – зображення чисел засобами нескінченного алфавіту, дослідження специфіки та властивостей останньої.

Його основні *завдання* полягають у наступному:

— встановити масивність множини функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні аргумента, та її підмножин:
  - неперервних функцій;
  - неперервних функцій з нескінченними рівнями;
  - неперервних функцій з одним та двома нескінченними рівнями;

— для найпростіших «модельних» представників класу неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, знайти «аналітичне задання» і детально вивчити властивості, включаючи лебегівську структуру (вміст абсолютно неперервної та сингулярної компонент);
— для вибраних представників знайти функціональні співвідношення та еквівалентні означення у термінах розв'язків систем функціональних рівнянь;
— побудувати модифікацію класичного трійкового та його узагальнення — Q_3 – зображення числа, використовуючи нескінченний алфавіт $\mathbb{Z}_0$; обґрунтувати його коректність, встановити геометричний зміст символів, властивості циліндрів та напівциліндрів, розв'язати деякі метричні та позиційні задачі;
— вивчити властивості множин чисел з фіксованими символами $\overline{3}$ – та $\overline{Q_3}$ – зображення.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, метричної теорії чисел. Використовувалась методологія дослідження структури локальних та фрактальних властивостей функцій, розроблена М. В. Працьовитим та його учнями.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:
— доведено, що клас P функцій, які зберігають цифру 1 у заданому поліосновному Q_3 – зображенні чисел, є континуальним, а його підклас P_c неперервних функцій є зліченним;
— функції класу P_c не можуть мати більше двох нескінченних рівнів, причому сім'ї P_1 і P_2 функцій, що мають один нескінченний рівень та два нескінченних рівні відповідно, також є зліченними;
— встановлено, що у класі P_c існує лише два бієктивних відображення відрізка $[0;1]$ на себе, це тотожне перетворення та інверсор цифр зображення;
— детально вивчено властивості інверсора цифр Q_3 – зображення чисел, зокрема: доведено, що інверсор є лінійною функцією при $q_0 = q_2$ і сингулярною при $q_0 \neq q_2$, описано диференціальні, інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості і встановлено ряд функціональних співвідношень;

— доведено, що при $q_0 \neq q_2$ кожна функція з класу P_c, за виключенням тотожного перетворення, має сингулярні властивості, а саме: є сингулярною на кожному проміжку спадання і лінійною на проміжку зростання;
— для найпростіших представників f_1 і g класів P_1 і P_2 відповідно, які задовольняють певні умови симетрій, описано тополого-метричні, диференціальні, інтегральні, варіаційні, самоафінні та фрактальні, локальні та глобальні властивості;
— запропоновано нове несамоподібне нескінченно-символьне зображення дійсних чисел, яке є модифікацією поліосновного трисимвольного Q_3 – зображення, і вивчено його геометрію (тополого-метричні властивості циліндрів та напівциліндрів);
— описано метричні властивості множин чисел, визначених умовами на їх модифіковане Q_3 – зображення.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної та метричну теорію чисел, зокрема у теорію функцій з сингулярними властивостями. Запропоновані у дисертації прийоми та методи можуть бути використані при дослідженні функцій з нетривіальною локальною будовою і фрактальними властивостями, визначених іншими інваріантами зображень.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті, що належать автору. У спільних з Працьовитим М. В. публікаціях співавтору належить постановка окремих задач, перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на конференціях різного рівня:
— International conference on algebra dedicated to 100^{th} anniversary of S. M. Chernikov. August 20-26, 2012, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine;
— International conference modern stochastics: theory and application III dedicated to 100^{th} anniversary of B. V. Gnedenko and 80^{th} anniversary of M. I. Yadrenko. 2012, Kyiv, Ukraine;
— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю проф.

М. І. Шкіля. 13-14 грудня 2012 року, Київ, Україна;

— Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка. 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна;

— The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine. July 08-13, 2013, L'viv, Ukraine;

— Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. September 16-20, 2013, Institute of Mathematics of NASU & Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine;

— Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження Г. М. Положого. 23-24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна;

— П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука. 15-17 травня, 2014 р., Київ, Україна;

— Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня - 5 липня 2014 р., Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна;

— International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine;

та наукових семінарах:

— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);

— семінар відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАНУ А. М. Самойленко);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Г. М. Торбін);

— семінар кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 наукових статтях [1–5], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 2 статті у наукових виданнях, що входять до наукометричних баз даних (Scopus, Zentralblatt MATH), та додатково відображено у матеріалах конференцій [6–15].

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел та списку публікацій автора, переліку умовних позначень та скорочень. Список використаних джерел нараховує 134 найменувань, список публікацій автора — 18. Обсяг дисертації становить 147 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, проведено огляд літератури, описано об'єкт, предмет, мету і завдання, анонсовано основні результати дослідження, які виносяться на захист.

Розділ 1 "**Концептуальні засади дослідження**" носить вступний характер. У ньому описано Q_3 – представлення та Q_3 – зображення дійсних чисел та їхні властивості, викладено теоретичні основи тополого-метричної та фрактальної теорії чисел у цьому зображенні, необхідні для подальшого конструювання та дослідження функцій.

Нехай $A_3 = \{0, 1, 2\}$ — алфавіт, $L = A_3 \times A_3 \times A_3 \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ — фіксована множина додатних дійсних чисел, причому $q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Відомо, що для довільного $x \in [0, 1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L$, *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \qquad (1.2.1)$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Ряд (1.2.1) називається Q_3 – представленням числа x, а скорочений (символічний) запис $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ — його Q_3 – зображенням. Період у Q_3 – зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Існують числа, які мають два Q_3 – зображення. Це числа з періодом (0) або (2), причому $\Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)} =$

$\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](2)}$. Вони називаються Q_3 – *раціональними*, їх множина є зліченною. Решту чисел називають Q_3 – *ірраціональними*.

Частотою цифри i в Q_3 – зображенні числа x називається число $\nu_i^{Q_3}(x)$, яке є границею (якщо вона існує) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$, де $N_i(x,k)$ – кількість цифр i в зображенні x до k-го місця включно.

У другому розділі "**Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа**" введено у розгляд континуальний клас P визначених на $[0;1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у наперед заданому поліосновному Q_3 – зображенні дійсних чисел.

Розглядається фіксоване Q_3 – зображення чисел відрізка $[0;1]$ і дійсні функції f дійсної змінної x, визначені на $[0;1]$ умовами на Q_3 – зображення їх значень:
$y = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$, де $\gamma_n = \gamma_n(y) = \varphi_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Означення 2.1.1. *Кажуть, що функція f зберігає цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, якщо для будь-якого $x \in [0;1]$ цифра 1 у Q_3 – зображеннях чисел $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $y = f(x) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$.*

Теорема 2.1.1. *Множина P всіх функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, є континуальною.*

Основна увага у цьому розділі приділяється ґрунтовному вивченню властивостей інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа — єдиній неперервній строго спадній функції $I(x)$ з класу P, яка означується рівністю:

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},\ \ (\alpha_n) \in L,$$

і має нетривіальні локальні диференціальні властивості. Ця функція залежна від двох параметрів q_0 і q_1, тому дослідження цього розділу стосується континуальної сім'ї функцій.

Теорема 2.2.1. *Для інверсора I цифр Q_3 – зображення чисел відрізка $[0,1]$ має місце рівність*

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q_3'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $Q_3' = \{q_0', q_1', q_2'\}$ і $q_0' = q_2, q_1' = q_1, q_2' = q_0$.

Пункт 2.3 присвячений доведенням неперервності та монотонності інверсора $I(x)$, а п. 2.4 — доведенню критерію його сингулярності:

Теорема 2.4.1. *Якщо $q_0 \neq q_2$, то інверсор I є сингулярною функцією.*

У підрозділі 2.5 вивчаються локальні диференціальні властивості функції $I(x)$.

Теорема 2.5.1. *При $q_0 \neq q_2$ похідна $I'(x_0)$ не існує, якщо:*

1) Q_3 – зображення числа x_0 має простий період (i) або

2) існують частоти $\nu_0(x_0)$ і $\nu_2(x_0)$ цифр 0 та 2 у Q_3 – зображенні числа x_0 і при цьому виконується $(\nu_2(x_0) - \nu_0(x_0))(q_0 - q_2) < 0$.

Фрактальні (самоподібні, самоафінні та автомодельні) властивості інверсора $I(x)$ висвітлюють наступні теореми.

Теорема 2.6.1. *Інверсор I зберігає розмірність Гаусдорфа-Безиковича, тобто довільна борелівська множина і її образ мають однакову розмірність, тоді і тільки тоді, коли $q_0 = q_2$.*

Теорема 2.6.2. *Якщо $q_0 \neq q_2$ і $H-$ множина точок x, в яких не існує скінченної похідної $I'(x)$, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича задовольняє нерівність $\alpha_0(H) \geqslant -2\log_{q_0 q_2} 2$.*

Теорема 2.7.1. *Графік $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0;1]\}$ функції I є самоафінною множиною, а саме: $\Gamma_I = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \phi_i(\Gamma_I)$, де ϕ_i — афінні перетворення, які задаються формулами*

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = -q_{[2-i]} y + \beta_{[3-i]}, \ i \in A_3. \end{cases}$$

Наслідком самоафінних властивостей графіка інверсора є наступна інтегральна властивість.

Теорема 2.8.1. *Має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx = \frac{2q_0q_1 + q_0^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

Розглядається чотири набори дійсних чисел q_i, β_i, b_i та d_i, де $i = 0, 1, 2$, таких, що $q_i > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i$, $|d_i| < 1$, $0 \leqslant b_i < 1$; і система трьох функціональних рівнянь

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2. \qquad (2.9.1)$$

Лема 2.9.1. *Для того, щоб система (2.9.1) мала розв'язки у класі визначених і обмежених на $[0;1]$ функцій, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + \frac{b_2 d_1}{1-d_2} - \frac{b_0 d_2}{1-d_0} = 0, \\ b_0 - b_1 + \frac{b_2 d_0}{1-d_2} - \frac{b_0 d_1}{1-d_0} = 0. \end{cases}$$

Теорема 2.9.1. *Якщо для системи* (2.9.1) *одночасно виконуються умови:*

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ \max_i |d_i| < 1, \\ b_0 = 0, b_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_i > 0, \end{cases} \tag{2.9.5}$$

то у класі обмежених і визначених на $[0;1]$ *функцій вона має єдиний розв'язок — неперервну на* $[0;1]$ *функцію* f, *визначену рівністю*

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[b_{[2-\alpha_k]}\prod_{j=1}^{k-1} d_{[2-\alpha_j]}\right].$$

При виконанні (2.9.5), для різних значень d_i та b_i, $i = \{0,1,2\}$ описано структуру функції f.

Теорема 2.9.3. *Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь*

$$f(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0,1,2,$$

у класі обмежених і визначених у кожній точці $[0;1]$ *функцій є інверсор* I.

У підрозділі 2.10 виписано різні функціональні співвідношення, які задовольняє інверсор $I(x)$.

Основним у дисертаційному дослідженні є розділ 3 "**Неперервні функції, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел**". Він присвячений неперервним функціям з класу P, які при $q_0 \neq q_2$, за виключенням інверсора та тотожного перетворення, є нетривіальними сумішами абсолютно неперервних та сингулярних функцій.

У підрозділі 3.1 доведено, що множина P_c всіх неперервних функцій з класу P є зліченною. Встановлено, що множина функцій з P_c, у яких n-та цифра Q_3 – зображення значення функції залежить лише від n-ї цифри Q_3 – зображення аргумента x, вичерпується тотожним перетворенням та інверсором.

У підрозділі 3.2 досліджується один з найпростіших представників класу функцій $f_1 \in P_c$ з одним нескінченним рівнем (множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$).

Лема 3.2.4. *У класі* P_c *функціональне рівняння*

$$f(x) = f(I(x)), \ x \in [0;1],$$

при умові $f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ *має єдиний розв'язок — функцію* f_1.

Властивості цієї функції описано у наступних теоремах.

Теорема 3.2.1. *Функція f_1 є:*

1) *лінійною зростаючою на циліндрах виду*
$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+2}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$ *та* $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+2}0}$,
де $i\in\{0,2\}$, $n\geqslant 0$, $n,k\in N$;

2) *монотонно спадною на циліндрах виду*
$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$ *та* $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+1}0}$,
де $i\in\{0,2\}$, $n\geqslant 0$, $n,k\in N$. Причому сингулярною при $q_0\neq q_2$ і лінійною при $q_0=q_2$;

3) *набуває свого глобального максимуму в точці $x=\Delta^{Q_3}_{(1)}$ та глобального мінімуму у точках $x=\Delta^{Q_3}_{i(1)}$, причому $f_1(\Delta^{Q_3}_{(1)})=\frac{q_0}{1-q_1}$ і $f_1(\Delta^{Q_3}_{i(1)})=\frac{q_0^2}{1-q_1}$, локальних максимумів у точках виду $x^*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+2}(1)}$, а локальних мінімумів у $x_*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}(1)}$, де $i\in A_3\setminus\{1\}$, $0\leqslant m\in N$.*

Крім того

$$f_1(x^*)=(q_0+q_1)\tfrac{q_0(1-q_0^m q_2^m)}{1-q_0q_2}+\tfrac{q_0^{m+2}q_2^{m+1}}{1-q_1},$$
$$f_1(x_*)=(q_0+q_1)\tfrac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2}+\tfrac{q_0^{m+2}q_2^{m}}{1-q_1}.$$

Для f_1 встановлено ряд функціональних співвідношень (лема 3.2.1).

Теорема 3.2.2. *Функція f_1 має*

1) *наступні «симетрії» графіка:*

$$\Gamma^{f_{1(1)}}\equiv\{(x;y):x\in[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}],y=f_1(x)\}\overset{A}{\sim}\Gamma^{f_{1(1,2n)}}\equiv\{(x;f_1(x)):x\in[0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\},$$

$$\Gamma^{f_{1(2)}}\equiv\{(x;y):x\in(\Delta^{Q_3}_{(1)};1],y=f_1(x)\}\overset{A}{\sim}\Gamma^{f_{1(2,2n)}}\equiv\{(x;f_1(x)):x\in(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(1)};1]\},$$

де $\overset{A}{\sim}$ — знак афінної еквівалентності фігур;

2) *обмежену варіацію V_{f_1}, а саме:*

$$V_{f_1}=\frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

Теорема 3.2.3. *Для функції f_1 має місце рівність*

$$\int_0^1 f_1(x)dx = q_0^2 I_0 + q_1^2 I_1 + q_2 q_0 I_2 + q_0 q_1,$$

$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3 q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3 q_2^2 (2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + q_0^2 q_1 q_2 + q_1^2(I_{01} + q_0 q_2 I_1)\right);$$

$$I_1 = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_2 = \frac{q_1\big(q_0(1-q_1)+q_1(I_{01}+q_2^2 I_1)\big)}{1-q_0q_2^3} + \frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_{01} = \frac{q_0+q_1(1-q_1)+\frac{1}{2}q_2}{1-q_1^2} + \frac{q_0^2 q_2(2q_1+q_0)}{(1-q_1^2)(1-2q_0q_1-q_1^2)}.$$

У підрозділі 3.3 досліджується клас $S \subset P_c$ функцій, які задовольняють умову $\gamma_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \gamma_n(2-c_1, 2-c_2, \ldots, 2-c_n)$ для довільного набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Встановлено, що клас функцій S є зліченним, причому він містить зліченну підмножину P_1 функцій, що мають один нескінченний рівень.

У пункті 3.4 досліджується одна з найпростіших функцій g підмножини P_2 — всіх функцій з P_c, які мають два нескінченні рівні. Цю функцію можна означити наступним чином.

Лема 3.4.2. *У класі P_c функціональне рівняння*

$$f(I(x)) = I(f(x)),\ x \in [0;1],$$

за умов $f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(20)}$ має єдиний розв'язок — функцію g.

Теорема 3.4.1. *Функція g має властивості:*

1) нескінченну множину проміжків зростання та спадання;

2) при $q_0 = q_2$ є кусково-лінійною, а при $q_0 \neq q_2$ — сумішшю сингулярної і кусково-лінійної;

3) графік функції g складається з афінно-еквівалентних множин точок і є «симетрично-подібним» відносно точки $(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$;

4) має два нескінченні рівні: $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ та $y_0' = \Delta^{Q_3}_{(20)}$.

Теорема 3.5.1. *В класі P_c існує зліченна підмножина P_2 функцій, які мають два нескінченні рівні. Не існує функцій з класу P_c, які мають більше, ніж два нескінченні рівні.*

Розділ 4 "**Нескінченно-символьні кодування дійсних чисел, що є модифікацією трисимвольних**" присвячений деякому способу перекодування Q_3 – зображення чисел засобами нескінченносимвольного алфавіту та дослідженню його «геометрії».

Означення 4.2.1. *Зображення* $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ *дійсного числа* $x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots}$, $\mathbb{Z}_0 \ni a_n$ *— це «довжина» серії однакових послідовних* Q_3 *– цифр, називатимемо* $\overline{Q_3}$ *– зображенням числа* x.

Для коректності означення $\overline{Q_3}$ – зображення накладено умови:

а) у $\overline{Q_3}$ *– зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто* $a_na_{n+1}a_{n+2} \neq 000$, $n \in N$;

б) не використовувати Q_3 *– зображення з періодом (2);*

в) число $x = \Delta^{Q_3}_{\ldots(i)}$ *записувати* $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{\ldots1001001001\ldots}$, *де* $i = \{0, 1\}$;

г) два нулі підряд для $\overline{Q_3}$ *– зображення числа вживати у виключних випадках, а саме: якщо* $x = \Delta^{Q_3}_{2\alpha_2\alpha_3\ldots}$, *тоді* $x = \overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{00a_3\ldots}$, *де* $a_3 > 0$, *або число має простий період* (i), *про яке згадувалось у в).*

У лемах 4.1.1 і 4.2.1 розкриваються властивості циліндричних множин $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m}$ та основні метричні відношення:

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_mc})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})} = \frac{q_i^c(1-q_i)}{(1-q_j)} \text{ при } c_m \cdot c \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m0})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})} = \frac{q_{i+1}}{1-q_j} \text{ при } c_m \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0})} = q_i^{c-1}(1-q_i) \text{ при } c \neq 0,$$

де $i \equiv m(mod\,3)$, $j \equiv m-1(mod\,3)$, $m \in \mathbb{N}$.

У п. 4.2 розв'язуються метричні задачі, що пов'язані з множинами чисел, визначеними певними умовами на їх $\overline{Q_3}$ – зображення.

Теорема 4.2.1. *Міра Лебега множини* $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1,m}\}$ *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \frac{q_{\alpha_r}^{c_m}(1-q_{\alpha_r})^{\psi(c_m)}}{q_{\alpha_t}^{\psi(c_m)-1}} \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_m-1\\ i\neq k_1, i\neq k_2,\ldots,i\neq k_{m-1}}} q_0^{\sum\limits_{i\in(3n-2)} a_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{i\in(3n-1)} a_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{i\in(3n)} a_i},$$

де $\alpha_r \equiv k_m - 1(mod\,3)$, $\alpha_t \equiv k_m(mod\,3)$ *і* $\psi(c_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_m \in \mathbb{N},\\ 0, & \text{якщо } c_m = 0.\end{cases}$

Теорема 4.2.2. *Міра Лебега множини*

$$\overline{\Delta}^{k_1 k_2 \ldots k_m \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots} = \{x : x = \overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1 a_2 \ldots a_m \ldots}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathbb{N}\}$$

чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ *– символів рівна нулю.*

ВИСНОВКИ

Функції зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, зокрема сингулярні та «кусково-сингулярні» функції, є актуальним об'єктом сучасних досліджень. Але їх загальна теорія мало розвинена, її розвиток реалізується в основному за рахунок індивідуальних теорій (окремих функцій та сімей функцій, залежних від набору параметрів). Ця проблема пов'язана з пошуком ефективних засобів їх задання та вивчення.

В останні роки для вирішення цієї проблеми все частіше використовують різні системи кодування дійсних чисел зі скінченним та нескінченним, сталим та змінним алфавітами. До них належить і класичне трійкове зображення чисел, і його узагальнення — поліосновне Q_3 – зображення чисел, яке теж має самоподібну геометрію, але його цифри втрачають роль чисел і виступають лише в ролі індексів. Саме це зображення ми використовували для задання (конструювання) функцій з нетривіальною множиною особливостей диференціального характеру, їх ґрунтовного вивчення та побудови нового нескінченносимвольного зображення з несамоподібною геометрією.

У дисертаційній роботі отримано такі результати:

— введено у розгляд клас P функцій, які зберігають цифру 1 у заданому поліосновному Q_3 – зображенні чисел, і доведено, що він є континуальним;

— доведено, що клас P_c неперервних функцій з класу P є зліченним; функції цього класу не можуть мати більше двох нескінченних рівнів, причому сім'ї P_1 і P_2 функцій, що мають один нескінченний рівень та два нескінченних рівні відповідно, також є зліченними;

— встановлено, що у класі P_c існує лише два бієктивних відображення відрізка $[0; 1]$ на себе, це тотожне перетворення та інверсор цифр;

— детально вивчено властивості інверсора цифр числа, а саме: доведено, що ця функція є лінійною при $q_0 = q_2$ і сингулярною при $q_0 \neq q_2$, описано диференціальні, інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості і встановлено ряд функціональних співвідношень;

— доведено, що при $q_0 \neq q_2$ кожна функція з класу P_c, за виключенням тотожного перетворення, має сингулярні властивості, а саме: є сингулярною на кожному проміжку спадання і лінійною на проміжку зростання;

— для найпростіших представників f_1 і g класів P_1 і P_2 відповідно, визначених умовами симетрій, описано тополого-метричні, диференціальні, інтегральні, варіаційні, самоафінні та фрактальні, локальні та глобальні властивості;

— сконструйовано та вивчено несамоподібне нескінченно-символьне зображення чисел, яке є модифікацією трисимвольного Q_3 – зображення, описано його геометрію (тополого-метричні властивості циліндрів та напівциліндрів);

— розв'язано кілька метричних задач стосовно множин канторівського типу чисел, визначених умовами на їх зображення.

Проведені дослідження лежать у руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною структурою (поведінкою), пов'язаних з сингулярними та кусково-сингулярними функціями, сингулярними розподілами ймовірностей, скінченно-символьними системами кодування дійсних чисел, інтерес до яких зростає.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути корисними при розв'язанні задач теорії функцій, метричної теорії чисел та теорії сингулярних розподілів випадкових величин.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Замрій І. В.* Модифіковане $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел та його геометрія / Замрій І. В. // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова.* Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2). — С. 22-33.
2. *Замрій І. В.* Модифікація класичного трійкового зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом / Замрій І. В. // *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова.* Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 86-96.

3. *Замрій І. В.* Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь / Працьовитий М. В., Замрій І. В. // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова.* Серія 1. Фіз.-мат. науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 156-167.
4. *Замрій І. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // *Нелінійні коливання (ISSN 1562-3076).* — **18**, 1. — Інститут математики НАН України. — 2015 р. — С. 55-70.
5. *Замрій І. В.* Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3 – зображення числа / Працьовитий М. В., Замрій І. В. // *Буковинський математичний журнал.* — **3**, 3-4. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. — С. 142-159.
6. *Zamriy I. V.* On a system of expansion of numbers with infinite alphabet / Zamriy I. V. // *International conference on algebra dedicated to* 100^{th} *anniversary of S. M. Chernikov.* 2012, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine. — P. 178.
7. *Zamriy I. V.* Properties of distributions of random variables related to different systems of representation / Zamriy I. V., Sukholit Yu. Yu. // *International conference modern stochastics: theory and application III dedicated to* 100^{th} *anniversary of B. V. Gnedenko and* 80^{th} *anniversary of M. I. Yadrenko.* 2012, Kyiv, Ukraine. Taras Shevchenko National University. — P. 14.
8. *Замрій І. В.* Модифіковане $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел та його застосування / Замрій І. В. // *Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю М. І. Шкіля.* 13-14 грудня, 2012, Київ, Україна. — С. 61-62.
9. *Замрій І. В.* Локальні властивості одного класу функцій з $C[0,1]$ / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // *Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка,* 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна. — С. 236-237.
10. *Zamriy I. V.* Sets of numbers with restrictions on use of $\overline{Q_3}$ - symbols / Zamriy I. V. // *The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine.* Lviv, July 08-13, 2013 — P. 224.

11. *Zamriy I. V.* Modified $\overline{Q_3^*}$ – representation, features and criteria of rationality (irrationality) representation of real numbers / Zamriy I. V. // *Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations.* September 16-20, 2013. — Kyiv: In-te of Mathematics of NASU & In-te of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University. — P. 115-116.
12. *Замрій I. В.* Інверсор Q_3^* – зображення дробової частини дійсного числа / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження Г. М. Положого.* 23-24 квітня, 2014, Київ, Україна: Матер. конф. — С. 63.
13. *Замрій I. В.* Трибін-функція та її властивості / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // *П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука,* 15-17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 91.
14. *Замрій I. В.* Локальна структура і фрактальні властивості функцій-перетворювачів цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // *IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана.* Тези доп. — Чернівецький національний університет, 30 червня - 5 липня, 2014 р. — С. 54-55.
15. *Zamriy I. V.* Inversor of digits of Q_3 – representation of fractional part of real number as a distribution function of random variable / Pratsiovytyi M. V., Zamriy I. V. // *International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization».* Kyiv, Ukraine, April 7-10, 2015. — P. 23.

АНОТАЦІЇ

Замрій І. В. Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню неперервних на

відрізку сингулярних та кусково-сингулярних функцій, означених у термінах наперед заданого поліосновного трисимвольного Q_3 – зображення чисел, що залежить від трьох параметрів і є узагальненням класичного трійкового зображення; вивченню їхніх локальних та глобальних властивостей: структурних, варіаційних, екстремальних, диференціальних, інтегральних, фрактальних тощо. У ній досліджується сім'я неперервних функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел. Доведено, що серед функцій цього класу немає функцій з континуальними рівнями і те, що функція може мати не більше двох нескінченних рівнів. Особливу роль у цій сім'ї відіграє єдина строго спадна у переважній більшості сингулярна функція, названа інверсором цифр Q_3 – зображення, детальний опис властивостей якої здійснено у роботі. Також проведено ґрунтовне дослідження властивостей модельних представників зліченних підкласів функцій з одним та двома нескінченними рівнями відповідно, які, взагалі кажучи, є кусково-сингулярними. Для них знайдено еквівалентні означення.

Введено у розгляд та вивчено несамоподібне нескінченно-символьне зображення чисел, яке є модифікацією Q_3 – зображення, описано його геометрію і розв'язано ряд метричних задач стосовно множин чисел, визначених умовами на вживання символів зображення.

Ключові слова: сингулярна функція, інверсор цифр Q_3 – зображення числа, самоафінна множина, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, множина рівня функції.

Замрий И. В. Фрактальные свойства функций, связанных с трисимвольными системами кодирования действительных чисел и их модификациями. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию непрерывных на отрезке сингулярных и кусочно-сингулярных функций, определенных в терминах заранее заданного полиосновного трисимвольного Q_3 – изображения чисел, которое зависит от трех параметров и является обобщением классического троичного изображения; изучению их локальных и глобальных свойств: структурных, вариацион-

ных, экстремальных, дифференциальных, интегральных, фрактальных и т.п.

Исследуемые функции определяются в терминах Q_3 – представления (Q_3 – изображения чисел), а именно:

$$[0,1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

где (q_0, q_1, q_2) – заранее заданный набор положительных чисел таких, что $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\alpha_n(x) \in \{0, 1, 2\}$.

Основным объектом исследования есть непрерывная функция f, удовлетворяющая условиям

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} \text{ и } \gamma_n = \begin{cases} \gamma_n(y) = \gamma_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ \gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1. \end{cases}$$

Доказано, что в этой семье функций не существует функций с континуальными уровнями и то, что не существует функций, которые имеют больше двух бесконечных уровней. Особенную роль в этой семье играет единственная строго убывающая сингулярная (при $q_0 \neq q_2$) функция, определенная равенством

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},$$

названная инверсором цифр Q_3 – изображения, подробное описание свойств которой осуществлено в работе. Функция I может быть определена как единственное решение системы функциональных уравнений:

$$f(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2,$$

в классе непрерывных функций.

Также исследованы свойства модельных представителей счетных классов функций с одним и двумя бесконечными уровнями соответственно. А именно: функций f и g, которые являются единственным решением в классе непрерывных функций систем уравнений

$$\begin{cases} f(x) = f(I(x)), \\ f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(I(x)) = I(g(x)), \\ g(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}, \\ g(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(20)}. \end{cases}$$

Введено в рассмотрение и изучено несамоподобное бесконечносимвольное изображение чисел, которое является модификацией Q_3 – изображения, описано его геометрию и решено ряд метрических задач относительно множеств чисел, определенных условиями на использование символов изображения.

Ключевые слова: сингулярная функция, инверсор цифр Q_3 – изображения числа, самоаффинное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича, множество уровня функции.

Zamriy I. V. Fractal properties of functions associated with three-symbolic system of real numbers coding and their modifications. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to researching of continuous on segment piecewise singular and singular functions defined in terms of given polybasic three-symbolic Q_3 – representation of real numbers, that depends from three parameters and is a generalization of classic ternary representation of real numbers. Also in the thesis we study for mentioned above functions their local and global properties (structural, variational, extremal, differential, integral, fractal etc). We investigate the family of continuous functions that preserve the digit 1 in Q_3 – representation of real numbers. It is proved that among the functions of this class are not exist functions with continual levels and that such functions may have no more than two infinite levels. A special role in this family has unique strictly decreasing function, called the inversor of Q_3 – representation digits, detailed description of which properties is made the thesis. Also we thoroughly study the properties of model representatives of countable subclasses of functions with one and two infinite levels respectively. We found equivalent definition for them.

We put into consideration and study non-self-similar infinite-symbolic representation of real numbers, which is a modification of Q_3 – representation, describe its geometry and solve some metric problems for sets of real numbers defined by conditions for their representation.

Key words: singular function, inversor of Q_3 – representation digits of real number, self-affine set, Hausdorff-Besicovitch dimension, the set of level of function.

Підписано до друку 11.07.2016. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,25. Умовн. друк. арк. 1,16.
Тираж 100 пр.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова, 01004, м. Київ, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002
(044) 239-30-26