Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

Замрій Ірина Вікторівна

УДК 517.51

Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Самойленко Анатолій Михайлович,
доктор фіз-мат. наук, академік НАН України

Київ — 2016

ЗМІСТ

СПИСОК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

N — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}_0$ — множина невід'ємних цілих чисел;

R — множина дійсних чисел;

$C_{[0;1]}$ — множина неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій;

$A_3 \equiv \{0,1,2\}$ — алфавіт трисимвольної системи;

$\lambda(W)$ — міра Лебега множини W;

$\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — трійкове зображення числа $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$;

$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — Q_3 – зображення числа $x = \beta_{\alpha_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right]$;

$\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$ — $\overline{3}$ – зображення числа x;

$\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1a_2\ldots a_k\ldots}$ — $\overline{Q_3}$ – зображення числа x;

$\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$ — циліндр рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$;

$\Delta^{k_1k_2\ldots k_n}_{c_1c_2\ldots c_n}$ — напівциліндр з основою $\begin{pmatrix} k_1k_2\ldots k_m \\ c_1c_2\ldots c_m \end{pmatrix}$.;

$N_i(x,k)$ — кількість цифр $i \in A_3$ в зображенні числа x до k - го місця включно;

$\nu_i(x)$ — частота цифри $i \in A_3$ в зображенні числа x;

$I(x)$ — інверсор цифр Q_3 – зображення числа x;

P — клас функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел;

P_c — клас неперервних на $[0;1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел;

f_1 — функція з P_c, яка має один нескінченний рівень;

g — функція з P_c, яка має два нескінченних рівня.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню неперервних функцій з сингулярними та фрактальними властивостями, які означені в термінах наперед заданого трисимвольного зображення дійсних чисел відрізка $[0;1]$ з самоподібною геометрією, а саме: Q_3 – зображення чисел.

Актуальність. Метричний простір $C_{[0;1]}$ неперервних функцій з рівномірною метрикою багатий функціями зі складною локальною структурою і «масивними» множинами різних особливостей. До таких відносяться неперервні ніде не монотонні, звивисті, недиференційовні функції (відомі теореми Банаха-Мазуркевича і Козирєва [34] констатують топологічне багатство їх сімей — це множини другої категорії Бера), а також сингулярні функції (неперервна функція, відмінна від константи, називається сингулярною, якщо її похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега). Топологічно масивною є і множина всіх сингулярних функцій, про що свідчить теорема Замфіреску [134]: сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера.

Добре відома теорема Лебега [51, ст. 248] стверджує, що кожна дійсна функція дійсної змінної обмеженої варіації, взагалі кажучи, є або функцією стрибків, або абсолютно неперервною функцією, або сингулярною, або нетривіальною сумішшю попередніх трьох чистих лебегівських типів. При цьому кожна неперервна функція є або абсолютно неперервною, або сингулярною, або їх сумою (сумішшю). Серед чистих лебегівських типів сингулярні функції представляють найменш вивчений клас. Разом з цим сингулярні функції є окремим предметом дослідження вже більше 100 років. Їх перші приклади належать видатним математикам: Г. Кантору [40], Е. Хелінгеру [111], В. Серпінському [83, 129], Г. Мінковському [121] та ін. Запропоновані ними конструкції стосувались функцій монотонних і навіть строго зростаючих (за виключенням функції Кантора — неспадної функції «рівномірного» розподілу ймовірностей на множині Кантора, яка зростає виключно у точках цієї множини). Складається враження, що тривалий час відбувалось неоголошене змагання на побудову найпростішого прикладу сингулярної функції. І дехто вважав [17], що таким є приклад Р. Салема [126] (1943 р.). Але, на наш погляд, більш простим прикладом є інверсор Q_2 – зображення [77], аналог якого ми досліджуємо у даній роботі.

Монотонні сингулярні функції тісно пов'язані з сингулярними розподілами ймовірностей (це розподіли, зосереджені на нуль-множинах Лебега), а саме: вони виступають в ролі функцій розподілу випадкових величин. Домінування таких розподілів переконливо доведено в різних класах випадкових величин, цифри зображення яких в тій чи іншій системі кодування числа є незалежними [76, 5].

На основі загального інтересу до сингулярних функцій виникає природний інтерес до немонотонних сингулярних функцій та нетривіальних сумішей сингулярних і абсолютно неперервних функцій. Легко будуються приклади немонотонних сингулярних функцій канторівського типу (функцій, проміжки сталості яких утворюють множину повної міри). Як зазначається в роботі 2014 року А. Н. Агаджанова [1], перші приклади ніде не монотонних сингулярних функцій були побудовані у 50-х роках XX століття індійськими математиками (Shukla U. K., Gard K. M.). Зазначимо, що нескладні приклади сингулярних ніде не монотонних функцій побудовані у роботі М. В. Працьовитого [69]. На даний момент існує лише кілька робіт, присвячених таким функціям. Суміші сингулярних та абсолютно неперервних функцій до цих пір не стали предметом самостійного серйозного вивчення. В цьому відношенні логічним є запитання: в яких «відносно простих» класах такі функції є домінуючими? І де вони природнім чином з'являються?

Існує ряд проблем, повязаних з сингулярними функціями, однією з яких є проблема ефективних способів їх задання та дослідження. В останній час з цією метою використовуються різні системи зображення (кодування) дійсних чисел як зі скінченним так і нескінченним алфавітом, однією з таких є Q – зображення чисел, вперше введене у 1986 році М. В. Працьовитим. Воно використовувалось для дослідження сингулярних функцій, але монотонних. Ми ж використовуємо Q – зображення чисел для дослідження немонотонних кусково-сингулярних функцій. Нас цікавить, зокрема фрактальний аспект дослідження.

Фрактальна геометрія з групової точки зору є теорією інваріантів групи перетворень метричного простору, які зберігають фрактальну розмірність (Гаусдорфа-Безиковича, ентропійну, пакувальну, клітинкову та інші). Її плідними ідеями є ідеї самоподібності, самоафінності, автомодельності, а важливою методологічною проблемою — наявність ефективних засобів для аналітичного задання та дослідження об'єктів. Графіки функцій зі складною локальною будовою як множини простору R^2 потенційно мають фрактальні властивості.

У дисертації досліджується нескінченний клас неперервних функцій, які при заданих початкових умовах на зображення є кусково-сингулярними і для цього використовуємо трисимвольне Q_3 – зображення чисел, яке є узагальненням класичного трійкового зображення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень об'єктів математичного аналізу зі складною локальною будовою і автомодельними властивостями, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження здійснювалось у рамках науково-дослідних тем:

— «Дослідження еволюційних детермінованих та стохастичних систем складної тополого-метричної структури. Фрактальні властивості, керованість» (№ державної реєстрації 0115U000557);

— «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (№ державної реєстрації 0111U000053);

— «Системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали» (№ державної реєстрації 0113U003009).

Об'єкт дослідження. Основними об'єктами дослідження є:

1) неперервні функції, які зберігають цифру 1 (без її «примноження») у заданому Q_3 – зображенні чисел;

2) модифікація Q_3 – зображення чисел, яка ґрунтується на перекодуванні числа засобами нескінченного алфавіту.

Предмет дослідження.

1. Локальні та глобальні структурні, самоафінні, автомодельні та фрактальні, варіаційні, диференціальні та інтегральні властивості функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел;

2. Геометрія модифікованого $\overline{Q_3}$ – зображення чисел, його тополого-метричні властивості.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційного дослідження* є опис властивостей класу функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, і розгорнутий аналіз властивостей його окремих представників; обґрунтування модифікації Q_3 – зображення чисел засобами нескінченного алфавіту, дослідження специфіки та властивостей останньої.

Його основні *завдання* полягають у наступному:

— встановити масивність множини функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні аргумента, та її підмножин:

- неперервних функцій;
- неперервних функцій з нескінченними рівнями;
- неперервних функцій з одним та двома нескінченними рівнями;

— для найпростіших «модельних» представників класу неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, знайти «аналітичне задання» і детально вивчити властивості, включаючи лебегівську структуру (вміст абсолютно неперервної та сингулярної компонент);

— для вибраних представників знайти функціональні співвідношення та еквівалентні означення у термінах розв'язків систем функціональних рівнянь;

— побудувати модифікацію класичного трійкового та його узагальнення — Q_3 – зображення числа, використовуючи нескінченний алфавіт $\mathbb{Z}_0$; обґрунтувати його коректність, встановити геометричний зміст символів, властивості циліндрів та напівциліндрів, розв'язати деякі метричні та позиційні задачі;

— вивчити властивості множин чисел з фіксованими символами $\overline{3}$ – та $\overline{Q_3}$ – зображення.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, метричної теорії чисел. Використовувалась методологія дослідження структури локальних та фрактальних властивостей функцій, розроблена М. В. Працьовитим та його учнями.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

— доведено, що клас P функцій, які зберігають цифру 1 у заданому поліосновному Q_3 – зображенні чисел, є континуальним, а його підклас P_c неперервних функцій є зліченним;

— функції класу P_c не можуть мати більше двох нескінченних рівнів, причому сім'ї P_1 і P_2 функцій, що мають один нескінченний рівень та два нескінченних рівні відповідно, також є зліченними;

— встановлено, що у класі P_c існує лише два бієктивних відображення відрізка $[0;1]$ на себе, це тотожне перетворення та інверсор цифр зображення;

— детально вивчено властивості інверсора цифр Q_3 – зображення чисел, зокрема: доведено, що інверсор є лінійною функцією при $q_0 = q_2$ і сингулярною при $q_0 \neq q_2$, описано диференціальні, інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості і встановлено ряд функціональних співвідношень;

— доведено, що при $q_0 \neq q_2$ кожна функція з класу P_c, за виключенням тотожного перетворення, має сингулярні властивості, а саме: є сингулярною на кожному проміжку спадання і лінійною на проміжку зростання;

— для найпростіших представників f_1 і g класів P_1 і P_2 відповідно, які задовольняють певні умови симетрій, описано тополого-метричні, диференціальні, інтегральні, варіаційні, самоафінні та фрактальні, локальні та глобальні властивості;

— запропоновано нове несамоподібне нескінченно-символьне зображення дійсних чисел, яке є модифікацією поліосновного трисимвольного Q_3 – зображення, і вивчено його геометрію (тополого-метричні властивості циліндрів та напівциліндрів);

— описано метричні властивості множин чисел, визначених умовами на їх модифіковане Q_3 – зображення.

Одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної та метричну теорію чисел, зокрема у теорію функцій з сингулярними властивостями. Запропоновані у дисертації прийоми та методи можуть бути використані при дослідженні функцій з нетривіальною локальною будовою і фрактальними властивостями, визначених іншими інваріантами зображень.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті, що належать автору. У спільних з Працьовитим М. В. публікаціях співавтору належить постановка окремих задач, перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на конференціях різного рівня:

— International conference on algebra dedicated to 100^{th} anniversary of S. M. Chernikov. August 20-26, 2012, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine;

— International conference modern stochastics: theory and application III dedicated to 100^{th} anniversary of B. V. Gnedenko and 80^{th} anniversary of M. I. Yadrenko. September 10-14, 2012, Kyiv, Ukraine;

— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю проф. М. І. Шкіля. 13-14 грудня 2012 року, Київ, Україна;

— Єдність навчання і наукових досліджень — головний принцип університету. Звітно-наукова конференція викладачів університету за 2012 рік. 9-10 лютого 2013 року, НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна;

— Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». 26-27 червня 2013р., НУХТ, Київ, Україна;

— Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка. 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна;
— The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine. July 08-13, 2013, Lviv, Ukraine;
— Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. September 16-20, 2013, Institute of Mathematics of NASU & Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine;
— Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження Г. М. Положого. 23-24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна;
— П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука. 15-17 травня, 2014 р., Київ, Україна;
— Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня - 5 липня 2014 р., Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна;
— International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». April 7-10, 2015, Kyiv, Ukraine;
— Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. 23-25 квітня 2015 р., Київ, Україна;

та наукових семінарах:

— семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);
— семінар відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: академік НАН України

А. М. Самойленко);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Г. М. Торбін);

— семінар кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 5 наукових статтях [1[a]]—[5[a]] опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 2 статті у наукових виданнях, що входять до наукометричних баз даних (Scopus, Zentralblatt MATH), та додатково відображено у матеріалах конференцій [6[a]]—[18[a]].

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел та списку публікацій автора, переліку умовних позначень та скорочень. Список використаних джерел нараховує 134 найменувань, список публікацій автора — 18. Обсяг дисертації становить 147 сторінок.

Основний зміст роботи. У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, проведено огляд літератури, описано об'єкт, предмет, мету і завдання, анонсовано основні результати дослідження, які виносяться на захист.

Розділ 1 "**Концептуальні засади дослідження**" носить вступний характер. У ньому описано Q_3 – представлення та Q_3 – зображення дійсних чисел та їхні властивості, викладено теоретичні основи тополого-метричної та фрактальної теорії чисел у цьому зображенні, необхідні для подальшого конструювання та дослідження функцій.

Нехай $A_3 = \{0, 1, 2\}$ — алфавіт, $L = A_3 \times A_3 \times A_3 \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ — фіксована множина додатних дійсних чисел, причому $q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Відомо, що для довільного $x \in [0, 1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L$*, така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \tag{1.2.1}$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Ряд (1.2.1) називається Q_3 – представленням числа x, а скорочений (символічний) запис $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ — його Q_3 – зображенням. Період у Q_3 – зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Існують числа, які мають два Q_3 – зображення. Це числа з періодом (0) або (2), причому

$$\Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1](2)}.$$

Вони називаються Q_3 – *раціональними*, їх множина є зліченною. Решту чисел називають Q_3 – ірраціональними.

Частотою цифри i в Q_3 – зображенні числа x називається число $\nu_i^{Q_3}(x)$, яке є границею (якщо вона існує) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$, де $N_i(x, k)$ – кількість цифр i в зображенні x до k-го місця включно.

У другому розділі "**Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа**" введено у розгляд континуальний клас P визначених на $[0; 1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у наперед заданому поліосновному Q_3 – зображенні дійсних чисел.

Розглядається фіксоване Q_3 – зображення чисел відрізка $[0; 1]$ і дійсні функції f дійсної змінної x, визначені на $[0; 1]$ умовами на Q_3 – зображення їх значень:

$$y = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots}, \text{ де } \gamma_n = \gamma_n(y) = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Означення 2.1.1. *Кажуть, що функція f зберігає цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, якщо для будь-якого $x \in [0;1]$ цифра 1 у Q_3 – зображеннях чисел $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ і $y = f(x) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n...}$ знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$.*

Теорема 2.1.1. *Множина P всіх функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, є континуальною.*

Основна увага у цьому розділі приділяється ґрунтовному вивченню властивостей інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа — єдиній неперервній строго спадній функції $I(x)$ з класу P, яка означується рівністю:

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]...[2-\alpha_n]...}, \ \ (\alpha_n) \in L,$$

і має нетривіальні локальні диференціальні властивості. Ця функція залежна від двох параметрів q_0 і q_1, тому дослідження цього розділу стосується континуальної сім'ї функцій.

Теорема 2.2.1. *Для інверсора I цифр Q_3 – зображення чисел відрізка $[0,1]$ має місце рівність*

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},$$

де $Q'_3 = \{q'_0, q'_1, q'_2\}$ і $q'_0 = q_2, q'_1 = q_1, q'_2 = q_0$.

Пункт 2.3 присвячений доведенням неперервності та монотонності інверсора $I(x)$, а п. 2.4 — доведенню критерію його сингулярності:

Теорема 2.4.1. *Якщо $q_0 \neq q_2$, то інверсор I є сингулярною функцією.*

У підрозділі 2.5 вивчаються локальні диференціальні властивості функції $I(x)$.

Теорема 2.5.1. *При $q_0 \neq q_2$ похідна $I'(x_0)$ не існує, якщо:*

1) Q_3 – зображення числа x_0 має простий період (i) або

2) існують частоти $\nu_0(x_0)$ і $\nu_2(x_0)$ цифр 0 та 2 у Q_3 – зображенні числа x_0 і при цьому виконується $(\nu_2(x_0) - \nu_0(x_0))(q_0 - q_2) < 0$.

Фрактальні (самоподібні, самоафінні та автомодельні) властивості інверсора $I(x)$ висвітлюють наступні теореми.

Теорема 2.6.1. *Інверсор I зберігає розмірність Гаусдорфа-Безиковича, тобто довільна борелівська множина і її образ мають однакову розмірність, тоді і тільки тоді, коли $q_0 = q_2$.*

Теорема 2.6.2. *Якщо $q_0 \neq q_2$ і $H-$ множина точок x, в яких не існує скінченної похідної $I'(x)$, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича задовольняє нерівність*

$$\alpha_0(H) \geqslant -2\log_{q_0 q_2} 2.$$

Теорема 2.7.1. *Графік $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ функції I є самоафінною множиною, а саме: $\Gamma_I = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \phi_i(\Gamma_I)$, де ϕ_i — афінні перетворення, які задаються формулами*

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = -q_{[2-i]} y + \beta_{[3-i]}, \ i \in A_3. \end{cases}$$

Наслідком самоафінних властивостей графіка інверсора є наступна інтегральна властивість.

Теорема 2.8.1. *Має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx = \frac{2q_0q_1 + q_0^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

У пункті 2.9 знайдено еквівалентне означення інверсора як неперервного розв'язку системи трьох функціональних рівнянь.

Розглядається чотири набори дійсних чисел q_i, β_i, b_i та d_i, де $i = 0, 1, 2$, таких, що $q_i > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i$, $|d_i| < 1$, $0 \leqslant b_i < 1$; і система трьох функціональних рівнянь

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2. \qquad (2.9.1)$$

Лема 2.9.1. *Для того, щоб система* (2.9.1) *мала розв'язки у класі визначених і обмежених на* $[0,1]$ *функцій, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + \dfrac{b_2 d_1}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_2}{1-d_0} = 0, \\ b_0 - b_1 + \dfrac{b_2 d_0}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_1}{1-d_0} = 0. \end{cases}$$

Теорема 2.9.1. *Якщо для системи* (2.9.1) *одночасно виконуються умови:*

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ \max\limits_i |d_i| < 1, \\ b_0 = 0, b_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_i > 0, \end{cases} \tag{2.9.5}$$

то у класі обмежених і визначених на $[0,1]$ *функцій вона має єдиний розв'язок — неперервну на* $[0,1]$ *функцію* f*, визначену рівністю*

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[b_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} d_{[2-\alpha_j]} \right].$$

При виконанні (2.9.5), для різних значень d_i та b_i, $i = \{0,1,2\}$ описано структуру функції f.

Теорема 2.9.3. *Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь*

$$f(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0,1,2,$$

у класі обмежених і визначених у кожній точці $[0,1]$ *функцій є інверсор.*

У підрозділі 2.10 виписано різні функціональні співвідношення, які задовольняє інверсор $I(x)$.

Основним у дисертаційному дослідженні є розділ 3 "**Неперервні функції, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел**". Він присвячений неперервним функціям з класу P, які при $q_0 \neq q_2$, за виключенням інверсора та тотожного перетворення, є нетривіальними сумішами абсолютно неперервних та сингулярних функцій.

У підрозділі 3.1 доведено, що множина P_c всіх неперервних функцій з класу P є зліченною. Встановлено, що множина функцій з P_c, у яких n-та цифра Q_3 – зображення значення функції залежить лише від n-ї цифри Q_3 – зображення аргумента x, вичерпується тотожним перетворенням та інверсором.

У підрозділі 3.2 досліджується один з найпростіших представників класу функцій $f_1 \in P_c$ з одним нескінченним рівнем (множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$).

Лема 3.2.4. У класі P_c функціональне рівняння

$$f(x) = f(I(x)),\ x \in [0; 1],$$

при умові $f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ має єдиний розв'язок — функцію f_1.

Властивості цієї функції описано у наступних теоремах.

Теорема 3.2.1. *Функція f_1 є:*

1) *лінійною зростаючою на циліндрах виду*

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+2}\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}\ \text{та}\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+2}0},$$

де $i \in \{0, 2\}$, $n \geqslant 0$, $n, k \in N$;

2) *монотонно спадною на циліндрах виду*

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}\ \text{та}\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+1}0},$$

де $i \in \{0, 2\}$, $n \geqslant 0$, $n, k \in N$. Причому сингулярною при $q_0 \neq q_2$ і лінійною при $q_0 = q_2$;

3) *набуває свого глобального максимуму в точці $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$ та глобального мінімуму у точках $x = \Delta^{Q_3}_{i(1)}$, причому $f_1(\Delta^{Q_3}_{(1)}) = \dfrac{q_0}{1-q_1}$ і $f_1(\Delta^{Q_3}_{i(1)}) = \dfrac{q_0^2}{1-q_1}$, локальних максимумів у точках виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+2}(1)}$, а локальних мінімумів у $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}(1)}$, де $i \in A_3 \setminus \{1\}$, $0 \leqslant m \in N$. Крім того*

$$f_1(x^*) = (q_0 + q_1)\frac{q_0(1 - q_0^m q_2^m)}{1 - q_0 q_2} + \frac{q_0^{m+2} q_2^{m+1}}{1 - q_1},$$

$$f_1(x_*) = (q_0 + q_1)\frac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^m}{1-q_1}.$$

Для f_1 встановлено ряд функціональних співвідношень (лема 3.2.1).

Теорема 3.2.2. *Функція f_1 має*

1) *наступні «симетрії» графіка:*

$$\Gamma^{f_{1(1)}} \equiv \{(x;y): x \in [0;\Delta^{Q_3}_{(1)}], y = f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(1,2n)}} \equiv \{(x;f_1(x)): x \in [0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\},$$

$$\Gamma^{f_{1(2)}} \equiv \{(x;y): x \in (\Delta^{Q_3}_{(1)};1], y = f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(2,2n)}} \equiv \{(x;f_1(x)): x \in (\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(1)};1]\},$$

де $\overset{A}{\sim}$ — знак афінної еквівалентності фігур;

2) *обмежену варіацію V_{f_1}, а саме:*

$$V_{f_1} = \frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

Теорема 3.2.3. *Для функції f_1 має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f_1(x)dx = q_0^2 I_0 + q_1^2 I_1 + q_2 q_0 I_2 + q_0 q_1,$$

$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + q_0^2q_1q_2 + q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1)\right);$$

$$I_1 = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_2 = \frac{q_1\left(q_0(1-q_1)+q_1(I_{01}+q_2^2I_1)\right)}{1-q_0q_2^3} + \frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_{01} = \frac{q_0+q_1(1-q_1)+\frac{1}{2}q_2}{1-q_1^2} + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{(1-q_1^2)(1-2q_0q_1-q_1^2)}.$$

У підрозділі 3.3 досліджується клас $S \subset P_c$ функцій, які задовольняють умову $\gamma_n(c_1,c_2,\ldots,c_n) = \gamma_n(2-c_1,2-c_2,\ldots,2-c_n)$ для довільного набору цифр $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Встановлено, що клас функцій S є зліченним, причому він містить зліченну підмножину P_1 функцій, що мають один нескінченний рівень.

У пункті 3.4 досліджується одна з найпростіших функцій g підмножини P_2 — всіх функцій з P_c, які мають два нескінченні рівні. Цю функцію можна означити наступним чином.

Лема 3.4.2. У класі P_c функціональне рівняння

$$f(I(x)) = I(f(x)),\ x \in [0;1],$$

за умов $f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(20)}$ має єдиний розв'язок — функцію $g(x)$.

Теорема 3.4.1. *Функція g має властивості:*

1) нескінченну множину проміжків зростання та спадання;

2) при $q_0 = q_2$ є кусково-лінійною, а при $q_0 \neq q_2$ — сумішшю сингулярної і кусково-лінійної;

3) графік функції g складається з афінно-еквівалентних множин точок і є «симетрично-подібним» відносно точки $(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$;

4) має два нескінченні рівні: $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ та $y_0' = \Delta^{Q_3}_{(20)}$.

Теорема 3.5.1. *В класі P_c існує зліченна підмножина P_2 функцій, які мають два нескінченні рівні. Не існує функцій з класу P_c, які мають більше, ніж два нескінченні рівні.*

Розділ 4 "**Нескінченно-символьні кодування дійсних чисел, що є модифікацією трисимвольних**" присвячений деякому способу перекодування Q_3 – зображення чисел засобами нескінченносимвольного алфавіту та дослідженню його «геометрії».

Означення 4.2.1. *Зображення $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ дійсного числа*

$$x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots},$$

$\mathbb{Z}_0 \ni a_n$ *— це «довжина» серії однакових послідовних Q_3 – цифр, називатимемо $\overline{Q_3}$ – зображенням числа x.*

Для коректності означення $\overline{Q_3}$ – зображення накладено умови:

а) у $\overline{Q_3}$ – зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 000, \ n \in N$;

б) використовувати лише одне з двох зображень Q_3 – раціональних чисел, а саме з періодом (0);

в) число $x = \Delta^{Q_3}_{\dots(i)}$ записувати $\Delta^{\overline{Q_3}}_{\dots 1001001001\dots}$, де $i = \{0, 1\}$;

г) два нулі підряд для $\overline{Q_3}$ – зображення числа вживати у виключних випадках, а саме: якщо $x = \Delta^{Q_3}_{2\alpha_2\alpha_3\dots}$, тоді $x = \Delta^{\overline{Q_3}}_{00a_3\dots}$, де $a_3 > 0$, або число має простий період (i), про яке згадувалось у в).

У лемах 4.1.1 і 4.2.1 розкриваються властивості циліндричних множин $\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_m}$ та основні метричні відношення:

$$\frac{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_m c})}{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_m})} = \frac{q_i^c(1-q_i)}{(1-q_j)} \text{ при } c_m \cdot c \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_m 0})}{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_m})} = \frac{q_{i+1}}{1-q_j} \text{ при } c_m \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_{m-1}0c})}{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\dots c_{m-1}0})} = q_i^{c-1}(1-q_i) \text{ при } c \neq 0,$$

де $i \equiv m(mod\, 3)$, $j \equiv m-1(mod\, 3)$, $m \in \mathbb{N}$.

У п. 4.2 розв'язуються метричні задачі, що пов'язані з множинами чисел, визначеними певними умовами на їх $\overline{Q_3}$ – зображення.

Теорема 4.2.1. *Міра Лебега множини*

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1,m}\}$$

обчислюється за формулою:

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m}) = \frac{q_{\alpha_r}^{c_m}(1-q_{\alpha_r})^{\psi(c_m)}}{q_{\alpha_t}^{\psi(c_m)-1}} \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1},a_{k_1+1},\dots,a_{k_m-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0 \\ 1 \leqslant i \leqslant k_m-1 \\ i \neq k_1, i \neq k_2, \dots, i \neq k_{m-1}}} q_0^{\sum\limits_{i \in (3n-2)} a_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{i \in (3n-1)} a_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{i \in (3n)} a_i},$$

де $\alpha_r \equiv k_m - 1 (mod\,3)$, $\alpha_t \equiv k_m (mod\,3)$ *і* $\psi(c_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{якщо } c_m = 0. \end{cases}$

Теорема 4.2.2. *Міра Лебега множини*

$$\overline{\Delta}^{k_1 k_2 \ldots k_m \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots} = \{x : x = \overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1 a_2 \ldots a_m \ldots}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathbb{N}\}$$

чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ *– символів рівна нулю.*

Подяка. Автор висловлює вдячність науковому керівнику професору А. М. Самойленку та науковому консультанту М. В. Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до даної роботи, підтримку та допомогу.

РОЗДІЛ 1
КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Цей розділ має вступний характер. В ньому ми систематизуємо відомості, що стосуються «геометрії» класичного трійкового зображення дійсних чисел та його узагальнення — Q_3 – зображення чисел. Вказані зображення ми використовуємо для конструювання та дослідження сингулярних функцій та нових зображень. Крім того, розглянуто факти необхідні для подальшого дослідження об'єктів зі складною локальною будовою.

1.1. Класична трійкова система кодування дійсних чисел

Добре відомі три класичні змістовні теорії дійсних чисел, запропоновані німецькими математиками К.Вейєрштрассом, Г.Кантором і Р. Дедекіндом у другій половині XIX ст. Пізніше була створена загальна аксіоматична теорія дійсних чисел. Цікавою є теорія, на рівні ідей запропонована Колмогоровим А. М. [36], а реалізована Кавун Н. І. [25], яка, як і теорія Вейєрштрасса, не передбачає наперед створеної теорії раціональних чисел. Повне усвідомлення того, що таких теорій можна побудувати багато, прийшло відносно недавно.

Існують різні способи кодування (зображення) дійсних чисел з використанням скінченного алфавіту $\{0, 1, \ldots, s-1\} \equiv A_s$, $1 < s \in \mathbb{N}$. В силу різних причин двосимвольне кодування заслуговує окремої уваги. Самостійної уваги заслуговує і трійкова система, оскільки вона є найбільш економною в певному сенсі.

Кодуванням чисел з $[0, 1]$ засобами алфавіту A (скінченного або нескінченного) називається сюр'єктивне відображення

$$\varphi : A \times A \times \ldots \times A \times \ldots \equiv L \to [0, 1].$$

При цьому символічний запис числа $x = \varphi((a_n))$, що є образом послідовності (a_n), у формі $\Delta^{\varphi}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ називається його φ – *зображенням* (або φ – *кодом*).

Одним з найпростіших способів кодування чисел $x \in [0, 1]$ засобами алфавіту A_s, $2 \leqslant s \in N$, є s – кове зображення числа:

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots \equiv \Delta^{s}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}.$$

У традиційному розумінні геометрія чисел займається розв'язанням тео-ретико-числових проблем із використанням геометричних засобів. В останні роки з'явилась нова вітка досліжень — геометрія різних зображень дійсних чисел, яка займається вивченням геометричного змісту цифр, метричними співвідношеннями, тополого-метричними властивостями множин чисел, визначених умовами на їх зображення тощо та застосуваннями до конструювання різних математичних об'єктів зі складною (неоднорідною) локальною структурою [123].

Означення 1.1.1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – фіксований впорядкований набір елементів алфавіту A. *Циліндром* рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ у кодуванні φ називається множина $\Delta^{\varphi}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які мають наступне φ-зображення

$$x = \Delta^{\varphi}_{c_1 c_2 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+k} \ldots}, \;\; \alpha_{m+i} \in A.$$

Сам відрізок $[0, 1]$ називається циліндром нульового рангу і позначається Δ.

Безпосередньо з даного означення випливають наступні властивості циліндрів:

1) $\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i\in A} \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;

2) $\Delta = \bigcup\limits_{i_1\in A} \bigcup\limits_{i_2\in A} \ldots \bigcup\limits_{i_n\in A} \Delta^{\varphi}_{i_1i_2\ldots i_n}$ для довільного n.

Для s – кового зображення чисел циліндрами є відрізки, а саме:

$$\Delta^{s}_{c_1c_2\ldots c_m} = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{s^i}; \frac{1}{s^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{s^n}\right].$$

Кажуть, що система кодування має *нульову надлишковість*, якщо всі числа або переважна більшість чисел, за виключенням зліченної множини, мають єдине зображення.

Прикладами кодування чисел засобами нескінченного алфавіту є $L-$, $E-$ та $S-$ зображення, які ґрунтуються на розкладах чисел у знакододатні ряди Люрота, Енгеля, Сильвестера відповідно. Як і s – кове зображення всі вони мають нульову надлишковість, оскільки кожне число з $(0,1]$ має єдине $L-$, $E-$ та $S-$ зображення.

Кодування називається *неперервним*, якщо циліндр є проміжком (відрізком, піввідрізком або півінтервалом) і при цьому для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in A$, переріз $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m} \equiv \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}$ є числом (точкою), причому

$$\Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots} = x \to x' = \Delta^{\varphi}_{a'_1a'_2\ldots a'_m\ldots} (m \to \infty),$$

де $a_m \neq a'_m$, але $a_i = a'_i$ при $i < m$.

При $s = 3$ отримаємо класичну трійкову систему кодування. Тобто для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in A_3$, така, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \equiv \Delta^{3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

1.2. Q_3 – зображення дійсного числа як узагальнення класичного трійкового

Неперервне φ – зображення називається Q – *зображенням*, якщо алфавіт A є скінченним і для кожного $i \in A \equiv A_s$ виконується $\sup \Delta^{Q}_{c_1c_2\ldots c_m i} =$

$= \inf \Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ і метричне відношення

$$\frac{|\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}|} \equiv q_i = const,$$

яке називається *основним* (найважливішим у метричній теорії).

Відомо [76], що $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ *— фіксована множина додатних дійсних чисел, при чому* $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, *і для довільного* $x \in [0,1]$ *існує послідовність* $(\alpha_n), \alpha_n \in A_3 = \{0,1,2\}$, *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad (1.2.1)$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$.

Тоді, вираз $x = \beta_{\alpha_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right]$ називається Q_3 – *представленням* дійсного числа $x \in [0,1]$, а скорочений (символічний) запис $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — його Q_3 – *зображенням.*

Період у Q_3 – зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Відомо [76], що для довільного $x \in [0,1]$ має місце рівність

$$\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](2)}.$$

Число $x \in [0,1]$ називають Q_3 – *раціональним*, якщо існує його Q_3 – зображення, яке містить період (0) або (2). Всі решта чисел $x \in [0,1]$ називають Q_3 – *ірраціональними.*

Остання рівність дає підстави розглядати Q_3 – цифри числа як функції числа, що зображається. Очевидно, що вони є не коректно визначеними для частини цифр Q_3 – раціональних чисел. Але можна домовитися за необхідності не вживати те зображення Q_3 – раціонального числа, яке містить період (2).

Циліндри, крім вище вказаних, мають властивості:

1) $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} = [a, b]$, де $a = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \beta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}(\beta_{c_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j})$,

$b = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m(2)} = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}$;

2) $|\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i}$.

1.3. Частота вживання символа i в Q_3 – зображенні числа

Нехай $N_i(x,k)$ – кількість символів i в Q_3 – зображенні x до k-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} = \nu_i^{Q_3}(x)$$

називається *частотою вживання символа i в Q_3 – зображенні x.*

Лема 1.3.1. *Якщо в Q_3 – зображенні числа x існують $\nu_{i_1}^{Q_3}(x)$ і $\nu_{i_2}^{Q_3}(x)$, де $i_1 \neq i_2$ та $i_1, i_2 \in \{0,1,2\}$, то існує $\nu_{1-i_1-i_2}^{Q_3}(x)$.*

Доведення.

$$N_0(x,k) + N_1(x,k) + N_2(x,k) = k,$$

$$\frac{N_0(x,k)}{k} + \frac{N_1(x,k)}{k} + \frac{N_2(x,k)}{k} = 1,$$

$$\frac{N_{i_1}(x,k)}{k} + \frac{N_{i_2}(x,k)}{k} = 1 - \frac{N_{1-i_1-i_2}(x,k)}{k},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_1}(x,k)}{k} + \lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_2}(x,k)}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{N_{1-i_1-i_2}(x,k)}{k}\right),$$

$$\nu_{i_1}^{Q_3}(x) + \nu_{i_2}^{Q_3}(x) = 1 - \nu_{1-i_1-i_2}^{Q_3}(x).$$

□

Лема 1.3.2. *Якщо в Q_3 – зображенні числа x є період, то це число має частоту трьох цифр.*

Доведення. Очевидно, що існування частоти цифр і її значення не залежить від довільної скінченної кількості початкових цифр. Тоді доведення можна провести для чисто періодичного зображення: $x = \Delta^{Q_3}_{(s_1s_2\ldots s_m)} = \Delta^{Q_3}_{s_1s_2\ldots s_m s_1s_2\ldots s_m\ldots}$, де $(s_1s_2\ldots s_m)$ – період, m_0 – кількість нулів, m_1 – кількість одиниць, m_2 – кількість двійок.

Розглянемо дві послідовності, які прямують до нескінченності, а саме: $b_n = n \cdot m$ і $a_n = b_n - m = (n-1) \cdot m$. Для них: $N_0(x, b_n) = n \cdot m_0$, $N_1(x, b_n) = n \cdot m_1$, $N_2(x, b_n) = n \cdot m_2$, $N_0(x, a_n) = (n-1) \cdot m_0$. Тоді

$$\frac{N_0(x, b_n)}{b_n} = \frac{n \cdot m_0}{n \cdot m} = \frac{m_0}{m} \text{ і } \frac{N_0(x, a_n)}{a_n} = \frac{(n-1) \cdot m_0}{(n-1) \cdot m} = \frac{m_0}{m}.$$

Для довільного $k \in \mathbb{N}$ існує $n_k = n(k)$ такий, що $a_{n_k} \leqslant k \leqslant b_{n_k}$.

Тоді справедливі нерівності:

$$\frac{N_0(x, a_{n_k})}{k} \leqslant \frac{N_0(x, k)}{k} \leqslant \frac{N_0(x, b_{n_k})}{k},$$

$$\frac{N_0(x, a_{n_k})}{b_{n_k}} \leqslant \frac{N_0(x, k)}{k} \leqslant \frac{N_0(x, b_{n_k})}{a_{n_k}},$$

$$\frac{(n_k - 1) \cdot m_0}{n_k \cdot m} \leqslant \frac{N_0(x, k)}{k} \leqslant \frac{n_k \cdot m_0}{(n_k - 1) \cdot m},$$

$$\frac{m_0}{m} \lim_{n \to \infty} \frac{n_k - 1}{n_k} \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{N_0(x, k)}{k} \leqslant \frac{m_0}{m} \lim_{n \to \infty} \frac{n_k}{n_k - 1}.$$

Отже, $\nu_0^{Q_3}(x) = \frac{m_0}{m}$.

Аналогічним чином $\nu_1^{Q_3}(x) = \frac{m_1}{m}$, $\nu_2^{Q_3}(x) = \frac{m_2}{m}$. □

Наслідок 1.3.1. *Якщо Q_3 – зображення числа x має період $(s_1 s_2 \ldots s_m)$, причому $(s_1 s_2 \ldots s_m)$ має m_i цифр i, то існує частота цифр i:*

$$\nu_i^{Q_3}(x) = \frac{m_i}{m}.$$

Наслідок 1.3.2. *Кожне Q_3 – раціональне число x з відрізка $[0, 1]$ має частоту трьох цифр.*

1.4. Нормальність чисел в Q_3 – зображенні

Властивість Φ елемента x з множини K називається *нормальною*, якщо переважна більшість елементів цієї множини («майже всі») нею володіють (її мають).

Такі поняття як потужність, міра, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, категорії Бера та ін. [76], дозволяють однозначно трактувати слова «майже всі».

Означення 1.4.1. Число $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$, для частот якого мають місце рівності:

$$\nu_0^{Q_3}(x) = q_0, \;\; \nu_1^{Q_3}(x) = q_1, \;\; \nu_2^{Q_3}(x) = q_2,$$

називається Q_3 – *нормальним.*

Теорема 1.4.1. *Міра Лебега множини всіх* Q_3 *– нормальних чисел відрізка* $[0,1]$ *дорівнює 1.*

Доведення. Доведемо, що для майже всіх (в розумінні міри Лебега) точок $x \in [0,1]$

$$\frac{N_i(x,k)}{k} \to q_i \text{ при } k \to \infty, \tag{1.4.1}$$

тобто множина всіх x, для яких умова (1.4.1) не виконується, має міру Лебега рівну нулю.

Нехай i — фіксований символ, $i \in \{0,1,2\}$. Розглянемо функцію $f(x)$, таку, що

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots} \xrightarrow{f(x)} \Delta^{Q'_2}_{\alpha_{1,i}(x) \ldots \alpha_{k,i}(x) \ldots}, \text{ де } \alpha_{k,i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_k \neq i; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_k = i, \end{cases}$$

і $Q'_2 = \{q'_0, q'_1\}$, $q'_1 = q_i$, $q'_0 = q_j + q_k$, $j \neq i \neq k$.

Тоді, очевидно, що $N_i(x,k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x)$. Тому умова (1.4.1) записується у вигляді $\frac{1}{k} \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x) = q_i$. Розглянемо інтеграл

$$I_k^i = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x) - q_i \right)^2 dx = \frac{1}{k^2} \int_0^1 \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{j,i}(x) - q_i)^2 dx.$$

Піднесемо суму, що стоїть під інтегралом, до квадрату і проінтегруємо кожен доданок. Враховуючи, що $\alpha_{j,i}(x) = \alpha^2_{j,i}(x)$, бо $\alpha_{j,i}(x) \in \{0,1\}$, отримаємо інтеграли двох видів:

1) $\int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x) - q_i)^2 dx = \int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x)(1-2q_i) + q_i^2) dx = (1-2q_i) \int\limits_0^1 \alpha_{j,i}(x) dx + q_i^2 =$

$$= (1-2q_i)\lambda(\{x : \alpha_{j,i}(x) = i\}) + q_i^2 = (1-2q_i)q_i + q_i^2 = q_i(1-q_i).$$

Кількість таких інтегралів буде k.

Розглянемо інтеграли другого типу, враховуючи, що $j \neq t$:

2) $\int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x) - q_i)(\alpha_{t,i}(x) - q_i)dx = 0.$

Оскільки $\int\limits_0^1 \alpha_{j,i}(x)\alpha_{t,i}(x)dx = q_i^2$, то $I_k^i = \dfrac{q_i(1-q_i)}{k}$.

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty} I_k^i = 0$, тобто $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x)$ збігається до q_i в середньому квадратичному, але зауважимо, що із збіжності в середньому квадратичному не випливає збіжність «майже скрізь».

Візьмемо тепер довільне досить мале додатне число ε і позначимо через $F_k^i(\varepsilon)$ множину чисел відрізка $[0,1]$, для яких

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x)k - q_i \right| > \varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Оцінимо останній інтеграл

$$I_k^i = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x) - q_i \right)^2 dx \geqslant \int\limits_{F_k^i(\varepsilon)} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x) - q_i \right)^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{F_k^i(\varepsilon)} \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2 \lambda[F_k^i(\varepsilon)],$$

тоді отримаємо

$$\lambda[F_k^i(\varepsilon)] \leqslant \frac{I_k^i}{\varepsilon^2} = \frac{q_i(1-q_i)}{k^2\varepsilon^2}. \tag{1.4.3}$$

Таким чином, якщо ε — фіксоване і k необмежено зростає, то міра множини точок, для яких має місце (1.4.2), прямує до нуля. Але з цього безпосередньо ще не випливає, що для майже всіх $x \in [0,1]$ буде $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x) \to q_i$ $(k \to \infty)$.

Розглянемо послідовність множин $F_1^i(\varepsilon), F_4^i(\varepsilon), F_9^i(\varepsilon), \ldots, F_{n^2}^i(\varepsilon), \ldots$ і позначимо через $G_k^i(\varepsilon)$ множину чисел, що належить хоча б одній з множин $F_{k^2}^i(\varepsilon), F_{(k+1)^2}^i(\varepsilon), \ldots$.

Тоді з (1.4.3) отримаємо

$$\lambda[G_k^i(\varepsilon)] = \lambda\left[F^i_{k^2}(\varepsilon)\bigcup F^i_{(k+1)^2}(\varepsilon)\bigcup\ldots\right] \leqslant \sum_{i=0}^{2}\lambda\left[F^i_{(k+i)^2}(\varepsilon)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{q_i(1-q_i)}{k^2\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{(k+i)^2} \to 0 \text{ при } (k\to\infty).$$

Враховуючи, що $G^i_{k+1}(\varepsilon) \subset G^i_k(\varepsilon)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, то, оскільки міра Лебега множини $G^i_k(\varepsilon)$ прямує до нуля при $k \to \infty$, спільна частина всіх цих множин має міру нуль. Тоді всі числа, крім чисел з множини міри нуль, можуть належати лише скінченному об'єднанню цих множин. Але якщо точка x належить лише скінченній кількості множин $G^i_k(\varepsilon)$, то при достатньо великому k вона не належить множині $G^i_k(\varepsilon)$, а отже, не належить кожній з множин $F^i_{k^2}(\varepsilon), F^i_{(k+1)^2}(\varepsilon), \ldots$. Тому для такого числа при k, більшому деякого k_0, маємо $\left|\frac{1}{k^2}\sum\limits_{j=1}^{k^2}\alpha_{j,i}(x) - q_i\right| \leqslant \varepsilon$. Майже всі числа, яким би не було ε, володіють цією властивістю. Тоді, $\frac{1}{k^2}\sum\limits_{j=1}^{k^2}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$.

Таким чином, твердження доведено при умові, що числа k ростуть по повних квадратах. Якщо ж k росте як завгодно, то можна знайти таке число t, що

$$t^2 \leqslant k \leqslant (t+1)^2, \quad 0 \leqslant k - t^2 \leqslant 2t+1.$$

Тому

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x) + \sum_{i=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x)\right) = \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x)\frac{t^2}{k} + \frac{1}{k}\sum_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x).$$

За доведеним, майже скрізь $\frac{1}{t^2}\sum\limits_{j=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$ і всюди $\frac{t^2}{(t+1)^2} < \frac{t^2}{k} \leqslant 1$, тому $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \leqslant \frac{k-t^2}{k} < \frac{2t+1}{t^2}$. Тоді при $k \to \infty$ отримаємо $\frac{t^2}{k} \to 1$ і $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \to 0$.

Отже, майже скрізь $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$, тобто величина $\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) - q_i$ майже всюди є нескінченно малою величиною для довільного i. $\square$

Теорема 1.4.2. *Майже всі числа відрізка* $[0,1]$ *є нормальними в кожному* Q_3 *– зображенні з раціональними* $q_0 \in (0,1)$.

Доведення. Нехай (q_0, q_1, q_2) — довільний набір додатних раціональних чисел, сума яких дорівнює 1. Згідно з теоремою 1.4.1 в системі Q_3 – зображення всі дійсні числа з відрізка $[0,1]$, за виключенням деякої множини міри нуль, є нормальним, тобто для майже всіх $x \in [0,1]$ частота Q_3 – символа i дорівнює q_i.

Позначимо через $E_{(q_0,q_1,q_2)}$ ту нульмірну множину, для точок якої ця умова не виконується. Тоді множина $E = \bigcup\limits_{(q_0,q_1,q_2)} E_{(q_0,q_1,q_2)}$, де об'єднання береться за всеможливими наборами додатних раціональних чисел (q_0, q_1, q_2), сума яких дорівнює 1, є множиною нульової міри Лебега, як об'єднання зчисленної кількості множин міри нуль. Кожне дійсне число, яке множині E не належить, має властивість: в якому б Q_3 – зображенні з раціональними q_i ми його не записали, частота символа i дорівнює q_i. Отже, майже всі числа з $[0;1]$ є нормальнми для кожного набору раціональних q_i. □

1.5. Оператор лівостороннього зсуву цифр Q_3 – зображення дійсного числа.

У множині всіх зображень дійсних чисел з відрізка $[0;1]$ розглянемо оператор $\hat{\omega_1}$ зсуву цифр, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots)$.

Після домовленості не використовувати Q_3 – зображення дійсних чисел із $[0;1)$ з періодом (2) оператор $\hat{\omega_1}$ породжує функцію, означену рівністю

$$\omega_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Оператор $\hat{\omega_1}$ і функцію ω_1 називають *оператором лівостороннього зсуву цифр* Q_3 *– зображення дійсного числа.*

Очевидно, що даний оператор має рівно три інваріантні точки: $\Delta^{Q_3}_{(0)}$,

$\Delta^{Q_3}_{(1)}$ і $\Delta^{Q_3}_{(2)}$. Він володіє властивістю сюр'єктивності, але не є ін'єктивним, бо прообразом точки, що має зображення $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ є три точки $\Delta^{Q_3}_{0c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, $\Delta^{Q_3}_{1c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ і $\Delta^{Q_3}_{2c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

Лема 1.5.1. *Функція $\omega_1(x)$:*

1) є кусково-лінійною, причому лінійною на циліндричних інтервалах першого рангу:

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{q_0} \;\; \textit{при} \;\; 0 \leqslant x < q_0, \\ \dfrac{x-q_0}{q_1} \;\; \textit{при} \;\; q_0 \leqslant x < q_0+q_1, \\ \dfrac{x-q_0-q_1}{q_2} \;\; \textit{при} \;\; q_0+q_1 \leqslant x < 1; \end{cases}$$

2) в точках $x = q_0$ і $x = q_0+q_1$ має розриви першого роду зі стрибком 1, причому $\lim\limits_{x\to q_0-0}\omega_1(x) = 1$ і $\lim\limits_{x\to q_0+q_1-0}\omega_1(x) = 1$.

Доведення. Очевидно, що $\omega_1(q_0) = \omega_1(\Delta^{Q_3}_{1(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(0)} = 0 = \omega_1(0)$.

Нехай $x \in \Delta^{Q_3}_i$, тобто

$$x = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_i + \beta_{\alpha_2}q_i + \beta_{\alpha_3}q_iq_{\alpha_2} + \ldots + \beta_{\alpha_n}q_i\prod_{j=2}^{n-1}q_{\alpha_j} + \ldots =$$
$$= \beta_i + q_i\left(\beta_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_2} + \ldots + \beta_{\alpha_n}\prod_{j=2}^{n-1}q_{\alpha_j} + \ldots\right).$$

Тоді $x = \beta_i + q_i\omega_1(x)$.

Звідки

$$\omega_1(x) = \frac{x-\beta_i}{q_i} = \begin{cases} \dfrac{x}{q_0}, \;\; \text{якщо} \;\; i=0, \\ \dfrac{x-q_0}{q_1}, \;\; \text{якщо} \;\; i=1, \\ \dfrac{x-q_0-q_1}{q_2}, \;\; \text{якщо} \;\; i=2. \end{cases}$$

Дослідимо поведінку функції $\omega_1(x)$ в лівому ε-півоколі точки $x = q_0$. Якщо $x \in (q_0-\varepsilon; q_0)$, то відповідно $x = \Delta^{Q_3}_{0\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots\alpha_{k+n}\ldots}$ і $\omega_1(x) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+n-1}\ldots}$. Умова $x \to q_0-0$ рівносильна умові $k\to\infty$, тому $\lim\limits_{x\to q_0-0}\omega_1(x) = \Delta^{Q_3}_{222\ldots2\ldots} = 1$.

Аналогічно доводиться твердження для точки $x = q_0 + q_1$. □

Після n-кратного застосування оператора лівостороннього зсуву цифр, отримаємо

$$\omega_1^{(n)}(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}.$$

Оскільки

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}\left(\beta_{\alpha_{n+1}} + \beta_{\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}} + \ldots\right) =$$
$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \omega_1^{(n)}(x)\prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}.$$

Отже,

$$\omega_1^{(n)}(x) = \frac{x - \left(\beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_n}\prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}}.$$

1.6. Оператор правостороннього зсуву цифр Q_3 – зображення дійсного числа

Нехай задано: елемент i алфавіту $A_3 = \{0, 1, 2\}$ та натуральне число n.

У просторі послідовностей $L^{(3)}$ розглядається оператор $\hat{\delta}_i$, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$.

Після домовленості не використовувати Q_3 – зображення дійсних чисел із $[0; 1)$ з періодом (2) оператор $\hat{\delta}_i$ породжує функцію

$$\delta_i(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Оператор $\hat{\delta}_i$ і функцію δ_i називатимемо *оператором правостороннього зсуву цифр Q_3 – зображення дійсного числа з параметром i.*

Очевидно, що δ_i має три інваріантних точки, це точки виду: $\Delta^{Q_3}_{(i)}$.

Лема 1.6.1. *Функція $\delta_i(x)$ має вираз*

$$\delta_i(x) = \beta_i + q_i x,$$

є лінійною і набуває значень з $[\beta_i;\beta_{i+1})$.

Доведення. Дійсно,

$$\delta_i(x)=\beta_i+\beta_{\alpha_1(x)}q_i+\beta_{\alpha_2(x)}q_iq_{\alpha_1(x)}+\ldots+\beta_{\alpha_n(x)}q_i\prod_{j=1}^{n-1}q_{\alpha_j(x)}+\ldots=$$
$$=\beta_i+q_i(\beta_{\alpha_1(x)}+\beta_{\alpha_2(x)}q_{\alpha_1(x)}+\ldots)=\beta_i+q_ix.$$

Оскільки x пробігає проміжок $[0;1)$, то оператор $\delta_i(x)$ набуває значень з $[\beta_i;\beta_{i+1})$. □

Наслідок 1.6.1. *Оператор* $\delta_i(x)$ *правостороннього зсуву цифр* Q_3 *– зображення чисел з параметром і є стискуючим відображенням з коефіцієнтом* q_i.

1.7. Самоподібні, самоафінні та автомодельні множини

Відображення g метричного простору (M,ρ) на себе, при якому відстані між точками змінюються в одному і тому ж відношенні $k>0$, називається *перетворенням подібності.* Число k називають при цьому коефіцієнтом подібності. Кажуть, що множина $E\subset M$ подібна множині $E'\subset M$ з коефіцієнтом подібності $k>0$, якщо існує відображення $g:E\to E'$ таке, що

$$\frac{\rho(g(x_1),g(x_2))}{\rho(x_1,x_2)}=k \text{ для всіх } x_1,x_2\in E.$$

Перетворення $g:R^n\to R^n$ є перетворенням подібності тоді і тільки тоді, коли g є композицією гомотетії h з тим самим коефіцієнтом k і руху f, тобто $g=f\circ h$.

Непорожня обмежена множина E метричного простору (M,ρ) називається *самоподібною*, якщо її можна подати у вигляді скінченного об'єднання своїх підмножин E_i, які подібні E (кожна зі своїм коефіцієнтом подібності k_i), причому розмірність Гаусдорфа-Безиковича перерізу довільних двох таких підмножин менша, ніж розмірність самої множини E, тобто

$$\begin{cases} 1) E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots \bigcup E_n, \ n > 1; \\ 2) E_i \overset{k_i}{\sim} E, \ i = \overline{1, n}; \\ 3) \alpha_0(E_i \bigcap E_j) < \alpha_0(E), \ \text{для всіх } i \neq j. \end{cases}$$

Додатне число $\alpha_s(E)$, яке є розв'язком рівняння $k_1^x + k_2^x + \ldots + k_n^x = 1$ називається *самоподібною розмірністю* множини E.

Перетворення простору R^2 називається *афінним*, якщо воно зберігає колінеарність точок. Афінні перетворення R^2 утворюють групу відносно операції суперпозиція перетворень, головним інваріантом якої є збереження простого відношення трьох точок.

Множина E простору R^2 називається *самоафінною*, якщо існує набір $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $n > 1$, афінних перетворень R^2 таких, що

$$E = \varphi_1(E) \bigcup \varphi_2(E) \bigcup \ldots \bigcup \varphi_n(E),$$

де $\varphi_i(E) \neq \varphi_j(E)$ при $i \neq j$.

Кожне афінне перетворення φ_i задається формулами

$$\begin{cases} x' = a_{11}^{(i)} x + a_{12}^{(i)} y + x_0, \\ y' = a_{21}^{(i)} x + a_{22}^{(i)} y + y_0, \end{cases}$$

причому $a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{21}^{(i)} \neq 0$.

Самоафінною розмірністю самоафінної множини називається число, яке є розв'язком рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left\| \begin{matrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{matrix} \right\| \right)^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Самоафінна розмірність є числом, яке не менше ніж розмірність Гаусдорфа-Безиковича. Якщо самоафінна множина є самоподібною, то її самоафінна розмірність дорівнює самоподібній розмірності.

Непорожня обмежена множина E метричного простору (M, ρ) називається *автомодельною*, якщо вона є самоподібною та самоафінною одночасно.

1.8. Міра Гаусдорфа та розмірність Гаусдорфа-Безиковича

Нехай (M,ρ) – метричний простір, E – деяка обмежена його підмножина, $d(E)$ – діаметр E, $h(t)$ – неперервна зростаюча функція, задана на півосі $t \geqslant 0$ і така, що $h(0) = 0$ (клас таких функцій позначатимемо H_0), F_M – сім'я підмножин простору M така, що $\forall\ E \subset M$ і $\forall\ \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{G_i\}$, $G_i \in F_M$, множини E (тобто існує $\{G_i\}$, $G_i \in F_M$, $E \subset \bigcup\limits_i G_i$, $d(G_i) \leqslant \varepsilon$). Для заданих E, h і будь-якого ε означимо функцію

$$m_h^\varepsilon(E) = \inf_{d(G_i)\leqslant\varepsilon} \left\{ \sum_i h[d(G_i)] : E \subset \bigcup_i G_i \right\},$$

де нижня грань береться за всеможливими, не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{G_i\}$, $G_i \in F_M$, множини E.

Означення 1.8.1. [76] Число

$$H_h(E) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} m_h^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon>0} m_h^\varepsilon(E)$$

називається зовнішньою h-мірою Гаусдорфа множини E. При цьому функція h називається вимірюючою, а зовнішня міра $m_h^\varepsilon(E)$ – наближаючою мірою порядку ε.

Функція $h \in H_0$ називається розмірнісною функцією Гаусдорфа множини E, якщо $0 < H_h(E) < \infty$. Для довільної випуклої функції $h \in H_0$ такої, що $\dfrac{h(t)}{t} \to \infty$ коли $t \to 0$, існує множина $E \subset R^1$, для якої h є розмірнісною функцією. Конструктивне доведення цього факту можна знайти в [110] чи [87].

Якщо $0 < H_\alpha(E) < \infty$, то число α називається *розмірністю Гаусдорфа множини* E.

Означення 1.8.2. [76] Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, визначене рівністю

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини* E.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E \subset M$ визначається поведінкою $H_\alpha(E)$ не як функції від E, а як функції від α. Коректність останнього означення підтверджують наступні властивості H_α-міри [87, 110]:

1) якщо $H_{\alpha_1}(E) < \infty$, то $H_{\alpha_2}(E) = 0$ для $\alpha_1 < \alpha_2$;

2) якщо $H_{\alpha_2}(E) \neq 0$, то $H_{\alpha_1}(E) = \infty$ для $\alpha_1 < \alpha_2$.

З означення випливає, що для даної множини E або $H_\alpha(E) = 0$ для будь-якого $\alpha > 0$, тоді $\alpha_0(E) = 0$ за означенням, або існує точка «перескоку» α_0, така, що $H_\alpha(E) = \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ і $H_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$. Таке число α_0 і називають *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.*

Міра $H_{\alpha_0}(E)$, взагалі кажучи, може бути нулем, нескінченністю або додатним числом. Крім того, розмірність Гаусдорфа-Безиковича має наступні властивості:

1. Якщо E_1 і E_2 – геометрично подібні, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$;
2. $\alpha_0(E) = 0$ для довільної не більш ніж зчисленної множини E;
3. $\alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2)$, якщо $E_1 \subset E_2$;
4. $\alpha_0(\bigcup\limits_n E_n) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n)$.

Фракталом називається континуальна обмежена множина, яка має тривіальну (рівну 0 або ∞) H_α-міру Гаусдорфа, порядок α якої рівний топологічній розмірності.

Фрактали, розмірність Гаусдорфа-Безиковича яких рівна розмірності простору, називаються суперфракталами, а ті, розмірність яких додатна і на одиницю менша розмірності простору — гіперфракталами. Континуальні множини, розмірність Гаусдорфа-Безиковича і топологічна розмірність яких рівна нулю, називаються аномально фрактальними [64, 66].

1.9. Лебегівська структура неперервних функцій обмеженої варіації

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана скінченна функція $f(x)$. Розкладемо $[a;b]$ на частини точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ і обчислимо суму

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Означення 1.9.1. [51] Точна верхня границя множини всеможливих сум V називається *повною варіацією функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається через $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, то кажуть, що $f(x)$ є *функцією обмеженої (скінченної) варіації* на $[a;b]$.

Очевидно, що кожна монотонна функція є функцією обмеженої варіації.

Нагадаємо [51], що *абсолютно неперервною* на відрізку $[a;b]$ називається функція, така що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ і системи взаємно неперетинних інтервалів $(a_1;b_1), \ldots (a_n;b_n)$, причому $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, має місце

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Означення 1.9.2. Відмінна від сталої неперервна функція обмеженої варіації, похідна якої майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю, називається *сингулярною*.

Для будь-якої неперервної функції обмеженої варіації $f(x)$ відома теорема Лебега [51, ст. 248] констатує існування та єдиність розкладу

$$f(x) = \varphi(x) + r(x), \tag{1.9.1}$$

де $\varphi(x)$ — це абсолютно неперервна функція і $\varphi(a) = f(a)$, а $r(x)$ — сингулярна функція.

Рівність (1.9.1) називається *лебегівською структурою неперервної функції $f(x)$ обмеженої варіації.*

Якщо функція $r(x)$ тотожно рівна нулю, то кажуть, що функція $f(x)$ є чисто абсолютно неперервною, а коли $\varphi(x)$ є тотожно рівною нулю, але $f(x) \neq \varphi(x)$, то $f(x)$ називають чисто сингулярною. Якщо функції $\varphi(x)$ і $r(x)$ одночасно відмінні від константи, то кажуть, що функція $f(x)$ є нетривіальною сумішшю абсолютно неперервної та сингулярної компонент.

Задача встановлення лебегівської структури заданої функції полягає в знаходженні її компонент (абсолютно неперервної та сингулярної), що рівносильно встановленню її лебегівської чистоти, а у випадку нетривіальної суміші — знаходженню однієї з її компонент.

1.10. Огляд літератури

На початку XX століття сингулярні функції були нетривіальним, екзотичним і навіть «паталогічним» об'єктом дослідження. Першими прикладами таких функцій є:

— функція Мінковського [121] — сингулярна строго зростаюча функція розподілу ймовірностей на відрізку $[0; 1]$, яка геометрично була побудована у 1904;

— функція Серпінського [83, 129] — один з елементарних прикладів зростаючої сингулярної функції, побудованої в 1916;

— функція Кантора — неперервна функція розподілу ймовірностей на відрізку $[0; 1]$, яка зростає в точках класичної множини Кантора і є постійною на інтервалах, суміжних з нею. Вона досліджується у роботі [40];

— функція Салема [126] — функція розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими, але різноймовірними двійковими цифрами, побудована у 1943 році.

Хоча Мінковський є одним із першовідкривачів таких функцій, основна мета, яку він переслідував — це перерахунок ірраціональних квадратичних [120]. Її сингулярність було доведено набагато пізніше A. Denjoy у 1932 році [104, 105], хоча в деякій літературі зазначається, що це зробив Салем. Функція Мінковського була ретельно вивчена і узагальнена A. Denjoy, R. F. Tichy та J. Uitz, G. Ramharter, R. Girgensohn та іншими.

В 1952 році Riesz та Sz.–Nѓagy, опублікувавши роботу [125], популяризували сімейство строго зростаючих сингулярних функцій, які залежні від параметра $0 < t < 1$. Хоча вони розглядалися і значно раніше у докторській дисертації E. Hellinger в 1907 році [111]. Пізніше сімество таких функцій досліджували P. Billingsley, G. de Rham, S. Reese, і навіть узагальнили результати: R. Salem, E. Hewitt і K. Stromberg та інші.

Довгий час вважалось, що сингулярні функції є достатньо «нетривіальним» об'єктом дослідження. Хоча у 1981 році Т. Замфіреску [134] довів, що «більшість» в топологічному сенсі неперервних монотонних функцій є сингулярними, бо сингулярні функції в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера. За останнє століття теорія сингулярних функцій розвивалась за рахунок індивідуальних теорій та конкретних прикладів. Загальна ж теорія сингулярних функцій є досі не достатньо розвинутою, вона містить лише незначну кількість різних фактів. Зокрема Працьовитий М.В. і Торбін Г.М. довели існування строго зростаючих сингулярних функцій, які не зберігають фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

За останнє століття інтерес до сингулярних функцій значно зріс. Їм присвячено роботи Шварца Л., Вінера Н., Вінтнера А., Джессена В. разом з Вінтнером А., Круглова В. М. та Золотарьова В. М., Працьовитого М. В., Винншина Я. Ф. та багатьох інших математиків.

Висновки до розділу 1

Цей розділ має вступний характер. У ньому наведено означення відомих ключових понять:

— Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа;

— частоти цифр Q_3 – зображення числа;

— нормальність числа у Q_3 – зображенні;

— оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр;

— самоподібність, самоафінність та автомодельність множин;

— фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича;

— лебегівська структура неперерервної функції обмеженої варіації (вміст сингулярної та абсолютно неперервної компонент);

сформульовані необхідні факти, які будуть використовуватись у наступних розділах, а також проведено огляд літератури з тематики дослідження. Оскільки Q_3 – зображення числа є базовим поняттям даного дослідження, то наведений у розділі 1 фактичний матеріал стосується в першу чергу цього поняття, його геометрії і застосувань.

У цьому розділі дано лише одне доведення (теореми про нормальність чисел у Q_3 – зображенні).

Цей розділ не містить результатів, які виносяться на захист.

РОЗДІЛ 2
ІНВЕРСОР ЦИФР Q_3 – ЗОБРАЖЕННЯ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Цей розділ присвячений в основному одній неперервній строго спадній сингулярній функції, яка називається інверсором цифр Q_3 – зображення числа і є «модельним» прикладом в сім'ї функцій, інваріантом яких є цифра 1 у Q_3 – зображенні аргумента. Ми вивчаємо структурні, глобальні та локальні, диференціальні та інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості цієї функції.

2.1. Функції, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел

Означення 2.1.1. Якщо у Q_3 – зображенні (зокрема класичному трійковому) аргумента $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і Q_3 – зображенні значення функції

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} \qquad (2.1.1)$$

цифра 1 знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n = 1$, то казатимемо, що функція f зберігає цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел відрізка $[0; 1]$.

За для коректності означення функцій, визначених в термінах Q_3 – зображення чисел, домовимось для зображення Q_3 – раціональних чисел не використовувати в цьому пункті зображення з періодом (2).

Прикладом функції, яка задовольняє означення (2.1.1), є функція визначена рівністю (2.1.1), де $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$,

$$\gamma_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = 0, \\ 2, \text{ якщо } \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \in \{2, 4\}, \ n \in N. \end{cases}$$

Теорема 2.1.1. *Множина P всіх функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, є континуальною.*

Доведення. Нехай функції δ та ρ визначені на алфавіті A_3 рівностями

$$\delta(c)=\begin{cases}1, & \text{якщо } c=1,\\ 0, & \text{якщо } c\neq 1;\end{cases}\qquad \rho(c)=\begin{cases}1, & \text{якщо } c=1,\\ 2, & \text{якщо } c\neq 1.\end{cases}$$

Нехай $B=\{\delta,\rho\}$, $L=B\times B\times B\times\ldots$. Очевидно, що простір L послідовностей функцій δ та ρ є континуальним.

Розглянемо дві послідовності $(\gamma_n)\in L$, $(\tau_n)\in L$, $(\gamma_n)\neq(\tau_n)$ і їм відповідні функції f і φ, означені рівностями

$$\begin{aligned} f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) &= \Delta^{Q_3}_{\gamma_1(\alpha_1)\gamma_2(\alpha_2)\ldots\gamma_n(\alpha_n)\ldots},\\ \varphi(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) &= \Delta^{Q_3}_{\tau_1(\alpha_1)\tau_2(\alpha_2)\ldots\tau_n(\alpha_n)\ldots}. \end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Доведемо, що ці функції не є тотожно рівними.

Оскільки $(\gamma_n)\neq(\tau_n)$, то існує $m\in N$, таке що $\gamma_m\neq\tau_m$. Тоді

$$|\gamma_m(\alpha_m)-\tau_m(\alpha_m)|=2.$$

А тому $f(\Delta^{Q_3}_{(02)})\neq\varphi(\Delta^{Q_3}_{(02)})$.

Таким чином, клас функцій, визначених рівностями (2.1.2) є континуальним, а він є підкласом класу P. Отже, останній є принаймні теж континуальним. □

Множина всіх функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, є замкненою відносно операції суперпозиції (композиції).

Далі нас цікавитимуть лише неперервні на відрізку $[0;1]$ функції з класу P і їх сім'ю позначатимемо через P_c.

Тривіальним прикладом неперервної функції, що задовольняє означення (2.1.1) є тотожне перетворення відрізка $[0;1]$, тобто функція $e(x)=x$.

2.2. Означення та найпростіші властивості інверсора цифр Q_3 – зображення чисел

Розглянемо нетривіальний приклад функції з класу P_c.

Означення 2.2.1. Інверсором цифр Q_3 – зображення числа $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = x \in [0,1]$ (далі інверсором) називають функцію I, визначену на $[0,1]$ рівністю

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]...[2-\alpha_n]...}.$$

Прикладами обчислення значень інверсора є:

1) якщо $x = \Delta^{Q_3}_{1(2)} = q_0 + q_1$, то $I(\Delta^{Q_3}_{1(2)}) = \Delta^{Q_3}_{1(0)} = q_0$;

2) якщо $x = \Delta^{Q_3}_{0122(0)} = \beta_1 q_0 + \beta_2 q_0 q_1 + \beta_2 q_0 q_1 q_2 = q_0^2 + (q_0+q_1)q_0 q_1(1+q_2)$, то $I(\Delta^{Q_3}_{0122(0)}) = \Delta^{Q_3}_{2100(2)} = \beta_2 + \beta_1 q_2 + \beta_2 q_0^2 q_1 q_2 + \beta_2 q_0^2 q_1 q_2^2 + \ldots = \beta_2 + \beta_1 q_2 + \dfrac{\beta_2 q_0^2 q_1 q_2}{1-q_2} = q_0(1+q_2) + q_1 + q_0^2 q_1 q_2$.

Інверсор I тісно пов'язаний з функцією розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими цифрами Q_3 – зображення, а саме: $I(x) = 1 - F_\xi(x)$, де $F_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^{Q_3}_{\xi_1\xi_2...\xi_n...}$, Q_3 – цифри $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ якої утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2 з ймовірностями q_2, q_1, q_0 відповідно [62, 63, 65].

Оскільки Q_3 – раціональні числа мають по два зображення, то виникає необхідність обґрунтування коректності означення інверсора в таких точках.

Розглянемо два різних зображення Q_3 – раціонального числа x, тобто

$$x \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](2)} \equiv x', \;\; \alpha_k \neq 0,$$

і перевіримо виконання рівності $I(x) = I(x')$. Для цього розглянемо різницю

$$I(x) - I(x') = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]...[2-\alpha_k](2)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]...[3-\alpha_k](0)} =$$

$$= \left(\beta_{[2-\alpha_k]} + \frac{\beta_2 q_{[2-\alpha_k]}}{1-q_2} - \beta_{[3-\alpha_k]}\right) \prod_{i=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_i]}.$$

Якщо $\alpha_k = 1$, то $\beta_1 + \frac{\beta_2 q_1}{1-q_2} - \beta_2 = q_0 + \frac{(q_0+q_1)q_1}{q_0+q_1} - q_0 - q_1 = 0$.

Якщо $\alpha_k = 2$, то $\beta_0 + \frac{\beta_2 q_0}{1-q_2} - \beta_1 = \frac{(q_0+q_1)q_0}{q_0+q_1} - q_0 = 0$.

Таким чином, для довільного Q_3 – раціонального числа виконується $I(x) = I(x')$. А отже, інверсор цифр Q_3 – зображення числа є коректно визначеною функцією.

Впорядковані множини додатних дійсних чисел $Q_3 = \{q_0; q_1; q_2\}$ і $Q'_3 = \{q'_0; q'_1; q'_2\}$ називатимемо *спряженими*, якщо $q'_0 = q_2, q'_1 = q_1, q'_2 = q_0$.

Теорема 2.2.1. *Для інверсора I цифр Q_3 – зображення чисел відрізка* $[0, 1]$ *має місце рівність*

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad (2.2.1)$$

де впорядкована множина Q'_3 — спряжена до Q_3.

Доведення. Нехай $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільне число з інтервалу $(0; 1)$. Тоді $1 - x = x'$.

Легко бачити, що має місце рівність: $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta^{Q'_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_m}$, де $c'_i = 2 - c_i$. Справді, оскільки x належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1}$, $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2}$, ..., $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \ldots$, то $x' = 1 - x$ належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1}$, $\Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2}$, ..., $\Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}, \ldots$. Тому,

$$x' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]}.$$

З $x + x' = 1$ випливає рівність $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} + \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = 1$, яка рівносильна рівності $I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. □

Наслідок 2.2.1. $I(x) = 1 - x$ *для всіх* $x \in [0, 1]$, *тоді і тільки тоді, коли* $q_0 = q_2$.

Доведення. Справді, якщо $q_0 = q_2$, то $Q_3 = Q'_3$ і $\Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, а отже, $I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = 1 - x$.

Якщо ж $q_0 \neq q_2$, то розглянемо число $x = \Delta^{Q_3}_{1(0)}$ і

$$I(x) = I(\Delta^{Q_3}_{1(0)}) = \beta_1 + \beta_2 q_1 + \beta_2 q_1 q_2 + \ldots = \beta_1 + \frac{\beta_2 q_1}{1 - q_2} =$$

$$= q_0 + \frac{(q_0 + q_1)q_0}{q_0 + q_1} = q_0 + q_1,$$

$$1 - x = 1 - \Delta^{Q_3}_{1(0)} = 1 - q_0 = q_1 + q_2 \neq I(x).$$

Отримане протиріччя доводить твердження. □

2.3. Неперервність і монотонність інверсора

Лема 2.3.1. *Для приросту* $\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) \equiv I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)})$ *функції* I *на циліндрі* $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n} = [\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}; \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}]$ *має місце рівність*

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -\prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]} = -q_0^{N_2(x,n)} q_1^{N_1(x,n)} q_2^{N_0(x,n)},$$

де $N_i(x, n) = \sharp\{j : c_j = i,\ j \leqslant n\}$.

Доведення.

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c_n}) = I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c_n(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c_n(0)}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_{n-1}][2-c_n](0)} - \Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_{n-1}][2-c_n](2)} =$$

$$= \beta_{[2-c_1]} + \ldots + \beta_{[2-c_n]} \prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]} - \beta_{[2-c_1]} - \ldots - \beta_{[2-c_n]} \prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]} -$$

$$-\beta_2 \prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]} \cdot (1 + q_2 + \ldots + q_2^k + \ldots) = -\frac{\beta_2}{1 - q_2} \prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]} = -\prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]}.$$

Відомо, що у Q_3 – зображенні числа x до n-го місця включно кількість цифр i дорівнює $N_i(x, n)$, де $i \in A_3$. Оскільки інверсор I діє таким чином, що: $0 \xrightarrow{I} 2$, $1 \xrightarrow{I} 1$, $2 \xrightarrow{I} 0$, то очевидно, що кількість символів i у Q_3 – зображенні $I(x)$ до n-го місця включно дорівнює $N_{[2-i]}(x, n)$. Тобто,

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -q_0^{N_2(x,n)} q_1^{N_1(x,n)} q_2^{N_0(x,n)}.$$

Твердження доведено. □

Наслідок 2.3.1. *Якщо* $q_0 = q_1 = q_2$, *то* $\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -\frac{1}{3^n}$.

Теорема 2.3.1. *Інверсор* I *цифр* Q_3 *– зображення чисел* $[0,1]$ *є неперервною строго спадною на відрізку* $[0;1]$ *функцією.*

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка з $[0;1]$. Для доведення неперервності інверсора I в точці x_0 досить показати, що $\lim\limits_{x\to x_0} |I(x) - I(x_0)| = 0$.

Розглянемо випадок, коли x_0 є Q_3 – ірраціональною точкою. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$, $x \neq x_0$ існує такий номер $k = k(x)$, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i = \overline{1, k-1}$ і $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$. Оскільки умова $x \to x_0$ рівносильна $k \to \infty$, то

$$|I(x)-I(x_0)| = |\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x)]\ldots[2-\alpha_{k-1}(x)][2-\alpha_k(x)]\ldots} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x_0)]\ldots[2-\alpha_{k-1}(x_0)][2-\alpha_k(x_0)]\ldots}| =$$

$$= \left| \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{[2-\alpha_i(x)]} \prod_{j=1}^{i-1} q_{[2-\alpha_j(x)]} - \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{[2-\alpha_i(x_0)]} \prod_{j=1}^{i-1} q_{[2-\alpha_j(x_0)]} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \leqslant (\max\{q_0, q_1, q_2\})^{k-1} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Отже, інверсор I є неперервною функцією в Q_3 – ірраціональних точках.

Нехай x_0 є Q_3 – раціональною точкою, тобто

$$x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](2)}.$$

Для доведення неперервності функції I в точці x_0 зліва досить використати Q_3 – зображення точки, що містить період (0), тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$, а справа — Q_3 – зображення точки, що містить період (2), застосувавши аналогічні міркування, що і для Q_3 – ірраціональних точок.

Тепер доведемо, що функція є монотонно спадною на відрізку $[0;1]$.

Розглянемо довільні два числа $x_1 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots}$ та $x_2 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots}$, такі, що $x_1 < x_2$. Тоді, існує таке натуральне число k, що:

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_1,\ \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}^{(1)} = \alpha_{k-1}^{(2)} = \alpha_{k-1},$$

але $\alpha_k^{(1)} < \alpha_k^{(2)}$. Тоді $2-\alpha_k^{(1)} > 2-\alpha_k^{(2)}$ і

$$I(x_1)-I(x_2) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_{k-1}][2-\alpha_k^{(1)}][2-\alpha_{k+1}^{(1)}]\ldots} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_{k-1}][2-\alpha_k^{(2)}][2-\alpha_{k+1}^{(2)}]\ldots} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \Big(\beta_{[2-\alpha_k^{(1)}]} + \beta_{[2-\alpha_{k+1}^{(1)}]} q_{[2-\alpha_k^{(1)}]} + \ldots - \beta_{[2-\alpha_k^{(2)}]} - \beta_{[2-\alpha_{k+1}^{(2)}]} q_{[2-\alpha_k^{(2)}]} - \ldots\Big) =$$

$$= \Big(\beta_{[2-\alpha_k^{(1)}]} - \beta_{[2-\alpha_k^{(2)}]}\Big) \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} +$$

$$+ \Big(\beta_{[2-\alpha_{k+1}^{(1)}]} q_{[2-\alpha_k^{(1)}]} - \beta_{[2-\alpha_{k+1}^{(2)}]} q_{[2-\alpha_k^{(2)}]}\Big) \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} + \ldots > 0.$$

Отже, якщо $x_1 < x_2$, то $I(x_1) > I(x_2)$, тобто інверсор I цифр Q_3 – зображення є строго спадною функцією на відрізку $[0;1]$. □

Наслідок 2.3.2. *Єдиним розв'язком рівняння $I(x) = x$ є Q_3 – ірраціональна точка $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$.*

2.4. Лебегівська структура інверсора

Лема 2.4.1. *Якщо $I'(x)$ існує, то*

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_I\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{|\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}|} = -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)}{n}-\frac{N_0(x,n)}{n}}\right)^n. \quad (2.4.1)$$

Доведення. Очевидним є, що похідна дорівнює

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_I\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{|\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}|}.$$

Зважаючи на лему 2.3.1 та властивості циліндричних множин, отримаємо

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\prod\limits_{i=1}^{n} q_{[2-\alpha_i]}}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_{\alpha_i}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{q_0^{N_2(x,n)} q_1^{N_1(x,n)} q_2^{N_0(x,n)}}{q_0^{N_0(x,n)} q_1^{N_1(x,n)} q_2^{N_2(x,n)}} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{N_2(x,n)-N_0(x,n)} = -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)-N_0(x,n)}{n}}\right)^n.$$

Що і треба було довести. □

Теорема 2.4.1. *Якщо $q_0 \neq q_2$, то інверсор I є сингулярною функцією.*

Доведення. Оскільки функція I є неперервною і спадною, то згідно з відомою теоремою Лебега вона має майже скрізь (у розумінні міри Лебега λ) скінченну похідну. Нехай $A-$ множина точок $x \in [0,1]$ таких, що існує $I'(x)$, $B-$ множина нормальних чисел у Q_3 – зображенні. Оскільки міра Лебега $\lambda(A) = \lambda(B) = 1$, то $\lambda(A \bigcap B) = 1$. Покажемо, що $I'(x) = 0$ для будь-якого $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in A \bigcap B$. Оскільки $x \in B$, то $\nu_0(x) = q_0$, $\nu_1(x) = q_1$, $\nu_2(x) = q_2$.

Беручи до уваги (2.4.1), обчислимо похідну

$$I'(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)}{n}-\frac{N_0(x,n)}{n}}\right)^n = -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x)-\nu_0(x)}\right)^n =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}\right)^n.$$

Оцінимо значення виразу $\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}$.

Якщо $q_0 < q_2$, то $\frac{q_0}{q_2} < 1$, $q_2 - q_0 > 0$ і $\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0} < 1$.

Якщо $q_0 > q_2$, то $\frac{q_0}{q_2} > 1$, $q_2 - q_0 < 0$ і $\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0} < 1$. Тоді

$$I'(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = -\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}\right)^n = 0. \qquad (2.4.2)$$

Отже, похідна функції I на відрізку $[0;1]$ при $q_0 \neq q_2$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тобто вона є сингулярною функцією.

□

2.5. Диференціальні властивості інверсора Q_3 – цифр

Теорема 2.5.1. *При $q_0 \neq q_2$ похідна $I'(x_0)$ не існує, якщо:*

1) Q_3 – зображення числа x_0 має простий період (i) або

2) існують частоти $\nu_0(x_0)$ і $\nu_2(x_0)$ цифр 0 та 2 у Q_3 – зображенні числа x_0 і при цьому виконується

$$(\nu_2(x_0) - \nu_0(x_0))(q_0 - q_2) < 0.$$

Доведення. 1) Доведемо спочатку виконання умов теореми для Q_3 – раціональних точок. Розглянемо Q_3 – раціональну точку x_0 з відрізка $[0;1]$:

$$x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = x_0', \;\; \alpha_n \neq 0.$$

Виберемо послідовність (x_m) таку, що $x_m = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1]\underbrace{2\ldots2}_{m}(0)}$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$. Тоді

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I(x_0) - I(x_m)}{x_0 - x_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[3-\alpha_n](0)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[3-\alpha_n]\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}}{q_{[\alpha_n-1]}q_2^m \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}(\beta_2 + \ldots + \beta_2 q_2^k + \ldots)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{q_{[3-\alpha_n]}q_0^m \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{[2-\alpha_i]}(-\beta_2 - \ldots - \beta_2 q_2^k - \ldots)}{\frac{\beta_2}{1-q_2} q_{[3-\alpha_n]} q_2^m \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}} =$$

$$= -\lim_{m\to\infty} \frac{q_{[3-\alpha_n]}}{q_{[\alpha_n-1]}} \left(\frac{q_0}{q_2}\right)^m \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = z.$$

Виберемо послідовність (x_m') таку, що $x_m' = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}$. Очевидно, що $x_m' \to x_0'$ при $m \to \infty$ і

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I(x_0') - I(x_m')}{x_0' - x_m'} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_2^m \prod\limits_{i=1}^{n} q_{[2-\alpha_i]}(\beta_2 + \ldots + \beta_2 q_2^k + \ldots)}{q_0^m \prod\limits_{i=1}^{n} q_{\alpha_i}(-\beta_2 - \ldots - \beta_2 q_2^k - \ldots)} =$$

$$= -\lim_{m\to\infty}\left(\frac{q_2}{q_0}\right)^m \prod_{i=1}^{n}\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = z_1.$$

Якщо $q_0q_2^{-1} < 1$, то $z = 0$, а $z_1 = \infty$. Якщо $q_0q_2^{-1} > 1$, то навпаки: $z = \infty$ і $z_1 = 0$.

Оскільки $x_0' = x_0$, то не існує похідної $I'(x_0)$ в жодній Q_3 – раціональній точці.

Покажемо, що при $q_0 \neq q_2$ не існує похідної $I'(x_0)$ в точках Q_3 – зображення яких містить простий період (1), тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}$.

Нехай $x_k = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}$, $y_k = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}$, тоді

$$\lim_{k\to\infty}\frac{I(x_0)-I(x_k)}{x_0-x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n](1)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}}{\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)} - \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots)-(\beta_2+q_2\beta_2+q_2^2\beta_2+\ldots)}{(\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots)}\cdot\frac{q_1^k\prod\limits_{i=1}^{n}q_{[2-\alpha_i]}}{q_1^k\prod\limits_{i=1}^{n}q_{\alpha_i}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{q_0}{1-q_1}-\frac{q_0+q_1}{1-q_2}}{\frac{q_0}{1-q_1}}\prod_{i=1}^{n}\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = -\lim_{k\to\infty}\left(\frac{q_2}{q_0}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}}. \quad (2.5.1)$$

З іншого боку,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{I(x_0)-I(y_k)}{x_0-y_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n](1)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}}{\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)} - \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots)}{(\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots)-(\beta_2+q_2\beta_2+q_2^2\beta_2+\ldots)}\cdot\frac{q_1^k\prod\limits_{i=1}^{n}q_{[2-\alpha_i]}}{q_1^k\prod\limits_{i=1}^{n}q_{\alpha_i}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{q_0}{1-q_1}}{\frac{q_0}{1-q_1}-\frac{q_0+q_1}{1-q_2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = -\lim_{k\to\infty}\left(\frac{q_0}{q_2}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}}. \quad (2.5.2)$$

Зважаючи на (2.5.1) і (2.5.2) очевидно, що при $q_0 \neq q_2$ не існує $I'(x_0)$.

2) Припустимо, що похідна $I'(x_0)$ в точці $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ існує. Тоді враховуючи лему 2.4.1, маємо

$$I'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x_0,n)}{n}-\frac{N_0(x_0,n)}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0)}\right)^n = \infty,$$

оскільки з умови $(\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0))(q_0-q_2) < 0$ випливає $\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0)} > 1$.

Отже, скінченної похідної в точці x_0 функція I не має. □

2.6. Фрактальні властивості функції

Теорема 2.6.1. *Інверсор I зберігає розмірність Гаусдорфа-Безиковича, тобто довільна борелівська множина і її образ мають однакову розмірність, тоді і тільки тоді, коли $q_0 = q_2$.*

Доведення. Оскільки при $q_0 = q_2$ має місце $I(x) = 1 - x$, то очевидно, що у цьому випадку інверсор I зберігає розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Розглянемо множину Безиковича-Егглстона [76]

$$E[\nu_0,\nu_1,\nu_2] = \{x : \nu_0^{Q_3}(x) = \nu_0, \nu_1^{Q_3}(x) = \nu_1, \nu_2^{Q_3}(x) = \nu_2\}$$

при $\nu_0 \neq \nu_2$. В роботі [76] доведено, що її розмірність Гаусдорфа-Безиковича дорівнює

$$\alpha_0(E) = \frac{\ln \nu_0^{\nu_0}\nu_1^{\nu_1}\nu_2^{\nu_2}}{\ln q_0^{\nu_0}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}}.$$

Образом $E[\nu_0,\nu_1,\nu_2]$ під дією інверсора I є множина $E'[\nu_2,\nu_1,\nu_0]$, розмірність якої

$$\alpha_0(E') = \frac{\ln \nu_2^{\nu_2}\nu_1^{\nu_1}\nu_0^{\nu_0}}{\ln q_0^{\nu_2}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_0}}.$$

Очевидно, що $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$, коли $\ln q_0^{\nu_0}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2} = \ln q_0^{\nu_2}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_0}$, що рівносильно

$$1 = \frac{q_0^{\nu_0}q_2^{\nu_2}}{q_0^{\nu_2}q_2^{\nu_0}} = \left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_0-\nu_2}.$$

Отже, інверсор I зберігає фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли $q_0 = q_2$. □

Теорема 2.6.2. *Якщо* $q_0 \neq q_2$ *і* $H-$ *множина точок* x*, в яких не існує скінченної похідної* $I'(x)$*, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича задовольняє нерівність*

$$\alpha_0(H) \geqslant -2\log_{q_0 q_2} 2.$$

Доведення. Нехай $q_0 > q_2$. Згідно з теоремою 2.5.1 множина Безиковича-Еггістона $E\left[\frac{1}{2}-\varepsilon; 0; \frac{1}{2}+\varepsilon\right]$ належить множині H недиференційовності функції I при довільному $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тоді згідно з властивостями монотонності та стабільної зліченності розмірності Гаусдорфа-Безиковича [76], маємо

$$\alpha_0(H) \geqslant \sup_{\varepsilon} \alpha_0\left(E\left[\frac{1}{2}-\varepsilon; 0; \frac{1}{2}+\varepsilon\right]\right) =$$

$$= \sup_{\varepsilon} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} \cdot 0^0 \cdot \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}{\ln q_0^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} q_1^0 q_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}} = \frac{2\ln\frac{1}{2}}{\ln q_0 q_2} = -2\log_{q_0 q_2} 2.$$

Якщо $q_0 < q_2$, то згідно теореми 2.5.1 множина Безиковича-Еггістона $E\left[\frac{1}{2}+\varepsilon; 0; \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$ належить множині H недиференційовності функції I при довільному $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ і

$$\alpha_0(H) \geqslant \sup_{\varepsilon} \alpha_0\left(E\left[\frac{1}{2}+\varepsilon; 0; \frac{1}{2}-\varepsilon\right]\right) =$$

$$= \sup_{\varepsilon} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \cdot 0^0 \cdot \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}{\ln q_0^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} q_1^0 q_2^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}} = -2\log_{q_0 q_2} 2.$$

Що і треба було довести. □

2.7. Самоафінність графіка

Згідно з теоремою 2.2.1, має місце $\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Розглянемо функцію-перетворювач цифр $\varrho(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n(x)$ — це n-та трійкова цифра числа x, а множина Q'_3 спряжена до Q_3.

Лема 2.7.1. *Графік* $\Gamma_\varrho = \{(x, \varrho(x)) : x \in [0,1]\}$ *функції* ϱ *є самоафінною множиною.*

Доведення. Розглянемо наступні афінні перетворення:

$$\varphi_0 : \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_2 y; \end{cases} \qquad \varphi_1 : \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = q_1 y + q_2; \end{cases} \qquad \varphi_2 : \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = q_0 y + q_1 + q_2. \end{cases}$$

Нехай $\Phi \equiv \varphi_0(\Gamma_\varrho) \cup \varphi_1(\Gamma_\varrho) \cup \varphi_2(\Gamma_\varrho)$. Покажемо, що $\Phi \subset \Gamma_\varrho$. Для довільної точки $M(x'_M, y'_M) \in \Phi$ існує таке i, що $M \in \varphi_i(\Gamma_\varrho)$, тобто

$$\begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = q_{[2-i]} y + 1 - \beta_{[3-i]}, \end{cases}$$

де $i \in A_3$, $\beta_3 = 1$. Легко бачити, що $y'_M = \varrho(x'_M)$.

Покажемо, що $\Gamma_\varrho \subset \Phi$. Нехай $M(x, \varrho(x)) \in \Gamma_\varrho$, то $x_M = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = q_i x + \beta_i$, тобто $\varrho(x) = y$, а отже $M \in \Phi$.

Очевидно, що $\Phi = \Gamma_\varrho$ і графік функції Γ_ϱ є самоафінною множиною. $\square$

Теорема 2.7.1. *Графік* $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ *функції* I *є самоафінною множиною, а саме:* $\Gamma_I = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \phi_i(\Gamma_I)$, *де* ϕ_i *— афінні перетворення, які задаються формулами*

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = -q_{[2-i]} y + \beta_{[3-i]}, \ i \in A_3. \end{cases}$$

Доведення. Для доведення теореми побудуємо множину $\phi = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$, яка складається з трьох афінних перетворень і $\phi(\Gamma_I) = \Gamma_I$. Зважаючи на лему 2.7.1 очевидно, що цими афінними перетвореннями є

$$\phi_0 : \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = 1 - q_2 y; \end{cases} \qquad \phi_1 : \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = 1 - q_1 y - q_2; \end{cases} \qquad \phi_2 : \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = 1 - q_0 y - q_1 - q_2. \end{cases}$$

Нехай $\Psi \equiv \phi_0(\Gamma_I) \cup \phi_1(\Gamma_I) \cup \phi_2(\Gamma_I)$. Для довільної точки $M(x'_M, y'_M) \in \Psi$ існує таке i, що $M \in \phi_i(\Gamma_I)$, $i \in A_3$. Очевидно, що $y'_M = I(x'_M)$.

Нехай $M(x, I(x)) \in \Gamma_I$, то $x_M = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = q_i x + \beta_i$, а $I(x) = -q_{[2-i]}y + \beta_{[3-i]} = y_M$. Тоді $M \in \Psi$.

Очевидно, що $\Gamma_I = \phi_0(\Gamma_I) \cup \phi_1(\Gamma_I) \cup \phi_2(\Gamma_I)$, тобто графік функції $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ є самоафінною множиною. □

2.8. Інтегральні властивості

Теорема 2.8.1. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 I(x)\,dx = \frac{2q_0q_1 + q_0^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

Доведення. В силу теореми 2.2.1, маємо

$$\int_0^1 I(x)dx = 1 - \int_0^1 \Delta^{Q_3'}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\,dx = 1 - \int_0^1 \varrho(x)\,dx. \tag{2.8.1}$$

Із адитивної властивості інтеграла Лебега, самоафінних властивостей функції і леми 2.7.1, маємо

$$\int_0^1 \varrho(x)\,dx = \int_0^{q_0} \varrho(x)\,dx + \int_{q_0}^{q_0+q_1} \varrho(x)\,dx + \int_{q_0+q_1}^1 \varrho(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 q_2\varrho(x)d(q_0x) + \int_0^1 (q_2 + q_1\varrho(x))d(q_1x + q_0) + \int_0^1 (q_2 + q_1 + q_0\varrho(x))d(q_2x + q_0 + q_1) =$$

$$= q_0q_2\int_0^1 \varrho(x)\,dx + q_1q_2 + q_1^2\int_0^1 \varrho(x)\,dx + q_2^2 + q_1q_2 + q_0q_2\int_0^1 \varrho(x)\,dx,$$

$$(1 - 2q_0q_2 - q_1^2)\int_0^1 \varrho(x)\,dx = 2q_1q_2 + q_2^2,$$

$$\int_0^1 \varrho(x)\,dx = \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{1 - 2q_0q_2 - q_1^2}.$$

Повернувшись до рівності (2.8.1), отримаємо

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx = 1 - \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{1 - 2q_0q_2 - q_1^2} = \frac{1 - 2q_0q_2 - (q_1+q_2)^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2} =$$

$$= \frac{1 - 2q_0(1 - q_0 - q_1) - (q_1 + 1 - q_0 - q_1)^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2} = \frac{2q_0q_1 + q_0^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

Що і треба було довести. □

2.9. Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь

Умови існування розв'язку системи трьох функціональних рівнянь. Нехай задано чотири набори дійсних чисел q_i, β_i, b_i та d_i, де $i = 0, 1, 2$, причому

$$\begin{cases} q_i > 0, \\ q_0 + q_1 + q_2 = 1, \\ \beta_0 = 0, \beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i, \\ |d_i| < 1, \\ 0 \leqslant b_i < 1. \end{cases}$$

Для $x \in [0,1]$ розглядається система трьох функціональних рівнянь

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.9.1}$$

Спочатку зауважимо, що коли $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ — Q_3 – зображення числа u, $c_n = c_n(u)$, то $\beta_i + q_i u = \Delta^{Q_3}_{ic_1c_2\ldots c_n\ldots}$. Тому систему (2.9.1) можна записати у формі

$$f(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}), \quad i = 0, 1, 2, \tag{2.9.2}$$

або

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]}+d_{[2-\alpha_1]}f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots})\,\forall\,(\alpha_n)\in L\equiv A_3\times A_3\times\ldots\times A_3\times\ldots,$$

які рівносильні початковій системі лише при додаткових умовах, що стосуються різних зображень Q_3 – раціональних чисел, а саме: якщо $x = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots[c_n-1](2)}$, то рівності (2.9.2) мають місце як для першого, так і для другого Q_3 – зображення.

Зупинемося на кількох часткових випадках.

Випадок 1. Нехай $d_0 = d_1 = d_2 = 0$, тоді система (2.9.1) набуде вигляду

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]},\ \ i = 0, 1, 2.$$

Очевидно, що остання система має розв'язки в класі обмежених і визначених на $[0, 1]$ функцій, якщо функція f є коректно визначеною в Q_3 – раціональних точках, зокрема $f(\beta_0+q_0\Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_1+q_1\Delta^{Q_3}_{(0)})$ і $f(\beta_1+q_1\Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_2 + q_2\Delta^{Q_3}_{(0)})$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли $b_0 = b_1 = b_2$.

В цьому випадку розв'язком системи є функція $f(x) = const = b_0$.

Випадок 2. Нехай $d_i = d_j = 0$ і $d_k \neq 0$, де $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, тоді система (2.9.1) набуде вигляду

$$\begin{cases} f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]} + d_{[2-k]}f(x), \\ f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]},\ \ \text{де}\ \ m \in \{i, j\}. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $d_0 = d_1 = 0$ і $d_2 \neq 0$. Міркуючи аналогічно до пункту 1, маємо відпповідно $f(\beta_0+q_0\Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_1+q_1\Delta^{Q_3}_{(0)})$ і $f(\beta_1+q_1\Delta^{Q_3}_{(2)}) = f(\beta_2 + q_2\Delta^{Q_3}_{(0)})$, а це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1, \\ b_1 = b_0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = b_0(1 - d_2), \\ b_1 = b_0. \end{cases}$$

Для двох інших випадків, при $d_0 = d_2 = 0$ і $d_1 \neq 0$ або $d_1 = d_2 = 0$ і $d_0 \neq 0$ відповідно мають місце

$$\begin{cases} b_1 = b_0(1-d_1), \\ b_2 = b_0; \end{cases} \quad \text{або} \begin{cases} b_0 = b_2(1-d_0), \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

У цьому випадку система (2.9.2) є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_k = b_j(1-d_k), \\ b_i = b_j. \end{cases}$$

Випадок 3. Нехай $d_i = 0$ та $d_j \neq 0 \neq d_k$, де $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$. Тоді система (2.9.1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]} + d_{[2-m]} f(x), \ \ \text{де} \ \ m \in \{i,j\}, \\ f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]}. \end{cases}$$

Детально розглянемо лише випадок, коли $d_0 = 0$ і $d_1 \neq 0 \neq d_2$. Використовуючи аналогічні міркування до попередніх випадків (прирівнюємо значення функції для двох різних Q_3 – зображень в Q_3 – раціональних точках) та рівності системи (2.9.1) n разів, отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \left(b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \ldots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)\right), \\ b_1 + d_1 b_0 = b_0. \end{cases}$$

Очевидно, що $d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right) \to 0$ при $n \to \infty$, тоді сума виразу $b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \ldots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)$ прямує до $\dfrac{b_2}{1-d_2}$, отже,

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \dfrac{b_2}{1-d_2}, \\ b_1 = b_0(1-d_1), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_2 = b_0(1-d_2), \\ b_1 = b_0(1-d_1); \end{cases} \\ \quad d_1 + d_2 = 1. \end{array} \right.$$

Для двох інших випадків при $d_1 = 0$ або $d_2 = 0$, отримаємо відповідно

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0 \dfrac{1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \dfrac{1-d_2}{1-d_0}; \end{cases} \\ \quad d_0 + d_2 = 1. \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0 \dfrac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \dfrac{1}{1-d_0}; \end{cases} \\ \quad d_0 + d_1 = 1. \end{array}\right.$$

Система (2.9.1) у випадку 3 є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b_1 = b_0 \dfrac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \dfrac{1-d_2}{1-d_0}; \end{cases} \\ d_0 + d_1 + d_2 = 1. \end{array}\right.$$

Тепер проведемо загальні міркування.

Лема 2.9.1. *Для того, щоб система* (2.9.1) *мала розв'язки в класі визначених і обмежених на* $[0,1]$ *функцій, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + \dfrac{b_2 d_1}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_2}{1-d_0} = 0, \\ b_0 - b_1 + \dfrac{b_2 d_0}{1-d_2} - \dfrac{b_0 d_1}{1-d_0} = 0. \end{cases} \tag{2.9.3}$$

Доведення. При умові (припущенні) існування розв'язку системи (2.9.1) знайдемо його форму.

Застосувавши рівності системи (2.9.1) n разів, отримаємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{n} \left[b_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_j]} \right] + \\ + \left(\prod_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]} \right) f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}).$$

Оскільки функція визначена в кожній точці відрізка $[0,1]$, то цей процес можна продовжувати до нескінченності і він є збіжним, оскільки залишковий член $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]} \right) f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots})$ прямує до нуля, завдяки тому, що f — обмежена, а $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} d_{[2-\alpha_j]}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, розв'язок системи (2.9.1), у випадку його існування, має вигляд

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[b_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} d_{[2-\alpha_j]} \right]. \tag{2.9.4}$$

Чи визначає рівність (2.9.4) функцію?

Якщо число x є Q_3 – ірраціональним числом, а отже, має єдине Q_3 – зображення, то очевидно, що так. Залишається перевірити чи рівні значення виразу (2.9.4) для двох різних зображень Q_3 – раціональної точки: $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](2)}$, де $\alpha_n \neq 0$. З цією метою виразимо різницю:

$$\delta \equiv f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](2)}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_k]} \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + d_{[2-\alpha_n]} f\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right) - d_{[3-\alpha_n]} f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]}\right) \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0}\right).$$

Для того, щоб $\delta = 0$ (значення для двох різних Q_3 – зображень кожної Q_3 – раціональної точки співпадали), необхідно і достатньо, щоб

$$\rho_{\alpha_n} \equiv \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0}\right) = 0,$$

як при $\alpha_n = 1$, так і при $\alpha_n = 2$, тобто, щоб мала місце система (2.9.3).

Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки система (2.9.3) має розв'язки, то кожен з них має форму (2.9.4), а рівність (2.9.4) коректно визначає функцію, тоді і тільки тоді, коли має місце система (2.9.3).

Д о с т а т н і с т ь. З того, що має місце система (2.9.3) випливає коректність визначення функції f рівністю (2.9.4), яка задовольняє систему функціональних рівнянь (2.9.1), а отже, є її розв'язком. □

Наслідок 2.9.1. *Якщо* $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, *то система* (2.9.1) *у класі обмежених і визначених на* $[0, 1]$ *функцій має єдиний розв'язок — функцію, визначену рівністю* (2.9.4).

Лема 2.9.2. *Якщо* $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, *то із системи* (2.9.3) *випливає, що*

$$d_0 + d_1 + d_2 = 1 \quad \textit{або} \quad d_0 = 0 = d_1.$$

Доведення. Якщо $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, то система (2.9.3) записується у вигляді

$$\begin{cases} d_0 - d_0 - d_1 + \dfrac{(d_0 + d_1)d_1}{1 - d_2} - \dfrac{0 \cdot d_2}{1 - d_0} = 0, \\ 0 - d_0 + \dfrac{(d_0 + d_1)d_0}{1 - d_2} - \dfrac{0 \cdot d_1}{1 - d_0} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \dfrac{d_1(-1 + d_0 + d_1 + d_2)}{1 - d_2} = 0, \\ \dfrac{d_0(-1 + d_0 + d_1 + d_2)}{1 - d_2} = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ d_0 = 0 = d_1. \end{array} \right.$$

□

Умови неперервності функції як розв'язку системи трьох функціональних рівнянь.

Теорема 2.9.1. *Якщо для системи* (2.9.1) *одночасно виконуються умови:*

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ \max\limits_i |d_i| < 1, \\ b_0 = 0, b_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_i > 0, \end{cases} \tag{2.9.5}$$

то функція f *визначена рівністю* (2.9.4) *є неперервною на відрізку* $[0, 1]$.

Доведення. Нехай задано число x та $x_0 \in [0, 1]$, причому $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для всіх $i < n$ та $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0)$. Розглянемо різницю

$$f(x) - f(x_0) =$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]}\left(f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_n(x)\alpha_{n+1}(x)\ldots\alpha_{n+k}(x)\ldots}\right)-f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_n(x_0)\alpha_{n+1}(x_0)\ldots\alpha_{n+k}(x_0)\ldots}\right)\right).$$

Число x_0 може бути Q_3 – раціональним або Q_3 – ірраціональним, тому необхідно розглянути два випадки.

Нехай x_0 — Q_3 – ірраціональне число, тоді умова $x \to x_0$ рівносильна умові $n \to \infty$ і зокрема

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \leqslant (\max\{|d_0|,|d_1|,|d_2|\})^{n-1} \to 0 \ \ (n\to\infty),$$

тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

Якщо x_0 — Q_3 – раціональне число, тобто має два різних Q_3 – зображення, то неперервність доводиться аналогічними міркуваннями з використанням означення неперервності та виразу функції f. Але, коли x прямує до x_0 зліва необхідно використати зображення $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots[\alpha_n-1](x_0)(2)}$, а коли x прямує до x_0 справа — $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)(0)}$. □

Лема 2.9.3. *Для приросту* $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) \equiv f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}\right)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n} \equiv \left[\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}; \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right]$ *має місце рівність*

$$\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

Доведення. Використовуючи, вираз (2.9.4) для значення функції f, отримуємо

$$f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}\right)-f\left(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}\right)=\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}\left(f\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right)-f\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right)\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}\left(\frac{b_0}{1-d_0}-\frac{b_2}{1-d_2}\right)=-\prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

□

Теорема 2.9.2. *Якщо для системи* (2.9.1) *виконуються умови* (2.9.5), *то функція є:*

1) монотонною і набуває невід'ємних значень, якщо всі $d_i \geqslant 0$, $i=\overline{0,2}$, *зокрема строго монотонною, якщо всі* $d_i > 0$;

2) сталою на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_m}$, *якщо існує* $d_{c_k}=0$ *при* $k<m$;

3) ніде не монотонною, якщо всі $d_i \neq 0$ *та існує хоча б одне* $d_k < 0$, $k=\{1,2\}$.

Доведення. Твердження 1) і 2) випливають з попередньої леми.

Твердження 3) доведемо методом від супротивного. Припустимо, що умова 3) виконується і знайдеться інтервал монотонності функції f. Очевидно, що існує циліндр $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_n}$, який повністю належить цьому інтервалу монотонності, а отже, є проміжком монотонності функції f.

Зважаючи на те, що всі $d_i \neq 0$ та існує хоча б одне $d_i < 0$, $i=\overline{0,2}$, та попередню лему, маємо $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_n}) \neq 0$ і $\mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_n0}) \cdot \mu_f(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_ni}) < 0$. Тобто на одному з циліндрів $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_n0}$ чи $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_ni}$ функція має додатній приріст, а на іншому – від'ємний, що суперечить монотонності функції f на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2...c_n}$ і доводить останнє твердження та всю теорему. □

Наслідок 2.9.2. *Якщо виконуються умови* (2.9.5) *і* $d_i = 0$, *то* f *є сингулярною функцією канторівського типу.*

Інверсор як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь. Нехай $b_i=\beta_i$ та $d_i=q_i$, $i=\overline{0,2}$. Тоді система трьох функціональних рівнянь набуде вигляду

$$f(\beta_i+q_ix)=\beta_{[2-i]}+q_{[2-i]}f(x), \quad i=0,1,2, \tag{2.9.6}$$

де $x\in[0,1]$, яка для класичного трійкового зображення має вигляд

$$f\left(\frac{i+x}{3}\right)=\frac{2-i+f(x)}{3},$$

єдиним розв'язком останньої є функція $f(x)=1-x$.

Теорема 2.9.3. *Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь* (2.9.6) *в класі обмежених і визначених в кожній точці* $[0,1]$ *функцій є інверсор* I.

Доведення. Зважаючи на те, що $b_i = \beta_i$ та $d_i = q_i$ для всіх $i = \overline{0,2}$, функція f є коректно визначеною (оскільки виконуються умови (2.9.3) і (2.9.5)), то рівність (2.9.4) переписується у формі

$$f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{[2-\alpha_k]}\prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]}\right) \equiv I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}). \quad (2.9.7)$$

Тобто, єдиним розв'язком є функція I. □

Зауваження 2.9.1. Система (2.9.6) задає систему ітерованих функцій, для яких атрактором буде деяка компактна множина в R^2. Але висновок про те, що цією множиною буде графік неперервної функції на $[0,1]$, взагалі кажучи, є нетривіальним.

2.10. Функціональні співвідношення

Лема 2.10.1. *Для інверсора I мають місце наступні функціональні співвідношення:*

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} I(x), \quad i = 0,1,2; \quad (2.10.1)$$

$$I(x) = \beta_{[2-\alpha_1]} + q_{[2-\alpha_1]} I(\omega_1(x)), \quad \alpha_1 \in A_3; \quad (2.10.2)$$

$$I(\delta_i(x)) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} I(x), \quad i = 0,1,2; \quad (2.10.3)$$

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} \varrho(x), \quad i = 0,1,2; \quad (2.10.4)$$

$$I(x) = \beta_{[3-\alpha_1]} - q_{[2-\alpha_1]} \varrho(\omega_1(x)), \quad \alpha_1 \in A_3, \quad (2.10.5)$$

$$I(\delta_i(x)) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} \varrho(x), \quad i = 0,1,2; \quad (2.10.6)$$

де $\omega_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$ *– оператор лівостороннього зсуву цифр* Q_3 *– зображення числа* x, $\delta_i(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *– оператор правостороннього зсуву цифр* Q_3 *– зображення числа* x *з параметром* i, $\varrho(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *і множина* Q'_3 *спряжена до* Q_3.

Доведення. Система (2.10.1) випливає із твердження теореми 2.9.3.

Доведемо, що має місце система (2.10.4). Для цього використаємо рівність (2.2.1) і розглянемо спочатку функцію $\varrho(x)$ визначену рівністю

$$\varrho(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Очевидно, що $\varrho(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \varrho(\beta_i + q_i\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$ і $\varrho(\Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta'_i + q'_i\Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta'_i + q'_i\varrho(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \beta'_i + q'_i\varrho(x)$. Тоді у випадку, якщо:

1) $i = 0$, то $\beta'_0 + q'_0\varrho(x) = 0 + q_2\varrho(x) = 1 - \beta_3 + q_2\varrho(x)$;

2) $i = 1$, то $\beta'_1 + q'_1\varrho(x) = q'_0 + q'_1\varrho(x) = q_2 + q_1\varrho(x) = 1 - \beta_2 + q_1\varrho(x)$;

3) $i = 2$, то $\beta'_2 + q'_2\varrho(x) = q'_0 + q'_1 + q'_2\varrho(x) = q_2 + q_1 + q_0\varrho(x) = 1 - \beta_1 + q_0\varrho(x)$.

Тому має місце

$$\varrho(\beta_i + q_i x) = 1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]}\varrho(x).$$

Зважаючи на останню рівність та рівність (2.2.1), маємо

$$I(\beta_i + q_i x) = 1 - \varrho(\beta_i + q_i x) = 1 - \left(1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]}\varrho(x)\right),$$

тобто

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]}\varrho(x).$$

Якщо додатково ввести функцію, яку називають оператором лівостороннього зсуву цифр числа x, для якої має місце рівність

$$\omega_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

то систему рівнянь (2.10.1) можна переписати у вигляді (2.10.2), а систему (2.10.4) можна переписати у вигляді (2.10.5).

Очевидно, що для оператора правостороннього зсуву має місце

$$\delta_i(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_i + q_i\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_i + q_i x.$$

Тобто, системи рівностей (2.10.1) і (2.10.4) можна переписати у вигляді систем (2.10.3) та (2.10.6). $\square$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі введено в розгляд континуальний клас P визначених на $[0;1]$ функцій, які зберігають цифру 1 у поліосновному Q_3 – зображенні дійсних чисел. Основна увага приділяється ґрунтовному вивченню властивостей інверсора $I(x)$ — єдиній неперервній строго спадній функції з класу P, яка має нетривіальні локальні властивості.

Основними результатами цього розділу є доведення наступних властивостей інверсора:

— неперервність та монотонність (теорема 2.3.1);

— критерій сингулярності інверсора (теорема 2.4.1);

— поточковий опис диференціальних властивостей (теорема 2.5.1);

— самоафінність графіка функції (теорема 2.7.1);

— трансформації розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин під дією інверсора (теореми 2.6.1 та 2.6.2);

— обґрунтування інтегральних властивостей, зокрема, обчислено інтеграл $\int\limits_0^1 I(x)dx$ (теорема 2.8.1);

Встановлено ряд функціональних співвідношень, які задовольняє інверсор, та знайдено його еквівалентне означення через систему функціональних рівнянь (підрозділ 2.9 та 2.10).

Результати цього розділу опубліковані у роботах [3^a, 4^a, 5^a] і доповідались на конференціях [14^a, 16^a, 17^a].

РОЗДІЛ 3
НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ЦИФРУ 1 У Q_3 – ЗОБРАЖЕННІ ЧИСЕЛ

У цьому розділі розглядається масивність множини неперервних функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, та її підмножин. Вивчаються локальні, фрактальні, структурні, варіаційні, інтегральні властивості двох «яскравих» представників з різних підкласів вище вказаної множини.

3.1. Клас неперервних функцій, що зберігають цифру 1

Розглядаються неперервні на відрізку $[0;1]$ функції f, визначені рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},$$

де цифра γ_n Q_3 – зображення числа y задовольняє умови:

1) $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n = 1$;

2) якщо цифра γ_n відмінна від 1, то вона залежить від перших n цифр Q_3 – зображення аргумента x, тобто

$$\gamma_n = \gamma_n(x) = \phi_n(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)), n \in N.$$

Очевидно, що множина всіх функцій з $C_{[0;1]}$, які задовольняють умови 1), 2) співпадає з P_c.

Введемо позначення: $\square^{d_1\ldots d_m}_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m} \times \Delta^{Q_3}_{d_1\ldots d_m}$;

$$\Gamma^f_{c_1\ldots c_m} \equiv \{(x,y) : x \in \Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}, y = f(x)\}.$$

Лема 3.1.1. *Якщо $f \in P_c$ і при цьому цифра γ_n залежить лише від значення $\alpha_n(x)$, тобто є функцією n- ої цифри числа x, то f є або тотожним перетворенням відрізка $[0;1]$ або інверсором I.*

Доведення. Оскільки $\Gamma_1^f \in \square_1^1$, то, враховуючи неперервність f, можемо стверджувати, що
$$\begin{cases} \Gamma_0^f \in \square_0^0, \\ \Gamma_2^f \in \square_2^2, \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} \Gamma_0^f \in \square_0^2, \\ \Gamma_2^f \in \square_2^0, \end{cases}$$
тобто $\gamma_n = \alpha_n$ або $\gamma_n = 2 - \alpha_n$.

Справді, припустивши, що
$$\gamma_n(0) = \gamma_n(2) = c \in \{0, 2\},$$
матимемо розриви у точках $x_1 = \Delta^{Q_3}_{1(0)}$ та $x_2 = \Delta^{Q_3}_{2(0)}$, оскільки в першому випадку:
$$\Gamma_{02}^f \in \square_{02}^{00}, \text{ а } \square_{02}^{00} \cap \square_1^1 = \varnothing,$$
$$\Gamma_{20}^f \in \square_{20}^{00}, \text{ а } \square_{20}^{00} \cap \square_1^1 = \varnothing,$$
а в другому:
$$\Gamma_{02}^f \in \square_{02}^{22}, \text{ а } \square_{02}^{22} \cap \square_1^1 = \varnothing,$$
$$\Gamma_{20}^f \in \square_{20}^{22}, \text{ а } \square_{20}^{22} \cap \square_1^1 = \varnothing,$$
що суперечить неперервності функції f.

Отже, $\gamma_n(0) \neq \gamma_n(2)$. А тому можливі два випадки $\gamma_n(0) = 0$ і $\gamma_n(0) = 2$ для довільного $n \in N$, тобто f — тотожне перетворення відрізка $[0;1]$ або інверсор. □

А тепер задамось питанням: чи існують функції f з класу P_c, для яких має місце рівність $\gamma_n = \gamma_n(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, тобто γ_n є функцією цифр α_{n-1} і α_n, відмінні від $f(x) = I$ і $f(x) = x$?

Лема 3.1.2. *Окрім тотожного перетворення та інверсора у сім'ї P_c не існує функції f, цифри γ_n значення $y = f(x)$ якої однозначно визначаються парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ і $\alpha_n(x)$ аргумента.*

Доведення. Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує неперервна функція f, відмінна від тотожного перетворення та інверсора, яка задовольняє вказані в лемі 3 умови і при цьому $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha_1)$, $\gamma_n = \varphi(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ для всіх $n \in N$, де φ – проста функція двох змінних, визначена на множині пар цифр: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),$ $(2,1),(2,2)\}$.

Оскільки $\gamma_1(1) = 1$, то перша цифра γ_1 числа $y = f(x)$ однозначно довизначається одним з чотирьох способів:

$$\gamma_1(0) = i \ \text{ та } \ \gamma_1(2) = j, \ \text{ де } \ i, j \in \{0, 2\}.$$

Оскільки $\gamma_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1$, то $\gamma_2 = \varphi(0,1) = \varphi(1,1) = \varphi(2,1) = 1$.

Розглянемо всеможливі доозначення цифри γ_2.

1) Нехай $i = j$, то $\gamma_1(0) = \gamma_1(2)$. Враховуючи неперервність функції f, маємо

$$\begin{cases} \varphi(1,i) = \varphi(1,2-i) = i, \\ \varphi(i,2-i) = \varphi(2-i,i) = 2-i, \\ \varphi(i,i) \in \{i, 2-i\} \ni \varphi(2-i,2-i). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Цифра $\gamma_3 = \varphi(\alpha_2(x), \alpha_3(x))$ однозначно визначається рівностями (3.1.1). Розглянемо «суміжні» двовимірні циліндри 3-го рангу: $\square^{i1i}_{012}$ і $\square^{i[2-i][2-i]}_{020}$, $\square^{i1i}_{210}$ і $\square^{i[2-i][2-i]}_{202}$. Для них

$$\square^{i1i}_{012} \cap \square^{i[2-i][2-i]}_{020} = \varnothing,$$
$$\square^{i1i}_{210} \cap \square^{i[2-i][2-i]}_{202} = \varnothing,$$

тобто для всіх $i \in \{0,2\}$ функції мають розриви в точках $x = \Delta^{Q_3}_{02(0)}$ і $\Delta^{Q_3}_{21(0)}$, що суперечить неперервності функції.

Отже, для випадку $i = j$ не існує функції, у якої цифра γ_n однозначно визначається парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ і $\alpha_n(x)$.

2) Якщо $i \neq j$, тоді враховуючи неперервність функції, цифра γ_2 одно-

значно визначається системами рівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(i,j)=\varphi(1,j)=j,\\ \varphi(j,i)=\varphi(1,i)=i,\\ \varphi(i,i)\in\{i,j\}\ni\varphi(j,j),\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(i,j)=\varphi(1,j)=i,\\ \varphi(j,i)=\varphi(1,i)=j,\\ \varphi(i,i)\in\{i,j\}\ni\varphi(j,j).\end{cases}\end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

Тоді цифра $\gamma_3 = \varphi(\alpha_2(x), \alpha_3(x))$ однозначно визначається рівностями (3.1.2). Розглянемо «суміжні» двовимірні циліндри 3-го рангу: $\square^{ijk}_{022}$ і $\square^{1ik}_{100}$, $\square^{1jk}_{122}$ і $\square^{jik}_{200}$, де $k \in \{i, j\}$. Для них

$$\begin{cases}\square^{ijk}_{022}\cap\square^{1ik}_{100}\neq\varnothing,\\ \square^{1jk}_{122}\cap\square^{jik}_{200}\neq\varnothing\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\gamma_n=\alpha_n,\\ \gamma_n=2-\alpha_n.\end{array}\right.$$

Отже, при $i \neq j$ неперервними функціями, які задовольняють вказані умови є лише тотожне перетворення та інверсор. Для всіх інших випадків не існує неперервних функцій у яких цифра γ_n однозначно визначається парою цифр $\alpha_{n-1}(x)$ та $\alpha_n(x)$. $\square$

Теорема 3.1.1. *Множина P_c є зліченною.*

Доведення. Існує чотири варіанти однозначного довизначення першої цифри Q_3 – зображення числа $y = f(x)$, а саме:

$$\gamma_1=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 2 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases} \quad \gamma_1=\begin{cases}2 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 0 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases}$$

$$\gamma_1=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 0 \text{ при } \alpha_1=2;\end{cases} \quad \gamma_1=\begin{cases}2 \text{ при } \alpha_1=0,\\ 2 \text{ при } \alpha_1=2.\end{cases}$$

Визначивши однозначно цифру γ_1 існує лише чотири можливості для однозначного довизначення цифри γ_2. А це значення для двох пар $(\alpha_1, \alpha_2) =$

$(0,0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,2)$, оскільки для решти пар однозначний вибір цифри γ_2 диктується неперервністю.

Здійснивши однозначний вибір цифри γ_2, для однозначного визначення цифри γ_3 існує чотири варіанти. Вони дозволяють вільно вибрати значення для наборів $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ і $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(2,2,2)$, а для решти вони диктуються неперервністю і т.д. Таким чином, існує зліченна множина можливостей однозначного довизначення всіх цифр числа $y=f(x)$. $\square$

Перейдемо до вивчення окремих представників класу P_c, відмінних від тотожного перетворення та інверсора.

Найпростішим з них є функція:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x\in[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}=\dfrac{q_0}{q_0+q_2}],\\ I(x), \quad \text{якщо } x\in(\Delta^{Q_3}_{(1)}=\dfrac{q_0}{q_0+q_2};1],\end{cases}$$

яка при $q_0\neq q_2$ є нетривіальною сумішшю абсолютно неперервної та сингулярної монотонних функцій.

3.2. Властивості однієї неперервної функції з одним нескінченним рівнем

Розглянемо функцію $y=f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$.

Покладемо $\gamma_1=0$ при $\alpha_1\neq 1$ і

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{(0)})=f_1(\Delta^{Q_3}_{(2)})=\Delta^{Q_3}_{(02)}=\frac{q_0(1-q_2)}{1-q_0q_2}.$$

Уточнимо довизначення решти цифр $\gamma_n=\phi_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ числа $y=f_1(x)$.

1. Якщо зображення числа починається цифрою 1, то для всіх $n>m$, де $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=1$, але $\alpha_{m+1}\neq 1$,

$$\gamma_n=\begin{cases}\alpha_n, \text{ якщо } \alpha_{m+1}=0,\\ 2-\alpha_n, \text{ якщо } \alpha_{m+1}=2, \ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

2. Якщо зображення числа починається цифрою 0 і $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$, але $\alpha_{m+1}\neq 0$, то при $\alpha_{m+1}=2$ та всіх $j\in\mathbb{N}$

$$\gamma_{m+j}=\begin{cases}\alpha_{m+j}, & \text{коли } m-\text{ непарне},\\ 2-\alpha_{m+j}, & \text{коли } m-\text{ парне},\end{cases}$$

разом з цим

$$\begin{cases}\gamma_1=\gamma_3=\ldots=\gamma_{2k-1}=0,\\ \gamma_2=\gamma_4=\ldots=\gamma_{2k-2}=2,\end{cases}$$

де $2k-1\leqslant m<2k+1$.

Якщо ж $\alpha_{m+1}=1=\alpha_{m+2}=\ldots=\alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1}\neq 1$, то

$$\gamma_{m+r+j}=\begin{cases}\alpha_{m+r+j}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k{+}1,\end{array}\right.\\ 2-\alpha_{m+r+j}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k{+}1,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k.\end{array}\right.\end{cases}$$

3. Якщо зображення числа починається цифрою 2 і $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=2$, але $\alpha_{m+1}\neq 2$, то при $\alpha_{m+1}=0$ та всіх $j\in\mathbb{N}$

$$\gamma_{m+j}=\begin{cases}\alpha_{m+j}, & \text{коли } m-\text{ парне},\\ 2-\alpha_{m+j}, & \text{коли } m-\text{ непарне}.\end{cases}$$

Якщо ж $\alpha_{m+1}=1=\alpha_{m+2}=\ldots=\alpha_{m+r}$, але $\alpha_{m+r+1}\neq 1$, то

$$\gamma_{m+r+j}=\begin{cases}\alpha_{m+r+j}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k+1,\end{array}\right.\\ 2-\alpha_{m+r+j}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha_{m+r+1}=0 \text{ і } m=2k{+}1,\\ \alpha_{m+r+1}=2 \text{ і } m=2k.\end{array}\right.\end{cases}$$

Перевіримо коректність задання функції f_1.

Очевидно, що в Q_3 – ірраціональних точках функція є коректно визначеною. Залишається перевірити в Q_3 – раціональних точках, тобто точках виду $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}\equiv\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](2)}$, де $\alpha_n\neq 0$.

Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{k-1}=1$ і $\alpha_k\neq 1$, $k<n$, то

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{1\ldots 1\alpha_k\ldots\alpha_n(0)})=\left[\begin{array}{l}\Delta^{Q_3}_{1\ldots 1\alpha_k\ldots\alpha_n(0)} \text{ при } \alpha_k=0,\\ \Delta^{Q_3}_{1\ldots 1[2-\alpha_k]\ldots[2-\alpha_n](2)} \text{ при } \alpha_k=2;\end{array}\right.$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{1\ldots1\alpha_k\ldots[\alpha_n-1](2)}) = \left[\begin{array}{l}\Delta^{Q_3}_{1\ldots1\alpha_k\ldots[\alpha_n-1](0)} \text{ при } \alpha_k = 0,\\ \Delta^{Q_3}_{1\ldots1[2-\alpha_k]\ldots[3-\alpha_n](2)} \text{ при } \alpha_k = 2.\end{array}\right.$$

2. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, $\alpha_k \neq 2$ і $(k-1)$ – непарне, то коректність задання функції очевидна. Якщо ж $(k-1)$ – парне, то

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots02\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots02[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots02[2-\alpha_{k+1}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots02\alpha_{k+1}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

Якщо $\alpha_k = ... = \alpha_{k+r} = 1$, то для випадку $\alpha_{k+r+1} = 0$ і парного $(k-1)$ та для — $\alpha_{k+r+1} = 2$ і непарного $(k-1)$, коректність очевидна. При $\alpha_{k+r+1} = 0$ і непарному $(k-1)$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots10\alpha_{k+r+2}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots201\ldots12[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots201\ldots12[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots10\alpha_{k+r+2}\ldots[\alpha_n-1](2)});$$

при $(k-1)$ – парному і $\alpha_{k+r+1} = 2$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots12\alpha_{k+r+2}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots021\ldots10[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots021\ldots10[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots12\alpha_{k+r+2}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

3. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 2$. Якщо $\alpha_k = 0$ і $(n-1)$ – парне, то коректність очевидна. Якщо $\alpha_k = 0$ і $(n-1)$ – непарне, то

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{2\ldots20\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots202[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots202[2-\alpha_{k+1}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{2\ldots20\alpha_{k+1}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

Якщо $\alpha_k = ... = \alpha_{k+r} = 1$, то для випадку $\alpha_{k+r+1} = 0$ і парного $(k-1)$ та для — $\alpha_{k+r+1} = 2$ і непарного $(k-1)$, коректність очевидна. При $\alpha_{k+r+1} = 0$ і непарному $(k-1)$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots10\alpha_{k+r+2}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots201\ldots12[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots201\ldots12[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots10\alpha_{k+r+2}\ldots[\alpha_n-1](2)});$$

при парному $(k-1)$ і $\alpha_{k+r+1} = 2$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots12\alpha_{k+r+2}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots021\ldots10[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{Q_3}_{02\ldots021\ldots10[2-\alpha_{k+r+2}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{0\ldots01\ldots12\alpha_{k+r+2}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

Отже, функція f_1 є коректно визначеною в Q_3 – раціональних точках і взагалі кажучи.

Очевидно, що $f_1 \in P$. Перевіримо чи є вона неперервною.

Нехай $x_0 \in [0;1]$ є Q_3 – ірраціональною точкою. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$ існує такий номер $k = k(x)$, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i < k$ і $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$.

Оскільки умова $x \to x_0$ рівносильна умові $k \to \infty$, то

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |\Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_{k-1}(x)\gamma_k(x)\ldots} - \Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x_0)\ldots\gamma_{k-1}(x_0)\gamma_k(x_0)\ldots}| =$$

$$= \left|\sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x)} - \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x_0)}\right| \leqslant \prod_{j=1}^{k-1} q_{\gamma_j} \leqslant$$

$$\leqslant (\max\{q_0, q_1, q_2\})^{k-1} \to 0 \, (k \to \infty).$$

Нехай x_0 є Q_3 – раціональною точкою, тоді для доведення неперервності функції f_1 зліва треба використати Q_3 – зображення точки, що містить період (2), тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(2)}$, а справа — Q_3 – зображення точки, що містить період (0), застосувавши аналогічні міркування, що і для Q_3 – ірраціональних точок.

Отже, функція $f_1 \in P_c$.

Покладемо $i, j \in \{0, 2\}$. Безпосередньо з означення функції f_1 випливають наступні співвідношення:

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}j\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} + q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{n+2}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{n+3}\right]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}j\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^{n+1} q_2^n \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+2}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+3}\right]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}j\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}2(0)} + \\ + q_0^{n+1} q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+3}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{2n+4}\right]\ldots}, \quad (3.2.1)$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^n \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_2}\right]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_2}\right]\ldots}.$$

Теорема 3.2.1. *Функція f_1 є:*

1) лінійною зростаючою на циліндрах виду

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+2}\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2} \text{ та } \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+2}0},$$

де $i \in \{0,2\}$, $n \geqslant 0$, $n,k \in N$;

2) монотонно спадною на циліндрах виду

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}2},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}2} \text{ та } \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+1}0},$$

де $i \in \{0,2\}$, $n \geqslant 0$, $n,k \in N$. Причому сингулярною при $q_0 \neq q_2$ і лінійною при $q_0 = q_2$;

3) набуває свого глобального максимуму в точці $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$ та глобального мінімуму у точках $x = \Delta^{Q_3}_{i(1)}$, причому $f_1(\Delta^{Q_3}_{(1)}) = \dfrac{q_0}{1-q_1}$ і $f_1(\Delta^{Q_3}_{i(1)}) = = \dfrac{q_0^2}{1-q_1}$, локальних максимумів у точках виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+2}(1)}$, а локальних мінімумів у $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}(1)}$, де $i \in A_3 \setminus \{1\}$, $0 \leqslant m \in N$. Крім того

$$f_1(x^*) = (q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^m q_2^m)}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^{m+1}}{1-q_1},$$

$$f_1(x_*) = (q_0+q_1)\frac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2} + \frac{q_0^{m+2}q_2^{m}}{1-q_1}.$$

Доведення. 1) Із співвідношень (3.2.1), що випливають безпосередньо з означення, розлянемо ті у яких у зображенні аргумента x та значення функції $y = f_1(x)$ починаючи з деякого місця $n \in N$ виконується умова: $\alpha_k(x) = \gamma_k(y)$ для всіх $k \geqslant n$, $k,n \in N$.

Розглянемо перше з них, а саме

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}0\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} + q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}.$$

Очевидно, що $x \in \left[\Delta^{Q_3}_{1(0)}; \Delta^{Q_3}_{(1)}\right] \ni f_1(x)$. Для функції f_1 має місце рівність

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \beta_{\gamma_1} + q_{\gamma_1} f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots}),$$

застосувавши її $n+1$ раз отримаємо

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}0\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \beta_1 + q_1 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \beta_1 + \beta_1 q_1 + q_1^2 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_3\alpha_4\ldots}) = \ldots$$

$$= \beta_1 + \ldots + \beta_1 q_1^{n-1} + \beta_0 q_1^n + q_1^n q_0 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}).$$

За властивостями циліндричних множин $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} = \beta_1 + \ldots + \beta_1 q_1^{n-1}$. Тобто, для всіх $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}0}$ функція $f_1(x) = x$. Отже, f_1 — лінійна і очевидно, що зростаюча.

Розглянемо наступну рівність

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^{n+1} q_2^n \Delta^{Q_3}_{\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}.$$

Зрозуміло, що $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0}$ і $f_1(x) \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}0}$. Ліву частину рівності можна переписати у вигляді

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) = \beta_0 + \beta_2 q_0 + \ldots + \beta_0 q_0^n q_2^n + q_0^{n+1} q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}).$$

З останніх двох рівностей випливає, що для всіх чисел з циліндра $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}0}$ має місце $f_1(x) = x$.

Із системи рівностей (3.2.1), а саме:

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots020}_{2n+1}2(0)} + q_0^{n+1} q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^n \Delta^{Q_3}_{\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots},$$

використовуючи аналогічні міркування, отримаємо, що функція f_1 — лінійна зростаюча для всіх x з відповідної циліндричної множини: $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$ і $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$.

2) Розлянемо решту рівностей із системи (3.2.1). Для

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}2\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)} + q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{n+2}][2-\alpha_{n+3}]\ldots}$$

аргумент $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}2}$ і використовучи аналогічні міркування, що й у випадку 1), маємо

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}2\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = \beta_1 + \ldots + \beta_1 q_1^{n-1} + \beta_0 q_1^n + q_1^n q_0 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}).$$

Порівняємо праві частини останніх двох рівностей, отримаємо

$$C + q_1^n q_0 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = C + q_1^n q_0 \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{n+2}][2-\alpha_{n+3}]\ldots},$$

де $C = \beta_1 + \ldots + \beta_1 q_1^{n-1}$. Зважаючи на означення 2.2.1 інверсора I, очевидно, що $q_1^n q_0 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots}) = q_1^n q_0 I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots})$. Оскільки у розділі 2 вивчено властивості інверсора I, то можна стверджувати, що при $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}2}$ функція $f_1(x)$ є монотонно спадною, крім того сингулярною при $q_0 \neq q_2$ або ж лінійною при $q_0 = q_2$.

Використовуючи аналогічні міркування, із рівностей

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}2\alpha_{2n+2}\alpha_{2n+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^{n+1} q_2^n \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{2n+2}][2-\alpha_{2n+3}]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+1}0\alpha_{2n+3}\alpha_{2n+4}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}2(0)} + q_0^{n+1} q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{2n+3}][2-\alpha_{2n+4}]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}2\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^n \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{r_1}][2-\alpha_{r_2}]\ldots},$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2(0)} + q_0^{n+1} q_1^k q_2^{n+1} \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_{r_1}][2-\alpha_{r_2}]\ldots},$$

отримаємо, що функція f_1 монотонно спадна на циліндрах виду: $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n+1}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$; і сингулярна при $q_0 \neq q_2$ або ж лінійна при $q_0 = q_2$.

3) Розглянемо числа $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}$ та $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha'_{n+1}\alpha'_{n+2}\ldots}$, де $\alpha_i \neq \alpha'_i$ для всіх $i > n$, причому $x > x_0$.

1. Нехай $\alpha_1 = 1$, тобто $x \in [q_0; q_0 + q_1]$.

Розглянемо різницю

$$f_1(x)-f_1(x_0)=\Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_n(x)\gamma_{n+1}(x)\ldots}-\Delta^{Q_3}_{\gamma_1(x_0)\ldots\gamma_n(x_0)\gamma'_{n+1}(x_0)\gamma'_{n+2}(x_0)\ldots}.$$

Тоді можливі випадки $\left[\begin{array}{l}\alpha_1=\ldots=\alpha_k=1,\alpha_{k+1}=0,\\ \alpha_1=\ldots=\alpha_k=1,\alpha_{k+1}=2,k\in N.\end{array}\right.$

Нехай $k<n$, то для всіх $k,j\in N$ маємо

$$\left[\begin{array}{l}\gamma_{k+j}=\alpha_{k+j},\gamma'_{k+j}=\alpha'_{k+j},\\ \gamma_{k+j}=2-\alpha_{k+j},\gamma'_{k+j}=2-\alpha'_{k+j}.\end{array}\right.$$

Оскільки $x>x_0$, тобто $\alpha_{n+1}(x)>\alpha'_{n+1}(x_0)$, то

$$\begin{cases}f_1(x)-f_1(x_0)>0, & \text{якщо } x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0},\\ f_1(x)-f_1(x_0)<0, & \text{якщо } x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2}.\end{cases}$$

Тому $f_1(x)$ — зростає при $x\in\left[q_0;\frac{q_0}{1-q_1}\right]$, $f_1(x)$ — спадає при $x\in\left[\frac{q_0}{1-q_1};q_0+q_1\right]$, де $\Delta^{Q_3}_{(1)}=\dfrac{q_0}{1-q_1}$. Звідки випливає, що $f_1\left(\Delta^{Q_3}_{(1)}\right)=\dfrac{q_0}{1-q_1}$ — точка максимуму на відрізку $[q_0;q_0+q_1]$.

Якщо $k>n$, то $\alpha_n=1$ і $\alpha'_n=0$. Тому $\gamma_n=1,\ldots,\gamma_k=1$, $\gamma_{k+j}=\alpha_{k+j}$ або $\gamma_{k+j}=2-\alpha_{k+j}$, а $\gamma'_n=0$ і $\gamma'_{n+j}=\alpha'_{n+j}$. Очевидно, що функція $f_1(x)$ — зростає.

2. Якщо $\alpha_1=0$, то згідно з означенням можливо:

a) $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0,\alpha_{k+1}=2$;

b) $\alpha_1=...=\alpha_k=0$, $\alpha_{k+1}=...=\alpha_{k+r}=1$, $\alpha_{k+r+1}=0$;

c) $\alpha_1=...=\alpha_k=0$, $\alpha_{k+1}=...=\alpha_{k+r}=1$, $\alpha_{k+r+1}=2$, $k,r\in N$. Необхідно розглянути випадок $k<n$, $k+r<n$ та $k,r,j\in N$.

Із тверджень 1) і 2) цієї ж теореми 3.2.1, різниця $f_1(x)-f_1(x_0)>0$ тоді і тільки тоді, коли $x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}$. Та $f_1(x)-f_1(x_0)<0$ тоді і тільки тоді, коли $x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}$. Тобто, $f_1(x)$ спадає при $x\in\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}1(0)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}\right]$ або

$\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}1(2)}\right]$, $f_1(x)$ — зростає при $x\in\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}1(2)}\right]$ або $\left[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}1(0)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}\right]$. Тоді точки виду $x_*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}$ є локальмими мінімумами, а точки виду $x^*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}$ — локальними максимумами. Причому,

$$f_1(x_*)=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots020}_{2m+1}(1)}=\beta_0+\beta_2q_0+\ldots+\beta_0q_0^mq_2^m+\beta_1q_0^{m+1}q_2^m+\ldots=$$

$$=\beta_2\frac{q_0(1-(q_0q_2)^{m-1})}{1-q_0q_2}+\beta_1\frac{q_0^{m+1}q_2^m}{1-q_1}=(q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^{m-1}q_2^{m-1})}{1-q_0q_2}+\frac{q_0^{m+2}q_2^m}{1-q_1};$$

$$f_1(x^*)=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m+2}(1)}=\beta_2\frac{q_0(1-q_0^mq_2^m)}{1-q_0q_2}+\beta_1\frac{q_0^{m+1}q_2^{m+1}}{1-q_1}=$$

$$=(q_0+q_1)\frac{q_0(1-q_0^mq_2^m)}{1-q_0q_2}+\frac{q_0^{m+2}q_2^{m+1}}{1-q_1},$$

зокрема $f_1(\Delta^{Q_3}_{0(1)})=f_1(\Delta^{Q_3}_{2(1)})=\dfrac{q_0^2}{1-q_1}$ — глобальний мінімум і $f_1(\Delta^{Q_3}_{(1)})=\dfrac{q_0}{1-q_1}$ — глобальний максимум функції.

Якщо $k+r>n$, то $0\neq\alpha_{n+1}=1$, крім того зважаючи на умову $x>x_0$, маємо $\alpha'_{n+1}=0$. Тоді γ_i випливають із означення, а $\gamma'_{n+j}=\alpha'_{n+j}$ або $\gamma'_{n+j}=2-\alpha'_{n+j}$. Тоді, якщо n – непарне, то функція $f_1(x)$ спадає для всіх чисел x, якщо n – парне, то $f_1(x)$ — зростає для всіх x.

3. Нехай $\alpha_1=2$. То використовуючи означення й твердження 1) і 2), маємо різниця $f_1(x)-f_1(x_0)>0$ тоді і тільки тоді, коли $x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}$. А $f_1(x)-f_1(x_0)<0$ тоді і тільки тоді, коли $x\in\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{r}0}$ або $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{r}2}$.

Тобто точки виду $x_*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}$ є локальними мінімумами, а точки виду $x^*=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+2}(1)}$ — локальними максимумами, крім того функція в цих точках набуває значень, рівних значенням функції у відповідних до випадку 3) 2 точках. □

Функціональні співвідношення

Лема 3.2.1. *Для всіх* $x \in [0;1]$ *мають місце рівності:*

$$f_1(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f_1(x),$$

$$f_1(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_2 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f_1(x),$$

$$f_1(\beta_1 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_1 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_1 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^n q_1 f_1(x),$$

$$f_1(\beta_2 q_0^{2n+2} + q_0^{2n+2} q_2 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n +$$

$$+ \beta_0 q_0^{n+1} q_2^{n+1} + q_0^{n+2} q_2^{n+1} f_1(x),$$

$$f_1(B + \beta_1 q_2^{2n} + q_2^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f_1(x), \tag{3.2.2}$$

$$f_1(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_0 q_2^{2n+1} + q_2^{2n+1} q_0 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f_1(x),$$

$$f_1(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_1 q_2^{2n+1} + q_2^{2n+1} q_1 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_1 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^n q_1 f_1(x),$$

$$f_1(B + \beta_2 q_2^{2n} + \beta_2 q_2^{2n+1} + \beta_0 q_2^{2n+2} + q_2^{2n+2} q_0 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n +$$

$$+ \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + \beta_0 q_0^{n+1} q_2^{n+1} + q_0^{n+2} q_2^{n+1} f_1(x),$$

де відповідно $A = \dfrac{q_0(q_0+q_1)(1-(q_0q_2)^{n-1})}{1-q_0q_2}$ *і* $B = \dfrac{(q_0+q_1)(1-q_2^{2n-1})}{1-q_2}$.

Доведення. Із рівностей (3.2.1) та теореми 3.2.1 для $i, j \in \{0, 2\}$ випливають наступні співвідношення:

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}ij\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{ij\alpha_1\alpha_2\ldots}), \tag{3.2.3}$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}i1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{i1\alpha_1\alpha_2\ldots}),$$

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2n}iij\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{iij\alpha_1\alpha_2\ldots}).$$

Число $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} = \beta_0 + \beta_2 q_0 + \beta_0 q_0 q_2 + \ldots + \beta_2 q_0^n q_2^{n-1} + \beta_0 q_0^n q_2^n + \ldots =$
$= \dfrac{q_0(q_0+q_1)(1-(q_0q_2)^{n-1})}{1-q_0q_2} = A.$

Нехай $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$. Розглянемо перше співвідношення із системи (3.2.3) для $i = 0$. Очевидно, що

$$\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots} = \beta_0 + \ldots + \beta_0 q_0^{2n-1} + \beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots} = \beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x.$$

Тобто, $f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = f_1(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x)$. Крім того легко бачити, що $f_1(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \beta_1 + q_1 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \beta_1 + q_1 f_1(x)$. Тому перше співвідношення із системи (3.2.3) можна переписати у вигляді:

$$f_1(\beta_1 q_0^{2n} + q_0^{2n} q_1 x) = A + \beta_1 q_0^n q_2^n + q_0^n q_2^n q_1 f_1(x).$$

Розглянувши друге співвідношення із системи (3.2.3) при $i = 0$, отримаємо

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = f_1(\beta_0 + \ldots + \beta_0 q_0^{2n} + \beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}) =$$
$$= f_1(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} x).$$

Тоді $f_1(\Delta^{Q_3}_{02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \beta_0 + \beta_2 q_0 + q_0 q_2 f_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots})$, тобто

$$f_1(\beta_2 q_0^{2n+1} + q_0^{2n+1} q_2 x) = A + \beta_0 q_0^n q_2^n + \beta_2 q_0^{n+1} q_2^n + q_0^{n+1} q_2^{n+1} f_1(x).$$

Решта співвідношень доводяться аналогічним способом, враховуючи що

$$B = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(0)} = \frac{(q_0+q_1)(1-q_2^{2n-1})}{1-q_2}.$$

Таким чином отримаємо систему рівностей (3.2.2). □

Симетрії графіка функції

Лема 3.2.2. *Для всіх чисел x з відрізка $[0;1]$ має місце рівність*

$$f_1(x) = f_1(I(x)),$$

де $I(x) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$ — інверсор.

Доведення. Згідно з означенням функції f_1, $\gamma_1 = 1$ при $\alpha_1 = 1$ і $\gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 \neq 1$, тобто $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_1(2-\alpha_1)$.

Нехай $f_1(\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma'_1\gamma'_2\ldots\gamma'_n\ldots}$.

1. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1$, але $\alpha_{m+1} \neq 1$, $m < n$, то згідно з означенням функції $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \ldots = \gamma'_m = 1$ і $\gamma'_n = \begin{cases} \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 0, \\ 2 - \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 2, \end{cases}$ тобто для цього випадку $\gamma_1 = \gamma'_1, \ldots, \gamma_m = \gamma'_m, \gamma_{m+1} = \gamma'_{m+1}, \ldots$.

2. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, але $\alpha_{m+1} \neq 0$, то при

a) $\alpha_{m+1} = 2$ та m – парному: $f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}2\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}$, а $f_1(I(x)) = f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots020[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}$;

b) $\alpha_{m+1} = 2$ та m – непарному: $f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}2\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots022\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}$, а $f_1(I(x)) = f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0[2-\alpha_{m+2}][2-\alpha_{m+3}]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{02\ldots022\alpha_{m+2}\alpha_{m+3}\ldots}$;

c) $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_{m+r}$ та m – парному, то $\gamma'_1 = \gamma'_3 = \ldots = \gamma'_{m-1} = 0$, $\gamma'_2 = \ldots = \gamma'_m = 2$, $\gamma'_{m+1} = \ldots = \gamma'_{m+r} = 1$ і

$$\gamma'_n = \begin{cases} 2 - \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 0, \\ \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 2, n > m + r, \end{cases}$$

або $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_{m+r}$ та m – непарному, то

$$\gamma'_n = \begin{cases} \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 0, \\ 2 - \alpha_n, \text{ якщо } 2 - \alpha_{m+1} = 2, n > m + r. \end{cases}$$

Доведення випадку 3 аналогічне доведенню, проведеному у випадку 2.

Таким чином, $f_1(x) = f_1(I(x))$. $\square$

Наслідок 3.2.1. *Якщо $q_0 = q_2$, то графік Γ^{f_1} функції f_1 «симетрично-подібний» відносно прямої $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$.*

Лема 3.2.3. *Функціональне рівняння*

$$f(x) = f(I(x)),\ x \in [0; 1]$$

у класі функцій P_c має безліч розв'язків.

Доведення. Нехай k – довільне натуральне число, тоді функція

$$f(x)=\begin{cases}\sigma_1(x), \quad \text{якщо } x\in[0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}],\\ x, \text{ якщо } x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}],\\ I(x), \text{ якщо } x\in[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}],\\ \sigma_2(x), \text{ якщо } x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)};1],\end{cases}$$

де $\sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}$,
$\sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$.

Нехай x належить першому проміжку, тоді $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$.

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots})=$$
$$=\sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}))=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots},$$
$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})=\sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}.$$

Якщо $x\in[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$, то $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}$, де $l<k$ або $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}0\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}$ і $f(x)=x$, а $f(I(x))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=$
$=I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}=x$,

$$f(I(x))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}2[2-\alpha_{p+1}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}2[2-\alpha_{p+1}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=$$
$$=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}0\alpha_{p+1}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}=x.$$

Нехай $x\in[\Delta^{Q_3}_{(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}]$, тоді $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}$, де $l<k$ або $x=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}2\alpha_{p+2}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}$ і $f(x)=I(x)$. З іншого боку

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{l}\alpha_{l+1}\ldots\alpha_{l+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{l}[2-\alpha_{l+1}]\ldots[2-\alpha_{l+t}]\ldots}=I(x),$$
$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}2\alpha_{p+2}\ldots\alpha_{p+t}\ldots}))=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}0[2-\alpha_{p+2}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots})=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{p}0[2-\alpha_{p+2}]\ldots[2-\alpha_{p+t}]\ldots}=I(x).$$

Для $x \in [\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}(1)}; 1]$, очевидно, що $x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}$.

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}) = \sigma_2(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots},$$

$$f(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots})) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}) =$$

$$= \sigma_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[2-\alpha_{k+1}]\ldots[2-\alpha_{k+t}]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+t}\ldots}.$$

Отже, f є розв'язком функціонального рівняння $f(x) = f(I(x))$.

Оскільки k – довільне натуральне число, то очевидно, що дане функціональне рівняння має безліч розв'язків. □

Зауваження 3.2.1. Функція σ_1 має аналітичний вираз

$$\sigma_1(x) = q_0^k I\left(\frac{x}{q_0^k}\right).$$

Зауваження 3.2.2. Функція σ_2 є лінійною на циліндрах k-го рангу, причому

$$\sigma_2(x) = \frac{D}{D_0}(x - B) + A,$$

де $D = \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[2-\alpha_j]}$, $D_0 = \prod\limits_{j=1}^{k} q_{\alpha_j}$, $B = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}$,
$A = \beta_{[2-\alpha_1]} + \beta_{[2-\alpha_2]} q_{[2-\alpha_1]} + \ldots + \beta_{[2-\alpha_k]} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]}$.

Лема 3.2.4. *У класі P_c функціональне рівняння*

$$f(x) = f(I(x)),\ x \in [0;1], \tag{3.2.4}$$

при умові

$$f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} \tag{3.2.5}$$

має єдиний розв'язок — функцію f_1.

Доведення. Графік кожної функції, яка зберігає цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, проходить через точку $M_0(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$. Якщо $f \in P_c$ і виконується умова (3.2.5), то $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}) = \begin{cases} \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{k}(1)} & \text{при } k = 2m, \\ \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots20}_{k}(1)} & \text{при } k = 2m+1. \end{cases}$

В силу рівності (3.2.4) достатньо показати, що функція f, яка задовольняє умови леми, однозначно визначена на відрізку $[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}]$. Для цього покажемо, що функція f однозначно визначається на кожному з відрізків виду $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}]$, $k\in N$. Більше того, вона є лінійною, коли k — непарне, і

$$f(x)=q_0^{\frac{k}{2}}q_2^{\frac{k-2}{2}}I\left(\frac{x}{q_0^{k-1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{k-2}(0)},$$

коли k — парне.

Нехай $k=1$. Оскільки (3.2.5), то $\phi_1(0)=0$. Тоді $f(\Delta^{Q_3}_{0(1)})=\Delta^{Q_3}_{0(1)}$.

Із-за неперервності функції $\phi_2(0,2)=2$ і $\phi_2(1,0)=0$. Тому очевидно, що $f(\Delta^{Q_3}_{02(1)})=\Delta^{Q_3}_{02(1)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{10(1)})=\Delta^{Q_3}_{10(1)}$.

Враховуючи неперервність функції, маємо $\phi_3(0,2,0)=0$, $\phi_3(0,2,2)=2$ і тому $f(\Delta^{Q_3}_{020(1)})=\Delta^{Q_3}_{020(1)}$, $f(\Delta^{Q_3}_{022(1)})=\Delta^{Q_3}_{022(1)}$. Крім того $\phi_3(1,0,0)=0$, $\phi_3(1,0,2)=2$ і $f(\Delta^{Q_3}_{100(1)})=\Delta^{Q_3}_{100(1)}$, $f(\Delta^{Q_3}_{102(1)})=\Delta^{Q_3}_{102(1)}$ і т.д.

Із-за неперервності функції і того, що вона зберігає цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел, кожна з точок $\Delta^{Q_3}_{10c_3\ldots c_n(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{02c_3\ldots c_n(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{t}2c_{t+3}\ldots c_{t+n}(1)}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{t}0c_{t+2}\ldots c_{t+n}(1)}$ є інваріантиними при довільних $n,t\in N$, $j\in\{1,2\}$, $c_i\in A_3$. Оскільки ж множина таких точок є всюди щільною, то $f(x)=x$ при $x\in[\Delta^{Q_3}_{0(1)};\Delta^{Q_3}_{(1)}]$.

Нехай $k=2$. З умови (3.2.5) випливає, що $f(\Delta^{Q_3}_{00(1)})=\Delta^{Q_3}_{02(1)}$ і цифри $\phi_3(0,0,2)=0$, $\phi_3(0,1,0)=2$ однозначно визначаються, за рахунок неперервності, тобто: $f(\Delta^{Q_3}_{002(1)})=\Delta^{Q_3}_{020(1)}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{010(1)})=\Delta^{Q_3}_{012(1)}$.

Оскільки $f\in P_c$, то має місце $f(\Delta^{Q_3}_{002\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{020[2-\alpha_4]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$, $f(\Delta^{Q_3}_{010\alpha_4\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{012[2-\alpha_4]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$, $f(\Delta^{Q_3}_{00\underbrace{1\ldots1}_{k}2\alpha_{k+4}\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{02\underbrace{1\ldots1}_{k}0[2-\alpha_{k+4}]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$, $f(\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{k+3}\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{0\underbrace{1\ldots1}_{k}2[2-\alpha_{k+3}]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}$ для всіх $\alpha_i\in A_3$, $k,n\in N$. Тобто, для $x\in[\Delta^{Q_3}_{00(1)};\Delta^{Q_3}_{0(1)}]$

$$f(\Delta^{Q_3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots})=\Delta^{Q_3}_{0[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}=\beta_0+q_0\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

З іншого боку $x = \Delta^{Q_3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_0 + q_0\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$, тобто $\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} = \dfrac{x}{q_0}$. Тоді

$$I\left(\frac{x}{q_0}\right) = I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Таким чином $f(x) = q_0 I\left(\dfrac{x}{q_0}\right) + \Delta^{Q_3}_{(0)}$.

Припустимо, що наші міркування справедливі при $k = 2m$. Тобто, для всіх $x \in [\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}(1)}]$ функція f — лінійна, отже її можна подати у вигляді

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}) = a\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots} + b,$$

де $a > 0$, a, b — дійсні числа. А на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}(1)}]$ має місце рівність

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}) = q_0^m q_2^{m-1} I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_0^{2m-1}}\right) + \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m-2}(0)}.$$

Перевіримо, чи виконується вище сказане при $k = 2m+1$ та $k = 2m+2$.

Нехай $k = 2m+1$, тоді

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = \beta_0 + \beta_2 q_0 + q_0 q_2 f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}).$$

Застосувавши припущення, отримаємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = q_0 q_2 a\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots} + (b + q_0(q_0+q_1)).$$

Не порушуючи загальності, виконаємо перетворення

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = \frac{aq_2}{q_0}(\beta_0 + \beta_0 q_0 + q_0^2\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-2}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}) + (b + q_0(q_0+q_1)) =$$

$$= \frac{aq_2}{q_0}\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots} + (b + q_0(q_0+q_1)).$$

Тобто, $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = a_*\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\alpha_{2m+1}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots} + b_*$, де $a_* = \dfrac{aq_2}{q_0}$ і $b_* = (b + q_0(q_0+q_1))$ — дійсні числа, бо q_i — додатні дійсні.

Нехай $k = 2m+2$. Тоді

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = \beta_0 + \beta_2 q_0 + q_0 q_2 f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}).$$

Застосуємо припущення для $k = 2m$, отримаємо $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) =$

$$= \beta_0 + \beta_2 q_0 + q_0 q_2 q_0^m q_2^{m-1} I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_0^{2m-1}}\right) + \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m-2}(0)}.$$ Тоді

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = q_0^{m+1} q_2^m I\left(\frac{\beta_0+\beta_0 q_0+q_0^2\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m-1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_0^{2m+1}}\right) + \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m}(0)},$$

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+n+2}\ldots}) = q_0^{m+1} q_2^m I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_0^{2m+1}}\right) + \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2m}(0)}.$$

Отже, рівності справедливі при $k = 2m + 1$ та $k = 2m + 2$.

Таким чином, використавши метод математичної індукції, ми довели, що функція, яка задовольняє умови леми однозначно визначається на кожному з відрізків $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}(1)}]$, $k \in N$ та вказали проміжки зростання і спадання функції.

В силу однозначності визначення очевидно, що функціональне рівняння (3.2.4) для всіх $x \in [0; 1]$ при початковій умові (3.2.5) в класі P_c має єдиний розв'язок, причому це — функція f_1. □

Теорема 3.2.2. *Функція f_1 має*

1) наступні «симетрії» графіка:

$$\Gamma^{f_{1(1)}} \equiv \{(x; y) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{(1)}], y = f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(1,2n)}} \equiv \{(x; f_1(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\},$$

$$\Gamma^{f_{1(2)}} \equiv \{(x; y) : x \in (\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1], y = f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(2,2n)}} \equiv \{(x; f_1(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(1)}; 1]\},$$

де $\overset{A}{\sim}$ *— знак афінної еквівалентності фігур;*

2) обмежену варіацію V_{f_1}, а саме:

$$V_{f_1} = \frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

Доведення. 1) Розглянемо рівності системи (3.2.3) при $i=0$. Із першої з них, а саме:

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots})$$

випливає, що існує таке афінне перетворення ψ_1, що є композицією стиску та паралельного перенесення, таке що: $\psi_1\left(\Box^1_1\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1}$. Тоді очевидно, що $\Gamma^{f_1}_1 \xrightarrow{\psi_1} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1}$.

З наступної рівності системи (3.2.3), а саме:

$$f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{02\alpha_1\alpha_2\ldots})$$

випливає, що існує афінне перетворення ψ_2, що є композицією стиску та паралельного перенесення, таке, що $\psi_2\left(\Box^{02}_{02}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 02}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02}$ і $\Gamma^{f_1}_{02} \xrightarrow{\psi_2} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02}$.

З $f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{01\alpha_1\alpha_2\ldots})$ аналогічними міркуваннями знайдеться таке ψ_3, що: $\psi_3\left(\Box^{01}_{01}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 01}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01}$ і відповідно — $\Gamma^{f_1}_{01} \xrightarrow{\psi_3} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01}$.

З $f_1(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002\alpha_1\alpha_2\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{02\ldots02}_{2n}(0)} + q_0^n q_2^n f_1(\Delta^{Q_3}_{002\alpha_1\alpha_2\ldots})$ отримаємо ψ_4 таке, що: $\psi_4\left(\Box^{020}_{002}\right) = \Box^{02\ \ldots\ 02\ 020}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002}$ і $\Gamma^{f_1}_{002} \xrightarrow{\psi_4} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002}$.

Очевидно, що множину точок $\Gamma^{f_{1(1)}} = \{(x; f_1(x)) : x \in [0; \Delta^{Q_3}_{(1)}]\}$ можна подати у вигляді

$$\Gamma^{f_{1(1)}} = \Gamma^{f_1}_{10} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}02} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}01} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}002}.$$

Тоді з афінної еквівалентності відповідних двовимірних циліндрів (і частин графіка функції f_1) випливає

$$\Gamma^{f_{1(1)}} \equiv \{(x;y): x\in[0;\Delta^{Q_3}_{(1)}], y=f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(1,2n)}} \equiv \{(x;f_1(x)): x\in[0;\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2n}(1)}]\}.$$

Із системи (3.2.3) при $i=2$ знайдуться такі ψ_i, що:

$$\psi_5\left(\square^{1}_{1}\right) = \square^{02\ \ldots\ 02\ 1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1} \text{ і } \Gamma^{f_1}_{1} \xrightarrow{\psi_5} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1},$$

$$\psi_6\left(\square^{02}_{20}\right) = \square^{02\ \ldots\ 02\ 02}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20} \text{ і } \Gamma^{f_1}_{20} \xrightarrow{\psi_6} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20},$$

$$\psi_7\left(\square^{01}_{21}\right) = \square^{02\ \ldots\ 02\ 01}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21} \text{ і } \Gamma^{f_1}_{21} \xrightarrow{\psi_7} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21},$$

$$\psi_8\left(\square^{020}_{220}\right) = \square^{02\ \ldots\ 02\ 020}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220} \text{ і } \Gamma^{f_1}_{220} \xrightarrow{\psi_8} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220}.$$

Множину точок $\Gamma^{f_{1(2)}} = \{(x;f_1(x)) : x \in (\Delta^{Q_3}_{(1)};1]\}$ можна подати у вигляді

$$\Gamma^{f_{1(2)}} = \Gamma^{f_1}_{12} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}1} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}20} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}21} \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{f_1}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}220}.$$

З афінної еквівалентності відповідних двовимірних циліндрів маємо

$$\Gamma^{f_{1(2)}} \equiv \{(x;y): x\in(\Delta^{Q_3}_{(1)};1], y=f_1(x)\} \overset{A}{\sim} \Gamma^{f_{1(2,2n)}} \equiv \{(x;f_1(x)): x\in(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2n}(1)};1]\}.$$

2) Зважаючи на лему 3.2.2, очевидно, що варіація на множинах $\Gamma^{f_{1(1)}}$ і $\Gamma^{f_{1(2)}}$ набуватиме однакових значень, тобто $V_{f_1} = V_1 + V_2 = 2V_1$, де V_1 — це варіація на відрізку $\left[0;\dfrac{q_0}{1-q_1}\right]$, а V_2 — варіація на відрізку $\left[\dfrac{q_0}{1-q_1};1\right]$.

Обчислимо V_1 беручи до уваги твердження 1) теореми 3.2.2 та твердження 3) теореми 3.2.1:

$$V_1 = K_{1max} - K_{1min} + K_{2max} - K_{1min} + q_0q_2V_1,$$

де K_{1max}, K_{1min} — це глобальні максимум та мінімум, а K_{2max} – локальний максимум на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{0}$, тобто

$$K_{2max} = \Delta^{Q_3}_{02(1)} = q_0\left(1 - q_2 + \frac{q_0q_2}{1-q_1}\right).$$

Тоді

$$(1-q_0q_2)V_1 = \frac{q_0}{1-q_1} + q_0\left(1 - q_2 + \frac{q_0q_2}{1-q_1}\right) - 2\frac{q_0^2}{1-q_1},$$

$$V_1 = q_0 \frac{1+1-q_2-q_1+q_1q_2+q_0q_2-2q_0}{(1-q_0q_2)(1-q_1)} = \frac{q_0}{1-q_0q_2} \cdot \frac{1-q_0+q_2(1-q_2)}{q_0+q_2}.$$

Таким чином

$$V_{f_1} = \frac{2q_0(1-q_0+q_2(1-q_2))}{(1-q_0q_2)(q_0+q_2)}.$$

□

Інтегральні властивості функції

Теорема 3.2.3. *Для функції f_1 має місце рівність*

$$\int_0^1 f_1(x)dx = q_0^2 I_0 + q_1^2 I_1 + q_2 q_0 I_2 + q_0 q_1,$$

$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + q_0^2q_1q_2 + q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1)\right);$$

$$I_1 = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_2 = \frac{q_1\left(q_0(1-q_1)+q_1(I_{01}+q_2^2I_1)\right)}{1-q_0q_2^3} + \frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2} + \frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right);$$

$$I_{01} = \frac{q_0+q_1(1-q_1)+\frac{1}{2}q_2}{1-q_1^2} + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{(1-q_1^2)(1-2q_0q_1-q_1^2)}.$$

Доведення. Беручи до уваги теорему 3.2.2, очевидно, що

$$\int_0^1 f_1(x)dx = q_0^2\int_0^{q_0} f_1(x)dx + q_1^2\int_{q_0}^{q_0+q_1} f_1(x)dx + q_2q_0\int_{q_0+q_1}^{1} f_1(x)dx + q_0q_1.$$

Для обчислення інтеграла скористаємось властивістю афінної еквівалентності частин графіка Γ^{f_1} функції f_1 і розглянемо наступні множини точок:

$$\Gamma_1^{f_1} = \{(x;y) : x \in [q_0; q_0+q_1], y = f_1(x)\},$$

$$\Gamma_0^{f_1} = \{(x;y) : x \in [0; q_0], y = f_1(x)\},$$

$$\Gamma_{01}^{f_1} = \{(x;y) : x \in [q_0^2; q_0(q_0+q_1)], y = f_1(x)\},$$

$$\Gamma_2^{f_1} = \{(x;y) : x \in [q_0+q_1; 1], y = f_1(x)\}.$$

Обчислимо інтеграли на вказаних множинах точок, а саме:

$$\int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f_1(x)dx = q_1q_0 + \frac{1}{2}q_0^2 + q_0q_2\frac{2q_0q_1+q_0^2}{1-2q_0q_1-q_1^2} + q_1^2\int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f_1(x)dx,$$

Позначимо $\int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f_1(x)dx \equiv I_1$, тоді

$$I_1 = \frac{q_0}{1-q_1^2}\left(q_1+\frac{1}{2}q_0+\frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right) = \frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-q_1^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{q_2}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right).$$

Нехай $I_{01} \equiv \int\limits_{q_0^2}^{q_0(q_0+q_1)} f_1(x)dx$, тоді

$$I_{01} = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) + q_0q_2\frac{q_0(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} + \frac{1}{2}q_2^2 + q_1^2 I_{01},$$

$$(1-q_1^2)I_{01} = q_0 + q_1(1-q_1) + 0,5q_2 + q_0^2q_2\frac{2q_1+q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$

$$I_{01} = \frac{q_0+q_1(1-q_1)+\frac{1}{2}q_2}{1-q_1^2} + \frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{(1-q_1^2)(1-2q_0q_1-q_1^2)}.$$

Нехай $I_0 \equiv \int\limits_{0}^{q_0} f_1(x)dx$, тоді

$$I_0 = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) + 0,5q_2^2 + q_1^2 I_{01} + q_0^2q_1q_2 +$$

$$+q_0^2q_2^2\frac{(2q_1+q_0)q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2} + q_0q_1^2q_2I_1 + q_0^3q_2I_0,$$

$$(1-q_0^3q_2)I_0 = q_0 + q_1(1-q_1) + \frac{1}{2}(1-q_0-q_1)^2 + q_1^2 + q_0^2q_1q_2 +$$

$$+q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1) + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$

$$I_0 = \frac{1}{1-q_0^3q_2}\left(\frac{1+q_0^2+q_1^2}{2} + \frac{q_0^3q_2^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right) + \frac{q_0^2q_1q_2+q_1^2(I_{01}+q_0q_2I_1)}{1-q_0^3q_2}.$$

Позначимо $I_2 \equiv \int\limits_{q_0+q_1}^{1} f_1(x)dx$.

$$I_2 = q_0(q_0+q_1+q_2) + q_1(q_0+q_2) + q_1^2 I_{21} + \frac{q_2q_0^2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2} +$$

$$+\frac{q_0^2q_2^2}{2}+q_0q_1q_2^2+q_2^2q_1^2I_1+q_0q_2^3I_2,$$

$$(1-q_0q_2^3)I_2=q_0q_1(1-q_1)+q_1^2(I_{21}+q_2^2I_1)+q_0q_2^2(0,5q_0+q_1)+\frac{q_0^2q_2(2q_1+q_0)}{1-2q_0q_1-q_1^2},$$

$$I_2=\frac{q_1}{1-q_0q_2^3}\left(q_0(1-q_1)+q_1(I_{21}+q_2^2I_1)\right)+\frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2}+\frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right).$$

де очевидно, що $I_{01}\equiv I_{21}$, тоді

$$I_2=\frac{q_1}{1-q_0q_2^3}\left(q_0(1-q_1)+q_1(I_{01}+q_2^2I_1)\right)+\frac{q_0q_2(2q_1+q_0)}{1-q_0q_2^3}\left(\frac{q_2}{2}+\frac{q_0}{1-2q_0q_1-q_1^2}\right).$$

Тоді

$$\int_0^1 f_1(x)dx=q_0^2I_0+q_1^2I_1+q_2q_0I_2+q_0q_1.$$

Що і треба було довести.

□

Наслідок 3.2.2. *При $q_0=q_2$ для функції f_1 має місце рівність*

$$\int_0^1 f_1(x)dx=\frac{q_0(1-q_0)(1+q_0^4)}{1-q_0^4}+\frac{(1-q_0)^2}{1+q_0^2}\left(\frac{1}{1-q_0^2}+\frac{q_1^2(1+q_0)}{2(1+q_1)}\right).$$

Наслідок 3.2.3. *Якщо $q_0=q_2=\frac{1}{3}$, то для функції f_1 має місце рівність $\int\limits_0^1 f_1(x)dx=\frac{3}{10}$.*

Властивості множин рівнів функції

Означення 3.2.1. Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0)=\{x: f(x)=y_0\}.$$

Лема 3.2.5. *Множина $f_1^{-1}(y_0)$ є:*

1) зліченною, якщо $y_0=\Delta^{Q_3}_{(02)}$;

2) скінченною, якщо $y_0\neq\Delta^{Q_3}_{(02)}$.

Доведення. Дійсно, використовуючи означення функції f_1 очевидно, що $x_1 = \Delta^{Q_3}_{(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0$, $x_2 = \Delta^{Q_3}_{0(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0$, $x_3 = \Delta^{Q_3}_{00(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0$, ..., $x_{k+1} = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(02)} \to \Delta^{Q_3}_{(02)} = y_0$ і т.д..

Оскільки k довільне натуральне число, то очевидно, що множина рівня $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ функції f_1 є зліченною.

Для значень $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{(02)}$ твердження 2) є очевидним, оскільки $\Delta^{Q_3}_{(02)} = f_1(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = f_1(\Delta^{Q_3}_{(2)})$, а для значення аргумента $\Delta^{Q_3}_{(0)} \neq x \neq \Delta^{Q_3}_{(2)}$ «стабілізація» визначення цифр відбувається за рахунок неперервності функції f_1. □

Наслідок 3.2.4. *Множина $f_1^{-1}(y_0)$ є:*

a) порожньою, якщо $y_0 \in [0; \Delta^{Q_3}_{0(1)}) \cup (\Delta^{Q_3}_{(1)}; 1]$;

b) одноточковою, якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(1)}$;

c) скінченною і складаєтьcя більше ніж з однієї точки, якщо

$$y_0 \in [\Delta^{Q_3}_{0(1)}; \Delta^{Q_3}_{(02)}) \cup (\Delta^{Q_3}_{(02)}; \Delta^{Q_3}_{(1)}).$$

Доведення. Випадки *a)*, *b)* і *c)* випливають з леми 3.2.5 та теореми 3.2.1. □

3.3. Функції з одним нескінченним рівнем

Очевидно, що функція $f_1 \in P_{1s} \subset P_c$, де P_{1s} — клас функцій, які задовольняють умову 3) $\gamma_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \gamma_n(2 - c_1, 2 - c_2, \ldots, 2 - c_n)$ для довільного набору цифр $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.3.1. *Клас функцій P_{1s} є зліченним, причому його підмножина функцій, які мають лише один нескінченний рівень теж зліченна.*

Доведення. Вкажемо нескінченну підмножину функцій з класу P_c, для яких має місце рівність 3). Тобто це функції для яких має місце рівність $f(x) = f(I(x))$. Очевидно, що $\gamma_1 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$ і $\gamma_1(0) = \gamma_1(2) = i \in \{0, 2\}$.

Тоді друга цифра може бути довизначена чотирма різними способами, а саме:

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1, \\ \phi_2(0,0) = \phi_2(2,2) = \left[\begin{array}{l} i, \\ 2-i, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \phi_2(0,2) = \phi_2(2,0) = i, \\ \phi_2(1,0) = \phi_2(1,2) = 2-i, \end{cases} \\ \begin{cases} \phi_2(0,2) = \phi_2(2,0) = 2-i, \\ \phi_2(1,0) = \phi_2(1,2) = i. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Як і при доведенні теореми 3.1.1 очевидно, що вибір цифри γ_3 диктується неперервністю функції f і є варіанти для вибору лише наборів $\phi_3(0,0,0)$ і $\phi_3(2,2,2)$, які в даному випадку рівні, тобто $\phi_3(0,0,0) = \phi_3(2,2,2) = i \in \{0,2\}$. Тому цифру γ_3 можна однозначно довизначити 8 різними способами і т.д..

Тоді цифру γ_n можна довизначити 2^n способами, де $n \in N$, тому множина функцій з класу P_{1s} є зліченною.

Доведемо, що функції $f \in P_{1s}$ мають не більше одного нескінченного рівня.

Зважаючи на вище сказане, розглянемо $\phi_n(0,\ldots,0) = \phi_n(2,\ldots,2) = i$, де $i \in \{0,2\}$. Тоді можливі випадки:

а) якщо має місце $\phi_2(0,0) = \phi_3(0,0,0) = \ldots = \phi_n(0,\ldots,0) = \ldots = i$, то f є «лінійно-інверсною» (а саме: при $i = 0$ на відрізку $[0, \Delta^{Q_3}_{(1)}]$ функція f є лінійною, а на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{(1)}, 1]$ — f є «інверсною»; при $i = 2$ навпаки), тобто множина $f^{-1}(y_0)$ складається не більш ніж з двох точок для всіх y_0;

б) якщо мають місце наступні рівності $\phi_2(0,0) = \phi_3(0,0,0) = \ldots = \phi_{k-1}(0,\ldots,0) = i$ і $\phi_k(0,\ldots,0) = \ldots = \phi_{k+j}(0,\ldots,0) = \ldots = 2-i$, то функція f є на двох відрізках лінійною і на двох — «інверсною». В цьому випадку множина $f^{-1}(y_0)$ складається не більш ніж з чотирьох точок для всіх y_0;

в) якщо на скінченній кількості місць у довільному порядку для наборів $(0,\ldots,0)$ виконується $\gamma_k(0,\ldots,0)=i$, а всі решта — $\gamma_j(0,\ldots,0)=2-i$, де $k\neq j$, $k,j\in N$, то очевидно, що довільний рівень функції f є скінченним, бо вона буде складатися із скінченної кількості проміжків зростання і скінченної кількості проміжків спадання;

г) нехай цифри γ_1, γ_2, ... , γ_{k-1} для наборів $(0,\ldots,0)$ і $(2,\ldots,2)$ визначені, а решта визначаються рівностями:

$$\phi_k(0,...,0)=\ldots=\phi_{k+2j}(0,...,0)=\ldots=i,$$

$$\phi_{k+1}(0,\ldots,0)=\ldots=\phi_{k+2j+1}(0,\ldots,0)=\ldots=2-i,\ \text{де } j\in N.$$

Тоді при $k=1$ та $i=0$ отримаємо вище досліджену функцію f_1, яка має один нескінченний рівень $y_0=\Delta^{Q_3}_{(02)}$. Якщо $k=1$ та $i=2$, то отримаємо функцію графік якої симетричний до графіка вище вивченої функції відносно прямої $y=\Delta^{Q_3}_{(1)}$, тобто один нескінченний рівень буде знаходитись у точці $y_0=\Delta^{Q_3}_{(20)}$.

Очевидно, що для $k>1$ функції також матимуть лише по одному нескінченному рівню у точках виду: $y_0=\Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(02)}$ або $y_0=\Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}(20)}$, де $\gamma_t\in\{0,2\}$, $t=\overline{1,k-1}$.

А оскільки $k\in N$ та вибір перших наборів $\gamma_t(0,\ldots,0)=\gamma_t(2,\ldots,2)\in\{0,2\}$, де $t=\overline{1,k-1}$, довільний, то множина всіх функцій, які мають один нескінченний рівень є зліченною. $\square$

Зауважимо, що існують функції f з класу P_c, які не належать P_{1s} і мають один нескінченний рівень. Це функції, у яких для наборів $(0,0),\ldots,$ $(0,\ldots,0)$ виконується випадок г), а для наборів $(2,2),\ldots,$ $(2,\ldots,2)$ виконується один з випадків а)-в) або навпаки. Очевидно, що клас $P_1\subset P_c$ функцій, які мають один нескінченний рівень, теж зліченний.

3.4. Властивості «модельної» функції з двома нескінченними рівнями

Розглянемо ще один приклад — функцію g.

Доозначимо цифри γ_n функції g наступним чином. Нехай $\{0,2\} \ni i$ — фіксований параметр. Покладемо:

1) $\gamma_1 = \alpha_1$, причому якщо $\alpha_1 = 1$, то $\gamma_{1+r} = \alpha_{1+r}$, $r \in N$ і

$$g(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)} \text{ та } g(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(20)};$$

2) якщо $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = i$ і $\alpha_{m+1} = 2 - i$, то

$$\gamma_{m+1+r} = \begin{cases} \alpha_{m+1+r}, \text{ якщо } m - \text{непарне}, \\ 2 - \alpha_{m+1+r}, \text{ якщо } m - \text{парне}; \end{cases}$$

3) якщо $\alpha_1 = ... = \alpha_m = i$, $\alpha_{m+1} = ... = \alpha_{m+k} = 1$ і $\alpha_{m+k+1} = 2 - i$, то

$$\gamma_{m+k+1+r} = \begin{cases} \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t+1, \\ 2 - \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t; \end{cases}$$

якщо ж $\alpha_{m+k+1} = i$, то

$$\gamma_{m+k+1+r} = \begin{cases} 2 - \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t+1, \\ \alpha_{m+k+1+r} \text{ при } m = 2t, \end{cases}$$

де $m, k, r, t \in N$.

Перевіримо коректність задання функції g. Очевидно, що функція g коректно визначена в Q_3 – ірраціональних точках, залишається перевірити в Q_3 – раціональних точках, тобто точках, що мають по два зображення.

Розглянемо випадок 1). Тоді

$$g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\alpha\ldots\alpha_n(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)} = g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

У випадку 2) очевидно, що $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{k}[2-i]}$, тоді

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}[2-i]\alpha_{2k+3}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}[2-i]\alpha_{2k+3}\ldots\alpha_n(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}[2-i]\alpha_{2k+3}\ldots[\alpha_n-1](2)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}[2-i]\alpha_{2k+3}\ldots[\alpha_n-1](2)}),$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}[2-i]\alpha_{2k+2}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k}i[2-\alpha_{2k+2}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k} i[2-\alpha_{2k+2}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}[2-i]\alpha_{2k+2}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

У випадку 3) $x \in \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} j}$ та

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)}),$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i[2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i[2-\alpha_{r_1}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

З іншого боку

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i][2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_n](2)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-1]i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t}[2-i][2-\alpha_{r_1}]\ldots[3-\alpha_n](0)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k+1}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)}),$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_n(0)} \equiv$$

$$\equiv \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-1]}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)} = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2k}\underbrace{1\ldots 1}_{t} i\alpha_{r_1}\ldots[\alpha_n-1](2)}).$$

Отже, функція g коректно задана.

Очевидно, що $g \in P$. Перевіримо чи $g \in P_c$.

Нехай $x_0 \in [0;1]$ є Q_3 – ірраціональною точкою. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$ існує такий номер $k = k(x)$, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i < k$ і $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$.

Оскільки умова $x \to x_0$ рівносильна умові $k \to \infty$, то

$$|g(x) - g(x_0)| = \left|\sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x)} - \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{\gamma_i(x_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\gamma_j(x_0)}\right| \leqslant \prod_{j=1}^{k-1} q_{\gamma_j} \leqslant$$

$$\leqslant (\max\{q_0, q_1, q_2\})^{k-1} \to 0\,(k \to \infty).$$

Неперервність в Q_3 – раціональних точках доводиться аналогічним чином.

Лема 3.4.1. *Для так означеної функції g має місце рівність*

$$g(I(x)) = I(g(x)).$$

Доведення. Із означення функції g для $i, j \in \{0, 2\}$ випливають наступні співвідношення:

$$\begin{gathered}
g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},\\
g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots},\\
g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{2m}i[2-\alpha_{2m+2}]\ldots[2-\alpha_{2m+2+n}]\ldots},\\
g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots},\\
g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-i]}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots}.
\end{gathered} \tag{3.4.1}$$

Перевіримо, чи виконується рівність $g(I(x)) = I(g(x))$ для всіх вище вказаних п'яти співвідношень:

$$\begin{gathered}
g(I(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},\\
I(g(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots})) = \Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\ldots};
\end{gathered}$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]\ldots[2-i]}_{2m+1}i[2-\alpha_{2m+3}]\ldots[2-\alpha_{2m+3+n}]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1}i[2-\alpha_{2m+3}]\ldots[2-\alpha_{2m+3+n}]\ldots},$$

$$I(g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots})) = I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1}i[2-\alpha_{2m+3}]\ldots[2-\alpha_{2m+3+n}]\ldots};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]\ldots[2-i]}_{2m}i[2-\alpha_{2m+2}]\ldots[2-\alpha_{2m+2+n}]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots},$$

$$I(g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots})) = I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{2m}i[2-\alpha_{2m+2}]\ldots[2-\alpha_{2m+2+n}]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots};$$

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]\ldots[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-j][2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_{r_n}]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_1}]\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}]\right]\ldots},$$

$$I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots[2-i]}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}i\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots},$$

причому $j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}]-2+j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n} = 2(j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}-1) = 0$, бо $j\in\{0,2\}$, тобто $j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}] = 2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}$. Тоді

$$g(I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}j\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots})) = g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]\ldots[2-i]}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-j][2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_{r_n}]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_1}]\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}[2-\alpha_{r_n}]\right]\ldots},$$

$$I(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-i]}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}i\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[j+(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{\underbrace{[2-i]i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_1}\right]\ldots\left[2-j-(-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_{r_n}\right]\ldots}.$$

Отже, для всіх чисел з $[0;1]$ має місце рівність $g(I(x)) = I(g(x))$. $\square$

Наслідок 3.4.1. *Якщо* $q_0 = q_2 = \frac{1}{3}$, *то* $\int\limits_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$.

Лема 3.4.2. *У класі* P_c *функціональне рівняння*

$$f(I(x)) = I(f(x)),\ x\in[0;1],$$

за умов $f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ *і* $f(\Delta^{Q_3}_{(2)}) = \Delta^{Q_3}_{(20)}$ *має єдиний розв'язок—функцію* g.

Доведення. Зважаючи на лему 3.4.1 та задання функції g очевидно, що вона є розв'язком.

Припустимо, що в множині P_c існує функція ψ відмінна від g, яка задовольняє умови твердження. Тобто існують такі точки $x_0 = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, що $y_0 = \psi(x_0) \neq g(x_0) = y_1$. Тоді для кожного такого числа x_0 існує найменше натуральне k таке, що $h = \alpha_k(y_0) \neq \alpha_k(y_1) = l$, причому $h \neq 1 \neq l$, $h, l \in \{0, 2\}$ і $\alpha_j(y_0) = \alpha_j(y_1)$ при $j < k$. Виберемо серед них таке x_0, для якого k є найменшим. Якщо таких є не одне x_0, то візьмемо те з них, для якого число h буде найменшим.

З того, що $\alpha_j(y_0) = \alpha_j(y_1)$ при $j < k$ випливає, що y_0 та y_1 належать деякому циліндру $\Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_{k-1}}$.

Нехай $h < l$. Зі сказаного вище випливає, що $h = 0$, $l = 2$. Тоді існує точка $x_1 < x_0$, тобто $x_1 \in \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}[c_k-1]}$. Враховуючи попередні міркування, розглянемо різні Q_3 – раціональні значення:

$$x_0 \equiv \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}[c_k-1](2)} \equiv x_1.$$

При доведенні коректності задання функції g було показано її неперервність в Q_3 – раціональних точках. Функція ψ в точках x_0 і x_1 набуває значень:

$$y_0 = \psi(x_0) = \Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_{k-1}h\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots} = \Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_{k-1}0\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots},$$
$$y_0^* = \psi(x_1) = \Delta^{Q_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_{k-1}ds_1s_2\ldots s_n\ldots},$$

де $d \in A_3$, а τ_i, $s_i \in \{0, 2\}$, $i \in N$. Якщо для всіх i виконуються умови $\tau_i = 2$, $s_i = 0$ і $d = 1$, то функція ψ співпадає з g, що суперечить припущенню. Якщо послідовності (τ_n) та (s_n) довільні відмінні від попереднього випадку або $d \neq 1$, то функція ψ — розривна. Тому $\psi \notin P_c$, що суперечить припущенню.

Якщо $h > l$, тобто $h = 2$ і $l = 0$. То числа y_0 і y_0^* рівні тоді і тільки тоді, коли для всіх i виконуються умови $\tau_i = 0$, $s_i = 2$ та $d = 1$. В цьому випадку ψ співпадає з g, що суперечить припущенню. Для решти значень d, (τ_n), (s_n) отримаємо розривну функцію, тобто $\psi \notin P_c$.

Отримані протиріччя доводять твердження. $\square$

Теорема 3.4.1. *Функція g має властивості:*

1) нескінченну множину проміжків зростання та спадання;

2) при $q_0 = q_2$ є кусково-лінійною, а при $q_0 \neq q_2$ — сумішшю сингулярної і кусково-лінійної;

3) графік функції g складається з афінно-еквівалентних множин точок і є «симетрично-подібним» відносно точки $(\Delta^{Q_3}_{(1)}; \Delta^{Q_3}_{(1)})$;

4) має два нескінченні рівні: $y_0 = \Delta^{Q_3}_{(02)}$ та $y'_0 = \Delta^{Q_3}_{(20)}$.

Доведення. 1) Розглянемо рівності системи (3.4.1). З першої рівності очевидно, що при $\alpha_1 = 1$ всі цифри γ_i однозначно визначаються, причому $\gamma_i = \alpha_i$, $i \in N$. Тобто на відрізку $[\Delta^{Q_3}_{1(0)}; \Delta^{Q_3}_{1(2)}]$ функція g лінійна зростаюча.

Із рівностей

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}[2-i]\alpha_{2m+3}\ldots\alpha_{2m+3+n}\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots},$$

випливає, що функція g лінійна на циліндрах виду: $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots 0}_{2m+1}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{2m+1}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots 0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots 0}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}0}$ та $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}2}$, тобто на відрізках $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots 0}_{2m+1}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots 0}_{2m}(1)}]$ та $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{2m}(1)}; \Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots 2}_{2m+1}(1)}]$, де $0 \leqslant m \in N$. Оскільки m — довільне невід'ємне число, то g має нескінченну кількість проміжків зростання.

Із рівностей системи (3.4.1), а саме:

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+2+n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{2m}i[2-\alpha_{2m+2}]\ldots[2-\alpha_{2m+2+n}]\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}[2-i]\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{2m}\underbrace{1\ldots 1}_{k}i[2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_{r_n}]\ldots},$$

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots 1}_{k}i\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n}\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]..[2-i]i}_{2m+1}\underbrace{1..1}_{k}[2-i][2-\alpha_{r_1}]\ldots[2-\alpha_{r_n}]\ldots},$$

випливає, що на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}0}$, $\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}2}$ відбувається інверсія цифр Q_3 – зображення аргумента. Тобто на $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+2}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}]$ та $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+2}(1)}]$, де $0\leqslant m\in N$, для $i\in\{0,2\}$ мають місце рівності

$$g(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\alpha_{2m+2}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots})=q_i^{m+1}q_{[2-i]}^{m}I\left(\frac{\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\alpha_{2m}\ldots\alpha_{2m+n}\ldots}}{q_i^{2m+1}}\right)+\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i[2-i]\ldots[2-i]i}_{2m+1}(0)},\tag{3.4.2}$$

звідки випливає, що g — монотонно спадна на вказаних відрізках.

Оскільки m — довільне невід'ємне число, то g має нескінченну множину проміжків спадання.

2) Зважаючи на доведення пункту 1) теореми 3.4.1 та властивості інверсора $I(x)$ (в розділі 2 було доведено, що це монотонно спадна, крім того сингулярна при $q_0\neq q_2$ і лінійна при $q_0=q_2$ функція), можна зробити висновок, що при $q_0=q_2$ функція g є нескінченно кусково-лінійною, а при $q_0\neq q_2$ — сумішшю сингулярної та кусково-лійної.

3) Із доведення пункту 1) теореми 3.4.1 випливає афінна еквівалентність множин точок, а саме:

$$\psi_1\left(\square^{i[2-i]}_{i[2-i]}\right)=\square^{i[2-i]\ldots i[2-i]}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]}\ \Rightarrow\ \Gamma^g_{i[2-i]}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}[2-i]},$$

$$\psi_2\left(\square^{i[2-i]i}_{ii[2-i]}\right)=\square^{i[2-i]\ldots[2-i]i}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]}\ \Rightarrow\ \Gamma^g_{ii[2-i]}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}[2-i]},$$

$$\psi_3\left(\square^{i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}_{i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\right)=\square^{i[2-i]\ldots i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\ \Rightarrow\ \Gamma^g_{i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]},$$

$$\psi_4\left(\square^{i[2-i]\underbrace{1\ldots1}_{k}i}_{ii\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\right)=\square^{i[2-i]\ldots i[2-i]\underbrace{1\ldots1}_{k}i}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\ \Rightarrow\ \Gamma^g_{ii\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]},$$

$$\psi_5\left(\square_{i\underbrace{1\ldots1}_{k}i}^{i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\right)=\square_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}i}^{i[2-i]\ldots i\underbrace{1\ldots1}_{k}[2-i]}\quad\Rightarrow\quad\Gamma^g_{i\underbrace{1\ldots1}_{k}i}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}\underbrace{1\ldots1}_{k}i},$$

$$\psi_6\left(\square_{ii\underbrace{1\ldots1}_{k}i}^{i[2-i]\underbrace{1\ldots1}_{k}i}\right)=\square_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}i}^{i[2-i]\ldots i[2-i]\underbrace{1\ldots1}_{k}i}\quad\Rightarrow\quad\Gamma^g_{ii\underbrace{1\ldots1}_{k}i}\overset{A}{\sim}\Gamma^g_{\underbrace{i\ldots i}_{2m}\underbrace{1\ldots1}_{k}i},$$

де $\Gamma^g_{c_1\ldots c_n}$ — графік функції g на циліндрі $\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_n}$, $\overset{A}{\sim}$ — знак афінної еквівалентності, ψ_i — деякі афінні перетворення.

4) Нехай $i\in\{0,2\}$. Очевидно, що $x_1=\Delta^{Q_3}_{(i[2-i])}\to\Delta^{Q_3}_{(i[2-i])}=y_0$, $x_2=\Delta^{Q_3}_{ii(i[2-i])}\to\Delta^{Q_3}_{(i[2-i])}=y_0$, ..., $x_n=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2^{n-1}}(i[2-i])}\to\Delta^{Q_3}_{(i[2-i])}=y_0$ і т.д..

Оскільки n довільне натуральне число, то множини рівнів $y_0=\Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $y_0'=\Delta^{Q_3}_{(20)}$ функції g є нескінченними.

Виходячи з означення функції g множина $f^{-1}(y_0)$ при умовах $y_0\neq\Delta^{Q_3}_{(02)}$ і $y_0\neq\Delta^{Q_3}_{(20)}$ є скінченною. $\square$

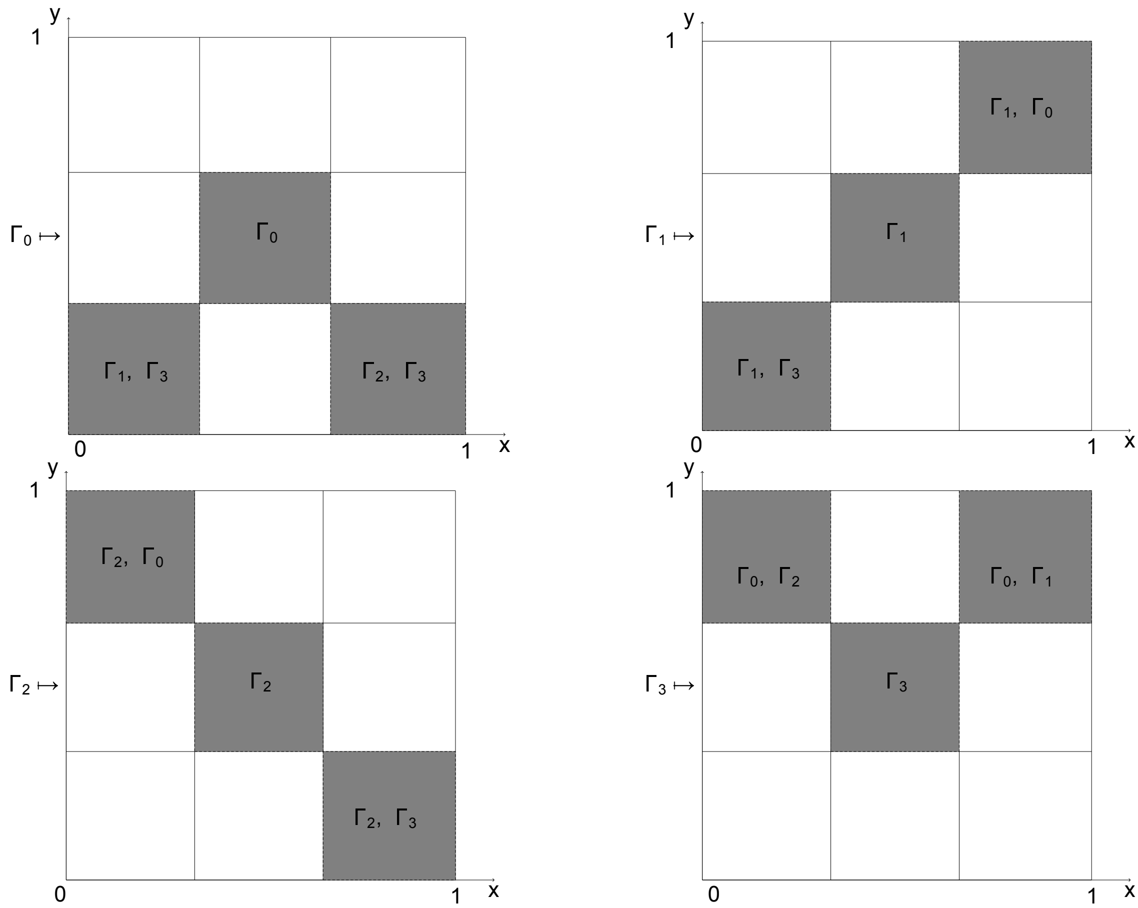
Наслідок 3.4.2. *Функція g лінійна на відрізках $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m}(1)}]$ та $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)}]$, де $0\leqslant m\in N$, а на $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+2}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{2m+1}(1)}]$ та $[\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+1}(1)};\Delta^{Q_3}_{\underbrace{2\ldots2}_{2m+2}(1)}]$ — монотонно спадна і має аналітичний вираз* (3.4.2).

3.5. Функції з двома нескінченними рівнями

Теорема 3.5.1. *В класі P_c існує зліченна підмножина P_2 функцій, які мають два нескінченні рівні. Не існує функцій з класу P_c, які мають більше ніж два нескінченні рівні.*

Доведення. Оскільки $\gamma_1=1\Leftrightarrow\alpha_1=1$, то як зазначалось при доведенні теореми 3.1.1, γ_1 може бути довизначена 4 різними способами, а саме: можливі чотири випадки локальної структури графіка (малюнок 1).

Поведінка функції на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{02}$, $\Delta^{Q_3}_{20}$, $\Delta^{Q_3}_{10}$ і $\Delta^{Q_3}_{12}$ детермінована неперерністю функції та умовою 1). Тому «степінь свободи» для визначення γ_2 існує на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{00}$ і $\Delta^{Q_3}_{22}$. Аналогічно для цифри γ_3 — «степінь



свободи» існує на циліндрах $\Delta^{Q_3}_{000}$ і $\Delta^{Q_3}_{222}$ і т.д.

Використовуючи міркування, як і при доведенні теореми 3.3.1, можемо стверджувати, що у випадку, коли графік функції f містить фрагменти Γ_1, Γ_2 або скінченну кількість фрагментів Γ_0, Γ_3 («на n – кроці наближення до графіка функції»), то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною для всіх y_0. І лише у випадку, коли починаючи з деякого номера для наборів $(\underbrace{0,\ldots,0}_{k})$, $(\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1})$, ... і $(\underbrace{2,\ldots,2}_{t})$, $(\underbrace{2,\ldots,2}_{t+1})$, ... ($k \neq t$ або $k = t$ і існує номер $l < k$, $l < t$ такий, що $\gamma_l(0,\ldots,0) \neq \gamma_l(2,\ldots,2)$) нескінченну кількість разів чергуються фрагменти Γ_0 і Γ_3, то графік функції має два нескінченні рівні.

Друга частина твердження є наслідком того, що нескінченний рівень можна отримати лише для значень $y_0 \equiv f(0)$ і $y_1 \equiv f(1)$, оскільки для інших значень x визначення цифр значення функції f детерміноване її неперервністю. $\square$

Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячений класу $P_c \subset P$ неперервних функцій на $[0;1]$, що зберігають цифру 1 у Q_3 – зображенні чисел. У ньому встановлено масивність окремих класів неперервних функцій з P_c. У п. 3.1 доведено, що клас P_c неперервних функцій є зліченним, а в ньому існує лише дві строго монотонні функції, які є бієктивними відображеннями (перетвореннями $[0;1]$ на себе) — це тотожне перетворення та інверсор. Доведено, що зліченними є також множини:

— неперервних функцій, всі рівні яких скінченні;

— неперервних функцій з одним нескінченним рівнем;

— неперервних функцій з двома нескінченними рівнями.

Доведено, що не існує функцій, які мають більше двох нескінченних рівнів.

Основна увага в цьому розділі приділена двом модельним представникам класу P_c, що мають один та два нескінченні рівні відповідно.

Підрозділ 3.2 присвячений функції f_1 з класу P_c, яка при заданому Q_3 – зображенні з умовою $q_0 \neq q_2$ є сумішшю сингулярної та кусково-лінійної, «симетрично-подібною» і має один нескінченний рівень. Її лебегівські та екстремальні властивості розкриває теорема 3.2.1, структурні та варіаційні — теорема 3.2.2, інтегральні — теорема 3.2.3. Факт «симетрично-подібності» функції f_1 є наслідком рівності $f_1(x) = f_1(I(x))$, де $I(x)$ – інверсор цифр Q_3 – зображення числа.

Пункт 3.4 присвячений модельному прикладу функції g класу P_c з двома нескінченними рівнями, яка задовольняє рівність $g(I(x)) = I(g(x))$. Тут доведено, що при $q_0 \neq q_2$ вона є сингулярною на проміжках спадання і лінійною на проміжках зростання.

Результати цього розділу опубліковано у роботі [5^a] і доповідались на конференціях [14^a, 16^a, 17^a].

РОЗДІЛ 4
НЕСКІНЧЕННО-СИМВОЛЬНІ КОДУВАННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ЩО Є МОДИФІКАЦІЯМИ ТРИСИМВОЛЬНИХ

У роботах Працьовитого М. В. [81], Гончаренко Я. В. та Лисенко І. М. [21] розглядається наступний спосіб перекодування двосимвольного зображення дробової частини дійсного числа (а саме: класичного двійкового та Q_2 – зображення числа):

$$[x] = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{a_1}0\underbrace{1\ldots1}_{a_2}0\underbrace{1\ldots1}_{a_3}0\ldots} = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2a_3\ldots},\ a_n \in \mathbb{Z}_0,$$

засобами нескінченно-символьного алфавіту $A = \mathbb{Z}_0$, яке називається q_0^∞ – зображенням. Воно, залишившись за змістом Q_2 – представленням, за формою є нескінченно-символьним зображенням. Вказане перекодування встановлює тісний зв'язок систем зображення чисел зі скінченними та нескінченними алфавітами. Кожне число $x \in [0;1)$ має єдине q_0^∞ – зображення $\Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$. q_0^∞ – зображення має N – самоподібну геометрію (тоді як геометрія Q_2 – зображення — самоподібна), що розширює арсенал засобів аналітичного задання та дослідження математичних об'єктів зі структурно складними, зокрема, фрактальними властивостями.

Формально перенести цей метод на інші не двосимвольні кодування чисел не вдається, в силу різних причин. Разом з цим може бути використана ідея кодувати числа символами, які виражають довжини серій послідовних однакових цифр.

У цьому розділі ми робимо спробу реалізувати вказану ідею для перекодування трисимвольного Q_3 – зображення дійсних чисел (зокрема, класичного трійкового зображення) використанням нескінченного алфавіту.

4.1. Модифікація трійкового зображення дійсних чисел

4.1.1. Означення.

Означення 4.1.1. Зображення

$$\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \tag{4.1.1}$$

дійсного числа

$$x = \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots}, \quad a_n \in \mathbb{Z}_0,$$

де a_n — це «довжина» серії однакових послідовних трійкових цифр, називатимемо $\overline{3}$ – *зображенням* числа x.

Очевидно, що $\overline{3}$ – зображення є лише модифікацією класичного трійкового зображення, а по суті — його перекодуванням засобами нескінченного алфавіту $A = \mathbb{Z}_0$.

З означення зрозуміло, що у $\overline{3}$ – зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто $a_na_{n+1}a_{n+2} \neq 000$, $n \in N$. Крім того, навіть домовившись використовувати лише одне з двох зображень трійково-раціональних чисел, а саме з перідом (0) існують проблеми з коректністю даного означення (яких не було при модифікації Q_2 – зображення). Вони пов'язані як з переходом від трійкового зображення до $\overline{3}$ – зображення, так і «навпаки». Остання проблема пов'язана з тим, що не кожна послідовність (a_n) цілих невід'ємних чисел визначає $\overline{3}$ – зображення $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$. Наприклад, як трактувати запис $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{123(400)}$? Інша проблема пов'язана з тим як записувати число, трійкове зображення якого має простий період (i)?

Вирішуються ці проблеми наступними домовленостями.

З метою забезпечення кожного числа єдиним $\overline{3}$ – зображенням, яке не допускає двозначних трактувань (тлумачень) домовимось:

а) число $x = \Delta^3_{\ldots(i)}$ записувати $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{\ldots1001001001\ldots}$, де $i = \{0, 1\}$;

б) два нулі підряд для $\overline{3}$ *– зображення числа вживати у виключних випадках, а саме: якщо трійкове зображення числа* x *починається цифрою 2, тобто* $x = \Delta^3_{2\alpha_2\alpha_3\ldots}$*, тоді* $x = \overline{\Delta}^{3}_{00a_3\ldots}$*, де* $a_3 > 0$*, або число має простий період* (i)*, про яке згадувалось в а).*

Після введення цих вимог довільне число $x \in [0,1)$ має єдине $\overline{3}$ – зображення.

Визначимо перехід від класичного трійкового до $\overline{3}$ – зображення, тобто від послідовності (α_n) до (a_n), де $\alpha_n \in \{0,1,2\}$, $a_n \in \mathbb{Z}_0$. В силу однозначності $\overline{3}$ – зображення $a_k(x)$ – функція числа, яка визначає довжину k-тої серії однакових трійкових символів (включаючи серії нульової довжини). Очевидно, що для всіх $n \in N$ мають місце рівності:

$$a_1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ n, \text{ якщо } \alpha_{n+1} \neq 0, \text{ але } \alpha_j = 0,\ j \leqslant n; \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{a_1+1} = 2, \\ n, \text{ якщо } \alpha_{a_1+1} = ... = \alpha_{a_1+n} = 1, \text{ але } \alpha_{a_1+n+1} \neq 1; \end{cases}$$

$$a_3 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{a_1+a_2+1} \neq 2, \text{ але } a_2 \neq 0, \\ n, \text{ якщо } \alpha_{a_1+a_2+1} = ... = \alpha_{a_1+a_2+n} = 2, \text{ але } \alpha_{a_1+a_2+n+1} \neq 2; \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$a_{3k-i} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{t+1} \neq 2-i, \text{ але } a_{3k-i-1} \neq 0, \\ n, \text{ якщо } \alpha_{t+1} = ... = \alpha_{t+n} = 2-i, \text{ але } \alpha_{t+n+1} \neq 2-i, \end{cases}$$

де $\sum\limits_{j=1}^{3k-i-1} a_j = t$, $i = \{0,1,2\}$.

Перехід від $\overline{3}$ – зображення до трійкового (від послідовності символів (a_n) до послідовності символів (α_n)), також є цілком очевидним і визначається наступними рівностями:

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 0, \ldots \alpha_{a_1} = 0,$$

$$\alpha_{a_1+1} = 1,\ \ \alpha_{a_1+2} = 1, \ldots \alpha_{a_1+a_2} = 1,$$

$$\alpha_{a_1+a_2+1}=2,\ldots\alpha_{a_1+a_2+a_3}=2,$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k}+1}=0,\ldots,\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k}+a_{3k+1}}=0,$$

$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+1}+1}=1,\ldots,\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+1}+a_{3k+2}}=1,$$

$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+2}+1}=2,\ldots,\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+2}+a_{3k+3}}=2,\ldots.$$

4.1.2. Геометрія $\overline{3}$ – зображення. Нехай $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ – фіксований впорядкований набір елементів алфавіту $\mathbb{Z}_0$, для якого виконуються вище вказані умови. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ у $\overline{3}$ – зображенні чисел називатимемо множину $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x\in[0,1)$, які мають наступне $\overline{3}$ – зображення

$$x=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}\ldots a_{m+k}\ldots},\ a_{m+i}\in\mathbb{Z}_0.$$

Внутрішність циліндра $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ позначатимемо $\overline{\nabla}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Лема 4.1.1. *Циліндричні множини мають наступні властивості:*

1) якщо $c_m\neq 0$, то

$$\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}=\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}\bigcup\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma},$$

де $\alpha\equiv m-1(mod\,3)$, $\beta\equiv m(mod\,3)$, $\gamma\equiv m+1(mod\,3)$;

якщо $c_m=0$, то

$$\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}=\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma},$$

де $\alpha\equiv m-2(mod\,3)$, $\gamma\equiv m(mod\,3)$;

2) якщо $c_m\neq 0$, то $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m1}\bigcup\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m01}$ і якщо $c_m=0$, то $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}01}$;

3) $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}=\overline{\Delta}^{3}_{s_1s_2\ldots s_k}$, тоді і тільки тоді, коли всі $c_i=s_i$, $m,k\in\mathbb{N}$;

4) $\overline{\nabla}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}\neq\overline{\nabla}^{3}_{s_1s_2\ldots s_k}$, якщо хоча б одне з $c_i\neq s_i$, $m,k\in\mathbb{N}$;

5) для міри Лебега має місце рівність

$$\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m})=2^{\psi(c_m)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}c_i+1},$$

де $\psi(c_m) = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо} \ c_m \neq 0, \\ 0, \ \textit{якщо} \ c_m = 0; \end{cases}$

6) $\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}) \to 0 \ (m \to \infty)$ *для* $(c_n) \in A^{\infty}$*;*

7) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = x \in [0,1)$*;*

8) основне метричне відношення має наступний вигляд

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m})} = \frac{2^{\psi^*(c_m,c)}}{3^c}, \ \textit{де} \ \psi^*(c_m,c) = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ c_m \cdot c \neq 0, \\ -1, \ \textit{якщо} \ c = 0, \\ 1, \ \textit{якщо} \ c_m = 0; \end{cases}$$

9) діаметр циліндра визначається за формулою

$$diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i}, m \in (3k-2) \ \textit{або} \ m \in (3k), \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i}, m \in (3k-1) \end{cases} \quad \textit{при} \ c_m \neq 0,$$

$$diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1};$$

10) $diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}) \geqslant \lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m})$.

Доведення. Властивість 1) випливає безпосередньо з означення $\overline{3}$ – зображення та умов, що на нього накладаються. А саме, якщо $x \in \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$, то згідно з означенням $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}}$, де $\alpha \equiv m-1 (mod\,3)$. Оскільки у модифікованому зображенні враховується повнота серій однакових цифр, то очевидно, що при $c_m \neq 0$ трійкова цифра на $(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1)$ місці відмінна від α, тому $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}$ і $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}$, причому $\alpha+1 \equiv \beta (mod\,3)$ і $\alpha+2 \equiv \gamma (mod\,3)$. Якщо $c_m = 0$, тоді отримаємо $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\underbrace{\beta\ldots\beta}_{c_m=0}\gamma} \equiv \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma}$, де $\alpha \neq \gamma \neq \beta$, а $\alpha \equiv m-2 (mod\,3)$ і $\gamma \equiv m (mod\,3)$.

Властивість 2) випливає із властивості 1). Бо якщо $x \in \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m}$ і $c_m \neq 0$, то $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta} \equiv \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m1}$ і $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma} \equiv$ $\equiv \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m01}$, тобто $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m} = \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m1} \bigcup \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m01}$. Якщо $c_m = 0$, то $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma} \equiv \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m01}$ і $\alpha + 2 \equiv \gamma (mod\, 3)$.

Властивості 3) і 4) випливають із єдиності $\overline{3}$ – зображення довільного дійсного числа x з $[0, 1)$.

Із властивості 1) видно, що циліндр в $\overline{3}$ – зображенні є об'єднанням двох трійкових циліндрів при $c_m \neq 0$, тобто міра Лебега $\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m})$ визначається як сума довжин циліндрів $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}$ і $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}$, а саме

$$\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}) + \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1}.$$

Якщо $c_m = 0$, то

$$\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\cdots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1}.$$

Властивість 6) випливає з 5) при $m \to \infty$.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ є послідовність вкладених компактів, а їх перетин визначає єдину точку $x \in [0, 1)$ (властивість 7)). Основне метричне відношення отримаємо підставивши значення міри Лебега при фіксованому значенні m та враховуючи, яких значень набувають цифри c_m і c у $\overline{3}$ – зображенні числа. Властивість 9) випливає з 1) і 5), а 10) випливає з 5) і 9). □

4.1.3. Напівциліндри. Суттєво важливими задачами метричної теорії $\overline{3}$ – зображення чисел є задачі про міру множин чисел з фіксованими $\overline{3}$ – цифрами на певних місцях, а також множин чисел, де забороняється вживання якоїсь з $\overline{3}$ – цифр.

Нехай $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ – множина всіх чисел, які на k_1 – ому місці $\overline{3}$ – зображення мають фіксовану цифру c_1, тобто $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} \equiv \{x : a_{k_1}(x) = c_1\}$.

Якщо $k_1 = 1$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ є циліндром $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1}$.

Якщо $k_1 = 2$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} = \overline{\Delta}^{2}_{c_1} = \bigcup\limits_{a_1 \in \mathbb{Z}_0} \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1 c_1}$, а її міра Лебега

$$\lambda(\overline{\Delta}^{2}_{c_1}) = \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{0c_1}) + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{1c_1}) + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{2c_1}) + \ldots + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{tc_1}) + \ldots =$$
$$= \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+1}} + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+2}} + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+3}} + \ldots + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+t+1}} + \ldots = \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2^{\psi(c_1)}}{2 \cdot 3^{c_1}},$$

де $\psi(c_1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c_1 \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } c_1 = 0. \end{cases}$

Очевидно, що множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ чисел з $[0, 1)$, для яких k_1 – ша цифра має конкретне значення c_1, є об'єднанням циліндричних множин:

$$\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} = \bigcup_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1}.$$

Тому міра Лебега визначається як сума довжин цих циліндрів, тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \lambda\left(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1}\right).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $c_1 = 0$, то при $k_1 \geqslant 3$ відповідно до умов, які накладаються на «нулі» в модифікованому зображенні, цифра $a_{k_1-1} \neq 0$ і підряд не може бути двох і більше нулів, за виключенням цифр a_1 і a_2.

Оскільки не всі цифри у $\overline{3}$ – зображенні є незалежними однаково розподіленими, через накладені на них умови а) і б), то при $k_1 > 3$ розв'язання задачі знаходження міри Лебега напівциліндра значно ускладнюється.

Лема 4.1.2. *Множина* $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ *має міру Лебега, яка визначається з рівності:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+i+1}},$$

де $\psi(c_1) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } c_1 \neq 0, \\ 0, & \textit{якщо } c_1 = 0, \end{cases}$ *число* $t_{k_1} = \min\left\{ \sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} a_i \right\}$, $s_{k_1 i}$ *— кількість всеможливих наборів* $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$ *таких, що сума всіх цифр в наборі дорівнює* $t_{k_1} + i$, $i \in \mathbb{Z}_0$.

Доведення. Через умови накладені на $\overline{3}$ – зображення, виникають проблеми вживання цифри «0» для набору $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$ при $k_1 > 3$. Тому введемо параметр t_{k_1} такий, що відповідає набору $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$, в якому міститься максимальна кількість нулів, а на відмінних від нуля місцях стоять одиниці і виконуються умови накладені на $\overline{3}$ – зображення, тобто $t_{k_1} = \min\left\{ \sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} a_i \right\}$. Очевидно, що такиий набір не єдиний, тому кількість циліндрів для різних наборів $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$, де сума цифр в наборі дорівнює t_{k_1} позначимо $s_{k_1 0}$. Тоді міра Лебега множини таких циліндрів згідно властивості 5) леми 4.1.1 дорівнює $\dfrac{s_{k_1 0} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+1}}$.

Очевидно, що далі необхідно розглянути всеможливі набори a_1, $a_2, \ldots$, a_{k_1-1}, які відповідатимуть числу $t_{k_1} + 1$ і їх кількість позначимо $s_{k_1 1}$. Тоді, міра Лебега множини циліндрів з основою $a_1 a_2 \ldots a_{k_1-1} c_1$ таких, що має місце $\sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} a_i = t_{k_1} + 1$, дорівнює відповідно $\dfrac{s_{k_1 1} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+1+c_1+1}}$.

Продовживши цей процес далі, очевидно, що для $t_{k_1} + i$ та $s_{k_1 i}$ міра Лебега об'єднання всеможливих $\overline{3}$ – циліндрів дорівнює $\dfrac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+i+c_1+1}}$.

Легко бачити, що $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1})$ є сумою довжин всеможливих трійкових циліндрів $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{a_{k_1-1}}\underbrace{\beta\ldots\beta}_{c_1}\gamma}$, де $\gamma \neq \beta$ і набуває двох значень при $c_1 \neq 0$ або єдиного при $c_1 = 0$, рангу $t_{k_1}+c_1+1$, $t_{k_1}+c_1+2$, ..., $t_{k_1}+c_1+i+1$,..., тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+i+1}}.$$

□

Узагальнимо наші міркування.

Означення 4.1.2. Множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1,m}\}$ називається напівциліндром з основою $\begin{pmatrix} k_1k_2\ldots k_m \\ c_1c_2\ldots c_m \end{pmatrix}$.

Для довільного набору $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $c_i \in \mathbb{Z}_0$ із означення напівциліндра випливає

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}\ldots a_{k_{i+1}-1}c_{i+1}a_{k_{i+1}+1}\ldots a_{k_m-1}c_m}$$

та має місце рівність $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} \cap \overline{\Delta}^{k_2}_{c_2} \cap \ldots \cap \overline{\Delta}^{k_m}_{c_m}$.

Теорема 4.1.1. *Міра Лебега напівциліндра* $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_mi}\cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+\ldots+c_m+i+1}},$$

$$t_{k_m} = \min\left\{\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\}, \psi(c_m) = \begin{cases} 1 \text{ } при \text{ } c_m \neq 0, \\ 0 \text{ } при \text{ } c_m = 0, \end{cases}$$

s_{k_mi} *— кількість всеможливих різних наборів* $a_1, \ldots, a_{k_1-1}$, $a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2-1}$, $\ldots$, $a_{k_i+1}, \ldots, a_{k_{i+1}-1}$, $\ldots$, $a_{k_{m-1}+1}, \ldots, a_{k_m-1}$ *при умові, що сума всіх цифр в наборі дорівнює* $t_{k_m} + i$, $i \in \mathbb{Z}_0$.

Доведення. Використаємо міркування, що й при доведенні леми 4.1.2. Введемо параметр t_{k_m}, який дорівнює сумі цифр в наборі $a_1, \ldots, a_{k_1-1}$, $a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2-1}$, ..., $a_{k_i+1}, \ldots, a_{k_{i+1}-1}$, ..., $a_{k_{m-1}+1}, \ldots, a_{k_m-1}$, де з урахуванням всіх умов накладених на $\overline{3}$ – зображення міститься максимальна кількість нулів, а на відмінних від нуля місцях стоять одиниці. Тобто

$$t_{k_m} = \min\left\{\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\}.$$

Оскільки існує не єдиний такий набір, то кількість різних циліндрів $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}\ldots a_{k_{i+1}-1}c_{i+1}a_{k_{i+1}+1}\ldots a_{k_m-1}c_m}$, таких що сума цифр на відмінних від

$k_1, k_2, ..., k_m$ місцях дорівнює t_{k_m}, позначимо s_{k_m0}. Міра Лебега множини таких циліндрів згідно властивості 5) леми 4.1.1 дорівнює $\dfrac{s_{k_m0} \cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+...c_m+1}}$.

Міра Лебега множини циліндрів, що відповідають значенням $t_{k_m} + i$ та s_{k_mi}, дорівнює $\dfrac{s_{k_mi} \cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+...c_m+i+1}}$.

Легко бачити, що

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2...k_m}_{c_1c_2...c_m}) = \sum_{\substack{(a_1,...,a_{k_1-1},...,a_{k_i+1},...,a_{k_{i+1}-1},...,a_{k_m-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \lambda(\overline{\Delta}^{3}_{a_1...a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}...a_{k_{i+1}-1}c_{i+1}a_{k_{i+1}+1}...a_{k_m-1}c_m}),$$

тому

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2...k_m}_{c_1c_2...c_m}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_mi} \cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+...+c_m+i+1}}.$$

Що і треба було довести. □

4.1.4. Множини чисел з обмеженнями на вживання $\overline{3}$ – символів. Тепер дослідимо множини чисел із забороною вживання заданої комбінації $\overline{3}$ – цифр.

Розглянемо деяку множину H, яка має вигляд:

$$H = H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}] = \{x : x = \overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2...a_n...}, \text{ де } a_k \neq s \ \forall \ k \in N\}.$$

Якщо скористатись переходом від $\overline{3}$ – зображення до класичного трійкового, то множину H можна подати у вигляді:

$$H[3, \underbrace{\overline{i...i}}_{s}] = \{x : x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \text{де}\, \alpha_k...\alpha_{k+s} \neq \underbrace{i...i}_{s}, \alpha_{k-1} \neq i \neq \alpha_{k+s+1} \, \forall \, k \in N\}.$$

Теорема 4.1.2. *Множина $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.*

Доведення. Доведемо, що $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ є ніде не щільною.

Нехай (a, b) – довільний інтервал, що належить $[0, 1)$. Легко вказати циліндр, який міститься в ньому $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_n} \subset (a, b)$. Тоді інтервал $int\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_ns}$ не містить жодної точки множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$. Таким чином, $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ – ніде не щільна.

Покажемо, що міра Лебега множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ рівна нулю.

Нехай $U_0 = (0, 1)$, U_n – об'єднання циліндрів рангу n, які містять точки множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$,

$$\overline{U}_{n+1} = U_n \backslash U_{n+1}. \tag{4.1.2}$$

З властивостей циліндрів випливає $U_n \supset U_{n+1} \supset H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ для всіх $n \in N$,

$$H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} U_n.$$

Тоді згідно з неперервністю міри Лебега зверху маємо:

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(U_n).$$

Отже,

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\lambda(U_n)}{\lambda(U_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(U_{n-1})}{\lambda(U_{n-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(U_1)}{\lambda(U_0)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})}. \tag{4.1.3}$$

З (4.1.2) випливає

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{U}_{k+1})}{\lambda(U_k)}\right). \tag{4.1.4}$$

Останній нескінченний добуток збігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{U}_{k+1})\lambda(U_k) = \infty.$$

Нехай $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_k}$ – циліндр з U_k, тоді можливо, що або $c_k = s$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}s})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}})} = \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s}, \text{ де } \psi(c_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_{k-1} \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } c_{k-1} = 0, \end{cases}$$

або $c_k \neq s$ і

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}c_k})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}})} = \frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}}, \text{ де } \psi^*(c_{k-1}, c_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_{k-1} \cdot c_k \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } c_{k-1} = 0, \\ -1, & c_k = 0. \end{cases}$$

Якщо $c_k < s$, то $\frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}} > \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s}$; якщо $c_k > s$, то $\frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}} < \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s}$.

Враховуючи це, маємо

$$\frac{\lambda(\overline{U}_{k+1})}{\lambda(U_k)} \leqslant \frac{2}{3^s}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\overline{U}_{k+1})\lambda(U_k)$ розбігається і $\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = 0$. $\square$

Наслідок 4.1.1. *Множина чисел*

$H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s_1, s_2, ..., s_n\}] = \{x : x = \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},$ *де* $a_k \neq s_i, \ \forall\ k \in N, i = \overline{1,n}\}$ *є ніде не щільною множиною.*

4.2. $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел

4.2.1. Означення та властивості циліндричних множин.

Означення 4.2.1. Зображення

$$\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} \qquad (4.2.1)$$

дійсного числа

$$x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots}, \quad a_n \in \mathbb{Z}_0,$$

де a_n — це «довжина» серії однакових послідовних Q_3 – цифр, називатимемо $\overline{Q_3}$– *зображенням* числа x.

Для усунення некоректностей (неоднозначностей) в модифікованому $\overline{Q_3}$ – зображенні введемо такі самі вимоги, як і в $\overline{3}$ – зображенні, після введення яких довільне число $x \in [0, 1)$ має єдине $\overline{Q_3}$ – зображення.

Оскільки Q_3 – зображення є узагальненням класичного трійкового зображення, то його геометрія подібна до геометрії трійкового зображення, але воно породжує складніші метричні відношення. Очевидно, що $\overline{Q_3}$ – зображення є узагальненням $\overline{3}$ – зображення і успадковує всі його властивості.

Властивості циліндричних множин

Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ у $\overline{Q_3}$ – зображенні чисел називатимемо множину $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0, 1)$, які мають наступне $\overline{Q_3}$ –

зображення

$$x = \Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}\ldots a_{m+k}\ldots}, \; a_{m+i} \in \mathbb{Z}_0.$$

Очевидно, що властивості 1), 2), 3), 4),6), 7) та 10) сформульовані у лемі 4.1.1 переносяться на $\overline{Q_3}$ – зображення, в силу того, що Q_3 – зображення дійсних чисел є узагальненням класичного трійкового. Залишається дослідити лише «метричні» властивості.

Лема 4.2.1. *Циліндри мають наступні властивості:*

a) для міри Лебега мають місце рівності:

якщо $c_m \neq 0$, *то*

$$\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \begin{cases} q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot (1-q_0), \; m\in(3k-2), \\ q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot (1-q_1), \; m\in(3k-1), \\ q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot (1-q_2), \; m\in(3k), \end{cases}$$

якщо $c_m = 0$, *то*

$$\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \begin{cases} q_2 \cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-3}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i}, \; m-1\in(3k-2), \\ q_0 \cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-3}} c_i}, \; m-1\in(3k-1), \\ q_1 \cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-3}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i}, \; m-1\in(3k); \end{cases}$$

b) основне метричне відношення має наступний вигляд

$$\frac{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})} = \frac{q_i^c(1-q_i)}{(1-q_j)} \text{ при } c_m \cdot c \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m 0})}{\lambda(\Delta^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})} = \frac{q_{i+1}}{1-q_j} \text{ при } c_m \neq 0,$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0})} = q_i^{c-1}(1-q_i),$$

де $i \equiv m(mod\,3)$, $j \equiv m-1(mod\,3)$, $m,k \in \mathbb{N}$;

c) діаметр циліндра визначається за формулою

$$diam(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \begin{cases} q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot (1-q_0),\ m \in (3k-2), \\ q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i},\ m \in (3k-1), \\ q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot (1-q_2),\ m \in (3k) \end{cases}$$

при $c_m \neq 0$ *і при* $c_m = 0$

$$diam(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}).$$

Доведення. а) Оскільки властивість 1) леми 4.1.1 переноситься аналогічним чином на $\overline{Q_3}$ – зображення, тобто при $c_m \neq 0$

$$\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta} \bigcup \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma},$$

де $\alpha \equiv m-1(mod\,3)$, $\beta \equiv m(mod\,3)$, $\gamma \equiv m+1(mod\,3)$ і

$$\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0} = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma},$$

де $\alpha \equiv m-2(mod\,3)$, $\gamma \equiv m(mod\,3)$.

Розглянемо випадок, коли $c_m \neq 0$. Нехай $m \in (3k-2)$, тоді

$$\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_m}1}) + \lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_m}2}) =$$

$$= q_1 \cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i} + q_2 \cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i} =$$

$$= (1-q_0) q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i}.$$

Якщо $m \in (3k-1)$ і $m \in (3k)$, то

$$\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{c_m}0}) + \lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{c_m}2}) =$$

$$=(q_0+q_2)\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i}=(1-q_1)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i},$$

$$\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}})=\lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{2\ldots2}_{c_m}0})+\lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{2\ldots2}_{c_m}1})=$$

$$=(q_0+q_1)\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i}=(1-q_2)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i}.$$

Якщо $c_m=0$, то необхідно розглянути три випадки, коли $m-1\in(3k-1),(3k-1)$ або $(3k)$, тобто

$$\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}})=\lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_{m-1}}2})=q_2\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-3}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i},$$

$$\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}})=\lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{c_{m-1}}0})=q_0\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-3}} c_i},$$

$$\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}})=\lambda(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{2\ldots2}_{c_{m-1}}1})=q_1\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-3}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i}.$$

b) Нехай $c_m\neq0\neq c$. Зважаючи на властивість a) леми 4.2.1 при $m\in(3k-2)$, маємо

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_mc}})}{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}})}=\frac{(1-q_1)q_1^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i}}{(1-q_0)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}} c_i}}=\frac{q_1^c(1-q_1)}{(1-q_0)},$$

при $m\in(3k-1)$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_mc}})}{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}})}=\frac{(1-q_2)q_2^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i}}{(1-q_1)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}} c_i}}=\frac{q_2^c(1-q_2)}{(1-q_1)},$$

при $m\in(3k)$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_mc}})}{\lambda(\overline{\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}})}=\frac{(1-q_0)q_0^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i}}{(1-q_2)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}} c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}} c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}} c_i}}=\frac{q_0^c(1-q_0)}{(1-q_2)}.$$

Нехай $c=0$ і $c_m\neq0$, то

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{q_2\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}}c_i}}{(1-q_0)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}}c_i}}=\frac{q_2}{(1-q_0)}\text{ при } m\in(3k-2),$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{q_0\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}}c_i}}{(1-q_1)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}}c_i}}=\frac{q_0}{(1-q_1)}\text{ при } m\in(3k-1),$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{q_1\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}}c_i}}{(1-q_2)q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}}c_i}}=\frac{q_1}{(1-q_2)}\text{ при } m\in(3k).$$

Нехай $c_m=0$ і $c\neq 0$, то

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{(1-q_1)q_1^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}}c_i}}{q_1q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-3}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-1}}c_i}}=\frac{q_1^c(1-q_1)}{q_1},\ m\in(3k-2),$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{(1-q_2)q_2^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}}c_i}}{q_2q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-3}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-2}}c_i}}=\frac{q_2^c(1-q_2)}{q_2},\ m\in(3k-1),$$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m})}=\frac{(1-q_0)q_0^c\cdot q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m}}c_i}}{q_0q_0^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-2)\\ i\leqslant m-2}}c_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k-1)\\ i\leqslant m-1}}c_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{\substack{i\in(3k)\\ i\leqslant m-3}}c_i}}=\frac{q_0^c(1-q_0)}{q_0},\ m\in(3k).$$

Властивість с) випливає з властивості а) леми 4.2.1 та «геометрії» Q_3 – зображення чисел. $\square$

4.2.2. Метричні задачі. *Напівциліндри.*

Лема 4.2.2. *Для міри Лебега множини* $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ *має місце:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1})=\frac{q_{\alpha_r}^{c_1}(1-q_{\alpha_r})^{\psi(c_1)}}{q_{\alpha_t}^{\psi(c_1)-1}}\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_1-1}} q_0^{\sum\limits_{i\in(3n-2)}a_i}\cdot q_1^{\sum\limits_{i\in(3n-1)}a_i}\cdot q_2^{\sum\limits_{i\in(3n)}a_i}, \qquad (4.2.2)$$

де $\alpha_r\equiv k_1-1(mod\,3)$, $\alpha_t\equiv k_1(mod\,3)$ *і* $\psi(c_1)=\begin{cases}1 \text{ при } c_1\neq 0,\\ 0 \text{ при } c_1=0.\end{cases}$

Доведення. Очевидно, що

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_1-1}} \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1a_2\dots a_{k_1-1}c_1}).$$

Згідно з властивістю a) леми 4.2.1 при $c_1 \neq 0$, отримаємо

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = q^{c_1}_{\alpha_r}(1-q_{\alpha_r}) \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_1-1}} q_0^{\sum\limits_{i\in(3n-2)} a_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{i\in(3n-1)} a_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{i\in(3n)} a_i},$$

де $\alpha_r \equiv k_1 - 1 (mod\, 3)$.

Згідно з властивістю a) леми 4.2.1 при $c_1 = 0$, отримаємо

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = q_{\alpha_t} \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_1-1}} q_0^{\sum\limits_{i\in(3n-2)} a_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{i\in(3n-1)} a_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{i\in(3n)} a_i},$$

де $\alpha_t \equiv k_1 (mod\, 3)$.

Об'єднавши два розглянуті випадки, отримаємо рівність (4.2.2). □

Провівши аналогію можна узагальнити результат для множини $\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m}$.

Теорема 4.2.1. *Міра Лебега напівциліндра* $\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m}$ *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m}) = \frac{q^{c_m}_{\alpha_r}(1-q_{\alpha_r})^{\psi(c_m)}}{q^{\psi(c_m)-1}_{\alpha_t}} \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1},a_{k_1+1},\dots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_m-1\\ i\neq k_1, i\neq k_2,\dots, i\neq k_{m-1}}} q_0^{\sum\limits_{i\in(3n-2)} a_i} \cdot q_1^{\sum\limits_{i\in(3n-1)} a_i} \cdot q_2^{\sum\limits_{i\in(3n)} a_i},$$

де $\alpha_r \equiv k_m - 1 (mod\, 3)$, $\alpha_t \equiv k_m (mod\, 3)$ *і* $\psi(c_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{якщо } c_m = 0. \end{cases}$

Доведення. Очевидно, що

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\dots k_m}_{c_1c_2\dots c_m}) = \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{k_1-1},\dots,a_{k_{j-1}+1},\dots,a_{k_j-1},\dots,a_{k_{m-1}+1},\dots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0\\ 1\leqslant i\leqslant k_m-1\\ i\neq k_1, i\neq k_2,\dots, i\neq k_m}} \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1\dots a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}\dots a_{k_m-1}c_m}).$$

Далі доведення аналогічне до доведення леми 4.2.2. □

Узагальнимо попередню задачу.

Множина чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ – символів.

Означення 4.2.2. Нехай (c_m) – задана послідовність цілих невід'ємних чисел. Множиною чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ – символів називають множину виду:

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \{x : x = \overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Із властивостей напівциліндрів випливає $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Теорема 4.2.2. *Міра Лебега множини $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ – символів рівна нулю, тобто*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0.$$

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = K$ і $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i} = K_m$. Тоді очевидно, що $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots \supset K$, тобто $K \subset K_m$ і $\lambda(K) \leqslant \lambda(K_m)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Маємо $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) \leqslant \lambda(\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i}) \to 0$.

Отже, $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0$. Що і треба було довести. □

Теорема 4.2.3. *Множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ – символів є:*

1) точкою $\overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, якщо $k_m - k_{m-1} = 1,\ m \in \mathbb{N}$ для всіх m і $k_1 = 1$;

2) ніде не щільною множиною при $k_m - k_{m-1} > 1,\ m \in \mathbb{N}$.

Доведення. 1) Якщо $k_1 = 1$ і $k_m - k_{m-1} = 1$ для довільного $m \in \mathbb{N}$, то напівциліндр $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \overline{\Delta}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ у $\overline{Q_3}$ – зображенні при всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є точкою.

2) Якщо $k_m - k_{m-1} = 1$ починаючи з деякого номера $p > 1$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є зліченною.

У випадку $k_m - k_{m-1} > 1$ для нескінченної множини номерів m, множина із послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ – символів є континуальною. Тобто при $k_m - k_{m-1} > 1,\ m \in \mathbb{N}$ довільну кількість разів, множина $\overline{\Delta}^{k_1 k_2 \ldots k_m \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}$ є ніде не щільною. $\square$

Множина чисел з обмеженнями на вживання $\overline{Q_3}$ – символів.

Теорема 4.2.4. *Множина чисел*

$$C[\overline{Q_3}, V] = \{x : x = \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},\ a_n \in V \subseteq \mathbb{N}_0\}$$

з обмеженнями на вживання $\overline{Q_3}$ – символів є:

1) піввідрізком $[0, 1)$, якщо $V = \mathbb{N}_0$;

2) ніде не щільною, якщо $V \neq \mathbb{N}_0$ і n – нескінченна множина значень.

Доведення. 1) Якщо $V = \mathbb{N}_0$, то множина

$$C[\overline{Q_3}, V] = \bigcup_{a_n \in V} \overline{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = [0, 1).$$

Для доведення 2) достатньо показати, що $C[\overline{Q_3}, \mathbb{N}_0 \setminus \{c\}]$ є ніде не щільною. Доведення цього факту аналогічне до доведення теореми 4.1.2. $\square$

Теорема 4.2.5. *Міра Лебега множини $C[\overline{Q_3}, V]$ обчислюється за однією із формул*

$$\lambda(C[\overline{Q_3}, V]) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{U}_k)}{\lambda(U_{k-1})}\right)$$

$$\text{або}\ \ \lambda(C[\overline{Q_3}, V]) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})},$$

де $U_0 = [0, 1)$, U_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{U}_k = U_{k-1} \backslash U_k$.

Доведення. У доведенні теореми 4.1.2 ці формули були вже виведені та позначені відповідно (4.1.3) і (4.1.4). $\square$

Висновки до розділу 4

У цьому розділі досліджувалось нескінченно-символьне кодування (назване $\overline{Q_3}$ – зображенням) чисел півврідрізка $[0;1)$, що є модифікацією (перекодуванням) відомого трисимвольного поліосновного Q_3 – зображення дійсних чисел, включаючи класичне трійкове.

Інтерес до $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел ми мотивуємо наступними аргументами:

1) дане перекодування встановлює місток між зображеннями дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітами;

2) геометрія $\overline{Q_3}$ – зображення, на відміну від Q_3 – зображення, несамоподібна;

3) циліндр $\overline{Q_3}$ – зображення, взагалі кажучи, не є проміжком, що є принциповою відмінністю від Q_3 – зображення.

Основними результатами цього розділу є:

— опис властивостей циліндричних множин для $\overline{3}$ – та його узагальнення $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел (пункти 4.1.2 і 4.2.1, відповідно);

— опис властивостей напівциліндричних множин, зокрема вираз їх міри Лебега, $\overline{Q_3}$ – зображеннях чисел (пункт 4.2.2);

— опис тополого-метричних властивостей множин канторівського типу (пункти 4.1.4 та 4.2.2).

Результати цього розділу висвітлювались у публікаціях [1^a, 2^a] та доповідались на конференціях [6^a, 7^a, 8^a, 9^a, 10^a].

ВИСНОВКИ

Функції зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, зокрема сингулярні (сингулярні монотонні, сингулярні немонотонні, сингулярні ніде не монотонні) та «кусково-сингулярні» функції, є актуальним об'єктом сучасних досліджень. Але їх загальна теорія мало розвинена, її розвиток реалізується в основному за рахунок індивідуальних теорій (окремих функцій та сімей функцій, залежних від скінченної кількості параметрів). Ця проблема пов'язана з пошуком ефективних засобів їх задання та вивчення.

В останні роки для вирішення цієї проблеми все частіше використовують різні системи кодування дійсних чисел зі скінченним та нескінченним, сталим та змінним алфавітами. До них належить і класичне трійкове зображення чисел, і його узагальнення — поліосновне Q_3 – зображення чисел, яке також має самоподібну геометрію, але його цифри втрачають роль чисел і виступають лише в ролі індексів. Саме це зображення ми використовували для задання (конструювання, моделювання) функцій з нетривіальною множиною особливостей диференціального характеру, їх ґрунтовного вивчення та побудови нового нескінченно-символьного зображення з несамоподібною геометрією.

В дисертаційній роботі отримано такі результати:

— введено в розгляд клас P функцій, які зберігають цифру 1 у заданому поліосновному Q_3 – зображенні чисел, і доведено, що він є континуальним;

— доведено, що клас P_c неперервних функцій з класу P є зліченним; функції цього класу не можуть мати більше двох нескінченних рівнів, причому сім'ї P_1 і P_2 функцій, що мають один нескінченний рівень та два нескінченних рівні відповідно, також є зліченними;

— встановлено, що у класі P_c існує лише два бієктивних відображення відрізка $[0;1]$ на себе, це тотожне перетворення та інверсор цифр;

— детально вивчено властивості інверсора цифр числа, а саме: доведено, що ця функція є лінійною при $q_0 = q_2$ і сингулярною при $q_0 \neq q_2$, описано диференціальні, інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості і встановлено ряд функціональних співвідношень;

— доведено, що при $q_0 \neq q_2$ кожна функція з класу P_c, за виключенням тотожного перетворення, має сингулярні властивості, а саме: є сингулярною на кожному проміжку спадання і лінійною на проміжку зростання;

— для найпростіших представників f_1 і g класів P_1 і P_2 відповідно, визначених умовами симетрій, описано тополого-метричні, диференціальні, інтегральні, варіаційні, самоафінні та фрактальні, локальні та глобальні властивості;

— сконструйовано та вивчено несамоподібне нескінченно-символьне зображення чисел, яке є модифікацією трисимвольного Q_3 – зображення, описано його геометрію (тополого-метричні властивості циліндрів та напівциліндрів);

— розв'язано кілька метричних задач стосовно множин канторівського типу чисел, визначених умовами на їх зображення.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною структурою (поведінкою), пов'язаних з сингулярними та кусково-сингулярними функціями, сингулярними розподілами ймовірностей, скінченно-символьними системами кодування (зображення) дійсних чисел, інтерес до яких постійно зростає.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути корисними при розв'язанні задач теорії неперервних функцій дійсної змінної, метричної теорії чисел та теорії сингулярних розподілів випадкових величин.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агаджанов А. Н. Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами / Агаджанов А. Н. // Доклады академии наук, 2014, том 454, № 5, — с. 503-506.
2. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций / П. С. Александров. — М.: ОГИЗ, 1948. — 411 с.
3. Александров П. С. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности / П. С. Александров, В. А. Пасынков. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
4. Антоневич А. Б. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход / А. Б. Антоневич. — Минск: Университетское, 1988. — 232 с.
5. Барановський О. М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. — К.: Наукова думка, — 2013. — 287 с.
6. Барановський О. М. Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського / О. М. Барановський // Фрактальний аналіз та суміжні питання 1998. — № 2. — С. 215–221.
7. Баренблатт Г. И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг / Г. И. Баренблатт. — Пер. с англ., Учебное пособие, Изд. Дом Интеллект, 2009. — 216 с.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. — М.: Наука, 1986. — 432 с.

9. Боревич З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. — 3-е, дополн. изд. — М. : Наука, 1985. — 504 с.
10. Бурбаки Н. Элементы математики, кн.4: Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. — М. : Наука, 1970. — 328 с.
11. Безикович А. С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференциируемости / А. С. Безикович // Матем. сб. — 1924. — vol.31, № 4. — С. 529–556.
12. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация / П. Биллингслей. — Москва : Мир, 1969. — 238 с.
13. Василенко Н. А. Фрактальні властивості неперервних ніде не монотонних та недиференційовних функцій: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.01 «математичний аналіз» / Н. А. Василенко. — Київ, 2014. — 20 с.
14. Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей / М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова — 2011. — № 12. — С. 152-165.
15. Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями / М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова — 2013. — № 14. — С. 174-186.
16. Виннишин Я. Ф. О свертках сингулярных функций распределения / Я. Ф. Виннишин // Стохастический анализ и его приложения. — Киев: Ин-т математики АП. УССР, 1989. — С. 14-17.
17. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. — М.: Мир, 1967. — 256 с.
18. Гельфонд А. О. Об одном общем свойстве систем счисления / А. О. Гельфонд. — Известия академии наук СССР. Серия математи-

ческая. — 23 (1959). — С. 809-814.

19. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов / А. Гилл. — Москва : Наука, 1962. — 272 с.
20. Гончаренко Я. В. Фрактальні властивості множин точок недиференційованості абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу / Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2001. — №65. — С. 25-32.
21. Гончаренко Я. В. Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел / Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова — 2013. — № 15. — С. 100-118.
22. Грубер П. М. Геометрия чисел / П. М. Грубер, К. Г. Леккеркеркер. — Москва: Наука, 2008. — 727 с.
23. Гуревич В. Теория размерности: Пер. с англ. / В. Гуревич, Г. Волмэн. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1948. — 232 с.
24. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — Киев: Вища шк. — 1989. — 152 с.
25. Кавун Н. И. Обоснование теории вещественных чисел по способу А.Н. Колмогорова / Н. И. Кавун// Успехи математических наук, 1947. — т. II, вип. 5. — С. 119-229.
26. Калашніков А. В. Сингулярні та ніде не монотонні функції як розв'язки систем функціональних рівнянь: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук: спец.: 01.01.01 «математичний аналіз» / А. В. Калашніков. — Київ, 2014. — 20 с.
27. Калашніков А. В. Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського / А. В. Калашніков, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1.

Фізико-математичні науки. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова — 2011. — № 12. — С. 59-65.

28. Калашніков А. В. Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков // Труды ИПММ НАН Украины — 2011. — Т. 23. — С. 180-191.
29. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления / В. Н. Касаткин. — К.: Вища школа, 1982. — 96 с.
30. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. / Дж. В. С. Касселс. — М. : Мир, 1965. — 422 с.
31. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды / Ж.-П. Кахан. — М.: Мир, 1973. — 302 с.
32. Кнут Д. Искусство программирования / Д. Кнут. — Т.4, Вып. 3: генерация всех сочетаний и разбиений. — Москва : ООО "И.Д. Вильямс", 2007. — 208 с.
33. Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій / В. В. Коваль // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова — 2004. — № 5. — С. 292-299.
34. Козырев С. Б. О топологической густоте извивающихся функций / С. Б. Козырев // Мат. заметки. — 1983. — № 1. — С. 71-76.
35. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. М. Колмогоров, С. В. Фомін. — К.: Вища шк., 1974. — 456 с.
36. Колмогоров А. Н. К обоснованию теории вещественных чисел / А. Н. Колмогоров// Успехи математических наук. — 1946. — Т.1. — Випуск 1(11). — С. 217-219.
37. Котова О. В. Інваріантні точки одного неперервного, недиференційованого відображення / О. В. Котова // Науковий часопис НПУ імені

М. П. Драгоманова. — Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова — 2008. — № 9. — С. 151–160.

38. Кравченко В. Ф. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн / В. Ф. Кравченко, В. М. Масюк. — Москва: Радиотехника, 2002. — 80 с.

39. Кроновер К. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / К. Кроновер. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.

40. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег. — Москва: Гостехтеоретиздат, 1934. — 324 с.

41. Лисовик Л. П. Применение конечных преобразователей для задания фрактальных кривых / Л. П. Лисовик // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 3. — С. 11–22.

42. Лисовик Л. П. О вещественных функциях задаваемых преобразователями / Л. П. Лисовик, О. Ю. Шкаравская // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 1. — С. 82–93.

43. Лисенко І. М. Модифікація класичного двійкового зображення / І. М. Лисенко, М. В. Працьовитий // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: Збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2011 рік, 9-10 лютого 2012 року. Частина 2./ Укл. Г.І.Волинка, О.В.Уваркіна, О.П.Симоненко, О.П.Ємельянова. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 10-13 с.

44. Лоэв М. Теория вероятностей / М. Лоэв. — Москва: Из-во иностран. лит-ры., 1962. — 720 с.

45. Лузин Н. Н. О строении измеримых функций (1934) / Н. Н. Лузин // Собр. соч. — 1998. — М.: Изд-во АН СССР, 1953. — Т.1 — С. 343–362.

46. Лузин Н. Н. Теория финкций действительного переменного / Н. Н. Лузин. — М. Гостехиздат, 1948. — 319 с.

47. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач. — М.: Наука, 1979. — 424 с.
48. Маслюченко В. К. Регулярні послідовності нормованих просторів і сукупна неперервність нарізно неперервних відображень / В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук // Буковинський математичний журнал. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. — Т.3, №3-4. — С. 115–119.
49. Медведев Ф. А. Очерк истории теории функций действительного переменного / Ф. А. Медведев. — Москва: Наука. — 1975. — 248 с.
50. Назаренко М. О. Поточкова фрактальна апроксимація функцій / Д. Ю. Мітін, М. О. Назаренко // Збірник праць інституту математики НАН України. — Київ, 2007. — Т.4, №1: Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. — С. 200–211.
51. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1974. — 480 с.
52. Нахушевич А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушевич. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с. — ISBN: 5-9221-0440-3.
53. Окстоби Дж. Мера и категория: Пер. с англ. / Дж. Окстоби. — Москва : Мир, 1974. — 160 с.
54. Панасенко О. Б. Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій / О. Б. Панасенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 160–167.
55. Панасенко О. Б. Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів / О. Б. Панасенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2008. — № 9. — С. 124-132.
56. Панасенко О. Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде недиференційовної функції / О. Б. Панасенко // Український математичний журнал. — 2009. — Т.61, № 9. — С. 1225-1239.

57. Панасенко О. Б. Фрактальні властивості графіків деяких класів неперервних ніде не диференційовних функцій: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец.: 01.01.01 «математичний аналіз» / О. Б. Панасенко. — Київ, 2010. — 20 с.
58. Пелюх Г. П. Введение в теорию функциональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский. — Киев: Наук. думка, 1974. — 119 с.
59. Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов / А. Г. Постников // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1960. — Т. 57. — С. 1–84. — Доступно по адресу http://mi.mathnet.ru/book1101.
60. Постников А. Г. Вероятностная теория чисел / А. Г. Постников. — Москва : Знание, 1974. — 62 с.
61. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации / А. А. Потапов // Радиотехника и электроника. — 2001. — № 3. — С. 261-271.
62. Працевитый Н. В. Один класс случайных величин с сингулярным распределением / Працевитый Н. В. // Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 78-90.
63. Працевитый Н. В. Распределения случайных величин с независимыми Q-символами / Працевитый Н. В. // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 92-101.
64. Працевитый Н. В. Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра / Н. В. Працевитый // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — 1992. — С. 77-83.
65. Працьовитий М. В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів / Працьовитий М. В. // Доп. НАН України. — 1996. — №5. — С. 32-37.

66. Працьовитий М. В. Аномально фрактальні і суперфрактальні об'єкти / М. В. Працьовитий // Наук. зап. КДПІ імені М. П. Драгоманова. — Київ: КДПІ імені М. П. Драгоманова, 1992. — С. 309-310.
67. Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий // Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012. — 68 с.
68. Працьовитий М. В. Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень / М. В. Працьовитий, О. М. Барановський // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 59–76.
69. Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.
70. Працьовитий М. В. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, В. К. Безбородов // Український математичний журнал. — 2009. — Т.61. — № 9. — С. 1225-1239.
71. Працьовитий М. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков // Український мат. журнал. — 2013. — Т. 65. — № 3. — С. 405-417.
72. Працьовитий М. В. Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — Київ: Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова, 2003. — № 4. — С. 207-215.
73. Працьовитий М. В. Диференціальні і фрактальні властивості одно-

го класу самоафінних функцій / М. В. Працьовитий, О. Б. Панасенко // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.— 2009. — Т. 70.— С. 128-139.

74. Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы / Н. В. Працевитый // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. — С. 36-46.

75. Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції / М. В. Працьовитий // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2002. — № 3. — С. 351-362.

76. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

77. Працьовитий М. В. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр / Працьовитий М. В., Скрипник С. В. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 15. — С. 134-143.

78. Працьовитий М. В. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення дійсних чисел / М. В. Працьовитий, О. Ю. Фещенко // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2003. — № 4. — С. 260-269.

79. Працьовитий М. В. Перетворення простору, що зберігають самоподібну фрактальну розмірність / М. В. Працьовитий, С. А. Сотникова // Труды Ин-та прикл. матем и мех. Том 13. — Донецк, 2006. — С. 142-147.

80. Працьовитий М. В. Структура доскональних множин і сингулярних розподілів ймовірностей в $\mathbb{R}_n$ / М. В. Працьовитий// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. —

2009. — С. 179–189.

81. Працьовитий М. В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнисних теорій / М. В. Працьовитий// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 189–216.
82. Сендов Бл. Х. Двоично собственно-подобные фрактальные функции / Бл. Х. Сендов // Фундаментальная и прикладная математика. — 1999. — Т. 5, № 2. — С. 589-595.
83. Серпинскiй В. Элементарный примѣръ возрастающей функцiи имѣющей почти всюду производную равную нулю / В. Серпинскiй // Математическiй сборникъ. — 1916. — Т. 30, № 3.
84. Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения /А. П. Стахов. М., «Знание», 1979.
85. Торбин Г. М. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками / Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев : Ин-т мат. АН Украины, 1992. — С. 95-104.
86. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш // Москва : Наука, 1980. — 464 с.
87. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый // К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.
88. Федерер Г. Геометрическая теория меры / Г. Федерер // Москва : Наука, Гл. ред физ.-мат. лит., 1987. — 760 с.
89. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — Москва : Мир, 1991. — 260 с.
90. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер // Москва : Мир, 1984. — Т.27. — 752 с.
91. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц // 6-е изд. М. : Наука, 1966. — Т.2. —

800 с.

92. Фомин С. В. Системы счисления / С.В.Фомин // М., «Наука», 1975.
93. Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев // М. : Наука, 1980. — 576 с.
94. Шкаравская О. Ю. Аффинные отображения, задаваемые конечными преобразователями / О. Ю. Шкаравская // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 5. — С. 178-181.
95. Янко В. Г. Про два класи неперервних ніде не диференційовних функцій / В. Г. Янко // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 226-229.
96. Albeverio S. On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures / S. Albeverio, V. Koval, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Random Operators and Stochastic Equations. — 2008. — 16. — № 2. — P. 181-211.
97. Albeverio S. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Ergod.Th. Dynam. Sys. — 2004. — 24. — P. 1-16.
98. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension / S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin // Central European Journal of Mathematics. — 2008. 6, no. 1. — P. 119-128.
99. Banach S. Über die Bairesche Kategorie gewisser Functionenmengen / S. Banach // Stud. Math. — 1931. — T. 3, № 6. — C. 174-179.
100. Banach S. Sur les fonctons calculables / S. Banach, S. Mazur // Ann. Soc. Pol de Math. — 1937. — Vol. 16. — P. 223.
101. Billingsley P. The singular function on bold play / P. Billingsley // Am. Sci. — 1983. — 71. — P. 392-397.
102. Bruckner A. M. Differentiation of real functions / A. M. Bruckner. — Lecture Notes in Math. — изд. — Berlin : Springer-Verlag, 1978. — 216 с.

103. Buczolich Z. Irregular l-sets on the graphs of continuous functions / Z. Buczolich // Acta Math. Hungar. — 2008. — T. 121, № 4. — P. 371-393.

104. Denjoy A. Sur quelques points de la theorie des fonctions / A. Denjoy. — C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932), 44–46.

105. Denjoy A. Sur une fonction de Minkowski / A. Denjoy. — C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 44–47.

106. Edgar G. A. Measure, topology and fractal geometry / G. A. Edgar. — New-York: Springer, 1990. — 232 p.

107. Galambos J. Representations of real numbers by infinity series / J.Galambos. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 146 p.

108. Falconer K. J. The geometry of fractal sets / K. J. Falconer. — Cambridge University Press, 2002. — 162 p.

109. Falconer K. J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. — John Wiley, Chichester, 2003. — 367 p.

110. Hausdorff F. Dimension und ausseres Mass / F. Hausdorff // Math. Ann. — 1918. — 79. — P. 157-179.

111. Hellinger E. Die othogonalinvarianten quadratischer formen von unendlichvielen variabelen / E. Hellinger // Ph.D. thesis, GËottingen, 1907.

112. Hensly D. Continued fraction, Cantor sets, Hausdorff dimension and functional analysis / D. Hensly // Number Theory. — 1992. — 40, N°3. — P. 336-358.

113. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity / J. E. Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — 30. — P. 713-747.

114. Hopcroft J. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd Edition). / John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman. — Pearson Education, 2008. — 554 p.

115. Hornich H. Uber beliebige Teilsummen absolute konvergenter Reihen / H. Hornich. — Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), — 316-320 p.

116. Levy P. Sur les sries don't les termes sont des variables independantes / P. Levy // Studia math., 3,1931. — P. 119-155.

117. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature / B. B. Mandelbrot. — New York: Freeman and Co., 1983. — 540 p.

118. Marsaglia G. Random variables with independent binary digits / G. Marsaglia // Ann.Math.Statist. — 1971.— №42.— P. 1922-1929.

119. Mazurkiewicz S. Sur les fonctions non dérivables / S. Masurkiewicz // Stud Math. — 1931. — T. 3. — P. 92-94.

120. Minkowski H. Verhandlungen des III internationalen mathematiker-kongresses in Heidelberg / H. Minkowski. — 1904, Also in Gesammelte Abhandlungen, 1991, vol 2, pp. 50-51 for the ? function.

121. Minkowski H. Gesammeite Abhandlungen / H. Minkowski. — Berlin, 1911. — Bd 2. — P. 50-51.

122. Olsen L., Winter S. Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures / L. Olsen, S. Winter // J. London Math. Soc. — 2003. — 2(67), № 1. — P. 103-122.

123. Peter R. Massopust. Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets / by Peter R. Massopust. — Academic Press; 1 edition (January 18, 1995), 383 p.

124. Pratsiovytyi M., Kyurchev D. Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements / M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev // Random Operators and Stochastic Equations, 2008. — P. 91-101.

125. Riesz F., Sz.-Nagy B. Functional analysis, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications Inc., New York, 1990, Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original. First published in French in 1952 by the Hungarian Academy of Science. MR MR1068530 (91g:00002)

126. Salem R. On some singular monotonic function which are strictly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.

127. Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory / F. Schweiger. — Oxford: Clarendon Press, 1995. — 320 p.

128. Sierpiński W. O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi / W. Sierpiński // Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III. — 1911. — Vol. 4. — P. 56-77.

129. Sierpiński W. Une exemple elementaire d'une fonction croissante qui a presque partout une derivee nulle / W. Sierpiński // Gion. Math. Battaglini(3). — 1916. — 1. — P. 314-334.

130. Sierpiński W. Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries / Wacław Sierpiński // Oeuvres choisies / Wacław Sierpiński. — Warszawa : PWN, 1974. — Vol. 1: Bibliographie, théorie des nombres et analyse mathématique. — P. 236-254.

131. Solomyak B. Measure and dimension for some fractal families / B. Solomyak // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1998. — 124. — P. 531-548.

132. Thim Y. Continuous nowhere differentiable functions / Y. Thim. — Master thesis of science programme. Department of Mathematics, 2003. — 94 p. http://epubl.luth.se/1402-1617/2003/320/LTU-EX-03320-SE.pdf.

133. Yang X. L. Construction of the Kiesswetter-like Fractal Functions(I). / X. L. Yang // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. — 2002. — nr 26. — P. 865-875.

134. Zamfirescu T. Most monotone functions are singular / T. Zamfirescu // Amer. Math. Mon. — 1981. — 88. — P. 47-49.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

1[a]. *Замрій І. В.* Модифіковане $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел та його геометрія / Замрій І. В. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2). — С. 22-33.

2[a]. *Замрій І. В.* Модифікація класичного трійкового зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом / Замрій І. В. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 86-96.

3[a]. *Замрій І. В.* Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь / Працьовитий М. В., Замрій І. В. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 156-167.

4[a]. *Замрій І. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // Нелінійні коливання (ISSN 1562-3076). Том 18, № 1. — Інститут математики НАН України. — 2015 р. — С. 55-70.

5[a]. *Замрій І. В.* Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3 – зображення числа / Працьовитий М. В., Замрій І. В. // Буковинський математичний журнал. — Т.3, № 3-4. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. — С. 142-159.

6[a]. *Zamriy I. V.* On a system of expansion of numbers with infinite alphabet / Zamriy I. V. // International conference on algebra dedicated to 100^{th} anniversary of S. M. Chernikov. August 20-26, 2012, Dragomanov National

Pedagogical University, Kyiv, Ukraine. — P. 178.

7[a]. *Zamriy I. V.* Properties of distributions of random variables related to different systems of representation / Zamriy I. V., Sukholit Yu. Yu. // International conference modern stochastics: theory and application III dedicated to 100^{th} anniversary of B. V. Gnedenko and 80^{th} anniversary of M. I. Yadrenko. September 10-14, 2012, Kyiv, Ukraine. Taras Shevchenko National University of Kyiv. — P. 14.

8[a]. *Замрій І. В.* Модифіковане $\overline{Q_3}$ – зображення дійсних чисел та його застосування / Замрій І. В. // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», присвячена 80-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля, 13-14 грудня 2012 року, Київ, Україна. — С. 61-62.

9[a]. *Замрій І. В.* Множини чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$ - символів та з обмеженням на вживання цифри / Замрій І. В. // Єдність навчання і наукових досліджень — головний принцип університету: Збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2012 рік, 9-10 лютого 2013 року / Укл. Г. І. Волинка, О. В. Уваркіна, О. П. Ємельянова. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. — С. 246-249.

10[a]. *Замрій І. В.* Напівциліндри і множини чисел з фіксованою послідовністю $\overline{Q_3}$ – символів / Працьовитий М. В., Замрій І. В. // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26-27 червня 2013 р. — К.: НУХТ, 2013 — С. 46-47.

11[a]. *Замрій І. В.* Локальні властивості одного класу функцій з $C[0,1]$ / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка, 23-30 червня 2013 р., Севастополь, Україна — С. 236-237.

12[a]. *Zamriy I. V.* Sets of numbers with restrictions on use of $\overline{Q_3}$ – symbols / Zamriy I. V. // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine, L'viv, July 08-13, 2013 — P. 224.

13[a]. *Zamriy I.V.* Modified $\overline{Q_3^*}$ – representation, features and criteria of rationality (irrationality) representation of real numbers / Zamriy I. V. // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. September 16-20, 2013. — Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine & Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University. — P. 115-116.

14[a]. *Замрій І. В.* Інверсор Q_3^* – зображення дробової частини дійсного числа / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23-24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна: Матеріали конференції. — С. 63.

15[a]. *Замрій І. В.* Трибін-функція та її властивості / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15 - 17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 91.

16[a]. *Замрій І. В.* Локальна структура і фрактальні властивості функцій-перетворювачів цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // IV Міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. — Чернівецький національний університет, 30 червня - 5 липня, 2014 р. — С. 54-55.

17[a]. *Zamriy I. V.* Inversor of digits of Q_3 – representation of fractional part of real number as a distribution function of random variable / Pratsiovytyi M. V., Zamriy I. V. // International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». Kyiv, Ukraine, April 7-10, 2015. — p. 23.

18[a]. *Замрій І. В.* Властивості функції-перетворювача цифр $\overline{Q_3}$ – зображення дробової частини дійсного числа / Замрій І. В., Працьовитий М. В. // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. — Київ, Україна, 23-25 квітня 2015 р. — с. 37.