Відгук
офіційного опонента Маслюченка Володимира Кириловича
на дисертацію Замрій Ірини Вікторівни
"Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями",
подану на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

В сучасній математиці вживається дуже багато способів задання, чи як кажуть, кодування дійсних чисел, що розвивають десяткові, двійкові, трійкові зображення, зокрема, узагальненням трійкового зображення, є так зване, Q_3-зображення, введене М. В. Працьовитим у 1986 році. Воно узагальнює трійкове зображення, і будується на основі множини $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$, що складається з трьох додатніх дійсних чисел, таких, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$. У ньому довільне число $x \in [0,1]$ подається у вигляді

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$ і (α_n) – відповідна послідовність, що складається із цифр 0,1,2.

Основними об'єктами дослідження у дисертаційній роботі виступають клас P функцій $f: [0,1] \to [0,1]$, які зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні, і його підклас P_C неперервних функцій. Саме перехід від класичного трійкового зображення до його узагальнення, Q_3-зображення, приводить до дещо несподіваних локальних диференціальних властивостей функцій з класу P_C, зокрема, їх сингулярності на проміжках спадання при $q_0 \neq q_2$. В цьому полягає головний феномен дисертації.

Множина функцій, інваріантами яких є цифра 1 у Q_3-зображенні, вперше систематично вивчається саме у дисертації І.В. Замрій і в цьому полягає її актуальність і новизна.

Дана дисертація складається зі вступу і чотирьох розділів, також в ній є списки скорочень та умовних позначень, використаних джерел і публікацій автора (який налічує 18 публікацій, з них: п'ять наукових статтей, опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, 2 статті у наукових виданнях, що входять до наукометричних баз даних (Scopus, Zentralblatt MATH)), висновків до кожного розділу та загальних висновків. Основні результати викладені в розділах 2-4.

У **вступі** автор дисертації дає загальну характеристику роботи. Тут обґрунтовано актуальність роботи, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження. Вступ містить також інформацію про апробацію роботи, особистий внесок дисертанта, зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, публікації.

Перший розділ **«Концептуальні засади дослідження»** складається з 10 підрозділів і носить допоміжний характер. Він присвячений огляду літератури за тематикою дослідження, систематизації теоретичних відомостей про об'єкти дослідження та формулюванню означень, базових понять та фактів.

У другому розділі **«Інверсор цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа»**, який складається з десяти підрозділів, розглядається фіксоване Q_3-зображення чисел відрізка [0,1] і дійсні функції f дійсної змінної x, визначені на [0; 1] умовами на Q_3-зображення їх значень:

$$y = f\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \qquad \text{де } \gamma_n = \gamma_n(y) = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

такі, що для будь-якого $x \in [0; 1]$ цифра 1 у Q_3-зображеннях чисел $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $y = f(x) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ знаходиться на тих самих місцях, тобто $\gamma_n = 1 \iff \alpha_n = 1$. Їх називають функціями, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел. Доведено, що множина P таких функцій є континуальною.

Основним об'єктом дослідження цього розділу є єдина неперервна строго спадна функція з класу P – інверсор $I(x)$ цифр Q_3-зображення чисел. В дисертації показано, що вона є сингулярною при $q_0 \neq q_2$, ґрунтовно вивчено її диференціальні, інтегральні та фрактальні властивості. Для функції $I(x)$ знайдено еквівалентне означення, як функції, що є розв'язком системи трьох функціональних рівнянь, та встановлено ряд функціональних співвідношень.

Основним розділом дисертаційного дослідження є розділ 3 **«Неперервні функції, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел».** Він складається з п'яти підрозділів і присвячений неперервним функціям з класу P, які при $q_0 \neq q_2$, за виключенням інверсора та тотожного перетворення, є нетривіальними сумішами абсолютно неперервних та сингулярних функцій, а саме: на проміжках зростання – лінійними, а на проміжках спадання – сингулярними.

В цьому розділі доведено, що множина P_C неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел є зліченною, крім того, зліченними є і її підмножини: множина функцій, всі рівні яких скінченні; множина функцій, що мають один нескінченний рівень та множина функцій, що мають два нескінченних рівня. Доведено, що не існує неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні чисел, таких, що мають більше ніж два нескінченних рівня.

Досліджено локальні та глобальні структурні, тополого-метричні, самоафінні та фрактальні, варіаційні, інтегральні та диференціальні властивості двох представників f_1 та g, які є єдиними розв'язками відповідних систем функціональних рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = f\big(I(x)\big), \\ f\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right) = \Delta^{Q_3}_{(02)} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} g\big(I(x)\big) = I\big(g(x)\big), \\ g\left(\Delta^{Q_3}_{(0)}\right) = \Delta^{Q_3}_{(02)}, \\ g\left(\Delta^{Q_3}_{(2)}\right) = \Delta^{Q_3}_{(20)}. \end{cases}$$

У розділі 4 **«Нескінченно-символьні кодування дійсних чисел, що є модифікацією трисимвольних»** запропоновано нові нескінченно-символьні зображення дійсних чисел, а саме $\overline{3}$- та $\overline{Q_3}$-зображення, які є модифікаціями класичного трійкового та поліосновного трисимвольного Q_3-зображення чисел. Тут виникло багато проблем, які не виникали у раніше досліджуваних перекодуваннях двосимвольних систем. Тому для однозначності $\overline{Q_3}$-зображення $\bar{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ дійсного числа

$$x = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_1}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_2}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{\alpha_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{\alpha_{3n}}\ldots},$$

де a_n – «довжина» серії однакових послідовних Q_3-цифр, було накладено ряд умов.

У роботі введено геометрію розглянутих зображень, тобто тополого-метричні властивості циліндрів $\bar{\Delta}^{\overline{Q_3}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ та напівциліндрів $\bar{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Доведено, що геометрія нескінченно-символьних зображень, на відміну від Q_3-зображення, несамоподібна, і, взагалі кажучи, циліндр $\overline{Q_3}$-зображення не є проміжком.

Також розв'язано декілька метричних задач відносно множин чисел, визначених умовами на їх $\overline{Q_3}$-зображення, зокрема, множин $\bar{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \{x :\ a_{k_i}(x) = c_i, i \in \mathrm{N}\}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{Q_3}$-символів.

Є кілька непринципових зауважень до роботи.

1. На мій погляд у роботі немає органічного поєднання четвертого розділу з попередніми, більше того наведено небагато аргументів, що підкріплюють інтерес до запропонованої модифікації трисимвольного Q_3 - зображення чисел,
2. В роботі детально вивчається власне три функції з нескінченного класу неперервних функцій, які зберігають цифру 1 у Q_3-зображенні

чисел (інверсор і найпростіші функції, які мають один та два нескінченні рівні), тоді, коли можна було б конструктивно описати довільну функцію цього класу, яка залежна, взагалі кажучи, від нескінченної кількості параметрів, які відповідають моментам зміни монотонності.

3. В четвертому розділі відрізняються позначення одного й того ж поняття, а саме: множина невідємних цілих чисел позначається $\mathbb{Z}_0$, а на с. 126 – зустрічається позначення $\mathbb{N}_0$.
4. Мова дисертації загалом добра, але трапляються некоректності: «при умові» краще замінити на «за умови», «згідно властивостей» – на «згідно з властивостями», «належить множині» – на «належить до множини», «за виключенням» – на «за винятком», «більш простим» – на «простішим», «півінтервал» – на «напівінтервал». Прізвище Hallinger слід транскрипувати як Геллінґер, а не Хелінгер, як на с. 7.
5. У списку літератури ([83] на с. 139, [111] на с. 141) є друкарські помилки..

Звичайно, ці зауваження мають дорадчий характер і не впливають на остаточну позитивну оцінку роботи. Слід також відмітити правильну транслітерацію прізвища Гаусдорф.

Отримані результати є новими, важливими, строгими і достатньо обґрунтованими. Їх істинність не викликає сумніву. Отже, результати дисертаційної роботи слід вважати науково обґрунтованими і такими, що мають теоретичне значення. У своїй сукупності вони роблять помітний внесок у теорію функцій дійсної змінної, теорію зображення дійсних чисел і теорію фракталів та мають деяку перспективу, зокрема, для вивчення випадків довільного Q_s-зображення та Q_s^*-зображення, що є узагальненням попереднього. Робота гарно оформлена, її результати правильно відображені у авторефераті. Вона пройшла належну апробацію на багатьох конференціях і наукових семінарах та її результати з достатньою повнотою опубліковані у «Нелінійних коливаннях», «Буковинському математичному журналі» та «Науковому часописі НПУ імені М. П. Драгоманова».

Враховуючи все вище сказане, вважаю, що за обсягом проведених наукових досліджень, актуальністю, науковою новизною та значимістю отриманих результатів, а також за кількістю і якістю публікацій, дисертаційне дослідження «Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями» задовольняє вимоги «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника» (постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор – Замрій Ірина Вікторівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича В.К. Маслюченко

В. К. Маслюченко

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 16.08.2016р.
Секретар ради /Ар[illegible]ченко Ж.Л./