

## ВІДГУК

офіційного опонента Назаренка Миколи Олексійовича  
на дисертацію Замрій Ірини Вікторівни  
”Фрактальні властивості функцій, пов’язаних з трисимвольними  
системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями”,  
подану на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертаційна робота Замрій І. В. виконана в галузі конструктивної теорії функцій. Вона присвячена неперервним функціям з фрактальними та нетривіальними локальними диференціальними властивостями, які визначені в термінах трисимвольного зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного трійкового зображення.

**Актуальність дослідження.** Незважаючи на те, що сингулярні функції в останній час все частіше привертають увагу дослідників, вони залишаються достатньо загадковим об’єктом вивчення, особливо у випадку їх немонотонності та ніде не монотонності. Основним об’єктом дослідження є, взагалі кажучи, немонотонні кусково-сингулярні функції, а саме: такі, що є сингулярними на проміжках спадання. У роботі знайдено природну нішу існування таких функцій, яка знаходиться на перетині специфічних систем кодування дійсних чисел ( $Q_3$  – зображення), способів задання функцій автоматами (перетворювачами цифр), геометрії числових рядів й поліосновних систем числення та фрактального аналізу, який ґрунтується на ідеях автомодельності (самоподібності, самоафінності тощо).

Загальний інтерес до сингулярних функцій у роботі посилений тим, що функції, які вивчаються є сумішшю сингулярних та абсолютно неперервних функцій. Цікавим є аспект дослідження про існування та кількість функцій з заданими властивостями, зокрема, властивостями рівнів. Як виявилось, такий підхід в дослідженні реалізується вперше, постановки задач є природними і дослідження відкривають цікаві перспективи.

**Структурний аналіз змісту дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, 4-х розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (134 найменувань) та списку публікацій автора (18 найменувань). Загальний обсяг роботи складає 147 сторінок машинописного тексту.

У **вступі** проведена актуалізація дослідження, сформульовано його мету і основні завдання, висвітлено наукову новизну і практичні значення отриманих результатів, анонсовано основні положення, які виносяться на захист.

Перший розділ **«Концептуальні засади дослідження»** є оглядовим і носить вступний характер. В ньому розглядаються ключові поняття, формулюються базові терміни та факти, які використовуються в роботі і наводиться короткий огляд літератури з теорії розвитку та дослідження сингулярних функцій.

Другий розділ **«Інверсор  $Q_3$  – зображення дробової частини дійсного числа»** присвячений вивченню властивостей неперервної строго спадної і сингулярної при  $q_0 \neq q_2$  функції залежної від трьох параметрів  $q_0, q_1, q_2$  ( $q_i > 0, i = \{0, 1, 2\}$  та  $q_0 + q_1 + q_2 = 1$ ), яку автор називає інверсором  $Q_3$  – зображення дробової частини дійсного числа.

Основними результатами цього розділу є доведення властивостей неперервності та монотонності інверсора, критерію його сингулярності, опису диференціальних та інтегральних, фрактальних (самоафінних, самоподібних, автомодельних, вивченню питання трансформації розмірності Гаусдорфа-Безиковича борелівських множин під дією інверсора) та функціональних властивостей.

У розділі 3 **«Неперервні функції, що зберігають цифру 1 у  $Q_3$  – зображенні чисел»** вивчається злічений клас неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у  $Q_3$  – зображенні дійсних чисел. Встановлено, що кожен представник цього класу має не більше двох нескінченних рівнів, при цьому кількість таких функцій, як і функцій зі скінченими рівнями, є зліченною. Доводиться, що інверсор є єдиним бієктивним відображенням відрізка  $[0; 1]$

на себе, за виключенням тотожного перетворення, з континуального класу функцій, для яких інваріантом є цифра 1 у  $Q_3$  – зображенні аргумента.

В цьому розділі також вивчаються глобальні та локальні (екстремальні) структурні, фрактальні та самоафінні властивості графіка, варіаційні, диференціальні та інтегральні, функціональні властивості двох представників функцій класу неперервних функцій, що зберігають цифру 1 у  $Q_3$  – зображенні чисел, які мають відповідно один і два нескінченні рівні.

У четвертому розділі **«Нескінченно-символьні кодування дійсних чисел, що є модифікаціями трисимвольних»** вводяться в розгляд та вивчаються нескінченно-символьні  $\bar{3}$  – та  $\overline{Q_3}$  – зображення дійсних чисел, які є деякою модифікацією (перекодуванням) відповідно класичного трійкового та його узагальнення –  $Q_3$  – зображення чисел. Основними результатами цього розділу є вивчення «геометрії» введених зображень в контексті опису властивостей циліндричних та напівциліндричних множин (зокрема, вираз їх міри Лебега та основного метричного відношення) й дослідженню тополого-метричних властивостей множин канторівського типу визначених умовами на цифри  $\bar{3}$  – та  $\overline{Q_3}$  – зображення чисел.

В цілому робота вдало структурована, основні розділи 2 – 4 є цілком автономними.

**Наукова новизна результатів, їх теоретичне та практичне значення.** Вцілому дисертаційну роботу умовно можна поділити на дві частини. В першій — побудовано злічений клас неперервних функцій, які зберігають цифру 1 (без її «примноження») у заданому  $Q_3$  – зображенні чисел. Вивчено масивність її підкласів, проведено аналіз локальних та глобальних структурних, самоафінних, автотомельних та фрактальних, варіаційних, диференціальних та інтегральних властивостей трьох яскравих представників функцій, що зберігають цифру 1 у  $Q_3$  – зображенні чисел. В другій частині розглядається модифікація  $Q_3$  – зображення дійсних чисел, яка ґрунтується на перекодуванні числа засобами нескінченного алфавіту. Вивчається «геометрія» введеної модифікації  $Q_3$  – зображення чисел та його тополого-метричні властивості.

Запропоновані прийоми та методи можуть бути використані для моделювання та дослідження функцій з нетривіальною локальною будовою і фрактальними властивостями, визначеними іншими інваріантами зображень.

**Ступінь обґрунтованості результатів дисертації.** Усі основні результати дисертаційного дослідження доведено повно, строго та математично коректно.

**Публікації та апробація результатів дисертації.** Результати дисертації своєчасно і повно викладені у 18 наукових роботах, 5 з яких це статті надруковані у виданнях, що входять до переліку фахових видань України. Результати дисертації пройшли належну апробацію. Вони доповідались на наукових семінарах та конференціях різних рівнів.

### **Зауваження.**

1. Дисертаційне дослідження містить чималу кількість описок та повторень, а саме:

- на ст. 35 зустрічається поняття простір послідовностей  $L^{(3)}$ , але не дано означення чи роз'яснення, що це за простір;
- на ст. 89 та 103 говориться про афінну еквівалентність фігур, але означення цього поняття немає;
- на ст. 38 використовується термін «випукла» функція замість «опукла»;
- трапляються різні позначення, наприклад на ст. 46 відрізок  $[0,1]$ , а на ст. 49 —  $[0;1]$ ;
- часто зустрічається фраза: « $Q_3$  – зображення є узагальненням класичного трійкового зображення», хоча це зазначалося в першому розділі роботи;
- на ст. 67 є фраза «система впливає із твердження теореми», хоча теорема вже є твердженням;
- в огляді літератури на ст. 41 та 42 повторюється «сингулярні функції є нетривіальним об'єктом дослідження»;
- робота перенасичена словом «очевидно» і не завжди виправдано.

2. Не на всі джерела у списку літератури є посилання.

3. На ст. 26 автор говорить про розклади чисел в ряди Люрота, Енгеля, Сильвестера, бажано було б зробити посилання на джерела.

Але ці зауваження мають лише дорадчий характер і не впливають на остаточну позитивну оцінку роботи.

**Висновки.** Дисертація є самостійним завершеним науковим дослідженням, яке збагачує теорію неперервних функцій з фрактальними локальними та сингулярними властивостями. Її основні результати є новими і строго обґрунтованими, пройшли належну апробацію і достатньо повно опубліковані, мають теоретичне та практичне значення. Автореферат повно і правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота «**Фрактальні властивості функцій, пов'язаних з трисимвольними системами кодування дійсних чисел та їх модифікаціями**» задовольняє вимоги «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника» (Постанова Кабінету міністрів України № 567 від 24.07.2013) щодо кандидатських дисертацій, а її автор – Замрій Ірина Вікторівна заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. – математичний аналіз.

Офіційний опонент,  
кандидат фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник,  
доцент кафедри математичного аналізу  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка

 М. О. Назаренко



23.03.2016  
Кандидатка до  
вищої ради  
секретар ради  
5  
23.03.2016  
Артемівська 24