Національна академія наук України
Інститут математики

Савченко Ігор Олександрович

УДК 517.5+515.12

Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, декан фізико-математичного інституту; Інститут математики НАН України, завідувач відділу фрактального аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович,
Київський національний університет технологій та дизайну, завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Банах Тарас Онуфрійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, професор кафедри геометрії і топології.

Захист відбудеться «6» вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «4» серпня 2016 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. *Множиною підсум* або *неповних сум* заданого числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S_n + (a_{n+1} + a_{n+2} + ...) = S_n + r_n$$

називається множина

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x: \ x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\},$$

а кожен її елемент – *підсумою* або *неповною сумою* даного ряду.

Поняття множини неповних сум ряду не є ключовим поняттям класичної (традиційної) теорії рядів. Але воно істотно відображає геометричні властивості ряду, тому його вивчення дозволяє суттєво збагатити теорію рядів (у напрямі дослідження “Геометрія числових рядів”). Разом з цим воно тісно пов’язане з різними об’єктами сучасної математики. Згадаємо лише окремі з них.

Множина підсум ряду, будучи об’єктом метричного простору $\mathbb{R}^1$, потенційно є лінійним фракталом або множиною з фрактальними локальними властивостями. Тому вона є об’єктом, цікавим для теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу).

У теорії ймовірностей (а саме: теорії розподілів випадкових величин та теорії випадкових процесів) множини неповних сум виступають у ролі спектрів та носіїв розподілів (у першу чергу сингулярних та нетривіальних сумішей сингулярних й абсолютно неперервних). Особливу роль і значення множини неповних сум рядів мають у теорії нескінченних згорток Бернуллі (симетричних та несиметричних) – багатій теорії, яка майже століття невпинно розвивається. Зазначимо, що стосовно нескінченних згорток Бернуллі існує ряд складних ймовірнісних проблем, пов’язаних з їх лебегівською структурою, тополого-метричними й фрактальними властивостями носіїв, зокрема, суттєвих носіїв щільності тощо.

Множини неповних сум рядів відіграють важливу роль у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, які ґрунтуються на двосимвольних системах кодування дійсних чисел з допомогою рядів.

Теорія неперервних функцій зі складними локальними властивостями (сингулярних, ніде не монотонних, звивистих та недиференційовних) вимагає досліджень досконалих множин, які часто є множинами неповних сум збіжних рядів.

Це далеко не повний перелік напрямів сучасних досліджень, у яких фігурують множини неповних сум рядів і відіграють там нетривіальну роль. Як окремий об'єкт вивчення множина підсум абсолютно збіжного ряду фігурує у дослідженнях з 1914 року, коли була опублікована піонерська робота “Про неповні суми нескінченних рядів” японського математика Соічі Какея, основним результатом якої є наступне твердження.

Теорема 0.1. *Множина неповних сум $E\{a_n\}$ абсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є:*

1) досконалою множиною;

2) скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли

$$|a_n| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + ...$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$);

3) гомеоморфною класичній множині Кантора, якщо

$$|a_n| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + ...$$

для всіх достатньо великих n.

Ці ж результати в 1941 році були перевідкриті Г. Горничем та П. Кесава Меноном.

С. Какея висунув припущення, що необхідною і достатньою умовою ніде не щільності множини $E\{a_n\}$ є існування зліченної кількості членів ряду, для яких $a_n > r_n$. Перший контрприклад (без обґрунтування) до цієї гіпотези навели в 1980 р. А. Вайнштейн і Б. Шапіро. Ф. Прус-Вішньовський, визнаючи спростування гіпотези Какея цими авторами, зазначає, що їх робота містить і хибні твердження.

У 1984 р. Ц. Ференс навів інший приклад з нетривіальним доведенням. Більш простий приклад у 1988 р. представили Дж. Ґатрі та Дж. Німан:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots \,. \tag{1}$$

Для цього ряду, як і у прикладах вище згаданих дослідників, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина T неповних сум ряду (1) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$ і не є скінченним об'єднанням відрізків.

Завершальними у напрямі класифікації існуючих "топологічних типів" множин неповних сум абсолютно збіжних рядів є роботи Дж. Ґатрі, Дж. Німана та Р. Сеінза, де доведено наступний факт.

Теорема 0.2. *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є однією з наступних:*

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду (1)*.*

Починаючи з 1941 року, паралельно з дослідженнями топологічних властивостей множин неповних сум велись дослідження їх метричних властивостей. Окремої актуальності метричні задачі (задачі про міру Лебега) набувають у випадку, коли множина неповних сум ряду є ніде не щільною.

Дещо пізніше коло метричних задач було розширене задачами про фрактальні властивості множин неповних сум, про їхні фрактальні розмірності (розмірність Гаусдорфа-Безиковича, Гаусдорфа-Біллінгслі тощо). Першими вагомими дослідженнями в цьому напрямі були роботи Т. Шалата.

Незважаючи на те, що в останній час акцентовано ведуться дослідження (М. Працьовитий, Г. Торбін, Т. Банах, О. Барановський, А. Бартошевіч, Н. Василенко, Я. Виннишин, С. Гломб, Я. Гончаренко, Р. Джонс, Е. Шимонік, Д. Карвацький, В. Коваленко, Н. Корсунь, М. Купер, М. Моран, З. Нітецкій, Ю. Перес, Ф. Прус-Вішньовський, Б. Солом'як, Ю. Фещенко, М. Філіпчак та ін.) властивостей множини неповних сум збіжного ряду (в основному це розгляд окремих випадків, коли члени ряду утворюють послідовність, яка володіє деякою властивістю однорідності по n) і на те, що за столітній період розвитку цієї теорії науковцями було отримано ряд загальних результатів, повний опис тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ залишається ще далеким до завершення.

Сьогодні стосовно множини підсум збіжного ряду все ще у загальній постановці залишаються відкритими проблеми: 1) про необхідні і достатні умови її ніде не щільності; 2) про необхідні і достатні умови її нуль-мірності (у розумінні міри Лебега). Ще більш складною проблемою у загальній постановці є задача про фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М.П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках науково-дослідних тем:
– двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (№ державної реєстрації 0110U001279);
– фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053).

Об'єкт дослідження. Множина неповних сум збіжного знакододатного ряду, який володіє деякою властивістю однорідності (є збуреним геометричним рядом; сумою кількох геометричних рядів; рядом, визначеним рекурентним співвідношенням між членами та залишками ряду).

Предмет дослідження. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум вказаних рядів та розподіли випадкових неповних сум, зосереджених на множинах підсум заданих рядів.

Метою дослідження є опис структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей, пов'язаних з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, множин неповних сум декількох класів збіжних рядів, які мають властивості однорідності.

Основними завданнями дослідження є вивчення властивостей множин неповних сум:

- збуреного геометричного ряду;
- рекурентних рядів трипараметричної сім'ї;
- одного класу рядів з нелінійною властивістю однорідності та властивостей розподілів випадкових підсум таких рядів;
- рядів, які є сумами геометричних рядів з одним і тим же параметром, зокрема рядів, множиною значень яких є канторвал;

та знаходження умов (необхідних, достатніх, необхідних і достатніх) аномальної фрактальності (суперфрактальності) множин неповних сум окремих класів рядів.

Методи дослідження. У роботі використовувались прийоми та методи математичного аналізу, теорії функцій, функціонального аналізу, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертаційного дослідження і виносяться на захист, є такими:

— вивчено властивості множини неповних сум збуреного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де $f(n)$ – функція, для якої

$$\lim_{n\to\infty} f(n+1)f^{-1}(n) = 1;$$

встановлено, що розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин підсум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ співпадають при кожному $\lambda \in (0,1)$;

— досліджено властивості множин підсум рекурентних рядів однієї трипараметричної сім'ї, а саме рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члени яких задовольняють лінійне рекурентне співвідношення

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots ;$$

— встановлено лебегівський тип, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра випадкової величини $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, де $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний знакододатний ряд, який має властивість $r_{n+1} = a_{n+1}a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно. У випадку дискретності описано точковий спектр, у випадку неперервності доведено, що розподіл є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Доведено, що n-кратна згортка розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл;

— досліджено властивості множин підсум рядів, які є сумами геометричних рядів з одним і тим же параметром, множиною значень яких є канторвал;

— обчислено розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин підсум спеціальних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n (рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин);

— досліджено ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, для якого виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{r_n} = +\infty,$$

а множина його неповних сум є суперфрактальною.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має в основному теоретичний характер, хоча отримані в ній результати можуть бути застосовані в теорії розподілів випадкових величин, при фрактальному аналізі неперервних функцій та мір, у метричній та ймовірнісній теорії чисел.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, які виносяться на захист, належать автору і отримані самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях М. В. Працьовитому належить загальна постановка задач, деякі ідеї доведень та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на наступних *конференціях*:
– Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2011);
– Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2012);
–International Conference on Algebra dedicated to 100^{th} anniversary of S. M. Chernikov (Київ, 2012);
– Міжнародна наукова конференція “Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”, присвячена 80-річчю доктора фіз.-мат. наук, професора М. І. Шкіля (Київ, 2012);
– Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 2013);
– Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2013);
– Міжнародна наукова конференція Боголюбівські читання DIF-2013 “Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” (Севастополь, 2013);
– The 9-th International Algebraic Conference (Львів, 2013);
– Міжнародна наукова конференція, присвячена пам’яті Георгія Вороного “Fifth International Conference On Analytic Number Theory

And Spatial Tessellations” (Київ, 2013);
– Міжнародна наукова конференція “КРОМШ 2013” (Судак, 2013);
– Міжнародна математична конференція “Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки” до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Г. М. Положого (Київ, 2014);
– П’ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014);
– Четверта Міжнародна Ганська конференція (Чернівці, 2014);
– Міжнародна науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2015);
– Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2015);
– Міжнародна конференція молодих математиків “International Conference of Young Mathematicians” (Київ, 2015).

Результати дослідження доповідались на *наукових семінарах*:

— семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);

— семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук С. І. Максименко);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Г. М. Торбін).

Публікації. Основні результати дисертації викладено у 6 статтях [17–22], опублікованих у виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, та відображено у матеріалах конференцій [1–16]. Статті [20, 21] оприлюднені у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH та Scopus.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який нараховує 100 найменувань, списку публікацій автора, списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи – 120 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність дослідження, вказується зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, зазначено мету та задачі дослідження, його об'єкт та предмет, методи дослідження, наукову новизну одержаних результатів та їх практичне значення, особистий внесок здобувача, представлено список його публікацій, а також структуру дисертації.

Перший розділ "Огляд літератури та концептуальні засади дослідження" носить вступний характер і присвячений огляду основних результатів та літератури за темою дисертації. Розкрито історію питань, пов'язаних з тематикою роботи, доведено деякі допоміжні твердження, наведено огляд основних праць з теми дослідження. Також наведено стислий огляд тих результатів, які використовуються у роботі.

Другий розділ "Множини неповних сум деяких класів рядів" присвячений дослідженню множин неповних сум деяких класів рядів та розподілів випадкових неповних сум, зосереджених на цих множинах.

У **підрозділі 2.1** досліджено множину E_f підсум збуреного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де λ – фіксоване дійсне число з $(0,1)$, $f(n)$ – функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

Теорема 2.3. *Множина E_f є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E_f) = -\log_\lambda 2;$$

2) об'єднанням відрізків при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Наслідок 2.2. *Розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин неповних сум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ співпадають при кожному фіксованому значенні $\lambda \in (0,1)$.*

У **підрозділі 2.2** розглянуто трипараметричну сім'ю рядів, які задовольняють лінійну властивість однорідності

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Отримано вираз загального члена ряду та досліджено його множину неповних сум.

Лема 2.4. *Загальний член послідовності* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2), *має вигляд*

$$a_n = (a_1 - p)\lambda^{n-1} + \varrho^{n-1} \cdot \sqrt{p^2 + s^2} \sin(\varphi(n-1) + \theta),$$

де

$$\lambda = \frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \approx 0.5436890125,$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = -\frac{1}{6}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}, \quad \cos\theta = \frac{s}{\sqrt{p^2 + s^2}},$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}}\right), \quad \sin\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}.$$

$$p = \frac{a_1\lambda^2 - a_3}{(a - \lambda)^2 + b^2}, \quad s = \frac{a_2 - a_1\lambda - p(a - \lambda)}{b}.$$

Лема 2.3. *Для того, щоб послідовність* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2), *була знакододатною, необхідно і достатньо щоб її перші три члени задовольняли умови*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \lambda \quad i \quad a_1 > 0.$$

Теорема 2.4. *Множина неповних сум знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *який володіє властивістю* (2), *є відрізком* $[0, \frac{a_1}{1-\lambda}]$.

Підрозділ 2.3 присвячений встановленню лебегівської структури (вмісту дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компоненти), тополого-метричних і фрактальних властивостей спектра розподілу випадкової величини $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, де

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n \tag{3}$$

— збіжний знакододатний ряд, який має властивість

$$r_{n+1} = a_{n+1} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

(ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

У випадку дискретності описано точковий спектр розподілу, а у випадку неперервності доведено, що він є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Більше того, доведено, що s-кратна автозгортка $\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)}$, неперервного розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл при будь-якому натуральному значенні s.

Лема 2.4. *Якщо a_1, a_2 — додатні дійсні числа, то двопараметрична послідовність*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} a_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

є нескінченно малою, а відповідний їй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — збіжний.

Теорема 2.5. *Для того, щоб ряд (3) задовольняв умову однорідності (4), необхідно і достатньо, щоб для його членів виконувалась рівність (5).*

Лема 2.11. *Для членів ряду (3), що задовольняє умову однорідності (4), мають місце рівності*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{q^n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} a_n n! = 0,$$

де q — довільне дійсне число з $(0, 1)$.

Теорема 2.6 *Розподіл випадкової величини ξ є дискретним тоді й лише тоді, коли $L = \prod_{n=1}^{\infty} p_{c_n n} > 0$. У випадку дискретності, якщо для ряду (3) виконується умова $a_n > r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то точковий спектр D_ξ складається з точки x_0 такої, що*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n, \quad \text{де} \;\; p_{c_n n} = \max\{p_{0n}, p_{1n}\},$$

і всіх точок x таких, що

$$x = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n a_n,$$

де $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $p_{\varepsilon_n n} \neq 0$ при $n \leqslant m$.

Теорема 2.7. *Множина неповних сум ряду (3), що задовольняє умову однорідності (4), є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега і нульової розмірністі Гаусдорфа-Безиковича.*

Теорема 2.8. *У випадку неперервності ($L = 0$) розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Теорема 2.9. *У випадку неперервності випадкової величини ξ ($L = 0$) розподіл випадкової величини ψ_s, для будь-якого натурального $s \geqslant 2$ є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Підрозділ 2.4 присвячений дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множини

$$C_\lambda^{A_S} = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A_s \right\},$$

де λ — задане дійсне число з $(0, 1)$, $A_s \equiv \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leqslant s$ — фіксоване натуральне число.

Основним об'єктом є множина $C_\lambda^{A_3}$, що є узагальненням множини неповних сум геометричного ряду.

Теорема 2.12. *Якщо $\lambda = \frac{a_1}{a_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, то множина $C_\lambda^{A_3}$ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\alpha_0(C_\lambda^{A_3}) = \log_{\frac{a_2}{a_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.*

Третій розділ "Множини неповних сум рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин" присвячений дослідженню трьох класів рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ та $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n. Даний випадок є найменш вивченим. Множина підсум ряду, що володіє такою властивістю є: або ніде не щільною множиною, або симетричним канторвалом (об'єднанням ніде не щільної множини і множини, яка є нескінченним об'єднанням відрізків).

Основною задачею **підрозділу 3.1** є дослідження властивостей множини підсум ряду

$$a_1 + a_2 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + ... = \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda},$$

де a_1, a_2 — дійсні числа, $a_1 > a_2 > 0$ і $\lambda \in (0, 1)$.

Множину неповних сум останнього ряду можна подати у вигляді

$$E_\lambda = \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \lambda^{n-1}, \ \ \eta_n \in \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\} \right\}.$$

Множина E_λ досліджувалась у роботах Б. Солом'яка, у яких стверджується, що для майже всіх значень $\lambda > \frac{1}{4}$ вона матиме додатну міру Лебега. Також було встановлено існування такої щільної нуль-множини M_0 значень $\lambda > \frac{1}{4}$, що при кожному з них множина E_λ має нульову міру Лебега, але не було явно вказано цих значень.

Основним результатом даного підрозділу є теорема 3.2, яка дає повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множини E_λ неповних сум ряду при конкретному фіксованому значенні $\lambda = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \equiv q$, яке може бути більшим за $\frac{1}{4}$ і належить M_0. Основний акцент зроблено на вивченні її фрактальних властивостей, чого не було зроблено вище згаданими дослідниками.

Теорема 3.2. *Множина E_q неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є*

1) відрізком $[0, \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}]$, якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}} (2 + \sqrt{3}),$$

якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \ 1)$.

У підрозділі 3.2 побудовано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який володіє властивістю

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{r_n} = +\infty,$$

а множина його неповних сум має додатну розмірність Гаусдорфа–Безиковича. Це ряд виду

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + ... + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{2^{n-1}} + ...,$$

для якого виконується рівність

$$\frac{c_k}{\widetilde{r}_k} = k + 1, \quad k = 2^n - 1, \quad n = 1, 2, 3, ... \ ,$$

$$\widetilde{r}_k = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} b_k = \underbrace{c_{n+1} + ... + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + ... + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + ... =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + ... \ ,$$

$$c_n = b_{2^{n-1}} = b_{2^{n-1}+1} = b_{2^{n-1}+2} = ... = b_{2^n-1}.$$

Теорема 3.3. *Множина $E\{b_n\}$ є суперфрактальною множиною, тобто нуль-множиною Лебега, розмірності Гаусдорфа-Безиковича, рівної 1.*

У підрозділі 3.3 досліджується множина D_λ неповних сум однопараметричної сім'ї рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 8\lambda + 4\lambda + 3\lambda + 2\lambda + 8\lambda^2 + 4\lambda^2 + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 + ... + 8\lambda^k + 4\lambda^k + 3\lambda^k + 2\lambda^k + ... \ ,$$

де λ – дійсне число з $(0, 1)$.

Теорема 3.4. *Множина D_λ неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ є*

1) нуль-множиною Лебега при $\lambda \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$;

2) відрізком $[0, \frac{17\lambda}{1-\lambda}]$ при $\lambda \in \left[\frac{2}{19}, 1\right)$;

3) множиною додатної міри Лебега при майже всіх (відносно міри Лебега) значеннях $\lambda \in \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{19}\right)$;

4) симетричним канторвалом при $\lambda \in \left[\frac{1}{14}, \frac{2}{19}\right)$.

ВИСНОВКИ

Розпочате у 1914 році вивчення геометрії числових рядів (у першу чергу, тополого-метричних і фрактальних властивостей їх множин неповних сум) сьогодні стало серйозним напрямом сучасних математичних досліджень, які ведуться на межі математичного аналізу, топології, фрактальної геометрії, теорії міри та теорії ймовірностей.

На фоні загальних фундаментальних результатів топологічного характеру, отриманих відносно недавно, сьогодні геометрія числових рядів в основному збагачується за рахунок розвитку індивідуальних теорій, а саме: вивчення класів рядів, які володіють певними властивостями однорідності і залежать від скінченної кількості параметрів. Разом з цим чекають на вирішення багато різноаспектних проблем у загальній постановці.

У даній роботі ми зосередили свою увагу на вивченні структурних властивостей множин неповних сум рядів, які мають різні властивості однорідності, зокрема рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n. Множини неповних сум абсолютно збіжних рядів є спектрами нескінченних згорток Бернуллі. Тому проблеми тополого-метричної теорії числових рядів тісно переплітаються з теорією розподілів випадкових величин з фрактальними властивостями.

Отримано такі результати:

1) детально описано властивості множин неповних сум збуреного геометричного ряду та рядів, визначених рекурентними співвідношеннями між їх членами та залишками;

2) досліджено фрактальні властивості несамоподібних множин неповних сум рядів “з суттєвими перекриттями циліндричних відрізків”, зокрема обчислено їх розмірності Гаусдорфа-Безиковича;

3) вивчено тополого-метричні властивості множин неповних сум рядів, що є сумами чотирьох геометричних рядів з одним і тим же параметром, множиною значень яких є симетричний канторвал;

4) знайдено ряд з необмеженою послідовністю відношень його членів та залишків, множина підсум якого є суперфрактальною;

5) вивчено структуру, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілу випадкової неповної суми збіжного ряду з нелійною властивістю однорідності, з незалежними випадковими доданками.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Савченко І.О.* Властивості множини неповних сум одного знакододатного ряду залежно від параметру / І.О. Савченко // Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: тези доповідей / НПУ імені М.П. Драгоманова. — Київ, 2011. — С. 100–101.
2. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ: Матеріали конф. — Київ, 2012. — С. 111.
3. *Savchenko I.O.* Fractal properties of a family linear sets / I.O. Savchenko // International Conference on Algebra is dedicated to 100^{th} anniversary of S.M. Chernikov, Kyiv, August 20–26, 2012. Books of abstracts. — Kyiv, 2012. — P. 130.
4. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Міжнародна конференція “Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”, Київ, 13–14 грудня 2012 р.: Матеріали конф. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — С. 90.
5. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013 р.: Тези доповідей. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 79.
6. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множини неповних сум числових рядів з однією умовою однорідності / І.О. Савченко // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: тези доповідей / Національний університет “Києво-Могилянська академія”. — Київ, 2013. — С. 111.
7. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множини неповних сум числових рядів з однією умовою однорідності / І.О. Савченко // Боголюбівські читання DIF-2013 “Диференціальні рівняння,

теорія функцій та їх застосування": матеріали конференції. — Севастополь, 2013. — С. 267–268.

8. *Savchenko I.* Topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums of one class positive series / I. Savchenko // The 9-th International Algebraic Conference, Lviv, July 08-13, 2013. Abstracts of Reports. — Lviv, 2013. — P. 166.
9. *Savchenko I.* Fractal properties of the set of incomplete sums of positive series with some condition of homogeneity / I. Savchenko // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013. — P. 110.
10. *Савченко И.А.* Фрактальные свойства множеств неполных сумм числовых рядов с одним условием однородности / И.А. Савченко // Крымская международная математическая конференция – (Судак, 22 сентября – 4 октября, 2013): тези доповідей. — Судак, 2013. — С. 19–20.
11. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум числових рядів з однією нелінійною умовою однорідності / І.О. Савченко // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 114.
12. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множин неповних сум числових рядів з однією нелінійною умовою однорідності / І.О. Савченко // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ "КПІ", 2014. — С. 164.
13. *Савченко І.О.* Випадкові неповні суми знакододатних рядів та їх фрактальні властивості / І.О. Савченко // IV міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана: Тези доповідей. — Чернівці, 2014. — С. 178–180.
14. *Савченко І.О.* Множина неповних сум числового ряду з суттєвими перекриттями циліндричних відрізків / І.О. Савченко // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вче-

них з математики та фізики: тези доповідей / Національний технічний університет "КПІ". — Київ, 2015. — С. 50.

15. *Савченко І.О.* Тополого-метричний аналіз множин неповних сум числових рядів / І.О. Савченко // Міжнародна наукова конференція молодих вчених з математики: тези доповідей / Інститут математики НАН України. — Київ, 2015. — С. 84.
16. *Савченко І.О.* Множини неповних сум деяких збіжних рядів / І.О. Савченко // Матеріали Міжнародної науково-методичної конф. "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 25-26 червня 2015 р. К.: НУХТ, 2015. — С. 110–111.
17. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2012. — **13** (2). — С. 188–196.
18. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **14**. — С. 227–239.
19. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **15**. — С. 119–133.
20. *Працьовитий М.В.* Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності / І.О. Савченко // Буковинський математичний журнал. — 2014. — **2**, 2–3. — С. 196–202.
21. *Працьовитий М.В.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності / І.О. Савченко // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133–142.
22. *Працьовитий М.В.* Множина неповних сум рядів однієї однопараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014. — **16** (2). — С. 125–131.

АНОТАЦІЇ

Савченко І. О. Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум числових рядів. Досліджується кілька класів збіжних рядів, множини неповних сум (підсум) яких є: ніде не щільними множинами (нульової або додатної міри Лебега), об'єднаннями відрізків, канторвалами (суміш ніде не щільної множини і множини, яка є нескінченним об'єднанням відрізків). Це збіжні знакододатні ряди, які мають певну властивість однорідності (є збуреним геометричним рядом; сумою кількох геометричних рядів; рядом, визначеним рекурентним співвідношенням між членами та залишками ряду тощо).

У роботі встановлюється топологічний тип множини неповних сум досліджуваного ряду і розв'язуються метричні задачі. У випадку ніде не щільності множини підсум ряду розв'язується задача про її міру Лебега, у випадку нуль-мірності – задача про її фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича.

Вказуються застосування отриманих результатів у теорії розподілів випадкових величин, що є випадковими підсумами рядів з нелінійними властивостями однорідності. Їх розподіли є нескінченними згортками Бернуллі, керованими заданим рядом. Спектр розподілу такої випадкової величин співпадає з множиною неповних сум даного ряду. Знайдено критерії дискретності та неперервності розподілу і умови сингулярності у випадку його канторовості.

Ключові слова: неповна сума (підсума) ряду, множина неповних сум (підсум) ряду, ніде не щільна множина, міра Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактал, канторвал, нескінченні згортки Бернуллі.

Savchenko I. O. The Fractal Analysis of the Sets of Subsums of Numerical Series. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to topological, metric and fractal properties of the sets of subsums of numerical series. We study some classes of series such that sets of their subsums are perfect and either nowhere dense sets of zero (positive) Lebesgue measure or unions of nowhere dense set and infinite union of intervals.

Hausdorff-Besicovitch dimension of the set of subsums of the series is found if its Lebesgue measure is equal to zero.

We consider the random variable ξ defined by the series with one nonlinear property of homogeneity. The spectrum of distribution of this random variable coincides with the set of subsums of the given series. The criterium of discreteness (continuity) of distribution and the conditions for ξ to be singular random variable of Cantor type are found. We also study the series such that sets of their subsums are Cantorvals.

Key words: incomplete sum (subsum) of series, set of incomplete sums (subsums) of a series, nowhere dense set, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch dimension, fractal, Cantorval, Bernoulli convolutions.

Савченко И. А. Фрактальный анализ множеств неполных сумм числовых рядов. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию тополого-метрических и фрактальных свойств множеств неполных сумм числовых рядов. Исследуется несколько классов рядов, множества неполных сумм (подсумм) которых являются: нигде не плотными множествами (нулевой или положительной меры Лебега), объединениями отрезков, канторвалами (смесь нигде не плотного множества и множества, которое есть бесконечным объединением отрезков). Это сходящиеся ряды, которые владеют некоторым свойством однородности (являются возмущенным геометрическим рядом; суммой нескольких геометрических рядов; рядом, определенным рекуррентным соотношением между членами и остатками ряда и т.п.).

В работе устанавливается топологический тип множества неполных сумм исследуемого ряда и решаются метрические задачи. В случае нигде не плотности множества подсумм ряда решается задача о его мере Лебега, в случае нуль-мерности — задачи о его фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича.

Указывается применение полученных результатов в теории распределений случайных величин, которые есть случайными подсуммами рядов с нелинейным свойством однородности. Их распределения есть бесконечными свертками Бернулли, управляемыми заданным рядом. Спектр распределения такой случайной величины совпадает с множеством неполных сумм ряда. Найдено критерии дискретности и непрерывности распределения и условия сингулярности в случае его канторовости.

Ключевые слова: неполная сумма (подсумма) ряда, множество неполных сумм (подсумм) ряда, нигде не плотное множество, мера Лебега, размерность Хаусдорфа-Безиковича, фрактал, канторвал, свертки Бернулли.

Підписано до друку 11.07.2016. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,5. Умовн. друк. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 89.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова, 01601, м.Київ, вул. Птрогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію №1101 від 29.10.2002
(044) 239–30–26