Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

Савченко Ігор Олександрович

УДК 517.5+515.12

Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

Список умовних позначень **4**

Вступ **5**

Розділ 1. **Огляд літератури та концептуальні засади дослідження** **21**

1.1. Неповна сума (підсума) ряду та множина його підсум 21

1.2. Множина неповних сум абсолютно збіжного ряду 22

1.3. Тополого-метричний аналіз множин неповних сум 23

1.3.1. Огляд основних результатів 23

1.3.2. Арифметичні суми множин підсум 27

1.3.3. Циліндричні множини та деякі допоміжні твердження 28

1.3.4. Зв'язок між видами збіжності рядів та їх множинами неповних сум 31

1.4. Фрактальний аналіз 31

1.4.1. Міра Гаусдорфа, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактали 32

1.4.2. Розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини відносно деякого сімейства покриттів 35

1.4.3. Фрактальні властивості множини неповних сум ряду 37

1.5. Канторвали 39

Висновки до розділу 1 41

Розділ 2. **Множини неповних сум деяких класів рядів** **42**

2.1. Множина підсум збуреного геометричного ряду 42

2.2. Множини неповних сум рядів з однією лінійною властивістю однорідності 48

2.3. Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності 51
2.3.1. Аналіз умови однорідності 52
2.3.2. Критерій дискретності. Точковий спектр. 56
2.3.3. Тополого-метричні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ 59
2.3.4. Автозгортки розподілу випадкової величини ξ 61
2.4. Узагальнення множини підсум геометричного ряду 64
2.4.1. Двопараметрична сім'я множин C_λ^L 67
2.4.2. Двопараметрична сім'я множин C_λ^S 68
2.4.3. Про один спеціальний випадок 70
Висновки до розділу 2 78
Розділ 3. **Множини неповних сум рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин** **79**
3.1. Фрактальні властивості множин підсум рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин 79
3.2. Суперфрактальність множини неповних сум одного ряду . 91
3.2.1. Побудова контрприкладу 91
3.2.2. Фрактальні властивості множини неповних сум ряду 93
3.3. Множини неповних сум рядів однопараметричної сім'ї 98
Висновки до розділу 3 102
ВИСНОВКИ 103
Список використаних джерел **104**
Список публікацій автора **113**

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	— множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}_0$	— множина цілих невід'ємних чисел
$\mathbb{R}$	— множина дійсних чисел
$E\{a_n\}$	— множина неповних сум (всіх підсум) заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
(a_n) (або $\{a_n\}$)	— послідовність із загальним членом a_n
$\lambda(E)$ (або $\mathcal{L}(E)$)	— міра Лебега множини E
$H^{\alpha}(E)$	— α-вимірна міра Гаусдорфа (або H^{α}-міра Гаусдорфа) множини E
$\alpha_0(E)$	— розмірність Гаусдорфа–Безиковича множини E
$E \overset{k}{\sim} E'$	— множина E геометрично подібна множині E' з коефіцієнтом k
$d(E)$	— діаметр мнижини E
$\|E\|$	— діаметр лінійної мнижини E, який є різницею $\sup E - \inf E$
$\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$	— циліндрична множина (циліндр) рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$
$\nabla_{c_1c_2\ldots c_n}$	— інтервал з такими кінцями, що й $\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$
$\|\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}\|$	— довжина циліндричного відрізка
2^X	— множина всіх підмножин множини X
$A \oplus B$	— арифметична (векторна) сума множин A і B
S_{ξ}	— спектр розподілу випадкової величини ξ (мінімальний замкнений носій)
$P\{E\}$	— ймовірність події (множини) E
$\square$	— кінець доведення твердження

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множин неповних сум (те ж саме: множин підсум) збіжних знакододатних числових рядів з дійсними членами.

Актуальність теми. *Множиною підсум* або *неповних сум* заданого числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S_n + (a_{n+1} + a_{n+2} + ...) = S_n + r_n$$

називається множина

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x: \ x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\},$$

а кожен її елемент – *підсумою* або *неповною сумою* даного ряду.

Поняття множини неповних сум ряду не є ключовим поняттям класичної (традиційної) теорії рядів. Але воно істотно відображає геометричні властивості ряду, тому його вивчення дозволяє суттєво збагатити теорію рядів (у напрямі дослідження "Геометрія числових рядів"). Разом з цим воно тісно пов'язане з різними об'єктами сучасної математики. Згадаємо лише окремі з них.

Множина підсум ряду, будучи об'єктом метричного простору $\mathbb{R}^1$, потенційно є лінійним фракталом або множиною з фрактальними локальними властивостями. Тому вона є об'єктом, цікавим для теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу).

У теорії ймовірностей (а саме: теорії розподілів випадкових величин та теорії випадкових процесів) множини неповних сум виступають у ролі спектрів та носіїв розподілів (у першу чергу сингулярних та нетривіальних сумішей сингулярних й абсолютно неперервних). Особливу роль і значення множини неповних сум рядів мають у теорії нескінченних згорток Бернуллі (симетричних та несиметричних) – багатій теорії, яка майже століття невпинно розвивається. Зазначимо, що стосовно нескінченних згорток Бернуллі існує ряд складних ймовірнісних проблем, пов'язаних з їх лебегівською структурою, тополого-метричними й фрактальними властивостями носіїв, зокрема, суттєвих носіїв щільності тощо [10, 20, 45, 88].

Множини неповних сум рядів відіграють важливу роль у метричній та ймовірнісній теоріях чисел, які ґрунтуються на двосимвольних системах кодування дійсних чисел з допомогою рядів.

Теорія неперервних функцій зі складними локальними властивостями (сингулярних, ніде не монотонних, звивистих та недиференційовних) вимагає досліджень досконалих множин, які часто є множинами неповних сум збіжних рядів.

Це далеко не повний перелік напрямів сучасних досліджень, у яких фігурують множини неповних сум рядів і відіграють там нетривіальну роль.

Як окремий об'єкт вивчення множина підсум абсолютно збіжного ряду фігурує в дослідженнях з 1914 року, коли була опублікована піонерська робота японського математика Соічі Какея [75] ("Про неповні суми нескінченних рядів"), основним результатом якої була є наступне твердження.

Теорема 0.1. *Множина неповних сум $E\{a_n\}$ абсолютно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є:*

1) досконалою множиною;

2) скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли

$$|a_n| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \ldots$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$);

3) гомеоморфною класичній множині Кантора, якщо

$$|a_n| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \ldots$$

для всіх достатньо великих n.

Ці ж результати були перевідкриті в 1941 році Г. Горничем [72] та в 1948 році П. Кесава Меноном [81].

У згаданій роботі [75] С. Какея висунув припущення, що необхідною і достатньою умовою ніде не щільності множини $E\{a_n\}$ є існування зліченної кількості членів ряду, для яких $a_i > r_i$. Перший контрприклад (без обґрунтування) до цієї гіпотези навели в 1980 р. А. Вайнштейн і Б. Шапіро [5]. У роботі [92] Ф. Пруш-Вішньовський, визнаючи спростування гіпотези Какея цими авторами, зазначає, що їх робота містить і хибні твердження (це теореми 2 і 5).

У 1984 р. Ц. Ференс [68] навів інший приклад з нетривіальним доведенням. Більш простий приклад у 1988 р. представили Дж. Ґатрі і Дж. Німан [69]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \ldots \, . \tag{1}$$

Для цього ряду, як і у прикладах вище згаданих дослідників, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина T неповних сум ряду (1) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$ і не є скінченним об'єднанням відрізків.

Завершальними у напрямі класифікації існуючих "топологічних типів" множин неповних сум абсолютно збіжних рядів є роботи [69, 85], де доведено наступний факт.

Теорема 0.2. *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є однією з наступних:*

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду (1).

Починаючи з 1941 року, паралельно з дослідженнями топологічних властивостей множин неповних сум велись дослідження їх метричних властивостей. Окремої актуальності метричні задачі (задачі про міру Лебега) набувають у випадку, коли множина неповних сум ряду є ніде не щільною.

Дещо пізніше коло метричних задач було розширене задачами про фрактальні властивості множин неповних сум, про їхні фрактальні розмірності (розмірність Гаусдорфа-Безиковича, Гаусдорфа-Біллінгслі тощо). Першими вагомими дослідженнями в цьому напрямі були роботи Т. Шалата.

Незважаючи на те, що в останній час акцентовано ведуться дослідження (М. Працьовитий, Г. Торбін, Т. Банах, О. Барановський, А. Бартошевіч, Н. Василенко, Я. Виннишин, С. Гломб, Я. Гончаренко, Р. Джонс, Е. Шимонік, Д. Карвацький, В. Коваленко, Н. Корсунь, М. Купер, М. Моран, З. Нітецкій, Ю. Перес, Ф. Прус-Вішньовський, Б. Солом'як, Ю. Фещенко, М. Філіпчак та ін.) властивостей множини неповних сум збіжного ряду (в основному це розгляд окремих випадків, коли члени ряду утворюють послідовність, яка володіє деякою властивістю однорідності по n) і на те, що за столітній період розвитку цієї теорії науковцями було отримано ряд загальних результатів, повний опис тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ залишається ще далеким до завершення.

Сьогодні стосовно множини підсум збіжного ряду все ще у загальній постановці залишаються відкритими проблеми: 1) про необхідні і достатні умови її ніде не щільності; 2) про необхідні і достатні умови її нуль-мірності (у розумінні міри Лебега). Ще більш складною проблемою у загальній постановці є задача про фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено (див. наприклад [10, 35, 37, 47, 53, 94, 96]).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводиться на кафедрі вищої математики НПУ імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках науково-дослідних тем:
– двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (№ державної реєстрації 0110U001279);
– фрактальний аналіз неперервних функцій і мір (№ державної реєстрації 0111U000053).

Об'єкт дослідження. Множина неповних сум збіжного знакододатного ряду, який володіє деякою властивістю однорідності (є збуреним геометричним рядом; сумою кількох геометричних рядів; рядом, визначеним рекурентним співвідношенням між членами та залишками ряду).

Предмет дослідження. Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум вказаних рядів та розподіли випадкових неповних сум, зосереджених на множинах підсум заданих рядів.

Метою дослідження є опис структурних, топологічних, метричних і фрактальних властивостей, пов'язаних з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича, множин неповних сум декількох класів збіжних рядів, які мають властивості однорідності.

Основними завданнями дослідження є вивчення властивостей множин неповних сум:

— збуреного геометричного ряду;
— рекурентних рядів трипараметричної сім'ї;
— одного двопараметричного класу рядів з нелінійною властивістю однорідності та властивостей розподілів випадкових підсум таких рядів;

— рядів, які є сумами геометричних рядів з одним і тим же параметром, зокрема рядів, множиною значень яких є канторвал;

та знаходження умов (необхідних, достатніх, необхідних і достатніх) аномальної фрактальності (суперфрактальності) множин неповних сум окремих класів рядів.

Методи дослідження. У роботі використовувались прийоми та методи математичного аналізу, теорії функцій, функціонального аналізу, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертаційного дослідження і виносяться на захист, є такими:

— вивчено властивості множини неповних сум збуреного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де $f(n)$ – функція, для якої

$$\lim_{n\to\infty} f(n+1)f^{-1}(n) = 1;$$

встановлено, що розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин підсум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ співпадають при кожному $\lambda \in (0,1)$;

— досліджено властивості множин підсум рекурентних рядів однієї трипараметричної сім'ї, а саме рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члени яких задовольняють лінійне рекурентне співвідношення

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots ;$$

— встановлено лебегівський тип, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра випадкової величини $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n$, де $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збіжний знакододатний ряд, який має властивість $r_{n+1} = a_{n+1}a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно.

У випадку дискретності описано точковий спектр, у випадку неперервності доведено, що розподіл є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Доведено, що n-кратна згортка розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл;

— досліджено властивості множин підсум рядів, які є сумами геометричних рядів з одним і тим же параметром, множиною значень яких є канторвал;

— обчислено розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин підсум спеціальних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n (рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин);

— досліджено ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, для якого виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{r_n} = +\infty,$$

а множина його неповних сум є суперфрактальною.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має в основному теоретичний характер, хоча отримані в ній результати можуть бути застосовані в теорії розподілів випадкових величин, при фрактальному аналізі неперервних функцій та мір, у метричній та ймовірнісній теорії чисел.

Особистий внесок здобувача. Усі положення і результати, які виносяться на захист, належать автору і отримані самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях М. В. Працьовитому належить загальна постановка задач, деякі ідеї доведень та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались на наступних *конференціях*:

– Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2011);

– Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2012);

–International Conference on Algebra dedicated to 100^{th} anniversary of S. M. Chernikov (Київ, 2012);

– Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвячена 80-річчю доктора фіз.-мат. наук, професора М. І. Шкіля (Київ, 2012);

– Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2013);

– Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2013);

– Міжнародна наукова конференція Боголюбівські читання DIF-2013 "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013);

– The 9-th International Algebraic Conference (Львів, 2013);

– Міжнародна наукова конференція, присвячена пам'яті Георгія Вороного "Fifth International Conference On Analytic Number Theory And Spatial Tessellations" (Київ, 2013);

– Міжнародна наукова конференція "КРОМШ 2013" (Судак, 2013);

– Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Г. М. Положого (Київ, 2014);

– П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014);

– Четверта Міжнародна Ганська конференція (Чернівці, 2014);

– Міжнародна науково-методична конференція “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (Київ, 2015);

– Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 2015);

– Міжнародна конференція молодих математиків “International Conference of Young Mathematicians” (Київ, 2015).

Результати дослідження доповідались на *наукових семінарах*:

— семінар відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор М. В. Працьовитий);

— семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук С. І. Максименко);

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор Г. М. Торбін).

Публікації. Основні результати дисертації викладено у шести статтях [17–22], опублікованих у виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України, та відображено у матеріалах конференцій [1–16]. Статті [20, 21] оприлюднені у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH та Scopus.

Структура роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який нараховує 100 найменувань, списку публікацій автора, списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи – 120 сторінок.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовується актуальність дослідження, вказується зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, зазначено мету та задачі дослідження, його об'єкт та предмет, методи дослідження, наукову новизну одержаних результатів та їх практичне значення, особистий внесок здобувача, представлено список його публікацій, а також структуру дисертації.

Перший розділ "Огляд літератури та концептуальні засади дослідження" носить вступний характер і присвячений огляду основних результатів та літератури за темою дисертації. Розкрито історію питань, пов'язаних з тематикою роботи, доведено деякі допоміжні твердження, наведено огляд основних праць з теми дослідження. Також наведено стислий огляд тих результатів, які використовуються у роботі.

Другий розділ "Множини неповних сум деяких класів рядів" присвячений дослідженню множин неповних сум деяких класів рядів та розподілів випадкових неповних сум, зосереджених на цих множинах.

У **підрозділі 2.1** досліджено множину E_f підсум збуреного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$, де λ – фіксоване дійсне число з $(0,1)$, $f(n)$ – функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

Теорема 2.3. *Множина* E_f *є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$*, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(E_f) = -\log_\lambda 2;$$

2) об'єднанням відрізків при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Наслідок 2.2. *Розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин неповних сум рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ *співпадають при кожному фіксованому значенні* $\lambda \in (0,1)$.

У **підрозділі 2.2** розглянуто трипараметричну сім'ю рядів, які задовольняють лінійну властивість однорідності

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Отримано вираз загального члена ряду та досліджено його множину неповних сум.

Лема 2.4. *Загальний член послідовності* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2)*, має вигляд*

$$a_n = (a_1 - p)\lambda^{n-1} + \varrho^{n-1} \cdot \sqrt{p^2 + s^2} \sin(\varphi(n-1) + \theta),$$

де

$$\lambda = \frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \approx 0.5436890125,$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a = -\frac{1}{6}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}, \quad \cos\theta = \frac{s}{\sqrt{p^2 + s^2}},$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}}\right), \quad \sin\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}.$$

$$p = \frac{a_1\lambda^2 - a_3}{(a - \lambda)^2 + b^2}, \quad s = \frac{a_2 - a_1\lambda - p(a - \lambda)}{b}.$$

Лема 2.3. *Для того, щоб послідовність* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2)*, була знакододатною, необхідно і достатньо щоб її перші три члени задовольняли умови*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \lambda \quad \textit{i} \quad a_1 > 0.$$

Теорема 2.4. *Множина неповних сум знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, який володіє властивістю* (2)*, є відрізком* $[0, \ \frac{a_1}{1-\lambda}]$.

Підрозділ 2.3 присвячений встановленню лебегівської структури (вмісту дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компоненти), тополого-метричних і фрактальних властивостей спектра розподілу випадкової величини $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, де

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n \tag{3}$$

— збіжний знакододатний ряд, який має властивість

$$r_{n+1} = a_{n+1} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

(ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

У випадку дискретності описано точковий спектр розподілу, а у випадку неперервності доведено, що він є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Більше того, доведено, що s-кратна автозгортка $\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)}$, неперервного розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл при будь-якому натуральному значенні s.

Лема 2.4. *Якщо a_1, a_2 — додатні дійсні числа, то двопараметрична послідовність*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} a_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

є нескінченно малою, а відповідний їй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — збіжний.

Теорема 2.5. *Для того, щоб ряд* (3) *задовольняв умову* (4)*, необхідно і достатньо, щоб для його членів виконувалась рівність* (5)*.*

Лема 2.11. *Для членів ряду* (3)*, що задовольняє умову однорідності* (4)*, мають місце рівності*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n n! = 0,$$

де q — довільне дійсне число з $(0, 1)$.

Теорема 2.6. *Розподіл випадкової величини ξ є дискретним тоді й лише тоді, коли $L = \prod_{n=1}^{\infty} p_{c_n n} > 0$. У випадку дискретності, якщо для ряду (3) виконується умова $a_n > r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то точковий спектр D_ξ складається з точки x_0 такої, що*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n, \quad \text{де} \ \ p_{c_n n} = \max\{p_{0n}, p_{1n}\},$$

і всіх точок x таких, що

$$x = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n a_n,$$

де $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$, $p_{\varepsilon_n n} \neq 0$ при $n \leqslant m$.

Теорема 2.7. *Множина неповних сум ряду (3), що задовольняє умову однорідності (4), ніде не щільною множиною нульової міри Лебега і нульової розмірністі Гаусдорфа-Безиковича.*

Теорема 2.8. *У випадку неперервності ($L = 0$) розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Теорема 2.9. *У випадку неперервності випадкової величини ξ ($L = 0$) розподіл випадкової величини ψ_s, для будь-якого натурального $s \geqslant 2$ є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Підрозділ 2.4 присвячений дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множини

$$C_\lambda^{A_S} = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A_s \right\},$$

де λ — задане дійсне число з $(0, 1)$, $A_s \equiv \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leqslant s$ — фіксоване натуральне число.

Основним об'єктом є множина $C_\lambda^{A_3}$, що є узагальненням множини неповних сум геометричного ряду.

Теорема 2.12. *Якщо* $\lambda = \frac{a_1}{a_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, *то множина* $C_\lambda^{A_3}$ *є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює* $\alpha_0(C_\lambda^{A_3}) = \log_{\frac{a_2}{a_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Третій розділ “Множини неповних сум рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин” присвячений дослідженню трьох класів рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ та $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n. Даний випадок є найменш вивченим. Множина підсум ряду, що володіє такою властивістю є: або ніде не щільною множиною, або симетричним канторвалом (об’єднанням ніде не щільної множини і множини, яка є нескінченним об’єднанням відрізків).

Основною задачею **підрозділу 3.1** є дослідження властивостей множини підсум ряду

$$a_1 + a_2 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + ... = \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda},$$

де a_1, a_2 — дійсні числа, $a_1 > a_2 > 0$ і $\lambda \in (0, 1)$.

Множину неповних сум останнього ряду можна подати у вигляді

$$E_\lambda = \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \lambda^{n-1}, \quad \eta_n \in \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\} \right\}.$$

Множина E_λ досліджувалась у роботах Б. Солом’яка, у яких стверджується, що для майже всіх значень $\lambda > \frac{1}{4}$ вона матиме додатну міру Лебега. Також було встановлено існування такої щільної нуль-множини M_0 значень $\lambda > \frac{1}{4}$, що при кожному з них множина E_λ має нульову міру Лебега, але не було явно вказано цих значень.

Основним результатом даного підрозділу є теорема 3.2, яка дає повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множини E_λ неповних сум ряду при конкретному фіксованому значенні $\lambda = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \equiv q$, яке може бути більшим за $\frac{1}{4}$ і належить M_0. Основний акцент зроблено на вивченні її фрактальних властивостей, чого не було зроблено вище згаданими дослідниками.

Теорема 3.2. *Множина* E_q *неповних сум ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *є*

1) відрізком $[0, \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}]$, *якщо* $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}),$$

якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1)$.

У підрозділі 3.2 побудовано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який володіє властивістю

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{r_n} = +\infty,$$

а множина його неповних сум має додатну розмірність Гаусдорфа–Безиковича. Це ряд виду

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + ... + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{2^{n-1}} + ...,$$

для якого виконується рівність

$$\frac{c_k}{\widetilde{r}_k} = k+1, \quad k = 2^n - 1, \quad n = 1, 2, 3, ... \ ,$$

$$\widetilde{r}_k = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} b_k = \underbrace{c_{n+1} + ... + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + ... + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + ... =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + ... \ ,$$

$$c_n = b_{2^{n-1}} = b_{2^{n-1}+1} = b_{2^{n-1}+2} = ... = b_{2^n-1}.$$

Теорема 3.3. *Множина* $E\{b_n\}$ *є суперфрактальною множиною, тобто нуль-множиною Лебега, розмірності Гаусдорфа-Безиковича, рівної 1.*

У підрозділі 3.3 досліджується множина D_λ неповних сум однопараметричної сім'ї рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 8\lambda+4\lambda+3\lambda+2\lambda+8\lambda^2+4\lambda^2+3\lambda^2+2\lambda^2+...+8\lambda^k+4\lambda^k+3\lambda^k+2\lambda^k+... \ ,$$

де λ – дійсне число з $(0, 1)$.

Теорема 3.4. *Множина* D_λ *неповних сум ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *є*

1) нуль-множиною Лебега при $\lambda \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$*;*

2) відрізком $[0, \frac{17\lambda}{1-\lambda}]$ *при* $\lambda \in \left[\frac{2}{19}, 1\right)$*;*

3) множиною додатної міри Лебега при майже всіх (відносно міри Лебега) значеннях $\lambda \in \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{19}\right)$*;*

4) симетричним канторвалом при $\lambda \in \left[\frac{1}{14}, \frac{2}{19}\right)$.

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Миколі Вікторовичу Працьовитому за постановку задач, за допомогу, підтримку і терпіння.

Присвячується світлій пам'яті моєї матері

Савченко Олені Василівні

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цьому розділі розглядаються деякі загальні властивості множин неповних сум числових рядів.

1.1. Неповна сума (підсума) ряду та множина його підсум

Розглядається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \ . \tag{1.1}$$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x = x(M) = \sum_{n\in M\subset\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1.1), а кожен ряд виду $\sum\limits_{n\in M\subset\mathbb{N}} a_n$ назвемо *підрядом* ряду (1.1).

Множину всіх неповних сум ряду (1.1) позначатимемо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x: \ x = \sum_{n\in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\} =$$

$$= \left\{ x: \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0,1\} \right\},$$

і називатимемо *множиною неповних сум (множиною підсум)* ряду (1.1).

Зрозуміло, що всі частинні суми $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ і залишки $r_n \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ряду (1.1) є його неповними сумами. Якщо ряд (1.1) є збіжним знакододатним, то $E\{a_n\} \subseteq [0, r_0]$.

Приклад 1.1. Множина неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ є відрізком $[0,1]$, тобто $E\{2^{-n}\}=[0,1]$.

Приклад 1.2. Множина підсум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ є класичною множиною Кантора, тобто $E\{2{\cdot}3^{-n}\}=C_0$, оскільки кожне число $y\in C_0$ можна подати у вигляді трійкового ряду із забороною на вживання цифри “1”:

$$y=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+...+\frac{\alpha_n}{3^n}+...=\frac{2\varepsilon_1}{3}+\frac{2\varepsilon_2}{3^2}+...+\frac{2\varepsilon_n}{3^n}+...,\ \ \alpha_n\in\{0,2\},\ \varepsilon_n\in\{0,1\}.$$

Приклад 1.3. Множина неповних сум ряду із загальним членом $a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10^n}$ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Наведені приклади мотивують наше дослідження. Суттєва топологічна відмінність між множинами неповних сум перших двох рядів наштовхує на природні запитання. Якими ще можуть бути множини підсум рядів? І які властивості послідовностей членів рядів роблять їх множини неповних сум такими різними?

1.2. Множина неповних сум абсолютно збіжного ряду

Якщо ряд (1.1) є абсолюно збіжним, то його множина неповних сум – досконала і може бути як нуль-множиною Лебега, так і множиною додатної міри, а тому вона є потенційно лініним фракталом. Встановимо зв’язок між множиною неповних сум абсолютно збіжного ряду (1.1) та множиною $E\{|a_n|\}$ підсум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+...\ . \tag{1.2}$$

Лема 1.1. *Якщо ряд* (1.1) *є абсолютно збіжним, то множини підсум* $E\{a_n\}$ *і* $E\{|a_n|\}$ *– ізоморфні.*

Доведення. Нехай $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ – сума всіх від’ємних членів ряду (1.1), а $\beta=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ – сума всіх його додатних членів.

Покажемо, що існує рух, який переводить множину $E\{a_n\}$ в множину $E\{|a_n|\}$. Нехай

$$M^- \equiv \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < 0\}, \quad M^+ \equiv \{n \in \mathbb{N} : \ a_n > 0\}$$

— множини індексів, які відповідають від'ємним і додатним членам ряду. Для довільної підсуми $x_0 = \sum\limits_{n \in M_0 \subset \mathbb{N}} a_n \in E\{a_n\}$ означимо множини

$$M_0^- \equiv \{n \in M_0 : \ a_n < 0\}, \quad M_0^+ \equiv \{n \in M_0 : \ a_n > 0\}.$$

Доведемо спочатку, що число $x_0 + |\alpha|$ є підсумою ряду (1.2). Маємо

$$x_0 - \alpha = \sum_{n \in M_0^-} a_n + \sum_{n \in M_0^+} a_n + \sum_{n \in M^-} |a_n| = \sum_{n \in (M^- \setminus M_0^-)} |a_n| + \sum_{n \in M_0^+} |a_n| \in E\{|a_n|\}.$$

Нехай $y_0 = \sum\limits_{n \in M_0 \subset \mathbb{N}} |a_n| \in E\{|a_n|\}$ – деяка підсума ряду (1.2). Покажемо тепер, що число $y_0 - |\alpha|$ є підсумою ряду (2.6). Маємо

$$y_0 + \alpha = \sum_{n \in M_0^-} |a_n| + \sum_{n \in M_0^+} |a_n| + \sum_{n \in M^-} a_n = \sum_{n \in (M^- \setminus M_0^-)} a_n + \sum_{n \in M_0^+} a_n \in E\{a_n\}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 1.1. Оскільки, множини неповних сум абсолютно збіжного ряду і ряду, утвореного із модулів його членів, – ізометричні, то надалі нас цікавитимуть в основному збіжні знакододатні ряди.

1.3. Тополого-метричний аналіз множин неповних сум

1.3.1. Огляд основних результатів. Тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду суттєво залежать від його властивостей, зокрема, "швидкості збіжності". Наступні три факти про множину $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1.1), у якого $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ встановили С. Какея [75] в 1914 році (і незалежно Г. Горнич [72] в 1941 р. та П. Кесава Менон [81] в 1948 р.).

Теорема 1.1 (Какея). *Множина неповних сум $E\{a_n\}$ збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є:*

1) досконалою множиною;

2) скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли

$$a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ – відрізок тоді й лише тоді, коли $a_n \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$);

3) гомеоморфною класичній множині Кантора, якщо

$$a_n > a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$$

для всіх достатньо великих n.

Зауваження 1.2. Наведене твердження не можна застосувати до дослідження топологічних властивостей множин неповних сум рядів, у яких послідовність членів (a_n) не є монотонно незростаючою, тобто умова

$$a_n \geqslant a_{n+1} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

не виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 1.4. Для ряду

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + ... + \frac{1}{4^k} + \frac{2}{4^k} + ...$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів n. А множина підсум даного ряду є відрізком $[0, 1]$, оскільки кожне число x, що є підсумою даного ряду, можна подати у вигляді четвіркового ряду:

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + ... + \frac{\alpha_k}{4^k} + ..., \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Приклад 1.5. Для ряду

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + ...$$

нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх парних номерів, а нерівність $a_n < r_n$ – для всіх непарних. І тому теорема 1 (без врахування умови монотонності членів ряду) не дає достатньої інформації про множину підсум даного ряду. Проте, після упорядкування членів ряду, нерівність $a_n > r_n$ виконуватиметься для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому множина його підсум є ніде не щільною.

Зауваження 1.3. Оскільки ряд (1.1) є абсолютно збіжним, то від перестановки членів даного ряду множина його неповних сум не зміниться. Тому надалі вважатимемо (без втрати загальності), що для членів ряду (1.1) виконується умова (1.3).

У вище згаданій роботі [75] С. Какея висунув припущення, що необхідною і достатньою умовою ніде не щільності множини $E\{a_n\}$ є існування зліченної кількості членів ряду, для яких $a_n > r_n$. Перший контрприклад до цієї гіпотези навели в 1980 р. А. Вайнштейн і Б. Шапіро [5], розглянувши ряд

$$1 = \frac{10}{3}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8\cdot\frac{1}{10} + 7\cdot\frac{1}{10} + 6\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} +$$
$$+8\cdot\frac{1}{10^2} + 7\cdot\frac{1}{10^2} + 6\cdot\frac{1}{10^2} + 5\cdot\frac{1}{10^2} + 4\cdot\frac{1}{10^2} +$$
$$8\cdot\frac{1}{10^3} + 7\cdot\frac{1}{10^3} + ...,$$

тобто $b_n = \frac{3}{10}\cdot(9-m)\cdot 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \{1,2,3,4,5\}$ і $n = 5(k-1)+m$.

Для цього ряду

$$b_{5k+1} = 0,24{\cdot}10^{-k},\ \ b_{5k+2} = 0,21{\cdot}10^{-k},\ \ b_{5k+3} = 0,18{\cdot}10^{-k},\ \ b_{5k+4} = 0,15{\cdot}10^{-k},$$

$$b_{5k+5} = 0,12\cdot 10^{-k} > r_{5k+5} = 0,1\cdot 10^{-k},\quad k = 0,1,2,\dots .$$

Множина $E\{b_n\}$ підсум даного ряду містить відрізок $[2/15,\ 13/15]$ (автори написали, що нескладно це показати). Ф. Прус-Вішньовський [92] зазначає, що крім цього правильного твердження у роботі містяться хибні твердження (теореми 2 і 5).

У 1984 р. Ц. Ференс [68] опублікував з нетривіальним доведенням інший приклад ряду, множина підсум якого є канторвалом. Він розглянув ряд із загальним членом

$$a_n = \frac{1}{2}(8-m)\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^k,$$

де $k \in \mathbb{N}$ і $m \in \{1,2,3,4,5\}$ – єдина пара натуральних чисел таких, що $n = 5(k-1)+m$. Зокрема

$$2\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7\cdot\frac{2}{27} + 6\cdot\frac{2}{27} + 5\cdot\frac{2}{27} + 4\cdot\frac{2}{27} + 3\cdot\frac{2}{27} +$$

$$+7\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^2 + ... + 3\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{2}{27}\right)^3 + ... \,.$$

Легко бачити, що сума цього ряду дорівнює 1 і його члени утворюють спадну послідовність.

Простіший приклад у 1988 р. представили Дж. Ґатрі і Дж. Німан [69]:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + ... \,. \tag{1.4}$$

Для цього ряду, як і у вище наведених прикладах, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leqslant r_n$ виконуються для нескінченних множин індекса n, а множина T неповних сум ряду (1.4) містить відрізок $[\frac{3}{4}, 1]$ і не є скінченним об'єднанням відрізків. Множину T можна означити наступним чином

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C – класична множина Кантора, G_k – об'єднання всіх центральних третин, які вилучаються із відрізка $[0,1]$ на k-му кроці побудови множини C. В цій же роботі [69], автори сформулювали теорему, яку було остаточно довену в [85]. Наведемо її.

Теорема 1.2 (Ґатрі–Німан–Сеінз). *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного знакододатного ряду* (1.1) *є однією з наступних:*

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора;

3) гомеоморфною множині T неповних сум ряду (1.4).

1.3.2. Арифметичні суми множин підсум.

Означення 1.1. *Арифметичною (векторною) сумою* множин A і B називається множина

$$C = A \oplus B = \{x : \ x = a + b, \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Арифметичною (векторною) різницею множин A і B називається множина

$$C = A \ominus B = \{x : \ x = a - b, \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Добре відомим є той факт [98], що арифметична сума двох класичних множин Кантора C є відрізком $[0,2]$, тобто $C \oplus C = [0,2]$.

Теорема 1.3 (Штейнгауз, [98]). *Нехай E — множина додатної міри Лебега з $\mathbb{R}^1$. Тоді множина $E \ominus E$ містить відкритий окіл нуля.*

Наслідок 1.1. *Нехай E — множина додатної міри Лебега з $\mathbb{R}^1$. Тоді множина $E \oplus E$, що є арифметичною сумою множин, містить відкритий окіл свого центру.*

Нехай $(E^{(j)})_{j=1}^{s}$ – послідовність, яка складається з $s \geqslant 2$ однакових множин E, тобто

$$(E, E, ..., E) \equiv (E^{(j)})_{j=1}^{s}.$$

Розглянемо арифметичну суму:

$$E_s = \bigoplus_{j=1}^{s} E^{(j)}.$$

Теорема 1.4 ([86]). *Існує натуральне m, для якого E_m є скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} < \infty.$$

Більше того, найменше натуральне m, для якого E_m є скінченним об'єднанням відрізків є найменшим натуральним m таким, що $\frac{a_n}{r_n} \leqslant m$ для всіх, за виключенням скінченної кількості натуральних n.

1.3.3. Циліндричні множини та деякі допоміжні твердження. З метою вивчення властивостей множини $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1.1), корисними є поняття *циліндра* та *циліндричного відрізка*.

Означення 1.2. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ – фіксований впорядкований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (1.1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Зокрема, для кожного натурального n має місце рівність

$$\Delta'_{c_1...c_{n-1}1} = a_n \oplus \Delta'_{c_1...c_{n-1}0}.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m},\ \sup \Delta'_{c_1...c_m}] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n,\ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

З означень випливають наступні *властивості циліндричних множин*:

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, $\inf \Delta_{c_1...c_m} = \inf \Delta'_{c_1...c_m}$, $\sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta'_{c_1...c_m}$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m0} \cup \Delta'_{c_1...c_m1}$.

3) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \quad (m \to \infty).$$

4) Для довільної послідовності (c_m) нулів та одиниць має місце

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1...c_m} \equiv \Delta_{c_1...c_m...} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m = x \in E\{a_n\} \subset [0, r_0].$$

5) $E\{a_n\} \subset F_{m+1} \subset F_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, де $F_m = \bigcup\limits_{c_i\in\{0,1\}, i=\overline{1,m}} \Delta_{c_1\ldots c_m}$.

6) $E\{a_n\} = \lim\limits_{m\to\infty} F_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$.

7) Умова

$$\Delta_{c_1..c_{2n-2}0} \cap \Delta_{c_1..c_{2n-2}1} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}0111} = \Delta_{c_1..c_{2n-2}1000}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \qquad (1.5)$$

рівносильна рівності

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \; . \qquad (1.6)$$

8) Множини $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$ і $\Delta'_{(1-c_1)\ldots(1-c_m)}$ симетричні відносно середини відрізка $[0, r_0]$, оскільки з $x' \in \Delta'_{c_1\ldots c_m}$ випливає, що $x' = r_0 - x \in \Delta'_{(1-c_1)\ldots(1-c_m)}$.

9) Множини $\Delta'_{c_1\ldots c_m 0}$ і $\Delta'_{c_1\ldots c_m 1}$ – симетричні відносно середини циліндричного відрізка $\Delta_{c_1\ldots c_m}$.

З останніх двох властивостей циліндричних множин випливає наступне твердження.

Лема 1.2. *Множина неповних сум ряду* (1.1) *є симетричною відносно середини відрізка* $[0, r_0]$.

Лема 1.3. *Якщо для ряду* (1.1) *виконується нерівність нерівність* $a_n > r_n$ *для деякого* n, *то множина* $[0; r_0]$ *не містить інтервали* $(r_n; a_n)$ *і* $(r_0 - a_n;\ r_0 - r_n)$.

Доведення. Оскільки для членів збіжного ряду (1.1) виконується нерівність (1.3), то справдливими є наступні нерівності

$$0 \leqslant r_n < a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant ... \leqslant a_1 \leqslant r_0 - a_n = S_{n-1} + r_n < S_{n-1} + a_n = S_n = r_0 - r_n,$$

звідки і випливає, що

$$E\{a_n\} \cap \left(\ (r_n;\ a_n) \cup (S_{n-1} + r_n;\ S_{n-1} + a_n)\ \right) = \varnothing.$$

Лему доведено. □

Наслідок 1.2. *Якщо для ряду* (1.1) *нерівність* $a_n > r_n$ *виконується для нескінченної множини значень індекса* n, *то множина* $E\{a_n\}$ *не є скінченним об'єднанням відрізків.*

Теорема 1.5. *Множина неповних сум ряду* (1.1) *є континуальною.*

Доведення. Поставимо у відповідність кожній неповній сумі $x = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$ число

$$y = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_n}{2^n} + ... \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \quad \alpha_n \in A = \{0, 1\}.$$

Зрозуміло, що дане відображення не є бієктивним, оскільки дві різні неповні суми x та x' можуть мати одне й те ж значення (не виконується ін'єкція). Але бієкції можна досягти за рахунок "проріджження" ряду. Оскільки $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то можна виділити підряд ряду (1.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + \widetilde{r}_n, \quad b_1 > b_2 > ... > b_n > b_{n+1} > ...,$$

для якого, нерівність $b_n > \widetilde{r}_n$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Кожній підсумі $\widetilde{x}$ утвореного ряду можна поставити у відповідність єдину послідовність з $L = A \times A \times ... = A^{\infty}$:

$$\widetilde{x} = \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...} \leftrightarrow y = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}.$$

Якщо $\widetilde{x}_1 \neq \widetilde{x}_2$, то і $(\varepsilon^{(1)}_1, \varepsilon^{(1)}_2, ..., \varepsilon^{(1)}_n, ...) \neq (\varepsilon^{(2)}_1, \varepsilon^{(2)}_2, ..., \varepsilon^{(2)}_n, ...)$, і навпаки. Нехай j — номер перших відмінних цифр $\varepsilon^{(1)}_j$ і $\varepsilon^{(2)}_n$) послідовностей

$$(\varepsilon^{(1)}_n) = (\varepsilon^{(1)}_1, \varepsilon^{(1)}_2, ..., \varepsilon^{(1)}_{j-1}, 1, \varepsilon^{(1)}_{j+1}, ...), \quad (\varepsilon^{(2)}_n) = (\varepsilon^{(2)}_1, \varepsilon^{(2)}_2, ..., \varepsilon^{(2)}_{j-1}, 1, \varepsilon^{(2)}_{j+1}, ...),$$

де $\varepsilon^{(1)}_n = \varepsilon^{(2)}_n$, $n = \overline{1, j-1}$. Різниця

$$\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 = \varepsilon^{(1)}_1 a_1 + ... + \varepsilon^{(1)}_{j-1} a_{j-1} - \varepsilon^{(2)}_1 a_1 + ... + \varepsilon^{(2)}_{j-1} a_{j-1} + a_j - (\widetilde{r}_j) > 0.$$

Отже, множина підсум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — континуальна. Врахувавши, що для кожної неповної суми $x = \Delta_{\varepsilon_1...\varepsilon_n...}$ знайдеться одна послідовність нулів та одиниць (ε_n), якій відповідає деяке число $y = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, то множина $E\{a_n\}$ не більше ніж континтинуальна. Оскільки встановлено існування континуальної підмножини множини $E\{a_n\}$, то й сама множина $E\{a_n\}$ є континуальною. Теорему доведено. □

1.3.4. Зв'язок між видами збіжності рядів та їх множинами неповних сум.

Лема 1.4 ([57]). *Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є розбіжним знакододатним рядом і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то кожне додатнє число можна подати у вигляді нескінченної кількості різних підсум даного ряду.*

Теорема 1.6. *Нехай*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad a_n > 0, \quad a_n \to 0.$$

Тоді для кожного $K > 0$ існує континуальна множина чисел $x \in (0,1\rangle$ таких, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) a_n = K$.

Наступна теорема встановлює зв'язок між видами збіжності рядів та їх множинами неповних сум.

Теорема 1.7 ([92]). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ є*

1) швидко розбіжним тоді й лише тоді, коли множина $E\{b_n\} = [0; +\infty)$;

2) умовно збіжним тоді й лише тоді, коли $E\{b_n\} = \mathbb{R}$;

3) абсолютно збіжним тоді й лише тоді, коли $E\{b_n\}$ є обмеженою.

1.4. Фрактальний аналіз

Для тоншої характеризації множини нульової міри Лебега можна використовувати апарат теорії фракталів (фрактальної геометрії і фрактального аналізу). Нагадаємо деякі теоретичні відомості з теорії фракталів, зокрема означення $\mathcal{H}^{\alpha}-$*міри Гаусдорфа* і *розмірності Гаусдорфа-Безиковича* множини $E \subset \mathbb{R}^1$, які більш тонко характеризують "масивність" множин у випадку їх нуль-мірності (у розумінні міри Лебега).

1.4.1. Міра Гаусдорфа, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, фрактали. Нехай E – обмежена підмножина метричного простору (X,ρ). Через $d(E)$ позначимо діаметр множини E, тобто

$$d(E) \equiv \sup\{\rho(x,y): \ x,y \in E\}.$$

Діаметром множини E є найбільша відстань між точками з E.

Зауваження 1.4. Діаметр лінійної множини E позначатимемо через $|E|$.

Означення 1.3. Нехай ε – додатна константа. Скінченне або зчисленне сімейство $\{E_j\}$ множин називається *ε-покриттям* множини E, якщо $E \subset \bigcup\limits_j E_j$, де

$$d(E_j) \leqslant \varepsilon, \quad E_j \in X, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Означення 1.4. Нехай α і ε – додатні числа, *α – ε-мірою Гаусдорфа* (*наближаючою мірою* порядку ε) обмеженої множини E називається

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E) \equiv \inf_{d(E_j)\leqslant\varepsilon}\left\{\sum_j d(E_j)^{\alpha}\right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in X$.

Означення 1.5. Нехай α — фіксоване додатне число, *α–вимірною мірою ($\mathcal{H}^{\alpha}$-мірою) Гаусдорфа* обмеженої множини E називається значення функції множини, визначеної рівністю

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E) = \sup_{\varepsilon>0}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E)$$

і точна нижня грань визначається за всіма можливими не більш ніж зчисленними покриттями множини M відрізками E_j, діаметри $d(E_i)$ яких не перевищують ε.

Зрозуміло, що границя $\mathcal{H}^\alpha(E)$ завжди існує, хоча й граничне значення може бути (і зазвичай є) 0 або ∞.

Розглянемо деякі основні *властивості* α-мірної міри Гаусдорфа (див. [66, 93]). Зафіксуємо $\beta > \alpha > 0$.

1. Якщо $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, то $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$.

2. Якщо $\mathcal{H}^\beta(E) > 0$, то $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$.

3. Якщо $E \subset E'$, то $\mathcal{H}^\alpha(E) \leqslant \mathcal{H}^\alpha(E')$.

4. Якщо $E \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} E_j$, то $\mathcal{H}^\alpha(E) \leqslant \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\alpha(E_j)$.

Означення 1.6. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha: \ \mathcal{H}^\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha: \ \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича множини* E.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича має наступні *властивості*:

1. $\alpha_0(E) = 0$ для довільної не більш ніж зчисленної множини E;

2. якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2)$;

3. якщо E_1 і E_2 – афінно еквівалентні, зокрема геометрично подібні, множини, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$;

4. $\alpha_0\left(\bigcup\limits_n E_n\right) = \sup\limits_n \alpha_0(E_n)$.

Оскільки α-вимірна міра Гаусдорфа у просторі $\mathbb{R}^1$ при $\alpha = 1$ є зовнішньою мірою Лебега, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин додатної міри Лебега дорівнює 1.

Означення 1.7 ([35], с. 59). *Фракталом* називається кожна континуальна обмежена множина простору $\mathbb{R}^1$, яка має тривіальну (що дорівнює 0 або ∞) H^α-міру Гаусдорфа, порядок α якої дорівнює топологічній розмірності.

Означення 1.8. Множини нульової міри Лебега простору $\mathbb{R}^1$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича яких дорівнює 1, називаються *суперфракталь-*

ними, а континуальні множини, що мають нульову розмірність Гаусдорфа-Безиковича, — *аномально фрактальними.*

Найпростішим класом фракталів є *самоподібні фрактали.*

Відображення g метричного простору $\mathbb{R}^1$ на себе, при якому відстані між точками змінюються в одному і тому ж відношенні $k > 0$, називається *перетворенням подібності.* При цьому число k називають *коефіцієнтом подібності.*

Кажуть, що множина $E \subset \mathbb{R}^1$ *подібна* множині $E' \subset \mathbb{R}^1$ з *коефіцієнтом подібності* $k > 0$, якщо існує відображення $g : E \to E'$ таке, що

$$\frac{|g(x_2) - g(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = k \quad \text{для всіх} \quad x_1, x_2 \in E.$$

Символічно це записують так: $E \overset{k}{\sim} E'$.

Означення 1.9 ([50]). Непорожня обмежена множина E простору $\mathbb{R}^1$ називається самоподібною, якщо

$$\begin{cases} 1) \ E = E_1 \cup ... \cup E_n, \ n > 1, \\ 2) \ E \overset{k_i}{\sim} E_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ 3) \ \alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E) \quad \forall i \neq j, \end{cases} \tag{1.7}$$

тобто множина E самоподібна, якщо її можна подати у вигляді скінченного об'єднання власних підмножин E_i, які подібні E (взагалі кажучи, кожна зі своїм коефіцієнтом подібності k_i), причому розмірність Гаусдорфа-Безиковича перетину довільних двох таких підмножин менша, ніж розмірність самої множини E. Найменше таке число n називається показником самоподібності, а (K, n) – законом самоподібності $K = \{k_1, ..., k_n\}$.

Означення 1.10 ([50]). Якщо E – самоподібна множина з законом самоподібності (K, n), $K = \{k_1, ..., k_n\}$, то додатне число α, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + ... + k_n^x = 1, \tag{1.8}$$

називається *самоподібною розмірністю* множини E і позначається $\alpha_s(E)$

Оскільки рівняння (1.8) завжди має єдиний додатний корінь, то означення самоподібної розмірності є коректним.

Лема 1.5 ([50]). *Якшо E – самоподібна множина, існує таке α, що $0 < \mathcal{H}^{\alpha}(E) < \infty$, то її самоподібна розмірність дорівнює розмірності Гаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_s(E) = \alpha_0(E)$.*

Теорема 1.8 ([50]). *Якщо E – обмежена замкнена самоподібна множина простору $\mathbb{R}^1$, то її самоподібна розмірність дорівнює розмірності Гаусдорфа-Безиковича.*

1.4.2. Розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини відносно деякого сімейства покриттів.

Нагадаємо [14], що сімейство Φ_X підмножин метричного простору (X, ρ) називається *сімейством тонких покриттів* обмеженої множини X, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує ε-покриття E_j множини X таке, що

$$E_j \in \Phi_X, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Означення 1.11. Нехай α і ε – додатні числа, $\alpha - \varepsilon$*-мірою Гаусдорфа* обмеженої множини $E \subset X$ відносно заданого сімейства тонких покриттів називається

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi_X) \equiv \inf_{d(E_j) \leqslant \varepsilon} \left\{ \sum_j d(E_j)^{\alpha} \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш ніж зчисленними ε-покриттями $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ множини E, де $E_j \subset \Phi_X$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Означення 1.12. Нехай α — фіксоване додатне число, *α–вимірною мірою ($\mathcal{H}^{\alpha}$-мірою) Гаусдорфа* обмеженої множини $E \subset X$ відносно заданого сімейства покриттів Φ_X називається

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E, \Phi_X) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(E, \Phi_X).$$

Означення 1.13. Невід'ємне число

$$\alpha_0(E,\Phi_X) = \inf\{\alpha:\ \mathcal{H}^\alpha(E,\Phi_X)=0\} = \sup\{\alpha:\ \mathcal{H}^\alpha(E,\Phi_X)=+\infty\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа-Безиковича* множини $E \subset X$ *відносно сімейства тонких покриттів* Φ_X.

Означення 1.14. Сімейство тонких покриттів Φ_X називається *довірчим сімейством покриттів* (*недовірчим сімейством покриттів*) для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича на $X \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\alpha_0(E,\Phi_X) = \alpha_0(E), \quad \forall E \subseteq X$$

$$(\text{відповідно: } \exists E \subseteq X:\ \alpha_0(E,\Phi_X) \neq \alpha_0(E)).$$

Умови довірчості сімейств покриттів досліджувались багатьма науковцями ([14], [33], [51], [61], [65]). Перші кроки в цьому напрямку зробив А. Безикович [59], який довів довірчість сімейства циліндрів, породжених двійковим розкладом дійсного числа. Його результат узагальнили П. Біллінгслі ([61]) для сімейства $s-$адичних циліндрів, М. Працьовитий [42] – для сімейства $Q-S-$циліндрів, а С. Альбеверіо і Г. Торбін – для сім'ї Q^*-циліндрів за умови, що елементи p_{0k}, $p_{(s-1)k}$ матриці Q^* відокремлені від нуля.

Наступна лема дає загальні необхідні і достатні умови довірчості систем покриттів. Вважатимемо, що для довільної додатної константи C виконується умова

$$+\infty \leqslant C\cdot(+\infty).$$

Лема 1.6 ([51]). *Нехай* Φ *– сімейство тонких покриттів на* $[0,1]$. *Тоді* Φ *є довірчою на одиничному відрізку тоді й лише тоді, коли існує додатна константа* C *така, що для довільної* $E \subset [0,1]$, *довільного* $\alpha \in (0,1]$ *і довільного* $\delta \in (0,\alpha)$ *виконується нерівність*

$$H^\alpha(E,\Phi) \leqslant C\cdot H^{\alpha-\delta}(E). \tag{1.9}$$

Використовуючи попередню лему, можна отримати наступну достатню умову довірчості сімейства тонких покриттів.

Лема 1.7 ([51]). *Нехай Φ — сімейство тонких покриттів на E. Нехай існує додатна константа C і функція $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$ така, що:*

1) для довільної множини $I \subset E$ існує не більше, ніж $f(|I|)$ підмножин

$$\Delta_1^I,\ \Delta_2^I,\ ...,\ \Delta_{l(I)}^I \in \Phi,$$

де

$$l(I) \leqslant f(|I|),\ |\Delta_j^I| \leqslant |I|,\ E \cap I \subset \bigcup_{j=1}^{l(I)} \Delta_j^I;$$

2) для довільного $\delta > 0$ існує $\varepsilon_1(\delta) > 0$ таке, що

$$f(|I|) \cdot |I|^{\delta} \leqslant C,\ \forall I \subset E,\ |I| < \varepsilon_1(\delta). \tag{1.10}$$

Тоді сімейство Φ є довірчим на E.

1.4.3. Фрактальні властивості множини неповних сум ряду. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — збіжний знакододатний ряд, нехай $a_n > r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що $\frac{r_{n+1}}{r_n} < \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. На проміжку $(0,\ \alpha]$ означимо функцію $f(x)$ так: $f(0) = 0$ і для $0 < x \leqslant \alpha$ нехай $f(x) = -\log_x 2$.

Теорема 1.9 (Шалат, [94]). *Мають місце наступні нерівності:*

$$f(l) \leqslant \alpha_0(E\{a_n\}) \leqslant f(L),$$

де

$$l = \varliminf_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$$

і функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(0, \frac{1}{2})$.

Наслідок 1.3 ([94]). *Якщо існує $l^* = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$, то $\alpha_0(E\{a_n\}) = f(l^*)$. Отже, для $l^* > 0$ справедлива рівність $\alpha_0(E\{a_n\}) = -\log_{l^*} 2$.*

Із результату теореми 1.9 легко отримати співвідношення між $\alpha_0(E\{a_n\})$ і величинами членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в двох "крайніх" випадках.

Теорема 1.10 ([94]). *Нехай $\alpha_0(E\{a_n\}) = 0$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує нескінченна кількість натуральних чисел n таких, що $a_{n+1} < \varepsilon a_n$.*

Теорема 1.11 ([94]). *Нехай $\alpha_0(E\{a_n\}) = 1$. Тоді для кожного $q \in (0, \frac{1}{2})$, існує нескінченна кількість натуральних чисел n таких, що $a_{n+1} > qa_n$.*

Введемо позначення: $\delta_n \equiv \frac{a_n}{r_n}$.

Теорема 1.12 (Працьовитий, [35]). *Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нерівність $\delta_n \geqslant 1$ виконується для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум $E\{a_n\}$ дорівнює*

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = \left[\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_2(\delta_k + 1)\right)\right]^{-1}.$$

Наслідок 1.4 ([35]). *Якщо виконуються умови теореми 1.12 і $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta$, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{a_n\}$ дорівнює*

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = \log_2^{-1}(\delta + 1).$$

Наслідок 1.5 ([35]). *Якщо виконуються умови теореми 1.12 і $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 1$, то $\alpha_0(E\{a_n\}) = 1$ і множина $E\{a_n\}$ є суперфрактальною.*

Наслідок 1.6 ([35]). *Якщо виконуються умови теореми 1.12 і $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \infty$, то $\alpha_0(E\{a_n\}) = 0$ і множина $E\{a_n\}$ є аномально фрактальною.*

Теорема 1.13 (Працьовитий–Торбін, [37]). *Для довільної послідовності (a_n) розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини неповних сум $E\{a_n\}$ задовольняє нерівність*

$$\alpha_0(E\{a_n\}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{n \ln 2}{-\ln r_n}.$$

Якщо додатково ще $a_n \geqslant r_n$ для всіх достатньо великих k, то

$$\alpha_0(E\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty}\inf \frac{n \ln 2}{-\ln r_n}.$$

1.5. Канторвали

В даному підрозділі ми використовуємо термінологію, орієнтуючись на роботи [31, 80, 92].

Зв'язні компоненти замкнених множин $D \subset \mathbb{R}$ є або відрізками, або одноточковими множинами (*сінглтонами*). Інтервали, які є зв'язними компонентами замкненої множини D називають *D-інтервалами*, тоді як одноточкові зв'язні компоненти множини D називаються *вільними точками множини D*.

Відкриті інтервали, які є зв'язними компонентами множини D, називають *D-щілинами.* Якщо D є обмеженою, то дві необмежені D-щілини називають *зовнішніми D-щілинами.* Обмежені D-щілини називають *внутрішніми D-щілинами.*

Нехай C – класична можина Кантора. Порядок внутрішніх C-щілин визначається номером кроку побудови множини Кантора, при якому дана щілина вилучається з $[0, 1]$. Так, наприклад $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ є C-щілиною порядку 1, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ є однією з двох C-щілин порядку 2, а $\left(\frac{19}{81}, \frac{20}{81}\right)$ – одна з восьми C-щілин 4-го порядку.

Говоритимемо, що послідовність (I_n) інтервалів з $\mathbb{R}$ *збігається* до точки $x \in \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in N \qquad I_n \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Класична множина Кантора C володіє наступними властивостями:

1) Між двома довільними C-щілинами міститься C-щілина парного порядку і C-щілина непарного порядку;

2) Кожна точка множини C є границею послідовності C-щілин парного рангу і C-щілин непарного рангу;

3) Множина межових точок усіх C-щілин непарного рангу є щільною в C.

Означення 1.15. *Симетричним канторвалом (М–канторвалом)* називається множина, гомеоморфна множині T неповних сум ряду (1.4).

Іншу характеристику М–канторвалів дали П. Мендес і Ф. Олівейра в роботі [80].

Означення 1.16. Досконала підмножина з $\mathbb{R}$ така, що довільна щілина з кожної сторони накопичує нескінченну кількість інтервалів і щілин, називається *М–канторвалом.*

Такі множини складаються з точок, інтервалів і щілин, які по обидві сторони накопичуються у вигляді дерева.

Означення 1.17. *Симетричним канторвалом* (*М–канторвалом*) називається компактна підмножина S дійсної прямої така, що

1) S є замиканням множини своїх внутрішніх точок (тобто, нетривіальні компоненти є щільними);

2) обидві межові точки кожної нетривіальної компоненти з S є точками накопичення (тобто, одноточковими) компонентами з S.

Лема 1.8 ([80]). *Довільні два симетричні Канторвали є гомеоморфними.*

Теорема 1.14 ([92]). *Непорожня обмежена множина $P \subset \mathbb{R}$ є гомеоморфною множині T тоді й лише тоді, коли P–щілини й P–інтервали не мають спільних кінцевих точок і об'єднання всіх P–інтервалів є щільним в P.*

Теорема 1.15 ([92]). *Непорожня обмежена множина $P \subset \mathbb{R}$ є М–Канторвалом тоді й лише тоді, коли всі кінцеві точки P–щілин є границями послідовностей P–інтервалів і границями послідовностей P–щілин.*

Висновки до розділу 1

Даний розділ має вступний характер. В ньому розкрито історію питань, пов'язаних з тематикою роботи, наведено огляд основних праць з теми дослідження та результатів, які використовуються в роботі. В ньому ми дали означення ключових понять, навели приклади, довели деякі допоміжні твердження.

Основні результати цього розділу доповідалися на наукових семінарах та конференціях.

РОЗДІЛ 2
МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РЯДІВ

Будемо казати, що ряд (1.1) володіє властивістю однорідності (по n), якщо існує ціле невід'ємне число k і функція f такі, що

$$r_n \vee f(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k+1})$$

для всіх натуральних $n \geqslant k$, де символ «$\vee$» означає один із знаків: "$>$", "$<$", "$\leqslant$", "$\geqslant$", "$=$". В даному розділі досліджуються в основному множини неповних сум рядів, які володіють деякою властивістю однорідності по n.

2.1. Множина підсум збуреного геометричного ряду

Добре відомо, що множина підсум геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ є

1) *самоподібною множиною, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює* $\log_{\frac{1}{\lambda}} 2$*, при* $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$;

2) *відрізком* $[0, \frac{\lambda}{1-\lambda}]$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n = \lambda + 2\lambda^2 + ... + n\lambda^n + ..., \tag{2.1}$$

де λ – фіксоване дійсне число з $(0, 1)$.

Проведемо дослідження властивостей множини підсум даного ряду, яку позначатимемо через E_n. Відшукаємо суму та залишки ряду (2.1). Нехай $S_m = \sum_{n=1}^{m} n\lambda^n$ — послідовність його частинних сум. Запишемо різницю

$$S_m - \lambda S_m = \lambda + \lambda^2 + ... + m\lambda^m - m\lambda^{m+1} = \frac{\lambda(1-\lambda^m)}{1-\lambda} - m\lambda^{m+1}.$$

Звідки маємо

$$S_m = \frac{\lambda(1-\lambda^m(1+m)+m\lambda^{m+1})}{(1-\lambda)^2}.$$

Перейшовши до границі при $m \to \infty$, отримаємо

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}.$$

Залишки ряду (2.1) мають вигляд

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} n\lambda^n = S - S_m = \frac{\lambda^{m+1}(1+m(1-\lambda))}{(1-\lambda)^2}.$$

Очевидно, що множина неповних сум ряду (2.1) належить відрізку $[0, \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}]$, але не завжди з ним співпадає. Вивчимо це питання детально.

Теорема 2.1. *Множина E_n неповних сум ряду* (2.1) *є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E_n) = -\log_\lambda 2;$$

2) відрізком $\left[0, \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\right]$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Доведення. 1) Покажемо, що нерівність $r_n > a_n$ виконується скінченну кількість разів при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, тобто існує такий номер $N(\lambda)$, що нерівність $a_n > r_n$ виконується для всіх $n \geqslant N(\lambda)$. Розв'язавши нерівність

$$\frac{\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}(n(1-\lambda)+1) < n\lambda^n$$

відносно n, отримаємо:

$$n > \frac{\lambda}{2\lambda^2 - 3\lambda + 1} = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)}.$$

Легко бачити, що остання нерівність виконується з деякого номеру $N(\lambda)$, що означає $\Delta_{c_1\ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n 1} = \varnothing$ для всіх $n \geqslant N(\lambda)$.

Множина E_n належить об'єднанню 2^n ізометричних циліндричних відрізків рангу n, довжина кожного з них дорівнює r_n, тому міра Лебега

$$\mu(E_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} r_n 2^n = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \lim_{n\to\infty} (2\lambda)^n (1 + n(1-\lambda)) = 0.$$

Отже, E_n є ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$.

Оскільки відношення

$$\delta_n = \frac{a_n}{r_n} = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda(1-\lambda) + \frac{\lambda}{n}} \to \frac{1-\lambda}{\lambda} \quad (n \to \infty),$$

то, згідно наслідку 1 теореми 1.12 (теореми 2.8.3 монографії [35]), розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин E_n дорівнює $\alpha_0(E_n) = -\log_\lambda 2$.

2) Покажемо, що $r_n - a_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$:

$$\frac{\lambda^{n+1}(1 + n(1-\lambda)) - n\lambda^n(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda^n(n(2\lambda - 1)(1-\lambda) + \lambda)}{(1-\lambda)^2} > 0.$$

Отже, $\Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1} \neq \varnothing$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому, згідно теореми 1.1, множина E_n є відрізком. Теорему доведено. $\square$

Проведемо аналогічні дослідження множини E_{n^2} неповних сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda^n = \lambda + 4\lambda^2 + 9\lambda^3 + \ldots + n^2\lambda^n + \ldots \,. \tag{2.2}$$

Знаходимо його суму:

$$S_n - \lambda S_n = \lambda + 3\lambda^2 + \ldots + (2n-1)\lambda^n - n^2\lambda^{n+1} =$$

$$2(\lambda + 2\lambda^2 + \ldots + n\lambda^n) - (\lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^n) - n^2\lambda^{n+1} =$$
$$\frac{2\lambda(1 - \lambda^n(1+n) + n\lambda^{n+1})}{(1-\lambda)^2} - \frac{\lambda(1-\lambda^n)}{1-\lambda} - n^2\lambda^{n+1},$$

звідки маємо

$$S_n = \frac{\lambda(1-\lambda^n)(1+n)}{(1-\lambda)^3} - \frac{2n\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2} - \frac{n^2\lambda^{n+1}}{1-\lambda}.$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо

$$S = \frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3},$$

знаходимо залишки ряду

$$r_n = \frac{\lambda^{n+1}(1+\lambda+2n(1-\lambda)+n^2(1-\lambda)^2)}{(1-\lambda)^3}$$

і відношення

$$\delta_n = \frac{(1-\lambda)^3}{\lambda(1-\lambda)^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{n} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{n^2}} \to \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

при $n \to \infty$.

Отже, маємо теорему, яка доводиться аналогічно попередній.

Теорема 2.2. *Множина E_{n^2} неповних сум ряду* (2.2) *є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E_{n^2}) = -\log_\lambda 2;$$

2) відрізком $[0, \frac{\lambda}{1-\lambda^2}]$ при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

З'ясуємо тепер, *якою властивістю має володіти функція $f(n)$, щоб розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин підсум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ співпадали при кожному значенні $\lambda \in (0,1)$.*

Нехай $0 < f(n)$ — функція, визначена на множині $\mathbb{N}$, яка володіє наступною властивістю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1. \qquad (2.3)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ називатимемо *збуреним геометричним рядом.* Його множину підсум позначатимемо через E_f.

Лема 2.1. *При $\lambda \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ є збіжним.*

Доведення. Скориставшись ознакою Даламбера, отримаємо

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)\lambda^{n+1}}{f(n)\lambda^n} = \lambda < 1.$$

Отже, даний ряд є збіжним. $\square$

Наслідок 2.1. *Якщо послідовність $f(n)$ задовольняє умову (2.3), то для довільного $\lambda \in (0,1)$ має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^n f(n) = 0.$$

Теорема 2.3. *Множина E_f є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E_f) = -\log_\lambda 2;$$

2) об'єднанням відрізків при $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Доведення. 1) Покажемо, що умова (2.3) рівносильна умові

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k)}{f(n)} = 1,$$

де k — довільне фіксоване натуральне число.

Перетворивши останню рівність, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k)\cdot f(n+k-1)\cdot ...\cdot f(n+2)\cdot f(n+1)}{f(n+k-1)\cdot f(n+k-2)\cdot ...\cdot f(n+1)\cdot f(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k)}{f(n+k-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+k-1)}{f(n+k-2)} \cdot ... \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)\lambda^n}{f(n+1)\lambda^{n+1} + f(n+2)\lambda^{n+2} + ...} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(n+1)}{f(n)}\lambda + \frac{f(n+2)}{f(n)}\lambda^2 + ... \frac{f(n+k)}{f(n)}\lambda^k + ...} = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

то при $\lambda < \frac{1}{2}$ нерівність $\delta_n \leqslant 1$ виконується скінченну кількість разів. Тому множина E_f є ніде не щільною. Оскільки вона належить об'єднанню 2^n циліндричних відрізків довжини r_n, то за властивістю напівадитивності міри Лебега маємо:

$$\mu(E_f) \leqslant \lim_{n\to\infty} 2^n r_n = \lim_{n\to\infty} 2^n (f(n+1)\lambda^{n+1} + f(n+2)\lambda^{n+2} + ...) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2\lambda)^n f(n) \left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\lambda + \frac{f(n+2)}{f(n)}\lambda^2 + ... + \frac{f(n+k)}{f(n)}\lambda^k + ... \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2\lambda)^n f(n)(\lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^n + ...) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \lim_{n\to\infty} a^n f(n),$$

де $a \in (0,1)$. За наслідком 2.1 границя $\lim\limits_{n\to\infty} a^n f(n) = 0$. Тому, $\mu(\Delta'_f) = 0$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, то згідно наслідку 1 теореми 2.8.3 [35] розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E_f дорівнює $\alpha_0(E_f) = -\log_\lambda 2$.

2) При $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$ нерівність $\delta_n > 1$ виконується лише скінченну кількість разів, тому за теоремою Какея множина E_f є об'єднанням скінченного числа відрізків. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 2.2. *Розмірності Гаусдорфа-Безиковича множин неповних сум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\lambda^n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ співпадають при кожному фіксованому значенні λ.*

Наслідок 2.3. *При кожному фіксованому значенні $\lambda \in (0,1)$ однакову розмірність Гаусдорфа-Безиковича мають множини неповних сум наступних рядів:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(n)\lambda^n$, *де* $g(n)$ *— монотонна й обмежена;*

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha \lambda^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(n)\lambda^n$.

Зауваження 2.1. Умова (2.3) не виконується для наступних функцій:

1) $f(n) = n^n$; 2) $f(n) = n!$; 3) $f(n) = a^n$, де $a > 1$.

2.2. Множини неповних сум рядів з однією лінійною властивістю однорідності

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд, члени якого задовольняють лінійне рекурентне співвідношення

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{2.4}$$

Зрозуміло, що послідовність (a_n) задається своїми першими трьома членами a_1, a_2, a_3. Нас цікавить вираз загального члена даної послідовності і властивості множини неповних сум рядів, що володіють даною властивістю.

Лема 2.2. *Загальний член послідовності* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2.4), *має вигляд*

$$a_n = (a_1 - x)\lambda_1^{n-1} + \varrho^{n-1}(x\cos\varphi(n-1) + y\sin\varphi(n-1)) =$$

$$= (a_1 - x)\lambda_1^{n-1} + \varrho^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\varphi(n-1)+\theta\right),$$

де

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\varrho}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\varrho}, \ \varrho = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$a = -\frac{1}{6}(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}, \quad \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3(17+3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}}\right), \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$x = \frac{a_1\lambda_1^2 - a_3}{(a-\lambda_1)^2+b^2}, \quad y = \frac{a_2 - a_1\lambda_1 - x(a-\lambda_1)}{b}.$$

Доведення. Рівняння (2.4) є лінійним різницевим третього порядку, частинні розв'язки якого мають вигляд $a_n = \lambda^n$ при деяких значеннях λ. Підставивши λ^n у рівність (2.4), отримаємо характеристичне рівняння даного різницевого рівняння:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

яке має корені

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \approx 0,5436890125,$$

$$\lambda_{2,3} := a \pm bi = -\frac{1}{6}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}\pm$$
$$\pm i\sqrt{3}2\left(\frac{1}{3}(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3(17 + 3\sqrt{33})^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння (2.4) має вигляд

$$a_n = C_1\lambda_1^{n-1} + C_2\lambda_2^{n-1} + C_3\lambda_3^{n-1} = C_1\lambda_1^{n-1} + C_2(a + bi)^{n-1} + C_3(a - bi)^{n-1} =$$

$$= C_1\lambda_1^{n-1} + \varrho^{n-1}\left(C_2(\cos\varphi + \sin\varphi i)^{n-1} + C_3(\cos\varphi - \sin\varphi i)^{n-1}\right),$$

де C_1, C_2, C_3 — деякі константи. Скориставшись формулою Муавра, отримаємо

$$a_n = C_1\lambda_1^{n-1} + \varrho^{n-1}\left((C_2 + C_3)\cos{(n-1)\varphi} + i(C_2 - C_3)\sin{(n-1)\varphi}\right) =$$

$$= C_1\lambda_1^{n-1} + \varrho^{n-1}\left(x\cos{(n-1)\varphi} + y\sin{(n-1)\varphi}\right),$$

де $x \equiv C_2 + C_3$, $y \equiv i(C_2 - C_3)$.

Підставивши початкові умови, знайдемо константи. При $n = 1$ маємо

$$a_1 = C_1 + x \Leftrightarrow C_1 = a_1 - x;$$

при $n = 2$ і $n = 3$ отримаємо:

$$a_2 = (a_1 - x)\lambda_1 + \varrho(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \;\Leftrightarrow\; a_2 - a_1\lambda_1 - x(a - \lambda_1) = yb;$$

$$a_3 = (a_1 - x)\lambda_1^2 + \varrho^2(x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi) \;\Leftrightarrow\; a_3 - a_1\lambda_1^2 = x(a^2 - b^2 - \lambda_1^2) + 2aby.$$

З отриманих рівностей виражаємо x та y:

$$x = \frac{a_1\lambda_1^2 - a_3}{(a-\lambda_1)^2 + b^2}, \quad y = \frac{a_2 - a_1\lambda_1 - x(a-\lambda_1)}{b} =$$

$$= \frac{(a_2 - a_1\lambda_1)\left(b^2 + (a-\lambda_1)^2\right) + (a_1\lambda_1^2 - a_3)(\lambda_1 - a)}{b\left(b^2 + (a-\lambda_1)^2\right)}.$$

□

Лема 2.3. *Для того, щоб послідовність* (a_n) *дійсних чисел, яка володіє властивістю* (2.4), *була знакододатною, необхідно і достатньо щоб її перші три члени задовольняли умови*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \lambda_1 \quad i \quad a_1 > 0.$$

Доведення. Необхідність. Легко бачити, що $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, якщо хоча б одне з чисел x або y не дорівнює нулю і вираз

$$x\cos\varphi(n-1) + y\sin\varphi(n-1) = \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\varphi(n-1)+\theta\right),$$

де $\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, набуває різних знаків нескінченну кількість разів. Тому для знакододатності виразу a_n необхідно, щоб $x = 0$, $y = 0$ та $a_1 > 0$ одночасно.

Достатність. Очевидна. Якщо $a_3 = a_1\lambda_1^2$ і $a_2 = a_1\lambda_1$, то $x = 0$ і $y = 0$. Загальний член даної послідовності набуватиме вигляду $a_n = a_1\lambda_1^n$. Якщо $a_1 > 0$, то і $a_n > 0$ для довільного n. □

Наслідок 2.4. *Збіжні ряди, члени яких задовольняють рекурентне співвідношення* (2.4), *мають вигляд*

$$a_n = a_1\lambda_1^{n-1}, \quad a_1 \in \mathbb{R},$$

і утворюють одновимірний лінійний простір.

Теорема 2.4. *Множина неповних сум збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *який володіє властивістю* (2.4) *є відрізком* $[0, \frac{a_1}{1-\lambda_1}]$.

Доведення. Оскільки даний ряд збіжний і для всіх його членів виконується рівність (2.4), то легко бачити, що $a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} < r_n$. А тому, згідно теореми Какея, множина $E(a_n)$ є відрізком. $\square$

2.3. Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності

Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n, \tag{2.5}$$

$$\text{де} \ \ r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n \tag{2.6}$$

— збіжний знакододатний ряд, для якого виконується умова однорідності:

$$r_{n+1} = a_{n+1} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

(ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами:

$$P\{\xi_n = 0\} = p_{0n} \geqslant 0, \quad P\{\xi_n = 1\} = p_{1n} \geqslant 0, \quad p_{0n} + p_{1n} = 1.$$

Властивості розподілу випадкової величини ξ однозначно визначаються послідовністю (a_n) членів ряду і нескінченною стохастичною матрицею $\|p_{in}\|$. Зазначимо, що розподіл випадкової величини ξ належить класу нескінченних згорток Бернуллі, властивості яких вивчаються майже століття. Інтерес до них в силу різних причин в останні роки значно посилився $[2, 10, 26, 35, 37, 42, 50, 88, 91, 97]$. Це пов'язано, зокрема, з дослідженнями їх фрактальних властивостей. В теорії нескінченних згорток Бернуллі існує ряд складних ймовірнісних проблем. Однією з таких є проблема поглиблення теореми Джессена-Вінтнера, яка стверджує лебегівську чистоту (дискретність, абсолютну неперервність, сингулярність) розподілу суми з ймовірністю одиниця збіжного випадкового ряду з незалежними дискретно розподіленими доданками, але не дає відповіді на питання: "коли який"? Інша стосується тополого-метричних та фрактальних властивостей спектра розподілу (множини точок росту функції розподілу). Третя стосується поведінки модуля характеристичної функції на нескінченності. Поки що вони не піддаються розв'язанню в загальній постановці, а тому дослідники їх вивчають в окремих класах. Необхідні і достатні умови абсолютної неперервності випадкової величини ξ і досі невідомі навіть для найпростішого симетричного випадку випадкових степеневих рядів, в яких $a_n = \lambda^n$ і $p_{0n} = \frac{1}{2}$. Ймовірнісну міру μ_ξ, яка відповідає такій випадковій величині називають *нескінченною симетричною згорткою Бернуллі.*

Якщо не накладати ніяких обмежень на послідовності (a_n) і (p_{0n}), то ймовірнісні міри $\mu = \mu_\xi$ називають *узагальненими згортками Бернуллі.* Роботи [64] і [37] містять огляд результатів (на кінець 20-го століття) для цього загального випадку.

З теореми Джессена–Вінтнера [74] випливає, що випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу, тобто її функція розподілу є або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або сингулярною (неперервною функцією, похідна якої майже скрізь рівна нулю у розумінні міри Лебега). Відома теорема П. Леві [78] разом з теоремою Джессена–Вінтнера дає необхідні і достатні умови дискретності та неперервності розподілу ξ.

2.3.1. Аналіз умови однорідності.

Дослідимо властивості ряду (2.6), який володіє умовою однорідності (2.7).

Лема 2.4. *Якщо a_1, a_2 — додатні дійсні числа, то двопараметрична послідовність*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} a_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.8}$$

є нескінченно малою, а відповідний їй ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — збіжним.

Доведення. З рівності (2.8) маємо

$$q_n \equiv \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} < 1.$$

Тому послідовності (a_{2n-1}) та (a_{2n}) є спадними. Більше того, оскільки $a_{n+1} > a_{n+3}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$q_n - q_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} - \frac{a_{n+3}}{1 + a_{n+3}} = \frac{a_{n+1} - a_{n+3}}{(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+3})} > 0,$$

тобто, спадними є і послідовності (q_{2n-1}) та (q_{2n}). Тоді

$$a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=1}^{n} q_{2k-1}, \quad a_{2n+2} = a_2 \prod_{k=1}^{n} q_{2k}.$$

І тому

$$a_{2n-1} \leqslant a_1 q_1^{n-1} \to 0 \quad \text{і} \quad a_{2n} \leqslant a_2 q_2^{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отже, послідовності (a_{2n-1}) та (a_{2n}) є нескінченно малими і такою є вся послідовність (a_n). Таким чином, необхідна умова збіжності ряду виконується. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \leqslant a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n-1} = a_1(1 + a_2) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \leqslant a_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_2^{n-1} = a_2(1 + a_3),$$

то даний ряд збігається.

□

Теорема 2.5. *Для того, щоб ряд* (2.6) *задовольняв умову однорідності* (2.7), *необхідно і достатньо, щоб для його членів виконувалась рівність* (2.8).

Доведення. Необхідність. Якщо ряд збіжний і задовольняє умову однорідності (2.7), то для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце система

$$\begin{cases} a_{n+1}a_n = r_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots\ , \\ a_{n+2}a_{n+1} = r_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+4} + \dots\ . \end{cases}$$

Віднявши від першої рівності другу, отримаємо:

$$a_{n+1}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+2}, \tag{2.9}$$

звідки і випливає рівність (2.8).

Достатність. Покажемо тепер, що з умови (2.8) випливає умова (2.7). Оскільки даний ряд збіжний (див. лему 2.4), то з рівності (2.8) маємо рівність (2.9). Врахувавши, що $a_{n+2} = r_{n+1} - r_{n+2}$, отримаємо

$$r_{n+1} - r_{n+2} = a_{n+1}a_n - a_{n+2}a_{n+1},$$

що рівносильно

$$r_{n+1} - a_{n+1}a_n = r_{n+2} - a_{n+2}a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

звідки $r_{n+1} - a_{n+1}a_n = r_{n+1+l} - a_{n+1+l}a_{n+l} = const$ для всіх $l \in \mathbb{N}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}(r_{n+1} - a_{n+1}a_n) = \lim_{n\to\infty} r_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_n = 0,$$

то

$$r_{n+1} - a_{n+1}a_n = 0 \Leftrightarrow r_{n+1} = a_{n+1}a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Достатність і вся теорема доведені.

□

Лема 2.5. *Ряд* (2.6), *що задовольняє умову однорідності* (2.7), *має суму*

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_1a_2. \tag{2.10}$$

Доведення. З рівності (2.7) маємо рівність

$$a_1a_2 = a_3 + a_4 + a_5 + \dots .$$

Додавши до обох частин рівності $a_1 + a_2$, отримаємо (2.10). □

Лема 2.6. *Для членів ряду* (2.6), *що задовольняє умову однорідності* (2.7), *мають місце рівності*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0, \tag{2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{q^n}=0, \tag{2.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n n!=0, \tag{2.13}$$

де q — *довільне дійсне число з* $(0,1)$.

Доведення. Врахувавши збіжність даного ряду та рівність (2.7), маємо

$$a_n=\frac{r_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+...}{a_{n+1}}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{a_{n+m}}{a_{n+1}}.$$

Останній ряд збігається при кожному $n\in\mathbb{N}$, а його сума разом з a_n прямує до нуля при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+4}}{a_{n+1}}+...\right)=0.$$

А отже і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+m}}{a_{n+1}}=0,\ m=2,3,4,...$, і рівність (2.11) доведено.

З рівності (2.11) випливає існування такого $n_0\in\mathbb{N}$, що для довільного достатньо малого $\varepsilon>0$ і для всіх $n>n_0$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\varepsilon$ або $a_{n+1}<\varepsilon a_n$. Нехай $a_{m+s}<1$ для всіх $s=0,1,2,...$. Маємо нерівності

$$a_{m+s}<\varepsilon a_{m+s-1}<\varepsilon^2 a_{m+s-2}<...<\varepsilon^s a_m<\varepsilon^s.$$

Отже, $a_{m+s}<\varepsilon^s$ або $a_n<\varepsilon^{n-m}=\frac{1}{\varepsilon^m}\varepsilon^n=c\varepsilon^n$, де $s=n-m$, $c=const$. Взявши $\varepsilon<q$, отримаємо рівність (2.12).

З рівності (2.11) випливає існування такого номеру m, що для всіх $n\geqslant m$ має місце $a_{n+1}<a_n<1$. Оцінимо члени ряду:

$$a_{m+2}=\frac{a_{m+1}a_m}{1+a_{m+1}}<a_m a_{m+1}<a_m^2,$$

$$a_{m+3}=\frac{a_{m+2}a_{m+1}}{1+a_{m+2}}<a_{m+2}a_{m+1}<a_m^2 a_{m+1}<a_m^3,$$

$$a_{m+4} = \frac{a_{m+3}a_{m+2}}{1 + a_{m+3}} < a_{m+3}a_{m+2} < a_m^3 a_m^2 = a_m^5,$$
$$a_{m+5} = \frac{a_{m+4}a_{m+3}}{1 + a_{m+4}} < a_{m+4}a_{m+3} < a_m^5 a_m^3 = a_m^8,$$

Нескладно побачити, що показники степенів u_{j+1} членів $a_m^{u_{j+1}}$, якими обмежені члени a_{m+j}, утворюють класичну послідовність Фібоначчі із загальним членом

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^j - (\psi)^j\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^j\right) \cdot \varphi^j \to \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^j \quad (j \to \infty),$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Отже, маємо

$$a_n = a_{m+j} < a_m^{u_{j+1}} = a_m^{u_{n-m+1}} = p^{\varphi^n},$$

де $p = a_m^{\frac{\varphi^{1-m}}{\sqrt{5}}}$ — деяке число з $(0, 1)$.

Для доведення рівності (2.13) достатньо показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}(p^{\varphi^n} \cdot n!) = 0$. А це випливає з того, що $n! < n^n$ при кожному $n > 2$ і того, що $\lim\limits_{n\to\infty}(p^{\varphi^n} \cdot n^n) = 0$ (більше того, ряд з членом $b_n = p^{\varphi^n} \cdot n^n$ є збіжним). □

Наслідок 2.5. *Для довільного $q \in (0, 1)$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $a_n < q^n$.*

2.3.2. Критерій дискретності. Точковий спектр. Якщо M — підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, то вираз $\sum\limits_{n\in M\subset\mathbb{N}} a_n$ називається *підрядом ряду* (2.6), а його сума $x = x(M)$ — *підсумою (неповною сумою) ряду* (2.6). Множину всіх неповних сум ряду (2.6) позначатимемо через $E(a_n)$.

Лема 2.7. *Якщо ряд* (2.6) *має властивість однорідності: $r_n < a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то для різних підмножин M_1 і M_2 множини натуральних чисел відповідні їм підсуми $x_1 = x(M_1)$ і $x_2 = x(M_2)$ теж різні.*

Доведення. Нехай

$$x_1 = \sum_{n \in M_1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad x_2 = \sum_{n \in M_2} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n.$$

Оскільки $M_1 \neq M_2$, то існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$, але $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$ при $j < m$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\varepsilon_m = 1$, $\varepsilon'_m = 0$. Розглянемо різницю

$$x_1 - x_2 = \varepsilon_m a_m + r_m^{(1)} - r_m^{(2)},$$

де $r_m^{(1)} = \varepsilon_{m+1} a_{m+1} + \varepsilon_{m+2} a_{m+2} + \ldots$ і $r_m^{(2)} = \varepsilon'_{m+1} a_{m+1} + \varepsilon'_{m+2} a_{m+2} + \ldots$.

Оскільки $r_m^{(2)} \leqslant r_m$ і $a_m > r_m$, то $x_1 - x_2 = a_m + r_m^{(1)} - r_m^{(2)} \geqslant a_m - r_m > 0$, звідки маємо $x_1 \neq x_2$, що й вимагалося довести. □

Лема 2.8. *Для послідовності* (a_n) *членів ряду* (2.6)*, що задовольняє умову* (2.7)*, існує номер* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такий, що для всіх* $n \geqslant n_0$ *виконується нерівність* $a_n > r_n$.

Доведення. Розглянемо рівність $r_n = a_n a_{n-1}$. Оскільки $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконуються нерівність $a_{n-1} < 1$, а разом з нею і нерівність $a_n > r_n$. □

Теорема 2.6. *Розподіл випадкової величини* ξ *є дискретним тоді і тільки тоді, коли*

$$L = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}\} > 0.$$

У випадку дискретності, якщо для ряду (2.6) *виконується умова* $a_n > r_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$*, то точковий спектр* D_ξ *складається з точки* x_0 *такої, що*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n, \quad \text{де} \quad p_{c_n n} = \max\{p_{0n}, p_{1n}\} \equiv p_n^*, \tag{2.14}$$

і всіх точок x *таких, що*

$$x = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n a_n, \tag{2.15}$$

де $\varepsilon_n \in \{0,1\}$, $p_{\varepsilon_n n} \neq 0$ *при* $n \leqslant m$.

Доведення. Перша частина твердження безпосередньо випливає з теорем Джессена-Вінтнера [74] і П.Леві [78]. Доведемо другу частину твердження.

Нехай розподіл випадкової величини ξ є дискретним, тобто $L > 0$. Ця умова означає, що послідовність $p^*_n = \max\{p_{0n}, p_{1n}\}$ швидко збігається до 1. Тому існує таке $l \in \mathbb{N}$, що $p^*_n > \frac{1}{2}$ для всіх $n > l$.

Зауважимо, що точка x_0 умовою (2.14) може визначатися неоднозначно. Це буде тоді, коли $p_{0n} = \frac{1}{2} = p_{1n}$. В таких випадках беремо $c_n = 0$.

Із–за однозначності (яка є наслідком умови $r_n < a_n$ і леми 2.7) представлення елемента множини неповних сум ряду (2.6) з умовою однорідності (2.7) маємо

$$P\{\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n\} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{c_n n} = L > 0,$$

тобто $x_0 \in D_\xi$.

Нехай $A_0 = \{x_0\}$, а A_m — множина всіх точок x виду (2.15), $m = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді очевидно, що і для всіх $m \in Z_0$ маємо $A_m \subset A_{m+1}$.

Оскільки

$$P\{\xi \in A_m\} = \left(\prod_{n=m+1}^{\infty} p_{c_n n}\right) \cdot \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \ldots \sum_{\varepsilon_m=0}^{1} \prod_{j=1}^{m} p_{\varepsilon_j j} = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_{c_n n} \to 1 \quad (m \to \infty),$$

то

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m = D_\xi,$$

що й вимагалося довести. □

Зауваження 2.2. Якщо для ряду (2.6), що задовольняє властивість однорідності (2.7), умова $x_1(M_1) \neq x_2(M_2)$ при $M_1 \neq M_2$ не виконується, тобто інують $M_1 \neq M_2$ такі, що $x_1(M_1) = x_2(M_2)$, то згідно з двома попереніми лемами, існує n_0 таке, що вона виконується для підряду $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$. Тоді точковий спектр D_ξ є арифметичною (векторною) сумою точкових спектрів

$D_{\hat{\xi}^{(1)}}$ і $D_{\hat{\xi}^{(2)}}$ випадкових величин

$$\hat{\xi}^{(1)} = \sum_{n=1}^{n_0} \xi_n a_n \quad \text{і} \quad \hat{\xi}^{(2)} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \xi_n a_n$$

відповідно. При цьому множина $D_{\hat{\xi}^{(2)}}$ визначається теоремою 2.6, а

$$D_{\hat{\xi}^{(1)}} = \{x : x = \sum_{n=1}^{n_0} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \;\; p_{\varepsilon_n n} \neq 0\}.$$

Зазначимо, що попередня теорема і щойно зроблене зауваження вичерпно описують точковий спектр розподілу випадкової величини ξ.

2.3.3. Тополого-метричні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ. Нагадаємо [35], що *спектром S_ξ розподілу випадкової величини ξ* називають множину точок росту її функції розподілу $F_\xi(x)$ (рівносильно: мінімальний замкнений носій), тобто

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) = P\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0, \forall \varepsilon > 0\}.$$

Лема 2.9. *Якщо $p_{in} > 0$ для всіх $i \in \{0,1\}$ та всіх $n \in \mathbb{N}$, то спектром S_ξ розподілу випадкової величини ξ є множина $E(a_n)$ всіх підсум (неповних сум) ряду* (2.6), *тобто*

$$S_\xi = E\{a_n\} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Доведення. Дане твердження випливає безпосередньо з означень спектра розподілу і того, що кожну неповну суму ряду можна записати у вигляді

$$x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \;\; \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \;\; n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \;\; n \notin M, \end{cases}$$

а також властивостей множини всіх неповних сум ряду, яка є досконалою (замкненою множиною без ізольованих точок) [75]. □

Наслідок 2.6. *Для спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ має місце включення $S_\xi \subset E(a_n)$.*

З метою вивчення спектральних властивостей розподілу випадкової величини ξ проведемо дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множини неповних сум $E\{a_n\}$ ряду (2.6) з умовою однорідності (2.7).

Теорема 2.7. *Множина неповних сум ряду* (2.6)*, що задовольняє умову однорідності* (2.7)*, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега і нульової розмірністі Гаусдорфа-Безиковича.*

Доведення. Оскільки даний ряд є збіжним, то $a_n \to 0$ і $\delta_n \equiv \frac{a_n}{r_n} = \frac{1}{a_{n-1}} \to +\infty$ при $n \to \infty$. Згідно леми 2.8, існує номер n_0 такий, що нерівність $a_n > r_n$ буде виконуватися для всіх $n \geqslant n_0$, а тому, згідно результату теореми 1.12 (теореми 2.8.3 монографії [35]), множина неповних сум E_1 ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ є аномально фрактальною.

Оскільки множина $E\{a_n\}$ є арифметичною сумою множин E_1 та E_2, а множина

$$E_2 = \{x : \ x = \sum_{n=1}^{n_0-1} \varepsilon_n a_n, \ \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$$

складається не більше ніж 2^{n_0-1} точок, а тому фрактальні властивості множин E_1 і $E\{a_n\}$ співпадають. Отже, $E\{a_n\}$ – аномально фрактальна множина.

□

Наслідок 2.7. *Спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є аномально фрактальною множиною.*

Теорема 2.8. *У випадку неперервності ($L = 0$) розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Доведення. При $L = 0$ випадкова величина ξ має неперервний розподіл. Її спектр є підмножиною множини неповних сум. З проведених досліджень по геометричній структурі множини неповних сум ряду (2.6), спектр розподілу випадкової величини ξ є нуль–множиною Лебега і є аномально фрактальною множиною. □

2.3.4. Автозгортки розподілу випадкової величини ξ. Нагадаємо, що *автозгорткою розподілу випадкової величини* ξ називають розподіл випадкової величини $\psi_2 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, а *$s$–кратною згорткою розподілу випадкової величини* ξ — розподіл випадкової величини

$$\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(s)},$$

де $\xi^{(j)}$ — незалежні й однаково розподілені випадкові величини, розподіл кожної з яких співпадає з розподілом ξ.

Добре відомо, якщо ξ дискретно розподілена, то ψ_s матиме дискретний розподіл. Нас цікавить випадок, коли розподіл ξ є сингулярним, оскільки згортка двох сингулярних розподілів може бути як сингулярною чи абсолютно неперервною, так і їх сумішшю.

Зауваження 2.3. Автозгортка двох (скінченного числа) нескінченних згорток Бернуллі не може бути сумішшю, оскільки сума двох (скінченного числа) незалежних випадкових величин типу Джессена–Вінтнера є випадковою величино Джессена–Вінтнера, а тому має чистий тип розподілу.

Лема 2.10. *Спектр S_{ψ_s} розподілу випадкової величини ψ_s є підмножиною відрізка $[0, sr_0]$ і належить об'єднанню $(s+1)^n$ ізометричних відрізків довжини sr_n, $n = 1, 2, 3, ...$.*

Доведення. Випадкову величину ψ_s можна подати у вигляді

$$\psi_s = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + ... + \eta_n a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n,$$

де

$$\eta_n = \xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} + ... + \xi_n^{(s)}$$

— незалежні випадкові величини, які мають розподіли

$$P\{\eta_n = i\} = C_s^i p_{1n}^i p_{0n}^{s-i},\ i \in \{0, 1, 2, ..., s\} = A_{s+1}.$$

Оскільки $p_{in} > 0$, то спектр випадкової величини ψ_s співпадає з множиною

$$S_{\psi_s} = S_{\xi^{(1)}} \oplus S_{\xi^{(2)}} \oplus ... \oplus S_{\xi^{(s)}} = \left\{ x:\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n a_n,\ (\zeta_n) \in A_{s+1}^{\infty} \right\}.$$

Нехай $(d_1, d_2, ..., d_m)$ – фіксований впорядкований набір чисел з множини A_{s+1}, $\Delta'_{d_1...d_m}$ – множина всіх чисел виду

$$\sum_{n=1}^{m} d_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \zeta_n a_n, \quad \text{де} \quad \zeta_n \in A_{s+1},$$

Легко бачити, що множина S_{ψ_s} належить об'єднанню усіх відрізків виду

$$\Delta_{d_1 d_2 ... d_m} = \left[\sum_{n=1}^{m} d_n a_n,\ s r_m + \sum_{n=1}^{m} d_n a_n \right] = [\inf \Delta'_{d_1...d_m},\ \sup \Delta'_{d_1...d_m}],$$

які називаються *циліндричними відрізками рангу* m *з основою* $d_1 d_2 ... d_m$ ($d_i \in A_{s+1}$). Діаметр такого відрізка дорівнює $|\Delta_{d_1...d_n}| = s r_n$. Оскільки

$$\Delta'_{d_1 d_2 ... d_m} = \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m 0} \cup \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m 1} \cup ... \cup \Delta'_{d_1 d_2 ... d_m s},$$

то кількість відповідних циліндричних відрізків рангу m становить $(s+1)^m$.

Таким чином, $S_{\psi_s} \subset G_{m+1} \subset G_m$ для всіх m і має місце рівність

$$S_{\psi_s} = \lim_{m \to \infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m, \quad \text{де} \quad G_m = \bigcup_{(d_1 ... d_m)} \Delta_{d_1 ... d_m}.$$

Лему доведено $\square$

Теорема 2.9. *У випадку неперервності випадкової величини* ξ *(*$L = 0$*) розподіл випадкової величини* ψ_s*, для будь-якого натурального* $s \geqslant 2$ *є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром.*

Доведення. Оскільки, згідно попередньої леми, множина S_{ψ_s} належить об'єднанню $(s+1)^n$ циліндричних відрізків рангу n діаметра sr_n, то міра Лебега

$$\lambda(S_{\psi_s}) \leqslant \lim_{n\to\infty} (s(s+1)^n r_n) = s \lim_{n\to\infty} ((s+1)^n a_n a_{n-1}).$$

За наслідком 2.5

$$\lambda(S_{\psi_s}) \leqslant s \lim_{n\to\infty} (s+1)^n q^n q^{n-1} = \frac{s}{q} \lim_{n\to\infty} ((s+1)q^2)^n = 0$$

для довільного достатньо малого q, тому $\lambda(S_{\psi_s}) = 0$.

Для знаходження розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини S_{ψ_s} розглянемо її ε-покриття циліндричними відрізками рангу n, $\varepsilon = sr_n$. Для довільного $\alpha > 0$ і довільного $n \geqslant n_0$ маємо

$$m^\alpha_\varepsilon(S_{\psi_s}) \leqslant (s+1)^n (sr_n)^\alpha = (s+1)^n (sa_n a_{n-1})^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant (s+1)^n (sq^n q^{n-1})^\alpha = (\frac{s}{q})^\alpha ((s+1)q^{2\alpha})^n.$$

Оскільки для достатньо малого q: $(s+1)q^{2\alpha} < 1$ і $(\frac{s}{q})^\alpha((s+1)q^{2\alpha})^n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\mathcal{H}^\alpha(S_{\psi_s}) = \lim_{\varepsilon\to 0} m^\alpha_\varepsilon(S_{\psi_s}) = 0$$

для довільного $\alpha > 0$. Тому $\alpha_0(S_{\psi_s}) = 0$. □

Наслідок 2.8. *Отримані результати можна узагальнити на випадок нескінченних згорток Бернуллі, для яких* $\frac{r_n}{a_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

Справді, з умови

$$\frac{r_n}{a_n} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots}{a_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{n+m}}{a_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

випливає, що $\frac{a_{n+m}}{a_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$ *для всіх* $m \in \mathbb{N}$. *Тому* $\forall q \in (0,1)$ $\exists$ $n_0 = n_0(q)$ *таке, що*

$$r_n < a_n < q^n, \quad \forall n > n_0(q)$$

і доведення вказаного твердження проводиться аналогічно до доведення теореми 2.9.

Наслідок 2.9. *Розподіл випадкової величини ξ належить до сингулярних розподілів класу $\mathfrak{M}_0$ класифікації В.М. Золотарьова і В.М. Круглова (див. [13]).*

2.4. Узагальнення множини підсум геометричного ряду

Нехай λ — задане дійсне число з $(0,1)$, $A = \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. Розглядається множина чисел

$$C_\lambda^A = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A \right\}.$$

На початку 90-х років минулого століття, розв'язуючи задачу: чи буде арифметична сума двох нуль-множин Лебега канторівського типу (лінійних континуальних ніде не щільних множин) нуль-множиною Лебега, чи буде вона містити інтервал, науковці прийшли до так званої проблеми "(0, 1, 3)", яка стосується тополого-метричних властивостей множини C_λ^A з алфавітом $A = \{0, 1, 3\}$. У роботі [77] M. Kean, M. Smorodinsky, B. Solomyak довели, що при $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$ вона має нульову міру Лебега, при $\lambda \geqslant \frac{2}{5}$ є відрізком. Головним результатом було встановлення існування послідовності (λ_k) алгебраїчних чисел з інтервалу $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ таких, що кожна множина $C_{\lambda_k}^A$ має нульову міру Лебега і розмірність Гаусдорфа-Безиковича меншу одиниці. У роботі [89] M. Pollicott, K. Simon довели, що розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини C_λ^A співпадає з самоподібною розмірністю для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ і дорівнює $\alpha_0(C_\lambda^A) = -\log_\lambda 3$. У цій же роботі доведено, що для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ розмірність $\alpha_0(C_\lambda^A) = 1$, а у додатку роботи [77] дещо модифікованим методом отримано той же самий результат для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$. Але висновків відносно міри Лебега з цього зробити не можна.

У роботах [89], [96], [97] вивчалися більш загальні множини, ніж в [77]. Наприклад, у роботі [89] M. Pollicott і K. Simon обчислювали розмірність

Гаусдорфа-Безиковича множини C_λ^A з алфавітом
$A = \{s_1, s_2, ..., s_l\} \subset \{0, 1, ..., (n-1)\}$, де $2 \leqslant l \leqslant n-1, \ \ n \in \mathbb{N}$. Автори виділили "критичний проміжок" значень параметра $\lambda \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{l}]$, для яких виникали труднощі при дослідженні відповідних множин. Такі множини мають нескінченну кількість суміжних інтервалів і в той же час циліндри цих множин перетинаються один з одним — "OSC" (умова відкритої множини) для них не виконується. У роботі [97] встановлено, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) значечень $\lambda > \frac{1}{l}$ міра Лебега множини C_λ^A є додатною, в той же час існує зчисленна множина значень λ, при яких C_λ^A є нуль-множиною Лебега і розмірості Гаусдорфа-Безиковича меншої одиниці.

У роботах [18], [19], [28], [79] вивчались розподіли випадкових величин, спектрами яких є множини виду C_λ^A. Робота [11] присвячена задачі про кількість представлень чисел з множин виду C_λ^A у системах числення з надлишковим набором цифр (алфавітом).

Ми цікавимось тополого-метричними та фрактальні властивостями множини C_λ^A, зокрема коли $A \equiv S = \{0, s_1, s_2\} \subset \mathbb{R}$. Особлива увага приділяється одному класу самоподібних множин, конструкції яких містять нескінченні перекриття.

Наше дослідження властивостей множини C_λ^A спирається на поняття циліндричної множини (циліндра, циліндричного відрізка).

Означення 2.1. Нехай $c_1, c_2, ..., c_m$ – фіксований набір чисел з множини A. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* ($c_i \in A$) називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі суми виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n \lambda^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n \lambda^n, \ x_n \in A.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ ($c_i \in A$) називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\min \Delta'_{c_1...c_m},\ \max \Delta'_{c_1...c_m}].$$

З означень випливають наступні властивості циліндричних множин.

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset [0, \frac{a_{s-1}\lambda}{1-\lambda}]$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m 0} \cup \Delta'_{c_1...c_m a_1} \cup ... \cup \Delta'_{c_1...c_m a_{s-1}}$.

3) $\min \Delta_{c_1...c_m} = \min \Delta'_{c_1...c_m} = \sum_{n=1}^{m} c_n \lambda^n$,

$\max \Delta_{c_1...c_m} = \max \Delta'_{c_1...c_m} = a_{s-1} r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n \lambda^n$, де $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda}$.

4) $\Delta_{c_1...c_m c_{m+1}} \subset \Delta_{c_1...c_m}$.

5) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = a_{s-1} r_m = \frac{a_{s-1}\lambda^{m+1}}{1-\lambda} \to 0\ (m \to \infty),$$

зокрема, $|C_\lambda^A| = \frac{a_{s-1}\lambda}{1-\lambda}$.

6) Для довільної послідовності $(c_m),\ c_m \in A$:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = x \equiv \Delta_{c_1...c_m...} \in C_\lambda^A.$$

7) Основне метричне співвідношення: $\frac{|\Delta'_{c_1...c_{m+1}}|}{|\Delta'_{c_1...c_m}|} = \lambda$.

8) Нехай $A \equiv L = \{0, 1, ..., l-1\}$, де $l \in N$. Тоді

$$\Delta_{c_1...c_{m-1}i} \cap \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)} =$$

$$= \begin{cases} [a + (i+1)\lambda^m,\ a + i\lambda^m + (l-1)r_m]\,, & \text{якщо } \lambda > \frac{1}{l}; \\ \Delta_{c_1...c_{m-1}i(l-1)...(l-1)...} = \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)0...0...}, & \text{якщо } \lambda = \frac{1}{l}; \\ \varnothing, & \text{якщо } \lambda < \frac{1}{l}, \end{cases}$$

де $a = \sum\limits_{n=1}^{m-1} c_n \lambda^n, \quad \{i, i+1\} \in L$.

Доведення. Введемо позначення:

$$d_m \equiv \max \Delta_{c_1...c_{m-1}i} - \min \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)} = \frac{\lambda^m}{1-\lambda}(l\lambda - 1).$$

Якщо $\lambda > \frac{1}{l}$, то $\max\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}i} > \min\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}(i+1)}$; якщо $\lambda < \frac{1}{l}$, то $\max\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}i} < \min\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}(i+1)}$; якщо $\lambda = \frac{1}{l}$, то $\Delta_{c_1\ldots c_{m-1}i(l-1)\ldots(l-1)\ldots} = \Delta_{c_1\ldots c_{m-1}(i+1)0\ldots 0\ldots}$. Знак чисел d_m вказує на один з трьох наведених вище випадків. $\square$

Представлення числа x у вигляді

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda^m \tag{2.16}$$

називатимемо *циліндричним*. Вираз (2.16) символічно записуватимемо $x = \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots}$ і називатимемо *циліндричним зображенням числа (точки)* x. Коректність даного означення випливає з властивості 6.

2.4.1. Двопараметрична сім'я множин C_λ^L. Очевидно, що множина C_λ^A з алфавітом $A = \{0, 1\}$ є *множиною неповних сум ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Нехай $2 \leqslant l \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину C_λ^L, у якої $A \equiv L = \{0, 1, ..., l-1\}$.

Теорема 2.10. *Множина C_λ^L є*

1) ніде не щільною самоподібною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{l})$, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(C_\lambda^L) = -\log_\lambda l;$$

2) відрізком $[0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ при $\lambda \in [\frac{1}{l}, 1)$.

Доведення. 1) За властивістю 8 циліндричних множин, при $\lambda \in (0, \frac{1}{l})$ має місце $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}i} \cap \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}(i+1)} = \varnothing$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тому множина $C_\lambda^L \subset [0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ має нескінченну кількість суміжних інтервалів виду $(\max\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}i},\ \min\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}(i+1)})$. Для знаходження міри Лебега C_λ^L покажемо, що сума довжин усіх суміжних з нею інтервалів дорівнює її діаметру:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l^n - 1)d_n = \frac{l\lambda - 1}{1-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(l^n - 1)\lambda^n = \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda} = |C_\lambda^L|.$$

Отже, C_λ^L є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Оскільки

$$C_\lambda^L = \Delta'_0 \cup \Delta'_1 \cup \ldots \cup \Delta'_{l-1}, \quad \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing, \quad C_\lambda^L \overset{\lambda}{\sim} \Delta'_i,$$

тобто, множина є самоподібною з коефіцієнтом λ і є об'єднанням l циліндрів першого рангу, які між собою не перекриваються, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича α_0 дорівнює самоподібній розмірності і є розв'язком рівняння:

$$l\lambda^x = 1,$$

звідки $\alpha_0(C_\lambda^L) = -\log_\lambda l$.

2) За властивістю 8 циліндричних множин при $\lambda \in [\frac{1}{l}, 1)$ маємо:

$$\Delta_{c_1c_2...c_{n-1}i} \cap \Delta_{c_1c_2...c_{n-1}(i+1)} \neq \varnothing \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

А це означає, що кожне число з відрізка $[0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ можна представити у вигляді ряду (2.16). Отже, дана множина є відрізком. $\square$

2.4.2. Двопараметрична сім'я множин C_λ^S. Перейдемо до дослідження множин, у яких $A \equiv S = \{0, s_1, s_2\} \subset \mathbb{R}$. Перекриття циліндрів одного рангу залежить від *двох* параметрів: λ і вдношення $\frac{s_2}{s_1}$. Для кожного натурального n і довільного фіксованого набору $c_1c_2...c_m$ ($c_i \in A$) можливим є один з наступних випадків:

1) $\Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} = \varnothing = \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2}$ — відсутність перекриттів циліндрів (OSC виконується);

2) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} \neq \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} \neq \varnothing \end{cases}$ – нескінченні перекриття циліндрів;

3) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} \neq \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} = \varnothing \end{cases}$ або 4) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} = \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} \neq \varnothing. \end{cases}$

Займемося дослідженням геометрії циліндричних множин. Розглянемо різниці:

$$d_n^1 = \min \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1} - \max \Delta_{c_1...c_{n-1}0} = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_1 - \lambda(s_1 + s_2)),$$

$$d_n^2 = \min \Delta_{c_1...c_{n-1}s_2} - \max \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1} = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_2 - s_1 - \lambda(2s_2 - s_1)).$$

Числа d_n^1, d_n^2 є діаметрами перерізів двох сусідніх циліндричних відрізків або довжинами суміжних з множиною інтервалів одного рангу.

Далі ми будемо використовувати числа $\lambda_1 = \frac{s_1}{s_1+s_2}$ і $\lambda_2 = \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}$, при яких межі сусідніх циліндрів довільного рангу співпадають, тобто, для кожного натурального n виконуються рівності: $\max \Delta_{c_1\ldots c_n 0} = \min \Delta_{c_1\ldots c_n s_1}$ при $\lambda = \lambda_1$, $\max \Delta_{c_1\ldots c_n s_1} = \min \Delta_{c_1\ldots c_n s_2}$ при $\lambda = \lambda_2$.

Лема 2.11. *1)* $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \frac{1}{2})$*;*

2) $s_1 < \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2$*,* $s_1 > \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2$*,* $s_1 = \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$*;*

3) а) $d_n^1 > 0$ *при* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n s_1} = \varnothing$*;*

$d_n^1 \leqslant 0$ *при* $\lambda \in [\lambda_1, 1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n 0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n s_1} \neq \varnothing$*;*

б) $d_n^2 > 0$ *при* $\lambda \in (0, \lambda_2)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n s_1} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n s_2} = \varnothing$*;*

$d_n^2 \leqslant 0$ *при* $\lambda \in [\lambda_2, 1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n s_1} \cap \Delta_{c_1\ldots c_n s_2} \neq \varnothing$*;*

4) а) якщо $\frac{s_1}{s_2} \to 0$*, то* $\lambda_1 \to 0$ *і* $\lambda_2 \to \frac{1}{2}$*;*

якщо $s_2 \to \infty$ *і* $\frac{s_1}{s_2} \to 1$*, то* $\lambda_2 \to 0$ *і* $\lambda_1 \to \frac{1}{2}$*;*

б) якщо $\frac{s_1}{s_2} \to \frac{1}{2} - 0$*, то* $\lambda_1, \lambda_2 \to \frac{1}{3}$*, причому* $\lambda_1 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \lambda_2$*;*

якщо $\frac{s_1}{s_2} \to \frac{1}{2} + 0$*, то* $\lambda_1, \lambda_2 \to \frac{1}{3}$*, причому* $\lambda_2 \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \lambda_1$*.*

Зауваження 2.4. Далі обмежимось розглядом випадку $0 < s_1 < \frac{s_2}{2}$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$. Випадок $\frac{s_2}{2} < s_1 < s_2$ шляхом заміни: $s_1' = s_2 - s_1$, $s_2' = s_2$ будемо зводити до попереднього, оскільки множини C_λ^S і $C_\lambda^{S'}$, у яких $S = \{0, s_1, s_2\}$ і $S' = \{0, s_1', s_2'\}$, симетричні. Наприклад, $\{0,3,4\} \to \{0,1,4\}$, $\{0,5,8\} \to \{0,3,8\}$ і т.д.

Теорема 2.11. *Множина* C_λ^S *є*

1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$*;*

2) відрізком $[0, \frac{s_2\lambda}{1-\lambda}]$ *при* $\lambda \in [\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}, 1)$*.*

При $\lambda \in (0, \frac{s_1}{s_1+s_2}]$ *її розмірність Гаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(C_\lambda^S) = -\log_\lambda 3.$$

Доведення. 1) Множина C_λ^S міститься в об'єднанні не більше, ніж 3^n

циліндрів рангу n діаметра $s_2 r_n$, тому її міра Лебега

$$\mathcal{L}(C^S_\lambda) \leqslant \lim_{n\to\infty}(s_2 r_n \cdot 3^n) = \frac{s_2\lambda}{1-\lambda}\lim_{n\to\infty}(3t)^n = 0 \ \text{ при } t < \frac{1}{3}.$$

Нуль-мірність C^S_λ можна довести по іншому. Оскільки вона є об'єднанням

$$C^S_\lambda = \lambda C^S_\lambda \cup (s_1 \oplus \lambda C^S_\lambda) \cup (s_2 \oplus \lambda C^S_\lambda),$$

то за властивістю напівадитивності міри

$$\mathcal{L}(C^S_\lambda) \leqslant 3\lambda \cdot \mathcal{L}(C^S_\lambda) \Rightarrow \ \mathcal{L}(C^S_\lambda) = 0 \text{ при } \lambda < \frac{1}{3}.$$

Оскільки C^S_λ є континуальною досконалою множиною нульової міри Лебега, то вона є і ніде не щільною.

При $\lambda \in (0, \frac{s_1}{s_1+s_2}]$ множина C^S_λ є самоподібною з коефіцієнтом λ і є об'єднанннанням трьох циліндрів першого рангу, які між собою не перетинаються. Її розмірність Гаусдорфа-Безиковича α_0 співпадає з самоподібною розмірністю і є розв'язком рівняння

$$3\lambda^x = 1,$$

тобто $\alpha_0(C^S_\lambda) = -\log_\lambda 3$.

2) З п. 3 леми 1 слідує, що при $\lambda \in [\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}, 1)$ перерізи $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_1}$, $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_1} \cap \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_2}$ не є порожніми при всіх $n \in \mathbb{N}$. Кожне число з відрізка $[0, \frac{(s_2\lambda}{1-\lambda}]$ можна подати у вигляді ряду (2.16). Отже, множина C^S_λ є відрізком.

Теорему доведено. $\square$

2.4.3. Про один спеціальний випадок. У випадку, коли $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{s_1}{s_1+s_2}, \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1})$ множина C^S_λ містить нескінченну кількість суміжних інтервалів, яка може бути як і нуль-множиною, так і множиною додатньої міри Лебега.

Зупинимося детально на одному випадку, коли перекриттям циліндричних відрізків $\Delta_{c_1...c_{n-1}0}$ і $\Delta_{c_1...c_{n-1}s_1}$ є циліндричний відрізок наступного $n+1$ рангу.

Лема 2.12. *Умова*

$$\Delta_{c_1...c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1} = \Delta_{c_1...c_{n-1}0s_2} = \Delta_{c_1...c_{n-1}s_10} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{2.17}$$

рівносильна рівності

$$\lambda = \frac{s_1}{s_2}. \tag{2.18}$$

Доведення. Рівність (2.17) рівносильна рівності діаметрів

$$|\Delta_{c_1...c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1}| = |\Delta_{c_1...c_{n-1}0s_2}| = s_2 r_{n+1},$$

яка записується у вигляді

$$\frac{(\lambda(s_1+s_2)-s_1)\lambda^n}{1-\lambda} = \frac{s_2\lambda^{n+2}}{1-\lambda} \Leftrightarrow s_2\lambda^2 - (s_1+s_2)\lambda + s_1 = 0,$$

звідки і слідує рівність (2.18).

□

Лема 2.13. *Якщо* $\frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, *то* $\frac{s_1}{s_2} < \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}$, $\frac{s_1}{s_1+s_2} \in (0, \frac{5-\sqrt{5}}{10})$, $\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$.

Доведення. Покажемо, що $\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} > \frac{s_1}{s_2}$ при $\frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$. Запишемо для цього різницю

$$\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} - \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2\left((\frac{s_1}{s_2})^2 - 3\frac{s_1}{s_2} + 1\right)}{2s_2-s_1} = \frac{s_2(\frac{s_1}{s_2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(\frac{s_1}{s_2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2})}{2s_2-s_1}.$$

□

Перейдемо до дослідження структури множини C_λ^S при $\lambda = \frac{s_1}{s_2}$.

Теорема 2.12. *Якщо* $\lambda = \frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, *то множина* C_λ^S *є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює* $\alpha_0(C_\lambda^S) = \log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Доведення. З'ясуємо, якою є кількість суміжних з C^S_λ інтервалів рангу $n+1$. Дана множина міститься в об'єднанні циліндричних множин рангу n двох типів:

1) $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c} := \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}$ — об'єднання двох циліндрів, перетином яких є циліндр наступного рангу, тобто

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1} = \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2} = \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 0};$$

2) $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ — циліндр, геометрично подібний всій множині.

Відрізки виду $\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ називатимемо *модифікованими циліндричними відрізками рангу* n, а множину всіх таких вірізків рангу n позначатимемо $\mathcal{A}_n$.

Нехай x_n та y_n — кількість множин виду $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$, а z_n — кількість суміжних з множиною C^S_λ інтервалів рангу n (інтервалів виду $(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}, \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2})$ таких, що не містять точок даної множини). Множина $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ є об'єднанням *двох* множин виду $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c_n c}$ та *однієї* множини $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}c_n s_2}$:

$$\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c} = (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}00} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 0} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 s_2}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ є об'єднанням множин $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c_n c}$ та $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}c_n s_2}$:

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2} = (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2 0} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2 s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2 s_2}).$$

Множина $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ має *два* суміжні інтервали рангу $n+1$ виду

$$(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2}) \quad \text{та} \quad (\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1 s_2}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ має *один* суміжний інтервал

$$(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2 s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2 s_2})$$

рангу $n+1$. Тому мають місце наступні рівності:

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} = z_n, \tag{2.19}$$

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1}. \tag{2.20}$$

Результати занесемо у таблицю.

Ранг	x_n	y_n	z_n
0	0	1	0
1	$1 = u_2$	$1 = u_1$	1
2	$2u_2 + u_1 = u_4 = 3$	$u_1 + u_2 = u_3 = 2$	3
3	$2u_4 + u_3 = u_6 = 8$	$u_3 + u_4 = u_5 = 5$	8
...	...	...	...
n	$2x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n}$	$x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n-1}$	$2x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n}$

Послідовність (u_n) є класичною послідовністю Фібоначчі, а кількість суміжних інтервалів рангу n дорівнює u_{2n}. За формулою Біне маємо:

$$u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2n} - \psi^{2n}\right), \tag{2.21}$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Для доведення нуль-мірності та ніде не щільності C^S_λ покажемо, що міра доповнення $\mu(\overline{C^S_\lambda})$ дорінює діаметру множини:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = |C^S_\lambda|, \tag{2.22}$$

де $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n}$ – сума довжин усіх суміжних інтервалів рангу n $(n = 1, 2, 3, ...)$ виду $(\max \Delta'_{c_1 \ldots c_{n-1} s_1}, \min \Delta'_{c_1 \ldots c_{n-1} s_2})$.

Знайдемо суму збіжного при $\lambda \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi^2 \lambda)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (\psi^2 \lambda)^n \right) =$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{5}} \left(\frac{\varphi^2}{1 - \lambda\varphi^2} - \frac{\psi^2}{1 - \lambda\psi^2}\right) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = \frac{s_2 - s_1 - \lambda(2s_2 - s_1)}{1 - \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}.$$

Знаючи, що $|C^S_\lambda| = \frac{s_2\lambda}{1-\lambda}$, підстановкою значення $\lambda = \frac{s_1}{s_2}$ доводимо рівність (2.22), тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = |C^S_\lambda| = \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}.$$

Обчислимо розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини C^S_λ. Оскільки дана множина належить об'єднанню циліндричних відрізків $\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ рангу $n = 1, 2, 3, ...$, то розглянемо її покриття такими відрізками (відрізки одного рангу між собою не перетинаються). Їх діаметри дорівнюють

$$|\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}| = |\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cup \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}1}| = 2r_n + d_n^1 = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_1 + \lambda(s_2 - s_1)),$$

$$|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}| = s_2 r_n = \frac{s_2\lambda^{n+1}}{1-\lambda}.$$

З формул (2.19), (2.20), (2.21) та результатів таблиці випливають наступні формули, які виражають кількість відрізків $\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ рангу n:

$$x_n = u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n \right), \tag{2.23}$$

$$y_n = u_{2n-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((\sqrt{5}-1)(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\sqrt{5}+1)(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n \right). \tag{2.24}$$

Таким чином,

$$m^{\alpha}_{|\square_n|,|\Delta_n|}(C^S_\lambda) \leqslant x_n \cdot |\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}|^\alpha + y_n \cdot |\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}|^\alpha =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\varphi^2)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\psi^2)^n \right) (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha \lambda^{\alpha n} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi^2)^n + (\psi^2)^n \right) (\frac{s_1 + \lambda(s_2 - s_1)}{1-\lambda})^\alpha \lambda^{\alpha n} =$$

$$= (\lambda^\alpha \varphi^2)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1 + \lambda(s_2 - s_1)}{1-\lambda})^\alpha \right) +$$

$$+(\lambda^\alpha\psi^2)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right)=$$

$$=C_1(\lambda^\alpha\varphi^2)^n+C_2(\lambda^\alpha\psi^2)^n=C_1\left(1+\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{2n}\right)\cdot(\lambda^\alpha\varphi^2)^n,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

де $C_1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right)$, $C_2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right)$.

Отже, маємо

$$H^\alpha(C_\lambda^S)\leqslant\lim_{n\to\infty}C_1\left(1+\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{2n}\right)(\lambda^\alpha\varphi^2)^n=C_1\lim_{n\to\infty}(\lambda^\alpha\varphi^2)^n.$$

Якщо $\lambda^\alpha\varphi^2<1$, що рівносильно $\alpha>-\log_\lambda\varphi^2:=\alpha_0$, то $H^\alpha(C_\lambda^S)=0$. Оскільки $H^\alpha(C_\lambda^S)=0$ для всіх $\alpha>\alpha_0$, то

$$\alpha_0(C_\lambda^S)\leqslant\alpha_0=-\log_\lambda\varphi^2=\log_{\frac{s_2}{s_1}}\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

і $H^\alpha(C_\lambda^S)\leqslant C_1$ при $\alpha=\alpha_0$.

Доведемо тепер, що $H^\alpha(C_\lambda^S)\geqslant C=const>0$ при $\alpha=\alpha_0$. Для цього покажемо, що для *довільного скінченного* ε-покриття $\{E_i\}$ множини C_λ^S відрізками $E_i=[a_i,b_i]$ має місце нерівність

$$0<C\leqslant\sum_{i=1}^k|E_i|^{\alpha_0}.$$

Ми розглядаємо лише скінченні покриття, оскільки множина C_λ^S є компактною. Для довільного E_i існує модифікований циліндричний відрізок $\square_{c_1\ldots c_{n_i-1}c}$ (або $\Delta_{c_1\ldots c_{n_i-1}s_2}$) рангу n_i такий, що $\square_{c_1\ldots c_{n_i-1}c}\subset E_i$ (або $\Delta_{c_1\ldots c_{n_i-1}s_2}\subset E_i$) і жоден з відрізків $\square_{c_1\ldots c_{n_i-2}c}$ (або $\Delta_{c_1\ldots c_{n_i-2}s_2}$) не міститься повністю в E_i (для кожного E_i знайдеться циліндричний відрізок найменшого рангу n_i, який міститься в E_i, а інші відрізки рангу n_i-1 не містяться повністю в E_i).

Для кожної множини E_i з даного покриття існує n_i такий, що:

$$\min\{|\square_{c_1\ldots c_{n_i-1}c}|,|\Delta_{c_1\ldots c_{n_i-1}s_2}|\}=\frac{s_2\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\leqslant|E_i|\leqslant|\square_{c_1\ldots c_{n_i-2}c}|.$$

Піднесемо до степеня $\alpha_0 = \log_\lambda \varphi^{-2}$ і запишемо систему нерівностей для кожного E_i $(i = 1, 2, ..., k)$:

$$\begin{cases} (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_1} \leqslant |E_1|^{\alpha_0}, \\ (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_2} \leqslant |E_2|^{\alpha_0}, \\ ... \\ (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_k} \leqslant |E_k|^{\alpha_0}. \end{cases}$$

Підсумувавши по k, отримаємо

$$\left(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda}\right)^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + (\varphi^2)^{-n_2} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} |E_i|^{\alpha_0}. \quad (2.25)$$

З будови множини C_λ^S слідує, що E_i міститься в об'єднанні не більше, як *п'яти* модифікованих циліндричних відрізків рангу n_i, а точніше, в *трьох* відрізках $\square_{c_1...c_{n_i-1}c}$ та *двох* відрізках $\Delta_{c_1...c_{n_i-1}s_2}$, які належать $\mathcal{A}_{n_i}$.

Врахувавши результати таблиці та формули (2.19), (2.20), (2.23), (2.24), встановлюємо, що E_i міститься в об'єднанні не більше, ніж $R_{n_i}(j)$ модифікованих циліндричних відрізків рангу $j = n_i + m$ $(m = 0, 1, 2, ...)$:

$$R_{n_i}(j) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{m+2} - \psi(\psi)^{m+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_i+2} - \psi(\psi)^{j-n_i+2}). \quad (2.26)$$

Використовуючи формули (2.23) і (2.24), запишемо кількість всіх відрізків $\square_{c_1...c_{j-1}c}$ та $\Delta_{c_1...c_{j-1}s_2}$ довільного рангу j:

$$x_j + y_j = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\varphi^2)^j - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\psi^2)^j.$$

Ця сума не перевищує суми всіх $R_{n_i}(j)$ $(i = 1, 2, ..., k)$, оскільки кожен відрізок E_i покриття $\{E_i\}$ має спільні точки принаймні з одним відрізком покриття $\mathcal{A}_j$. Тому має місце нерівність:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\varphi^2)^j - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\psi^2)^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_1+2} - \psi(\psi)^{j-n_1+2}) + ... + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_k+2} - \psi(\psi)^{j-n_k+2}),$$

яка рівносильна

$$\varphi - \left((\frac{\psi}{\varphi})^2\right)^j \cdot \varphi^2 + \psi\left((\frac{\psi}{\varphi})^2\right)^j \left((\psi)^{-n_1+2} + ... + (\psi)^{-n_k+2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(\varphi^2)^{-n_1+2} + \varphi(\varphi^2)^{-n_2+2} + ... + \varphi(\varphi^2)^{-n_k+2} = \varphi^5 \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}\right),$$

звідки

$$\frac{1}{\varphi^4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{\varphi^2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^5 \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}.$$

Перейшовши до границі при $j \to \infty$, отримаємо

$$\frac{1}{\varphi^4} \leqslant (\varphi^2)^{-n_1} + (\varphi^2)^{-n_2} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}.$$

Використовуючи останню нерівність, ми можемо оцінити ліву частину нерівності (3.16):

$$0 < \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}\right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \leqslant \left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}\right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \cdot (\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} |E_i|^{\alpha_0} \leqslant H^{\alpha_0}(C_\lambda^S).$$

Отже,

$$0 < \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}\right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \leqslant H^{\alpha_0}(C_\lambda^S) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1})^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(2s_2 - s_1)s_1}{s_2 - s_1}\right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Тому $\alpha_0(C_\lambda^S) = \log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

□

Прикладами множин C_λ^S, які задовольняють умови теореми, є множини з наступними алфавітами: $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 3, 8\}$, $\{0, 4, 11\}$, $\{0, \sqrt{2}, \sqrt{17}\}$.

Висновки до розділу 2

В цьому розділі вивчались множини неповних сум кількох класів рядів та властивості розподілів випадкових підсум двопараметричного класу рядів з нелінійною властивістю однорідності. Отримано результати:

1. досліджено властивості множин підсум збуреного геометричного ряду та рядів, визначених рекурентними співвідношеннями між їх членами та залишками;
2. детально вивчено лебегівську структуру, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ, заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності. У випадку дискретності описано точковий спектр розподілу, а у випадку неперервності доведено, що він є сингулярним розподілом канторівського типу з аномально фрактальним спектром. Більше того, доведено, що s-кратна автозгортка неперервного розподілу випадкової величини ξ має аномально фрактальний розподіл при будь-якому натуральному значенні s;
3. досліджено фрактальні властивості несамоподібних множин, які є узагальненням множини неповних сум геометричного ряду, зокрема обчислено їх розмірності Гаусдорфа-Безиковича.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [17, 18, 20, 21] і доповідалися на конференціях [1–13] та семінарах.

РОЗДІЛ 3
МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ РЯДІВ З СУТТЄВИМИ ПЕРЕКРИТТЯМИ ЦИЛІНДРИЧНИХ МНОЖИН

В даному розділі ми цікавимось *тополого-метричними та фрактальними властивостями* множин неповних сум збіжних знакододатних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин індексів n. Даний випадок є найменш вивченим. Множина підсум ряду, що володіє такою властивістю, може бути як нуль-множиною Лебега, так і множиною додатної міри (ніде не щільною множиною або множиною, що містить нескінченну кількість відрізків). Про це свідчать приклади ряду (1.4) і ряду

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{3}{4^3} + \ldots\ . \tag{3.1}$$

Множина неповних сум ряду (3.1) є ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\log_4 (2 + \sqrt{2}) \approx 0,8858.$$

Наведений результат є наслідком теореми 3.2.

3.1. Фрактальні властивості множин підсум рядів з суттєвими перекриттями циліндричних множин

Об'єктом даного пункту є множина E_λ неповних сум ряду

$$a_1 + a_2 + a_1\lambda + a_2\lambda + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + \ldots = \frac{a_1 + a_2}{1 - \lambda}, \tag{3.2}$$

де a_1, a_2, λ — дійсні числа, $a_1 > a_2$, $\lambda \in (0, 1)$.

Зауваження 3.1. Згрупувавши попарно члени ряду (3.2) і врахувавши, що коефіцієнти $\varepsilon_{2n-1}a_1 + \varepsilon_{2n}a_2$ при членах λ^{n-1} можуть набувати чотири значення, множину неповних сум ряду (3.2) запишемо у вигляді

$$E_\lambda = \left\{ x:\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \lambda^{n-1},\quad \eta_n \in \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\} \right\}.$$

Множина E_λ досліджувалась у роботі [96], у якій стверджується, що для майже всіх значень $\lambda > \frac{1}{4}$ вона матиме додатню міру Лебега (див. також теорему 2.1 роботи [97]). Також було встановлено інування такої щільної нуль-множини M_0 значень $\lambda > \frac{1}{4}$, що при кожному з них множина E_λ має нульову міру Лебега. Але не було явно вказано ці значення.

Зауваження 3.2. Множина E_λ неповних сум ряду (3.2) є векторною (арифметичною) сумою $E\{a_1 q^{n-1}\} \oplus E\{a_2 q^{n-1}\}$ множин неповних сум рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_2 q^{n-1}$, тобто

$$E_q = E\{a_1 q^{n-1}\} \oplus E\{a_2 q^{n-1}\} =$$

$$= \left\{ x:\ x = a + b,\ \text{де } a \in E\{a_1 q^{n-1}\},\ b \in E\{a_2 q^{n-1}\} \right\}.$$

З теореми 1.1. роботи [90] випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега) значень $q \in (\frac{1}{4}, 1)$, арифметична сума двох множин підсум геометричних рядів з членами $a_1 q^{n-1}$ та $a_2 q^{n-1}$ є множиною додатньої міри.

Із зроблених вище зауважень і міркувань таких, як в теоремі 2.11, випливає наступне твердження.

Теорема 3.1. *Множина E_λ неповних сум ряду* (3.2) *є*

1) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, якщо $\lambda \in (0; \frac{1}{4})$;

2) відрізком $[0, \ \frac{a_1+a_2}{1-\lambda}]$, якщо $\lambda \in \left[\max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\}; 1\right)$;

3) множиною додатньої міри Лебега для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{4}; \max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\})$.

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E_λ дорівнює

$$\alpha_0(E_\lambda) = -\log_\lambda 4$$

для майже всіх (у розумінні міри Лебега) значень $\lambda \in (0, \frac{1}{4})$ *(для всіх* $\lambda \in \left(0; \min\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\}\right)$*).*

Як ми бачимо, найменш дослідженим залишається проміжок значень

$$\lambda \in \left[\min\left\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\right\};\ \max\left\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\right\}\right) \equiv \widetilde{M},$$

при яких множина E_λ має складну геометрію. З однієї сторони, для майже всіх $\lambda \in \widetilde{M}$ множина E_λ має додатну міру Лебега, а з іншої сторони, існує така підмножина $M_0 \subset \widetilde{M}$, що для всіх $\lambda \in M_0$ множина E_λ має нульову міру Лебега. Основні труднощі при досліджені даної множини пов'язані з тим, що існує континуальна підмножина точок $x \in E_\lambda$, які мають континуальну кількість різних представлень у вигляді сум $x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n$, де $\omega_n \in \{0, 1\}$.

Основною задачею даного пункту є дослідження фрактальних властивостей множини підсум ряду (3.2) при фіксованому $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2} \equiv q \in \widetilde{M}$, тобто ряду

$$a_1 + a_2 + a_1 q + a_2 q + a_1 q^2 + a_2 q^2 + ... = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}. \tag{3.3}$$

Дану множину неповних сум позначатимемо через E_q.

Легко бачити, що для членів ряду (3.3) виконується умова однорідності (по n):

$$a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{3.4}$$

з якої випливає нерівність $a_{2n-1} < r_{2n-1}$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. При певних співвідношеннях чисел a_1 і a_2, для всіх $n \in \mathbb{N}$, має місце одна з двох нерівностей: $a_{2n-1} > r_{2n-1}$ або $a_{2n-1} \leqslant r_{2n-1}$.

Теорема **??** дає повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей множини E_λ при конкретному фіксованому значенні $\lambda = \frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}$, яке може бути більшим за $\frac{1}{4}$. Основний акцент зроблено на вивченні її фрактальних властивостей, чого не було зроблено у вище наведених роботах.

Теорема 3.2. *Множина* E_q *неповних сум ряду* (3.3) *є*

1) відрізком $[0, \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}]$, *якщо* $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;

2) ніде не щільною нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}),$$

якщо $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1)$.

Доведення. 1) Очевидно, що $a_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} < r_{2n-1}$ для всіх номерів n. Нерівність $a_{2n} \leqslant r_{2n}$ рівносильна нерівності $a_2 \leqslant \frac{a_1^2-a_2^2}{2a_2}$, яка має місце при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

Отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \leqslant r_n$, яка у випадку незростаючої послідовності (a_n) є необхідною і достатньою для того, щоб множина E_q була відрізком.

Зазначимо, що у випадку немонотонної послідовності (a_n) членів ряду (2.6), умова $a_n \leqslant r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, є достатньою для того, щоб множина його неповних сум була відрізком, але, взагалі кажучи, не є необхідною.

2) Оскільки $a_{2n-1} > a_{2n}$ для всіх n, то послідовність (a_n) членів ряду (3.3) не є монотонною лише у випадку, коли $a_{2n} < a_{2n+1} \Leftrightarrow a_2 < \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1+a_2}$, що можливо при $\frac{a_2}{a_1} \in (0, \sqrt{2}-1) \subset (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Якщо ж $\frac{a_2}{a_1} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, то послідовність членів ряду (3.3) є спадною і тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ справедливими є нерівності:

$$a_{2n} > r_{2n},\ \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}01} < \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1},\ \max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}10} > \max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0},$$

з яких, враховуючи (1.5), випливає:

$$\Delta_{c_1\ldots c_{2n-1}0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{2n-1}1} = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}00}; \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}01}) = \varnothing,$$

$$E_q \cap (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}10}; \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}11}) = \varnothing.$$

Таким чином, інтервали виду $\delta_{c_1\ldots c_{2n-1}i_{2n}} \equiv (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-1}0}; \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-1}1})$ не містять точок даної множини. Кількість таких *суміжних з множиною* E_q *інтервалів рангу* $2n$ нас цікавитиме. Легко бачити, що

$$|\delta_{c_1\ldots c_{2n-1}i_{2n}}| = a_{2n} - r_{2n} \equiv d_{2n} = \frac{3a_2^2 - a_1^2}{2a_2} \cdot \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^{n-1}, \ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

З метою дослідження властивостей даної множини, розглядатимемо циліндричні множини рангу $2n$ і виділимо їх два типи.

1) $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} \equiv \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}01} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}10}$ — множина, яка є об'єднанням двох циліндрів, які між собою перетинаються. Відповідний множині $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ циліндричний відрізок позначатимемо через

$\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} \equiv [\min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}01}, \max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}10}]$.

2) $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ — циліндр, геометрично подібний всій множині E_q, $c \in \{0, 1\}$.

Множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ є об'єднанням *двох* множин $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccjj}$, де $j \in \{0, 1\}$, і *однієї* множини $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccab}$:

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc} = \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc00} \cup \square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ccab} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc11}, \tag{3.5}$$

а множина $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ є об'єднанням *трьох* множин $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n}cc}$ і *двох* множин $\square'_{c_1\ldots c_{2n}ab}$ наступного парного рангу:

$$\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} = \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}0100} \cup \square'_{c_1\ldots c_{2n-2}01ab} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}\bar{c}ccc} \cup \square'_{c_1\ldots c_{2n-2}10ab} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}1011}. \tag{3.6}$$

Множина $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ має *чотири* суміжні інтервали виду:

$$(\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0100}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0101}),\ (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0110}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0111}),$$

$$(\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}0111}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1001}),\ (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1010}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}1011}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$ має *два* суміжні інтервали виду:

$$(\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc00}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc01}) \text{ та } (\max\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc10}, \min\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc11})$$

рангу $2n+2$.

Нехай x_n — кількість всіх циліндричних множин виду $\square'_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$, y_n — кількість всіх множин виду $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}$, а z_n — кількість всіх суміжних з множиною E_q інтервалів рангу $2n$.

З рівностей (3.5) та (3.6) випливає, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n, \tag{3.7}$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \tag{3.8}$$

Оскільки множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{2n-4}cc}$ має *два* суміжні інтервали рангу $2n$, а множина $\square'_{c_1\ldots c_{2n-4}ab}$ — *чотири*, то

$$z_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Оскільки циліндр другого рангу геометрично подібний множині E_q, то $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Результати занесемо у таблицю.

Крок n / кількість	x_n	y_n	z_n
0	1	0	0
1	2	1	2
2	7	4	8
3	26	15	30
...	...	...	...
n	$2x_{n-1}+3y_{n-1}$	$x_{n-1}+2y_{n-1}$	$2x_{n-1}+4y_{n-1}$

Відшукаємо рекурентні співвідношення, якими пов'язані члени послідовностей (x_n), (y_n), (z_n). З рівностей (3.7), (3.8) отримаємо $x_{n+1} = y_{n+1} + x_n + y_n$, що рівносильно

$$x_{n+1} - x_n = y_{n+1} + y_n. \tag{3.10}$$

Перетворивши рівність (3.7), врахувавши (3.8), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + y_n = 2x_n + 2y_n + x_{n-1} + 2y_{n-1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(y_n + y_{n-1}).$$

Скориставшись рівністю (3.10), отримаємо

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1} + 2(x_n - x_{n-1}) = 4x_n - x_{n-1}.$$

Аналогічно з рівностей (3.7), (3.8) маємо:

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} - 4y_{n-1} + 3y_{n-1} + 2y_n =$$

$$= 2(x_{n-1} + 2y_{n-1}) + 2y_n - y_{n-1} = 4y_n - y_{n-1}.$$

Нескладно побачити, що z_{n+1} також виражається рекурентно:

$$z_{n+1} = 2x_n + 4y_n = 8x_n - 2x_{n-1} + 16y_n - 4y_{n-1} =$$

$$= 4 \cdot (2x_n + 4y_n) - (2x_{n-1} + 4y_{n-1}) = 4z_n - z_{n-1}.$$

Таким чином, отримано *зворотні послідовністі* виду

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \tag{3.11}$$

з різними початковими членами u_0 та u_1.

Від рекурентного задання послідовності $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ перейдемо до аналітичного. Відшукаємо формулу загального члена. Рівняння (3.11) є *лінійним різницевим другого порядку*, розв'язки якого будемо шукати серед показникових функцій виду $u_n = \lambda^n$. Зробивши підстановку, отримаємо

$$\lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + \lambda^n = 0,$$

скоротивши на λ^n, отримаємо рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

яке є *характеристичним* для різницевого рівняння (3.11). Воно має два дійсні корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. З теорії різницевих рівнянь відомо, що загальним розв'язком рівняння (3.11) є функція

$$u_n = C_1(2 + \sqrt{3})^n + C_2(2 - \sqrt{3})^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.12}$$

Підставивши в останню рівність початкові умови $\begin{cases} u_0 \equiv z_0 = 0, \\ u_1 \equiv z_1 = 2, \end{cases}$ отримаємо коефіцієнти $C_1^z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2^z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогічно, підставивши у рівність (3.12) умови $\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_1 = 2 \end{cases}$ і $\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases}$ отримаємо $C_1^x = C_2^x = \frac{1}{2}$ і $C_1^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $C_2^y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ відповідно.

Отже, шукані функції мають вигляд:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right), \tag{3.13}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right), \tag{3.14}$$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right). \tag{3.15}$$

Для знаходження міри Лебега даної множини знайдемо міру її доповнення, тобто обчислимо суму довжин усіх суміжних з E_q інтервалів:

$$\lambda(\overline{E_q}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n d_{2n} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right) q^{n-1} =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{\sqrt{3}(1-q)} \left(\frac{2+\sqrt{3}}{1-2q-\sqrt{3}q} - \frac{2-\sqrt{3}}{1-2q+\sqrt{3}q}\right) =$$

$$= \frac{a_2 - q(a_1 + 2a_2)}{1-q} \left(\frac{2}{1-4q+q^2}\right).$$

Підставивши значення $q = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}$, отримаємо: $\lambda(\overline{E_q}) = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2} = |E_q|$. Таким чином, міра доповнення множини дорівнює її діаметру. Отже, $\lambda(E_q) = 0$.

Позначимо через $\mathcal{A}_n$ сімейство всіх відрізків $\square_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab}$ та $\Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc}$ рангу $2n$, тобто,

$$\mathcal{A}_n = \left\{\square_{c_1 \ldots c_{2n-2}ab} \wedge \Delta_{c_1 \ldots c_{2n-2}cc},\ c_j \in \{0,1\},\ j = 1, 2, ..., 2n-2\right\},$$

а через $\mathcal{A}$ — сімейство всіх можливих таких відрізків, тобто

$$\mathcal{A} = \left\{\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab} \wedge \Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc},\ n \in \mathbb{N},\ c_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,...,2n-2\right\}.$$

Легко бачити, що система $\mathcal{A}_n$ покриває множину E_q скінченною кількістю відрізків, які між собою не перетинаються. Для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини E_q розглядатимемо її покриття лише відрізками з сімейства $\mathcal{A}$. Кількість всіх відрізків множини $\mathcal{A}_n$ виражається за формулами (3.13) та (3.14), а довжини відповідних відрізків становлять

$$|\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}cc}| = r_{2n} = \frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^n,$$

$$|\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}| = 2r_{2n} - r_{2n+2} = \frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}q^n \equiv \varepsilon_n.$$

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце

$$m^{\alpha}_{\varepsilon_n}(E_q) \leqslant x_n \cdot |\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}|^{\alpha} + y_n \cdot |\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}ii}|^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right)\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^n\right)^{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)\left(\frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}q^n\right)^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^n(A_1q^n)^{\alpha} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})^n(A_1q^n)^{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n(A_2q^n)^{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n(A_2q^n)^{\alpha} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}\left((A_1q^n)^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}}(A_2q^n)^{\alpha}\right) + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}\left((A_1q^n)^{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}(A_2q^n)^{\alpha}\right) =$$

$$= (2+\sqrt{3})^n q^{\alpha n}\left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} + \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}\right) + (2-\sqrt{3})^n q^{\alpha n}\left(\frac{A_1^{\alpha}}{2} - \frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= B_1\left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n + B_2\left((2-\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n =$$

$$B_1\left(1+\frac{B_2}{B_1}(2-\sqrt{3})^{2n}\right)\cdot\left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n,$$

де $A_1=\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}$, $A_2=\frac{(a_1+3a_2)(a_1+a_2)}{2a_2}$, $B_1\equiv B_1(\alpha)=\frac{A_1^{\alpha}}{2}+\frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}$, $B_2\equiv B_2(\alpha)=\frac{A_1^{\alpha}}{2}-\frac{A_2^{\alpha}}{2\sqrt{3}}$.

Отже,

$$H^{\alpha}(E_q)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(B_1\left(1+\frac{B_2}{B_1}(2-\sqrt{3})^{2n}\right)\cdot\left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n\right)=$$

$$=B_1\lim_{n\to\infty}\left((2+\sqrt{3})q^{\alpha}\right)^n.$$

Якщо $(2+\sqrt{3})q^{\alpha}<1\Leftrightarrow\alpha>\log_q(2-\sqrt{3})\equiv\alpha_0$, то $H^{\alpha}(E_q)=0$. А тому $H^{\alpha}(E_q)=0$ для всіх $\alpha>\alpha_0$. Таким чином,

$$H^{\alpha_0}(E_q)\leqslant B_1(\alpha_0)=\frac{A_1^{\alpha_0}}{2}+\frac{A_2^{\alpha_0}}{2\sqrt{3}}\quad\text{і}\quad\alpha_0(E_q)\leqslant\alpha_0=\log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}).$$

Доведемо тепер нерівність $\alpha_0(E_q)\geqslant\alpha_0$. Для цього покажемо, що $H^{\alpha_0}(E_q)\geqslant C>0$, де C – деяка константа. Оскільки множина E_q — компактна, то для знаходження величини $m_{\varepsilon}^{\alpha}(E_q)$ достатньо розглядати її скінченні ε-покриття $\{E_k\}$ відрізками $E_i=[a_i,b_i]$. І нехай

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E_q)\equiv\sum_{i=1}^{k}|E_i|^{\alpha}.$$

Для кожної множини E_i з даного покриття існує номер n_i рангу відрізка із $\mathcal{A}_{n_i}$ такий, що

$$\min\{|\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}|,|\square_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}|\}=\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^{n_i}\leqslant$$

$$\leqslant|E_i|<|\square_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}|=\varepsilon_{n_i-1}<\varepsilon.$$

Піднесемо до степеня $\alpha_0=\log_q(2-\sqrt{3})$ і запишемо систему для кожного E_i:

$$\begin{cases}(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}q^{n_1})^{\alpha_0}=A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_1}\leqslant|E_1|^{\alpha_0},\\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_2}\leqslant|E_2|^{\alpha_0},\\ \ldots\\ A_1^{\alpha_0}(2-\sqrt{3})^{n_k}\leqslant|E_k|^{\alpha_0}.\end{cases}$$

Підсумувавши по k, отримаємо

$$\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}\right)^{\alpha_0}\cdot\sum_{i=1}^{k}(2-\sqrt{3})^{n_i}\leqslant\sum_{i=1}^{k}|E_i|^{\alpha_0}=m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q). \tag{3.16}$$

Оскільки $|E_i|<|\square_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}|$ і довжини циліндричних відрізків $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ менші за довжини інтервалів $\delta_{c_1\ldots c_{2n_i-3}i_{2(n_i-1)}}$ при $\frac{a_2}{a_1}>\frac{1}{\sqrt{3}}$ (не складно показати), а множина $\square'_{c_1\ldots c_{2(n_i-2)}ab}$, згідно (3.6), належить об'єднанню *трьох* відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ та *двох* відрізків виду $\square_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}$, то кожний відрізок E_i може мати спільні точки не більше, як з *п'ятьма* відрізками рангу $2n_i$, які належать сім'ї $\mathcal{A}_{n_i}$.

Три відрізки виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}cc}$ разом з двома відрізками виду $\square_{c_1\ldots c_{2(n_i-1)}ab}$ містять 12 відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2n_i}cc}$ і 7 відрізків виду $\square_{c_1\ldots c_{2n_i}ab}$, тому відрізків рангу $2(n_i+1)$ із сім'ї $\mathcal{A}_{n_i+1}$, з якими може мати спільні точки E_i, не більше 19.

Враховуючи формули (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), встановлюємо, що кількість відрізків f_m рангу $2j=2(n_i+m)$ $(m=0,1,2,...)$ з сім'ї $\mathcal{A}_{n_i+m}$, з якими може мати спільні точки відрізок E_i визначається також зворотною послідовністю

$$f_{m+2}=4f_{m+1}-f_m,\quad\text{де } f_0=5,\ f_1=19.$$

Шляхом аналогічних, як при виведенні формул (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) міркувань, встановлюємо, що

$$f_m\equiv f_{n_i}(j)=\frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^m-\frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^m=$$

$$=\frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{j-n_i}-\frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{j-n_i},\quad j\geqslant\max_i\{n_i\}.$$

Згідно з (3.13) і (3.14), запишемо кількість всіх відрізків виду $\Delta_{c_1\ldots c_{2n-2}ii}$ та $\square_{c_1\ldots c_{2n-2}ab}$ довільного рангу $2j$:

$$x_j+y_j=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^j-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^j.$$

Ця сума не перевищує суми $\sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(j)$, оскільки кожен відрізок E_i покриття $\{E_k\}$ має спільні точки принаймні з одним відрізком рангу $2j$ із покриття $\mathcal{A}_{n_i}$. Тому має місце нерівність

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^j + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{9+5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{j-n_i} - \frac{9-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{j-n_i}\right),$$

що рівносильно

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}(2-\sqrt{3})^{n_i} - \frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j \cdot \sum_{i=1}^{k}(2+\sqrt{3})^{n_i}$$

або

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}}+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}}+\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{k}(2+\sqrt{3})^{n_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k}(2-\sqrt{3})^{n_i}.$$

Використовуючи останню нерівність, оцінимо ліву частину нерівності (3.16):

$$A_1^{\alpha_0}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}}+A_1^{\alpha_0}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^j\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{9+5\sqrt{3}}+\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{k}(2+\sqrt{3})^{n_i}\right) \leqslant m_\varepsilon^\alpha(E_q)$$

Перейшовши до границі при $j \to \infty$, отримаємо

$$0 < \frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}}\left(\frac{(a_1+a_2)^2}{2a_2}\right)^{\alpha_0} \leqslant m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q).$$

Таким чином, для довільного ε-покриття $\{E_k\}$ множини E_q відрізками E_i, величина $m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q)$ обмежена знизу константою. Перейшовши до границі ($\varepsilon \to 0$), отримаємо:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{9+5\sqrt{3}} \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon^{\alpha_0}(E_q) = H^{\alpha_0}(E_q).$$

Отже, $\alpha_0(E_q) \geqslant \alpha_0$ і тому розмірність Гаусдорфа-Безиковича даної множини дорівнює

$$\alpha_0(E_q) = \log_{\frac{a_1+a_2}{a_1-a_2}}(2+\sqrt{3}).$$

Теорему доведено. □

3.2. Суперфрактальність множини неповних сум одного ряду

При виконанні умов

$$a_n \geqslant r_n \ \text{ для всіх достатньо великих } \ n \tag{3.17}$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = +\infty \tag{3.18}$$

множина $E\{a_n\}$ неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є аномально фрактальною (див. теорему 1.12). Із наслідку 2.8 випливає, що для аномальної фрактальності множини $E\{a_n\}$ достатньо лише виконання умови (3.18). З теореми 1.9 випливає, що при виконанні умов (3.17) та

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{r_n} = +\infty \tag{3.19}$$

множина підсум $E\{a_n\}$ є аномально фрактальною. Нас цікавить, чи буде множина $E\{a_n\}$ аномально фрактальною, якщо нерівність $a_n < r_n$ виконується для нескінченної множини індексів n (умова (3.17) не виконується) і виконанні умови (3.19)?

3.2.1. Побудова контрприкладу. Для відповіді на поставлене запитання розглянемо збіжний знакододатний ряд

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + ... + \underbrace{c_n + ... + c_n}_{2^{n-1}} + ..., \tag{3.20}$$

для якого виконується рівність

$$\frac{c_k}{\widetilde{r}_k} = k+1, \quad k = 2^n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots , \tag{3.21}$$

де

$$\widetilde{r}_k = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} b_k = \underbrace{c_{n+1} + \dots + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + \dots + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + \dots =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + \dots ,$$

$$c_n = b_{2^{n-1}} = b_{2^{n-1}+1} = b_{2^{n-1}+2} = \dots = b_{2^n-1}. \tag{3.22}$$

Із рівностей (3.21) та (3.22) випливає те, що для всіх номерів $n \neq 2^{m-1}$ виконується нерівність $b_n < r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$.

Відшукаємо загальний член ряду (3.20). Із рівності (3.21) маємо:

$$\widetilde{r}_0 = c_1 + \widetilde{r}_1 = c_1 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{3}{2}c_1, \; c_1 = 2\widetilde{r}_1 = 2(2c_2 + \widetilde{r}_2) = 2(c_2 + \frac{1}{3}c_2),$$

звідки знаходимо $c_1 = \frac{2c_2(2^1 \cdot 3+1)}{3}$ і $c_2 = \frac{3c_1}{2(2^1 \cdot 3+1)}$.

Аналогічно отримаємо

$$c_2 = 3\widetilde{r}_2 = 3(2^2 c_3 + \widetilde{r}_3) = 3(2^2 c_3 + \frac{c_3}{4}) = \frac{3c_3}{4}(2^2 \cdot 4 + 1),$$

звідки знаходимо $c_2 = \frac{3c_1}{2(2^1 \cdot 3+1)} = \frac{3c_3(2^2 \cdot 4+1)}{4}$ і $c_3 = \frac{4c_1}{2(2^1 \cdot 3+1)(2^2 \cdot 4+1)}$.

Доведемо, що

$$c_n = \frac{(n+1)c_1}{2(2^1 \cdot 3+1)(2^2 \cdot 4+1)(2^3 \cdot 5+1) \cdot \dots \cdot (2^{n-1}(n+1)+1)}. \tag{3.23}$$

Покажемо, що з рівності (3.23) при $n = k$ випливає рівність для $n = k+1$:

$$c_n = (n+1)\widetilde{r}_n = (n+1)(2^n c_{n+1} + \widetilde{r}_{n+1}) =$$

$$= (n+1)\left(2^n c_{n+1} + \frac{c_{n+1}}{n+2}\right) = \frac{c_{n+1}(n+1)(2^{n+1}(n+2)+1)}{n+2},$$

звідси отримаємо

$$c_{n+1} = \frac{(n+2)c_1}{2(2^1 \cdot 3+1)(2^2 \cdot 4+1) \cdot \dots \cdot (2^{n-1}(n+1)+1)\,(2^n(n+2)+1)}.$$

Рівність (3.23) доведено.

Із рівностей (3.21) та (3.23) випливає

$$\widetilde{r}_n = \frac{c_1}{2(2^1 \cdot 3 + 1) \cdot ... \cdot (2^{n-1}(n+1)+1)} = \frac{c_1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k(k+2)+1}. \qquad (3.24)$$

3.2.2. Фрактальні властивості множини неповних сум ряду. З метою знаходження міри Лебега та розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини підсум ряду (3.20) розглянемо її покриття циліндричними відрізками рангу $n = 2^m - 1$ $(m = 1, 2, 3, ...)$. Нас цікавить кількість K_n усіх циліндричних відрізків довільного рангу n, які між собою не перетинаються і об'єднання яких містить множину $E\{b_n\}$.

Оскільки кожне число $x \in E\{b_n\}$ має вигляд

$$x = d_1c_1 + d_2c_2 + d_3c_3 + ... + d_nc_n + ...,$$

де

$$d_1 \in \{0, 1\} \equiv D_1,\ d_2 \in \{0, 1, 2\} \equiv D_2,\ ...,\ d_n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2^{n-1}\} \equiv D_n,$$

то доцільно розглянути циліндричні відрізки виду

$$\Delta_{d_1d_2...d_n} = \left[\sum_{k=1}^{n} d_kc_k;\ \sum_{k=1}^{n} d_kc_k + \widetilde{r}_k\right]$$

і циліндричні множини $\Delta'_{d_1d_2...d_n}$, які містять всі суми виду

$$\sum_{k=1}^{n} d_kc_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_kc_k, \quad \gamma_k \in \{0, 1, 2, ..., 2^{k-1}\},$$

при цьому (d_n) – фіксований набір чисел таких, що $d_n \in D_n$. Іншими словами

$$\Delta'_{d_1d_2...d_n} = \left\{y:\ y = \sum_{k=1}^{n} d_kc_k + \sum_{i=2^n}^{\infty} \varepsilon_ib_i,\ \varepsilon_i \in \{0, 1\}\right\}.$$

Легко бачити, що

$$\Delta'_{d_1d_2...d_n} = \Delta'_{d_1d_2...d_n0} \cup \Delta'_{d_1d_2...d_n1} \cup \Delta'_{d_1d_2...d_n2} \cup ... \cup \Delta'_{d_1d_2...d_n2^n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \ (3.25)$$

Оскільки $c_n > \widetilde{r}_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то сусідні циліндричні відрізки одного рангу не перетинаються, тобто

$$\Delta_{d_1 \ldots d_{n-1} d} \cap \Delta_{d_1 \ldots d_{n-1}(d+1)} = \varnothing, \quad d \in \{0, 1, 2, ..., 2^{n-1} - 1\}. \tag{3.26}$$

Позначимо через $\mathcal{A}_n$ сімейство циліндричних відрізків рангу n, що відповідають D-зображенню числа x, тобто

$$\mathcal{A}_n = \{\Delta_{d_1 \ldots d_n},\ d_i \in \{0, 1, ..., 2^{i-1}\},\ i = 1, 2, ..., n\},$$

а через $\mathcal{A}$ — сімейство всіх можливих циліндричних відрізків, тобто,

$$\mathcal{A} = \{\Delta_{d_1 \ldots d_n},\ n \in \mathbb{N},\ d_i \in \{0, 1, ..., 2^{i-1}\},\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Із рівностей (3.25) та (3.26) випливає, що кількість K_n усіх рангових відрізків $\Delta_{d_1 \ldots d_n}$ з $\mathcal{A}_n$, які покривають множину $E\{b_n\}$, обчислюється за формулою

$$K_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} + 1) = \prod_{k=1}^{n} (2^{k-1} + 1). \tag{3.27}$$

Лема 3.1. *Сімейство $\mathcal{A}$ є довірчим для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{b_n\}$, тобто*

$$\alpha_0(E, \mathcal{A}) = \alpha_0(E), \quad \forall E \in E\{b_n\}.$$

Доведення. Нерівність $\alpha_0(E, \mathcal{A}) \leqslant \alpha_0(E)$ очевидна, оскільки сімейство всіх відрізків (підінтервалів) відрізка $[0, r_0]$ містить $\mathcal{A}$ як частину.

Доведемо, що $\alpha_0(E, \mathcal{A}) \geqslant \alpha_0(E)$, $\forall E \in E\{b_n\}$. Розглянемо довільне ε-покриття множини $E \in E\{b_n\}$ відрізками E_i. Для довільного відрізка E_i з даного покриття існує циліндричний відрізок $\Delta_{n_i} \equiv \Delta_{d_1 \ldots d_{n_i}} \in \mathcal{A}_{n_i}$ такий, що

$$|E_i| \in (|\Delta_{n_i}|, |\Delta_{n_i - 1}|] = (\widetilde{r}_{n_i}, \widetilde{r}_{n_i - 1}].$$

Зрозуміло, що

$$\Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}} \cap E\{b_n\} = (\Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}0} \cap E\{b_n\}) \cup$$

$$\cup (\Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}1} \cap E\{b_n\}) \cup \dots \cup (\Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}(2^{n_i-1}+1)} \cap E\{b_n\}).$$

Оскільки відстань між сусідніми циліндрами рангу n_i не менша за число

$$\min \Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}(d_{n_i}+1)} - \max \Delta_{d_1\dots d_{n_i-1}d_{n_i}},$$

то множина $E_i \cap E\{b_n\}$ міститься в об'єднанні не більше як $2^{n_i-1}+1$ ізометричних циліндричних відрізків з $\mathcal{A}_{n_i}$. Таким чином, множину $E_i \cap E\{b_n\}$ можна покрити $f(|E_i|) = 2^{n_i-1}+1$ відрізками з A_{n_i}.

Отже, умова 1 леми 1.7 виконується. Перевіримо виконання умови 2. Для цього достатньо показати, що для довільного $\delta \in (0,1]$ існує $\varepsilon_1(\delta)$ таке, що

$$f(|E_i|) \cdot |E_i|^{\delta} \leqslant C, \tag{3.28}$$

де $|E_i| < \varepsilon_1(\delta)$ і C – деяка додатна константа.

Для доведення нерівності (3.28) оцінимо зверху число $|E_i|$. Маємо

$$f(|E_i|) \cdot |E_i|^{\delta} = (2^{n_i-1}+1) \cdot |E_i|^{\delta} \leqslant (2^{n_i-1}+1) \cdot (\widetilde{r}_{n_i-1})^{\delta}. \tag{3.29}$$

Оскільки

$$\widetilde{r}_{n_i-1} = \widetilde{r}_{n_i} \cdot \frac{\widetilde{r}_{n_i-1}}{\widetilde{r}_{n_i}} = \widetilde{r}_{n_i} \cdot (1 + (n_i+1)2^{n_i-1}),$$

то для довільного $\delta \in (0,1]$ існує $\varepsilon_1(\delta) \equiv \widetilde{r}_{n_i}$ такий, що для всіх $n \geqslant n_i$ має місце

$$(2^{n_i-1}+1) \cdot (\widetilde{r}_{n_i-1})^{\delta} = (2^{n_i-1}+1) \cdot \left(\widetilde{r}_{n_i} \cdot (1 + (n_i+1)2^{n_i-1})\right)^{\delta} =$$

$$= (2^{n_i-1}+1) \cdot \left(\frac{c_1(1 + (n_i+1)2^{n_i-1})}{2(2^1 \cdot 3 + 1) \cdot (2^2 \cdot 4 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{n_i-1}(n_i+1)+1)}\right)^{\delta} \leqslant$$

$$\leqslant (2^{n_i-1}+1) \cdot \left(\frac{c_1(n_i+1)2^{n_i}}{2 \cdot 2^1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2^{n_i-1}(n_i+1)}\right)^{\delta} =$$

$$= (2^{n_i-1}+1)\cdot\left(\frac{2c_1}{n_i!\cdot 2^{1+2+3+\ldots+(n_i-2)}}\right)^{\delta} =$$

$$= \frac{(2^{n_i-1}+1)(2c_1)^{\delta}}{\left(n_i!\cdot 2^{\frac{1}{2}(n_i-1)(n_i-2)}\right)^{\delta}} \leqslant \frac{c_1^{\delta}\cdot 2^{n_i+\delta}}{\left(n_i!\cdot 2^{\frac{1}{2}(n_i-1)(n_i-2)}\right)^{\delta}} = \left(\frac{c_1}{n_i!\cdot 2^{0,5(n_i^2-(3+\frac{2}{\delta})n_i)}}\right)^{\delta}.$$

Отже, величину $(2^{n_i-1}+1)\cdot(\widetilde{r}_{n_i-1})^{\delta}$ можна обмежити зверху як завгодно малою додатною константою, залежною від номера n_i. А тому, згідно з лемою 1.7, сімейство тонких покриттів $\mathcal{A}$ є довірчім для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{b_n\}$. Лему доведено. $\square$

Лема 3.2. *Для довільного* $\alpha \in (0,1)$ *існує номер* n_0 *такий, що для всіх* $n \geqslant n_0$ *виконується нерівність*

$$|\Delta_{d_1d_2\ldots d_n}|^{\alpha} < (2^n+1)\cdot|\Delta_{d_1\ldots d_nd_{n+1}}|^{\alpha}. \tag{3.30}$$

Доведення. Перепишемо нерівність (3.30) у вигляді

$$(\widetilde{r}_n)^{\alpha} < (2^n+1)\cdot(\widetilde{r}_{n+1})^{\alpha} \Leftrightarrow ((2^n(n+2)+1)\widetilde{r}_n)^{\alpha} < (2^n+1)\cdot(\widetilde{r}_n)^{\alpha},$$

що рівносильно

$$(2^n(n+2)+1)^{\alpha} < (2^n+1) \Leftrightarrow \left(\frac{2^n(n+2)+1}{2^n+1}\right)^{\alpha} < (2^n+1)^{1-\alpha}.$$

Доведемо останню нерівність. Очевидно, що для достатньо великих n має місце

$$\left(\frac{2^n(n+2)+1}{2^n+1}\right)^{\alpha} < \left(n+2+\frac{1}{2^n}\right)^{\alpha} < (2^n)^{1-\alpha} = (2^{1-\alpha})^n < (2^n+1)^{1-\alpha}.$$

Лему доведено. $\square$

Лема 3.3. *Сімейство* $\mathcal{A}_n$ *є довірчим для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини* $E\{b_n\}$*, тобто*

$$\alpha_0(E,\mathcal{A}_n) = \alpha_0(E), \quad \forall E \in E\{b_n\}.$$

Доведення. Оскільки множина $E\{b_n\}$ є компактною, то для знаходження величини $H^\alpha(E\{b_n\},\mathcal{A})$ достатньо розглядати її *скінченні* покриття циліндричними відрізками з $\mathcal{A}$. Нехай $(\Delta_i^{(j)})$ — довільне скінченне ε-покриття множини $E\{b_n\}$ відрізками $\Delta_i^{(j)}$. Позначимо через $\Delta_n^{(j)}$ деякий відрізок з $\mathcal{A}_n$ найменшого рангу n (при цьому n є таким, що $|\Delta_n^{(j)}| = \widetilde{r}_n < \varepsilon$ і $|\Delta_n^{(j)}| > |\Delta_i^{(j)}|$ для всіх $i > n$).

Доведемо, що для довільного $\alpha \in (0,1)$ має місце

$$H^\alpha_\varepsilon(E\{b_n\},\mathcal{A}_n) = K_n\cdot(\widetilde{r}_n)^\alpha \leqslant \sum_{i=n}^{n+m-1}\sum_j |\Delta_i^{(j)}|^\alpha, \tag{3.31}$$

де $n+m-1$ – найбільший номер циліндра (найменшої довжини), що належить покриттю $(\Delta_i^{(j)})$. Згідно рівності (3.25), разом з відрізком $\Delta_{n+m-1}^{(j)}$ до покриття $(\Delta_i^{(j)})$ входить $2^{n+m-2}+1$ відрізків, які належать деякому циліндричному відрізку рангу $n+m-2$. Згідно нерівності (3.30), маємо

$$|\Delta_{n+m-1}^{(1)}|^\alpha + |\Delta_{n+m-1}^{(2)}|^\alpha + ... + |\Delta_{n+m-1}^{(2^{n+m-2}+1)}|^\alpha =$$

$$= (2^{n+m-2}+1)\cdot(\widetilde{r}_{n+m-1})^\alpha > (\widetilde{r}_{n+m-2})^\alpha = |\Delta_{n+m-2}^{(j)}|^\alpha.$$

Встановивши аналогічні оцінки для усіх інших відрізків рангу $n+m-1$, ми зможемо оцінити знизу суму з правої частини нерівності (3.31), іншою сумою, в яку вже будуть входити довжини відрізків, ранги j' яких не перевищують $n+m-2$, тобто

$$\sum_{i=n}^{n+m-2}\sum_{j'} |\Delta_i^{(j')}|^\alpha < \sum_{i=n}^{n+m-1}\sum_j |\Delta_i^{(j)}|^\alpha.$$

Повторивши аналогічні дії, за m кроків (кожен із яких дає нову нижню оцінку для відповідних сум), ми отримаємо (3.31).

Знак рівності в (3.31) досягається тоді й лише тоді, коли усі відрізки $\Delta_i^{(j)}$ з покриття $(\Delta_i^{(j)})$ належатимуть $\mathcal{A}_n$.

Лему доведено. $\square$

Теорема 3.3. *Множина $E\{b_n\}$ є суперфрактальною.*

Доведення. Доведемо, що $E\{b_n\}$ має нульову міру Лебега. Розглянемо її покриття відрізками, які належать $\mathcal{A}_n$. Для кожного натурального n маємо

$$\lambda(E\{b_n\}) \leqslant K_n \cdot \widetilde{r}_n = 2c_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2^k+1}{(2^k(k+2)+1)}.$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, бачимо, що останній добуток розбігається до нуля, тому $\lambda(E\{b_n\}) = 0$.

Згідно попередньої леми, для обчислення розмірності Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{b_n\}$ можна обмежитись розглядом її покриттів лише циліндричними відрізками з $\mathcal{A}_n$. Оскільки величина

$$H^\alpha(E\{b_n\}, \mathcal{A}_n) = \lim_{n\to\infty} (K_n \cdot (\widetilde{r}_n)^\alpha) = 2^{1-\alpha} c_1^\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{(2^n(n+2)+1)^\alpha}$$

рівна нескінченності при $\alpha \in (0,1)$, а при $\alpha = 1$ — рівна нулю, то розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини $E\{b_n\}$ рівна одиниці.

Теорему доведено. $\square$

3.3. Множини неповних сум рядів однопараметричної сім'ї

Нехай λ – дійсне число з $(0,1)$. Розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 8\lambda+4\lambda+3\lambda+2\lambda+8\lambda^2+4\lambda^2+3\lambda^2+2\lambda^2+...+8\lambda^k+4\lambda^k+3\lambda^k+2\lambda^k+... . \tag{3.32}$$

Кожна неповна сума $x \in E\{d_n\}$ даного ряду має вигляд

$$x = 8x_1\lambda+4x_2\lambda+3x_3\lambda+2x_4\lambda+...+8x_{4k-3}\lambda^k+4x_{4k-2}\lambda^k+3x_{4k-1}\lambda^k+2x_{4k}\lambda^k+... =$$

$$= y_1\lambda + y_2\lambda^2 + ... + y_k\lambda^k + ...,$$

де $x_i \in \{0,1\}$, $y_i \in \{0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17\} \equiv Y$.

Множину підсум ряду (3.32) позначатимемо через D_λ. Нас цікавить структура множини при кожному фіксованому значенні параметра λ.

Легко бачити, що $a_{4n-3} < r_{4n-3}$ при $\lambda \in (0,1)$, $a_{4n-2} < r_{4n-2}$ при $\lambda \in (0,1)$, $a_{4n-1} < r_{4n-1}$ при $\lambda \in \left(\frac{1}{12}, 1\right)$ і $a_{4n} < r_{4n}$ при $\lambda \in \left(\frac{2}{19}, 1\right)$. Таким чином, існують значення λ, при яких співвідношення $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються нескінченну кількість разів.

Нескладно показати, що D_λ є: нуль-множиною Лебега при $\lambda \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$, відрізком при $\lambda \in \left[\frac{2}{19}, 1\right)$. Із результатів Б. Солом'яка (див. наприклад [96]) слідує, що D_λ є множиною додатної міри при майже всіх значеннях $\lambda \in \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{19}\right)$. Також нескладно помітити, що при $\lambda \in \left(0, \frac{2}{19}\right]$ множина D_λ не є скінченним об'єднанням відрізків.

В даному пункті ми акцентуємо увагу на дослідженні топологічних властивостей множини D_λ при $\lambda \in \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{19}\right)$.

Для доведення основного твердження використовуватимемо поняття *ε-апроксимації множини.*

Означення 3.1. Нехай ε – деяке додатне число. Будемо казати, що множина $J \subset \mathbb{R}$ *ε-апроксимується множиною* $K \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\forall x \in J \quad \exists k \in K: \quad 0 \leqslant x - k \leqslant \varepsilon. \tag{3.33}$$

Наступні дві *властивості* випливають з (3.33):

$$\forall x \in J \quad \exists k \in K \quad k \in [x-\varepsilon,\ x]. \tag{3.34}$$

$$J \subset \bigcup_{k \in K} [k,\ k+\varepsilon]. \tag{3.35}$$

Також нам знадобляться наступні позначення:

$$\varepsilon_n \equiv \lambda^n = \frac{1-\lambda}{17\lambda} r_{4n},$$

$$A_n \equiv 2\sum_{k=1}^{n} \lambda^k = \frac{2\lambda(1-\lambda^n)}{1-\lambda} \to \frac{2\lambda}{1-\lambda} \quad (n \to +\infty),$$

$$F_n \equiv \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{4n} y_i \lambda^i, \quad y_i \in Y \right\}$$

– множина частинних неповних сум ряду (3.32) рангу $4n$.

Лема 3.4. *Для довільного* $f \in F_n$*, відрізок* $[f + 2\lambda\varepsilon_n, f + 16\lambda\varepsilon_n]$ ε_{n+1}*-апроксимується множиною* F_{n+1}.

Доведення. Нехай $g \in F_{n+1}$. Тоді

$$g = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda^i + y_{n+1}\lambda^{n+1} = f + y_{n+1}\varepsilon_{n+1}.$$

І навпаки, кожне число $g = f' + y'_{n+1}\varepsilon_{n+1}$, де $f' \in F_n$ і $y'_{n+1} \in Y$, належить множині F_{n+1}. Оскільки

$$[f + 2\lambda\varepsilon_n; f + 16\lambda\varepsilon_n] = [f + 2\varepsilon_{n+1}; f + 16\varepsilon_{n+1}] \subset \bigcup_{g \in F_{n+1}} [g; g + \varepsilon_{n+1}]$$

(так як$\varepsilon_{n+1} = \lambda\varepsilon_n$ і $[g; g+\varepsilon_{n+1}] = [f+y_{n+1}\varepsilon_{n+1}; f+\varepsilon_{n+1}(y_{n+1}+1)]$]), то згідно (3.35), відрізок $[f+2\varepsilon_{n+1}; f+16\varepsilon_{n+1}]$ ε_{n+1}-апроксимується множиною F_{n+1}, що і завершує доведення леми. □

Лема 3.5. *Відрізок* $\left[A_n, \frac{17\lambda}{2(1-\lambda)}\right]$ ε_n*-апроксимується множиною* F_n.

Доведення. Доведення проведемо за індукцією. Згідно леми 3.4 при $f = 0$ і $n = 0$ відрізок $[2\lambda; 16\lambda]$ ε_1-апроксимується множиною F_1, а тому і відрізок $[A_1; \frac{17}{2(1-\lambda)}]$ також ε_1-апроксимується.

Припустимо, що відрізок $[A_n; \frac{17}{2(1-\lambda)}]$ ε_n-апроксимується множиною F_n. Для довільної точки $x \in [A_{n+1}; \frac{17}{2(1-\lambda)}]$ маємо:

$$x \geqslant A_{n+1} = A_n + 2\lambda\varepsilon_n \;\Rightarrow\; x - 2\lambda\varepsilon_n \in \left[A_n; \frac{17}{2(1-\lambda)} - 2\lambda\varepsilon_n\right] \subset \left[A_n; \frac{17}{2(1-\lambda)}\right].$$

Згідно властивості (3.35), має місце включення

$$x - 2\lambda\varepsilon_n \in [f; f + \varepsilon_n] \Rightarrow x \in [f + \lambda\varepsilon_n; f + (2\lambda + 1)\varepsilon_n] \subset [f + \lambda\varepsilon_n; f + 16\lambda\varepsilon_n].$$

Згідно леми 3.4, відрізок $[f + \lambda\varepsilon_n; f + 16\lambda\varepsilon_n]$ ε_{n+1}-апроксимується множиною F_{n+1}, що й доводить лему. □

Теорема 3.4. *Множина D_λ є*

1) нуль-множиною Лебега при $\lambda \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$;

2) відрізком $[0, \frac{17\lambda}{1-\lambda}]$ при $\lambda \in \left[\frac{2}{19}, 1\right)$;

3) множиною додатної міри Лебега при майже всіх (відносно міри Лебега) значеннях $\lambda \in \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{19}\right)$;

4) канторвалом при $\lambda \in \left[\frac{1}{14}, \frac{2}{19}\right)$.

Доведення. 1) Оскільки

$$D_\lambda = \lambda D_\lambda \cup (2\lambda \oplus \lambda D_\lambda) \cup (3\lambda \oplus \lambda D_\lambda) \cup ... \cup (15\lambda \oplus \lambda D_\lambda) \cup (17\lambda \oplus \lambda D_\lambda),$$

то, за властивості напівадитивності міри, для міри Лебега $\mu(\cdot)$ множини D_λ справедлива нерівність

$$\mu(D_\lambda) \leqslant 16\lambda \cdot \mu(D_\lambda),$$

з якої випливає, що $\mu(D_\lambda) = 0$ при $\lambda < \frac{1}{16}$.

2) Оскільки для членів ряду (3.32) та відповідних залишків виконується нерівність $d_n \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то за теоремою Какея множина D_λ є відрізком.

3) З теореми 2.1 роботи [97] випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега) $\lambda \in [\frac{1}{16}; 1)$ множина D_λ має додатню міру Лебега (див. також теорему 1.3 роботи [96]).

4) Доведемо, що для всіх $\lambda \in \left[\frac{1}{14}, \frac{2}{19}\right)$ множина D_λ є канторвалом. Для цього покажемо, що вона містить деякий відрізок, тобто $[a, b] \subset D_\lambda$.

Згідно леми 3.5 і властивості (3.35) відрізки $\left[A_n; \frac{17\lambda}{2(1-\lambda)}\right]$ належать об'єднанню

$$\bigcup_{f \in F_n} \left[f; f + \frac{1-\lambda}{17\lambda} r_{4n}\right] \subset \bigcup_{f \in F_n} [f; f + r_{4n}] = F_n \oplus [0; r_{4n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$\left[\frac{2\lambda}{1-\lambda}; \frac{17\lambda}{2(1-\lambda)}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[A_n; \frac{17\lambda}{2(1-\lambda)}\right] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \oplus [0; r_{4n}]) = D_\lambda.$$

$\square$

Висновки до розділу 3

В цьому розділі вивчались множини неповних сум трьох класів збіжних знакододатних рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин індексів n. Отримано такі результати:

1. досліджено фрактальні властивості несамоподібних множин неповних сум рядів "з суттєвими перекриттями циліндричних відрізків", зокрема обчислено їх розмірності Гаусдорфа-Безиковича;
2. вивчено тополого-метричні властивості множин підсум рядів, що є сумами чотирьох геометричних рядів з одним і тим же параметром, множиною значень яких є симетричний канторвал;
3. знайдено ряд з необмеженою послідовністю відношень його членів та залишків, множина підсум якого є суперфрактальною.

Задачі про обчислення розмірностей Гаусдорфа-Безиковича множин неповних сум рядів або доведення, що вони є канторвалами, були основними в даному розділі. Тут також вивчалось питання використання множин із сімейства циліндричних відрізків для спрощення розв'язування задачі про відшукання розмірності Гаусдорфа–Безиковича множини підсум ряду. При цьому доведено, що для розв'язання вказаних задач досить обмежуватися покриттями множинами, що є об'єднаннями циліндричних відрізків одного рангу.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [19, 22] і доповідалися на конференціях [14–16] та семінарах.

ВИСНОВКИ

Розпочате у 1914 році вивчення геометрії числових рядів (у першу чергу, тополого-метричних і фрактальних властивостей їх множин неповних сум) сьогодні стало серйозним напрямом сучасних математичних досліджень, які ведуться на межі математичного аналізу, топології, фрактальної геометрії, теорії міри та теорії ймовірностей.

На фоні загальних фундаментальних результатів топологічного характеру, отриманих відносно недавно, сьогодні геометрія числових рядів в основному збагачується за рахунок розвитку індивідуальних теорій, а саме: вивчення класів рядів, які володіють певними властивостями однорідності і залежать від скінченної кількості параметрів. Разом з цим чекають на вирішення багато різноаспектних проблем у загальній постановці.

У даній роботі ми зосередили свою увагу на вивченні структурних властивостей множин неповних сум рядів, які мають різні властивості однорідності, зокрема рядів, для яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n < r_n$ виконуються для нескінченних множин значень індекса n. Множини неповних сум абсолютно збіжних рядів є спектрами нескінченних згорток Бернуллі. Тому проблеми тополого-метричної теорії числових рядів тісно переплітаються з теорією розподілів випадкових величин з фрактальними властивостями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров П.С., Пасынков В.А.* Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. — М.: Мир, 1973. — 576 с.
2. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування. — Киев: Наук. думка, 2013. — 288 с.
3. *Безикович А. С.* Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости // Мат. сб. — 1924. — №4. — С. 524–556.
4. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969. — 238 с.
5. *Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З.* О строении множества $\overline{\alpha}$-представимых чисел // Изв. вузов. Матем. — № 5, 1980. — С. 8–11.
6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967. — 256 с.
7. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 231 с.
8. *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 216–232.
9. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Топологометричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. — С. 210–224.

10. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2008. — **79**. — С. 34–49.

11. *Гончаренко Я. В., Микитюк І. О.* Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання // Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004, № 5. — С. 242–254.

12. *Задніпряний М.В., Працьовита І.М.* Нескінченні згортки Бернуллі, пов'язані з рядами Сільвестера // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2010. – №11. – С. 232–240.

13. *Золотарев В. М., Круглов В. М.* Структура безгранично делимых распределений на локально бикомпактной абелевой группе // Теория вероятностей и ее применения. — 1975. — **20**, no. 4. — С. 712–724.

14. *Ібрагім М.Х., Торбін Г.М.* Про ймовірнісний підхід до DP-перетворень та довірчості систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2015. – №92. – С.28-40.

15. *Івоненко А. О.* Знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини канторівського типу // Студентські фізико-математичні етюди — 2010, № 9. — С. 43–58.

16. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1974. — 456 с.

17. *Корсунь Н. О., Працьовитий М. В.* Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2009, № 10. — С. 28–39.

18. *Литвинюк А.А., Працьовитий.М.В.* Розподіл випадкових величин, представлених s-адичним дробом з надлишковим набором цифр //

Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Вип.3.— Київ: НПУ, 1998.— С. 86-190.

19. *Литвинюк А.* Розподіли сум деякого класу випадкових рядів з незалежними розподіленими коефіцієнтами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 122–128.
20. *Лукач Е.* Характеристические функции. — М.: Наука, 1979. — 424 с.
21. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы — М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
22. *Натансон И.П.* Теории функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1971. — 480 с.
23. *Окстоби Дж.* Мера и категория .— М.: Мир, 1974. — 156 с.
24. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. — Москва: Наука, 1978. — 391с.
25. *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — №7. — С. 174–189.
26. *Працьовитий М.В.* Згортки сингулярних розподілів // Доп. НАН України. — 1997. — №9. — С. 36–42.
27. *Працьовитий М.В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. — 1996. — №5. — С. 32–37.
28. *Працьовитий М. В., Литвинюк А. А.* Розподіли випадкових величин, представлених s-адичним дробом з надлишковим набором цифр // Наукові записки НПУ ім. Драгоманова. Фіз.–мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 136–141.
29. *Працьовитий М.В.* Геометрія чисел, представлених знакозмінними рядами // Наук. записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Вип. 2. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — С. 159–164.
30. *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.

31. *Працьовитий М.В.* Структура досконалих множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2009. — №10. — С. 179–189.

32. *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — №7. — С. 105–116.

33. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень простору $\mathbb{R}^1$, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2003. — №4. — С. 207–215.

34. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2006. — №7. — С. 140–151.

35. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

36. *Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В.* Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14–28.

37. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — №4. — С. 48–54.

38. *Торбін Г. М.* Фрактальні розподіли ймовірностей і перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича: дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз-мат. наук: спец.: 01.01.05 “теорія ймовірностей і математична статистика” / Г. М. Торбін. — Київ, 2008. — 404 с.

39. *Торбін Г. М.* Топологічні властивості спектра випадкової величини,

заданої за допомогою збіжного знакододатного ряду // Фрактальний аналіз та суміжні питання. Київ: IM НАН України — НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 1998, № 1. — С. 45–52.

40. *Торбін Г.М.* Узагальнені множини канторівського типу та один спосіб знаходження їх розмірності Хаусдорфа–Безиковича // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — №2. — С. 115–121.
41. *Торбін Г.М., Працьовита І.В.* Сингулярність випадкових рядів Остроградського другого виду // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2009. – №80. – С.56-64.
42. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
43. *Федер Е.* Фракталы. — Москва: Мир, 1991. — 260с .
44. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. — Москва: Наука, 1987. — 760 с.
45. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1984. — Т.2. — 752 с.
46. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 6-е изд. Москва: Наука, 1966. — Т.2. — 800 с.
47. *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств // Чехословацкий математический журнал, Прага. — 1961. — **11 (86)**, — С. 24-56.
48. *Шилов, Г. Е, Гуревич, Б. А.* Интеграл, мера и производная. — Москва: Наука, 1967. — 220 с.
49. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 640 с.
50. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it // Rev. Roum. Math. Pures. Appl. — 2009. — **54**, no. 2. — P. 85–115.

51. *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorf dimension faithfulness for covering families and its application, Preprint arXiv:1305.6036.
52. *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular continuos probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math. — 2005. — **129**, no. 4. — P. 356–367.
53. *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // Bull. Sci. Math. — 2008. — **132**, no. 8. — P. 711–727.
54. *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — №5. — С. 248-264.
55. *Banakh T., Bartoszewitcz A., Filipczak M., Szymonik E.* Topological and measure properties of some self-similar sets, Preprint arXiv:1403.0098v1
56. *Banakh T., Bartoszewitcz A., Głąb S., Szymonik E.* Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 // Colloq. Math. — 2012. — **129**. — P. 75–85.
57. *Banerjee C. R., Lahiri B. K.* On subseries of divergent series // Amer. Math. Monthly, — 1964. — **71**. — P. 767–768.
58. *Bartoszewitcz A., Filipczak M., Szymonik E.* Multigeometric sequences and Cantorvals, Preprint arXiv:1304.4218v2
59. *Besicovitch A.* On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure // Indag. Math., 14:339-334, 1952.
60. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory. Illinois J. Math., 4:187-209, 1960.
61. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory. II. Illinois J. Math., 5:291-298, 1961.

62. *Cantor G.* Über die einfachen Zahlensysteme. Zeitschrift f. Math. u. Physik., 14:121-128, 1869.
63. *Cantor G.* Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten // Math. Am. — 1883. — **21**. — P. 545–591.
64. *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1998. — **124**. — P. 135–149.
65. *Cutler C.* A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on $\mathbb{R}$ // Internat. J. Math. Sci. — 1988. — **4**. — P. 643–650.
66. *Falconer K. J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Chichester: Wiley, 1990. — 290 p.
67. *Falconer K. J.* The geometry of fractal sets. — Cambridge University Press, 2002. — 162 p.
68. *Ferens C.* On the range of purely atomic probability measures // Studia Math. — 1984. — **77**. — P. 261–263.
69. *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. — 1988. — **55**, no. 2. — P. 323–327.
70. *Hausdorff F.* Dimension und äußeres Mäß. Math. Ann., 79:157-179, 1918.
71. *Hutchinson J. E.* Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — **30**. — P. 713–747.
72. *Hornich H.* Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen // Studia Math. Phys. — 1941. — **49**. — P. 316–320.
73. *Jones R.* Achievement Sets of Sequences // Amer. Math. Monthly — 2011. — **118**. — P. 508–521.
74. *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and the Riemann zeta function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — **38**, no. 1. — P. 48–88.
75. *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–164.

76. *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc. — 1914. — **7**, no. 2. — P. 250–251.

77. *Keane M., Smorodinsky M., Solomyak B.* On the morfology of γ–expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**, no. 3. — P. 955–966.

78. *Lévi P.* Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes // Studia Math. — 1931. — **3**. — P. 119–155.

79. *Lytvynuk A. A.* On types of distributions of sums of one class of random power series with independent identically distributed coefficient // Ukrainian Math. J. — 1999. — **51**, no. 1. — P. 140–145.

80. *Mendes P., Oliveira F.* On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets // Nonlinearity. — 1994. — **7**. — P. 329–343.

81. *Menon P. K.* On a class of perfect sets // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — **54**. — P. 706–711.

82. *Morán M.* Fractal series // Mathematica. — 1989. — **36**. — P. 334–348.

83. *Nitecki Z.* The subsum set of a null sequence, http://tufts.edu/∼znitecki.

84. *Nymann J. E., Sáenz R. A.* The topological structure of the set of P-sums of a sequence // Publ. Math. Derecen — 1997. — **50**. — P. 305–316.

85. *Nymann J. E., Sáenz R. A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. — 2000. — **83**. — P. 323–327.

86. *Nymann J. E.* Linear combination of Cantor sets // Colloq. Math. — 1995. — **68**. — P. 259–264.

87. *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof // Math. Res. Lett. — 1996. — 3, №2. — P. 231–239.

88. *Peres Y, Schlag W, Solomyak B.* Sixty year of Bernoulli convolutions // Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probobility.— 2000. — **46**. — P. 39–65.

89. *Pollicott M., Simon K.* The Hausdorff dimension of λ–expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**, no. 3. — P. 967–

983.

90. *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1998. — **350**, no. 10. — P. 4065–4087.
91. *Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Yu.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — **13** (29), №1-2. — P. 205–224.
92. *Prus-Wiśniowski F.* Beyond the sets of subsums, www.atom.math.uni.lodz.pl/download.php?f=media/repository/preprinty/2013/2013_04.pdf&fc= 2013_04.pdf
93. *Rogers C. A.* Hausdorf measures. Cambridge Univ. Press, London, 1998.
94. *Šalát T.* Absolut konvergente Reihen und Hausdorffsche Mass // Чехосл. мат. ж.— 1959. — **9** (84). — P. 372–389.
95. *Šalát T.* On subseries // Math. Z. — 1964. — **85**. — P. 209–225.
96. *Solomyak B.* Measure and dimension for some fractal families // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1998. — **124**. — P. 531–548.
97. *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Annals of Mathematics.— 1995. — **142**. — P. 611–625.
98. *Steinhaus H. D.* Nowa Własność Mnogości Cantora // Wektor. — 1917. — P. 1–3. (English transl. in: Steinhaus, H. D. Selected Papers. PWN, Warszawa 1985.)
99. *Steinhaus H.* Sur les distances des points dans les ensembles de measure positive // Fund. Math. — 1920. — P. 93–104.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

1. *Савченко І.О.* Властивості множини неповних сум одного знакододатного ряду залежно від параметру / І.О. Савченко // Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: тези доповідей / НПУ імені М.П. Драгоманова. — Київ, 2011. — С. 100–101.
2. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ: Матеріали конф. — Київ, 2012. — С. 111.
3. *Savchenko I.O.* Fractal properties of a family linear sets / I.O. Savchenko // International Conference on Algebra is dedicated to 100^{th} anniversary of S.M. Chernikov, Kyiv, August 20–26, 2012. Books of abstracts. — Kyiv, 2012. — P. 130.
4. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Міжнародна конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", Київ, 13–14 грудня 2012 р.: Матеріали конф. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — С. 90.
5. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013 р.: Тези доповідей. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2013. — С. 79.
6. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множини неповних сум число-

вих рядів з однією умовою однорідності / І.О. Савченко // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: тези доповідей / Національний університет "Києво-Могилянська академія". — Київ, 2013. — С. 111.

7. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множини неповних сум числових рядів з однією умовою однорідності / І.О. Савченко // Боголюбівські читання DIF-2013 "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування": матеріали конференції. — Севастополь, 2013. — С. 267–268.
8. *Savchenko I.* Topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums of one class positive series / I. Savchenko // The 9-th International Algebraic Conference, Lviv, July 08-13, 2013. Abstracts of Reports. — Lviv, 2013. — P. 166.
9. *Savchenko I.* Fractal properties of the set of incomplete sums of positive series with some condition of homogeneity / I. Savchenko // The Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013. — P. 110.
10. *Савченко И.А.* Фрактальные свойства множеств неполных сумм числовых рядов с одним условием однородности / И.А. Савченко // Крымская международная математическая конференция – (Судак, 22 сентября – 4 октября, 2013): тези доповідей. — Судак, 2013. — С. 19–20.
11. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум числових рядів з однією нелінійною умовою однорідності / І.О. Савченко // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет

імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 114.

12. *Савченко І.О.* Фрактальні властивості множин неповних сум числових рядів з однією нелінійною умовою однорідності / І.О. Савченко // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ "КПІ", 2014. — С. 164.
13. *Савченко І.О.* Випадкові неповні суми знакододатних рядів та їх фрактальні властивості / І.О. Савченко // IV міжнародна Ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана: Тези доповідей. — Чернівці, 2014. — С. 178–180.
14. *Савченко І.О.* Множина неповних сум числового ряду з суттєвими перекриттями циліндричних відрізків / І.О. Савченко // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: тези доповідей / Національний технічний університет "КПІ". — Київ, 2015. — С. 50.
15. *Савченко І.О.* Тополого-метричний аналіз множин неповних сум числових рядів / І.О. Савченко // Міжнародна наукова конференція молодих вчених з математики: тези доповідей / Інститут математики НАН України. — Київ, 2015. — С. 84.
16. *Савченко І.О.* Множини неповних сум деяких збіжних рядів / І.О. Савченко // Матеріали Міжнародної науково-методичної конф. "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", 25-26 червня 2015 р. К.: НУХТ, 2015. — С. 110–111.
17. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2012. — **13** (2). — С. 188–196.
18. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ іме-

ні М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **14**. — С. 227–239.

19. *Савченко І.О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — **15**. — С. 119–133.
20. *Працьовитий М. В.* Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності / І.О. Савченко // Буковинський математичний журнал. — 2014. — **2**, 2–3. — С. 196–202.
21. *Працьовитий М.В.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності / І.О. Савченко // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133–142.
22. *Працьовитий М.В.* Множина неповних сум рядів однієї однопараметричної сім'ї / І.О. Савченко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2014. — **16** (2). — С. 125–131.