НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЗАВОРОТИНСЬКИЙ АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 517.956.2

ЕЛІПТИЧНІ З ПАРАМЕТРОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З НЕВІДОМИМИ ДОДАТКОВИМИ ФУНКЦІЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор Горбачук Мирослав Львович
Інститут математики НАН України, м. Київ,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКА Галина Петрівна,
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
професор кафедри диференціальних рівнянь;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ЛОСЬ Валерій Миколайович,
Національний технічний університет України "КПІ", м. Київ,
докторант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей.

Захист дисертації відбудеться " 13 " вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01604, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 11 " серпня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена розвитку сучасної теорії еліптичних крайових задач, а саме, дослідженню характеру розв'язності еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

Еліптичні оператори з параметром відіграють важливу роль у теорії еліптичних рівняннь та її застосуваннях. Серед них окремий інтерес викликають еліптичні з малим праметром крайові задачі і пов'язані з ними слабко еліптичні з параметром крайові задачі. Такі задачі давно виникали в різних розділах математичної фізики. Їх загальна теорія бере свій початок з роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка (1957). Пізніше вона була розвинута у роботах Л. Франка (1979, 1990, 1997), А. С. Демідова (1973, 1975), Г. І. Ескіна (1973), С. А. Назарова (1981, 1986). В останні роки посилився інтерес до дослідження еліптичних диференціальних рівняннь з параметром. Так, систематичний виклад теорії еліптичних з малим параметром крайових задач дав Л. Р. Волевич (2006). Його стаття є фактично сучасним переосмисленням результатів класичної роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка (1957).

Поряд з цими задачами розглядалися і задачі, які отримуються при заміні "малого" параметра на "великий" параметр. Такий клас задач отримав назву слабко еліптичних крайових задач (операторних в'язок) і систематично досліджувався у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена (1998, 2000, 2001). Такі задачі є узагальненням еліптичних з параметром задач, які ввели і досліджували Ш. Агмон (1962) та М .С. Аграновіч, М. І. Вішик (1964). Ці задачі були застосовані у теорії параболічних мішаних задач.

В 1963 р. Б. Лавруком (1963-1965) було виділено важливий клас еліптичних крайових задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Такі задачі виникають при переході від загальної еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі відносно деякої формули Гріна. Згодом з'ясувалося, що до цього класу задач приводять різні задачі теорії пружжності і гідромеханіки. Еліптичні у сенсі Лаврука задачі були досліджені у роботах А. Г. Асланяна, Д. Г. Васильєва, В. Б. Лідського (1981), В. А. Козлова, В. Г. Мазья, Й. Россмана (1997), Л. Р. Волевича та С. Д. Гіндікіна (1999), Я. А. Ройтберга (1999) та інших.

Пізніше Л. Р. Волевич (2007) застосував теорію слабко еліптичних з параметром задач до мішаних задач для параболічних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. Було введено новий клас крайових задач для параболічних операторів у частинних похідних, які не задовольняють класичні умови параболічності. Зазначимо, що в крайових умовах таких задач з'явилися невідомі додаткові функції, які задані на межі області, і загальна теорія для таких задач не була побудована.

Зважаючи на це, побудова теорії розв'язності еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі рівнянь з частинними похідними згідно із загальним планом досліджень у рамках науково-дослідної теми «Еволюційні та спектральні задачі для диференціальних рівнянь у банахових просторах» (номер державної реєстрації 0111U001027).

Метою дослідження дисертаційної роботи є розробка теорії еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних з параметром крайових задач, які містять додаткові невідомі функції на межі області .

Об'єктом дослідження є еліптичні з малим параметром та слабко еліптичні крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області.

Завдання дослідження:

1. Виділити клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

2. Встановити необхідні і достатні умови, за яких соболєвські норми розв'язків цих задач допускають апріорні оцінки зі сталими, не залежними від малого параметра.

3. Виділити клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

4. Встановити необхідні і достатні умови існування апріорних оцінок розв'язків цих задач у відповідних функціональних просторах Соболєва, в яких сталі не залежать від великого параметра.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи функціонального аналізу, теорії рівнянь з частинними похідними і теорії функцій. Ключовим у дослідженні є метод примежового шару М. І. Вішика – Л. А. Люстерніка (1957).

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.

2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.

3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків вказаних задач і отримано інтегральні оцінки похідних цих розв'яків.

4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром розглянутих задач.

5. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.

6. Для цих задач побудовано фундаментальну систему розв'язків таких задач і отримано інтегральні оцінки їх похідних.

7. Для соболєвських норм розв'язків цих задач отримано апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Основні її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії рівнянь у частинних похідних, зокрема у теорії еліптичних крайових задач з негладкою межею та при дослідженні параболічних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дисертації, постановка задач і схема їх дослідження належать науковому керівникові — М. Л. Горбачуку і Л. Р. Волевичу. Результати робіт [1 – 6] отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались і обговорювалися на:

— київському семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Березанський

Ю. М., член-кор. НАН України Горбачук М. Л., член-кор. НАН України Самойленко Ю. С.);

— спільному семінарі кафедр вищої і прикладної математики Чернігівського національного педагогічного університету ім.Т.Г.Шевченка і Чернігівського національного технологічного університету (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);

а також на конференціях:

- Всеукраїнській науковій конференції молодих учених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченій 100-річному ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.)

- Міжнародній конференції «Сучасний аналіз та застосування 2007», присвяченій 100-літтю з дня народженя М. Г. Крейна (Одеса, 9-14 квітня 2007 р.)

- Другій Міжнародній конференції молодих учених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (Донецьк, 11-14 листопада 2008 р.)

- Міжнародній конференції "Современные проблемы математики, механики и их приложений присвяченій 70-літтю ректора МГУ академика В.А.Садовничого (Москва, 30 березня - 2 квітня 2009 р.)

- Тринадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13-15 травня 2010 р.)

- Третій міжнародній конференції молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвяченій Ярославові Лопатинському (Львів, 3-6 листопада 2010 р.)

- International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (17-21 September, L'viv, 2012)

- Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування», присвяченій 70-річчю В.В. Маринця (Ужгород, 27–29 вересня 2012 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 14 наукових працях. З них 6 статей [1–6] у наукових виданнях, які включені до преліку фахових видань, а роботи [7-14] у матеріалах наукових конференцій, серед яких 7 міжнародні. З них 1 публікація включена до наукометричних баз Scopus та Web of Science.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків і списку використаних джерел, що налічує 93 найменування. Повний обсяг роботи складає 167 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну одержаних результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* введено і досліджено клас еліптичних задач, які містять малий параметр у диференціальному рівнянні та невідомі додаткові функції у крайових умовах. Останнім вони відрізняються від еліптичних з малим параметром крайових задач, вивчених у роботі Л. Р. Волевича (2006).

Головна мета цього розділу – встановити для еліптичних з малим параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у ппридатних парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі є незалежними від параметра.

У підрозділі 2.1 дано означення цієї задачі. Нехай G – довільна обмежена область (відкрита зв'язна і непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що межа ∂G цієї області є замкненим нескінченно гладким орієнтовним многовидом без краю вимірності $n-1$. Область G локально розташована по один бік від своєї межі ∂G. Як зазвичай, $\overline{G} := G \cup \partial G$ є замиканням області G.

В області G розглядаємо таку крайову задачу, яка містить малий параметр $\varepsilon > 0$ та $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій у крайових умовах:

$$A(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) = f(x; \varepsilon), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$B_j(x; D)u(x; \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D')\varrho_k(x; \varepsilon) = g_j(x; \varepsilon), \quad x \in \partial G, \tag{2}$$

$$j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Тут $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$,

$$A(x; D; \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x; D) +$$
$$+\varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \varepsilon A_{2\mu-1}(x; D) + A_{2\mu}(x; D),$$

кожне $A_{2m-i}(x; D) := \sum_{|\beta| \leq 2m-i} a_{i,\beta}(x) D^{\beta}$ — лінійний диференціальный оператор на $\overline{G}$, $B_j(x; D) := \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j,\beta}(x) D^{\beta}$ — крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂G, а $C_{j,k}(x, D')$ – (дотичний) лінійний диференціальний оператор на ∂G. Усі коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{G}$ і ∂G відповідно, а порядки задовольняють умови $\operatorname{ord} A_{2m-i}(x; D) \leq 2m - i$, $\operatorname{ord} B_j(x; D) \leq m_j$, $\operatorname{ord} C_{j,k}(x; D') \leq m_j + \alpha_k$. Тут числа m_j, де $j = \{1, \ldots, m + \varkappa\}$, і α_k, де $k = \{1, \ldots, \varkappa\}$, є цілими, причому

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \leq \ldots \leq m_{m+\varkappa}.$$

Як зазвичай, $B_j(x; D) \equiv 0$, якщо $m_j < 0$, та $C_{j,k}(x; D') \equiv 0$, якщо $m_j + \alpha_k < 0$. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $\alpha_k \geqslant -m_{m+\varkappa}$.

В задачі (1), (2) є невідомими функція u в області G, та $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa$ на межі ∂G цієї області. Останні містяться лише в крайових умовах. Тому кількість крайових умов дорівнює $m + \varkappa$. В роботі усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

У підрозділі 2.2 введено поняття еліптичності з малим параметром для крайової задачі (1), (2). Нехай $x \in \overline{G}$. *Головним символом* диференціального оператора $A(x; D; \varepsilon)$ називаємо вираз $A^{(0)}(x; \xi; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi)$, що залежить від $\xi \in \mathbb{C}^n$ і $\varepsilon > 0$.

Умова 2.1. *Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує така стала $C > 0$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon \geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0; \xi; \varepsilon)| \geq C |\xi|^{2\mu} (1 + \varepsilon |\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Умову 2.1 називають умовою *еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A(x; D; \varepsilon)$ у точці $x^0 \in \overline{G}$.

Нехай $x^0 \in \partial G$ а U — достатньо малий окіл точки x^0 з топології на $\overline{G}$. Виберемо в U такі локальні координати $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, що x_n — відстань від довільної точки множини U до межі ∂G, а $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ – локальні координати на $\partial G \cap U$.

Нехай умова 2.1 виконується у точці $x^0 \in \overline{G}$. Рівняння $A^{(0)}(\xi', \tau; \varepsilon) = 0$ і $A^{(0)}_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ не мають дійсних τ-коренів при кожних $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ і $\varepsilon \geq 0$.

Позначимо через $m^{\pm}$ і $\mu^{\pm}$ число коренів відповідно першого та другого рівняння, які лежать у повплощині $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im\tau \gtrless 0\}$.

Умова 2.2. *Виконуються рівності* $m^+ = m^- =: m, \quad \mu^+ = \mu^- =: \mu.$

Це – умова *правильної еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A^{(0)}(x^0; D; \varepsilon)$.

У крайовій задачі (1), (2) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x, D)$, $B_j(x; D)$ і $C_{j,k}(x; D')$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x'\mapsto\xi'}$ за змінними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$. Отримаємо крайову задачу що відповідає задачі (1), (2) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)v(t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v(t; \varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{4}$$

Тут $D_t := -i\partial/\partial t$ та $v(t) := (F'u(x', x_n(\xi'; \varepsilon)))(\xi', x_n(\xi'; \varepsilon))$, $\sigma_k := (F'\varrho_k(x'; \varepsilon))(\xi'; \varepsilon)$, $\varphi_j := (F'g_j(\xi'; \varepsilon))(\xi'; \varepsilon)$.

Задача (3), (4) залежить від двух параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ та $\varepsilon > 0$. Вона називається *крайовим символом* задачі (1), (2) в точці $x^0 \in \partial G$. Кожний розв'язок $v(t)$ рівняння (3) належить до $C^{\infty}([0, \infty])$. Нас будуть цікавити розв'язки задачі (3), (4), які задовольняють умову

$$v(t; \varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Умова 2.3. *Для довільних вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, *параметра* $\varepsilon > 0$ *і чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *крайова задача* (3), (4) *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa})$, *який задовольняє умову* (5).

Наступні дві умови стосуються розв'язності цієї задачі у граничних випадках: коли $\varepsilon \to \infty$ або $\varepsilon \to 0$.

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розглянемо таку крайову задачу:

$$A_{2r}^{(0)}(\xi', D_t)v(t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v(t; \varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{7}$$

Поділивши рівняння (3) на $\varepsilon^{2m-2\mu}$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$\widetilde{A}^{(0)}(\xi', D_t; 1/\varepsilon)v(t; \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{1}{\varepsilon^i} A_{2m-i}^{(0)}(\xi', D_t)v(t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0.$$

Якщо $\varepsilon \to \infty$, то це рівняння набирає вигляду (6) із $r = m$. У цьому звязку виникає така умова:

Умова 2.4. *Для будь-якого вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *і довільних чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (6), (7), *де* $r = m$, *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (5).

Оскільки при $\varepsilon = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)$ збігається з оператором $A^{(0)}_{2\mu}(\xi', D_t)$ порядку $2\mu < 2m$, то потрібна така умова

Умова 2.5. *Для будь-якого вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *і довільних чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (6), (7), *де* $r = \mu$, *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (5).

Умови 2.3 – 2.5 є аналогами умови Шапіро–Лопатинського (умови покриття) для звичайного лінійного диференціального рівняння на півосі.

При малих $\varepsilon > 0$ потрібні поправки до розв'язку задачі (3), (4), які задовольняють решту $m - \mu$ крайович умов. З методу Вішика—Люстерніка випливає, що ці поправки є розв'язком такої крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1)v(t; 1) = 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$B^{(0)}_j(0, D_t)v(t; 1)|_{t=0} = \varphi_j(\xi'; 1), \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{9}$$

Зауважимо, що (8) є диференціальним рівнянням порядку $2m - 2\mu$ відносно $D^{2\mu}_t v(t)$. Тому (9) містить лише $m - \mu$ крайових умов.

Умова 2.6. *Для довільних чисел* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (8), (9) *має єдиний розв'язок* $v(t)$, *який задовольняє умову* (5).

Використовуючи ці умови, сформулюємо базове означення другого розділу.

Означення 2.1. *Крайова задача* (1), (2) *називається* еліптичною з малим параметром, *якщо для довільної точки* $x \in \overline{G}$ *виконується умова 2.1 і для кожної точки* $x \in \partial G$ *виконуються умови 2.2 – 2.6.*

У підрозділі 2.3 побудовано формальні асимптотичні розв'язки задачі (1), (2) і з'ясовано сенс умов 2.5, 2.6. При побудові формальних асимптотичних розв'язків суттєво використовувався метод примежового шару Вішика–Люстерніка.

У підрозділі 2.4 наведено приклад еліптичної з малим параметром крайової задачі.

У підрозділі 2.5 розглянуто функціональні простори, в яких досліджено крайову задачу (1), (2). Це простори Соболєва, норма у яких залежить певним чином від параметра ε.

Нехай $r \in \mathbb{R}$. Через $H^r = H^r(\mathbb{R}^n)$ позначимо гільбертів простір Соболєва порядку r.

Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geq s$, $s \geq 0$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s (1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2}, \qquad (10)$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

Для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ норма (10) еквівалентна соболєвській нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$. Тому простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ є повним. Зазначимо, що $H^{r,r}(\mathbb{R}^n, \varepsilon) = H^r(\mathbb{R}^n)$ з рівності норм. Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$.

За означенням простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{\theta \in R} H^\theta(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$. За означенням, простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup\limits_{\theta \in R} H^\theta(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Позначимо тепер через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} (1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2}.$$

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$. Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega, \varepsilon)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у стандартний спосіб.

Якщо в означених вище просторах замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, то отримаємо простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ і різні еквівалентні норми у ньому для всіх допустимих значень параметрів r, s і ε.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ неперевно вкладений у соболєвський простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r > 0$, то при $r > \ell + 1/2$ означено оператор сліду.

Нехай дійсні числа θ, σ і ε задовольняють умови $\theta \geqslant \sigma$ і $\varepsilon > 0$. У випадку $\sigma \geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ соболєвський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| := ||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2\sigma} (1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{\theta-\sigma} |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi \Big)^{1/2}.$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

У випадку $\sigma < 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ соболевський простір $H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| := \varepsilon^{-\sigma}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{\theta}|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi'\Big)^{1/2},$$

де $h \in H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ у стандартний спосіб. Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці. Звісно, ця еквівалентність є рівномірною за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$.

У підрозділі 2.6 сформульовано основні результати другого розділу, щодо апріорної оцінки розв'язків крайової задачі (1), (2).

Для кожного числа $\varepsilon \geqslant 0$ пов'яжемо із цією задачею лінійне відображення

$$\mathcal{A}_{\varepsilon} : (u(\cdot;\varepsilon), \varrho_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, \varrho_{\varkappa}(\cdot;\varepsilon)) \longrightarrow (f(\cdot;\varepsilon), g_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, g_{m+\varkappa}(\cdot;\varepsilon)),$$

де $u(\cdot;\varepsilon) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $\varrho_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, \varrho_{\varkappa}(\cdot;\varepsilon) \in C^{\infty}(\partial G)$.

Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r > m_{m+\varkappa} + 1/2. \tag{11}$$

Теорема 2.1. *Припустимо, що крайова задача (1), (2) еліптична з малим параметром. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови (11) і*

$$m_{\mu+\varkappa} + 1/2 \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + 1/2. \tag{12}$$

Тоді існує таке число $C > 0$, що для довільного числа $\varepsilon \in (0; 1]$ правильною є апріорна оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2, s+\alpha_k-1/2}(\partial G, \varepsilon)|| \leq$$

$$\leq C\Big(||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m, s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\partial G, \varepsilon)|| +$$

$$+ ||u; L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); L_2(\partial G)||\Big). \tag{13}$$

Тут функції

$$u(\cdot;\varepsilon) \in H^{r}(G), \quad \varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G), \quad k=1,\dots,\varkappa, \tag{14}$$

та

$$f(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-2m,s-2\mu}(G),\ g_j(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-m_j-1/2}(\partial G),\ j=1,\dots,m+\varkappa, \tag{15}$$

задовольняють крайову задачу (1), (2)*. Число* C *не залежить, ні від* $\varepsilon \in (0;1]$*, ні від функцій* (14), (15)*.*

Теорема 2.2. *Нехай* $A(x,D;\varepsilon)$ *– правильно еліптичний оператор з малим параметром на* $\overline{G}$*, а натуральні числа* r *і* s *задовольняють умови* (11) *і* (12)*. Припустимо, що існує таке число* $C>0$*, що для довільного* $\varepsilon \in (0;1]$ *і для довільних функцій* (14), (15) *що задовольняють крайову задачу* (1), (2)*, справджується апріорна оцінка* (13)*. Тоді ця крайова задача є еліптичною з малим параметром.*

Доведення теорем 2.1 і 2.2 за допомогою методу локалізації ("заморожування коефіцієнтів") зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$. Цьому і присвячено наступні підрозділи.

У підрозділі 2.7 отримано допоміжні резутати, а саме – різні еквівалентні умови розв'язності крайових задач для звичайного диференціального рівняння на півосі зі сталими коефіцієнтами, що містить додаткові невідомі числові параметри.

У підрозділі 2.8 для крайового символу побудовано фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки. Ці результати є ключовими при доведенні апріорних оцінок.

Довільно виберемо номер $q \in \{1,\dots,m+\varkappa\}$. У крайовому символі (3), (4) задачі (1), (2), який відповідає точці $x^0 \in \partial G$, покладемо $\varphi_j = \delta_{q,j}$ для кожного $j \in \{1,\dots,m+\varkappa\}$. Отже, розглянемо таку крайову задачу на півосі:

$$A^{(0)}(\xi',D_t;\varepsilon)v_q(t)=0, \quad t>0,$$

$$B^{(0)}_j(\xi',D_t)v_q(t)|_{t=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\xi')\sigma_{q,k}=\delta_{q,j}, \quad j=1,\dots,m+\varkappa.$$

Тут, нагадаємо, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\varepsilon>0$ є фіксованими.

За умовою 2.3 ця задача має єдиний розв'язок

$$v_q(t)=v_q(\xi',t;\varepsilon), \quad \sigma_{q,k}=\sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon), \quad \text{де} \quad k=1,\dots,\varkappa,$$

такий, що функція $v_q(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Система векторів $(v_q(t), \sigma_{q,1}, \ldots, \sigma_{q,\varkappa})$, де $q = 1, \ldots, \varkappa$, є лінійно незалежною, оскільки у протилежному випадку нуль-вектор був би розв'язком крайової задачі (3), (4), у якій принаймні одне $\varphi_j \neq 0$. Ця система називається *фундаментальною системою розв'язків* (ф.с.р.) граничного символа.

Теорема 2.4, 2.5. *Нехай ціле $l \geq 0$. Існує таке число $C > 0$, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0;1]$, $q \in \{1, \ldots, m+\varkappa\}$ і $k = \{1, \ldots, \varkappa\}$ виконуються оцінки*

$$\left(\int_0^\infty |D^l v_q(\xi', t; \varepsilon)|^2 dt\right)^{1/2} \leq C\,|\xi'|^{l-m_q-1/2} \times$$

$$\times \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad q \leq \mu+\varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu+\varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu+\varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q > \mu+\varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa}, \end{cases}$$

$$|\sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)| \leqslant C|\xi|^{-m_q-\alpha_k} \times$$

$$\times \begin{cases} 1\,, & \text{якщо} \quad q \leqslant \mu+\varkappa\,, \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu+\varkappa\,. \end{cases}$$

У підрозділі 2.9 доведено версії теорем 2.1 і 2.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (1), (2) в області G і вибором точки $x^0 \in \overline{G}$.

У підрозділі 2.10 доведено теореми 2.1 і 2.2.

У *третьому* розділі дисертації викладено результати, які стосуються розв'язності слабко еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області. Останнім вони відрізняються від слабко еліптичних з параметром крайових задач, що розглядались у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена (1998, 2000, 2001), Л. Р. Волевича (2007).

Головна мета цього розділу – встановити для слабко еліптичних з параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у придатних парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі не залежать від параметра.

У підрозділі 3.1 дано означення цієї задачі. В області G розглядаємо крайову задачу, що містить великий параметр $\lambda > 0$ та $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій у крайових умовах:

$$A(x;D;\lambda)u(x;\lambda)=f(x;\lambda),\quad x\in G, \tag{16}$$

$$B_j(x;D)u(x;\lambda)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}(x;D')\varrho_k(x;\lambda)=g_j(x;\lambda),\quad x\in\partial G, \tag{17}$$
$$j=1,\dots,m+\varkappa.$$

Тут $m,\mu,\varkappa\in\mathbb{N}$,

$$A(x;D;\lambda):=A_{2m}(x;D)+$$
$$+\lambda A_{2m-1}(x;D)+\ldots+\lambda^{2m-2\mu-1}A_{2m-2\mu-1}(x;D)+\lambda^{2m-2\mu}A_{2\mu}(x;D).$$

У задачі (16), (17) є невідомими функція u в області G, та $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1,\dots,\varrho_\varkappa$ на межі ∂G цієї області. Останні містяться лише в крайових умовах. Тому кількість крайових умов дорівнює $m+\varkappa$.

У підрозділі 3.2 введено поняття слабкої еліптичності з параметром для крайової задачі (16), (17).

Нехай $x\in\overline{G}$. Позначимо через $A^{(0)}(x;D;\lambda)$ головну частину оператора $A(x;D;\lambda)$. *Головним симоволом* диференціального оператора $A(x;D;\lambda)$ називаємо вираз $A^{(0)}(x;\xi;\lambda):=\sum_{i=0}^{2m-2\mu}\lambda^i A^{(0)}_{2m-i}(x;\xi)$, що залежить від $\xi\in\mathbb{C}^n$ і $\lambda>0$.

Умова 3.1. *Для точки $x^0\in\overline{G}$ існує така стала $C>0$, що для довільних $\xi\in\mathbb{R}^n$ і $\lambda\geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0;\xi;\lambda)|\geq C|\xi|^{2\mu}(|\lambda|+|\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Умову 3.1 називають умовою *слабкої еліптичності з параметром* диференціального оператора $A(x;D;\lambda)$ у точці $x^0\in\overline{G}$.

Нехай умова 3.1 виконується у точці $x^0\in\overline{G}$. Рівняння $A^{(0)}(\xi',\tau;\lambda)=0$ і $A^{(0)}_{2\mu}(\xi',\tau)=0$ не мають дійсних τ-коренів при кожних $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ і $\lambda\geq 0$. Позначимо через $m^\pm$ і $\mu^\pm$ число коренів відповідно першого та другого рівнянь, які належать півплощині $\mathbb{C}_\pm:=\{\tau\in\mathbb{C}:\Im\tau\gtrless 0\}$.

Умова 3.2. *Виконуються рівності $m^+=m^-=:m,\quad \mu^+=\mu^-=:\mu$.*

Це – умова *правильної слабкої еліптичності з параметром* диференціального оператора $A^{(0)}(x^0;D;\lambda)$ у точці $x^0\in\overline{G}$.

У крайовій задачі (16), (17) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x,D)$, $B_j(x;D)$ і $C_{j,k}(x;D')$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x=x^0\in\partial G$, покладемо $f\equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за зміними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо крайову задачу, що відповідає задачі (16), (17) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \lambda) v(t; \lambda) = 0, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t) v(t; \lambda)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi') \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{19}$$

Нас будуть цікавити розв'язки задачі (18), (19), які задовольняють умову

$$v(t; \lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{20}$$

Умова 3.3. *Для будь-якого вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, параметра $\lambda > 0$ і довільних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ крайова задача* (18), (19) *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (20).

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розглянемо таку крайову задачу:

$$A_{2r}^{(0)}(\xi', D_t) v(t; \lambda) = 0, \quad t > 0, \tag{21}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t) v(t; \lambda)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi') \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{22}$$

Оскільки при $\lambda = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t; \lambda)$ збігається з оператором $A_{2m}^{(0)}(\xi', D_t)$, то потрібна така умова.

Умова 3.4. *Для будь-якого вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ і довільних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (21), (22), *де $r = m$, має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (20).

Поділивши рівняння (18) на $\lambda^{2m-2\mu}$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$\widetilde{A}^{(0)}(\xi', D_t; 1/\lambda) v(t; \lambda) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{1}{\lambda^{2m-2\mu-i}} A_{2m-i}^{(0)}(\xi', D_t) v(t; \lambda) = 0, \quad t > 0.$$

Якщо $\lambda \to \infty$, то це рівняння набирає вигляду (21) із $r = \mu$ порядку $2\mu < 2m$. У цьому зв'язку виникає така умова.

Умова 3.5. *Для будь-якого вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ і довільних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (21), (22), *де $r = \mu$, має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (20).

При великих $\lambda > 0$ потрібні поправки до розв'язку задачі (18), (19), які задовольняють решту $m-\mu$ крайових умов. З методу Вішика–Люстерніка випливає, що ці поправки є розв'язком такої крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1)v(t; 1) = 0, \quad t > 0, \tag{23}$$

$$B_j^{(0)}(0, D_t)v(t; 1)|_{t=0} = \varphi_j(\xi'; 1), \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{24}$$

Умова 3.6. *Для довільних чисел* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (23), (24) *має единий розв'язок* $v(t)$, *що задовольняє умову* (20).

Використавши ці умови, сформулюємо базове означення третього розділу.

Означення 3.1. *Крайова задача* (16), (17) *називається* слабко еліптичною з параметром, *якщо для довільної точки* $x \in \overline{G}$ *виконується умова 3.1 і для кожної точки* $x \in \partial G$ *виконуються умови 3.2 – 3.6.*

У підрозділі 3.3 наведено приклад слабко еліптичної з параметром крайової задачі.

У підрозділі 3.4 розглянуто функціональні простори, в яких досліджено крайову задачу (16), (17). Це простори Соболєва, норма у яких залежить певним чином від параметра λ.

Нехай $r \in \mathbb{R}$. Через $H^r = H^r(\mathbb{R}^n)$, як і раніше, позначимо гільбертів простір Соболєва порядку r.

Нехай дійсні числа r, s і λ такі, що $r \geq s \geq 0$ і $\lambda > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{25}$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$. Для кожного фіксованого $\lambda > 0$ норма (25) еквівалентна соболєвській нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\lambda > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} (|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$, а дійсні числа r, s і λ такі, що $r \geqslant s$ і $\lambda > 0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega, \lambda)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у стандартний спосіб.

Якщо в означених вище просторах замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, то отримаємо простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ і різні еквівалентні норми у ньому для всіх допустимих значень параметрів r, s і λ.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\lambda)$ неперервно вкладений у соболєвський простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r>0$, то при $r>\ell+1/2$ означено оператор сліду.

Нехай дійсні числа θ, σ і λ задовольняють умови $\theta\geqslant\sigma$ і $\lambda>0$. У випадку $\sigma\geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ соболєвський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$|[h,\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)]|:=$$
$$=(1+|\lambda|^{r-s})||h,L_2(\mathbb{R}^{n-1})||+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi'|^{2\sigma}(|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\theta-\sigma}|\widehat{h}(\xi')|^2d\xi\right)^{1/2}.$$

де $h\in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

У випадку $\sigma<0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ соболевський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$|[h,\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)]|:=\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(|\lambda|^2+|\xi'|^2)^{\theta}|\widehat{h}(\xi')|^2d\xi'\right)^{1/2},$$

де $h\in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ у стандартний спосіб.

У підрозділі 3.5 сформульовано основні результати другого розділу щодо апріорної оцінки розв'язків крайової задачі (16), (17).

Теорема 3.1. *Припустимо, що крайова задача* (16), (17) *слабко еліптична з параметром. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (11) *і* (12)*. Тоді існує таке число $C>0$, що для довільного числа $\lambda\gg 1$ правильною є апріорна оцінка*

$$|[u(\cdot;\lambda);H^{r,s}(G,\lambda)]|+\sum_{k=1}^{\varkappa}|[\varrho_k(\cdot;\lambda);\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\lambda)]|\leq$$
$$\leq C\Big(|[f(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)]|+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}|[g_j(\cdot;\lambda);\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\lambda)]|+$$
$$+(1+|\lambda|^{r-s})(||u;L_2(G)||+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\lambda);L_2(\partial G)||)\Big). \qquad (26)$$

Тут функції

$$u(\cdot;\lambda)\in H^{r}(G),\quad \varrho_k(\cdot;\lambda)\in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G),\quad k=1,\dots,\varkappa, \qquad (27)$$

та

$$f(\cdot;\lambda)\in H^{r-2m,s-2\mu}(G),\ g_j(\cdot;\lambda)\in H^{r-m_j-1/2}(\partial G),\ j=1,\dots,m+\varkappa, \qquad (28)$$

задовольняють крайову задачу (16), (17). *Число* C *не залежить, ні від* $\lambda\gg 1$, *ні від функцій* (27), (28).

Теорема 3.2. *Нехай оператор* $A(x,D;\lambda)$ *задовольняє умову 3.2, а натуральні* r *і* s *задовольняють умови* (11) *і* (12). *Припустимо, що існує таке число* $C>0$, *що для довільного* $\lambda\gg 1$ *і для довільних функцій* (27), (28), *що задовольняють крайову задачу* (16), (17), *справджується апріорна оцінка* (26). *Тоді ця крайова задача є слабко еліптичною з параметром.*

Доведення теорем 3.1 і 3.2 за допомогою методу локалізації ("заморожування коефіцієнтів") зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$.

У підрозділі 3.6 для крайового символу побудувано фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки. Ці результати є ключовими при доведенні апріорних оцінок.

У підрозділі 3.7 доведено версії теорем 3.1 і 3.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (16), (17) в області G і вибором точки $x^0\in\overline{G}$.

У підрозділі 3.8 доведено теореми 3.1 і 3.2.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.

2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.

3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків досліджуваних задач та отримано інтегральні оцінки їх похідних.

4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром вказаних задач.

5. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.

6. Для задач з цього класу побудовано фундаментальну систему розв'язків і отримано інтегральні оцінки їх похідних.

7. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. Заворотинский А. В. О слабко эллиптических с параметром краевых задачах / А. В. Заворотинский // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т. 9, № 2. — С.157 — 174.

2. Заворотинський А.В. Еліптичні крайові задачі з малим параметром і додатковими невідомими функціями на межі області.Формальний асимптотичний розв'язок / А. В. Заворотинський // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. — Т.1, № 1–2. — С.40 — 46.

3. Заворотинский А.В. Слабо эллиптические с параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений /А. В. Заворотинский // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. — Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла 2012. Вип. 23, №2. — С.63 —75.

4. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе. Оценки фундаментальных решений / А. В. Заворотинский // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С.170 — 184.

5. Заворотинский А. В. Об эллиптических с малым параметром краевых задач / А. В. Заворотинский // Доповіді НАН України. Серія А. — 2013. — № 11. — С.23 — 30.

6. Заворотинский А. В. Об эллиптических краевых задачах с малым параметром и дополнительными функциями на границе области / А. В. Заворотинский // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С.1269 — 1275.(Англійський переклад: Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — V.66, № 9. — P.1423 — 1430.)

7. Заворотинский А. В. Эллиптические задачи с малым параметром с неизвестными дополнительными условиями на границе / А. В. Заворотинский // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річному ювілею Я. Б. Лопатинського. – Донецьк, 2006. — С.62–63.

8. Zavorotinskiy A.V. Elliptic with a smoll parameter boundary value problems with addition functions defined at the boundary. Formal asymptotic solution / A. V. Zavorotinskiy // International conference "Modern analysis and applications " dedicated to the centenary of Mark Krein. Book of abstracts. – Kyiv, 2007. — p.146.

9. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Формальное асимптотическое решение / А. В. Заворотинский // Друга Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського, Україна, Донецьк, 11-14 листопада 2008 р.: Тези доповідей (англійською мовою). — С.71.

10. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений / А. В. Заворотинский // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. – М.: Университетская книга, 2009. — С.144.

11. Заворотинский А. В. Слабо эллиптические с параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области / А. В. Заворотинский // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня, 2010 р., Київ: Матеріали конф. – Київ: Нац. техн.ун-т України "КПІ 2010. – Т.1. — С.159.

12. Заворотинский А. В. Слабо эллиптические с параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Априорные оценки/ А. В. Заворотинский / Третя міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвячена Я. Лопатинському, 3-6 листопада, 2010 р., – Львів: Матеріали конф. – Львів: Львів. нац. ун-т, 2010. — С.56.

13. Zavorotinskiy A. V., Elliptic boundary value problems with parameter and additional unknown function defined at the boundary of domain / A. V. Zavorotinskiy //International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of reports (17-21 September, L'viv, 2012 р.). – Львів: Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім.Шевченка, 2012. — С.238.

14. Заворотинский А. В. Эллиптические с параметром граничные задачи и параболические задачи / А. В. Заворотинский // Диференціальні рівняння та їх застосування: матеріали Міжнародної наукової конференції (Ужгород, 27-29 вересня, 2012 р.). – Ужгород, 2012. — С.29.

Анотації

Заворотинський А.В. Еліптичні з параметром крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертаційній роботі введено і досліджено два нових класи еліптичних крайових задач, що залежать від параметра. Їхньою характерною рисою є наявність невідомих додаткових функцій у крайових умовах.

Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задачах, що містять додаткові невідомі функції на межі евклідової області. Для цих задач побудовано формальний асимптотичний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків. Отримано інтегральні оцінки похідних розв'язків з фундаментальної системи. Встановлено апріорну оцінку для деяких залежних від параметра соболєвських норм розв'язків цих задач; у якій стала не залежить від малого параметра. Доведено, що ця оцінка є не лише достатньою, а і необхідньою для того, щоб розглянуті задачі були еліптичними з малим параметром.

Також введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області. Побудовано фундаментальну систему розв'язків цих задач і отримано інтегральні оцінки похідних зазначених розв'язків. Для залежних від параметра розв'язків цих задач встановлено апріорну оцінку, у яких стала не залежить від параметра. Доведено, що ця оцінка є необхідною для слабкої еліптичності розглянутих задач.

Ключові слова: еліптична задача, залежна від параметра задача, малий параметр, слабка еліптичність з параметром, формальний асимптотичний розв'язок, фундаментальна система розв'язків, апріорна оцінка, соболєвські норми.

Заворотинский А. В. Эллиптические с параметром краевые задачи с неизвестными дополнительными функциями на границе области. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертационной работе исследованы характер разрешимости эллиптических с малым параметром и слабко эллиптических краевых задач с неизвестными дополнительными функциями на границе области.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, выводов и библиографии.

Во введении дана общая характеристика работы, обоснована актуальность ее тематики, сформулированы основные результаты работы и раскрыта их научная новизна, приведены данные об апробации работы.

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации.

Во второй главе сформулированы следующие результаты: определены эллиптические и правильно эллиптические с малым параметром краевые задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Найденi формальные асимптотические решения. Построена фундаментальная система решений для эллиптической с малым параметром краевой задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области, а также получены ее интегральные оценки производных. Для соболевских норм решений этих задач установлены априорные оценки, в которых постоянные не зависят от малого параметра. Доказано, что эти оценки не только достаточны, но и необходимы для эллиптичности с малым параметром рассмотренных задач.

В третьей главе введен класс слабо эллиптических с параметром краевых задач с неизвестными дополнительными функциями пределы ограниченной евклидовой области. Построена фундаментальная система решений для слабо эллиптических с параметром краевых задач и неизвестными дополнительными функциями на границе области, а также получены её интегральные оценки производных. Для соболевских норм решений этих задач установлены априорные оценки, в которых постоянная не зависит от большого параметра. Показано, что эти оценки необходимы для слабо эллиптичности указанных краевых задач.

Ключевые слова: эллиптическая задача, зависимая от параметра задача, малый параметр, слабая эллиптическая с параметром, формальное асимптотическое решение, фундаментальная система решений, априорная оценка, соболевские нормы.

Zavorotynskii A. V. Parameter-elliptic boundary-value problems with unknown additional functions on the boundary of a domain. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis, we introduce and investigate two new classes of parameter-dependent elliptic boundary-value problems. They are featured by the presence of unknown additional functions in the boundary conditions.

We introduce a class of boundary-value problems that are elliptic with a small parameter and contain unknown additional functions on the boundary of a Euclidean domain. The formal asymptotic solution and fundamental system of solutions are built for these problems. We obtain integral estimates for the derivatives of the solutions from the fundamental system. We establish a priory estimate for some parameter-dependent Sobolev norms of the solutions to these problems, the constant in the estimate being independent of the small parameter. We prove that this estimate is not only sufficient but also necessary for the considered problems to be elliptic with a small parameter.

We also introduce a class of weakly parameter-elliptic boundary-value problems with unknown additional functions on the boundary of the domain. We build the fundamental system of solutions to these problems and obtain integral estimates for the derivatives of these solutions. For parameter-dependent Sobolev norms of the solutions to the problems, we establish an a priory estimate, in which the constant does not depend on the parameter. We prove that this estimate is necessary for the weak ellipticity of the boundary-value problems under consideration.

Key words: elliptic problem, parameter-dependent problem, small parameter, weak parameter-ellipticity, formal asymptotic solution, fundamental system of solutions, a priory estimate, Sobolev norm.

Підписано до друку 11.08.2016 р. Зам № 811
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42, 067-209-54-30