НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЗАВОРОТИНСЬКИЙ АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 517.956.2

ЕЛІПТИЧНІ З ПАРАМЕТРОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З НЕВІДОМИМИ ДОДАТКОВИМИ ФУНКЦІЯМИ НА МЕЖІ ОБЛАСТІ

01.01.02 – ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник –
член-кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук,
професор М. Л. Горбачук

Київ 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена розвитку сучасної теорії еліптичних з параметром крайових задач, а саме, дослідженню характеру розв'язності і властивостей їх розв'язків для еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена розвитку сучасної теорії еліптичних крайових задач, а саме, дослідженню характеру розв'язності еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

Еліптичні оператори з параметром відіграють важливу роль у теорії еліптичних рівняннь та її застосуваннях. Серед них окремий інтерес викликають еліптичні з малим праметром крайові задачі і пов'язані з ними слабко еліптичні з параметром крайові задачі. Такі задачі давно виникали в різних розділах математичної фізики. Їх загальна теорія бере свій початок з роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка [7]. Пізніше вона була розвинута у роботах Л. Франка [77 – 79], А. С. Демідова [13, 14], Г. І. Ескіна [63], С. А. Назарова [38 – 40]. В останні роки посилився інтерес до дослідження еліптичних диференціальних рівняннь з параметром. Так, систематичний виклад теорії еліптичних з малим параметром крайових задач дав Л. Р. Волевич [11]. Його стаття є фактично сучасним переосмисленням результатів класичної роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка [7].

Поряд з цими задачами розглядалися і задачі, які отримуються при заміні "малого" параметра на "великий" параметр. Такий клас задач отримав назву слабко еліптичних крайових задач (операторних в'язок) і систематично досліджувався у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена [73 – 75]. Такі задачі є узагальненням еліптичних з параметром задач, які ввели і досліджували Ш. Агмон [1] та М .С. Аграновіч, М. І. Вішик [2]. Ці задачі були застосовані у теорії параболічних мішаних задач.

В 1963 р. Б. Лавруком [32 – 34] було виділено важливий клас еліптичних крайових задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Такі задачі виникають при переході від загальної еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі відносно деякої формули Гріна. Згодом з'ясувалося, що до цього класу задач приводять різні задачі теорії пружжності і гідромеханіки. Еліптичні у сенсі Лаврука задачі були досліджені у роботах А. Г. Асланяна, Д. Г. Васильєва, В. Б. Лідського [3], В. А. Козлова, В. Г. Мазьї, Й. Россмана [82], Л. Р. Волевича та С. Д. Гіндікіна [15], Я. А. Ройтберга [88] та інших.

Пізніше Л. Р. Волевич [10] застосував теорію слабко еліптичних з параметром задач до мішаних задач для параболічних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. Було введено новий клас крайових задач для параболічних операторів у частинних похідних, які не задовольняють класичні умови параболічності. Зазначимо, що в крайових умовах таких задач з'явилися невідомі додаткові функції, які задані на межі області, і загальна теорія для таких задач не була побудована.

Зважаючи на це, побудова теорії розв'язності еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі рівняннь з частинними похідними згідно із загальним планом досліджень у рамках науково-дослідної теми «Еволюційні та спектральні задачі для диференціальних рівнянь у банахових просторах» (номер державної реєстрації 0111U001027).

Метою дослідження дисертаційної роботи є розробка теорії еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних з параметром крайових задач, які містять додаткові невідомі функції на межі області .

Об'єктом дослідження є еліптичні з малим параметром та слабко еліптичні крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області.

Завдання дослідження:

1. Виділити клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.

2. Встановити необхідні і достатні умови, за яких соболєвські норми розв'язків цих задач допускають апріорні оцінки зі сталими, не залежними від малого параметра.
3. Виділити клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області.
4. Встановити необхідні і достатні умови існування апріорних оцінок розв'язків цих задач у відповідних функціональних просторах Соболєва, в яких сталі не залежать від великого параметра.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи функціонального аналізу, теорії рівнянь з частинними похідними і теорії функцій. Ключовим у дослідженні є метод примежового шару М. І. Вішика – Л. А. Люстерніка [7].

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи, запропоновані до захисту, є новими і полягають у наступному:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.
3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків вказаних задач і отримано інтегральні оцінки похідних цих розв'яків.
4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром розглянутих задач.
5. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
6. Для цих задач побудовано фундаментальну систему розв'язків таких задач і отримано інтегральні оцінки їх похідних.
7. Для соболєвських норм розв'язків цих задач отримано апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Основні її результати та методика їх отримання можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії рівнянь у частинних похідних, зокрема у теорії еліптичних крайових задач з негладкою межею та при дослідженні параболічних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дисертації, постановка задач і схема їх дослідження належать науковому керівникові — М. Л. Горбачуку і Л. Р. Волевичу. Результати робіт [17 – 22] отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались і обговорювалися на:

— київському семінарі з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Березанський Ю. М., член-кор. НАН України Горбачук М. Л., член-кор. НАН України Самойленко Ю. С.);

— спільному семінарі кафедр вищої і прикладної математики Чернігівського національного педагогічного університету ім.Т.Г.Шевченка і Чернігівського національного технологічного університету (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач);

а також на конференціях:

- Всеукраїнській науковій конференції молодих учених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченій 100-річному ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.)
- Міжнародній конференції «Сучасний аналіз та застосування 2007», присвяченій 100-літтю з дня народженя М. Г. Крейна (Одеса, 9-14 квітня 2007 р.)
- Другій Міжнародній конференції молодих учених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (Донецьк, 11-14 листопада 2008 р.)
- Міжнародній конференції "Современные проблемы математики, механики и их приложений присвяченій 70-літтю ректора МГУ академика В.А.Садовничого (Москва, 30 березня - 2 квітня 2009 р.)
- Тринадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 13-15 травня 2010 р.)

- Третій міжнародній конференції молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвяченій Ярославові Лопатинському (Львів, 3-6 листопада 2010 р.)
- International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (17-21 September, L'viv, 2012)
- Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування», присвяченій 70-річчю В.В. Маринця (Ужгород, 27–29 вересня 2012 р.)

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 14 наукових працях. З них 6 статей [17 – 22] у наукових виданнях, які включені до преліку фахових видань, а роботи [23– 30] у матеріалах наукових конференцій, серед яких 7 міжнародні. З них 1 публікація включена до наукометричних баз Scopus та Web of Science.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків і списку використаних джерел, що налічує 93 найменування. Повний обсяг роботи складає 167 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну одержаних результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У *другому* введено і досліджено клас еліптичних задач, які містять малий параметр у диференціальному рівнянні та невідомі додаткові функції у крайових умовах. Останнім вони відрізняються від еліптичних з малим параметром крайових задач, вивчених у роботі Л. Р. Волевича [11].

Головна мета цього розділу – встановити для еліптичних з малим параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у ппридатних парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі є незалежними від параметра.

У підрозділі 2.1 дано означення цієї задачі. Нехай G – довільна обмежена область (відкрита зв'язна і непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що межа ∂G цієї області є замкненим нескінченно гладким орієнтовним многовидом без краю вимірності $n-1$. Область G локально розташована по один бік від своєї межі ∂G. Як зазвичай, $\overline{G} := G \cup \partial G$ є замиканням області G.

В області G розглядаємо таку крайову задачу, яка містить малий параметр $\varepsilon > 0$ та $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій у крайових умовах:

$$A(x; D; \varepsilon) u(x; \varepsilon) = f(x; \varepsilon), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$B_j(x; D) u(x; \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D') \varrho_k(x; \varepsilon) = g_j(x; \varepsilon), \quad x \in \partial G, \tag{2}$$

$$j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Тут $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$,

$$A(x; D; \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x; D) +$$
$$+ \varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \varepsilon A_{2\mu-1}(x; D) + A_{2\mu}(x; D),$$

кожне $A_{2m-i}(x; D) := \sum\limits_{|\beta| \leq 2m-i} a_{i,\beta}(x) D^\beta$ — лінійний диференціальный оператор на $\overline{G}$, $B_j(x; D) := \sum\limits_{|\beta| \leq m_j} b_{j,\beta}(x) D^\beta$ — крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂G, а $C_{j,k}(x; D')$ – (дотичний) лінійний диференціальний оператор на ∂G. Усі коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{G}$ і ∂G відповідно, а порядки задовольняють умови $\operatorname{ord} A_{2m-i}(x; D) \leq 2m - i$, $\operatorname{ord} B_j(x; D) \leq m_j$, $\operatorname{ord} C_{j,k}(x; D') \leq m_j + \alpha_k$. Тут числа m_j, де $j = \{1, \ldots, m + \varkappa\}$, і α_k, де $k = \{1, \ldots, \varkappa\}$, є цілими, причому

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \leq \ldots \leq m_{m+\varkappa}.$$

Як зазвичай, $B_j(x; D) \equiv 0$, якщо $m_j < 0$, та $C_{j,k}(x; D') \equiv 0$, якщо $m_j + \alpha_k < 0$. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $\alpha_k \geqslant -m_{m+\varkappa}$.

В задачі (1), (2) є невідомими функція u в області G, та $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa$ на межі ∂G цієї області. Останні містяться лише в крайових умовах. Тому кількість крайових умов дорівнює $m + \varkappa$. В роботі усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

У підрозділі 2.2 введено поняття еліптичності з малим параметром для крайової задачі (1), (2). Нехай $x \in \overline{G}$.

Головним симоволом диференціального оператора $A(x; D; \varepsilon)$ називаємо вираз $A^{(0)}(x; \xi; \varepsilon) := \sum\limits_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi)$, що залежить від $\xi \in \mathbb{C}^n$ і $\varepsilon > 0$.

Умова 2.1. *Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує така стала $C > 0$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon \geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0; \xi; \varepsilon)| \geq C|\xi|^{2\mu}(1 + \varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Умову 2.1 називають умовою *еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A(x; D; \varepsilon)$ у точці $x^0 \in \overline{G}$.

Нехай $x^0 \in \partial G$ а U — достатньо малий окіл точки x^0 з топології на $\overline{G}$. Виберемо в U такі локальні координати $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, що x_n — відстань від довільної точки множини U до межі ∂G, а $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ – локальні координати на $\partial G \cap U$.

Нехай умова 2.1 виконується у точці $x^0 \in \overline{G}$. Рівняння $A^{(0)}(\xi', \tau; \varepsilon) = 0$ і $A^{(0)}_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ не мають дійсних τ-коренів при кожних $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ і $\varepsilon \geq 0$. Позначимо через $m^\pm$ і $\mu^\pm$ число коренів відповідно першого та другого рівняння, які лежать у повплощині $\mathbb{C}_\pm := \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \tau \gtrless 0\}$.

Умова 2.2. *Виконуються рівності $m^+ = m^- =: m, \quad \mu^+ = \mu^- =: \mu.$*

Це – умова *правильної еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A^{(0)}(x^0; D; \varepsilon)$.

У крайовій задачі (1), (2) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x; D)$, $B_j(x; D)$ і $C_{j,k}(x; D')$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за змінними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо крайову задачу що відповідає задачі (1), (2) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon) v(t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{4}$$

Тут $D_t := -i\partial/\partial t$ та $v(t) := (F'u(x', x_n(\xi';\varepsilon)))(\xi', x_n(\xi';\varepsilon))$, $\sigma_k := (F'\varrho_k(x';\varepsilon))(\xi';\varepsilon)$, $\varphi_j := (F'g_j(\xi';\varepsilon))(\xi';\varepsilon)$.

Задача (3), (4) залежить від двух параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ та $\varepsilon > 0$. Вона називається *крайовим символом* задачі (1), (2) в точці $x^0 \in \partial G$. Кожний розв'язок $v(t)$ рівняння (3) належить до $C^\infty([0,\infty])$. Нас будуть цікавити розв'язки задачі (3), (4), які задовольняють умову

$$v(t;\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Умова 2.3. *Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, параметра $\varepsilon > 0$ і чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ крайова задача* (3), (4) *має єдиний розв'язок $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, який задовольняє умову* (5).

Наступні дві умови стосуються розв'язності цієї задачі у граничних випадках: коли $\varepsilon \to \infty$ або $\varepsilon \to 0$.

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розгянемо таку крайову задачу:

$$A_{2r}^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{7}$$

Поділивши рівняння (3) на $\varepsilon^{2m-2\mu}$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$\widetilde{A}^{(0)}(\xi', D_t; 1/\varepsilon)v(t;\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{1}{\varepsilon^i} A_{2m-i}^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon) = 0, \quad t > 0.$$

Якщо $\varepsilon \to \infty$, то це рівняння набирає вигляду (6) із $r = m$. У цьому звязку виникає така умова:

Умова 2.4. *Для будь-якого вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ і довільних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (6), (7), *де $r = m$, має єдиний розв'язок $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, що задовольняє умову* (5).

Оскільки при $\varepsilon = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)$ збігається з оператором $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', D_t)$ порядку $2\mu < 2m$, то потрібна така умова

Умова 2.5. *Для будь-якого вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ і довільних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (6), (7), *де $r = \mu$, має єдиний розв'язок $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, що задовольняє умову* (5).

Умови 2.3 – 2.5 є аналогами умови Шапіро–Лопатинського (умови покриття) для звичайного лінійного диференціального рівняння на півосі.

При малих $\varepsilon > 0$ потрібні поправки до розв'язку задачі (3), (4), які задовольняють решту $m-\mu$ крайович умов. З методу Вішика—Люстерніка випливає, що ці поправки є розв'язком такої крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1)v(t; 1) = 0, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$B_j^{(0)}(0, D_t)v(t; 1)|_{t=0} = \varphi_j(\xi'; 1), \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{9}$$

Зауважимо, що (8) є диференціальним рівнянням порядку $2m - 2\mu$ відносно $D_t^{2\mu}v(t)$. Тому (9) містить лише $m-\mu$ крайових умов.

Умова 2.6. *Для довільних чисел* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (8), (9) *має єдиний розв'язок* $v(t)$, *який задовольняє умову* (5).

Використовуючи ці умови, сформулюємо базове означення другого розділу.

Означення 2.1. *Крайова задача* (1), (2) *називається* еліптичною з малим параметром, *якщо для довільної точки* $x \in \overline{G}$ *виконується умова 2.1 і для кожної точки* $x \in \partial G$ *виконуються умови 2.2 – 2.6.*

У підрозділі 2.3 побудовано формальні асимптотичні розв'язки задачі (1), (2) і з'ясовано сенс умов 2.5, 2.6. При побудові формальних асимптотичних розв'язків суттєво використовувався метод примежового шару Вішика–Люстерніка.

У підрозділі 2.4 наведено приклад еліптичної з малим параметром крайової задачі.

У підрозділі 2.5 розглянуто функціональні простори, в яких досліджено крайову задачу (1), (2). Це простори Соболєва, норма у яких залежить певним чином від параметра ε.

Нехай $r \in \mathbb{R}$. Через $H^r = H^r(\mathbb{R}^n)$ позначимо гільбертів простір Соболєва порядку r.

Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geq s$, $s \geq 0$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{10}$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

Для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ норма (1.10) еквівалентна соболєвській нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$. Тому простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ є повним. Зазначимо, що $H^{r,r}(\mathbb{R}^n, \varepsilon) = H^r(\mathbb{R}^n)$ з рівності норм. Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$.

За означенням простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup\limits_{\theta \in R} H^\theta(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$. За означенням, простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup\limits_{\theta \in R} H^\theta(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$.

Позначимо тепер через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$. Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega, \varepsilon)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у стандартний спосіб.

Якщо в означених вище просторах замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, то отримаємо простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ і різні еквівалентні норми у ньому для всіх допустимих значень параметрів r, s і ε.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ неперевно вкладений у соболєвський простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r > 0$, то при $r > \ell + 1/2$ означено оператор сліду.

Нехай дійсні числа θ, σ і ε задовольняють умови $\theta \geqslant \sigma$ і $\varepsilon > 0$. У випадку $\sigma \geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ соболєвський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| := ||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2\sigma}(1 + \varepsilon^2|\xi'|^2)^{\theta-\sigma}|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

У випадку $\sigma < 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)$ соболевський простір $H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h,\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)|| := \varepsilon^{-\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{\theta}|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi'\right)^{1/2},$$

де $h \in H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\varepsilon)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)$ у стандартний спосіб. Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\varepsilon)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці. Звісно, ця еквівалентність є рівномірною за параметром $\varepsilon \in (0;1]$.

У підрозділі 2.6 сформульовано основні результати другого розділу, щодо апріорної оцінки розв'язків крайової задачі (1), (2).

Для кожного числа $\varepsilon \geqslant 0$ пов'яжемо із цією задачею лінійне відображення

$$\mathcal{A}_{\varepsilon} : (u(\cdot;\varepsilon),\varrho_1(\cdot;\varepsilon),\ldots,\varrho_{\varkappa}(\cdot;\varepsilon)) \longrightarrow (f(\cdot;\varepsilon),g_1(\cdot;\varepsilon),\ldots,g_{m+\varkappa}(\cdot;\varepsilon)),$$

де $u(\cdot;\varepsilon) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $\varrho_1(\cdot;\varepsilon),\ldots,\varrho_{\varkappa}(\cdot;\varepsilon) \in C^{\infty}(\partial G)$.

Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r > m_{m+\varkappa} + 1/2. \tag{11}$$

Теорема 2.1. *Припустимо, що крайова задача* (1), (2) *еліптична з малим параметром. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (11) *і*

$$m_{\mu+\varkappa} + 1/2 \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + 1/2. \tag{12}$$

Тоді існує таке число $C > 0$, що для довільного числа $\varepsilon \in (0;1]$ правильною є апріорна оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon);H^{r,s}(G,\varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)|| \leq$$
$$\leq C\Big(||f(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j(\cdot;\varepsilon);\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\varepsilon)||+$$
$$+||u(\cdot;\varepsilon);L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);L_2(\partial G)||\Big). \tag{13}$$

Тут функції

$$u(\cdot;\varepsilon) \in H^{r}(G), \quad \varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G), \quad k = 1,\ldots,\varkappa, \tag{14}$$

та

$$f(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-2m,s-2\mu}(G),\ g_j(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-m_j-1/2}(\partial G),\ j = 1,\ldots,m+\varkappa, \tag{15}$$

задовольняють крайову задачу (1), (2). *Число C не залежить, ні від $\varepsilon \in (0;1]$, ні від функцій* (14), (15).

Теорема 2.2. *Нехай $A(x;D;\varepsilon)$ – правильно еліптичний оператор з малим параметром на $\overline{G}$, а натуральні числа r і s задовольняють умови* (11) *і* (12). *Припустимо, що існує таке число $C > 0$, що для довільного $\varepsilon \in (0;1]$ і для довільних функцій* (14), (15) *що задовольняють крайову задачу* (1), (2), *справджується апріорна оцінка* (13). *Тоді ця крайова задача є еліптичною з малим параметром.*

Доведення теорем 2.1 і 2.2 за допомогою методу локалізації ("заморожування коефіцієнтів") зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$. Цьому і присвячено наступні підрозділи.

У підрозділі 2.7 отримано допоміжні резутати, а саме – різні еквівалентні умови розв'язності крайових задач для звичайного диференціального рівняння на півосі зі сталими коефіцієнтами, що містить додаткові невідомі числові параметри.

У підрозділі 2.8 для крайового символу побудовано фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки. Ці результати є ключовими при доведенні апріорних оцінок.

Довільно виберемо номер $q \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}$. У крайовому символі (3), (4) задачі (1), (2), який відповідає точці $x^0 \in \partial G$, покладемо $\varphi_j = \delta_{q,j}$ для кожного $j \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}$. Отже, розглянемо таку крайову задачу на півосі:

$$A^{(0)}(\xi', D_t;\varepsilon)v_q(t) = 0, \quad t > 0,$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v_q(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_{q,k} = \delta_{q,j}, \quad j = 1,\ldots,m+\varkappa.$$

Тут, нагадаємо, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\varepsilon > 0$ є фіксованими.

За умовою 2.3 ця задача має єдиний розв'язок

$$v_q(t) = v_q(\xi', t; \varepsilon), \quad \sigma_{q,k} = \sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon), \quad \text{де} \quad k = 1, \ldots, \varkappa,$$

такий, що функція $v_q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Система векторів $(v_q(t), \sigma_{q,1}, \ldots, \sigma_{q,\varkappa})$, де $q = 1, \ldots, \varkappa$, є лінійно незалежною, оскільки у протилежному випадку нуль-вектор був би розв'язком крайової задачі (3), (4), у якій принаймні одне $\varphi_j \neq 0$. Ця система називається *фундаментальною системою розв'язків* (ф.с.р.) граничного символа.

Теорема 2.4, 2.5. *Нехай ціле $l \geq 0$. Існує таке число $C > 0$, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0;1]$, $q \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$ і $k = \{1, \ldots, \varkappa\}$ виконуються оцінки*

$$\left(\int_0^\infty |D^l v_q(\xi', t; \varepsilon)|^2 dt\right)^{1/2} \leq C\, |\xi'|^{l - m_q - 1/2} \times$$

$$\times \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1} - l + 1/2}, & \textit{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \textit{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q - l + 1/2}, & \textit{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa}, \end{cases}$$

$$|\sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)| \leqslant C|\xi|^{-m_q - \alpha_k} \times$$

$$\times \begin{cases} 1\,, & \textit{якщо} \quad q \leqslant \mu + \varkappa\,, \\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \textit{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

У підрозділі 2.9 доведено версії теорем 2.1 і 2.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (1), (2) в області G і вибором точки $x^0 \in \overline{G}$.

У підрозділі 2.10 доведено теореми 2.1 і 2.2.

У *третьому* розділі дисертації викладено результати, які стосуються розв'язності слабко еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області. Останнім вони відрізняються від слабко еліптичних з параметром крайових задач, що розглядались у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена [73 – 75], Л. Р. Волевича [10].

Головна мета цього розділу – встановити для слабко еліптичних з параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у придатних парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі не залежать від параметра.

У підрозділі 3.1 дано означення цієї задачі. В області G розглядаємо крайову задачу, що містить великий параметр $\lambda > 0$ та $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій у крайових умовах:

$$A(x; D; \lambda)u(x; \lambda) = f(x; \lambda), \quad x \in G, \tag{16}$$

$$B_j(x; D)u(x; \lambda) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D')\varrho_k(x; \lambda) = g_j(x; \lambda), \quad x \in \partial G, \tag{17}$$

$$j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Тут $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$,

$$A(x; D; \lambda) := A_{2m}(x; D)+$$
$$+\lambda A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \lambda^{2m-2\mu-1} A_{2m-2\mu-1}(x; D) + \lambda^{2m-2\mu} A_{2\mu}(x; D).$$

У задачі (16), (17) є невідомими функція u в області G, та $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa$ на межі ∂G цієї області. Останні містяться лише в крайових умовах. Тому кількість крайових умов дорівнює $m + \varkappa$.

У підрозділі 3.2 введено поняття слабкої еліптичності з параметром для крайової задачі (16), (17).

Нехай $x \in \overline{G}$. Позначимо через $A^{(0)}(x; D; \lambda)$ головну частину оператора $A(x; D; \lambda)$.

Головним симоволом диференціального оператора $A(x; D; \lambda)$ називаємо вираз $A^{(0)}(x; \xi; \lambda) := \sum\limits_{i=0}^{2m-2\mu} \lambda^i A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi)$, що залежить від $\xi \in \mathbb{C}^n$ і $\lambda > 0$.

Умова 3.1. *Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує така стала $C > 0$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \geqslant 0$ виконуеться нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0; \xi; \lambda)| \geq C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Умову 3.1 називають умовою *слабкої еліптичності з параметром* диференціального оператора $A(x; D; \lambda)$ у точці $x^0 \in \overline{G}$.

Нехай умова 3.1 виконується у точці $x^0 \in \overline{G}$. Рівняння $A^{(0)}(\xi', \tau; \lambda) = 0$ і $A^{(0)}_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ не мають дійсних τ-коренів при кожних $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ і $\lambda \geq 0$. Позначимо через $m^{\pm}$ і $\mu^{\pm}$ число коренів відповідно першого та другого рівнянь, які належать півплощині $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \tau \gtrless 0\}$.

Умова 3.2. *Виконуються рівності* $m^+ = m^- =: m, \quad \mu^+ = \mu^- =: \mu.$

Це – умова *правильної слабкої еліптичності з параметром* диференціального оператора $A^{(0)}(x^0; D; \lambda)$ у точці $x^0 \in \overline{G}$.

У крайовій задачі (16), (17) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x; D)$, $B_j(x; D)$ і $C_{j,k}(x; D')$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за змінними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо крайову задачу, що відповідає задачі (16), (17) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \lambda) v(t; \lambda) = 0, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$B^{(0)}_j(\xi', D_t) v(t; \lambda)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\xi') \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{19}$$

Нас будуть цікавити розв'язки задачі (18), (19), які задовольняють умову

$$v(t; \lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{20}$$

Умова 3.3. *Для будь-якого вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, *параметра* $\lambda > 0$ *і довільних чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *крайова задача* (18), (19) *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa})$, *що задовольняє умову* (20).

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розглянемо таку крайову задачу:

$$A^{(0)}_{2r}(\xi', D_t) v(t; \lambda) = 0, \quad t > 0, \tag{21}$$

$$B^{(0)}_j(\xi', D_t) v(t; \lambda)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\xi') \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{22}$$

Оскільки при $\lambda = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t; \lambda)$ збігається з оператором $A^{(0)}_{2m}(\xi', D_t)$, то потрібна така умова.

Умова 3.4. *Для будь-якого вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ *і довільних чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (21), (22), *де* $r = m$, *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_{\varkappa})$, *що задовольняє умову* (20).

Поділивши рівняння (18) на $\lambda^{2m-2\mu}$, отримаємо еквівалентне рівняння

$$\widetilde{A}^{(0)}(\xi', D_t; 1/\lambda)v(t;\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{1}{\lambda^{2m-2\mu-i}} A^{(0)}_{2m-i}(\xi', D_t)v(t;\lambda) = 0, \quad t > 0.$$

Якщо $\lambda \to \infty$, то це рівняння набирає вигляду (21) із $r = \mu$ порядку $2\mu < 2m$. У цьому зв'язку виникає така умова.

Умова 3.5. *Для будь-якого вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *і довільних чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (21), (22), *де* $r = \mu$, *має єдиний розв'язок* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$, *що задовольняє умову* (20).

При великих $\lambda > 0$ потрібні поправки до розв'язку задачі (18), (19), які задовольняють решту $m - \mu$ крайових умов. З методу Вішика – Люстерніка випливає, що ці поправки є розв'язком такої крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1)v(t; 1) = 0, \quad t > 0, \tag{23}$$

$$B^{(0)}_j(0, D_t)v(t; 1)|_{t=0} = \varphi_j(\xi'; 1), \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{24}$$

Умова 3.6. *Для довільних чисел* $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (23), (24) *має єдиний розв'язок* $v(t)$, *що задовольняє умову* (20).

Використавши ці умови, сформулюємо базове означення третього розділу.

Означення 3.1. *Крайова задача* (16), (17) *називається* слабко еліптичною з параметром, *якщо для довільної точки* $x \in \overline{G}$ *виконується умова 3.1 і для кожної точки* $x \in \partial G$ *виконуються умови 3.2 – 3.6.*

У підрозділі 3.3 наведено приклад слабко еліптичної з параметром крайової задачі.

У підрозділі 3.4 розглянуто функціональні простори, в яких досліджено крайову задачу (16), (17). Це простори Соболєва, норма у яких залежить певним чином від параметра λ.

Нехай $r \in \mathbb{R}$. Через $H^r = H^r(\mathbb{R}^n)$, як і раніше, позначимо гільбертів простір Соболєва порядку r.

Нехай дійсні числа r, s і λ такі, що $r \geq s \geq 0$ і $\lambda > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{25}$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$. Для кожного фіксованого $\lambda > 0$ норма (25) еквівалентна соболєвській нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\lambda > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$, а дійсні числа r, s і λ такі, що $r \geqslant s$ і $\lambda > 0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega, \lambda)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у стандартний спосіб.

Якщо в означених вище просторах замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, то отримаємо простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ і різні еквівалентні норми у ньому для всіх допустимих значень параметрів r, s і λ.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ неперервно вкладений у соболєвський простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r > 0$, то при $r > \ell + 1/2$ означено оператор сліду.

Нехай дійсні числа θ, σ і λ задовольняють умови $\theta \geqslant \sigma$ і $\lambda > 0$. У випадку $\sigma \geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ соболєвський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$|[h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)]| :=$$
$$= (1 + |\lambda|^{r-s})||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2\sigma}(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{\theta-\sigma}|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

У випадку $\sigma < 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ соболевський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$|[h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)]| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^\theta |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2},$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$.

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \lambda)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ у стандартний спосіб.

У підрозділі 3.5 сформульовано основні результати третього розділу щодо апріорної оцінки розв'язків крайової задачі (16), (17).

Теорема 3.1. *Припустимо, що крайова задача* (16), (17) *слабко еліптична з параметром. Нехай натуральні числа* r *і* s *задовольняють умови* (11) *і* (12). *Тоді існує таке число* $C > 0$, *що для довільного числа* $\lambda \gg 1$ *правильною є апріорна оцінка*

$$|[u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)]| + \sum_{k=1}^{\varkappa} |[\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\lambda)]| \le$$
$$\le C\Big(|[f(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)]| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} |[g_j(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\lambda)]| +$$
$$+ (1+|\lambda|^{r-s})\Big(||u(\cdot;\lambda); L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); L_2(\partial G)||\Big)\Big). \tag{26}$$

Тут функції

$$u(\cdot;\lambda) \in H^r(G), \quad \varrho_k(\cdot;\lambda) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G), \quad k=1,\ldots,\varkappa, \tag{27}$$

та

$$f(\cdot;\lambda) \in H^{r-2m,s-2\mu}(G),\ g_j(\cdot;\lambda) \in H^{r-m_j-1/2}(\partial G),\ j=1,\ldots,m+\varkappa, \tag{28}$$

задовольняють крайову задачу (16), (17). *Число* $C > 0$ *не залежить, ні від* $\lambda \gg 1$, *ні від функцій* (27), (28).

Теорема 3.2. *Нехай оператор* $A(x;D;\lambda)$ *задовольняє умову 3.2, а натуральні* r *і* s *задовольняють умови* (11) *і* (12). *Припустимо, що існує таке число* $C > 0$, *що для довільного* $\lambda \gg 1$ *і для довільних функцій* (27), (28), *що задовольняють крайову задачу* (16), (17), *справджується апріорна оцінка* (26). *Тоді ця крайова задача є слабко еліптичною з параметром.*

Доведення теорем 3.1 і 3.2 за допомогою методу локалізації ("заморожування коефіцієнтів") зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$.

У підрозділі 3.6 для крайового символу побудувано фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки. Ці результати є ключовими при доведенні апріорних оцінок.

У підрозділі 3.7 доведено версії теорем 3.1 і 3.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (16), (17) в області G і вибором точки $x^0 \in \overline{G}$.

У підрозділі 3.8 доведено теореми 3.1 і 3.2.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.
3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків досліджуваних задач та отримано інтегральні оцінки їх похідних.
4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром вказаних задач.
5. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
6. Для задач з цього класу побудовано фундаментальну систему розв'язків і отримано інтегральні оцінки їх похідних.
7. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

В 50 – 70-х роках XX століття була створена теорія загальних еліптичних крайових задач. Теорія розв'язності еліптичних крайових задач (як для одного рівняння, так і для систем) у просторах Соболєва представлена у роботах Ш. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1, 65], Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [4, 5, 6], Ф. Браудера [69, 70], Л. Р. Волевича [8, 9], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [35], Ж. Петре [42], Я. А. Ройтберга [45, 46, 47, 48], Л. Н. Слободецького [49, 50], В. А. Солонникова [51, 52, 53], Л. Хермандера [55], М. Шехтера [61, 62] (див. також огляд М. С. Аграновича [67] і вказану там літературу).

Центральний результат теорії еліптичних крайових задач полягає у тому, що є еквівалентними: еліптичність цієї задачі, нетеровість крайової задачі і апріорна оцінка її розв'язків у підходящих парах просторів Соболєва.

Наведемо постановку еліптичної крайової задачі. Нехай G є обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з нескінченно гладкою межею ∂G. Розглянемо в G наступну крайову задачу:

$$A(x,D)u = f \ \text{ в } \ G, \quad B_j(x,D)u = g_j \ \text{ на } \ \partial G, \ \ j = 1,\dots,m. \tag{1.1}$$

Тут $A := A(x,D)$ є лінійний диференціальний оператор на $\overline{G} := G \cup \partial G$ довільного парного порядку $2m \geq 2$, а кожне $B_j := B_j(x,D)$ є лінійний крайовий диференціальний оператор на ∂G довільного порядку $m_j \leq 2m-1$. Припускаємо, що всі коефіцієнти операторів $A(x,D)$ і $B_j(x,D)$ є комплекснозначними функціями з класів $C^\infty(\overline{G})$ і $C^\infty(\partial G)$ відповідно.

Крайову задача (1.1) називають еліптичною в G, якщо диференціальний оператор $A(x;D)$ є еліптичним на $\overline{G}$ та правильно еліптичним на ∂G, а набір крайових диференціальних операторів $B := (B_1,\dots,B_m)$ задовольняє умову Шапіро–Лопатинського стосовно A на ∂G.

Пов'яжемо з (1.1) відображення $u \mapsto (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{G})$. Для кожного дійсного $r \geq 2m$ це відображення продовжується за неперервністю до обмеженого лінійного оператора

$$(A, B) : H^r(G) \to H^{r-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{m} H^{r-m_j-1/2}(\partial G) =: \mathcal{H}^{r-2m}(G, \partial G). \quad (1.2)$$

Тут і далі через $H^\sigma(G)$ і $H^\sigma(\partial G)$ позначено комплексні гільбертові простори Соболєва порядку $\sigma \in \mathbb{R}$, задані в G і на ∂G відповідно.

Сформулюємо відповідні теореми, які стали "класичними"у сучасній теорії рівнянь з частинними похідними.

Теорема 1. *Якщо крайова задача* (1.1) *еліптична в* G*, то для будь-якого* $r \geq 2m$ *правильна така апріорна оцінка її узагальненого розв'язку:*

$$\|u; H^r(G)\| \leq c_r \left(\|(f, g); \mathcal{H}^{r-2m}(G, \partial G)\| + \|u; L_2(G)\| \right)$$

для довільної функції $u \in H^r(G)$*, де вектор* $(f, g) := (A, B)u$*, а число* $c_r > 0$ *не залежить від* u *і* (f, g)*. Зворотно, якщо для деякого* $r \geq 2m$ *виконується ця апріорна оцінка, то крайова задача* (1.1) *еліптична в області* G*.*

Теорема 2. *Якщо крайова задача* (1.1) *еліптична в* G*, то для будь-якого* $r \geq 0$ *оператор* (1.2) *є нетеровим, а його ядро* $\mathcal{N}$ *лежить у просторі* $C^\infty(\overline{G})$ *і разом з індексом не залежить від* r*. Зворотно, якщо для деякого* $r \geq 0$ *оператор* (1.2) *є нетеровим, то крайова задача* (1.1) *еліптична в області* G*.*

Відмітимо, що теорія еліптичних крайових задач викладена у монографіях Ш. Агмона [66], Ю. М. Березанського [5], Й. Т. Влоки, Б. Ровлі і Б. Лаврука [93], Ж.-Л. Ліонса і Э. Мадженеса [35], Ю. В. Егорова [16], О. І. Панича [41], Я. А. Ройтберга [87], Л. Хермандера [55, 58], М. Шехтера [89] та інших.

В 1963 р. Б. Лавруком [32 — 34] було виділено важливий клас еліптичних крайових задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Він розглядав ці крайові задачі для систем диференціальних рівнянь, вивів для них спеціальну формулу Гріна, побудував формально спряжену крайову задачу відносно цієї формули та отримав необхідну умову, а для однорідних еліптичних систем і достатню умову розв'язності цих задач. Такі задачі Б. Лаврук назвав параметричними крайовими задачами, оскільки додаткові невідомі функції у крайових умовах можна розглядати як (функціональні) параметри. Сформулюємо цю задачу.

У евклідовій області G з нескінченно гладкою межею ∂G еліптична крайова задача з дадатковими невідомими функціями на межі області має вигляд:

$$Au = f \text{ в } G, \quad B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}\varrho_k = g_j \text{ на } \partial G, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{1.3}$$

Вона, на відміну від (класичної) еліптичної крайової задачі (1.1), містить у крайових умовах $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa$ на межі ∂G. Тут диференціальні оператори A і B_j є такі самі як і раніше, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D')$ є (дотичний) диференціальний оператор на ∂G з нескінченно гладкими коефіцієнтами, порядок якого $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + \alpha_k$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varkappa$ — фіксовані цілі числа.

Еліптичність крайової задачі (1.3) значить, що диференціальний оператор A є еліптичним на $\overline{G}$ та правильно еліптичним на ∂G, а крайові умови задовольняють аналогу умови Шапіро–Лопатинського стосовно A на ∂G. Зазначимо, що крайову задачу (1.1) можна розглядати як окремий випадок крайової задачі (1.3) для $\varkappa = 0$; при цьому поняття еліптичності для них будуть еквівалентними.

Різні приклади еліптичних крайових задач з дадатковими невідомими функціями на межі області наведено у монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [82] та дисертації І. С. Чепурухіної [59]. Окрім того, ще Б. Лаврук [32, с. 259] дав простий приклад такої задачі, еквівалентної задачі Гільберта-Рімана у теорії аналітичних функцій.

Згодом з'ясувалося, що до цього класу задач приводять різні задачі математичної фізики (теорії пружності і гідромеханіки). Такі задачі були досліджені у роботах А. Г. Асланяна, Д. Г. Васильєва, В. Б. Лідського [3], В. А. Козлова, В. Г. Мазьї, Й. Россмана [82], П. Г. Сіарлета [71], С. Назарова і К. Пілескаса [85]та інших. Л. Р. Волевичем і С. Г. Гіндікиним [15] показано, що ці задачі виникають і при дослідженні мішаних задач для еволюційних рівнянь з квазіоднорідною старшою частиною. Змістовні приклади крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах виникають також у теорії крайових задач з вільною межею (див., наприклад, статті Р. Денка, Л. Р. Волевича [73] і Р. Денка, Й. Прусса і Р. Захера [72]).

Крім того, як і класичні еліптичні задачі, еліптичні за Лавруком крайові задачі є нетеровими у підходящих парах позитивних соболєвських просторів

Буте де Монвеля [68], Г. І. Ескіна [63, § 23] , Ш. Ремпеля і Б.-В. Шульце [43], Г. Грубб [80, 81]. Еліптичні системи мішаного порядку з дадатковими невідомими функціями на межі області досліджено у монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россманна [82] та І. Я. Ройтберг [44, 86].

Сформулюємо центральний результат „соболєвської" теорії еліптичних крайових задач з дадатковими невідомими функціями на межі області. Розглянемо задачу (1.3). Пов'яжемо з нею відображення

$$\begin{gathered}\mathcal{A} : (u, \varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa) \mapsto (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}),\\ \text{де} \quad (u, \varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa) \in C^\infty(\overline{G}) \times (C^\infty(\partial G))^\varkappa.\end{gathered}$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\begin{gathered}\mathcal{A} : H^r(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G) \to \\ \to H^{r-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G) =: \mathcal{K}^{r-2m}(G, \partial G)\end{gathered} \tag{1.4}$$

для довільного $r \in \mathbb{R}$.

Теорема 3 [82, 44, 86]. *Для кожного $r \in \mathbb{R}$ оператор (1.4) нетерів. Його ядро N лежить в $C^\infty(\overline{G}) \times (C^\infty(\partial G))^\varkappa$ і разом з індексом не залежить від r. Область значень оператора (1.4) складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_{m+\varkappa}) \in \mathcal{K}^{r-2m}(G, \partial G)$, ортогональних у $L_2(G) \times (L_2(\partial G))^{m+\varkappa}$ ядру N^+ оператора формально спряженої задачі.*

Еліптичні оператори з параметром відіграють важливу роль у теорії еліптичних рівняннь та її застосуваннях. Серед них окремий інтерес викликають еліптичні з малим праметром крайові задачі і пов'язані з ними слабко еліптичні з параметром крайові задачі. Такі задачі давно виникали в різних розділах математичної фізики. В останні роки посилився інтерес до дослідження еліптичних диференціальних рівняннь з параметром. Загальна теорія таких задач бере свій початок з роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка [7]. Так, систематичний виклад теорії еліптичних з малим параметром крайових задач дав Л. Р. Волевич [11]. Його стаття є фактично сучасним переосмисленням результатів класичної роботи М. І. Вішика и Л. А. Люстерніка [7]. Узагальнення теорії М. І. Вішика і Л. А. Люстерніка [7] на крайові задачі загального вигляду присвячений ряд робіт Л. Франка [77 – 79]. Загальні крайові задачі розглядалися також в роботах С. А. Назарова [38 — 40], який поширив метод Вішіка-Люстерника на деякий клас областей з негладкою межею. Однак, Назаров явно не формулював умови типу Шапіро-Лопатинського для розглянутих задач, замінюючи їх апріорними оцінками для відповідних задач для звичайних диференціальних операторів на півосі. Узагальнення теорії малого параметра для псевдодіфференціальних задач присвячені роботи А. С. Демідова [13, 14], і Г. І. Ескіна [64]. За допомогою алгебр Буте де Монвеля деякі результати про еліптичних задачах з малим параметром отримані в монографії Грубб [81].

Для повноти викладу наведемо цю задачу. Нехай G є обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з нескінченно гладкою межею ∂G. Розглянемо в G наступну крайову задачу для еліптичного оператора порядка $2m$:

$$A(x; D; \varepsilon)u = f \ \text{ в } \ G, \tag{1.5}$$

$$B_j(x; D; \varepsilon)u = g_j \ \text{ на } \ \partial G, \ \ j = 1, \ldots, m, \tag{1.6}$$

де оператори в (1.5) і (1.6) поліноміально залежать від малого параметра ε:

$$\begin{gathered} A(x; D; \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x; D) + \varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \\ +\varepsilon A_{2\mu+1}(x; D) + A_{2\mu}(x; D), \\ B_j(x; D; \varepsilon) := \varepsilon^{m_j-\mu_j} B_{j,m_j}(x; D) + \varepsilon^{m_j-\mu_j-1} B_{j,m_j-1}(x; D) + \ldots + \\ +\varepsilon B_{j,\mu_j+1}(x; D) + B_{j,\mu_j}(x; D). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Тут через $A_{2m-j}(x, D)$, $j = 0, \cdots, 2m - 2\mu \quad (m > \mu > 0)$ і $B_{j,m_j-k}(x, D)$, $k = 0, \cdots, m_j - \mu_j \, (m_j > \mu_j)$ позначені, відповідно, диференціальні оператори порядків $2m - j$ і $m_j - \mu_j$.

У класичній роботі [7] було сформульовано основну умову залежності оператора (1.5) від малого параметра і була побудована асимптотика при $\varepsilon \to 0$ розв'язку задачі Діріхле. При її обґрунтуванні використовувалося додаткове припущення про сильну еліптичність диференціального оператора (1.7). Основна особливість задачі (1.5), (1.6) полягає в тому, що при $\varepsilon = 0$ вироджується в еліптичне рівняння порядку $2\mu < 2m$, що потребує лише μ крайових умов. У зв'язку з цим при малих $\varepsilon > 0$ потрібні поправки, що дозволяють задовольнити решті $m - \mu$ крайовом умовам. Вішік і Люстерник встановили, що в разі виродження еліптичної задачі в еліптичну задачу меншого порядку ці поправки поза будь-якого δ – околу межі зменшуються як $\exp\{-C(\delta)/\varepsilon\}$ (їх прийнято називати експоненціальними примежовими шарами). Вішик і Люстерник запропонували простий і конструктивний метод побудови примежового шару, заснований на розв'язанні крайової задачі на півосі для звичайного рівняння (з постійними коефіцієнтами) щодо оператора диференціювання у напрямку, трансверсально кордоні області. Цей метод знайшов широке застосування в прикладних задачах.

Слідуючи роботі [11] пояснимо, принципову відмінність задачі (1.5), (1.6) при малих ε від традиційної задачі (1.1), що відповідає, скажімо, $\varepsilon = 1$. В обох випадках досліження засноване на так званому принципі локальності, що зводить задачу зі змінними коефіцієнтами в обмеженій області до завдань для постійних коефіцієнтів в «модельних» областях. У випадку обмеженої області G з гладкою межею ∂G модельними областями є весь простір $\mathbb{R}^n$ і півпростір $\mathbb{R}^n_+$.

Зафіксувавши точку $x^0 \in G$ і взявши старшу частину символу оператора (1.7) в цій точці:

$$A^{(0)}(x^0;\xi;\varepsilon) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x^0;\xi)$$

ми отримаємо так званий внутрішній символ в точці x^0. Умова *еліптичності з малим параметром* дозволяє отримати оцінку оператора $A(D;\varepsilon)$ в $\mathbb{R}^n$ в спеціальних нормах, що залежать від параметра. Сформулюємо цю умову:

Умова A. *Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує така стала $C > 0$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon \geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0;\xi;\varepsilon)| \geq C|\xi|^{2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Для точки $x^0 \in \partial G$ виконується умова правильної еліптичності: корені поліномів $A^{(0)}_{2m}(x^0;\xi',\tau)$ і $A^{(0)}_{2\mu}(x^0;\xi',\tau)$ відносно τ порівну лежать в $\mathbb{C}_\pm$ $(m^+ = m^- = m, \quad \mu^+ = \mu^- = \mu)$.

У крайовій задачі (1.5), (1.6) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x;D)$ і $B_j(x;D)$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за зміними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо крайову задачу що відповідає задачі (1.5), (1.6) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.8}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)v(t; \varepsilon)|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.9}$$

$$v(t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Задача (1.8), (1.9) залежить від двух параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ та $\varepsilon > 0$. Вона називається *крайовим символом* задачі (1.5), (1.6) в точці $x^0 \in \partial G$.

Умова B. *Для довільних вектора* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, *параметра* $\varepsilon > 0$ *і чисел* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *крайова задача* (1.8), (1.9) *задовольняє умові Шапіро–Лопатинського.*

Л. Р. Волевіч показав, що цих умов недостатньо для отримання апріорних оцінок. Необхідні ще додаткові умови.

Умова C1. *Оператори* A_{2m}, $B_{m_1}, \cdots, B_{m_m}$ *пов'язані умовою Шапіро–Лопатинського.*

Умова C2. *Оператори* $A_{2\mu}$, $B_{\mu_1}, \cdots, B_{\mu_\mu}$ *пов'язані умовою Шапіро–Лопатинського.*

Умова C3. *Оператори* $A(0, D_t; 1)$, $B_{\mu+1}(0, D_t; 1), \cdots, B_{m_m}(0, D_t; 1)$ *пов'язані умовою Шапіро–Лопатинського.*

Для крайового символа було побудована фундаментальна ситема розв'язків і отримані інтегральні оцінки.

Складна залежність розв'язків задачі (1.8) , (1.9) від параметрів диктує вибір спеціальних норм в функціональних просторах, залежних від малого параметра ε.

Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geq s$, $s \geq 0$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + \varepsilon^2 |\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \tag{1.10}$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

Нехай натуральны числа r і s задовольняють умовам

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r - s \geq m_j - \mu_j, \quad r > m_j + 1/2. \tag{1.11}$$

Пов'яжемо з крайовою задачею (1.5), (1.6) відображення

$$\mathcal{A}_\varepsilon : u \mapsto (f, g_1, \ldots, g_m),$$
$$\text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{G}) \times (C^\infty(\partial G))^\varkappa.$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\mathcal{A}_\varepsilon : H^{r,s}(G;\varepsilon) \to H^{r-2m,s-2\mu}(G;\varepsilon) \times \prod_{j=1}^{m} \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-\mu_j-1/2}(\partial G;\varepsilon).$$

Сформулюємо основний результат роботи [11].

Теорема 4. *Для задачі* (1.5), (1.6) *наступні умови еквівалентні:*

(i) Задача еліптична з малим параметром, тобто виконуються умови (A), (B), (C_1) – (C_3).

(ii) Виконуються умови (A), (B) *та оцінки на фундаметальну систему розв'язків.*

(iii) Нехай r *і* s *– натуральні числа, які задовольняють умовам* (1.11) *і умові*

$$\mu_\mu + 1/2 \leqslant s < \mu_{\mu+1} + 1/2.$$

Тоді справедлива оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| \leq C\Big(||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m} ||g_j(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-\mu_j-1/2}(\partial G,\varepsilon)|| + ||u(\cdot;\varepsilon); L_2(G)||\Big).$$

Поряд з цими задачами розглядалися і задачі, які отримуються при заміні "малого" параметра ε на "великий" параметр $\lambda = 1/\varepsilon$. Нехай G є обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з нескінченно гладкою межею ∂G. Розглянемо в G наступну крайову задачу для еліптичного оператора порядка $2m$:

$$A(x;D;\lambda)u = f \;\; \text{в} \;\; G, \tag{1.12}$$
$$B_j(x;D;\lambda)u = g_j \;\; \text{на} \;\; \partial G, \;\; j = 1,\ldots,m, \tag{1.13}$$

де оператори в (1.12) і (1.13) поліноміально залежать від великого параметра $\lambda > 0$:

$$A(x; D; \lambda) := A_{2m}(x; D) + \lambda A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \\ +\lambda^{2m-2\mu-1} A_{2\mu+1}(x; D) + \lambda^{2m-2\mu} A_{2\mu}(x; D), \tag{1.14}$$

$$B_j(x; D; \lambda) := B_{j,m_j}(x; D) + \lambda B_{j,m_j-1}(x; D) + \ldots + \\ +\lambda^{m_j-\mu_j-1} B_{j,\mu_j+1}(x; D) + \lambda^{m_j-\mu_j} B_{j,\mu_j}(x; D). \tag{1.15}$$

Такий клас задач отримав назву слабко еліптичних крайових задач (операторних в'язок) . Теорія слабко еліптичних задач "паралельна" теорії еліптичних з малим параметром, розглянутої вище. Вкажемо основні відмінності між ними.

Зафіксувавши точку $x^0 \in G$ і взявши старшу частину символу оператора (1.14) в цій точці:

$$A^{(0)}(x^0; \xi; \lambda) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \lambda^i A^{(0)}_{2m-i}(x^0; \xi)$$

ми отримаємо так званий внутрішній символ в точці x^0. Умова *слабкої еліптичності з параметром* дозволяє отримати оцінку оператора $A(D; \lambda)$ в $\mathbb{R}^n$ в спеціальних нормах, що залежать від великого параметра.

Сформулюємо цю умову:

Умова A1. *Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує така стала $C > 0$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|A^{(0)}(x^0; \xi; \lambda)| \geq C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Для точки $x^0 \in \partial G$ виконується умова правильної еліптичності: корені поліномів $A^{(0)}_{2m}(x^0; \xi', \tau)$ і $A^{(0)}_{2\mu}(x^0; \xi', \tau)$ відносно τ порівну лежать в $\mathbb{C}_\pm$ ($m^+ = m^- = m, \quad \mu^+ = \mu^- = \mu$).

У крайовій задачі (1.14), (1.15) вилучимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x; D)$ і $B_j(x; D)$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0, застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за змінними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ та зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо крайову задачу що відповідає задачі

(1.14), (1.15) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \lambda)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.16}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t; \lambda)v(t; \varepsilon)|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.17}$$

$$v(t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Задача (1.16), (1.17) залежить від двух параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ та $\lambda > 0$. Вона називається *крайовим символом* задачі (1.12), (1.13) в точці $x^0 \in \partial G$.

Умова B1. *Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$, параметра $\lambda > 0$ і чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ крайова задача* (1.16), (1.17) *задовольняє умові Шапіро–Лопатинського.*

Решта умов залишаються без змін. Розглядаються функціональні простори з велики параметром.

Пов'яжемо з крайовою задачею (1.12), (1.13) відображення

$$\mathcal{A}_\lambda : u \mapsto (f, g_1, \ldots, g_m),$$
$$\text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{G}) \times (C^\infty(\partial G))^\varkappa.$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\mathcal{A}_\lambda : H^{r,s}(G; \lambda) \to H^{r-2m, s-2\mu}(G; \lambda) \times \prod_{j=1}^{m} \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-\mu_j-1/2}(\partial G; \lambda).$$

Сформулюємо основний результат роботи [10].

Теорема 5. *Для задачі* (1.12), (1.13) *наступні умови еквівалентні:*

(i) Задача слабко еліптична з параметром, тобто виконуються умови $(A1)$, $(B1)$, (C_1) – (C_3).

(ii) Виконуються умови $(A1)$, $(B1)$ та оцінки на фундаметальну систему розв'язків.

(iii) Нехай r і s – натуральні числа, які задовольняють умовам (1.11) *і умові*

$$\mu_\mu + 1/2 \leqslant s < \mu_{\mu+1} + 1/2.$$

Тоді існує стала $C > 0$, що незалежить , ні від $\lambda \gg 1$ ні від функцій u, f і g_j така, що справедлива оцінка

$$||u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)|| \leq C\Big(||f(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}||g_j(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-\mu_j-1/2}(\partial G,\lambda)|| + (1+|\lambda|^{r-s})||u(\cdot;\lambda); L_2(G)||\Big).$$

Задача (1.12), (1.13) у випадку крайових умов, незалежних від λ, розглядалась у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена [73 – 75]. В загальному випадку ця задача систематично була досліджена в роботі Л. Р. Волевіча [10]. Такі задачі є узагальненням еліптичних з параметром задач, які ввели і досліджували Ш. Агмон [1] та М .С. Аграновіч, М. І. Вішик [2] у випадку $\mu = 0$. Ці задачі були застосовані у теорії параболічних мішаних задач. Пізніше Л. Р. Волевич [10] застосував теорію слабко еліптичних з параметром задач до мішаних задач для параболічних рівнянь, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. Було введено новий клас крайових задач для параболічних операторів у частинних похідних, які не задовольняють класичні умови параболічності. Зазначимо, що в крайових умовах таких задач з'явилися невідомі додаткові функції, які задані на межі області, і загальна теорія для таких задач не була побудована.

Зважаючи на це, побудова теорії розв'язності еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області є актуальною науковою проблемою.

РОЗДІЛ 2
ЕЛІПТИЧНІ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

У цьому розділі буде введений і досліджений клас еліптичних задач, які містять малий параметр у диференціальному рівнянні та невідомі додаткові функції у крайових умовах. Останнім вони відрізняються від еліптичних з малим параметром крайових задач, вивчених [11,92].

Головна мета цього розділу – встановити для еліптичних з малим параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у підходящих парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі є незалежними від параметра.

2.1. Постановка задачі

Нехай G – довільна обмежена область (відкрита зв'язна і непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що межа ∂G цієї області є замкненим нескінченно гладким орієнтовним многовидом без краю вимірності $n-1$. Область G локально лежить по один бік від своєї межі ∂G. Як зазвичай, $\overline{G} := G \cup \partial G$ є замикання області G. Позначимо через $\nu(x)$ орт внутрішньої нормалі до межі ∂G у точці $x \in \partial G$, а через ν нескінченно гладке векторне поле цих ортів, задане на ∂G.

В області G розглядаємо таку крайову задачу, яка містить малий параметр $\varepsilon > 0$ та $\varkappa \geq 1$ додаткових невідомих функцій у крайових умовах:

$$A(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) = f(x; \varepsilon), \quad x \in G, \tag{2.1}$$

$$B_j(x; D)u(x; \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D')\varrho_k(x; \varepsilon) = g_j(x; \varepsilon), \quad x \in \partial G, \tag{2.2}$$

$$j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Тут $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$,

$$\begin{gathered} A(x; D; \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x; D) + \\ + \varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x; D) + \ldots + \varepsilon A_{2\mu-1}(x; D) + A_{2\mu}(x; D), \end{gathered} \tag{2.3}$$

кожне

$$A_{2m-i}(x;D) := \sum_{|\beta|\le 2m-i} a_{i,\beta}(x)D^{\beta}$$

— лінійний диференціальный оператор на $\overline{G}$,

$$B_j(x;D) := \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j,\beta}(x)D^{\beta}$$

— крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂G, а $C_{j,k}(x,D')$ – (дотичний) лінійний диференціальний оператор на ∂G. Усі коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{G}$ і ∂G відповідно, а порядки задовольняють умовам

$$\operatorname{ord} A_{2m-i}(x;D) \le 2m-i, \quad \operatorname{ord} B_j(x;D) \le m_j, \quad \operatorname{ord} C_{j,k}(x;D') \le m_j+\alpha_k.$$

Тут числа m_j, де $j=\{1,\ldots,m+\varkappa\}$, і α_k, де $k=\{1,\ldots,\varkappa\}$, є цілими, причому

$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \le \ldots \le m_{m+\varkappa}. \tag{2.4}$$

Як зазвичай, $B_j(x;D)\equiv 0$, якщо $m_j<0$, та $C_{j,k}(x;D')\equiv 0$, якщо $m_j+\alpha_k<0$. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $\alpha_k \geqslant -m_{m+\varkappa}$.

Тут використовуються стандартні позначення: $\beta := (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — мультиіндекс, $|\beta| := \beta_1+\ldots+\beta_n$, $D^{\beta} := D_1^{\beta_1}\ldots D_n^{\beta_n}$, $D_l := -i\partial/\partial x_l$, де i — уявна одиниця, а $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$, $\xi^{\beta} := \xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_n^{\beta_n}$ для вектора $\xi=(\xi_1,\ldots\xi_n)\in\mathbb{C}^n$.

В задачі (2.1), (2.2) є невідомими функція u в області G, та $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1,\ldots,\varrho_{\varkappa}$ на межі ∂G цієї області. Останні містяться лише в крайових умовах. Тому кількість крайових умов дорівнює $m+\varkappa$. В роботі усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

2.2. Умови еліптичності з малим параметром

Введемо поняття еліптичності з малим параметром для крайової задачі (2.1), (2.2).

Нехай $x \in \overline{G}$. Позначимо через $A^{(0)}(x; D; \varepsilon)$ головну частину оператора $A(x; D; \varepsilon)$. А саме,

$$A^{(0)}(x; D; \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x; D), \tag{2.5}$$

де

$$A^{(0)}_{2m-i}(x; D) := \sum_{|\beta|=2m-i} a_{i,\beta}(x) D^{\beta}.$$

Слідуючи [7, 11], *головним симоволом* диференціального оператора $A(x; D; \varepsilon)$ називаємо вираз

$$A^{(0)}(x; \xi; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi), \tag{2.6}$$

залежний від $\xi \in \mathbb{C}^n$ і $\varepsilon > 0$.

Тут

$$A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi) := \sum_{|\beta|=2m-i} a_{i,\beta}(x) \xi^{\beta}$$

— головний символ оператора $A_{2m-i}(x; D)$. Нагадаємо, що для кожного фіксованого $x \in \overline{G}$ вираз $A^{(0)}_{2m-i}(x; \xi)$ є однорідним поліномом порядку $2m - i$ змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$. Відмитимо, що функція $A^{(0)}(x; \xi; |\xi|^{-1})$ є однорідною по ξ порядку 2μ.

Через $B^{(0)}_j(x; D)$ позначимо головну частину диференціального оператора $B_j(x; D)$, а через $B^{(0)}_j(x; \xi)$ — його головний символ. Зокрема

$$B^{(0)}_j(x; D) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(x) D^{\beta}.$$

Для кожного фіксованого $x \in \partial G$ вираз

$$B^{(0)}_j(x; \xi) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(x) \xi^{\beta}$$

є однорідним поліномом порядку m_j змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Аналогічно, через $C^{(0)}_{j,k}(x;D')$ позначимо головну частину диференціального ператора $C_{j,k}(x;D')$, а через $C^{(0)}_{j,k}(x;\xi')$ — його головний символ.

Умова 2.1. Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує стала $C > 0$, така, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon \geqslant 0$ виконується нерівність

$$|A^{(0)}(x^0;\xi;\varepsilon)| \geq C|\xi|^{2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{2.7}$$

Зауваження 2.1.
1. Умову 2.1 називають умовою *еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A(x;D;\varepsilon)$ у точці $x^0 \in \overline{G}$ (див. [11, Означення 1.1]) .
2. Якщо оператор $A(x;D;\xi)$ задовольняє умову 2.1 для кожної точки $x^0 \in G$, то оскільки G – компакт, можна вважати що стала C в (2.7) не залежить від x^0.
3. Для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ і $\varepsilon \geq 0$ умова 2.1 виконується тоді і тільки тоді, коли

$$A^{(0)}_{2m}(x^0;\xi) \neq 0, \quad A^{(0)}_{2\mu}(x^0;\xi) \neq 0, \quad A^{(0)}(x^0;\xi;\varepsilon) \neq 0. \tag{2.8}$$

Відмитимо, що перші дві нерівності в (2.8) означають еліптичність операторів $A_{2m}(x^0;D)$ і $A_{2\mu}(x^0;D)$ (див. [11, Твердження 1.2]).

Нехай $x^0 \in \partial G$ а U — достатньо малий окіл точки x^0 з топології на $\overline{G}$. Виберемо в U локальні координати $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ такі, що x_n — відстань від довільної точки множини U до межі ∂G, а $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$ - локальні координати на $\partial G \cap U$. Ці локальні координати називаємо спеціальними. Позначимо через $A^{(0)}_{2m-i}(\xi) := A^{(0)}_{2m-i}(x^0;\xi',\xi_n)$ і $A^{(0)}(\xi;\varepsilon) := A^{(0)}(x^0;\xi',\xi_n;\varepsilon)$ головні симоволи відповідно диференціальних операторів $A^{(0)}_{2m-i}(D) := A^{(0)}_{2m-i}(x^0;D)$ і $A^{(0)}(D,\varepsilon) := A^{(0)}(x^0;D,\varepsilon)$, записаних у цих локальних координатах. Тут $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{R}$, $\xi = (\xi',\xi_n)$ і $\varepsilon > 0$.

Нехай умова 2.1 виконується у точці $x^0 \in \overline{G}$. Згідно із пунктом 3 зауваження 2.1 рівняння $A^{(0)}(\xi',\tau;\varepsilon) = 0$ і $A^{(0)}_{2\mu}(\xi',\tau) = 0$ не мають дійсних τ-коренів при кожних $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ і $\varepsilon \geq 0$. Позначимо через $m^{\pm}$ і $\mu^{\pm}$ число коренів відповідно першого та другого рівняння, які лежать у повплощині $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\tau \gtrless 0\}$. Відомо, що числа $m^{\pm}$ не залежать від ξ' та ε і дорівнюють числу τ-коренів рівняння $A^{(0)}_{2m}(\xi',\tau) = 0$, які задовольняють умову $\tau \in \mathbb{C}_{\pm}$. Окрім того, числа $\mu^{\pm}$ не залежать від ξ' (див. [11,п.1.2, 1.3]).

Умова 2.2. Виконуються рівності

$$m^+ = m^- =: m, \quad \mu^+ = \mu^- =: \mu$$

Це – умова *правильної еліптичності з малим параметром* диференціального оператора $A^{(0)}(x^0; D; \varepsilon)$.

Зауваження 2.2. Якщо $n \geqslant 3$, то умова 2.2 є наслідком умови 2.1. Це не так при $n \neq 2$.

Позначимо, відповідно, через $B_j^{(0)}(\xi)$ і $C_{j,k}^{(0)}(\xi')$ головні символи диференціальних операторів $B_j^{(0)}(D) := B_j^{(0)}(x^0; D)$ і $C_{j,k}^{(0)}(D') := C_{j,k}^{(0)}(x^0; D')$, записаних у локальных координатах.

У крайовій задачі (2.1), (2.2) відкинимо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x, D)$, $B_j(x; D)$ і $C_{j,k}(x; D')$, зафіксуємо їх коефіцієнти у точці $x = x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0 та застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x' \mapsto \xi'}$ за змінними $x_1, \cdots, x_{n-1}$ і зафіксуємо $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$. Отримаємо таку крайову задачу що відповідає задачі (2.1) – (2.2) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon) v(t; \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{2.9}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t) v(t; \varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi') \sigma_k(\xi'; \varepsilon) = \varphi_j(\xi'; \varepsilon), \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa \tag{2.10}$$

Тут $D_t := -i\partial/\partial t$ та

$$\begin{gathered} v(t) := (F' u(x', x_n(\xi'; \varepsilon)))(\xi', x_n(\xi'; \varepsilon)), \\ \sigma_k := (F' \varrho_k(x'; \varepsilon))(\xi'; \varepsilon), \quad k = \{1, \ldots, \varkappa\}, \\ \varphi_j := (F' g_j(\xi'; \varepsilon))(\xi'; \varepsilon), \quad j = \{1, \ldots, m + \varkappa\}. \end{gathered}$$

Задача (2.9), (2.10) залежить від двух параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ та $\varepsilon > 0$. Вона називається *крайовим символом* задачі (2.1), (2.2) в точці $x^0 \in \partial G$. Кожний розвязок $v(t)$ рівняння (2.9) належить до $C^\infty([0, \infty])$. Нас будуть цікавити розв'язки задачі (2.9), (2.10), які задовольняють умову:

$$v(t; \varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.11}$$

Умова 2.3. Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\varepsilon > 0$ і чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ крайова задача (2.9), (2.10) має єдиний розвязок $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$, який задовольняє умову (2.11).

Наступні дві умови стосуються розв'язності цієї задачі у граничних випадках: коли $\varepsilon \to \infty$ або $\varepsilon \to 0$ (порів. з [11]).

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розгянемо таку крайову задачу:

$$A_{2r}^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_k(\xi';\varepsilon) = \varphi_j(\xi';\varepsilon), \quad j = 1, \dots, r+\varkappa. \tag{2.13}$$

Поділивши рівняння (2.9) на $\varepsilon^{2m-2\mu}$ отримаємо еквівалентне рівняння:

$$\widetilde{A}^{(0)}(\xi', D_t; 1/\varepsilon)v(t;\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{1}{\varepsilon^i} A_{2m-i}^{(0)}(\xi', D_t)v(t;\varepsilon) = 0, \quad t > 0.$$

Якщо $\varepsilon \to \infty$, то це рівняння набирає вигляду (2.12) із $r = m$. У цьому звязку виникає

Умова 2.4. Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ і чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (2.12), (2.13), де $r = m$, має єдиний розв'язок $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$, який задовольняє умову (2.11).

Оскільки при $\varepsilon = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)$ збігається з оператором $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', D_t)$ порядку $2\mu < 2m$, то потрібна

Умова 2.5. Для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ і чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_{\mu+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (2.12), (2.13), де $r = \mu$, має единий розв'язок $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$, який задовольняє умову (2.11).

Зауваження 2.3. З цієї умови випливає що $\alpha_k \geqslant -m_{\mu+\varkappa}$ для кожного $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$. Справді, у противному разі $C_{1,k}(x, D') \equiv \dots \equiv C_{\mu+\varkappa,k}(x, D') \equiv 0$ для деякого k. Тоді вектор $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$ усі компоненти якого нульові, за винятком σ_k буде розв'язком однорідної крайової задачі, що порушує умову 2.5.

Умови 2.3 – 2.5 є аналогами умови Шапіро-Лопатинського (умови накриття) для звичайного лінійного диференціального рівняння на півосі (див. [37, 60, 82, 88]).

При малих $\varepsilon > 0$ потрібні поправки до розв'язку задачі (2.9), (2.10), які задовольняють решті $m-\mu$ крайовим умовам. З методу Вішика–Люстерніка [7, 11], випливає, що ці поправки є розв'язком такої крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1)v(t; 1) = 0, \quad t > 0, \tag{2.14}$$

$$B_j^{(0)}(0, D_t)v(t; 1)|_{t=0} = \varphi_j(\xi'; 1), \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{2.15}$$

Відмітимо, що (2.14) є диференціальне рівняння порядку $2m - 2\mu$ відносно $D_t^{2\mu}v(t)$. Тому в (2.15) лише $m - \mu$ крайових умов.

Умова 2.6. Для довільних чисел $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (2.14), (2.15) має единий розв'язок $v(t)$, який задовольняє умову (2.11).

Зауваження 2.4. Кожна з умов 2.3–2.6 еквівалентна тому, що відповідна однорідна крайова задача на півосі має лише тривіальний розв'язок у класі функцій, що задовольняють (2.11).

Використовуючи ці умови, сформулюємо базове означення другого розділу.

Означення 2.1. Крайова задача (2.1), (2.2) називається *еліптичною з малим параметром*, якщо для довільної точки $x \in \overline{G}$ виконуюється умова 2.1 і для кожної точки $x \in \partial G$ виконуються умови 2.2 – 2.6.

Якщо $\varkappa = 0$, то умови 2.1 – 2.6 є умовами Л. Р. Волевіча [11] еліптичності з малим параметром крайової задачі для диференціального рівняння (2.1). У цьому випадку умови 2.1 – 2.4 є аналогами умов еліптичності крайових задач. Сенс умов 2.5 – 2.6 буде зясований у наступному пункті.

2.3. Формальний асимптотичний розв'язок задачі

Нагадаємо означення формального асимптотичного розв'язку (ФАР) (див. деталі [31]).

Нехай задано рівняння

$$L(\varepsilon)u = f, \tag{2.16}$$

де $L(\varepsilon) : E_1 \to E_2$ є лінійним обмеженим оператором, залежним від малого параметра $\varepsilon > 0$, а E_1 і E_2 — банахові простори.

Ряд

$$U(x;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x) \tag{2.17}$$

де кожне $u_k \in E_1$, називається *формальним асимтотичним розвязком* рівняння (2.16), якщо для довільного $\nu > 0$ існує таке число $N = N(\nu)$ таке, що счастинна сума

$$U_N(x;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_(x)$$

є наближеним розв'язком рівняння (2.16) з точністю до $O(\varepsilon^\nu)$, тобто

$$||L(\varepsilon)U_N(\varepsilon) - f||_{E_2} = O(\varepsilon^\nu), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Використовуючи принцип локальності, який лежить в основі теорії еліптичнох крайових задач, можна "зклеїти" ФАР задачі (2.1), (2.2) з "локальних" ФАР, визначених в околі внутрішніх точок многовиду G та точок межі ∂G. Схема побудови була запропонована Л. Р. Волевичем (порівн. з [11]).

Нехай $x_0 \in G$. Зафіксуємо коефіцієнти диференціального оператора $A^{(0)}(x;D;\varepsilon)$ у точці $x = x_0$ і розглянемо в просторі $\mathbb{R}^n$ рівняння:

$$A^{(0)}(D;\varepsilon)u(x;\varepsilon) = f(x;\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.18}$$

Тут лінійний диференціальний оператор $A^{(0)}(D;\varepsilon) := A^{(0)}(x^{(0)};D;\varepsilon)$ розглядається як обмежений оператор у парі просторів

$$A^{(0)}(D;\varepsilon) : H^r(\mathbb{R}^n) \to H^{r-2m}(\mathbb{R}^n),$$

де ціле $r \geq 2m$, а $H^r(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів простір Соболева порядку r на $\mathbb{R}^n$.

ФАР рівняння (2.18) знайдено Л. Р. Волевічем [11] у такий спосіб. Підставляючи (2.17) замість $u(x)$ в рівняння (2.18), запишемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2m-2\mu}\varepsilon^{2m-2\mu-i+k}A^{(0)}_{2m-i}(D)u_k = f. \qquad (2.19)$$

Тут $A^{(0)}_{2m-i}(D) := A^{(0)}_{2m-i}(x^0; D)$ узято з розкладу (2.5). Зробивши заміну $l := 2m-2\mu-i+k$ в (2.19) перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{2m-2\mu+k}\varepsilon^{l}A^{(0)}_{2\mu+l-k}(D)u_k = f.$$

Замінивши тут порядок підсумовування отримаємо

$$\sum_{l=0}^{2m-2\mu}\varepsilon^{l}\sum_{k=0}^{l}A^{(0)}_{2\mu+l-k}(D)u_k + \\ + \sum_{l=2m-2\mu+1}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{k=l-2m-2\mu}^{l}A^{(0)}_{2\mu+l-k}(D)u_k = f.$$

Зробимо заміну $q := l-k$ і перепишемо останню рівність у вигляді

$$\sum_{l=0}^{2m-2\mu}\varepsilon^{l}\sum_{q=0}^{l}A^{(0)}_{2\mu+q}(D)u_{l-q} + \\ + \sum_{l=2m-2\mu+1}^{\infty}\varepsilon^{l}\sum_{q=0}^{2m-2\mu}A^{(0)}_{2\mu+q}(D)u_{l-q} = f.$$

Ця рівність виконується тоді і лише тоді, коли

$$A^{(0)}_{2\mu}(D)u_0 = f,$$

$$A^{(0)}_{2\mu}(D)u_l = -\sum_{q=1}^{l}A^{(0)}_{2\mu+q}(D)u_{l-q} \quad \text{для усіх} \quad l \leqslant 2m-2\mu, \qquad (2.20\text{а})$$

$$A^{(0)}_{2\mu}(D)u_l = -\sum_{q=1}^{2m-2\mu}A^{(0)}_{2\mu+q}(D)u_{l-q} \quad \text{для усіх} \quad l \geqslant 2m-2\mu+1. \qquad (2.20\text{б})$$

Ця рекурентная система розв'язна, якщо є оборотним оператор

$$A^{(0)}_{2\mu}(D) : H^{r}(\mathbb{R}^n) \to H^{r-2\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Нехай $x_0 \in \partial G$. Зафіксуємо коефіцієнти диференціальних операторів $A^{(0)}(x;D;\varepsilon)$, $B_j^{(0)}(x;D)$ і $C_{j,k}^{(0)}(x;D')$ у точці $x = x_0$, перейдемо до спеціальних локальних координат і розглянемо таку крайову задачу:

$$A^{(0)}(D', D_n;\varepsilon)u(x', x_n;\varepsilon) = f(x', x_n;\varepsilon), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0, \tag{2.21}$$

$$B_j^{(0)}(D', D_n)u(x', x_n;\varepsilon)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_k(x';\varepsilon) = g_j(x';\varepsilon), \tag{2.22}$$

$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa.$$

З цією задачею повяжемо оператор

$$\left(A^{(0)}(D;\varepsilon), \left\{B_j^{(0)}(D) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D') : j = 1, \dots, m + \varkappa\right\}\right) :$$

$$H^r(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{r-2m}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{k=1}^{m+\varkappa} H^{r-m_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

де ціле $r \geqslant 2m$. Тут і надалі $H^l(\mathbb{R}^n_+)$ і $H^l(\mathbb{R}^{n-1})$– гільбертові простори Соболева дійсного порядку $l \geqslant 0$ на

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\},$$

і $\mathbb{R}^{n-1}$ відповідно.

За аналогією з (див. [11]) формальний розв'язок крайової задачі (2.21), (2.22) шукаємо у вигляді:

$$u(x', x_n;\varepsilon) = U(x', x_n;\varepsilon) + V(x', x_n/\varepsilon;\varepsilon), \tag{2.23}$$

$$\varrho_k(x';\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \varrho_{k,l}(x'), \tag{2.24}$$

де $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n > 0$, $\varepsilon > 0$.

Тут $U(x', x_n;\varepsilon) = U(\varepsilon)$ є ряд (2.17), коефіцієнти $u_k(x', x_n)$ якого задовольняють рекурентні співвідношення (2.20) на $\mathbb{R}^n_+$, а

$$V(x', x_n/\varepsilon;\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l_0+l} v_l(x', x_n/\varepsilon). \tag{2.25}$$

де

$$l_0 := m_{\mu+\varkappa} + 1, \tag{2.26}$$

і усі v_l – деякі функції на $\mathbb{R}^n_+$. Вираз (2.25) називають примежовим шаром за Вішиком - Люстерніком [7, 11]. Окрім того, у формулі (2.24) усі $\varrho_{k,l}(x')$ – деякі функції на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Підставивши (2.23) в рівняння (2.21) і скориставшись тим, що $A^{(0)}(D;\varepsilon)U(\varepsilon)=f$ згідно з формулою (2.18), отримуємо таке рівняння:

$$\begin{gathered} A^{(0)}(D', D_n;\varepsilon)V(x', x_n/\varepsilon;\varepsilon)=0,\\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x_n>0,\quad \varepsilon>0. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Подамо (2.27) у вигляді

$$\sum_{i=0}^{2m-2\mu}\varepsilon^{2m-2\mu-i}A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n)V(x', x_n/\varepsilon;\varepsilon)=0.$$

Зробимо заміну $t:=x_n/\varepsilon$. Оскільки

$$\begin{gathered} A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n)V\left(x', x_n/\varepsilon;\varepsilon\right)=A^{(0)}_{2m-i}\left(D', \frac{1}{\varepsilon}D_t\right)V(x', t;\varepsilon)=\\ =\varepsilon^{-2m+i}A^{(0)}_{2m-i}(\varepsilon D', D_t)V(x', t;\varepsilon), \end{gathered}$$

отримаємо

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{2m-2\mu}\varepsilon^{-2\mu}A^{(0)}_{2m-i}(\varepsilon D', D_t)V(x', t;\varepsilon)=0,\\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad t>0,\quad \varepsilon>0. \end{gathered}$$

Підставивши (2.25) в це рівняння, запишемо

$$\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^{l_0+l-2\mu}\widetilde{A}^{(0)}(\varepsilon D', D_t)v_l(x', t)=0, \tag{2.28}$$

де покладемо

$$\widetilde{A}^{(0)}(\varepsilon D', D_t):=\sum_{i=0}^{2m-2\mu}A^{(0)}_{2m-i}(\varepsilon D', D_t).$$

Розкладемо $\widetilde{A}^{(0)}(\varepsilon D', D_t)$ в ряд за степенями ε:

$$\widetilde{A}^{(0)}(\varepsilon D', D_t)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(D', D_t). \tag{2.29}$$

Тут кожне $A_s(D', D_t)$ – деякий диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, причому $\operatorname{ord} A_s(D', D_t) \leqslant 2m$. Сума в (2.29) насправді скінченна, бо $A_s(D', D_t) = 0$, якщо $s \geqslant 2m+1$. Окрім того, звісно

$$A_0(D', D_t) = A^{(0)}(0, D_t; 1). \tag{2.30}$$

Підставивши (2.29) в (2.28), подівши на $\varepsilon^{l_0-2\mu}$ і змінивши порядок підсумування запишемо

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+s} A_s(D', D_t) v_l(x', t) = 0.$$

Зробивши заміну $q := l + s$, перепишемо цю рівність у вигляді

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{q=s}^{\infty} \varepsilon^{q} A_s(D', D_t) v_{q-s}(x', t) = 0.$$

Змінивши тут порядок підсумування, отримаємо

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q} \sum_{s=0}^{q} A_s(D', D_t) v_{q-s}(x', t) = 0.$$

Ця рівність виконується для усіх $\varepsilon > 0$ тоді і лише тоді, коли

$$\sum_{s=0}^{q} A_s(D', D_t) v_{q-s}(x', t) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \ldots.$$

З урахуванням (2.30) ці рівності запишемо у вигляді рекурентних співвідношень:

$$A^{(0)}(0, D_t; 1) v_0(x', x_n) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0. \tag{2.31а}$$

$$A^{(0)}(0, D_t; 1) v_l(x', x_n) = -\sum_{s=1}^{l} A_s(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n), \tag{2.31б}$$

$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \quad l = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тепер підставимо (2.23) і (2.24) у крайову умову (2.22). Запишемо

$$B_j^{(0)}(D', D_n) U(x', x_n; \varepsilon)|_{x_n=0} + B_j^{(0)}(D', D_n) V(x', x_n/\varepsilon; \varepsilon)|_{x_n=0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D') \varrho_k(x'; \varepsilon) = g_j(x'), \tag{2.32}$$

$$j = 1, \ldots, m+\varkappa, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тут, на підставі (2.17), маємо

$$B_j^{(0)}(D', D_n)U(x', x_n; \varepsilon)|_{x_n=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l B_j^{(0)}(D', D_n)u_l(x', x_n)|_{x_n=0}. \quad (2.33)$$

Окрім того, на підставі (2.25) маємо

$$B_j^{(0)}(D', D_n)V(x', x_n/\varepsilon; \varepsilon)|_{x_n=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0} B_j^{(0)}\,(D', D_n)\, v_l(x', x_n/\varepsilon)|_{x_n=0} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0} B_j^{(0)} \left(D', \frac{1}{\varepsilon} D_t\right) v_l(x', t)|_{t=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0-m_j} B_j^{(0)}(\varepsilon D', D_t) v_l(x', t)|_{t=0}.$$

Отже

$$B_j^{(0)}(D', D_n)V(x', x_n/\varepsilon; \varepsilon)|_{x_n=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0-m_j} B_j^{(0)}(\varepsilon D', D_t) v_l(x', t)|_{t=0} \quad (2.34)$$

Розкладемо $B_j^{(0)}(\varepsilon D', D_n)$ у ряд за степенями ε:

$$B_j^{(0)}(\varepsilon D', D_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{j,s}(D', D_n). \quad (2.35)$$

Тут кожне $B_{j,s}(D', D_n)$ – деякий диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, причому $\operatorname{ord} B_{j,s}(D', D_t) \leqslant m_j$. Сума в (2.35) насправді скінченна, бо $B_{j,s}(D', D_n) = 0$, якщо $s \geqslant m_j + 1$. Окрім того, звісно

$$B_{j,0}(D', D_n) = B_j^{(0)}(0, D_n). \quad (2.36)$$

Підставивши (2.35) в (2.34), змінивши порядок підсумування і зробивши заміну $q := l + s$ і знову змінивши порядок підсумування, запишемо

$$\begin{gathered} B_j^{(0)}(D', D_n)V(x', x_n/\varepsilon; \varepsilon)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0-m_j+s} B_{j,s}(D', D_n) v_l(x', x_n)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+l_0-m_j+s} B_{j,s}(D', D_n) v_l(x', x_n)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=s}^{\infty} \varepsilon^{q+l_0-m_j} B_{j,s}(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q+l_0-m_j} \sum_{s=0}^{q} B_{j,s}(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n)|_{x_n=0}. \end{gathered}$$

Таким чином

$$B_j^{(0)}(D', D_n)V(x', x_n/\varepsilon; \varepsilon)|_{x_n=0} = \\ = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q+l_0-m_j} \sum_{s=0}^{q} B_{j,s}(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n)|_{x_n=0}. \tag{2.37}$$

Нагадаємо, що число l_0 визначено за формулою (2.26).

Окрім того, у формулі (2.32) на підставі (2.24) маємо

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_k(x'; \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_{k,l}(x'). \tag{2.38}$$

Підставимо (2.33), (2.37) і (2.38) в крайові умови (2.32) запишемо їх так:

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q B_j^{(0)}(D', D_n) u_q(x', x_n)|_{x_n=0} + \\ + \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{q+l_0-m_j} \sum_{s=0}^{q} B_{j,s}(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n)|_{x_n=0} + \\ + \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_{k,q}(x') = g_j(x'), \\ j = 1, \ldots, m + \varkappa, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.39}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε в лівій і правій частині цієї рівності, отримаємо рекурентні співвідношення, які пов'язують u_l, v_l і $\varrho_{1,l}, \ldots, \varrho_{\varkappa,l}$ з попередніми функціями u_q, v_q і $\varrho_{1,q}, \ldots, \varrho_{\varkappa,q}$, де $q \leqslant l-1$. Ці співвідношення разом з (2.20) і (2.31) утворюють крайові задачі відносно u_l, v_l і $\varrho_{1,l}, \ldots, \varrho_{\varkappa,l}$. Вони мають єдиний розв'язок згідно умовами 2.5 і 2.6.

Випишемо ці крайові задачі спочатку у випадку $l = 0$. Відмітимо, що $j \leqslant \mu+\varkappa \Leftrightarrow l_0-m_j \geqslant 1$, як наслідок (2.4) та $l_0 = m_{\mu+\varkappa}+1$. Тому, прирівнявши коефіцієнти при ε^0 в лівій і правій частинах кожної рівності (2.39), де $j \leqslant \mu + \varkappa$, отримаємо формулу

$$B_j^{(0)}(D', D_n)u_0(x', x_n)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_{k,0}(x') = g_j(x').$$

Таким чином, функції u_0 і $\varrho_{1,0},\dots,\varrho_{\varkappa,0}$ є розв'язком такої крайової задачі

$$A_{2\mu}^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)=f(x',x_n),\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\,x_n>0, \tag{2.40}$$

$$B_j^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^{(0)}(D')\rho_{k,0}(x')=g_j(x'),\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.41}$$
$$j=1,\dots,\mu+\varkappa.$$

Зробивши тут перетворення Фур'є $F'=F'_{x'\mapsto\xi'}$ за зміними $x_1,\cdots,x_{n-1}$ і, зафіксувавши $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, отримаємо крайову задачу вигляду (2.12), (2.13):

$$A_{2\mu}^{(0)}(\xi',D_n)\widehat{u}_0(\xi',x_n)=\widehat{f}(\xi',x_n),\quad x_n>0,$$
$$B_j^{(0)}(\xi',D_n)\widehat{u}_0(\xi',x_n)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^{(0)}(\xi')\widehat{\rho}_{k,0}(\xi')=\widehat{g}_j(\xi'),$$
$$j=1,\dots,\mu+\varkappa.$$

Тут

$$\widehat{u}_0(\xi',x_n):=(F'u_0(x',x_n))(\xi',x_n),\quad \widehat{f}(\xi',x_n):=(F'f(x',x_n))(\xi',x_n),$$
$$\widehat{\varrho}_{k,0}(\xi'):=(F'\varrho_{k,0}(x'))(\xi'),\quad \widehat{g}_j(\xi'):=(F'g_j(x'))(\xi').$$

Ця крайова задача однозначно розв'язна тоді і лише тоді, коли виконується умова 2.5. Отже ця умова необхідна і достатня для того, щоб можна було знайти функції u_0 і $\varrho_{1,0},\dots,\varrho_{\varkappa,0}$.

Припустимо, що умова 2.5 виконується і ці функції знайдено. Випишемо крайову задачу відносно v_0. Нагадаємо, що вона задовольняє диференціальне рівняння (2.31a). Випишемо для нього крайові умови, скориставшись рештою рівностей (2.39).

Покладемо

$$\nu:=\max\{j\in\mathbb{N},\,\mu+\varkappa+1\leqslant j\leqslant m+\varkappa,\,m_j=m_{\mu+\varkappa+1}\}.$$

Відмітимо, що коли

$$\mu+\varkappa+1\leqslant j\leqslant\nu\quad\Leftrightarrow\quad l_0-m_j=0,$$

і

$$\nu+1\leqslant j\leqslant\mu+\varkappa\quad\Leftrightarrow\quad l_0-m_j\leqslant-1.$$

Прирівнявши коефіцієнти при ε^0 у лівій і правій частинах кожної рівності (2.39), де $\mu+\varkappa+1 \leqslant j \leqslant \nu$, отримаємо формулу

$$B_j^{(0)}(0,D_n)v_0(x',x_n)|_{x_n=0} = g_j(x') -$$
$$-B_j^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)|_{x_n=0} - \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,0}(x').$$

Тут і далі враховуємо (2.36).

Окрім того, прирівнявши у рівності (2.39), де $j \geqslant \nu+1$, коефіцієгнти при $\varepsilon^{l_0-m_j}$ до нуля, отримуємо формулу

$$B_j^{(0)}(0,D_n)v_0(x',x_n)|_{x_n=0} = 0.$$

Таким чином, функція v_0 є розв'язком такої крайової задачі

$$A^{(0)}(0,D_n;1)v_0(x',x_n) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0, \tag{2.42}$$
$$B_j^{(0)}(0,D_n)v_0(x',x_n)|_{x_n=0} = g_j(x') - B_j^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)|_{x_n=0} - \tag{2.43}$$
$$-\sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,0}(x'), \quad j = \mu+\varkappa+1,\dots,\nu,$$
$$B_j^{(0)}(0,D_n)v_0(x',x_n)|_{x_n=0} = 0, \quad j = \nu+1,\dots,m+\varkappa.$$

Ця крайова задача однозв'язно розв'язна тоді і лише тоді, коли виконується умова 2.6.

Припускаємо, що виконуються умови 2.5 і 2.6. Нехай $l \in \mathbb{N}$ і відомі функції u_q, v_q і $\varrho_{1,q},\dots,\varrho_{\varkappa,q}$ для усіх невід'ємних цілих $q \leqslant l-1$. Тоді наступні функції u_l і $\varrho_{1,l},\dots,\varrho_{\varkappa,l}$ є розв'язками крайових задач вигляду (2.40), (2.41), а функція v_l є розв'язком крайової задачі вигляду (2.42), (2.43). Ці задачі однозв'язно розв'язні згідно умов 2.5 і 2.6. Отже, можна знайти формальний розв'язок задачі (2.21), (2.22). Випишемо ці крайові задачі.

Нагадаємо, що $j \leqslant \mu+\varkappa \Leftrightarrow l_0 - m_j \geqslant 1$. Прирівнявши коефіцієнти при ε^l у лівій і правій частині кожної рівності (2.39), де $j \leqslant \mu+\varkappa$, отримаємо такі крайові умови для невідомих функцій u_l і $\varrho_{1,l},\dots,\varrho_{\varkappa,l}$:

$$B_j^{(0)}(D',D_n)u_l(x',x_n)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_{k,l}(x') = \tag{2.44}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, якщо } 1 \leqslant l \leqslant l_0 - m_j - 1, \\ -\sum\limits_{s=0}^{l-l_0+m_j} B_{j,s}(D) v_{l-l_0+m_j-s}(x', x_n)|_{x_n=0} & \text{, якщо } l \geqslant l_0 - m_j, \end{cases}$$

де $j = 1, \ldots, \mu + \varkappa$.

Пояснимо їх. У формулі (2.39) показник $q + l_0 - m_j = l$ для деякого цілого $q \geqslant 0$ тоді і лише тоді, коли $l \geqslant l_0 - m_j$. Тому вона містить вираз

$$\varepsilon^l \sum_{s=0}^{q} B_{j,s}(D', D_n) v_{q-s}(x', x_n)|_{x_n=0}$$

тоді і лише тоді, коли $l \geqslant l_0 - m_j$, при цьому $q = l - l_0 + m_j$. Це і зумовлює праву частину формули (2.44). Зауважимо, що у ній $l - l_0 + m_j - s \geqslant l - 1$ для кожного цілого $s \geqslant 0$, оскільки $l_0 - m_j \geqslant 1$ для вказаних значень j. Отже, права частина формули визначена за вже знайденими функціями $v_0, \ldots, v_{l-1}$.

Таки чином, функції u_l і $\varrho_{1,l}, \ldots, \varrho_{\varkappa,l}$ є розв'язками крайової задачі (2.20а), (2.20б) і (2.44).

Випишемо тепер краойові умови для невідомих функцій v_l. Сокристаємося спочатку крайовими умовами (2.75) у випадку, коли $\mu + \varkappa + 1 \leqslant j \leqslant \nu$. Тоді $l_0 - m_j = 0$. Прирівнявши коефіцієнти при ε^l у лівій і правій частині кожної рівності (2.39), де $\mu + \varkappa + 1 \leqslant j \leqslant \nu$, запишемо

$$B_j^{(0)}(D', D_n) u_l(x', x_n)|_{x_n=0} + \sum_{s=0}^{l} B_{j,s}(D', D_n) v_{l-s}(x', x_n)|_{x_n=0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D') \varrho_{k,l}(x') = 0,$$

Звідси з урахуванням (2.36), маємо

$$B_j^{(0)}(0, D_n) v_l(x', x_n)|_{x_n=0} = -B_j^{(0)}(D', D_n) u_l(x', x_n)|_{x_n=0} - \tag{2.45}$$
$$- \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}^{(0)}(D') \varrho_{k,l}(x') - \sum_{s=1}^{l} B_{j,s}(D) v_{l-s}(x', x_n)|_{x_n=0}.$$

Далі скористаємося крайовими умовами (2.39) у випадку, коли $j \geq \nu + 1$. Тоді $l_0 - m_j \leqslant -1$. Прирівнявши коефіцієнти при $\varepsilon^{l-m_j+l_0}$ у лівій і правій частині кожної рівності (2.39), отримаємо такі формули:

$$\sum_{s=0}^{l} B_{j,s}(D', D_n) v_{l-s}(x', x_n)|_{x_n=0} = 0 \quad \text{у випадку} \quad l_0 - m_j + l \leqslant -1,$$

$$B_j^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,0}(x')+$$

$$+\sum_{s=1}^{l}B_{j,s}(D',D_n)v_{l-s}(x',x_n)|_{x_n=0}=g_j(x)\quad \text{у випадку}\quad l_0-m_j+l=0,$$

$$B_j^{(0)}(D',D_n)u_{l_0-m_j+l}(x',x_n)|_{x_n=0}+\sum_{s=0}^{l}B_{j,s}(D',D_n)v_{l-s}(x',x_n)|_{x_n=0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\varkappa}+C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,l_0-m_j+l}(x')=0\quad \text{у випадку}\quad l_0-m_j+l\geqslant 1.$$

Звідси з уразуванням (2.36) маємо крайові умови

$$B_j^{(0)}(0,D_n)v_l(x',x_n)|_{x_n=0}= \tag{2.46}$$

$$=\begin{cases} -\sum\limits_{s=1}^{l}B_{j,s}(D',D_n)v_{l-s}(x',x_n)|_{x_n=0}, & \text{якщо } l_0-m_j+l\leqslant -1,\\[2ex] g_j(x)-B_j^{(0)}(D',D_n)u_0(x',x_n)|_{x_n=0}-\sum\limits_{k=1}^{\varkappa}C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,0}(x')- & \\ -\sum\limits_{s=1}^{l}B_{j,s}(D',D_n)v_{l-s}(x',x_n)|_{x_n=0}, & \text{якщо } l_0-m_j+l=0,\\[2ex] -B_j^{(0)}(D',D_n)u_{l_0-m_j+l}(x',x_n)|_{x_n=0}-\sum\limits_{k=1}^{\varkappa}C_{jk}^{(0)}(D')\varrho_{k,l_0-m_j+l}(x')- & \\ -\sum\limits_{s=1}^{l}B_{j,s}(D',D_n)v_{l-s}(x',x_n)|_{x_n=0}, & \text{якщо } l_0-m_j+l\geqslant 1, \end{cases}$$

де $j=\nu+1,\ldots,m+\varkappa$.

Праві частини цих умов визначені за вже відомими функціями u_q і v_q і $\varrho_{1,q},\ldots,\varrho_{\varkappa,q}$ де $q\leqslant l$, де $q\leqslant l-1$. Нагадаємо, що $l_0-m_j\leqslant -1$ в (2.46).

Таким чином шукана функція v_l є розв'язком крайової задачі (2.31б), (2.45), (2.46).

2.4. Приклад.

Розглянемо приклад еліптичної з малим параметром краайової задачі, яка містить додаткові невідомі функції у крайових умовах:

$$\varepsilon^2\Delta^2 u - \Delta u = f, \quad x \in G, \tag{2.47}$$

$$u - \Delta'\varrho = g_1, \quad D_\nu u = g_2, \quad D_\nu^2 u = g_3, \quad x \in \partial G. \tag{2.48}$$

Відмітимо, що рівняння (2.47) в двовимірній області G є рівнянням прогину тонкої пластини G (див. [38]). Тут, як звичайно, $\Delta = -(D_1^2 + \ldots + D_n^2)$ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$, Δ' – оператор Бельтрами - Лапласа на ∂G, а $D_\nu = -i\partial/\partial\nu$. Ця крайова задача окрім невідомої функції $u(x)$, $x \in \overline{G}$ містить одну невідому функцію $\varrho(x)$, $x \in \partial G$, у крайових умовах (2.48). Відповідно до позначень використаних у п. 2.1 маємо:

$$A(x, D, \varepsilon) = \varepsilon^2\Delta^2 - \Delta, \quad A_{2m}(x, D) = \Delta^2, \quad A_{2\mu}(x, D) = -\Delta,$$
$$B_1(x, D) = 1, \quad B_2(x, D) = D_\nu, \quad B_3(x, D) = D_\nu^2, \quad C_{11}(x', D') = -\Delta,$$
$$m = 2, \quad \mu = 1, \quad \varkappa = 1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2, \quad \alpha_1 = 2.$$

Перевіримо, що крайова задача задовольняє означенню 2.1.

Для перевірки виконання умов 2.1 – 2.2 випишемо головний символ оператора $A^{(0)}(x; D; \varepsilon)$:

$$A^{(0)}(x; \xi; \varepsilon) := \varepsilon^2|\xi|^4 + |\xi|^2 = |\xi|^2(1 + \varepsilon^2|\xi|^2).$$

Звісно, він задовольняє умову 2.1 .

Для перевірки виконання умов 2.2 знайдемо корені рівнянь $A^{(0)}(\xi', \tau; \varepsilon) = 0$ та $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', \tau) = 0$ відповідно.

Рівняння

$$A^{(0)}(\xi', \tau; \varepsilon) := (|\xi'|^2 + \tau^2)(1 + \varepsilon^2(|\xi'|^2 + \tau^2)) = 0$$

має корені $\tau_{1,2} = \pm i|\xi'|, \quad \tau_{3,4} = \pm i\sqrt{1/\varepsilon^2 + |\xi'|^2}$.

Рівняння

$$A_{2\mu}^{(0)}(\xi', \tau) := |\xi'|^2 + \tau^2 = 0$$

має корені $\tau_{1,2} = \pm i|\xi'|$.

Отже, і умова 2.2 виконується.

Для перевірки викоання умов 2.3 – 2.6 запишемо крайовий символ розглянутої задачі. Згідно з формулами (2.9), (2.10) він набирає вигляду

$$\begin{gathered}\varepsilon^2(|\xi'|^2+D_t^2)^2v(t)+(|\xi'|^2+D_t^2)v(t)=0,\quad t>0;\\ v(0)+|\xi'|^2\sigma=h_1,\\ D_tv(0)=h_2,\\ D_t^2v(0)=h_3.\end{gathered}$$

Цей символ не залежить від $x\in\partial G$.

Умова 2.3 еквівалентна тому, що крайова задача

$$\varepsilon^2(|\xi'|^2+D_t^2)^2v(t)+(|\xi'|^2+D_t^2)v(t)=0,\quad t>0; \tag{2.49}$$

$$v(0)+|\xi'|^2\sigma=0, \tag{2.50}$$

$$D_tv(0)=0, \tag{2.51}$$

$$D_t^2v(0)=0, \tag{2.52}$$

$$v(t)\to 0\quad \text{при}\quad t\to+\infty. \tag{2.53}$$

має лише тривіальний розв'язок для кожних $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ та $\varepsilon>0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.49), який задовольняє умови (2.53), записується у вигляді

$$v(t)=c_1\exp\left(-|\xi'|t\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{1/\varepsilon^2+|\xi'|^2}t\right),$$

де c_1,c_2 – довільні комплексні числа.

Підставивши цей розв'язок в умови (2.51), (2.52) отримаємо, що $c_1=c_2=0$. Тому $v(t)\equiv 0$, що тягне $\sigma=0$ на підставі умови (2.50). Отже, умова 2.3 виконується.

Умова 2.4 еквівалентна тому, що крайоваа задача

$$(|\xi'|^2+D_t^2)^2v(t)=0,\quad t>0; \tag{2.54}$$

$$v(0)+|\xi'|^2\sigma=0, \tag{2.55}$$

$$D_tv(0)=0, \tag{2.56}$$

$$D_t^2v(0)=0, \tag{2.57}$$

$$v(t)\to 0\quad \text{при}\quad t\to+\infty, \tag{2.58}$$

має лише тривіальний розв'язок для кожного $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.54), який задовольняє умови (2.58), записується у вигляді

$$v(t) = c_1 \exp(-|\xi'|t) + c_2 t \exp(-|\xi'|t),$$

де c_1,c_2 – довільні комплексні числа.

Підставивши цей розв'язок в умови (2.56), (2.57) маємо, що $c_1 = c_2 = 0$, і тому $v(t) \equiv 0$. Тепер з умови (2.55) випливає, що і $\varrho = 0$. Отже, умова 2.4 виконується.

Умова 2.5 рівносильна тому, що наступна крайова задача

$$(|\xi'|^2 + D_t^2)v(t) = 0, \quad t > 0; \tag{2.59}$$

$$v(0) + |\xi'|^2\sigma = 0, \tag{2.60}$$

$$D_t v(0) = 0, \tag{2.61}$$

$$v(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{2.62}$$

мала лише тривіальний розв'язок.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.59), який задовольняє умови (2.62), записується у вигляді $v(t) = c \exp(-|\xi'|t)$, де c – довільне комплексне число.

Підставивши його в умову (2.61), отримаємо що $c = 0$, і тому $v(t) \equiv 0$. Тепер з умови (2.60) випливає, що і $\varrho = 0$. Отже, умова 2.5 виконується.

Остання умова 2.6 рівносильному тому, що крайова задача

$$D_t^4 v(t) + D_t^2 v(t) = 0, \quad t > 0; \tag{2.63}$$

$$D_t^2 v(0) = 0, \tag{2.64}$$

$$v(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{2.65}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Заміна $z(t) = D_t^2 v(t)$ зводить задачу (2.63), (2.65) до такої задачі

$$D_t^2 z(t) + z(t) = 0, \quad t > 0; \tag{2.66}$$

$$z(0) = 0. \tag{2.67}$$

Загальний розв'язок крайової задачі (2.66), (2.67) записується у вигляді

$$z(t) = c(\exp(-t) - \exp(t)),$$

де c – довільне комплексне число. Тому $v(t) = c(\exp(-t) - \exp(t)) + c_1 t + c_2$. Враховуючи умову (2.65), отримаємо, що що $c = c_1 = c_2 = 0$, і тому $v(t) \equiv 0$. Отже, остання умова 2.6 виконується.

Таким чином, крайова задача (2.47), (2.48) задовольняє означення 2.1.

2.5. Функциональні простори, залежні від малого параметра

Крайову задачу (2.1), (2.2) дослідимо у просторах Соболєва, норма у яких залежить певним чином від параметра ε. Їх розглядали і застосовували до диференціальних рівняннь з малим парамтером А. С. Дємідов [13, 14], Л. Франк [77], С. Л. Назаров [84], Л. Р. Волєвича [11] та інші.

Нагадаємо означення цих просторів та їх властивості, потрівбі у роботі. Будемо слідувати в основному роботі Л. Р. Волєвича [11].

Спочатку означимо функціональні простори на $\mathbb{R}^n$.

Як звичайно, позначимо через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ комплексний лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$. При цьому всі розподіли і функції вважаємо *комплексно*значними.

Нехай $r \in \mathbb{R}$. Через $H^r = H^r(\mathbb{R}^n)$ позначимо гільбертів простір Соболєва порядку r. Нагадаємо, що він складається з усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що

$$||u; H^r(\mathbb{R}^n)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < +\infty,$$

де через $\widetilde{u}(\xi)$ позначено повне перетворення Фурьє функції $u(x)$. Якщо $r = 0$, то $H^0(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів простір $L_2(\mathbb{R}^n)$ усіх функцій u, інтегрованих з квадратом на $\mathbb{R}^n$.

Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geq s$, $s \geq 0$ і $\varepsilon > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s (1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \qquad (2.68)$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

Для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ норма (2.68) еквівалентна соболевський нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$. Тому простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ повний. Відмітимо, що $H^{r,r}(\mathbb{R}^n, \varepsilon) = H^r(\mathbb{R}^n)$ з рівності норм.

З властивостей соболєвських просторів випливає неперервне і щільне вкладення

$$H^{r_2,\,s_2}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\hookrightarrow H^{r_1,\,s_1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon),\quad \text{якщо}\quad 0\leqslant r_1\leqslant r_2. \tag{2.69}$$

тут дійсні числа r_1, s_1 і r_2, s_2 такі, що $r_1\geqslant s_1\geqslant 0$ і $r_2\geqslant s_2\geqslant 0$.

Більш того, правильне таке уточнення цієї властивості (див., наприклад, [11, с.126]).

Твердження 2.1. *Нехай дійсні числа r_1, s_1 і r_2, s_2 такі, що $r_1\geqslant s_1\geqslant 0$, $r_2\geqslant s_2\geqslant 0$ і $r_1\leqslant r_2$, $s_1\leqslant s_2$. Тоді існує число $C>0$ таке, що для довільних $\varepsilon\in(0;1]$ і $u\in H^{r_2,s_2}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ виконується нерівність*

$$||u;H^{r_1,s_1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||\leqslant C||u;H^{r_2,s_2}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||.$$

Для зручності формулювання наступних властивостей простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ корисно ввести таку термінологію. Нехай на лінійному просторі E введено дві норми $\|\cdot\|'_\varepsilon$ і $\|\cdot\|''_\varepsilon$, залежні, від параметра $\varepsilon\in M$, де M – деяка множина. Будемо говорити, що ці норми *еквівалентні* рівномірно за параметром $\varepsilon\in M$, якщо існують додатні числа C_1 і C_2 такі, що

$$C_1\|u\|'_\varepsilon\leqslant\|u\|''_\varepsilon\leqslant C_2\|u\|'_\varepsilon\quad\text{для усіх}\quad u\in E,\quad \varepsilon\in M.$$

Підкреслимо, що у цій оцінці числа C_1 і C_2 повинні не залежати як від ε, так і від u.

У наступних двох твердженнях йде мова про норми, рівномірно еквіваленті за параметром $\varepsilon\in[0;1]$ до норми (2.68). Ці твердження обгрунтовано, наприклад, у [11, сс.127, 128].

Твердження 2.2. *Нехай дійсні числа r і s такі, що $r\geqslant s\geqslant 0$. Тоді норми* (2.68) *і*

$$||u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||':=||u;L_2(\mathbb{R}^n)||+ \tag{2.70}$$
$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\varepsilon\in(0;1]$.

Нехай $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Розглянемо таку функцію аргументу $t \geqslant 0$:

$$\Xi_{\theta,\sigma}(t;\varepsilon) = \begin{cases} t^{\sigma}(1+\varepsilon^2 t^2)^{(\theta-\sigma)/2}, & \text{якщо} \quad \sigma \geq 0\,, \\ \varepsilon^{-\sigma}(1+\varepsilon^2 t^2)^{\theta/2}, & \text{якщо} \quad \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{2.71}$$

Твердження 2.3. *Нехай цілі числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норми (2.68) і*

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)||'' := ||u; L_2(\mathbb{R}^n)|| +$$

$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\varepsilon) |D_n^{\ell} \widehat{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' dx_n \right)^{1/2}$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0;1]$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$. Як і раніше, $r \geqslant s$ і $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що (2.68) є еквівалнетною нормою у $H^r(\mathbb{R}^n)$ і у цьому випадку зберігає сенс і у цьому випадку, але нам, потрібен інший, більш вузький ніж $H^r(\mathbb{R}^n)$ простір розподілів, введений С. А. Назаровим [38].

За означенням, простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів

$$u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{\theta \in R} H^{\theta}(\mathbb{R}^n)$$

таких, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Позначимо тепер через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$${}'||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{2.72}$$

Звісно, кожна з норм (2.72) еквівалентна нормі $||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, 1)||$. Лінійний нормований простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ є повним. Це випливає з того, що відображення

$$u \longmapsto |\cdot|^{2s}(1+|\cdot|^2)^{(r-s)/2}\widetilde{u}, \quad \text{де} \quad u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n),$$

здійснює ізоморфізм простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, 1)$ на гільбертів простір $L_2(\mathbb{R}^n)$. Відмітимо також, що виконується неперервне вкладення $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$.

Простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ для цілих $s<0$ допускає такий опис (див. [11 с.131, твердження 3.4]):

Твердження 2.4. *Нехай $r\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{Z}$, $s<0$ і дійсне $\varepsilon>0$. Розподіл $u\in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ належить до $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ тоді і лише тоді, коли*

$$u=\sum_{|\beta|=-s} D^\beta u_\beta, \quad \text{де кожне} \quad u_\beta\in H^{r-s}(\mathbb{R}^n). \tag{2.73}$$

При цьому норми (2.72) *і*

$$||u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||^*:=\inf\sum_\beta ||u_\beta;H^{r-s,0}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||,$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\varepsilon\in(0;1]$. Тут нижня грань береться за усіма функціями u_β з $|\beta|=-s$, для яких виконується (2.73).

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$. Нехай дійсні числа r,s і ε такі, що $r\geqslant s$ і $\varepsilon>0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega,\varepsilon)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ у такий стандартний спосіб (див., наприклад [90]).

Покладемо

$$H^{r,s}(\Omega,\varepsilon):=\{w\restriction\Omega: w\in H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\},$$
$$\|u;H^{r,s}(\Omega,\varepsilon)\|=\inf\{\|w;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\|: w\in H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon), w\restriction\Omega=u\}, \tag{2.74}$$

де $\in H^{r,s}(\Omega,\varepsilon)$. Тут, як звичайно, $w\restriction\Omega$ – звуження розподілу $w\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ на Ω. Відмітимо, що $H^{r,r}(\Omega,\varepsilon)$ є гільбертів простір Соболєва $H^r(\Omega)$ порядку r на Ω.

З наведеного означення випливає, що властивості протрів $H^{r,s}(\Omega,\varepsilon)$ і $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ подібні. Так лінійний простір $H^{r,s}(\Omega,\varepsilon)$ не залежить від $\varepsilon>0$, а норма у ньому еквіналнетна нормі в $H^{r,s}(\Omega,1)$. Нормовані простори $H^{r,s}(\Omega)$ і $H^r(\Omega)$ при $s\geqslant 0$ рівні з точністю до еквівалентності норм, а при $s<0$ простори мають строге неперевне вкладання $H^{r,s}(\Omega)\hookrightarrow H^r(\Omega)$. Окрім того, є правильним

Твердження 2.5. *Непервне щільне вкладення* (2.69) *і твердження 2.1 залишаються правильними, якщо у них замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω.*

На підставі твердженнь 2.2 маємо таку властивість (див. [11, с. 128] у випадку $\Omega=\mathbb{R}^n_+$)

Твердження 2.6. *Нехай дійсні числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норми* (2.74) *і*

$$||u; H^{r,s}(\Omega, \varepsilon)||' := \inf\{\|w; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)\|' : w \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon), w \restriction \Omega = u\},$$

еквівалнетні рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$.

У дисертації потрібні простори $H^{r,s}(\Omega, \varepsilon)$ у випадках $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ і $\Omega = G$. Обговоримо детальніше властивості простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$.

Для простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$ правильний такий аналог твердження 2.11 (див.[11, твердження 3.2])

Твердження 2.7. *Нехай цілі числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норми* (2.74) *і*

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)||'' := ||u; L_2(\mathbb{R}^n_+)||+$$
$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^\infty \sum_{\ell=0}^r \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|; \varepsilon)|D_n^\ell \widehat{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' dx_n\right)^{1/2} \tag{2.75}$$

еквівалнетні рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$.

Окрім норми (2.75) знадобиться ще одна еквівалентна їй норма. Позначимо через $\sqrt{1 + \varepsilon^2 |D'|^2}$, де число $\varepsilon > 0$, дотичний псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом $\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi'|^2}$ аргументу $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Також позначимо через $|D'|$ дотичний ПДО з символом ξ' аргументу $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ці оператори діють за формулами

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 |D'|^2}\, w = F^{-1}\left[\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\xi'|^2}\, \widetilde{w}(\xi', \xi_n)\right], \quad \textbf{де} \quad w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^\backslash),$$
$$|D'|\, w = F^{-1}\left[|\xi'|\, \widetilde{w}(\xi', \xi_n)\right], \quad \textbf{де} \quad w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Тут F^{-1} – обернене перетворення Фурє за усіма змінними.

Нехай дійсні числа r і s такі, що $r \geqslant s$. Для довільного $u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$ покладемо

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)||^\sharp = \tag{2.76}$$
$$= \begin{cases} ||R(D_n - i\sqrt{1 + |D'|^2})^s (\varepsilon D_n - i\sqrt{1 + \varepsilon^2 |D'|^2})^{r-s} lu; L_2(\mathbb{R}^n_+)||, & \text{якщо } s \geqslant 0 \\ ||R(D_n - i|D'|)^s (\varepsilon D_n - i\sqrt{1 + \varepsilon^2 |D'|^2})^{r-s} lu; L_2(\mathbb{R}^n_+)||, & \text{якщо } s < 0. \end{cases}$$

Тут lu – довільний розподіл з $H^r(\mathbb{R}^n)$ такий, що $lu = u$ на $\mathbb{R}^n_+$, а R – оператор звуження розподілу з $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_+$. Звісно, (2.76) є нормою на лінійному просторі $H^{r,s}(\Omega)$. Права частина рівності не залежить від вказаного вибору розподілу lu.

Твердження 2.8. *Нехай дійсні числа r і s такі, що $r \geqslant s$. Тоді норми* (2.76) *і* (2.74) *еквівалнетні рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0;1]$.*

Доведення цього результату наведено, наприклад, в роботі Волевіча [11].

Зауваження 2.5. Нехай цілі числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норма (2.76) еквівалентна рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0;1]$ такій нормі

$$\begin{gathered} ||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)||^\star = ||u; L_2(\mathbb{R}^n_+)||+ \\ +||R(D_n - i|D'|)^s(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|D'|^2})^{r-s} lu; L_2(\mathbb{R}^n_+)|| = \\ = ||u; L_2(\mathbb{R}^n_+)||+ \\ + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^s(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-s}\widehat{u}(\xi', x_n)|^2 dx_n d\xi' \right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{2.77}$$

Справді, на функціях $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ маємо еквівалентність

$$\begin{gathered} \|w; H^s(\mathbb{R}^n)\| = \|(D_n - i\sqrt{1+|D'|^2})^s w; L_2(\mathbb{R}^n)\| \asymp \\ \asymp \|(D_n - i|D'|)^s w; L_2(\mathbb{R}^n)\| + ||u; L_2(\mathbb{R}^n)||, \end{gathered}$$

що безпосердньо перевіряєтьс. Узявши у цій формулі

$$w := (\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|D'|^2})^{r-s} Eu,$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n_+)$, а $E : H^r(\mathbb{R}^n_+) \to H^r(\mathbb{R}^n)$ – оператор Хестенса продовження функції з $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$, отримаємо еквівалентність норми (2.76) і (2.77) (див. [11, с.129]).

Покладемо

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n_+) := \{w \upharpoonright \mathbb{R}^n_+ : w \in H^\infty(\mathbb{R}^n)\} = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} H^\theta(\mathbb{R}^n_+).$$

Для просторів $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$, де $s < 0$, правильний такий аналог твердження 2.4 (див., наприклад [11, с.132]). Для цього простору має місце

Твердження 2.9. *Нехай $r \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}$, $s < 0$ і дійсне $\varepsilon > 0$ Розподіл $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ належить до $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ тоді і лише тоді, коли*

$$u = \sum_{|\beta|=-s} D^\beta u_\beta, \quad \textit{де кожне} \quad u_\beta \in H^{r-s,0}. \tag{2.78}$$

При цьому норми (2.74) *і*

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)||^* := \inf \sum_\beta ||u_\beta; H^{r-s,0}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)||,$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$. Тут нижня грань береться за усіма функціями u_β з $|\beta| = -s$, для яких виконується (2.78).

Обговоримо тепер питання про сліди функцій з просторів $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ і $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$ на гіперплощині $x_n = 0$, яку ототожнимо з простором $\mathbb{R}^{n-1}$.

Простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ і різні еквівалентні норми у ньому означені вище для усіх припустимих значень параметрів r, s і ε, якщо замінити у цих означеннях $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ неперевно вкладений у соболевський простор $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r > 0$, то при $r > \ell + 1/2$ означений оператор сліду

$$\mathcal{T}_\ell : u \longmapsto (D^\ell_n u) \restriction \mathbb{R}^{n-1} = D^\ell_n u(\cdot, 0), \quad \text{де} \quad u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n).$$

Тут ціле $l \geqslant 0$.

Введемо банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$, де $\theta \geqslant 0$ і $\theta \geqslant \sigma$ такі, що норми оператора сліду

$$\mathcal{T}_\ell : H^{r,s}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{H}^{r-l-1/2, s-l-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$$

будуть рівномірно обмеженими за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$.

Нехай дійсні числа θ, σ і ε задовольняють умови $\theta \geqslant \sigma$ і $\varepsilon > 0$. У випадку $\sigma \geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ соболевський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| := ||h, H^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)||' =$$

$$= ||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2\sigma} (1 + \varepsilon^2 |\xi'|^2)^{\theta-\sigma} |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi \right)^{1/2} = \tag{2.79}$$

$$= ||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Xi^2_{\theta,\sigma}(|\xi'|;\varepsilon)|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2},$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$ (див. формулу (2.70)).

У випадку $\sigma < 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ соболевський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| := \varepsilon^{-\sigma}||h, H^{\theta,0}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| = \tag{2.80}$$

$$= \varepsilon^{-\sigma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + \varepsilon^2|\xi'|^2)^\theta |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Xi^2_{\theta,\sigma}(|\xi'|;\varepsilon)|\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2},$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$. Отже, норма в просторі $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$, враховуючи (2.79) і (2.80), визначається наступним чином

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| :=$$

$$= \begin{cases} ||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + ||\Xi_{\theta,\sigma}(|D'|;\varepsilon)h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})||, & \text{якщо} \quad \sigma \geqslant 0 \\ ||\Xi_{\theta,\sigma}(|D'|;\varepsilon)h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})||, & \text{якщо} \quad \sigma < 0. \end{cases}$$

Правильне таке твердження

Твердження 2.10. *Нехай дійсні числа r, s і натуральне ℓ такі, що $r \geqslant s$, $r > \ell + 1/2$, $s \neq \ell + 1/2$. Тоді існує число $C > 0$ таке, що для довільних $u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ і $\varepsilon \in (0; 1]$ правильна нерівність*

$$||\mathcal{T}_\ell u; \mathcal{H}^{r-\ell-1/2, s-\ell-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| \leqslant C||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)||.$$

Це твердження залишається правильним, якщо у ньому замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_+$. Доведення твердження 2.10 наведено в [11, сс.130, 133]

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$ у стандарний спосіб (див., наприклад [91]).

Нехай дійсні числа θ, σ і ε такі, що $\theta \geq \sigma$ і $\varepsilon > 0$. Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на C^∞ - многовиді ∂G, які у локальних координатах належать до $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)$. Перейдемо до детального означення.

Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді ∂G, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут відкриті множини $U_1, \ldots, U_p$ складають покриття многовиду ∂G. Також виберемо довільним чином функції $\chi_j \in C^\infty(\partial G)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на ∂G, підпорядковане умові $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_j$.

За означенням, простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ складається з усіх розподілів h на ∂G таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1, \ldots, p\}$. Норма у $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ означена за формулою

$$\|h; \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)\| = \sum_{j=1}^{p} \|(\chi_j h) \circ \pi_j; \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)\|$$

Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ позначає зображення розподілу h у локальній карті π_j.

Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці. Звісно, ця еквівалнетність є рівномірною за параметром $\varepsilon \in (0; 1]$.

Відмітимо, що $\mathcal{H}^{\theta,\theta}(\partial G, \varepsilon)$ – це соболєвський простір $H^\theta(\partial G)$ порядку θ на ∂G з нормою, породженою у просторі $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$. Лінійні протори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G, \varepsilon)$ і $H^\theta(\partial G)$ рівні, а норми у них, еквавалентні, причому не рівномірно за $\varepsilon \in (0; 1]$), якщо $\sigma \neq 0$.

2.6. Основні результати

Основні результати другого розділу стосуються апріорної оцінки розв'яків кройової задачі (2.1), (2.2). Перед тим, як сформулювати ці результати, обговоримо деяки питання пов'язані з оцінками розв'язків.

Для кожного числа $\varepsilon \geqslant 0$ пов'яжемо із цією задачею лінійне відображення

$$\mathcal{A}_\varepsilon : (u(\cdot;\varepsilon), \varrho_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\varepsilon)) \longrightarrow (f(\cdot;\varepsilon), g_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, g_{m+\varkappa}(\cdot;\varepsilon)), \tag{2.81}$$
$$\text{де} \quad u(\cdot;\varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{і} \quad \varrho_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\varepsilon) \in C^\infty(\partial G).$$

Відмітимо, що постановка задачі (2.1), (2.2) має сенс і при $\varepsilon = 0$.

Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r > m_{m+\varkappa} + \frac{1}{2}. \tag{2.82}$$

З другої нерівності випливає, що відображення (2.81) продовжується єдиним чином (за неперевністю) до обмеженого оператора у соболевських просторах

$$\mathcal{A}_\varepsilon : H^r(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G) \to H^{r-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G) \tag{2.83}$$

Зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ відображення (2.83) продовжується також за неперевністю до обмеженого оператора

$$\mathbb{A}_0 : H^r(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G) \to H^{r-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G). \tag{2.84}$$

Порівнюючи формули (2.83) і (2.84) при $\varepsilon = 0$, зазначимо, що простір $H^{r-2\mu}(G)$ неперевно вкладений у $H^{r-2m}(G)$.

З постановки крайової задачі (2.1), (2.2) випливає, що $\|\mathcal{A}_\varepsilon\|$ є неперевною функцією функцією аргументу $\varepsilon \geqslant 0$, де $\|\cdot\|$ – норма оператора у парі просторів (2.83). Тоді

$$c := \max\{\|\mathcal{A}_\varepsilon\| : \varepsilon \in [0;1]\} < \infty.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon \in [0;1]$ виконується оцінка

$$||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m}(G)|| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot;\varepsilon); H^{r-m_j-1/2}(\partial G)|| \leq \tag{2.85}$$
$$\leq c\left(||u(\cdot;\varepsilon); H^r(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G)|| \right).$$

Тут, звісно, $u(\cdot;\varepsilon)$ і усі $\varrho_i(\cdot;\varepsilon)$ – довільні функції з відповідних соболевських просторів, а $f(\cdot;\varepsilon)$ і усі $g_j(\cdot;\varepsilon)$ означені за формулами (2.1), (2.2).

Основна задача другого розділу — показати, що еліптичність з малим парметром крайовох задачі (2.1), (2.2) рівносильна наявності оцінки, оберненої у деякому сенсі до оцінки (2.85), зі сталою не залежною від параметра $\varepsilon \in (0;1]$. При цьому доведеться замінити простори Соболєва на простори, норма в яких залежить від параметра ε, введені у підрозділі 2.5.

Обгрунтуємо необхідність введення параметра ε в ці норми. Припустимо що крайова задача (2.1), (2.2) еліптична за малим параметром. Тоді для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ ця задача є еліптичною за Б.Лавруком [32]. Тому обмежений оператор (2.83) нетерів при $\varepsilon > 0$. Це встановлено в роботах [63, 82, 88]. Зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ рівняння (2.1) є еліптичним диференціальним рівнянням порядку $2\mu < 2m$, тому оператор (2.83) не є нетеровим при $\varepsilon = 0$. Але згідно умови 2.5 лінійне відображення

$$\mathbb{A}_0' : (u(\cdot;0), \varrho_1(\cdot;0), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;0)) \longrightarrow (f(\cdot;0), g_1(\cdot;0), \ldots, g_{\mu+\varkappa}(\cdot;0)),$$
$$\text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{і} \quad \varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa \in C^\infty(\partial G)$$

продовжується за неперевністю до обмеженого і нетерового оператора

$$\mathbb{A}_0' : H^r(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G) \to H^{r-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{\mu+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G). \tag{2.86}$$

З нетеровсті оператора (2.83) при кожному $\varepsilon > 0$ випливає апріорна оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^r(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G)|| \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\Big(||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m}(G)|| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot;\varepsilon); H^{r-m_j-1/2}\partial G)|| + \tag{2.87}$$

$$+||u;L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);L_2(\partial G)||\Big)$$

з деякою сталою $C(\varepsilon) > 0$.

Зауваження 2.6. Порівнюючи в (2.87) норми

$$||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G)|| \quad \text{і} \quad ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);L_2(\partial G)|| \tag{2.88}$$

відмітимо, що $r+\alpha_k-1/2 \geqslant 3/2$ для кожного $k \in \{1,\dots,\varkappa\}$. Справді, на підставі формули (2.82) і зауваження 2.3 маємо:

$$r+\alpha_k-1/2 > m_{m+\varkappa}+\alpha_k \geqslant m_{m+\varkappa}-m_{\mu+\varkappa} \geqslant 1$$

отже $r+\alpha_k-1/2 \geqslant 3/2$, бо $r,\alpha_k \in \mathbb{Z}$. Тому перша норма в (2.88) сильніша за другу

Відмітимо, що $C(\varepsilon)$ не можна вибрати так, щоб $C(\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, якщо існують числа $\varepsilon_0 > 0$ і $C > 0$ такі, що $C(\varepsilon) \leqslant C$ для усіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, то, перейшовши в (2.87) до границі при $\varepsilon \to 0+$, отримаємо нерівність (2.87) для $\varepsilon = 0$ зі сталою $C(0) = C$. Це випливає з того, що оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ прямує до оператора $\mathcal{A}_0$ при $\varepsilon \to 0+$ у нормі обмежених операторів, що діють у парі просторів (2.83). З отриманої нерівності випливає, що оператор (2.83) при $\varepsilon = 0$ має замкнену область значень. Тому, лінійний многовид

$$\mathbb{A}_0'\left(H^{r,s}(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G)\right) \tag{2.89}$$

замкнений у просторі

$$H^{r-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{\mu+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G).$$

Окрім того, цей многовид замкнений і у пространі

$$H^{r-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{\mu+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G),$$

бо оператор (2.86) нетерів. Оскільки другий з цих просторів компактно вкладений у перший, то лінійний многовид (2.89) скінченновимірний, що суперечить нетеровості оператора (2.86).

Таким чином, на відміну від (2.85), у оберненій оцінці (2.87) числа $C(\varepsilon)$ не задовольняють умову $C(\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$. Цим і пояснюється потреба у соболевських просторах, норми у яких залежать від параметра.

Сформулюємо тепер основні результати другого розділу.

Теорема 2.1. *Припустимо, що крайова задача* (2.1), (2.2) *еліптична з малим параметром. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (2.82) *і*

$$m_{\mu+\varkappa} + \frac{1}{2} \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + \frac{1}{2}. \tag{2.90}$$

Тоді існує таке число $C > 0$, що для довільного числа $\varepsilon \in (0;1]$ правильна апріорна оцінка

$$\begin{gathered} ||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)|| \leq \\ \leq C\Big(||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\varepsilon)|| + \\ + ||u; L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); L_2(\partial G)||\Big). \end{gathered} \tag{2.91}$$

Тут функції

$$u(\cdot;\varepsilon) \in H^r(G) \quad \text{і} \quad \varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G), \quad \text{де} \quad k = 1,\dots,\varkappa \tag{2.92}$$

та

$$\begin{gathered} f(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-2m,s-2\mu}(G) \quad \text{і} \\ g_j(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-m_j-1/2}(\partial G), \quad \text{де} \quad j = 1,\dots,m+\varkappa \end{gathered} \tag{2.93}$$

задовольняють крайову задача (2.1), (2.2). *Число C не залежить, як від $\varepsilon \in (0;1]$, так і від функцій* (2.92), (2.93).

Зауваження 2.7. Стосовно нерівності (2.91) і включень (2.92), (2.93) нагадаємо, що правильні такі рівності лінійних просторів: $H^{r,s}(G,\varepsilon) = H^r(G)$ і $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\varepsilon) = H^\theta(\partial G)$ при $\theta \geqslant \sigma > 0$. Відмітимо також, що провильне *строге* неперевне вкладення $H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon) \hookrightarrow H^{r-2m}(G)$ при $s < 2\mu$.

Теорема 2.2. *Нехай $A(x;D;\varepsilon)$ – правильно еліптичний оператор з малим параметром на $\overline{G}$, а натуральні r і s задовольняють умови* (2.82) *і* (2.90).

Припустимо, що існує число $C > 0$*, таке що для довільного* $\varepsilon \in (0; 1]$ *і для довільних функцій* (2.92), (2.93)*, що задовольняють крайову задачу* (2.1), (2.2)*, правильна апріорна оцінка* (2.91)*. Тоді ця крайова задача еліптична з малим параметром.*

Доведення теорем 2.1 і 2.2 буде наведено у підрозділі 2.10. За допомогою методу локализації ("заморожування коефіцієнтів") доведення цих теорем зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$. Ключовим тут є аналог теорем 2.1 і 2.2 модельної задачі у півпросторі $\mathbb{R}^n_+$. Наступні підрозділі 2.7 – 2.9 присвячені цим аналогам. В п. 2.7 будуть розглянуті умови розв'язності крайової задачі на півосі. В п. 2.8 будуть доведені оцінки фундаментальної системи розв'язків модельної задачі. В п. 2.9 будуть доведені відповідні теореми для модельних областей $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^n_+$. В п. 2.10 буде завершено доведення теорем 2.1 і 2.2.

2.7. Умови розв'язності крайової задачі на півосі.

Нагадаємо, що в кожній точці $x_0 \in \partial G$ крайовій задачі (2.1), (2.2) відповідає крайовий символ (2.9), (2.10). Він є крайовою задачею для звичайного диференціального рівняння на півосі зі сталими коефіцієнтами, яка містить додаткові невідомі числові параметри. Мета цього підрозділу — отримати різні еквівалентні умови розв'язності задач цього типу.

Нехай $p \in \mathbb{N}$, а $P(\tau)$ — довільний комплексний поліном порядку $p \leqslant m$, усі корені $\tau_1, \ldots, \tau_p$ якого розташовані в $\mathbb{C}_+$. Нехай також $\xi' \in \mathbb{R}^n$. Позначимо $B_j^{(0)}(D_t) := B_j^{(0)}(\xi', D_t)$, $C_{j,k}^{(0)} := C_{j,k}^{(0)}(\xi')$, де $B_j^{(0)}(\xi', D_t)$ і $C_{j,k}^{(0)}(\xi')$ фігурують в (2.10). Нехай множина $\mathcal{J}$ лежить в $\{1, 2, \ldots, m + \varkappa\}$ і містить точно $p + \varkappa$ елементів. Розглянемо таку крайову задачу на півосі:

$$P(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.94}$$

$$B_j^{(0)}(D_t)v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}\sigma_k = \varphi_j, \quad \text{де} \quad j \in \mathcal{J} \tag{2.95}$$

Тут, звісно, числа φ_j задані, а фунція $v(t)$ аргумента $t \geqslant 0$ і числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ є шуканими.

Нехай γ — кусково гладкий контур, який лежить в півплощині $\mathbb{C}_+$, і охоплює усі корені полінома $P(\tau)$. Запишемо

$$P(\tau) := \sum_{k=0}^{p} a_k \tau^{p-k}$$

і покладемо

$$P_j(\tau) := \sum_{k=0}^{j} a_k \tau^{j-k} \quad \text{для кожного} \quad j \in \{0, 1, \ldots, p\}.$$

Позначимо через $\mathfrak{M}$ лінійний простір розв'язків однорідного диференціального рівняння $P(D_t)v(t) = 0$. Як відомо [1], простір $\mathfrak{M}$ має вимірність p та базис

$$h_r(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{i\tau t} \frac{P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)}\, d\tau, \quad r = 1, \ldots, p. \tag{2.96}$$

Нехай

$$\overline{B}_j(\tau) := \sum_{k=1}^{p} \overline{b}_{j,k} \tau^{k-1}$$

— залишок від ділення полінома $B_j^{(0)}(\tau)$ на $P(\tau)$.

Введемо квадратну матрицу $L = (L_{j,k})_{j,k=1,\dots,p+\varkappa}$, де

$$L_{j,k} := \begin{cases} \overline{b}_{j,k}, & j = 1,\dots,p+\varkappa; \quad k = 1,\dots,p; \\ C^{(0)}_{j,k-p}, & j = 1,\dots,p+\varkappa; \quad k = p+1,\dots,p+\varkappa. \end{cases} \tag{2.97}$$

Таку матрицю будемо називати *матрицей Лопатинського*, для задачі (2.94), (2.95).

Теорема 2.3. *Наступні умови еквівалентні:*

i) Для довільних $\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (2.94), (2.95) *має єдиний розв'язок.*

ii) Матриця Лопатинського L має оберенену.

iii) Знайдутся поліноми $N_l(\tau)$, порядку меньше p, і числа $\sigma_{l,k}$, де $l \in \mathcal{J}$, $k = 1,\dots,\varkappa$ такі, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{B_j^{(0)}(\tau)N_l(\tau)}{P(\tau)}d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}\sigma_{l,k} = \delta_{l,j} \quad \textit{для усіх} \quad l,j \in \mathcal{J}. \tag{2.98}$$

Тут і надалі через $\delta_{j,r}$ позначено символ Кронекера.

Зауваження 2.8. Цей результат відомий, якщо усі $C^{(0)}_{j,k} \equiv 0$, а множина $\mathcal{J}$ мітить точно p чисел (див. наприклад [11, лема 2.1]). Звісно, у цьому випадку відсутні числа $\sigma_{l,k}$ в умові (iii).

Доведення теореми 2.3. Обгрунтуємо спочатку імплікацію (i) $\Rightarrow$ (ii). Припустимо, що виконується умова (i). Покажемо, що для довільних комплексних чисел $\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa}$ лінійне алгебраїчне рівняння

$$Lw = \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa}) \tag{2.99}$$

має розв'язок w. Звідси випливає умова (ii). Виберемо довільним чином числа $\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}$. За умовою ($i$) існує (єдиний) розв'язок v задачі (2.94), (2.95). Тоді він є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} P(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \\ \overline{B}_j(D_t)v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}\sigma_k = \varphi_j, \quad \text{де} \quad j = 1,\dots,p+\varkappa. \end{gathered} \tag{2.100}$$

Використовуючи (2.100), безпосередньо перевіряємо, що вектор

$$w = \operatorname{col}\Big(v(0), (D_t v)(0), \dots, (D_t^{p-1} v)(0), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa\Big)$$

є розв'язком рівняння (2.99). Отже, матриця L оборотна. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ доведена.

Обгрунтуємо обернену імплікацію $(ii) \Rightarrow (i)$. Припустимо, що виконується умова (ii). Виберемо довільним чином комплексні числа $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+\varkappa}$ і побудуємо розв'язок задачі (2.94), (2.95).

Довільний розв'язок диференціального рівняння (2.94), який належить простору $\mathfrak{M}$, записується у вигляді

$$v(t) = \sum_{r=1}^{p} R_r h_r(t), \tag{2.101}$$

де $R_1, \dots, R_p$ — довільні комплексні числа.

Знайдемо $R_1, \dots, R_p$ і $\sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa$, підставивши (2.101) в крайову умову (2.95). Враховуючи (2.96) отримаємо для кожного $j = 1, \dots, p + \varkappa$ таке:

$$B_j^{(0)}(D_t) v(t)|_{t=0} = B_j^{(0)}(D_t) \left(\sum_{r=1}^{p} R_r h_r(t) \right) \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} R_r B_j^{(0)}(D_t) h_r(t)|_{t=0} = \sum_{r=1}^{p} R_r B_j^{(0)}(D_t) \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{i\tau t} \frac{P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)} d\tau \right) \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} R_r \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(B_j^{(0)}(D_t) e^{i\tau t} \right) \Big|_{t=0} \frac{P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)} d\tau =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} R_r \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{B_j^{(0)}(\tau) P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)} d\tau.$$

Отже,

$$B_j^{(0)}(D_t) v(t)|_{t=0} = \sum_{r=1}^{p} R_r \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{B_j^{(0)}(\tau) P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)} d\tau. \tag{2.102}$$

Останній інтеграл не зміниться, якщо у ньому замінити $B_j^{(0)}(\tau)$ на $\overline{B}_j(\tau)$, оскільки функції

$$\frac{B_j^{(0)}(\tau)}{P(\tau)} \quad \text{і} \quad \frac{\overline{B}_j(\tau)}{P(\tau)}$$

відрізняються на деякий многочлен. Відомо [66, частина 1, розділ 1], що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^{k-1}P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)}d\tau=\delta_{k,r},\quad k,r=1\ldots,p.$$

Отже,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{B_j^{(0)}(\tau)P_{p-k}(\tau)}{P(\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\overline{B}_j(\tau)P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)}d\tau=$$
$$=\sum_{k=1}^{p}\overline{b}_{j,k}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\tau^{k-1}P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)}d\tau=\sum_{k=1}^{p}\overline{b}_{j,k}\delta_{k,r}=\overline{b}_{j,r}.$$

Таким чином,

$$B_j^{(0)}(D_t)v(t)|_{t=0}=\sum_{r=1}^{p}R_r\overline{b}_{j,r},\quad j=1,\ldots,p+\varkappa. \tag{2.103}$$

На підставі (2.103) крайові умови (2.95) набирають вигляду:

$$\sum_{r=1}^{p}\overline{b}_{j,r}R_r+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^{(0)}\sigma_k=\varphi_j,\quad j=1,\ldots,p+\varkappa. \tag{2.104}$$

Отримали лінійну систему з $p+\varkappa$ рівнянь відносно невідомих чисел $R_1,\ldots,R_p,\ \sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa$. Матриця L є матрицею коефіцієнтів цієї системи. Тому, за умовою (ii), ця система має єдиний розв'язок. Позначимо через $D:=L^{-1}=(d_{j,i})_{j,i=1,\ldots,p+\varkappa}$ – обернену матирицю до матриці Лопатинського. Тоді

$$\mathrm{col}(R_1,\ldots,R_p,\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa)=G\,\mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{p+\varkappa}),$$

тобто

$$R_j=\sum_{l=1}^{p+\varkappa}d_{j,l}\varphi_l,\quad i=1,\ldots,p,$$
$$\sigma_j=\sum_{l=1}^{p+\varkappa}d_{p+j,l}\varphi_l,\quad j=1,\ldots,\varkappa.$$

Таким чином, крайова задача (2.94), (2.95) має розв'язок $(v,\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa)$, де функція v подана у вигляді лінійної комбінації (2.101) у якій коефіцієнти $R_1,\ldots,R_p$ разом із числами $\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa$ є розв'язком (єдиним) системи (2.104).

Доведено існування розв'язку цієї задачі для довільних $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+\varkappa}$. Оскільки простір її розв'язків та простір припустимих її правих частин мають однакову вимірність $p+\varkappa$, то ця задача є однозначно розв'язною, тобто виконується умова (i). Імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ доведена. Таким чином $(ii) \Leftrightarrow (i)$. Залишається показати, що $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

Обгрунтуємо імплікацію $(i) \Rightarrow (iii)$. Припустимо, що виконується умова (i). Довільно виберемо ціле $l \in \mathcal{J}$. За умовою (i) крайова задача

$$P(D_t)v_l(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.105}$$

$$B_j^{(0)}(D_t)v_l(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)} \sigma_{l,k} = \delta_{l,j}, \quad \text{де} \quad j = 1, \ldots, p+\varkappa \tag{2.106}$$

$$v_l \in \mathfrak{M} \tag{2.107}$$

має єдиний розв'язок $(v_l, \sigma_{l,1}, \ldots, \sigma_{l\varkappa})$. Оскільки функція $v_l(t)$ задовольняє (2.105) та (2.107), то вона зображається у вигляді (2.101), тобто

$$v_l(t) = \sum_{r=1}^{p} R_{l,r} h_r(t).$$

Нехай $j \in \{1, \ldots, p+\varkappa\}$. Для функції $v_l(t)$ вираз (2.102) набирає вигляду

$$B_j^{(0)}(D_t)v_l(t)|_{t=0} = \sum_{r=1}^{p} R_{l,r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{B_j^{(0)}(\tau) P_{p-r}(\tau)}{P(\tau)} d\tau.$$

Звідси

$$B_j^{(0)}(D_t)v_l(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{B_j^{(0)}(\tau) N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau, \tag{2.108}$$

де позначено

$$N_l(\tau) = \sum_{r=1}^{p} R_{l,r} P_{p-r}(\tau). \tag{2.109}$$

Підставивши (2.108) в (2.106) отримаємо (2.98). Тим самим імплікація $(i) \Rightarrow (iii)$ доведена.

Доведемо імплікацію $(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай виконується умова (iii). Виберемо довільним чином комплексні числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+\varkappa}$. Покладемо

$$v(t) = \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{i\tau t} \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau, \quad t \geqslant 0,$$

$$\sigma_k = \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \sigma_{l,k}, \quad k = 1, \ldots, \varkappa.$$

Первіримо, що вектор $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ є розв'язком крайової задачі (2.94), (2.95). Маємо:

$$P(D_t)v(t) = P(D_t)\left(\sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{i\tau t} \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (P(D_t) e^{i\tau t}) \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau = \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma P(\tau) e^{i\tau t} \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau =$$

$$= \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{i\tau t} N_l(\tau) d\tau = 0.$$

Останній інтеграл дорінює нулю за теоремою Коші. Отже функція $v(t) \in \mathfrak{M}$ і задовольняє рівняння (2.94).

Окрім того, для кожного $j \in \{1, \ldots, p+\varkappa\}$ маємо таке:

$$B_j^{(0)}(D_t) v(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)} \sigma_k =$$

$$= B_j^{(0)}(D_t) \left(\sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{i\tau t} \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau\right)\Bigg|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)} \left(\sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \sigma_{l,k}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma B_j^{(0)}(\tau) \frac{N_l(\tau)}{P(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)} \, \sigma_{l,k}\right) = \sum_{l=1}^{p+\varkappa} \varphi_l \, \delta_{l,j} = \varphi_j.$$

Тут передостання рівність виконується на підставі умови (iii). Отже, вектор $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ задовольняє крайову умову (2.95).

Оскільки простір розв'язків цієї задачі та простір її правих частин мають однакову вимірність $p + \varkappa$, то з існування розв'язку випливає його єдиність, тобто доведено імплікацію $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Зауваження 2.9. 1. Елементи матриці Лопатинського L неперервно залежать від коренів $\tau_1, \dots, \tau_p \in \mathbb{C}_+$ полінома $P(\tau)$ за умови, що ці корені залишаються всередені області, обмеженої контуром γ. Отже, при малому збуренні цих коренів матриця L зберігає свою невиродженість. Тобто, умови $(i), (ii), (iii)$ теореми 2.3 інваріантні відносно малих збурень коренів полінома $P(\tau)$.

2. Кожна функція $v(t) \in \mathfrak{M}$ є розв'язком рівняння (2.94), який (експоненціально) спадаює до нуля при $t \to \infty$. Це випливає з того, що усі корені многочлена $P(\tau)$ лежать у півплощині $\mathbb{C}_+$.

Окремий інтерес викликає теорема 2.3 у випадку, коли $P(\tau) \equiv L^+(\tau)$, де $L(\tau)$ – многочлен порядку $2m$ такий, що його m коренів $\tau_1^+, \dots, \tau_m^+$ лежать в $\mathbb{C}_+$ і решта m коренів лежить $\mathbb{C}_-$ (зівсно, з урахуваннями їх кратності), а

$$L^+(\tau) := \prod_{j=1}^{m} (\tau - \tau_j^+). \tag{2.110}$$

У цьому випадку розглянемо неоднорідну крайову задачу, яка складається з рівняння

$$L(D_t)v(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{2.111}$$

і крайових умов (2.95), у яких індекс j пробігає всю множину $\{1, \dots, m + \varkappa\}$. Пов'яжемо з цією задачею відображення

$$\mathcal{L} : (v, \sigma_1, \cdots, \sigma_\varkappa) \longmapsto (f, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m+\varkappa}), \tag{2.112}$$
$$\text{де} \quad v(t) \in C_0^\infty([0; \infty)), \quad \varphi_1, \cdots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}.$$

Тут $f, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m+\varkappa}$ означені за формулами (2.111) і (2.95), а простір $C_0^\infty([0; \infty)$ складається з усіх нескінченно диференціовних функцій $v : [0; \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ з компактним носієм.

Нехай ціле число r таке, що $r \geqslant 2m$ і $r \geqslant m_{m+\varkappa} + 1$. Тоді відображення (2.112) продовжується єдиним чином (за неперевністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\mathcal{L} : H^r(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\varkappa \leftrightarrow H^{r-2m}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m+\varkappa}. \tag{2.113}$$

Твердження 2.11. *Кожна з умов* (i), (ii), (iii) *еквівалентна такій: оператор* (2.113) *є ізоморфізмом*

$$\mathcal{L} : H^{r}(\mathbb{R}_{+}) \times \mathbb{C}^{\varkappa} \leftrightarrow H^{r-2m}(\mathbb{R}_{+}) \times \mathbb{C}^{m+\varkappa} \tag{2.114}$$

для довільного цілого $r \geqslant max\{2m, m_{m+\varkappa} + 1\}$.

Цей результат встановлено в роботі [82 с.17, теорема 1.2.1] стосовно еквівалентності ізоморфізму (2.114) умови (i) (при нашому припущені щодо $L(\tau)$). Звідси на підставі теорми (2.3) маємо твердження 2.11 у повному обсязі.

2.8. Оцінки фундаментальної системи розв'язків

У підрозділі припускаємо, що крайова задача (2.1), (2.2) еліптична з малим параметром. Для її крайового симоволу побудуємо фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки.

Довільно виберемо номер $q \in \{1, \dots, m + \varkappa\}$. У крайовому символі (2.9), (2.10) задачі (2.1), (2.2) який відповідає точці $x^0 \in \partial G$, покладемо $\varphi_j = \delta_{q,j}$ для кожного $j \in \{1, \dots, m + \varkappa\}$. Отже, розглянемо таку крайову задачу на півосі:

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon) v_q(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.115}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t) v_q(t)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi') \sigma_{q,k} = \delta_{q,j}, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa. \tag{2.116}$$

Тут, нагадаємо, фіксовані $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\varepsilon > 0$.

За умовою 2.3, ця задача має єдиний розв'язок

$$v_q(t) = v_q(\xi', t; \varepsilon), \quad \sigma_{q,k} = \sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon), \quad \text{де} \quad k = 1, \dots, \varkappa,$$

такий, що функція $v_q(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Система векторів $(v_q(t), \sigma_{q,1}, \dots, \sigma_{q,\varkappa})$, де $q = 1, \dots, \varkappa$, – лінійно незалежна, бо у противному випадку нуль-вектор був би розв'язком крайової задачі (2.9), (2.10), у якій принаймі одне $\varphi_j \neq 0$. Ця система називається *фундаментальною системою розв'язків* (ф.с.р.) граничного символа.

Теорема 2.4. *Нехай ціле $l \geq 0$. Існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0; 1]$ і $q \in \{1, \dots, m + \varkappa\}$ виконуються оцінки:*

$$\left(\int_0^\infty |D^l v_q(\xi', t; \varepsilon)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C\, |\xi'|^{l - m_q - 1/2} \times \tag{2.117}$$

$$\times \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1 + \varepsilon|\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1} - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1 + \varepsilon|\xi'|))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (\varepsilon|\xi'|/(1 + \varepsilon|\xi'|))^{m_q - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

Доведення. Доведення оцінок (2.117) зводиться до ситуації, коли $|\xi'| = 1$ і $\varepsilon \in (0;\infty)$. Тоді їх праві частини залежать лише від ε.

Справді, для довільних числа $\rho > 0$ і функції $u \in C^\infty([0;\infty)$ маємо:

$$A^{(0)}(\xi', D_t;\varepsilon)u(\rho t) = \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(\xi', D_t)u(\rho t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i}\big(A^{(0)}_{2m-i}(\xi', \rho D_\tau)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t} =$$
$$= \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i}\rho^{2m-i}\big(A^{(0)}_{2m-i}(\xi'/\rho, D_\tau)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t} =$$
$$= \rho^{2\mu}\sum_{i=0}^{2m-2\mu} (\varepsilon\rho)^{2m-2\mu-i}\big(A^{(0)}_{2m-i}(\xi'/\rho, D_\tau)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t} =$$
$$= \rho^{2\mu}\big(A(\xi'/\rho, D_\tau;\varepsilon\rho)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t}.$$

Отже,

$$A^{(0)}(\xi', D_t;\varepsilon)u(\rho t) = \rho^{2\mu}\big(A^{(0)}(\xi'/\rho, D_\tau;\varepsilon\rho)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t}. \tag{2.118}$$

Окрім того,

$$B^{(0)}_j(\xi', D_t)u(\rho t) = \rho^{m_j}(B^{(0)}_j(\xi'/\rho, D_\tau)u(\tau)\big)|_{\tau=\rho t}, \tag{2.119}$$
$$C^{(0)}_{j,k}(\xi')\sigma = \rho^{m_j+\alpha_k}C^{(0)}_{j,k}(\xi'/\rho)\sigma, \tag{2.120}$$

де $\sigma \in \mathbb{C}$.

Введемо нові параметри

$$\rho := |\xi'|, \quad \omega := \xi'/|\xi'|, \quad \theta := \varepsilon|\xi'|. \tag{2.121}$$

Розглянемо таку функцію:

$$v^*_q(\tau) \equiv v^*_q(\omega, \tau;\theta) := \rho^{m_q} v_q(\rho\omega, \tau/\rho;\theta/\rho) \quad \rho > 0. \tag{2.122}$$

Поклавши у формулі (2.118) $u(\rho t) := v_q(t)$, $t > 0$, робимо висновок, що функція $v_q(t)$ задовольняє рівняння (2.115) тоді і тільки, коли

$$A^{(0)}(\omega, D_\tau;\theta)v^*_q(\tau) = 0, \quad \tau > 0. \tag{2.123}$$

Введемо числові параметри

$$\sigma^*_{q,k} := \rho^{m_q+\alpha_k}\sigma_{q,k}, \quad k = 1, \ldots, \varkappa. \tag{2.124}$$

Поклавши $u(\rho t) := v_q(t)$, $t > 0$, у формулі (2.119) і $\sigma := \rho^{-m_q-\alpha_k}\sigma_{q,k}$ у формулі (2.120), робимо висновок, що вектор $(v_q, \sigma_{q,1}, \ldots, \sigma_{q,\varkappa})$ задовольняє крайові умови тоді і лише тоді, коли

$$B^{(0)}_j(\omega, D_\tau)v^*_q(\tau)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\omega)\sigma^*_{q,k} = \delta_{q,j}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{2.125}$$

Справді,

$$\big(B^{(0)}_j(\xi', D_t)v_q(t)\big)|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\xi')\sigma_{q,k} =$$

$$= \rho^{m_j}\big(B^{(0)}_j(\xi'/\rho, D_\tau)v_q(\tau/\rho)\big)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} \rho^{m_j+\alpha_q}C^{(0)}_{j,k}(\xi'/\rho)\sigma_{q,k} =$$

$$= \rho^{m_j-m_q}\big(B^{(0)}_j(\omega, D_\tau)v^*_q(t)\big)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} \rho^{m_j-m_q}C^{(0)}_{j,k}(\omega)\sigma^*_{q,k} =$$

$$= \rho^{m_j-m_q}\Bigg(\big(B^{(0)}_j(\omega, D_\tau)v^*_q(t)\big)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\omega)\sigma^*_{q,k}\Bigg).$$

Тому (2.116) еквівалентне (2.125).

Токим чином, вектор $(v_q, \sigma_{q,1}, \ldots, \sigma_{q,\varkappa})$ є розв'язком крайової задачі (2.115), (2.116) тоді і лише тоді, коли вектор $(v^*_q, \sigma^*_{q,1}, \ldots, \sigma^*_{q,\varkappa})$ є розв'яком крайової задачі (2.123), (2.125). Зв'язок між цими векторами заданий формулами (2.122), (2.124), де параметри пов'язані співвідношеннями (2.121). Ці крайові задачі мають однаковий вигляд.

З огляду на ліву частину формули (2.117) запишемо

$$\int\limits_0^\infty |D^l v_q(\xi', t; \varepsilon)|^2 dt = \rho^{-1}\int\limits_0^\infty \big|\big(D^l_t v_q(\rho\omega, t; \theta/\rho)\big)\big|_{t=\tau/\rho}|^2 d\tau =$$

$$= \rho^{2l-1}\int\limits_0^\infty |D^l_\tau v_q(\rho\omega, \tau/\rho; \theta/\rho)|^2 d\tau = \rho^{2l-2m_q-1}\int\limits_0^\infty |D^l_\tau v^*_q(\omega, \tau; \theta)|^2 d\tau.$$

Отже,

$$\int\limits_0^\infty \left|D^l v_q(\xi', t; \varepsilon)\right|^2 dt = \rho^{2l-2m_q-1}\int\limits_0^\infty |D^l_\tau v^*_q(\omega, \tau; \theta)|^2 d\tau. \tag{2.126}$$

З формул (2.121) і (2.126) випливає, що потрібна оцінка (2.117) є беспосереднім наслідком оцінки

$$\left(\int\limits_0^\infty |D_\tau^l v_q^*(\omega,\tau;\theta)|^2 dt\right)^{1/2} \le C\times \tag{2.127}$$

$$\times\begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad q\le \mu+\varkappa, \quad l\le m_{\mu+\varkappa+1};\\ (\theta/(1+\theta))^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q\le \mu+\varkappa, \quad l> m_{\mu+\varkappa+1};\\ (\theta/(1+\theta))^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q> \mu+\varkappa, \quad l\le m_{\mu+\varkappa};\\ (\theta/(1+\theta))^{m_q-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q> \mu+\varkappa, \quad l> m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

В останній оцінці параметр $\omega = \xi/|\xi'|$ пробігає одничну сферу у просторі $\mathbb{R}^{n-1}$, параметр $\theta = \varepsilon|\xi'|$ пробігає вісь $(0;\infty)$, а число $C>0$ не залежить від v_q^*, ω і $q\in\{1,\dots,m+\varkappa\}$. При доведенні оценки (2.127) ми вже не можемо обмежитися малими θ і тому її слід доводити за умови, що $0<\theta<\infty$. Звісно, оцінку достатньо довести для довільного фіксованого $q\in\{1,\cdots,m+\varkappa\}$. Виберемо такий номер q.

Доведення оцінки (2.127) проведемо окремо у випадку коли $\theta\in[\theta_0;\infty)\subset(0;\infty)$ і коли $0<\theta\ll 1$.

Виберемо довільним чином число $\theta_0>0$ і розглянемо випадок $\theta\in[\theta_0;\infty)$. У цьому випадку оцінка (2.127) еквівалентана такій: існує число $C=C(\theta_0)>0$ таке, що довільних $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega|=1$ і $\theta\geqslant\theta_0$ виконується нерівність

$$\int\limits_0^\infty |D_\tau^l v_q^*(\omega,\tau;\theta)|^2 d\tau \le C^2. \tag{2.128}$$

Введемо новий параметр $\delta := 1/\theta$. Згідно з (2.5) маємо рівність

$$A^{(0)}(\omega,D_\tau;\theta) = \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \theta^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(\omega,D_\tau).$$

Поділівши рівняння (2.123) на $\theta^{2m-2\mu}$, запишемо його у такій формі

$$\widetilde{A}^{(0)}(\omega;D_\tau;\delta)v_q^*(\tau)=0,\quad \tau>0.$$

Тут

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega;D_\tau;\delta) := A^{(0)}_{2m}(\omega;D_\tau) + \sum_{i=1}^{2m-2\mu} \delta^i A^{(0)}_{2m-i}(\omega;D_\tau). \tag{2.129}$$

Для довільних $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega| = 1$ і $\delta \in [0; \theta_0^{-1}]$ розглянемо крайову задачу

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; D_\tau; \delta) v(\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{2.130}$$

$$B_j^{(0)}(\omega, D_\tau) v(\tau)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\omega) \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{2.131}$$

Пов'яжемо з нею відображення

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta) : (v, \sigma_1, \cdots, \sigma_\varkappa) \longmapsto (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}), \tag{2.132}$$
$$\text{де} \quad v \in \mathbb{C}_0^\infty([0; \infty)),\ \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in C.$$

Тут $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ означені за формулами (2.130) і (2.131). Нехай ціле число r таке, що

$$r = \max\{l, 2m, m_{m+\varkappa} + 1\}.$$

Відображення (2.132) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta) : H^r(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\varkappa \longrightarrow H^{r-2m}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m+\varkappa}. \tag{2.133}$$

Вімітимо, що крайова задача (2.130), (2.131) задовольняє умову (i) теореми 2.3, де $P(\tau) := L^+(\tau)$, а $L(\tau) := \widetilde{A}^{(0)}(\omega; \tau; \delta)$ (див. формулу (2.110)). Якщо $\delta > 0$, то це – прямий наслідок умови 2.3, якщо $\delta = 0$, то — умови 2.4. Окрім того, диференціальний оператор $\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; D_\tau; \delta)$ є правильно еліптичним на підставі умови 2.2. Тому згідно з твердженням 2.11 оператор (2.133) є ізоморфізмом

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta) : H^r(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\varkappa \longleftrightarrow H^{r-2m}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{m+\varkappa}. \tag{2.134}$$

Нагадаємо, що

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta) : (v_q^*, \sigma_{q,1}^*, \cdots, \sigma_{q,\varkappa}^*) \longmapsto (0, \delta_{q,1}, \ldots, \delta_{q,m+\varkappa}).$$

Отже,

$$\|v_q^*, H^r(\mathbb{R}_+)\| + \sum_{k=1}^{\varkappa} |\sigma_{q,k}^*| \leqslant \|\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta)^{-1}\|, \tag{2.135}$$

де $\|\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega; \delta)^{-1}\|$ – норма оператора, оберненого до оператора (2.134).

З огляду на формулу (2.129) відображення $(\omega,\delta)\mapsto \widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega;\delta)$ є неперервної на компакті

$$\{\omega\in\mathbb{R}^{n-1}:|\omega|=1\}\times[0;\theta_0^{-1}] \tag{2.136}$$

абстрактною функцією зі значеннями у банаховому просторі

$$\mathcal{L}\Big(H^r(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{\varkappa},H^{r-2m}(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{C}^{m+\varkappa}\Big).$$

Тут, як зазвичай, $\mathcal{L}(E_1,E_2)$ позначає банахів простір усіх лінійних обмежених операторів $T:E_1\to E_2$, де E_1,E_2 – банахові простори. Оскільки оператор (2.133) оборотній, то функція $\{\omega\in\mathbb{R}^{n-1}:|\omega|=1\}\times[0;\theta_0^{-1}]$ неперервна на компакті (2.136). Тому з нерівності (2.134), де $r\geqslant l$, випливає потрібна нерівність (2.128), де

$$C:=\max\{\|\widetilde{\mathcal{A}}^{(0)}(\omega;\delta)^{-1}\|:\omega\in\mathbb{R}^{n-1},|\omega|=1,0\leqslant\delta\leqslant\theta_0^{-1}\}<\infty.$$

Отже, оцінка (2.127) доведена у випадку $\theta\in[\theta_0;\infty)$.

Доведемо оцінку (2.127) для малих $\theta>0$. У цьому випадку вона набирає вигляду

$$\left(\int\limits_0^{\infty}|D_\tau^l v_q^*(\omega,\tau;\theta)|^2d\tau\right)^{1/2}\le C\times \tag{2.137}$$

$$\times\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad q\le\mu+\varkappa,\quad l\le m_{\mu+\varkappa+1};\\ \theta^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & \text{якщо}\quad q\le\mu+\varkappa,\quad l\geqslant m_{\mu+\varkappa+1}+1;\\ \theta^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо}\quad q>\mu+\varkappa,\quad l\le m_{\mu+\varkappa};\\ \theta^{m_q-l+1/2}, & \text{якщо}\quad q>\mu+\varkappa,\quad l\geqslant m_{\mu+\varkappa}+1.\end{cases}$$

Перш ніж доводити цю оцінку, наведемо необхідний допоміжний матеріал.

Позначимо через $\tau_1^+(\omega),\ldots,\tau_\mu^+(\omega)$ корені рівняння $A_{2\mu}^{(0)}(\omega,\tau)=0$ відносно змінної τ, які лежать в $\mathbb{C}_+$. Нехай $S_{2\mu}^+$ – множина усіх цих коренів. Вони неперевно залежить від параметра ω. З компактності сфери $\{\omega\in\mathbb{R}^{n-1}:|\omega|=1\}$ випливає, що існує гладкий контур $\gamma_1\subset\mathbb{C}_+$, який знаходиться на додатній відстані від дійсної вісі та охоплює ці корені для усіх $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega|=1$.

Довільно виберемо таке ω. Згідно умови 2.5 крайова задача (2.94), (2.95), де

$$P(\tau):=A_{2\mu}^{(0)+}(\omega,\tau)=\prod_{i=1}^{\mu}(\tau-\tau_i^+(\omega)),$$

$p := \mu$ і $\mathcal{J} = \{1, \ldots, \mu + \varkappa\}$, задовольняє умову (i) теореми 2.3. Тому на підставі цієї теореми знайдуться поліноми $N_q(\omega, \tau)$ аргумента τ і числа $\sigma^{\#}_{q,k}(\omega)$, де $q = 1, \ldots, \mu + \varkappa$; $k = 1, \ldots, \varkappa$ такі, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{B^{(0)}_j(\omega, \tau) N_q(\omega, \tau)}{A^{(0)+}_{2\mu}(\omega, \tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(\omega) \sigma^{\#}_{q,k}(\omega) = \delta_{q,j}, \qquad (2.138)$$

$$\text{для усіх} \quad q, j = \{1, \ldots, \mu + \varkappa\}.$$

Відповідно до [7, 11] означимо поліном

$$Q(\tau) := \frac{A^{(0)}(0, \tau; 1)}{A^{(0)}_{2\mu}(0, \tau)} = \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \frac{A^{(0)}_{2m-i}(0, 1)}{A^{(0)}_{2\mu}(0, 1)} \tau^{2m-2\mu-i}.$$

За умовою 2.2 поліном $Q(\tau)$ має по $m - \mu$ коренів в $\mathbb{C}_+$ і $\mathbb{C}_-$. Позначимо через $\tau^+_{\mu+1}, \ldots, \tau^+_m$ корені рівняння $Q(\tau) = 0$ з додатніми уявними частинами і нехай контур $\gamma_2 \subset \mathbb{C}_+$ охоплює ці корені. Нехай S^+_{blr} – множина усіх цих коренів.

Відповідно до умови 2.6 крайова задача (2.94), (2.95), де

$$P(\tau) \ := \ Q^+(\tau) \ = \ \prod_{i=\mu+1}^{m} (\tau - \tau^+_i),$$

та $p := m - \mu$, $\xi' = 0$ і $\mathcal{J} := \{\mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa\}$, задовольняє умову (i) теореми 2.3. Згідно з цієї теоремою (у випадку розглянутому в зауваженні до неї) знайдуться поліноми $N_{\mu+\varkappa+1}(\tau), \ldots, N_{m+\varkappa}(\tau)$ такі, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{B^{(0)}_j(0, \tau) N_q(\tau)}{Q^+(\tau)} d\tau = \delta_{q,j}, \quad q, j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \qquad (2.139)$$

Нехай $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\omega \neq 0$ і $\theta > 0$. Позначимо через $\tau^+_1(\omega, \theta), \ldots, \tau^+_m(\omega, \theta)$ усі корені рівняння $A^{(0)}(\omega, \tau; \theta) = 0$ відносно аргумента τ, які лежать в $\mathbb{C}_+$. Нагадаємо, що за умовою 2.2 цих коренів точно m з урахуванням їх кратності. З огляду на формулу (2.6) можна вважати, що

$$\tau^+_j(\theta\omega; 1) = \theta \tau^+_j(\omega; \theta) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1, \ldots, m\} \qquad (2.140)$$

(див. [Vol06,]).

Нехай $S^+(\omega; \theta)$ – множина усіх цих коренів. Вони мають таку фундаментальну властивість (див. [11, с.113]).

Твердження 2.12. *Зазначені вище корені можна занумерувати так, щоб дві множини*

$$S^{1+}(\omega,\theta)=\{\tau_1^+(\omega,\theta),\dots,\tau_\mu^+(\omega,\theta)\}\quad i\quad S^{2+}(\omega,\theta)=\{\tau_{\mu+1}^+(\omega,\theta),\dots,\tau_m^+(\omega,\theta)\}$$

мали таку властивість: для довільного $\delta>0$ існує число $\theta_0>0$ таке, що для довільних $\theta\in(0;\theta_0]$ і $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega|=1$ правильні рівності

$$\operatorname{dist}(\mathrm{S}^{1+}(\omega,\theta),\mathrm{S}^+_{2\mu}(\omega))<\delta,$$
$$\operatorname{dist}(\theta\,\mathrm{S}^{2+}(\omega,\theta),\mathrm{S}^+_{\mathrm{blr}})<\delta.$$

Згідно з цим твердженням виберемо число $\widetilde{\theta}>0$ таке, що для усіх $\theta\in(0;\widetilde{\theta}]$ і $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega|=1$ контур $\gamma_1\subset\mathbb{C}_+$ охоплює разом з $S^+_{2\mu}(\omega,\theta)$ і множину $S^{1+}(\omega,\theta)$, а контур $\gamma_2\subset\mathbb{C}_+$ охоплює разом з $S^+_{blr}(\omega,\theta)$ і множину $\theta S^{2+}(\omega,\theta)$.

З огляду на твердження 2.12 запишемо

$$A^{(0)}(\omega,\tau;\theta)=A_1^{(0)+}(\omega,\tau;\theta)A_2^{(0)+}(\omega,\tau;\theta)A^{(0)-}(\omega,\tau;\theta).\tag{2.141}$$

де

$$A_1^{(0)+}(\omega,\tau;\theta):=\prod_{i=1}^{\mu}(\tau-\tau_i^+(\omega;\theta)),$$
$$A_2^{(0)+}(\omega,\tau;\theta):=\theta^{m-\mu}\prod_{i=\mu+1}^{m}(\tau-\tau_i^+(\omega;\theta)),$$

а $A^{(0)-}(\omega,\tau;\theta)$ – деякий поліном порядку m, усі корені якого лежать в $\mathbb{C}_-$. На підставі цього твердження робимо, висновок, що

$$A_1^{(0)+}(\omega,\tau;\theta)\to A_{2\mu}^{(0)+}(\omega,\tau),\quad A_2^{(0)+}(\omega,\tau/\theta;\theta)\to Q^+(\tau)\tag{2.142}$$
$$\text{при}\quad\theta\to 0+$$

рівномірно на кожній множині $\{(\omega,\tau):\omega\in\mathbb{R}^{n-1},|\omega|=1,|\tau|<\lambda\}$, де $0<\lambda<\infty$.

Позначимо через $\mathfrak{M}(\omega;\theta)$ лінійний простір усіх розв'язків $v(\tau)$ рівняння $A^{(0)}(\omega,D_\tau;\theta)v(\tau)=0$, $\tau>0$, таких, що $v(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$. Відмітимо, що $\dim\mathfrak{M}(\omega;\theta)=m$. З огляду на (2.141) маємо еквівалентнінтність

$$v(\tau)\in\mathfrak{M}(\omega;\theta)\Leftrightarrow\Big(A_1^{(0)+}(\omega,D_\tau;\theta)A_2^{(0)+}(\omega,D_\tau;\theta)v(\tau)=0\Big).$$

Тому, $\mathfrak{M}(\omega;\theta) = \mathfrak{M}_1(\omega;\theta) \dotplus \mathfrak{M}_2(\omega;\theta)$, де $\mathfrak{M}_k(\omega;\theta)$ – лінійний простір усіх розв'язків $v(\tau)$ рівняння $A_k^{(0)+}(\omega, D_\tau;\theta)v(\tau) = 0$, $\tau > 0$. Зауважимо, що $\dim \mathfrak{M}_1(\omega;\theta) = \mu$ і $\dim \mathfrak{M}_2(\omega;\theta) = m - \mu$.

Розглянемо таку крайову задачу:

$$A^{(0)}(\omega, D_\tau;\theta)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0, \tag{2.143}$$

$$B_j^{(0)}(\omega, D_\tau)v(\tau)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\omega)\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, \mu+\varkappa, \tag{2.144}$$

$$v(\tau) \in \mathfrak{M}_1(\omega;\theta). \tag{2.145}$$

Відмітимо, що

$$((2.143), (2.145)) \Longleftrightarrow A_1^{(0)+}(\omega, D_\tau;\theta)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0.$$

На підставі цієї еквівалентності і формули (2.142) робимо висновок, що ця крайова задача є малим збуренням при $\theta \to 0+$ задачі, що складається з диференціального рівняння $A_{2\mu}^{(0)}(\omega, D_\tau)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0$, крайових умов (2.144) і умови $v(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. За умовою 2.5 остання крайова задача має єдиний ров'язок для довільно вибраних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu+\varkappa}$. Тому на підставі твердження 2.12 і п.1 зауваження 2.9 задача (2.143) – (2.145) має єдиний розв'язок при $0 < \theta \ll 1$, тобто задовольняє умову (i) теореми 2.3, у якій покладаємо $P(\tau) := A_1^{(0)+}(\omega, \tau;\theta)$, $p := \mu$, $\mathcal{J} := \{1, \ldots, \mu+\varkappa\}$ і $\gamma := \gamma_1$. На підставі цієї теореми знайдуться поліноми $N_q(\omega, \tau;\theta)$ і числа $\sigma_{q,k}^{\#}(\omega;\theta)$, де $q = 1, \ldots, \mu+\varkappa$ і $k = 1, \ldots, \varkappa$, такі, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{B_j^{(0)}(\omega, \tau)N_q(\omega, \tau;\theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, \tau;\theta)}d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\omega)\sigma_{q,k}^{\#}(\omega;\theta) = \delta_{q,j}, \tag{2.146}$$

$$\text{для усіх} \quad q, j \in \{1, \ldots, \mu+\varkappa\} \quad \text{і} \quad 0 < \theta \ll 1.$$

Зауваження 2.10. З формул (2.109) і (2.142) випливає, що коефіцієнти полінома $N_q(\omega, \tau;\theta)$ і числа $\sigma_{q,k}^{\#}(\omega;\theta)$ неперервно залежать від $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і малого $\theta > 0$. Окрім того, $N_q(\omega, \tau, \theta) \to N_q(\omega, \tau)$ і $\sigma_{q,k}^{\#}(\omega;\theta) \to \sigma_{q,k}^{\#}(\omega)$ при $\theta \to 0+$ рівномірно на кожній множині $\{(\omega, \tau) : \omega \in \mathbb{R}^{n-1}, |\omega| = 1, |\tau| < \lambda\}$, де $0 < \lambda < \infty$. Отже, рівності (2.146) переходять в рівність (2.138) при $\theta \to 0+$.

Розглянемо ще одну крайову задачу

$$A^{(0)}(\theta\omega, D_\tau; 1)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0, \tag{2.147}$$

$$B_j^{(0)}(\theta\omega, D_\tau)v(\tau)|_{\tau=0} = \varphi_j, \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa,$$

$$v(\tau) \in \mathfrak{M}_2(\omega; \theta) \tag{2.148}$$

Відмітимо, що

$$((2.147), (2.148)) \Longleftrightarrow A_2^{(0)+}(\theta\omega, D_\tau; 1)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0.$$

На підставі цієї еквівалентності і формули (2.142) робимо висновок, що ця крайова задача є малим збуренням при $\theta \to 0+$ задачі, що складається з диференціального рівняння $Q(D_\tau)v(\tau) = 0, \quad \tau > 0$, крайових умов

$$B_j^{(0)}(0, D_t)v(\tau)|_{\tau=0} = \varphi_j,$$

де $j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa$, і умови $v(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. За умовою 2.6 остання крайова задача має єдиний ров'язок для довільно вибраних чисел $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$. Тому на підставі твердження 2.12 і п. 1 зауваження 2.9 задача (2.147) – (2.148) має єдиний розв'язок при $0 < \theta \ll 1$, тобто задовольняє умову (i) теореми 2.3, у якій покладаємо $P(\tau) := A_2^{(0)+}(\theta\omega, D_\tau; 1)$, $p := m - \mu$, $\mathcal{J} = \{\mu + \varkappa + 1 \, , \, \ldots \, , \, m+\varkappa\}$ і $\gamma := \gamma_2$. На підставі цієї теореми знайдуться поліноми $N_{\mu+\varkappa+1}(\theta\omega, \tau), \ldots, N_{m+\varkappa}(\theta\omega, \tau)$, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{B_j^{(0)}(\theta\omega, \tau) N_q(\theta\omega, \tau)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, \tau; 1)} d\tau = \delta_{q,j}, \tag{2.149}$$

$$\text{для усіх} \quad q, j \in \{\mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa\} \quad \text{і} \quad 0 < \theta \ll 1.$$

Зауваження 2.11. Нехай $q \in \{\mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa\}$. З формул (2.109) і (2.142) випливає, що коефіцієнти полінома $N_q(\theta\omega, \tau)$ неперервно залежать від $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і малого $\theta > 0$. Окрім того, $N_q(\theta\omega, \tau) \to N_q(\tau)$ при $\theta \to 0+$ рівномірно на кожній множині $\{(\omega, \tau) : \omega \in \mathbb{R}^{n-1}, |\omega| = 1, |\tau| < \lambda\}$, де $0 < \lambda < \infty$. Отже рівності (2.149) переходять в рівність (2.139) при $\theta \to 0+$.

З огляду на (2.140) маємо:

$$A_2^{(0)+}(\omega,\tau/\theta;\theta)=\theta^{m-\mu}\prod_{i=\mu+1}^{m}(\tau/\theta-\tau_i^+(\omega;\theta))=$$

$$=\prod_{i=\mu+1}^{m}(\tau-\theta\tau_i^+(\omega;\theta))=\prod_{i=\mu+1}^{m}(\tau-\tau_i^+(\theta\omega;1))=A_2^{(0)+}(\theta\omega,\tau;1).$$

$$B_j^{(0)}(\omega,\tau/\theta)=\sum_{|\beta|=m_j}b_{j,\beta}(\omega+\tau/\theta)^{\beta}=\sum_{|\beta|=m_j}b_{j,\beta}\theta^{-\beta}(\theta\omega+\tau)^{\beta}=$$
$$=\theta^{-m_j}B_j^{(0)}(\theta\omega,\tau).$$

Тоді рівності (2.149) набирають вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_j^{(0)}(\omega,\tau/\theta)N_q(\theta\omega,\tau)}{A_2^{(0)+}(\omega,\tau/\theta;\theta)}d\tau=\theta^{-m_j}\delta_{q,j},$$

$$\text{де}\quad q,j=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa\quad\text{і}\quad 0<\theta\ll 1.$$

Повернемося до доведення оцінки (2.137). Воно використовує такий результат.

Лема 2.1. *Нехай $q\in\{1,\dots,m+\varkappa\}$. Існує додатне число $\theta_0\leqslant\widetilde{\theta}$ таке, що для усіх $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$ з $|\omega|=1$ і $\theta\in(0;\theta_0]$ розв'язок $v_q^*(\omega,\tau;\theta)$ допускає зображення у вигляді*

$$v_q^*(\omega,\tau;\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{M_q^{(1)}(\omega,z;\theta)}{A_1^{(0)+}(\omega,z;\theta)}e^{i\tau z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{M_q^{(2)}(\theta\omega,z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega,z;1)}e^{i\tau z/\theta}dz \quad (2.150)$$

де $M_q^{(1)}(\omega,z;\theta)$ і $M_q^{(2)}(\omega,z;\theta)$ – деякі поліноми аргументу z, які задовольняють оцінки

$$|M_q^{(1)}(\omega,z;\theta)|\leqslant\begin{cases}C\,, & \text{якщо}\quad q\leqslant\mu+\varkappa\,,\\ C\,\theta^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}\,, & \text{якщо}\quad q>\mu+\varkappa\,,\end{cases} \quad (2.151)$$

$$|M_q^{(2)}(\theta\omega,z)|\leqslant\begin{cases}C\,\theta^{m_{\mu+\varkappa+1}}\,, & \text{якщо}\quad q\leqslant\mu+\varkappa\,,\\ C\,\theta^{m_q}\,, & \text{якщо}\quad q>\mu+\varkappa\,.\end{cases} \quad (2.152)$$

Тут число $C>0$ не залежить від зазначених параметрів ω, θ і змінної $z\in\gamma_1\cup\gamma_2$.

Доведення леми 2.1. Міркуємо подібно до роботи [11]. Нехай $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і $0 < \theta \ll 1$. Для довільних комплексних чисел $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ розглянемо крайову задачу

$$A^{(0)}(\omega, D_\tau; \theta) w(\tau) = 0, \quad \tau > 0, \tag{2.153}$$

$$B_j^{(0)}(\omega, D_\tau) w(\tau)|_{\tau=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\omega)\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m+\varkappa, \tag{2.154}$$

відносно невідої функції $w(\tau) = w(\omega, \tau; \theta)$ і чисел $\sigma_k = \sigma_k(\omega; \theta)$. За умовою 2.3 ця задача однозначно розвязна. Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$w(\omega, \tau; \theta) = \sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{N_r(\omega, z; \theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, z; \theta)} e^{i\tau z} dz + \tag{2.155}$$

$$+ \sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{N_r(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} e^{i\tau z/\theta} dz,$$

$$\sigma_k(\omega; \theta) = \sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \sigma_{k,r}^{\#}(\omega; \theta)\,, \quad k = 1, \ldots, \varkappa, \tag{2.156}$$

де параметри $\psi_r = \psi_r(\omega; \theta)$ – шукані, а поліноми $N_r(\omega, z; \theta)$ і числа $\sigma_{k,r}^{\#}(\omega; \theta)$ узяті із формул (2.146) і (2.149). Звісно, кожна функція (2.155) є розвязком рівняння (2.153). Підставивши(2.155) і (2.156) у крайові умови (2.154), отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\psi_1, \ldots, \psi_{m+\varkappa}$:

$$\begin{gathered}\sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{N_r(\omega, z; \theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, z; \theta)} B_j^{(0)}(\omega, z) dz + \\ + \sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{N_r(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} B_j^{(0)}(\omega, z/\theta) dz + \\ + \sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\omega) \sigma_{k,r}^{\#}(\omega; \theta) = \varphi_j\,, \quad j = 1, \ldots, m+\varkappa.\end{gathered} \tag{2.157}$$

З огляду на (2.146) кожне рівняння (2.157) при $1 \leqslant j \leqslant \mu+\varkappa$ запишемо у вигляді

$$\sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta)\delta_{r,j} + \theta^{-m_j} \sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{N_r(\theta\omega, z) B_j^{(0)}(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} dz = \varphi_j.$$

Отже,

$$\psi_j(\omega;\theta)+\theta^{-m_j}\sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} h_{j,r}(\omega,\theta)\psi_r(\omega,\theta)=\phi_j,\quad j=1,\dots,\mu+\varkappa, \tag{2.158}$$

де покладаємо

$$h_{j,r}(\omega;\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{N_r(\theta\omega,z)B_j^{(0)}(\theta\omega;z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega,z;1)}\,dz.$$

Окрім того, з огляду на (2.149) кожне рівняння (2.157) при $\mu+\varkappa+1\leqslant j\leqslant m+\varkappa$ запишемо у вигляді

$$\sum_{r=1}^{\mu+\varkappa}\psi_r(\omega;\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{N_r(\omega,z;\theta)}{A_1^{(0)+}(\omega,z;\theta)}B_j^{(0)}(\omega,z)dz+C_{j,k}^{(0)}(\omega)\sigma_{q,k}^{\#}(\omega;\theta)\right)+$$
$$+\theta^{-m_j}\sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa}\psi_r(\omega;\theta)\delta_{r,j}=\varphi_j.$$

Отже,

$$\sum_{r=1}^{\mu+\varkappa}h_{j,r}(\omega,\theta)\psi_r(\omega,\theta)+\theta^{-m_j}\psi_j(\omega;\theta)=\varphi_j,\quad j=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{2.159}$$

де покладаємо

$$h_{j,r}(\omega;\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_j^{(0)}(\omega,z)N_r(\omega,z;\theta)}{A_1^{(0)+}(\omega,z;\theta)}\,dz+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^{(0)}(\omega)\sigma_{k,r}^{\#}(\omega;\theta).$$

Нехай $\psi:=\operatorname{col}(\psi',\psi'')$, де

$$\psi':=\operatorname{col}(\psi_1(\omega,\theta),\dots,\psi_{\mu+\varkappa}(\omega,\theta)),\quad \psi^{''}:=\operatorname{col}(\psi_{\mu+\varkappa+1}(\omega,\theta),\dots,\psi_{m+\varkappa}(\omega,\theta))$$

і, аналогічно, $\varphi:=\operatorname{col}(\varphi',\varphi'')$ де

$$\varphi':=\operatorname{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_{\mu+\varkappa}),\quad \varphi^{''}:=\operatorname{col}(\varphi_{\mu+\varkappa+1},\dots,\varphi_{m+\varkappa}).$$

Тоді система (2.157), тобто система, (2.158), (2.159), записується у вигляді

$$\psi'+\Delta_1 H_1\psi''=\varphi', \tag{2.160}$$
$$H_2\psi'+\Delta_2\psi''=\varphi''. \tag{2.161}$$

Тут позначено

$$\Delta_1 := \operatorname{diag}(\theta^{-m_1}, \ldots, \theta^{-m_{\mu+\varkappa}}), \quad \Delta_2 := \operatorname{diag}(\theta^{-m_{\mu+\varkappa+1}}, \ldots, \theta^{-m_{m+\varkappa}})$$

та

$$H_1 := \Big(h_{j,r}(\omega;\theta)\Big)_{\substack{j=1,\ldots,\mu+\varkappa \\ r=\mu+\varkappa+1,\ldots,m+\varkappa}}, \quad H_2 := \Big(h_{j,r}(\omega;\theta)\Big)_{\substack{j=\mu+\varkappa+1,\ldots,m+\varkappa \\ r=1,\ldots,\mu+\varkappa}}.$$

Розв'яжемо систему (2.160), (2.161). Помножимо її друге рівняння на матрицю $\Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1}$ та віднимимо отриману рівність від першого рівняння; отримаємо

$$(I - \Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} H_2)\psi' = \varphi' - \Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} \varphi'', \tag{2.162}$$

де I – одинична матриця відповідного порядку.

Окрім того, помноживши перше рівняння системи на $-\Delta_2^{-1}H_2$, а друге рівняння на Δ_2^{-1} і додавши їх, отримаємо рівняння

$$(I - \Delta_2^{-1} H_2 \Delta_1 H_1)\psi'' = -\Delta_2^{-1} H_2 \varphi' + \Delta_2^{-1}\varphi''. \tag{2.163}$$

На підставі зауважень 2.10, 2.11 і формули (2.142) робимо висновок що всі елементи матриць H_1 і H_2 є обмеженими фукнціями за сукупністю аргументів $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і $0 < \theta \ll 1$. Тому в лівих частинах рівняннь (2.162) та (2.163) фігурують матриці

$$\Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} H2 \quad \text{і} \quad \Delta_2^{-1} H_2 \Delta_1 H_1$$

усі елементи яких відрізняються від одиничної на матриці, элементи якої не перевищують const $\theta^{m_{\mu+\varkappa+1} - m_{\mu+\varkappa}}$.

Справді, безпосередньо перевіряється, що

$$\Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} H_2 = \left(\theta^{m_{\mu+\varkappa+l} - m_j} h'_{i,l}(\omega,\theta)\right)_{i,l=1,\ldots,\mu+\varkappa}, \tag{2.164}$$

де $H_1 H_2 =: h'_{i,l}(\omega,\theta)_{i,l=1,\ldots,\mu+\varkappa}$. Тому існує число $c' > 0$ таке, що для довільних $i, l \in \{1, \ldots, \mu+\varkappa\}$, $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$, і $0 < \theta \ll 1$ правильна оцінка

$$|\theta^{m_{\mu+\varkappa+l} - m_j} h'_{i,l}(\omega,\theta)| \leqslant c'\, \theta^{m_{\mu+\varkappa+l} - m_{\mu+\varkappa}}. \tag{2.165}$$

Тут використана умова (2.4). Аналогічно,

$$\Delta_2^{-1} H_2 \Delta_1 H_1 = \left(\theta^{m_{\mu+\varkappa+l} - m_j} h''_{i,l}(\omega,\theta)\right)_{i,l=1,\ldots,m-\mu}, \tag{2.166}$$

де $H_2H_1 =: h''_{i,l}(\omega,\theta)_{i,l=1,\dots,m-\mu}$. Тому існує число $c''>0$ таке, що для довільних $i,l\in\{1,\dots,m-\mu\}$, $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega|=1$, і $0<\theta\ll 1$ правильна оцінка

$$|\theta^{m_{\mu+\varkappa+l}-m_j}h''_{i,l}(\omega,\theta)|\leqslant c''\,\theta^{m_{\mu+\varkappa+l}-m_{\mu+\varkappa}}. \tag{2.167}$$

Нагадаємо, що $m_{\mu+\varkappa+1}-m_{\mu+\varkappa}>0$ за умовою (2.4). Нехай $0<\theta\ll 1$. Тоді матриці

$$(I-\Delta_1H_1\Delta_2^{-1}H_2)\quad\text{і}\quad(I-\Delta_2^{-1}H_2\Delta_1H_1)$$

мають обернені матриці, які позначимо через G_1 і G_2, відповідно. Тому система (2.162), (2.163) має такий єдиний розв'язок

$$\begin{gathered}\psi'=G_1\varphi'-G_1\Delta_1H_1\Delta_2^{-1}\varphi''\,,\\ \psi''=-G_2\Delta_2^{-1}H_2\varphi'+G_2\Delta_2^{-1}\varphi''\end{gathered} \tag{2.168}$$

Отже, якщо вектор $\psi=\mathrm{col}(\psi',\psi'')$ є розв'язком системи (2.160), (2.161), то він задовольняє рівності (2.168). Звідси випливає, що ця система у однорідному випадку $\varphi'=0$ і $\varphi''=0$ має лише тривіальний розв'язок. Тому вона має єдиний розвязок (2.168) для довільних правих частин φ' і φ''.

Таким, чином, єдиний розв'язок $w(\tau)=w(\omega,\tau;\theta)$ крайової задачі (2.153), (2.154) подано у вигляді (2.155), (2.156), де параметри ϕ_r означені за формулами (2.168). Тут, нагадаємо, $\omega\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega|=1$, і $0<\theta\ll 1$.

У цій задачі покладемо $\varphi_j=\delta_{q,j}$ для кожного $j\in\{1,\dots,m+\varkappa\}$. Тоді $v_q^*(\omega,\tau;\theta)=w(\omega,\tau;\theta)$, і формули (2.168) набирають вигляду

$$\left.\begin{aligned}&\psi'=G_1\mathrm{col}(\delta_{q,1},\dots,\delta_{q,\mu+\varkappa}),\\ &\psi''=-G_2\Delta_2^{-1}H_2\mathrm{col}(\delta_{q,1},\dots,\delta_{q,\mu+\varkappa}),\end{aligned}\right\}\text{якщо}\quad 1\leqslant q\leqslant\mu+\varkappa, \tag{2.169}$$

або

$$\left.\begin{aligned}&\psi'=-G_1\Delta_1H_1\theta^{m_q}\mathrm{col}(\delta_{q,\mu+\varkappa},\dots,\delta_{q,m+\varkappa}),\\ &\psi''=G_2\theta^{m_q}\mathrm{col}(\delta_{q,\mu+\varkappa+1},\dots,\delta_{q,m+\varkappa}),\end{aligned}\right\}\text{якщо}\quad \mu+\varkappa+1\leqslant q\leqslant m+\varkappa. \tag{2.170}$$

Рівність (2.155) записується у вигляді (2.150), де

$$M_q^{(1)}(\omega, z; \theta) = \sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) N_r(\omega, z; \theta), \tag{2.171}$$

$$M_q^{(2)} = \sum_{r=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_r(\omega; \theta) N_r(\theta\omega, z), \tag{2.172}$$

$$\sigma_{q,k}^* = \sum_{r=1}^{\mu+\varkappa} \psi_r \sigma_{k,r}^{\#}, \quad k = 1, \ldots, \varkappa. \tag{2.173}$$

Тут при $\theta \to 0+$ і рівномірно за $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ із $|\omega| = 1$ виконуються такі співвідношення:

якщо $1 \leqslant q \leqslant \mu + \varkappa$, то

$$\psi_r(\omega; \theta) = \begin{cases} O(1), & \text{для} \quad r = 1, \ldots, \mu + \varkappa, \\ O(\theta^{m_{\mu+\varkappa+1}}), & \text{для} \quad r = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa; \end{cases} \tag{2.174}$$

якщо $\mu + \varkappa + 1 \leqslant q \leqslant m + \varkappa$, то

$$\psi_r(\omega; \theta) = \begin{cases} O(\theta^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}), & \text{для} \quad r = 1, \ldots, \mu + \varkappa, \\ O(\theta^{m_q}), & \text{для} \quad r = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \end{cases} \tag{2.175}$$

Обгрунтуємо їх. Нехай $0 < \theta \ll 1$ і $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$. Розглянемо спочатку випадок, коли $1 \leqslant q \leqslant \mu + \varkappa$. Якщо $r \in \{1, \ldots, \mu + \varkappa\}$, то на підставі формул (2.164), (2.165) і (2.169) отримаємо

$$|\psi_r(\omega; \theta)| \leqslant \|G_1\| = \|(I - \Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} H_2)^{-1}\| \leqslant (1 - \|\Delta_1 H_1 \Delta_2^{-1} H_2\|)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (1 - c' \theta^{m_{\mu+\varkappa+1} - m_{\mu+\varkappa}})^{-1} = O(1), \quad \text{при} \quad \theta \to 0+.$$

Тут через $\|\cdot\|$ позначено відповідну норму числової квадратної матриці. Якщо ж Якщо $r \in \{\mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa\}$, то на підставі формул (2.166), (2.167) і (2.169) отримаємо

$$|\psi_r(\omega; \theta)| \leqslant \|G_2 \Delta_2^{-1} H_2\| \leqslant \|G_2\| \, \theta^{m_{\mu+\varkappa+1}} \, \|H_2\| =$$
$$= \|(I - \Delta_2^{-1} H_2 \Delta_1 H_1)^{-1}\| \, \theta^{m_{\mu+\varkappa+1}} \, \|H_2\| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \|\Delta_2^{-1} H_2 \Delta_1 H_1\|)^{-1} \, \theta^{m_{\mu+\varkappa+1}} \, \|H_2\| = O(\theta^{m_{\mu+\varkappa+1}}), \quad \text{при} \quad \theta \to 0+.$$

Аналогічно обгрунтовуються і формули (2.172).

Тепер на підставі формул (2.171), (2.172), (2.175), (2.175) і з огляду на зауваження 2.10, 2.11 негайно дістаємо оціноки (2.151), (2.152) . Лема 2.1 доведена. □

Спираючись на неї, завершимо доведення теореми 2.4 Справді, оцінимо перший доданок в (2.150). Нагадаємо, що контури γ_1 і γ_2 лежать у $\mathbb{C}_+$ і не залежить від ω. Покладемо

$$\alpha = \min_{z\in\gamma_1\cup\gamma_2} \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Тоді $|e^{i\tau z}| \leqslant e^{-\alpha\tau}$ для довільних $\tau > 0$ і $z \in \gamma_1$. Нехай $\tau > 0$, $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і $\theta \in (0; \theta_0]$.

Тому на підставі формул (2.142), (2.151) маємо такі оцінки

$$\left| D_\tau^l \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{M_q^{(1)}(\omega, z; \theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, z; \theta)} e^{i\tau z} dz \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} (iz)^l \frac{M_q^{(1)}(\omega, z; \theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, z; \theta)} e^{i\tau z} dz \right| \leqslant$$

$$\leq \begin{cases} Ce^{-\alpha\tau}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa\,, \\ C\theta^{m_q - m_{\mu+\varkappa}} e^{-\alpha\tau}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

Тут C – деяке додатне число, не залежне від вказаних ω, τ і θ.

Таким чином

$$\left(\int\limits_0^\infty \left| D_\tau^l \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{M_q^{(1)}(\omega, z; \theta)}{A_1^{(0)+}(\omega, z; \theta)} e^{i\tau z} dz \right) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \begin{cases} C, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa\,, \\ C\theta^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

Аналогічно оцінюється другий доданок в (2.150). Попередньо відмітимо,що $|e^{i\tau z/\theta}|_{\gamma_2} \leqslant e^{-\alpha\tau/\theta}$ для довільних $\tau > 0$ і $z \in \gamma_2$.

Тому на підставі формул (2.142), (2.152) маємо такі оцінки

$$\left| D_\tau^l \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{M_q^{(2)}(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} e^{i\tau z/\theta} dz \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} (iz/\theta)^l \frac{M_q^{(2)}(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} e^{i\tau z/\theta} dz \right| \leqslant$$

$$\leq \begin{cases} C\theta^{m_{\mu+\varkappa+1}-l}\, e^{-\alpha\tau/\theta}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa\,, \\ C\theta^{m_q - l}\, e^{-\alpha\tau/\theta}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

Отже,

$$\left(\int\limits_0^\infty \left| D_\tau^l \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{M_r^{(2)}(\theta\omega, z)}{A_2^{(0)+}(\theta\omega, z; 1)} e^{i\tau z/\theta} dz \right) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \begin{cases} C\theta^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa\,, \\ C\theta^{m_r - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases} \tag{2.176}$$

Формули (2.8), (2.176) дають оцінку

$$\left(\int\limits_0^\infty |D_\tau^l v_r^*(\omega, \tau; \theta)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \cdot \begin{cases} 1 + \theta^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa\,, \\ \theta^{m_q - m_{\mu+\varkappa}} + \theta^{m_q - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

Звідси негайно випливає оцінка (2.137), де число > 0 не залежить від ω і θ. Нагадаємо, що вона збігається з оцінкою (2.127), якщо $\theta \in (0, \theta_0]$, а остання була раніше доведена у випадку $\theta \in [\theta_0; +\infty)$. Таким чином доведена оцінка (2.117), тобто теорема 2.4. □

Окрім теореми 2.4, нам потрібна оцінка згори чисел $\sigma_{q,k} = \sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)$, $k = 1, \ldots, \varkappa$, які разом з функцією $v_q(t) = v_q(\xi', t; \varepsilon)$ утворюють розв'язок крайової задачі (2.115), (2.116).

Теорема 2.5. *Існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0; 1]$, $q \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$ і $k = \{1, \ldots, \varkappa\}$ виконуються оцінки:*

$$|\sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)| \leqslant C|\xi|^{-m_q - \alpha_k} \times$$

$$\times \begin{cases} 1\,, & \textit{якщо} \quad q \leqslant \mu + \varkappa\,, \\ (\varepsilon|\xi'|/(1 + \varepsilon|\xi'|))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \textit{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases} \tag{2.177}$$

Доведення. Використовуємо міркування і позначення теореми 2.4. Перейшовши до параметрів за формулами (2.121) і (2.124) отримаємо, що оцінка (2.177) рівносильна такій

$$|\sigma^*_{q,k}(\omega;\theta)| \leqslant C \times \begin{cases} 1\,, & \text{якщо} \quad q \leqslant \mu + \varkappa\,, \\ (\theta/(1+\theta))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases} \tag{2.178}$$

Тут число $C > 0$ не залежить від $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\omega| = 1$ і $\theta > 0$.

У випадку коли $\theta \in [\theta_0; \infty) \subset (0; \infty)$, де фіксоване $\theta_0 > 0$, оцінка (2.178) є наслідком нерівності (2.135).

У випадку коли $0 < \theta \ll 1$ оцінка (2.178) еквівалентна такій

$$|\sigma^*_{q,k}(\omega;\theta)| \leqslant C \times \begin{cases} 1\,, & \text{якщо} \quad q \leqslant \mu + \varkappa\,, \\ \theta^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa\,. \end{cases}$$

Ця оцінка негайно випливає з рівності (2.173) та оцінок (2.174), (2.175) і зауваженню 2.10. Що і треба було довести. □

Нам будуть потрібні версіїї нерівностей (2.117) і (2.177), встановлнних у теоремах 2.4 і 2.5, виражені в термінах функції $\Xi_{\theta,\sigma}(|\xi'|;\varepsilon)$, введеної за формулою (2.71) .

Теорема 2.6. *Нехай ціле* $\ell \geq 0$, *виконуються нерівності* (2.117), (2.177), *а натуральні числа* s *і* r *задовльняють умови* (2.82) *і* (2.90). *Тоді існує число* $C > 0$ *таке, що для довільних* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0;1]$ *і* $q \in \{1, \ldots, m+\varkappa\}$ *розв'язок задачі* (2.115), (2.116) *задовольняє нерівності*

$$\left(\int\limits_0^\infty |D_t^\ell v_q(\xi',t;\varepsilon)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant C\, \frac{\Xi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon)}{\Xi_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)}, \tag{2.179}$$

$$|\sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon)| \leqslant C \frac{\Xi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon)}{\Xi_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)}, \tag{2.180}$$

$$\text{де} \quad k = 1, \ldots, \varkappa.$$

Доведення. Обгрунтуємо спочатку нерівність (2.179). Внаслідок теореми 2.4 праву частину цієї нерівності достатньо оцінити знизу через праву частину нерівності (2.117). Використовуючи означення (2.71), маємо таку (слабку) еквівалентність функцій аргументу (ξ', ε):

$$\frac{\Xi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)}{\Xi_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)} \asymp |\xi'|^{\ell-m_q-1/2}\times \tag{2.181}$$

$$\times\begin{cases} 1\,, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2\geq 0,\ \ s-\ell\geqslant 0;\\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{\ell-s}, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2\geq 0,\ \ s-\ell< 0;\\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q+1/2-s}, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2< 0,\ \ s-\ell\geqslant 0;\\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q+1/2-\ell}, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2< 0,\ \ s-\ell< 0. \end{cases}$$

На підставі (2.82) і (2.90) робимо висновок, що кожна з чотирьох пар умов, записаних у рядках формули (2.181), еквівалентна відповідній парі умов у формулі (2.117). Якщо виконується або перша, або четверта пара умов, то праві частини цих формул пропорційні. Якщо виконується друга пара умов, то права частина нерівності (2.117) менша або рівна за праву частину формули (2.181), оскільки їх відношення дорівнює

$$\frac{(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}}{(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{\ell-s}}=(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1}+1/2-s}\leqslant 1$$

з огляду на умову (2.90). Це правильно і для третьої пари умов, бо якщо вони виконуються, то вказане відношення дорівнює

$$\frac{(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}}{(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q+1/2-s}}=(\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{s-m_{\mu+\varkappa+1}-1/2}\leqslant 1 \tag{2.182}$$

з огляду на умову (2.90).

Таким чином, права частина нерівності (2.179). оцінюється знизу через праву частину нерівності (2.117) за допомогою сталої, не заледжної від ε і ξ. Тим самим нерівність (2.179) доведена.

Обгрунтуємо тепер нерівність (2.180). Внаслідок теорем 2.5 праву частину цієї нерівності достатньо оцінити знизу через праву частину нерівності (2.177). Використовуючи означення (2.71), маємо таку (слабку) еквівалентність функцій аргументу (ξ', ε):

$$\frac{\Xi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)}{\Xi_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)} \asymp |\xi'|^{-m_q-\alpha_k}\times \tag{2.183}$$

$$\times\begin{cases} 1\,, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2\geq 0,\\ (\varepsilon|\xi'|/(1+\varepsilon|\xi'|))^{m_q+1/2-s}, & \text{якщо}\, s-m_q-1/2< 0. \end{cases}$$

На підставі (2.90) робимо висновок, про еквівалентність умов $m_q + 1/2 - s$ і $q \leqslant \mu + \varkappa$. Якщо $m_q + 1/2 - s \geqslant 0$, то праві частини формул (2.177) і (2.183) пропорційні. Якщож $m_q + 1/2 - s < 0$, то їх відношення дорівнює (2.182).

$\square$

2.9. Модельні задачі.

У цьому підрозділі будуть доведені версії теорем 2.1 і 2.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (2.1), (2.2) в області G і вибором точки $x^0 \in \overline{G}$. Слід розглянути окремо випадки коли $x^0 \in G$ і коли $x^0 \in \overline{G}$.

Нехай довільно вибрано точку $x^0 \in G$. У формулі (2.3), відкинимо молодші члени кожного диференціального оператора $A_{2m-i}(x, D)$ і зафіксуємо коефіцієнти старших членів у точці $x = x^0 \in G$. Отримаємо диференціальний оператор, який позначимо через $A^{(0)}(D; \varepsilon) := A^{(0)}(x^0; D; \varepsilon)$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$A^{(0)}(D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) = f(x; \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.184}$$

залежне від параметра $\varepsilon > 0$. Воно є модельним аналогом випадком диференціального рівняння (2.1) для $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.7. *Припустимо, що оператор $A(x; D; \varepsilon)$ еліптичний з малим параметром у точці $x = x^0$. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (2.82). *Тоді існує число $C = C(x^0) > 0$ таке, що для довільного числа $\varepsilon \in (0; 1]$ правильна апріорна оцінка*

$$\begin{aligned} ||u(\cdot; \varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| \leq C \left(||f(\cdot; \varepsilon); H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)|| + \right. \\ \left. + \|u(\cdot; \varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)\| \right). \end{aligned} \tag{2.185}$$

Тут $u(\cdot; \varepsilon) \in H^r(\mathbb{R}^n)$ і $f(\cdot; \varepsilon) \in H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n)$ є будь-які функції, що задовольняють рівняння (2.1), *а число C не залежить як від $\varepsilon \in (0; 1]$, так і від цих функцій.*

Доведення. За умовою, оператор $A^{(0)}(x^0; D; \varepsilon)$ має властивість (2.7). Оскільки простір $H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)$ задається по-різному у випадках $s - 2\mu \geqslant 0$ і $s - 2\mu < 0$ (див. формули (2.68) і (2.72)), дослідимо ці випадки окремо.

У випадку $s - 2\mu \geqslant 0$ на підставі (2.68) і (2.7) маємо таке:

$$\begin{aligned} ||f(\cdot; \varepsilon); H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)||^2 + ||u(\cdot; \varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)||^2 = \\ = ||A^{(0)}(D; \varepsilon)u(\cdot; \varepsilon); H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon)||^2 + ||u(\cdot; \varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)||^2 = \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{s-2\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2+1\Big)\,|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2}{(1+|\xi|^2)^{2\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{2m-2\mu}}(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}+1\right)|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{C^2|\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{4m-4\mu}}{(1+|\xi|^2)^{2\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{2m-2\mu}}(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}+1\right)|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant (C^2+1)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)^{2\mu}(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}+1\right)|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant (C^2+1)\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi,\varepsilon)(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant (C^2+1)C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-m}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= (C^2+1)C_1||u(\cdot;\varepsilon);H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||^2.$$

Тут

$$\Psi(\xi,\varepsilon) := \left(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)^{2\mu} + \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}},$$

$$C_1 := \inf\{\Psi(\xi,\varepsilon) : \xi\in\mathbb{R}^n,\ \varepsilon\in(0;1]\} > 0.$$

Остання нерівність вилпиває з того, що

$$\left(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)^{2\mu} \geqslant \frac{1}{2^{2\mu}} \quad \text{при} \quad |\xi|\geqslant 1,$$

$$\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}} \geqslant \frac{1}{2^r} \quad \text{при} \quad |\xi|\leqslant 1 \quad \text{і} \quad \varepsilon\in(0;1].$$

Отже, потрібна нам оцінка (2.91) доведена у випадку $s-2\mu\geqslant 0$.

У випадку $s-2\mu<0$ на підставі формул (2.72) і (2.7) маємо таке:

$$||f(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||^2 = ||A^{(0)}(D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||^2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2(s-2\mu)}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2}{(|\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{2m-2\mu}}|\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{4m-4\mu}}{|\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{2m-2\mu}} |\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi.$$

Залишилось скористатись твердженням 2.2, оскільки квадрат норми в лівій частині оцінки (2.91) еквівалентний рівномірно за $\varepsilon \in (0;1]$ нормі

$$||u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)||^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi.$$

Таким чином, оцінка (2.91) доведена і у випадку $s - 2\mu < 0$. $\square$

Теорема 2.8. *Нехай натуральні r і s задовольняють умову (2.82), а U – відкрита непорожня множина $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що існує число $C = C(x^0) > 0$, таке що для довільного $\varepsilon \in (0;1]$ і для довільних функцій $u(\cdot;\varepsilon) \in H^r(\mathbb{R}^n)$ з $\operatorname{supp} u \subset U$ і $f(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n)$, що задовольняють рівняння (2.1), правильна апріорна оцінка (2.91). Тоді оператор $A(x;D;\varepsilon)$ еліптичний з малим параметром у точці $x = x^0$.*

Доведення цієї теореми спирається на такий факт.

Лема 2.2. *Нехай виконується оцінка (2.91) для довільних функцій $u(\cdot;\varepsilon)$ і $f(\cdot;\varepsilon)$ з умови теореми 2.8. Тоді для довільних $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ і $\varepsilon \in (0;1]$ правильна оцінка*

$$\left\| |D|^s(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u; L_2(\mathbb{R}^n)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant C\left\| |D|^{s-2\mu}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}A^{(0)}(D;\varepsilon)u; L_2(\mathbb{R}^n)\right\|. \qquad (2.186)$$

де число $C > 0$ не залежить від u та ε.

Спочатку покажемо, що теорема 2.8 випливає з леми 2.2, а потім доведемо останню.

Доведення теореми 2.8 . Необхідність умови 2.1 легко випливає з (2.186). Застосовуючи перетворення Фур'є, перепишемо (2.186) у вигляді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^{2s-4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-s+2\mu}\left|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)\right|^2\right)|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi,$$

або

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} - C^2\,|\xi|^{2s-4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2\Big) \times$$
$$\times|\widetilde{u}(\xi;\varepsilon)|^2 d\xi \leqslant 0.$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільної функції $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s} - C^2\,|\xi|^{2s-4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2 \leqslant 0,$$

для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\varepsilon \in (0;1]$.

Звідси

$$|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2 \geqslant C^{-2}\,\frac{|\xi|^{2s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}}{|\xi|^{2s-4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}} = |\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{2m-2\mu},$$

тобто оператор $A(x;D;\varepsilon)$ еліптичний з малим параметром у точці $x = x^0$. □

Доведення леми 2.2. Нехай $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in (0;1]$ і $\rho \gg 1$. Слідуючи [див. vol98, vol06] покладемо

$$(S_\rho u)(x) = u(\rho x)),\quad u_\rho(x) := \rho^{-s+n/2}(S_\rho u)(x),$$

де y – деяка фіксова точка множини U.

Якщо $\rho \gg 1$, то $\operatorname{supp} u \subset U$, U – окіл точка x_0 з умови теореми 2.8. За умовою леми 2.2 правильна оцінка (2.91)

$$||u_\rho; H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon/\rho)|| \leq C(||A^{(0)}(D;\varepsilon/\rho)u_\rho; H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon/\rho)||+$$
$$+\|u_\rho; L_2(\mathbb{R}^n)\|). \tag{2.187}$$

де число $C > 0$ не залежить від u, ε і ρ. Покажемо, що при $\rho \to +\infty$ оцінка (2.187) переходить у (2.186).

$$\|u_\rho; H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon/\rho)\| = \|(1+|D|^2)^{s/2}(1+(\varepsilon/\rho)^2|D|^2)^{(r-s)/2}u_\rho; L_2(\mathbb{R}^n\| =$$
$$= \rho^{-s+n/2}\|(1+|D|^2)^{s/2}(1+(\varepsilon/\rho)^2|D|^2)^{(r-s)/2}(S_{\rho,x^0}u); L_2(\mathbb{R}^n\| =$$
$$= \rho^{-s+n/2}\|S_{\rho,x^0}\Big((1+|\rho D|^2)^{s/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u\Big); L_2(\mathbb{R}^n)\| =$$
$$= \rho^{n/2}\|S_{\rho,x^0}\Big((1/\rho^2+|D|^2)^{s/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u\Big); L_2(\mathbb{R}^n)\| =$$
$$= \|(1/\rho^2+|D|^2)^{s/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u; L_2(\mathbb{R}^n)\| \to$$
$$\to \Big\||D|^s(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u; L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Отже,

$$\|u_\rho; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \varepsilon/\rho)\| \to \||D|^s(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s)/2}u; L_2(\mathbb{R}^n)\| \tag{2.188}$$

при $\rho \to +\infty$.

Аналогічно

$$||A^{(0)}(D;\varepsilon/\rho)u_\rho(x); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon/\rho)|| =$$
$$= \Big\|(1+|D|^2)^{(s-2\mu)/2}(1+(\varepsilon/\rho)^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}A^{(0)}(D;\varepsilon/\rho)u_\rho; L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| =$$
$$= \rho^{-s+n/2}\Big\|(1+|D|^2)^{(s-2\mu)/2}(1+(\varepsilon/\rho)^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}\times$$
$$\times A^{(0)}(D;\varepsilon/\rho)(S_{\rho,x^0}u); L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| =$$
$$= \rho^{-s+n/2}\Big\|S_\rho\Big((1+|\rho D|^2)^{(s-2\mu)/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}\times$$
$$\times A^{(0)}(\rho D;\varepsilon/\rho)u\Big); L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| =$$
$$= \rho^{n/2}\Big\|S_\rho\Big((1/\rho^2+|D|^2)^{(s-2\mu)/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}\times$$
$$\times A^{(0)}(D;\varepsilon)u\Big); L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| =$$
$$= \Big\|(1/\rho^2+|D|^2)^{(s-2\mu)/2}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}A^{(0)}(D;\varepsilon)u; L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| \to$$
$$\to \Big\||D|^{s-2\mu}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}A^{(0)}(D;\varepsilon)u; L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Отже,

$$||A^{(0)}(D;\varepsilon/\rho)u_\rho(x); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \varepsilon/\rho)|| \to \tag{2.189}$$
$$\to \Big\||D|^{s-2\mu}(1+\varepsilon^2|D|^2)^{(r-s-2m+2\mu)/2}A^{(0)}(D;\varepsilon)u; L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Нарешті,

$$||u_\rho(x); L_2(\mathbb{R}^n)|| = \Big\|(S_{\rho,x^0}u); L_2(\mathbb{R}^n)\Big\| = \tag{2.190}$$
$$= \rho^{-s+n/2}||u; L_2(\mathbb{R}^n)|| \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty.$$

Перейшовши в (2.187) до границі при $\rho \to +\infty$ і скориставшись (2.188), (2.189), (2.190) отримуємо потрібну оцінку (2.186). $\square$

Розглянемо тепер ситуацію, коли довільно вибрана почка $x^0 \in \partial G$. Нехай U — достатньо малий окіл точки x^0 узятий із топології на $\overline{G}$. Введемо в U спеціальні локальні координати $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$, розглянуті в п.2.2. Позначимо через U_0 – образ околу U у цих локальних координатах. Тоді U_0 – деяка відкрита множина у топології простору $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, причому $U_0 \cap \mathbb{R}^{n-1} \neq \varnothing$.

У крайовій задачі (2.1), (2.2) відкинимо молодші члени усіх диференціальних операторів $A_{2m-i}(x; D)$, $B_j(x; D)$ і $C_{j,k}(x; D')$, зафіксуємо коефіцієнти старших членів у точці $x = x^0 \in \partial G$ і перейдемо до спеціальних локальних координат в околі U точки x^0. Отримані диференціальні оператори позначимо через $A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n)$, $B^{(0)}_j(D', D_n)$ і $C^{(0)}_{j,k}(D')$ відповідно. За аналогією з (2.5) покладемо

$$A^{(0)}(D', D; \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n).$$

Розглянемо таку крайову задачу в півпросторі $\mathbb{R}^n_+$:

$$A^{(0)}(D', D_n; \varepsilon) u(x', x_n; \varepsilon) = f(x', x_n; \varepsilon) \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \tag{2.191}$$

$$B^{(0)}_j(D', D_n) u(x', x_n; \varepsilon)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{jk}(D') \varrho_k(x'; \varepsilon) = g_j(x'; \varepsilon), \tag{2.192}$$

$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa$$

Вона залежить від параметра $\varepsilon > 0$ і є модельним аналогом крайової задачі (2.1), (2.2) для $\mathbb{R}^n_+$.

За аналогією з означенням 2.1 будемо говорити, що крайова задача (2.1), (2.2) *еліптична з малим параметром у точці* $x^0 \in \partial G$, якщо виконуються умови 2.1 – 2.6 для цієї точки.

Теорема 2.9. *Припустимо, що крайва задача* (2.1), (2.2) *еліптична з малим параметром у точці* $x^0 \in \partial G$. *Нехай натуральні числа* r *і* s *задовольняють умови* (2.82) *і* (2.90). *Тоді існує число* $C = C(x^0) > 0$ *таке, що для довільного числа* $\varepsilon \in (0; 1]$ *правильна апріорна оцінка*

$$\begin{gathered} ||u(\cdot; \varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot; \varepsilon); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2, s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| \leqslant \\ \leqslant C\Big(||f(\cdot; \varepsilon); H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)|| + \\ + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot; \varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \varepsilon)|| + \\ + ||u(\cdot; \varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n_+)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot; \varepsilon); L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| \Big). \end{gathered} \tag{2.193}$$

Тут

$$u(\cdot;\varepsilon)\in H^{r}(\mathbb{R}^n_+)\quad i\quad \varrho_k(\cdot;\varepsilon)\in H^{r+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),\quad \text{де}\quad k=1,\ldots,\varkappa,\tag{2.194}$$

та

$$\begin{gathered} f(\cdot;\varepsilon)\in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)\quad i \\ g_j(\cdot;\varepsilon)\in H^{r-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),\ \text{де}\, j=1,\ldots,m+\varkappa, \end{gathered}\tag{2.195}$$

є будь-які функції, які задовольняють крайову задачу (2.191), (2.192), *а число* C *не залежить, як від* $\varepsilon\in(0;1]$, *так і від цих функцій.*

Зауваження 2.12. Стосовно включень, які фігурують у формулах (2.194) і (2.195), див. зауваження 2.7, для випадку $G:=\mathbb{R}^n_+$ і $\partial G:=\mathbb{R}^{n-1}$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $f(\cdot,\varepsilon)\equiv 0$. Згідно з твердженням 2.7 запишемо

$$\begin{gathered} ||u(\cdot,\varepsilon);H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)||\asymp ||u;L_2(\mathbb{R}^n_+)||+ \\ +\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty\sum_{\ell=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\varepsilon)|D_n^\ell\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2d\xi'dx_n\right)^{1/2}. \end{gathered}$$

Ця еквівалентність норм рівномірна за параметром $\varepsilon\in(0;1]$. Тому (2.193) є наслідком такої нерівності:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty\sum_{\ell=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\varepsilon)|D_n^\ell\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2d\xi'dx_n+ \\ +\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)||^2\leqslant \\ \leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)||^2+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^{n-1})||^2\right), \end{gathered}\tag{2.196}$$

де число $C'>0$ не залежить від $\varepsilon\in(0;1]$ і функцій (2.194), (2.195). Доведемо цю нерівність.

Нагадаємо, що простір $\mathcal{H}^{\theta,\eta}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)$ задається по-різному у випадках $\eta\geqslant 0$ і $\eta<0$ за формулами (2.79) і (2.80) відповідно. Оскільки $s+\alpha_k-1/2\geqslant 0$ (див. зауваження 2.3 і умову (2.90)) то норма у просторі $\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)$ задана формулою (2.79) для кожного $k\in$

$\{1,\dots,\varkappa\}$. Тому на підставі (2.79) і (2.80) бачимо, що оцінка (2.196) є наслідком оцінки

$$\sum_{\ell=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)\int\limits_0^\infty|D_n^\ell\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2dx_n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa}\Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\le \tag{2.197}$$
$$\le C''\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2,$$

для довільних $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ і $\varepsilon\in(0;1]$, де число $C''>0$ не залежить від ξ' і ε .

Припустимо, що функції (2.194) і (2.195) задовольняють крайову задачу (2.191), (2.192), де $f(\cdot;\varepsilon)\equiv 0$. Доведемо нерівність (2.197). Нехай $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\{0\}$ і $\varepsilon\in(0;1]$. Тоді функція $\widehat{u}(\xi',t;\varepsilon)$ аргументу $t\geqslant 0$ разом з числами $\widehat{\varrho}_1(\xi';\varepsilon),\dots,\widehat{\varrho}_\varkappa(\xi';\varepsilon)$ є розв'язком задачі

$$A^{(0)}(\xi',D_n;\varepsilon)\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)=\widehat{f}(\xi',x_n;\varepsilon),\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x_n>0,$$
$$B_j^{(0)}(\xi',D_n)\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^{(0)}_{j,k}(\xi')\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)=\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon),$$
$$\xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad j=1,\dots,m+\varkappa,$$

де $\widehat{f}(\xi',x_n;\varepsilon)\equiv 0$. Нагадаємо, що остання є граничним символом задачі (2.1), (2.2) у точці $x^0\in\partial G$. Цей розв'язок є такою лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків граничного символа, введеного у п. 2.8:

$$\widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)=\sum_{q=1}^{m+\varkappa}\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)v_q(\xi',x_n;\varepsilon), \tag{2.198}$$

$$\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)=\sum_{q=1}^{m+\varkappa}\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)\sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon),\quad k=1,\dots,\varkappa. \tag{2.199}$$

Підставляючи співвідношення (2.198) і (2.199) в ліву частину нерівності (2.197) та застосовуючи теорему 2.6 неважко отримати оцінку (2.197). Справді, на підставі (2.179), маємо:

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_q(\xi';\varepsilon) v_q(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2\, \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell v_q(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2\, \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \frac{\Xi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon)}{\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 (r+1) \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon) |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Далі, на підставі (2.180), отримуємо таке:

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon) |\widehat{\varrho}_k(\xi\varrho';\varepsilon)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon) \left| \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_q(\xi';\varepsilon) \sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} \sum_{k=1}^{\varkappa} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2\, \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon) |\sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon\sigma)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \sum_{k=1}^{\varkappa} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2 \times$$

$$\times \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon) \frac{\Xi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon)}{\Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \varkappa \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\varepsilon) |\widehat{g}_q(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Перейдемо тепер до доведення оцінки (2.193) у загальному випадку. Припустимо, як і раніше, що функції (2.194) і (2.195) задовольняють крайову задачу (2.191), (2.192). На підставі формул (2.75), (2.76) бачимо, що оцінка

(2.193) є наслідком нерівності

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)\int_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2 \leq \tag{2.200}$$
$$\leq \widetilde{C}\left(\int_0^\infty |(D_n-i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2\right),$$

для довільних $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ і $\varepsilon\in(0;1]$, де число $C''>0$ не залежить від ξ' і ε .

Запишемо розв'язок $u(\cdot;\varepsilon)$ диференціального рівняння (2.191) у вигляді $u(\cdot;\varepsilon)=v(\cdot;\varepsilon)+w(\cdot;\varepsilon)$, де $v(\cdot;\varepsilon)$ – деякий спеціальний розв'язок класу $H^r(\mathbb{R}^n_+)$ рівняння

$$A^{(0)}(D',D_n,\varepsilon)v(x',x_n;\varepsilon)=f(x',x_n;\varepsilon),\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x_n>0. \tag{2.201}$$

Цей розв'язок буде представлений пізніше. Тоді функції $w(\cdot;\varepsilon)$ і $\varrho_1(\cdot;\varepsilon),\ldots,\varrho_\varkappa(\cdot;\varepsilon)$ є розв'язком навіоднорідної крайової задачі

$$A^{(0)}(D',D_n;\varepsilon)w(x',x_n;\varepsilon)=0,\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x_n>0,$$
$$B_j^{(0)}(D',D_n)w(x',x_n;\varepsilon)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(D')\varrho_k(x';\varepsilon)=g_j(x';\varepsilon)-\chi_j(x';\varepsilon),$$
$$x'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad j=1,\ldots,m+\varkappa.$$

тут позначено

$$\chi_j(x';\varepsilon):=B_j^{(0)}(D',D_n)v(x',x_n;\varepsilon)|_{x_n=0}.$$

Нижче буде показано, що розв'язок $v(\cdot;\varepsilon)$ рівняння (2.201) можна вибрати так, щоб

$$\sum_{l=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\varepsilon)\int_0^\infty |D_n^\ell \widehat{v}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2 dx_n \leqslant \tag{2.202}$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n,$$

$$\sum_{k=0}^{\varkappa} \Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\varepsilon)|\chi_j(\widehat{\xi'};\varepsilon)|^2 \leqslant \tag{2.203}$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n,$$

для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ і $\varepsilon \in (0;1]$, де число $C > 0$ не залежить від ξ' і ε.

Нерівність (2.197) для розв'язку $w(\cdot;\varepsilon)$ і $\varrho_1(\cdot;\varepsilon), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\varepsilon)$ напіводнорідної крайової задачі (2.9), (2.10) набирає вигляду

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{w}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2 \leq \tag{2.204}$$
$$\leq C'' \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon) - \widehat{\chi}_j(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Скориставшись нерівностями (2.202) – (2.204) отримаємо оцінку (2.200):

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2$$
$$\leqslant 2\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{v}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$
$$+2\sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\varepsilon) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{w}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C\int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$

$$+4C''\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2+$$

$$4C''\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\chi}_j(\xi';\varepsilon)|^2 \leqslant (2C+4C''C)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n - i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\varepsilon)|^2 dx_n +$$

$$+4C''\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Слідуючи [11, с. 137] покладемо

$$v(x', x_n;\varepsilon) := RF_{(\xi';\xi_n)\to(x';x_n)}\left[\frac{\widetilde{Ef}(\xi',\xi_n;\varepsilon)}{A^{(0)}(\xi',\xi_n;\varepsilon)}\right] \tag{2.205}$$

Тут E – оператор Хестенса продовження функцій з півпростору $\mathbb{R}^n_+$ на весь простір $(-\infty;+\infty)$, R – оператор звуження на піввісь $(0;+\infty)$, $\left(A^{(0)}(D', D_n;\varepsilon)\right)^{-1}$ псевдодиференціальний оператор з символом $\left(A^{(0)}(\xi',\xi_n;\varepsilon)\right)^{-1}$. Для введеної функції рівність (3.54) випливає з перестановочності диференціального оператора $A^{(0)}(\xi', D_n;\varepsilon)$ з оператором звуження R. Як показано в [11, с.136], для функції v виконуюється оцінка (2.202), тому $v \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon) \subset H^r(\mathbb{R}^n_+)$. Для повноти викладу наведемо доведення цієї оцінки.

Нагадаємо означення оператора продовження за Хестенсом:

$$(Eu)(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n)\,, & \text{якщо} \quad x_n \geqslant 0\,, \\ \sum\limits_{k=0}^{N} a_k\, u\left(x', -\frac{x_n}{k}\right)\,, & \text{якщо} \quad x_n < 0\,, \end{cases}$$

де N достатньо велике, а числа a_k пов'язані співвідношеннями

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\left(-\frac{1}{k}\right)^j = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

Доведемо (2.202). Підставляючи в ліву частину нерівності (2.202) функцію (2.205), застосовуючи рівність Парсеваля, умову 2.1 і формулу (2.71) оцінимо згори ліву частину (2.202) так:

$$\sum_{l=0}^{s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2(s-\ell)}}{|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2}|\xi_n^\ell|^2|\widetilde{Ef}(\xi)|^2d\xi_n+ \tag{2.206}$$

$$+\sum_{l=s+1}^{r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon^{2(\ell-s)}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-\ell}}{|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2}|\xi_n^\ell|^2|\widetilde{Ef}(\xi)|^2d\xi_n$$

Скористаємося умовою 2.1 для симовла $A^{(0)}(\xi;\varepsilon)=A^{(0)}(x^0;\xi;\varepsilon)$. У першій сумі (2.206) множник при $|\widetilde{Ef}(\xi)|^2$ в підінтегральному виразі не перевищує величини

$$\Big((1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-2m+2\mu}\Big)\cdot\Big(|\xi'|^{2(s-\ell)}|\xi_n|^{2\ell}|\xi|^{-4\mu}\Big), \tag{2.207}$$

помноженої на деяке число, не залежне від ξ і ε.

Оскільки $r > s$, то перший множник у (2.207) не перевищує $(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-s+2\mu}$. Окрім того, $s\geqslant l$, то другий множник не перевищує $|\xi|^{2(s-2\mu)}$. Отже, величина (2.207) менша або рівна величині

$$\Big|(\varepsilon\xi_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{2(r-2m-s+2\mu)}(\xi_n-i|\xi'|)^{2(s-2\mu)}\Big|$$

помножену на деяке число, не залежне від ξ і ε. Підставляючи цю оцінку в (2.206) і скориставшись тим, що (див. [11, сс. 129, 137])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi_n^\ell\widetilde{Ef}(\xi)|^2d\xi_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|D_n^\ell E\widehat{f}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2dx_n\le\mathrm{const}\int\limits_{0}^{\infty}|D_n^\ell\widehat{f}(\xi',x_n;\varepsilon)|^2dx_n,$$

нерівність (2.202) буде доведена для $s\ge\ell$.

У другій сумі у (2.206) множник при $|\widetilde{Ef}(\xi)|^2$ у підінтегральному виразі не перевищує величини

$$\Big(\varepsilon^{2(\ell-s)}|\xi_n|^{2(\ell-s)}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-\ell}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-2m+2\mu}\Big)\cdot\Big(|\xi_n|^{2s}|\xi|^{-4\mu}\Big). \tag{2.208}$$

Перший множник у (2.208) оцінюється через $(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-2m-s+2\mu}$, а другий не перевищує $|\xi|^{2(s-2\mu)}$ і такии чином знову прийдемо до нерівності (2.202).

Доведемо тепер (2.203). Відмітимо, що

$$\widehat{\chi}_j(\xi';\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_j^{(0)}(\xi)}{A^{(0)}(\xi;\varepsilon)}\widetilde{Ef}(\xi;\varepsilon)d\xi_n=:\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_j(\xi;\varepsilon)F(\xi;\varepsilon)d\xi_n,$$

де покладено

$$F(\xi;\varepsilon):=(\varepsilon\xi_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}(\xi_n-i|\xi'|)^{s-2\mu}\widetilde{Ef}(\xi;\varepsilon),$$

$$H_j(\xi;\varepsilon):=\frac{B_j^{(0)}(\xi)(\varepsilon\xi_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{-r+2m+s-2\mu}(\xi_n-i|\xi'|)^{-s+2\mu}}{A^{(0)}(\xi;\varepsilon)}.$$

За нерівністю Шварца маємо

$$|\widehat{\chi}_j(\xi';\varepsilon)|^2\le\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|H_j(\xi;\varepsilon)|^2d\xi_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi;\varepsilon)|^2d\xi_n.$$

Тому доведення формули (2.203) зводиться до встановлення нерівності

$$\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|;\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|H_j(\xi;\varepsilon)|^2d\xi_n\le\widetilde{C}<\infty, \tag{2.209}$$

де число $\widetilde{C}$ не залежить від ξ' і ε.

Маємо

$$|H_j(\xi;\varepsilon)|^2=\left|\frac{B_j^{(0)}(\xi)(\varepsilon\xi_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{-r+2m+s-2\mu}(\xi_n-i|\xi'|)^{-s+2\mu}}{A^{(0)}(\xi;\varepsilon)}\right|^2=$$
$$=\frac{|B_j^{(0)}(\xi)|^2(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+2m+s-2\mu}|\xi|^{-2s+4\mu}}{|A^{(0)}(\xi;\varepsilon)|^2}\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,\frac{|\xi|^{2m_j}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+2m+s-2\mu}|\xi|^{-2s+4\mu}}{|\xi|^{4\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{4m-4\mu}}\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\,(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}.$$

Отже,

$$|H_j(\xi;\varepsilon)|^2\le\mathrm{const}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}.$$

Тому для доведення (2.209) достатньо встановити нерівність

$$\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n\le\mathrm{const}. \tag{2.210}$$

З огляду на формулу (2.71) дослідими окремо два можливих випадки, коли $s-m_j-1/2>0$ і коли $s-m_j-1/2\leqslant 0$ (нагадаємо, що $s,m_j\in\mathbb{Z}$).

Розглянемо спочатку випадок $s-m_j-1/2>0$. Тоді ліва частина нерівності (2.210) набуває вигляду

$$(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2s-2m_j-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n.$$

Скористаємося заміною $\xi_n=|\xi'|t$ під знаком інтеграла:

$$(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2s-2m_j-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n=$$

$$=(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2s-2m_j-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2(|\xi'|^2+|\xi_n|^2))^{-r+s}(|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^{-s+m_j}d\xi_n=$$

$$=(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2s-2m_j-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2(|\xi'|^2+|\xi'|^2\,t^2))^{-r+s}(|\xi'|^2+|\xi'|^2\,t^2)^{-s+m_j}|\xi'|dt=$$

$$=(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-s}|\xi'|^{2s-2m_j-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2+\varepsilon^2|\xi'|^2\,t^2))^{-r+s}(1+t^2)^{-s+m_j}|\xi'|^{-2s+2m_j+1}dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{\varepsilon^2|\xi'|^2}{1+\varepsilon^2|\xi'|^2}t^2\right)^{-r+s}(1+t^2)^{-s+m_j}dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2)^{-s+m_j}dt=:\mathrm{const}<\infty.$$

Тут, нагадаємо, $-r+s\leqslant-1$. Оскільки відповідно до (2.82) $r>m_{m+\varkappa}+1/2$.

Розглянемо тепер випадок $s-m_j-1/2\leq 0$. Тоді ліва частина (2.210) набуває вигляду

$$\varepsilon^{2m_j-2s+1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-m_j-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n.$$

В цьому випадку зробимо заміну $\xi_n = \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{1/2}t$. Тоді отримаємо

$$\varepsilon^{2m_j-2s+1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-m_j-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n =$$

$$= \varepsilon^{2m_j-2s+1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-m_j-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2(|\xi'|^2+|\xi_n|^2))^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}d\xi_n =$$

$$= \varepsilon^{2m_j-2s+1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{r-m_j-1/2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+\varepsilon^2(|\xi'|^2+\varepsilon^{-2}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)t^2))^{-r+s}|\xi|^{-2s+2m_j}\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2|\xi'|^2)^{1/2}dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^2|\xi'|^2}{1+\varepsilon^2|\xi'|^2}+t^2\Big)^{m_j-s}(1+t^2)^{-r+s}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-r+m_j}dt =: \mathrm{const} < \infty.$$

Нагадаємо, що $-r+m_j < -1/2$ на підставі умови (2.82). □

Теорема 2.10. *Нехай оператор* $A(x,D;\varepsilon)$ *– задовольняє умову 2.2 у точці* x_0 *а натуральні* r *і* s *задовольняють умови* (2.82) *і* (2.90). *Припустимо, що існує число* $C = C(x^0) > 0$, *таке що для довільного* $\varepsilon \in (0;1]$ *і для довільних функцій* $u(\cdot;\varepsilon) \in H^r(\mathbb{R}^n_+)$, $\varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), k = 1,\ldots,\varkappa$, *і* $f(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)$, $g_j(\cdot;\varepsilon) \in H^{r-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), j = 1,\ldots,m+\varkappa$ *що задовольняють* (2.191), (2.192), *правильна апріорна оцінка* (2.193). *Тоді задача* (2.1), (2.2) *еліптична з малим параметром у точці* $x^0 \in \partial G$.

Доведення. Необхідність умови 2.1. Підставимо в (2.193) гладку функцію u з носієм в $\mathbb{R}^n_+$. Тоді вірна оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)|| \le C\left(||f(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)||+\right.$$
$$\left.+\|u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n_+)\|\right).$$

Залишилося скористатися теоремою 2.8. Умова 2.2 випливає з умови теореми.

Необхідність решти умов слідує з наступних міркувань. Розглядаємо функції $u(x;\varepsilon)$ вигляду $u(x',x_n;\varepsilon) = \phi(x';\varepsilon)V(x_n;\varepsilon)$, де $\phi(\cdot;\varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ і $)V(\cdot;\varepsilon) \in C^\infty[0;\infty)$ фінітні, причому $\mathrm{supp}\, u(\cdot;\varepsilon) \subset U_0$. Міркучи аналогічно до

[15, глава 3, предложение 2 в п.2.3] і використовуючи еквівалентність норм (2.75), (2.76) отримаємо нерівность

$$
\begin{gathered}
\operatorname{const}\Big(\sum_{\ell=0}^{r}\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\varepsilon)\int\limits_0^\infty|D_n^\ell V(x_n)|^2dx_n+ \\
+\sum_{k=1}^{\varkappa}\Xi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\Big)\le \\
\le\int\limits_0^\infty|R(D_n-i|\xi'|)^{s-2\mu}(\varepsilon D_n-i\sqrt{1+\varepsilon^2|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}A^{(0)}(\xi',D_n;\varepsilon)LV|^2dx_n+ \\
+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2. \qquad (2.211)
\end{gathered}
$$

Тут $\operatorname{const}>0$ – не залежить від V, ϱ_k, g_j і ξ', а $LV\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ – продовження функції V за Хестенсом.

Необхідність умови 2.3. Припустимо, що функція $V(x_n)\in L_2(\mathbb{R}_+)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$
A^{(0)}(\xi',D_n;\varepsilon)V(x_n)=0,\quad x_n>0.
$$

Тоді ця функція буде задовольняти рівняння

$$
A^{(0)+}(\xi',D_n;\varepsilon)V(x_n)=0,\quad x_n>0.
$$

Тоді оцінка (2.211) набуває вигляду

$$
\begin{gathered}
c(\xi';\varepsilon)\left(\sum_{\ell=0}^{r}\|D_n^\ell V;L_2(\mathbb{R}^n_+)\|+\sum_{k=1}^{\varkappa}|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\right)\leqslant \\
\leqslant\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\left|\overline{B}_j(\xi',D_n;\varepsilon)V(0)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^{(0)}_{jk}(\xi')\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)\right|^2.
\end{gathered}
$$

Тут $\overline{B}_j$ – залишок від ділення $B_j^{(0)}$ на $A^{(0)+}$ та $c(\xi';\varepsilon)>0$ для $\xi'\neq0$ та $\varepsilon\geqslant0$.

Враховучи стандартні оцінки слідів функцій з $\mathbb{R}_+$ слідує, що

$$
\sum_{j=0}^{r}|D_n^{j-1}V(0)|\leqslant C\sum_{j=0}^{r+1}\|D_n^{j-1}V;L_2(\mathbb{R}^n_+)\|
$$

Коритуючись тим, що $r \geqslant m$ отримаємо нерівність

$$\tilde{c}(\xi';\varepsilon)\left(\sum_{j=0}^{m}|D_n^{j-1}V(0)|+\sum_{k=1}^{\varkappa}|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\left|\sum_{k=1}^{m}\overline{b}_{j,k}(\xi';\varepsilon)D_n^{k-1}V(0)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}^{(0)}(\xi')\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)\right|^2.$$

де

$$\overline{B}_j(\xi',\tau;\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}\overline{b}_{j,k}(\xi';\varepsilon)\tau^{k-1}.$$

Стала $\tilde{c}(\xi';\varepsilon)>0$ при $\xi'\neq 0$. Остання нерівність (див. [15, глава 3, п.7.1 с.188]) еквівалентна тому, що матриця Лопатинського $L(\xi',\varepsilon)$ (див. (2.97), $p=m$) невироджена.

Необхідність умови 2.5. Покладемо в нерівності (2.211) $\varepsilon=0$. З урахуванням (2.71), (2.90) та

$$\Xi_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)=\begin{cases}|\xi'|^{s-m_j-1/2}, & \text{якщо}\quad \mu+\varkappa\geq j\,,\\ 0, & \text{якщо}\quad \mu+\varkappa<j\,.\end{cases}$$

$$\Xi_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\varepsilon)=|\xi'|^{s+\alpha_k-1/2}.$$

Таким чином нерівність (2.211) набуває вигляду

$$\mathrm{const}\Big(\sum_{\ell=0}^{r}|\xi'|^{2(s-\ell)}\int_0^\infty|D_n^\ell V(x_n)|^2dx_n+\sum_{k=1}^{\varkappa}|\xi'|^{2(s+\alpha_k-1/2)}|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\Big)\leq$$

$$\leq\int_0^\infty|R(D_n-i|\xi'|)^{s-2\mu}A_{2\mu}^{(0)}(\xi',D_n)LV|^2dx_n+\sum_{j=1}^{\mu+\varkappa}|\xi'|^{2(s-m_j-1/2)}|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Повторюючи наведені раніше міркування, отримаємо що для системи операторів $\{A_{2\mu},B_1,C_{1,1},\ldots,C_{1,\varkappa},B_{\mu+\varkappa},C_{\mu+\varkappa,1},\ldots,C_{\mu+\varkappa,\varkappa}\}$ виконується умова 2.5.

Необхідність умови 2.4. Для перевірки цієї умови помножимо обидві частини на ε^{s-r} та перейдемо до границі при $\varepsilon\to\infty$. В результаті отримаємо

$$\mathrm{const}\sum_{\ell=0}^{r}|\xi'|^{2(r-\ell)}\int_0^\infty|D_n^\ell V(x_n)|^2dx_n+\sum_{k=1}^{\varkappa}|\xi'|^{2(r+\alpha_k-1/2)}|\widehat{\varrho}_k(\xi';\varepsilon)|^2\leq$$

$$\leq\int_0^\infty|R(D_n-i|\xi'|)^{r-2m}A_{2m}^{(0)}(\xi',D_n)LV|^2dx_n+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}|\xi'|^{2(r-m_j-1/2)}|\widehat{g}_j(\xi';\varepsilon)|^2.$$

Аналогічно до попередніх двох пунктів випливає необхідність умови 2.4.

Необхідність умови 2.6. Необхідність умови випливає з нерівності

$$\mathrm{const} \sum_{\ell=s}^{r} \int_0^\infty |D_n^\ell V(x_n)|^2 dx_n \le$$

$$\le \int_0^\infty |(D_n - i)^{r-s-2m+2\mu} D_n^s Q(D_n) V|^2 dx_n + \sum_{j=\mu+\varkappa}^{m+\varkappa} |B_j(0, D_n) V(0)|^2.$$

Оцінка виводиться аналогічно до попереднього якщо замінити в нерівності (2.211) ε на $1/\rho$, ξ' на $\rho^\gamma \xi'$, де $0 < \gamma < 1$ а функцію $V(x_n)$ на $\rho^{-s+1/2} V(\rho x_n)$ та перейти до границі при $\rho \to 0$.

2.10. Доведення теорем 2.1, 2.2.

Для доведення теореми 2.1 використаємо стандартну техніку локалізації ("заморожування коефіцієнтів"). Її застосування дозволяє звести доведення необхідньої оцінки (2.91) до встановлення локальних її аналогів, у яких носії функцій $u(\cdot;\varepsilon)$ та $\varrho_k(\cdot;\varepsilon)$ мають малий діаметр. Сормулюємо і доведемо ці локальні аналоги у вигляді лемм 2.3, 2.5.

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 2.3. *Для кожної точки $x_0 \in G$ існує її окіл $U \subset G$ такий, що для довільної функції $u(\cdot;\varepsilon) \in H^{r,s}(G,\varepsilon)$ з $\operatorname{supp} u \subset U$ правильною є оцінка*

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| \le$$
$$\le C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(G)\|),$$

де стала $C > 0$ незалежить від u і $\varepsilon \in [0;1)$.

Доведення. Нехай $x^0 \in G$. Виберемо окіл точки x^0, який лежить всередені G; тоді, за умовою, $u(x)$ дорівнює нулю поблизу ∂G, і тому нерівність (2.91) зводиться до наступної нерівності

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| \le \tag{2.212}$$
$$\le C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(G)\|)$$

де стала $C > 0$ не залежить від u та $\varepsilon \in (0;1]$. Можна вважати, що норми в (2.212) беруться по $\mathbb{R}^n$, оскільки $\operatorname{supp} u(x) \subset G$. За теоремою 2.7 правильна оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \le \tag{2.213}$$
$$\le C(||A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)\|)$$

де стала $C > 0$ не залежить від u та ε, $A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)$ – головна частина оператора $A(x;D;\varepsilon)$ із "замороженими"в точці x^0 коефіцієнтами. Запишемо

$$A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon) = A(x;D;\varepsilon) - (A(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)) -$$
$$-(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)),$$

На підставі (2.213) маємо:

$$||u(\cdot;\varepsilon);H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leq \tag{2.214}$$
$$\leq C(||A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^n)\|) \leq$$
$$\leq C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^n)\|) +$$
$$+C||(A(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| +$$
$$+C||(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||,$$

Для подальшого нам знадобиться такий результат.

Лема 2.4. *Для довільного* $\delta > 0$ *існує число* $C(\delta) > 0$ *таке, що для всіх* $\varepsilon \in (0;1]$ *і* $u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ *правильною є оцінка*

$$\|u;H^{r-1,s-1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| \leqslant \delta\|u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| + C(\delta)\|u;L_2(\mathbb{R}^n)\|.$$

Доведення. Нехай $R > 0$. З означення норм простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)$ випливає що

$$\|u;H^{r-1,s-1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{s-1}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi =$$
$$\leqslant \int\limits_{|\xi|>R} \frac{(1+|\xi|^2)^s}{1+|\xi|^2}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi +$$
$$+ \int\limits_{|\xi|\leqslant R}(1+|\xi|^2)^{s-1}(1+\varepsilon^2|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1+R^2}\|u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| + (1+R^2)^{s-1}(1+\varepsilon^2R^2)^{r-s}\|u;L_2(\mathbb{R}^n)\|.$$

Узявши таке $R > 0$ що задовольняє умову $\delta^2 \leqslant (1+R^2)^{-1}$ ми отримаємо потрібну оцінку. □

Відмітимо, що ця лема є версією відомої інтерполяійної нерівності [2, 73] у випадку, коли норми соболєвських просторів залежать від малого параметра ε.

Відповідно до стурктури оператора $A(x;D;\varepsilon)$ (див. (2.3)) оператор $(A(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon)$ не містить старших членів

$$A(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon) = A^{(0)}(x;D;\varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu-1} \varepsilon^{2m-2\mu-i}A_{2m-i}(x;D),$$

де $A_{2m-i}(x;D) := \sum\limits_{|\beta|\leq 2m-i} a_{i,\beta}(x)D^{\beta}$ і $a_{i,\beta}(x)$ є гладкими функціями в замиканні G. Тому з леми 2.4 отримаємо, якщо носій u достатньо малий, то справджується наступна оцінка

$$\begin{gathered} ||(A(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leqslant \\ \leqslant C_1\|u;H^{r-1,s-1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| \leqslant \\ \leqslant C_1(\delta\|u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| + C(\delta)\|u(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^n)\|), \end{gathered} \tag{2.215}$$

де $\delta > 0$ як завгодно малим параметр і $C(\delta)$ залежить тільки від δ, але незалежить від u і ε.

Залишилося оцінити останній доданок правої частини (2.214). Скориставшись стурктурою оператора $A^{(0)}(x;D;\varepsilon)$ запишемо його у вигляді

$$A^{(0)}(x;D;\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i}A^{(0)}_{2m-i}(x;D) = \sum_{\beta=2\mu}^{2m} \varepsilon^{|\beta|-2\mu}A^{(0)}_{\beta}(x)D^{\beta},$$

де $A^{(0)}_{\beta}$ гладка функція на замиканні G. Враховуючи це, отримуємо нерівність

$$\begin{gathered} ||(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leqslant \\ \leqslant \sum_{\beta=2\mu}^{2m} \varepsilon^{|\beta|-2\mu}\|(A^{(0)}_{\beta}(x) - A^{(0)}_{\beta}(x_0))D^{\beta}u;H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\|. \end{gathered}$$

З останньої нерівності безпосердньо і випливає нерівнівність

$$\begin{gathered} ||(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leqslant \\ \leqslant C_2\|u;H^{r-1,s-1}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| \leqslant \\ \leqslant C_2(\delta\|u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)\| + C(\delta)\|u(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^n)\|), \end{gathered} \tag{2.216}$$

де $\delta > 0$ як завгодно малим параметр і $C(\delta)$ залежить тільки від δ, але незалежить від u і ε.

Таким чином, враховуючи оцінки (2.213), (2.215), (2.216) з оцінки (2.214) отримуємо нерівність

$$\begin{gathered} (1 - 2C\,\delta)||u(\cdot;\varepsilon);H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leq \\ \leq C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + 2C(\delta)\|u(\cdot;\varepsilon);L_2(\mathbb{R}^n)\|). \end{gathered}$$

Вибравши $\delta < 1/2C$ отримуємо

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leq$$
$$\leq \frac{2CC(\delta)}{1-2C\,\delta}(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)\|).$$

якщо $C(\delta) \geqslant 1/2$. □

Розглянемо випадок $x_0 \in \partial G$. Оскільки межа ∂G є достатньо гладкою, то існує її скінченне покриття областями U_k таке, що у кожній U_k У випадку $U \cap \partial G \neq \varnothing$ виберемо точку $x_0 \in U \cap \partial G$. Правильною є наступна лема.

Лема 2.5. *Для кожної точки $x_0 \in \partial G$ існує її окіл $U \subset G$ такий, що для довільних функцій $u(\cdot;\varepsilon) \in H^{r,s}(\partial G,\varepsilon)$ з $\operatorname{supp} u \subset U$ і $\varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)$ з $\operatorname{supp}\varrho_k \subset U$ правильною є оцінка*

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)|| \leq$$
$$\leq C\Big(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||B_j(x;D)u(\cdot;\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x;D')\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\varepsilon)||+$$
$$+||u; L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); L_2(\partial G)||\Big).$$

де стала >0 незалежить від u, ϱ_k і $\varepsilon \in [0;1)$.

Доведення. Використовуючи локальні координати і оцінку з теореми 2.9 отримуємо, що вірна апріорна оцінка для модельної задачі в $\mathbb{R}^n_+$

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)|| \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(||A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||B_j^{(0)}(x_0;D)u(\cdot;\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(x_0;D')\varrho_k(\cdot;\varepsilon); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\varepsilon)||+$$
$$+||u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n_+)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^{n-1})||\Big).$$

Скористаємося тим, що

$$A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)=A(x;D;\varepsilon)-(A(x;D;\varepsilon)-A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon))-$$
$$-(A^{(0)}(x;D;\varepsilon)-A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)),$$
$$B_j^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)=B_j(x;D;\varepsilon)-(B_j(x;D;\varepsilon)-B_j^{(0)}(x_0;D;\varepsilon))-$$
$$-(B_j^{(0)}(x;D;\varepsilon)-B_j^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)),$$
$$C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)=C_{j,k}(x;D;\varepsilon)-(C_{j,k}(x;D;\varepsilon)-C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\varepsilon))-$$
$$-(C_{j,k}^{(0)}(x;D;\varepsilon)-C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)).$$

Аналогічно до попереднього, отримаємо необхідню оцінку. □

Перейдемо до доведення оцінки (2.91). З покриття $\overline{G}=G\cup\partial G$ околами U, побудованими при доведенні лем 2.3, 2.5, виберемо за лемою Гейне –Бореля скінчене підпокриття. Візьмемо в $\overline{G}$ розбиття одиниці, узгоджене з цім підпокриттям.

Покладемо для функцій $u\in H^{r,s}(\overline{G},\varepsilon)$ і $\varrho_k(\cdot;\varepsilon)\in\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)$, $k=1,\cdots,\varkappa$:

$$u=\sum_i u_i,\quad \varrho_k=\sum_i\varrho_{k,i}.$$

Тоді справедлива оцінка

$$||u(\cdot;\varepsilon);H^{r,s}(G,\varepsilon)||+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\varepsilon);\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\varepsilon)||\leq$$
$$\leq C\sum_i\Big(||A(x;D;\varepsilon)u_i(\cdot;\varepsilon);H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||B_j(x;D)u_i(\cdot;\varepsilon)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}(x;D')\varrho_{k,i}(\cdot;\varepsilon);\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\varepsilon)||+$$
$$+||u_i;L_2(G)||+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_{k,i}(\cdot;\varepsilon);L_2(\partial G)||\Big).$$

Для доведення залишилося скористатися лемами лем 2.3, 2.5. □

Доведення теореми 2.2. Для доведення теореми 2.2. використаємо стандартну техніку локалізації. За допомогою розбиття одиниці досить що з оцінки (2.91) для $u \in H^r(G)$ з малим носієм $\operatorname{supp} u \subset U$ та $\varrho_k(\cdot;\varepsilon) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G)$, $\quad (k = 1,\ldots,\varkappa)$ з малим носієм $\operatorname{supp} \varrho_k(\cdot;\varepsilon) \subset U \cap \partial G$ випливає еліптичність з малим параметром. Доведення проведемо в декілька кроків.

Неохідість умови 2.1. Перш за все зазначимо, що застосувавши оцінку (2.91) прийдемо до наступної нерівності

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(G,\varepsilon)|| \leq \tag{2.217}$$
$$\leq C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(G)\|)$$

де стала $C > 0$ не залежить від u та $\varepsilon \in (0;1]$. Можна вважати, що норми в (2.212) беруться по $\mathbb{R}^n$, оскільки $\operatorname{supp} u(x) \subset G$.

Запишемо

$$A(x;D;\varepsilon) = A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon) - (A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon)) -$$
$$-(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A(x;D;\varepsilon)),$$

На підставі (3.61) маємо:

$$||u(\cdot;\varepsilon); H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| \leq$$
$$\leq C(||A(x;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)\|) \leq$$
$$\leq C(||A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon)u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| + \|u(\cdot;\varepsilon); L_2(\mathbb{R}^n)\|) +$$
$$+C||(A^{(0)}(x_0;D;\varepsilon) - A^{(0)}(x;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)|| +$$
$$+C||(A^{(0)}(x;D;\varepsilon) - A(x;D;\varepsilon))u(\cdot;\varepsilon); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\varepsilon)||,$$

Проводячи аналогічні міркування (спираючись на теорму 2.10)і випливає необхідність решти умов.

Висновки до розділу 2

У другому розділі розглядаються еліптичні з малим параметром крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Отримано такі результати:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.
3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків досліджуваних задач та отримано інтегральні оцінки їх похідних.
4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром вказаних задач.

Матеріали цього розділу опубліковані в роботах [18, 20– 26, 29].

РОЗДІЛ 3
СЛАБКО ЕЛІПТИЧНІ З ПАРАМЕТРОМ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

У *третьому* розділі дисертації викладено результати, які стосуються розв'язності слабко еліптичних з параметром крайових задач та невідомими додатковими функціями на межі області. Останнім вони відрізняються від слабко еліптичних з параметром крайових задач, що розглядались у роботах Л. Р. Волевича, Р. Денка, Р. Меннікена [73 – 75], Л. Р. Волевича [10].

Головна мета цього розділу – встановити для слабко еліптичних з параметром задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах апріорні оцінки розв'язків у придатних парах просторів Соболєва, норма в яких залежить від параметра. Важливо, що в цих оцінках сталі не залежать від параметра.

3.1. Постановка задачі

Нехай G – довільна обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з межею $\partial G = \Gamma$ класу C^∞.

Разглянемо наступну крайову задачу, яка містить параметр $\lambda > 0$:

$$A(x, D, \lambda)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{3.1}$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\varrho_k(x') = g_j(x'), \tag{3.2}$$

$$x' \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa.$$

Тут

$$A(x, D, \lambda) \equiv A_{2m}(x, D) + \lambda A_{2m-1}(x, D) + \ldots +$$
$$+\lambda^{2m-2\mu-1} A_{2\mu-1}(x, D) + \lambda^{2m-2\mu} A_{2\mu}(x, D),$$

та $m, \mu, \varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu > 0$, $A_{2m-j}(x, D) := \sum\limits_{|\alpha| \leq 2m-j} a_\alpha(x) D^\alpha$ – лінійний диференціальный оператор на $\overline{G}$, кожне $B_j(x, D) := \sum\limits_{|\alpha| \leq m_j} a_\alpha(x) D^\alpha$ є граничний лінійний диференціальний оператор на ∂G, а $C_{j,k}(x, D')$ є (дотичний) лінійний диференціальний оператор на ∂G. Усі коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{G}$ і ∂G відповідно, а порядки задовольняють умовам

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \leq 2m - j, \quad \operatorname{ord} B_j \leq m_j, \quad \operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + \alpha_k,$$

де $m_j, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ та

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \leq \ldots m_{m+\varkappa}. \tag{3.3}$$

Як зазвичай, $C_{j,k} \equiv 0$ якщо $m_j + \alpha_k < 0$.

В задачі (3.1), (3.2), крім невідомої функції $u(x)$ аргумента $x \in \overline{G}$, містить $\varkappa$ додаткових невідомих функцій $\varrho_1(x'), \ldots, \varrho_\varkappa(x')$ аргумената $x' \in \partial G$. Тому число крайвих умов дорівнює $m + \varkappa$.

3.2. Умови слабкої еліптичності

Введемо поняття еліптичності з малим параметром для крайової задачі (3.1), (3.2).

Нехай $x \in \overline{G}$. Позначимо через $A^{(0)}(x; D; \lambda)$ головну частину оператора $A(x; D; \lambda)$. Слідуючи [10], *головним симоволом* диференціального оператора $A(x; D; \lambda)$ називаємо вираз

$$A^{(0)}(x, \xi, \lambda) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A^{(0)}_{2m-j}(x, \xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0; \infty),$$

де $A^{(0)}_{2m-j}(x, \xi)$ — головний символ оператора $A_{2m-j}(x, D)$. Відмітимо, що функція $A^{(0)}(x, \xi, |\xi|)$ однорідна по ξ порядку $2m$.

Умова 3.1. Для точки $x^0 \in \overline{G}$ існує стала $C > 0$, така, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \geqslant 0$ виконується нерівність

$$|A^{(0)}(x, \xi, \lambda)| \geq C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{3.4}$$

Зауваження 3.1. 1. Умову 3.1 називають умовою *слабкої еліптичності з параметром* оператора $A(x, D, \lambda)$ в точці $x^0 \in \overline{G}$ (див.[10]). При $\mu = 0$ вона переходить у відому умову еліптичності з параметром Агроновича–Вішика [2] з великим параметром.

2. Нерівність (3.4) рівносильна виконанню наступних трьох умов:

$$A_{2m}^{(0)}(x,\xi) \neq 0, \quad A_{2\mu}^{(0)}(x,\xi) \neq 0, \quad A^{(0)}(x,\xi,\lambda) \neq 0 \tag{3.5}$$

для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, и $\lambda > 0$.

Перші дві нерівності (3.5) визначають еліптичність операторів $A_{2m}^{(0)}(x,\xi)$ та $A_{2\mu}^{(0)}(x,\xi)$, відповідно.

Нехай $x^0 \in \partial G$, та U — достатньо малий окіл точки $x^{'}$ з топології на ∂G. Выберемо в U локальні координати $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ такі, що x_n — відстань від точки $x \in U$ до межі ∂G. Запишемо в цих координатах символи $A_{2m-j}^{(0)}(x',\xi)$ та $A^{(0)}(x,\xi,\lambda)$ для кажного фіксованого $\lambda \in [0;\infty)$. Отримані поліноми позначимо через $A_{2m-j}^{(0)}(\xi)$ та $A^{(0)}(\xi,\lambda)$, відповідно.

Вважатимемо, що виконується умова 3.1 в точці $x = x^0$. Нехай $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ та $\lambda \in [0;\infty)$. Тоді рівняння $A^0(\xi',\tau,\lambda) = 0$ та $A_{2\mu}^0(\xi',\tau) = 0$ не мають дійсних τ-коренів. Позначимо через $m^\pm(\xi',\lambda)$ і $\mu^\pm(\xi',\lambda)$ число коренів відповідно першого та другого рівняннь, які лежать в півплощині $\mathbb{C}_\pm := \{\tau \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\tau \gtrless 0\}$. Але тоді числа $m^\pm(\xi',\lambda)$ насправді не залежать від ξ' и λ, позначимо їх через $m^\pm$, и $m^+ + m^- = 2m$. Оскількі корені рівняння $A^0(\xi',\tau,\lambda) = 0$ неперервно залежать від λ, тоді числа $m^\pm$ співпадаютю з числом нулій у верхній (нижній) півплощині рівняння $A_{2m}^0(\xi',\tau) = 0$, відповідного значення параметру $\lambda = 0$.

Умова 3.2. Для довільного $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ виконуються рівності

$$m^+(\xi') = m^-(\xi') = m, \quad \mu^+(\xi') = \mu^-(\xi') = \mu.$$

Зауваження 3.2. Це умова *правильної слабкої еліптичності з параметром* оператора $A^{(0)}(x,D,\lambda)$ в точці $x' \in \partial G$. При $n \geq 3$ рівність $\mu^+(\xi') = \mu^-(\xi')$ виконується автоматично.

Нехай як і вище, $x^0 \in \partial G$. Запишемо в локальних координатах головні символи операторів $B_j(x,D)$ та $C_{j,k}(x',D')$. Отримані поліноми позначимо відповідно через $B_j^{(0)}(\xi)$ и $C_{j,k}^{(0)}(\xi)$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi',\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задачі (3.1), (3.2) відкинемо молодші члени диференціальних операторів, покладемо $f \equiv 0$, перейдема до локальних координат в околі точки ξ' та застосуємо перетворення Фурє по змінним $x_1,\cdots,x_{n-1}$. Отримаємо наступну крайву задачу для звичайного диференціального рівняння (3.1) на півосі

$t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}(\xi', D_t, \lambda)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.6}$$

$$(B_j^{(0)}(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\varrho_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{3.7}$$

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Тут гладка функція $v(t)$ та числа $\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa$ шукані, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ — довільно задані комплесні числа. Задача (3.6), (3.7) залежить від двох параметрів $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ та $\lambda \in [0, \infty)$. Таку задачу будемо називати *граничним символом* задачі (3.1), (3.2) в точці $x' \in \partial G$.

Умова 3.3. Для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\lambda > 0$ та $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (3.6), (3.7) має єдиний розвязок $(v(t), \varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa)$.

Це аналог умови Шапіро–Лопатинського для крайвої задачі (3.1), (3.2) при фіксованому λ.

В наступних двох умовах йде мова про розв'язність крайової задачі для оператора $A^{(0)}(\xi', D_t, \lambda)$ в граничних випадках $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$.

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розглянемо наступну крайову задачу

$$A_{2r}^{(0)}(\xi', D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.8}$$

$$(B_j^{(0)}(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\varrho_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r + \varkappa, \tag{3.9}$$

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Умова 3.4. Для довільного $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ та $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (3.8), (3.9) має єдиний розвязок $(v(t), \varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa)$ при $r = m$.

Умова 3.5. Для довільного $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ та $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (3.8), (3.9) має єдиний розвязок $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ при $r = \mu$.

Оскільки при $\lambda \neq 0$ рівняння $A^{(0)}(\xi', \tau, \lambda) = 0$ еквівалентне рівнянню

$$A_{2\mu}^{(0)}(\xi', z) + \lambda^{-1} A_{2\mu+1}^{(0)}(\xi', z) + \cdots + \lambda^{2\mu-2m} A_{2m}^{(0)}(\xi', z) = 0,$$

то при $|\lambda| >> 1$ є 2μ коренів рівняння $A^{(0)}(\xi', \tau, \lambda) = 0$, які близькі до коренів рівняння $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', \tau) = 0$. Зробимо заміну $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Оскільки при $\varepsilon = 0$ оператор $A^{(0)}(\xi', D_t, \varepsilon)$ співпадає з оператором $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', D_t)$ порядку $2\mu < 2m$, то при малих $\varepsilon > 0$ необхідні поправки до розвязку задачі (3.6), (3.7), які дозволяють задовольнити решту $m-\mu$ крайвим умовам. З методу Вішика–Люстерніка слідує, що ці поправки є розвязком наступної крайової задачі:

$$A^{(0)}(0, D_t, 1)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.10}$$

$$(B^{(0)}(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, \quad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{3.11}$$

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Умова 3.6. Для довільних $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (3.10), (3.11) має єдиний розвязок $v(t)$.

Використавши ці умови, сформулюємо базове означення третього розділу.

Означення 3.1. Крайова задача (3.1), (3.2) называється *слабко еліптичною з параметром та невідомими додатковими функціями*, якщо в довільній точці $x \in \overline{G}$ виконується умови 3.1 та в довільній точці $x^0 \in \partial G$ виконується умови 3.2 – 3.6.

З умов 3.1 – 3.3 випливає, що при довільних фіксованих $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}$ та $\lambda > 0$ крайва задача (3.1), (3.2) є звичайню еліптичною задачею з додатковими невідомими функціями на межі області.

3.3. Приклад.

Розглянемо приклад слабко еліптичної з параметром крайової задачі, яка містить додаткові невідомі функції у крайових умовах:

$$\Delta^2 u - \lambda^2 \Delta u = f, \quad x \in G,$$
$$u - \Delta' \varrho = g_1, \quad D_\nu u = g_2, \quad D_\nu^2 u = g_3, \quad x \in \partial G. \tag{3.12}$$

Ця крайова задача окрім невідомої функції $u(x)$, $x \in \overline{G}$ містить одну невідому функцію $\varrho(x)$, $x \in \partial G$, у крайових умовах (3.12). Відповідно до позначень використаних у п. 3.1 маємо:

$$A(x, D, \varepsilon) = \Delta^2 - \lambda^2 \Delta, \quad A_{2m}(x, D) = \Delta^2, \quad A_{2\mu}(x, D) = -\Delta,$$
$$B_1(x, D) = 1, \quad B_2(x, D) = D_\nu, \quad B_3(x, D) = D_\nu^2, \quad C_{11}(x', D') = -\Delta,$$
$$m = 2, \quad \mu = 1, \quad \varkappa = 1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2, \quad \alpha_1 = 2.$$

Перевіримо, що крайова задача задовольняє означенню 3.1.

Для перевірки виконання умов 3.1 – 3.2 випишемо головний символ оператора $A^{(0)}(x; D; \lambda)$:

$$A^{(0)}(x; \xi; \lambda) := |\xi|^4 + \lambda^2 |\xi|^2 = |\xi|^2 (\lambda^2 + |\xi|^2).$$

Звісно, він задовольняє умову 3.1 .

Для перевірки виконання умов 3.2 знайдемо корені рівнянь $A^{(0)}(\xi', \tau; \lambda) = 0$ та $A_{2\mu}^{(0)}(\xi', \tau) = 0$ відповідно.

Рівняння

$$A^{(0)}(\xi', \tau; \lambda) := (|\xi'|^2 + \tau^2)(\lambda^2 + (|\xi'|^2 + \tau^2)) = 0$$

має корені $\tau_{1,2} = \pm i |\xi'|, \quad \tau_{3,4} = \pm i \sqrt{\lambda^2 + |\xi'|^2}$.

Рівняння

$$A_{2\mu}^{(0)}(\xi', \tau) := |\xi'|^2 + \tau^2 = 0$$

має корені $\tau_{1,2} = \pm i |\xi'|$.

Отже, і умова 3.2 виконується.

Для перевірки викоання умов 3.3 – 3.6 запишемо крайовий символ розглянутої задачі. Згідно з формулами (3.5), (3.6) він набирає вигляду

$$
\begin{gathered}
(|\xi'|^2 + D_t^2)^2 v(t) + \lambda^2 (|\xi'|^2 + D_t^2) v(t) = 0, \quad t > 0; \\
v(0) + |\xi'|^2 \sigma = h_1, \\
D_t v(0) = h_2, \\
D_t^2 v(0) = h_3.
\end{gathered}
$$

Цей символ не залежить від $x \in \partial G$.

Умова 3.3 еквівалентна тому, що крайова задача

$$(|\xi'|^2 + D_t^2)^2 v(t) + \lambda^2 (|\xi'|^2 + D_t^2) v(t) = 0, \quad t > 0; \tag{3.13}$$

$$v(0) + |\xi'|^2 \sigma = 0, \tag{3.14}$$

$$D_t v(0) = 0, \tag{3.15}$$

$$D_t^2 v(0) = 0, \tag{3.16}$$

$$v(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3.17}$$

має лише тривіальний розв'язок для кожних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ та $\lambda > 0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3.13), який задовольняє умови (3.17), записується у вигляді

$$v(t) = c_1 \exp(-|\xi'| t) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda^2 + |\xi'|^2}\, t),$$

де c_1,c_2 – довільні комплексні числа.

Підставивши цей розв'язок в умови (3.15), (3.16) отримаємо, що $c_1 = c_2 = 0$. Тому $v(t) \equiv 0$, що тягне $\sigma = 0$ на підставі умови (3.14). Отже, умова 3.3 виконується.

Перевірка решти умов 3.4 – 3.6 проводяться аналогічно підрозділу 2.4.

3.4. Функціональні простори, залежні від великого параметра

Для дослідження задачі введемо необхідні функціональні простори, залежні від великого параметра λ. Опис таких функціональних просторів наведено в роботах Р. Денка, Меннікена, Л. Р .Волевіча [73 – 75, 10] Нагадаємо означення цих просторів та їх властивості, потрібні у роботі. Будемо слідувати в основному роботі Л. Р. Волєвича [10]. Спочатку означимо функціональні простори на $\mathbb{R}^n$.

Нехай дійсні числа r, s і λ такі, що $r \geq s$, $s \geq 0$ і $\lambda > 0$. Позначимо через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^r(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s (1+|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s} |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (3.18)$$

де $u \in H^r(\mathbb{R}^n)$.

Для кожного фіксованого $\lambda > 0$ норма (3.18) еквівалентна соболевський нормі у просторі $H^r(\mathbb{R}^n)$.

З властивостей соболєвських просторів випливає неперервне і щільне вкладення

$$H^{r_2,\, s_2}(\mathbb{R}^n, \lambda) \hookrightarrow H^{r_1,\, s_1}(\mathbb{R}^n, \lambda), \quad \text{якщо} \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant r_2. \quad (3.19)$$

тут дійсні числа r_1, s_1 і r_2, s_2 такі, що $r_1 \geqslant s_1 \geqslant 0$ і $r_2 \geqslant s_2 \geqslant 0$.

Більш того, правильне таке уточнення цієї властивості (див., наприклад, [10]).

Твердження 3.1. *Нехай дійсні числа r_1, s_1 і r_2, s_2 такі, що $r_1 \geqslant s_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant s_2 \geqslant 0$ і $r_1 \leqslant r_2$, $s_1 \leqslant s_2$. Тоді існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\varepsilon \in (0;1]$ і $u \in H^{r_2,s_2}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ виконується нерівність*

$$|[u; H^{r_1,s_1}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| \leqslant C|[u; H^{r_2,s_2}(\mathbb{R}^n, \lambda)]|.$$

У наступних двох твердженнях йде мова про норми, рівномірно еквіваленті за параметром $\lambda \gg 1$ до норми (3.18). Ці твердження обгрунтовано, наприклад, у [10].

Твердження 3.2. *Нехай дійсні числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норми* (3.18) *і*

$$||[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]||' := (1 + |\lambda|^{r-s})||u; L_2(\mathbb{R}^n)||+ \tag{3.20}$$
$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\lambda > 0$.

Нехай $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ і $\lambda > 0$. Розглянемо таку функцію аргументу $t \geqslant 0$:

$$\Phi_{\theta,\sigma}(t;\lambda) = \begin{cases} t^{\sigma}(|\lambda|^2 + t^2)^{(\theta-\sigma)/2}, & \text{якщо} \quad \sigma \geq 0\,, \\ (|\lambda|^2 + t^2)^{\theta/2}, & \text{якщо} \quad \sigma < 0\,. \end{cases} \tag{3.21}$$

Твердження 3.3. *Нехай цілі числа r і s такі, що $r \geqslant s \geqslant 0$. Тоді норми* (3.18) *і*

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)||'' := (1 + |\lambda|^{r-s})||u; L_2(\mathbb{R}^n)||+$$
$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\lambda)|D_n^{\ell}\widehat{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' dx_n \right)^{1/2}$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\lambda \gg 1$.

Означимо тепер простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у випадку, коли дійсне число $s < 0$.

За означенням, простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, де $s < 0$, складається з усіх розподілів

$$u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{\theta \in R} H^{\theta}(\mathbb{R}^n)$$

таких, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(1 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Позначимо тепер через $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ лінійний простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, наділений нормою

$$'|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{3.22}$$

Звісно, кожна з норм (3.22) еквівалентна нормі $|[u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, 1)]|$. Лінійний нормований простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ є повним. Це випливає з того, що відображення

$$u \longmapsto |\cdot|^{2s}(1 + |\cdot|^2)^{(r-s)/2}\widetilde{u}, \quad \text{де} \quad u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n),$$

здійснює ізоморфізм простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, 1)$ на гільбертів простір $L_2(\mathbb{R}^n)$. Відмітимо також, що виконується неперервне вкладення $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$.

Нехай Ω – довільна відкрита непорожня підмножина простору $\mathbb{R}^n$. Нехай дійсні числа r, s і ε такі, що $r \geqslant s$ і $\lambda > 0$. Банахів простір $H^{r,s}(\Omega, \lambda)$ означається за простором $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ у такий стандартний спосіб (див., наприклад [90]).

Покладемо

$$H^{r,s}(\Omega, \lambda) := \{w \restriction \Omega : w \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)\},$$
$$\|u; H^{r,s}(\Omega, \lambda)\| = \inf\{\|w; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)\| : w \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda), w \restriction \Omega = u\}, \quad (3.23)$$

де $\in H^{r,s}(\Omega, \lambda)$. Тут, як звичайно, $w \restriction \Omega$ – звуження розподілу $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ на Ω. Відмітимо, що $H^{r,r}(\Omega, \lambda)$ є гільбертів простір Соболєва $H^r(\Omega)$ порядку r на Ω.

З наведеного означення випливає, що властивості протрів $H^{r,s}(\Omega, \lambda)$ і $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ подібні. Так лінійний простір $H^{r,s}(\Omega, \lambda)$ не залежить від $\lambda > 0$, а норма у ньому еквіваднетна нормі в $H^{r,s}(\Omega, 1)$. Нормовані простори $H^{r,s}(\Omega)$ і $H^r(\Omega)$ при $s \geqslant 0$ рівні з точністю до еквівалентності норм, а при $s < 0$ простори мають строге неперевне вкладання $H^{r,s}(\Omega) \hookrightarrow H^r(\Omega)$. Окрім того, є правильним

Твердження 3.4. *Непервне щільне вкладення* (3.19) *і твердження 2.1 залишаютьcя правильними, якщо у них замінити* $\mathbb{R}^n$ *на* Ω.

На підставі твердженнь 3.2 маємо таку властивість (див. [10] у випадку $\Omega = \mathbb{R}^n_+$)

Твердження 3.5. *Нехай дійсні числа* r *і* s *такі, що* $r \geqslant s \geqslant 0$. *Тоді норми* (3.23) *і*

$$||u; H^{r,s}(\Omega, \varepsilon)||' := \inf\{\|w; H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)\|' : w \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda), w \restriction \Omega = u\},$$

еквівалнетні рівномірно за параметром $\lambda \gg 1$.

У дисертації потрібні простори $H^{r,s}(\Omega,\lambda)$ у випадках $\Omega=\mathbb{R}^n_+$ і $\Omega=G$. Обговоримо детальніше властивості простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\lambda)$.

Для простору $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)$ правильний такий аналог твердження 2.11 (див.[11, твердження 3.2])

Твердження 3.6. *Нехай цілі числа r і s такі, що $r\geqslant s\geqslant 0$. Тоді норми* (3.23) *і*

$$||u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)||'':=(1+|\lambda|^{r-s})||u;L_2(\mathbb{R}^n_+)||+$$
$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty\sum_{\ell=0}^{r}\Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\lambda)|D_n^\ell\widehat{u}(\xi',x_n)|^2d\xi'dx_n\right)^{1/2}\qquad(3.24)$$

еквівалнетні рівномірно за параметром $\lambda\gg 1$.

Окрім норми (3.24) знадобитья ще одна еквівалентна їй норма. Нехай дійсні числа r і s такі, що $r\geqslant s$. Для довільного $u\in H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)$ покладемо

$$||u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\varepsilon)||^\sharp=\qquad(3.25)$$
$$=\begin{cases}||R(D_n-i\sqrt{1+|D'|^2})^s(D_n-i\sqrt{|\lambda|^2+|D'|^2})^{r-s}lu;L_2(\mathbb{R}^n_+)||, & \text{якщо}\ s\geqslant 0\\ ||R(D_n-i|D'|)^s(D_n-i\sqrt{|\lambda|^2+|D'|^2})^{r-s}lu;L_2(\mathbb{R}^n_+)||, & \text{якщо}\ s<0.\end{cases}$$

Тут lu – довільний розподіл з $H^r(\mathbb{R}^n)$ такий, що $lu=u$ на $\mathbb{R}^n_+$, а R – оператор звуження розподілу з $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_+$. Звісно, (3.25) є нормою на лінійному просторі $H^{r,s}(\Omega)$. Права частина рівності не залежить від вказаного вибору розподілу lu.

Твердження 3.7. *Нехай дійсні числа r і s такі, що $r\geqslant s$. Тоді норми* (3.25) *і* (3.23) *еквівалнетні рівномірно за параметром $\lambda\gg 1$.*

Доведення цього результату наведено, наприклад, в роботі Волевіча [10].

Покладемо $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n_+):=\{w\restriction\mathbb{R}^n_+ : w\in H^\infty(\mathbb{R}^n)\}=\bigcup\limits_{\theta\in\mathbb{R}}H^\theta(\mathbb{R}^n_+)$. Для просторів $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\lambda)$, де $s<0$, правильний такий аналог твердження 3.1. Для цього простору має місце

Твердження 3.8. *Нехай $r\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{Z}$, $s<0$ і дійсне $\lambda>0$ Розподіл $u\in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ належить до $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ тоді і лише тоді, коли*

$$u=\sum_{|\beta|=-s}D^\beta u_\beta,\quad \textit{де кожне}\quad u_\beta\in H^{r-s,0}.\qquad(3.26)$$

При цьому норми (3.23) *і*

$$||u; H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \lambda)||^* := \inf \sum_\beta ||u_\beta; H^{r-s,0}(\mathbb{R}^n_+, \lambda)||,$$

еквівалентні рівномірно за параметром $\lambda \gg 1$. *Тут нижня грань береться за усіма функціями* u_β *з* $|\beta| = -s$, *для яких виконується* (3.26).

Обговоримо тепер питання про сліди функцій з просторів $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ і $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \varepsilon)$ на гіперплощині $x_n = 0$, яку ототожнимо з простором $\mathbb{R}^{n-1}$.

Простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ і різні еквівалентні норми у ньому означені вище для усіх припустимих значень параметрів r, s і ε, якщо замінити у цих означеннях $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Оскільки простір $H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ неперевно вкладений у соболевський простор $H^r(\mathbb{R}^n)$, де $r > 0$, то при $r > \ell + 1/2$ означений оператор сліду

$$\mathcal{T}_\ell : u \longmapsto (D^\ell_n u) \restriction \mathbb{R}^{n-1} = D^\ell_n u(\cdot, 0), \quad \text{де} \quad u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n).$$

Тут ціле $l \geqslant 0$.

Введемо банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$, де $\theta \geqslant 0$ і $\theta \geqslant \sigma$ такі, що норми оператора сліду

$$\mathcal{T}_\ell : H^{r,s}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{H}^{r-l-1/2, s-l-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$$

будуть рівномірно обмеженими за параметром $\lambda \gg 1$.

Нехай дійсні числа θ, σ і λ задовольняють умови $\theta \geqslant \sigma$ і $\lambda > 0$. У випадку $\sigma \geqslant 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)$ соболевський простір $H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h, \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)|| := ||h, H^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)||' =$$

$$= (1 + |\lambda|^{r-s})||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi'|^{2\sigma}(|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{\theta-\sigma} |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi \right)^{1/2} \quad (\cancel{3.}27)$$

$$= (1 + |\lambda|^{r-s})||h, L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^2_{\theta,\sigma}(|\xi'|; \lambda) |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2},$$

де $h \in H^\theta(\mathbb{R}^{n-1})$ (див. формулу (3.20)).

У випадку $\sigma < 0$ позначимо через $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ соболевський простір $H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$, наділений еквівалентною нормою

$$||h,\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)|| := ||h,H^{\theta,0}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)|| = \tag{3.28}$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\lambda|^2 + |\xi'|^2)^{\theta} |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi^2_{\theta,\sigma}(|\xi'|;\lambda) |\widehat{h}(\xi')|^2 d\xi' \right)^{1/2},$$

де $h \in H^{\theta}(\mathbb{R}^{n-1})$. Отже, норма в просторі $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$, враховуючи (3.27) і (3.28), визначається наступним чином

$$||h,\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)|| := \tag{3.29}$$

$$= \begin{cases} (1+|\lambda|^{r-s})||h,L_2(\mathbb{R}^{n-1})|| + ||\Phi_{\theta,\sigma}(|D'|;\lambda)h,L_2(\mathbb{R}^{n-1})||, & \text{якщо} \quad \sigma \geqslant 0 \\ ||\Phi_{\theta,\sigma}(|D'|;\lambda)h,L_2(\mathbb{R}^{n-1})||, & \text{якщо} \quad \sigma < 0. \end{cases}$$

Правильне таке твердження

Твердження 3.9. *Нехай дійсні числа r, s і натуральне ℓ такі, що $r \geqslant s$, $r > \ell + 1/2$, $s \neq \ell + 1/2$. Тоді існує число $C > 0$ таке, що для довільних $u \in H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\lambda)$ і $\lambda \gg 1$ правильна нерівність*

$$||\mathcal{T}_\ell u;\mathcal{H}^{r-\ell-1/2,s-\ell-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)|| \leqslant C||u;H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\lambda)||.$$

Це твердження залишається правильним, якщо у ньому замінити $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_+$. Доведення твердження 2.10 наведено в [10, п. 3.3]

Банахові простори $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ на межі ∂G визначаються за простором $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ у стандарний спосіб (див., наприклад [91]).

Нехай дійсні числа θ, σ і ε такі, що $\theta \geq \sigma$ і $\lambda > 0$. Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на C^∞ - многовиді ∂G, які у локальних координатах належать до $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$. Перейдемо до детального означення.

Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді ∂G, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1,\ldots,p$. Тут відкриті множини $U_1,\ldots,U_p$ складають покриття многовиду ∂G. Також виберемо довільним чином функції $\chi_j \in C^\infty(\partial G)$, де $j = 1,\ldots,p$, які утворюють розбиття одиниці на ∂G, підпорядковане умові $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

За означенням, простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ складається з усіх розподілів h на ∂G таких, що $(\chi_j h)\circ\pi_j \in \mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1,\ldots,p\}$. Норма у $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ означена за формулою

$$\|h;\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)\| = \sum_{j=1}^{p} \|(\chi_j h)\circ\pi_j;\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)\|$$

Тут $(\chi_j h)\circ\pi_j$ позначає зображення розподілу h у локальній карті π_j.

Простір $\mathcal{H}^{\theta,\sigma}(\partial G,\lambda)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці.

.

3.5. Основновні результати

Для кожного числа $\lambda \geqslant 0$ пов'яжемо із цією задачею лінійне відображення

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_\lambda : (u(\cdot;\lambda), \varrho_1(\cdot;\lambda), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\lambda)) \longrightarrow \\ \longrightarrow (f(\cdot;\lambda), g_1(\cdot;\lambda), \ldots, g_{m+\varkappa}(\cdot;\lambda)), \qquad (3.30)\\ \text{де} \quad u(\cdot;\lambda) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{і} \quad \varrho_1(\cdot;\lambda), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\lambda) \in C^\infty(\partial G).\end{gathered}$$

Відмітимо, що постановка задачі (3.1), (3.2) має сенс і при $\lambda = 0$.

Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови

$$r - s \geq 2m - 2\mu, \quad r > m_{m+\varkappa} + \frac{1}{2}. \qquad (3.31)$$

З другої нерівності випливає, що відображення (3.30) продовжується єдиним чином (за неперевністю) до обмеженого оператора у соболевських просторах

$$\mathcal{A}_\lambda : H^r(G) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G) \to H^{r-2m}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} H^{r-m_j-1/2}(\partial G).$$

Сформулюємо основні результати третього розділу.

Теорема 3.1. *Припустимо, що крайова задача* (3.1), (3.2) *слабко еліптична з параметром. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (3.31) *і*

$$m_{\mu+\varkappa} + \frac{1}{2} \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + \frac{1}{2}. \qquad (3.32)$$

Тоді існує число $C > 0$ таке, що для довільного числа $\lambda \gg 1$ правильна апріорна оцінка

$$\begin{gathered}|[u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)]| + \sum_{k=1}^{\varkappa} |[\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2, s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\lambda)]| \leq \\ \leq C\Big(|[f(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)]| + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} |[g_j(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\partial G,\lambda)]| + \\ +(1+|\lambda|^{r-s})\Big(||u; L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); L_2(\partial G)||\Big)\Big). \qquad (3.33)\end{gathered}$$

Тут функції

$$u(\cdot;\varepsilon\lambda) \in H^r(G) \quad \text{і} \quad \varrho_k(\cdot;\lambda) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G), \quad \text{де} \quad k = 1, \ldots, \varkappa \qquad (3.34)$$

та

$$f(\cdot;\lambda) \in H^{r-2m,s-2\mu}(G) \quad i \tag{3.35}$$
$$g_j(\cdot;\lambda) \in H^{r-m_j-1/2}(\partial G), \quad \text{де} \quad j = 1,\dots,m+\varkappa$$

задовольняють крайову задача (3.1), (3.2)*. Число* C *не залежить, як від* $\lambda \gg 1$*, так і від функцій* (3.34), (3.35).

Теорема 3.2. *Нехай оператор* $A(x,D;\lambda)$ *– задовольняє умову 3.2 а натуральні* r *і* s *задовольняють умови* (3.31) *і* (3.32)*. Припустимо, що існує число* $C > 0$*, таке що для довільного* $\lambda \gg 1$ *і для довільних функцій* (3.34), (3.35) *що задовольняють крайову задачу* (3.1), (3.2)*, правильна апріорна оцінка* (3.33)*. Тоді ця крайова задача слабко еліптична з параметром.*

Доведення теорем 3.1 і 3.2 проводиться аналогічно доведенню теорем 2.1 і 2.2 за допомогою методу локализації ("заморожування коефіцієнтів") і зводиться до встановлення їх аналогів для модельних областей $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^n_+$.

3.6. Оцінки фундаментальної системи розв'язків

У підрозділі припускаємо, що крайова задача (3.1), (3.2) слабко еліптична з параметром. Для її крайового симоволу побудуємо фундаментальну систему розв'язків і для них отримаємо інтегральні оцінки.

Довільно виберемо номер $q \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$. У крайовому символі (3.6), (3.7) задачі (3.1), (3.2) який відповідає точці $x^0 \in \partial G$, покладемо $\varphi_j = \delta_{q,j}$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$. Отже, розглянемо таку крайову задачу на півосі:

$$A^{(0)}(\xi', D_t, \lambda)v_q(t) = 0 \quad t > 0, \tag{3.36}$$

$$B_j^{(0)}(\xi', D_t)v_q|_{x=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_{q,j} = \delta_{q,j}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa, \tag{3.37}$$

$$|v_q(t)| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Тут $\delta_{j,r}$ — символ Кронекера.

З умов 3.1, 3.2 та 3.3 вивливає, що крайва задача (3.36), (3.37) має єдиній розвязок

$$v_q(t) = v_q(t, \xi', \lambda), \quad \sigma_{q,j} = \sigma_{q,j}(\xi', \lambda), \quad k = 1, \ldots, \varkappa,$$

такий, що функція $v_q(t)$ разом з усіма похідними експоненціально спадає при $t \to +\infty$.

Система векторів $(v_q(t), \sigma_{q,1}, \ldots, \sigma_{q,m+\varkappa})$, де $q = 1, \ldots, m+\varkappa$, лінійно незалежна. Називатимемо її *фундаментальною системой розвязків* граничного символа. Для неї вірна наступна теорема:

Теорема 3.3. *Нехай ціле $l \geq 0$. Існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \gg 1$ і $q \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$ виконуються оцінки:*

$$\left(\int_0^\infty |D^l v_q(\xi', t; \lambda)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C\, |\xi'|^{l - m_q - 1/2} \times \tag{3.38}$$

$$\times \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (|\xi'|/(|\lambda| + |\xi'|))^{m_{\mu+\varkappa+1} - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q \leq \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ (|\xi'|/(|\lambda| + |\xi'|))^{m_q - m_{\mu+\varkappa}}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (|\xi'|/(|\lambda| + |\xi'|))^{m_q - l + 1/2}, & \text{якщо} \quad q > \mu + \varkappa,\ l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 2.4, оскільки, ввівши малий параметр $\varepsilon = 1/\lambda$, задача (3.36), (3.37), за умов теореми, перейде в задачу (2.115), (2.116). Тому якщо замінити в оцінці (2.117) ε на $1/|\lambda|$ отримаємо оцінку (3.38). □

Окрім теореми 3.3, нам потрібна оцінка згори чисел $\sigma_{q,k} = \sigma_{q,k}(\xi';\lambda)$, $k = 1,\ldots,\varkappa$, які разом з функцією $v_q(t) = v_q(\xi',t;\lambda)$ утворюють розв'язок крайової задачі (3.36), (3.37). Міркуючи аналогічно до попереднього отримаємо наступну теорему.

Теорема 3.4. *Існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \gg 1$, $q \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}$ і $k = \{1,\ldots,\varkappa\}$ виконуються оцінки:*

$$|\sigma_{q,k}(\xi';\lambda)| \leqslant C|\xi|^{-m_q-\alpha_k}\times$$
$$\times\begin{cases} 1\,, & \textit{якщо} \quad q \leqslant \mu+\varkappa\,,\\ (|\xi'|/(|\lambda|+|\xi'|))^{m_q-m_{\mu+\varkappa}}, & \textit{якщо} \quad q > \mu+\varkappa\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Нам будуть потрібні версіїї нерівностей (3.38) і (3.39), встановленних у теоремах 3.3 і 3.4, виражені в термінах функції $\Phi_{\theta,\sigma}(|\xi'|;\lambda)$, введеної за формулою (3.21) .

Теорема 3.5. *Нехай ціле $\ell \geq 0$, виконуються нерівності* (3.38), (3.39), *а натуральні числа s і r задовльняють умови* (3.31) *і* (3.32). *Тоді існує число $C > 0$ таке, що для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \gg 1$ і $q \in \{1,\ldots,m+\varkappa\}$ розв'язок задачі* (3.36), (3.37) *задовольняє нерівності*

$$\Bigl(\int\limits_0^\infty |D_t^\ell v_q(\xi',t;\lambda)|^2 dt\Bigr)^{1/2} \leqslant C\,\frac{\Phi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda)}{\Phi_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\lambda)}, \tag{3.40}$$

$$|\sigma_{q,k}(\xi';\lambda)| \leqslant C\frac{\Phi_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda)}{\Phi_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|;\lambda)},$$
$$\textit{де} \quad k = 1,\ldots,\varkappa.$$

Доведення. Доведення повторює відповідне доведення з другого розділу з урахуванням означення (3.21). □

3.7. Модельні задачі.

У цьому підрозділі будуть доведені версії теорем 3.1 і 3.2 для модельних задач, які певним чином пов'язані із досліджуваною крайовою задачею (3.1), (3.2) в області G і вибором точки $x^0 \in \overline{G}$. Слід розглянути окремо випадки коли $x^0 \in G$ і коли $x^0 \in \overline{G}$.

Нехай довільно вибрано точку $x^0 \in G$. Відкинимо молодші члени кожного диференціального оператора $A_{2m-i}(x, D)$ і зафіксуємо коефіцієнти старших членів у точці $x = x^0 \in G$. Отримаємо диференціальний оператор, який позначимо через $A^{(0)}(D; \lambda) := A^{(0)}(x^0; D; \lambda)$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$A^{(0)}(D; \lambda)u(x; \lambda) = f(x; \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.41}$$

залежне від параметра $\lambda > 0$. Воно є модельним аналогом випадком диференціального рівняння (3.1) для $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.6. *Припустимо, що оператор $A(x; D; \lambda)$ слабко еліптичний з параметром у точці $x = x^0$. Нехай натуральні числа r і s задовольняють умови* (3.31). *Тоді існує число $C = C(x^0) > 0$ таке, що для довільного числа $\lambda \gg 1$ правильна апріорна оцінка*

$$\begin{gathered} |[u(\cdot; \lambda); H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| \leq C(|[f(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)]| + \\ +(1 + |\lambda|^{r-s})||u; L_2(\mathbb{R}^n)||). \end{gathered} \tag{3.42}$$

Тут $u(\cdot; \lambda) \in H^r(\mathbb{R}^n)$ і $f(\cdot; \lambda) \in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n)$ є будь-які функції, що задовольняють рівняння (3.1), *а число C не залежить як від $\lambda \gg 1$, так і від цих функцій.*

Доведення. Доведення теореми аналогічне доведенню теореми для малого параметра. Дослідимо, для прикладу, випадок $s - 2\mu < 0$. За умовою, оператор $A^{(0)}(x^0; D; \lambda)$ має властивість (3.3).На підставі формул (3.22) і (3.3) маємо таке:

$$\begin{gathered} ||f(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||^2 = ||A^{(0)}(D; \lambda)u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||^2 = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2(s-2\mu)}(|\lambda|^2 + |\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}|A^{(0)}(\xi; \lambda)|^2|\widetilde{u}(\xi; \lambda)|^2 d\xi = \end{gathered}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2}{(|\xi|^{4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{2m-2\mu}}|\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{4\mu}(|\lambda|+|\xi|)^{4m-4\mu}}{|\xi|^{4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{2m-2\mu}}|\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi.$$

Залишилось скористатись твердженням 3.2, оскільки квадрат норми в лівій частині оцінки (3.42) еквівалентний рівномірно за $\lambda \gg 1$ нормі

$$(1+|\lambda|^{r-s})^2||u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n)||^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi.$$

Таким чином, оцінка (3.42) доведена і у випадку $s-2\mu<0$. □

Теорема 3.7. *Нехай натуральні r і s задовольняють умову* (3.31). *Припустимо, що існує число $C=C(x^0)>0$, таке що для довільного $\lambda \gg 1$ і для довільних функцій $u(\cdot;\lambda) \in H^r(\mathbb{R}^n)$ і $f(\cdot;\lambda) \in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n;\lambda)$, що задовольняють рівняння* (3.41), *правильна апріорна оцінка* (3.42). *Тоді оператор $A(x;D;\lambda)$ слабко еліптичний з параметром у точці $x=x^0$.*

Доведення. Нехай правильна апріорна оцінка (3.42). Підставимо в цю оцінку гладку функцію u з носієм у $\mathbb{R}^n_+$. Відповідно до твердженням 3.2, норма в лівій частині оцінки (3.42) еквівалентна рівномірно за $\lambda \gg 1$ нормі (3.20). Тоді оцінка (3.42) еквівалентна такій:

$$(1+|\lambda|^{r-s})^2||u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n)||^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2\left(||f(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||^2 + (1+|\lambda|^{r-s})^2||u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n)||^2\right),$$

яка еквівалентна наступній нерівності

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \leqslant \\ \leqslant C^2\,||f(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||^2 = \\ = C^2\,||A^{(0)}(D;\lambda)u(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||^2.\end{gathered} \tag{3.43}$$

Оскільки простір $H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)$ задається по-різному у випадках $s-2\mu \geqslant 0$ і $s-2\mu<0$ (див. формули (3.18) і (3.22)), дослідимо ці випадки окремо.

У випадку $s-2\mu<0$ на підставі (3.22) оцінка (3.43) набуває вигляд:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|\xi|^{2s-4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2\Big)\,|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi,$$

або

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s} - C^2\,|\xi|^{2s-4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2\Big)\times$$
$$\times|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \leqslant 0.$$

Використовуючи довільний вибір функці u має наступну нерівність

$$|\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s} - C^2\,|\xi|^{2s-4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2 \leqslant 0.$$

Звідси маємо

$$|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2 \geqslant C^{-2}\,\frac{|\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}}{|\xi|^{2s-4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}} = |\xi|^{4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{2m-2\mu}.$$

Остання нерівність еквівалентна оцінці (3.3).

У випадку $s-2\mu \geqslant 0$ оцінка (3.43) випливає з оцінки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-s}|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|\xi|^{2s-4\mu}(|\lambda|^2+|\xi|^2)^{r-2m-(s-2\mu)}\,|A^{(0)}(\xi;\lambda)|^2\Big)\,|\widetilde{u}(\xi;\lambda)|^2 d\xi,$$

$\square$

Розглянемо тепер ситуацію, коли довільно вибрана почка $x^0 \in \partial G$. Нехай U — достатньо малий окіл точки x^0 узятий із топології на $\overline{G}$. Введемо в U спеціальні локальні координати $x=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=(x',x_n)$, розглянуті в п.2.2.

У крайовій задачі (3.1), (3.2) відкинимо молодші члени усіх диференціальних операторів $A_{2m-i}(x;D)$, $B_j(x;D)$ і $C_{j,k}(x;D')$, зафіксуємо коефіцієнти старших членів у точці $x = x^0 \in \partial G$ і перейдемо до спеціальних локальних координат в околі U точки x^0. Отримані диференціальні оператори позначимо через $A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n)$, $B^{(0)}_j(D', D_n)$ і $C^{(0)}_{j,k}(D')$ відповідно. Покладемо

$$A^{(0)}(D', D; \lambda) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \lambda^i A^{(0)}_{2m-i}(D', D_n).$$

Розглянемо таку крайову задачу в півпросторі $\mathbb{R}^n_+$:

$$A^{(0)}(D', D_n; \lambda) u(x', x_n; \lambda) = f(x', x_n; \lambda) \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \tag{3.44}$$

$$B^{(0)}_j(D', D_n) u(x', x_n; \lambda)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{jk}(D') \varrho_k(x'; \lambda) = g_j(x'; \lambda), \tag{3.45}$$
$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa$$

Вона залежить від параметра $\lambda > 0$ і є модельним аналогом крайової задачі (3.1), (3.2) для $\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 3.8. *Припустимо, що крайва задача* (3.1), (3.2) *слабко еліптична з параметром у точці* $x^0 \in \partial G$. *Нехай натуральні числа* r *і* s *задовольняють умови* (3.31) *і* (3.32). *Тоді існує число* $C = C(x^0) > 0$ *таке, що для довільного числа* $\lambda \gg 1$ *правильна апріорна оцінка*

$$\begin{aligned} ||u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+, \lambda)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2, s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)|| \leqslant \\ \leqslant C\Big(||f(\cdot;\lambda); H^{r-2m, s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+, \lambda)|| + \\ + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||g_j(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}, \lambda)|| + \\ + (1 + |\lambda|^{r-s})(||u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n_+)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^{n-1})||)\Big). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Тут

$$u(\cdot;\lambda) \in H^r(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{і} \quad \varrho_k(\cdot;\lambda) \in H^{r+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \text{де} \quad k = 1, \ldots, \varkappa, \tag{3.47}$$

та

$$f(\cdot;\lambda) \in H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\lambda) \quad \textit{і} \qquad (3.48)$$
$$g_j(\cdot;\lambda) \in H^{r-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),\ \textit{де}\ j=1,\ldots,m+\varkappa,$$

є будь-які функції, які задовольняють крайову задачу (3.44), (3.45)*, а число* C *не залежить, як від* $\lambda \gg 1$*, так і від цих функцій.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $f(\cdot,\varepsilon)\equiv 0$. Згідно з твердженням 3.6 запишемо

$$||u(\cdot,\varepsilon);H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\lambda)|| \asymp (1+|\lambda|^{r-s})||u;L_2(\mathbb{R}^n_+)||+$$
$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty \sum_{\ell=0}^r \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\lambda)|D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|^2 d\xi' dx_n\right)^{1/2}.$$

Ця еквівалентність норм рівномірна за параметром $\lambda \gg 1$. Тому (3.46) є наслідком такої нерівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty \sum_{\ell=0}^r \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|;\lambda)|D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|^2 d\xi' dx_n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\lambda);\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)||^2 \leqslant \qquad (3.49)$$
$$\leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||g_j;\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)||^2+\right.$$
$$\left.+(1+|\lambda|^{r-s})\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_k(\cdot;\lambda);L_2(\mathbb{R}^{n-1})||^2\right),$$

де число $C'>0$ не залежить від $\lambda \gg 1$ і функцій (3.47), (3.48). Доведемо цю нерівність.

Нагадаємо, що простір $\mathcal{H}^{\theta,\eta}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ задається по-різному у випадках $\eta \geqslant 0$ і $\eta < 0$ за формулами (3.27) і (3.28) відповідно. Оскільки $s+\alpha_k-1/2 \geqslant 0$ (див. зауваження 2.3 і умову (3.32)) то норма у просторі $\mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)$ задана формулою (3.27) для кожного $k \in \{1,\ldots,\varkappa\}$. Тому на підставі (3.27) і (3.28) бачимо, що оцінка (3.49) є наслідком оцінки

$$\sum_{\ell=0}^{r}\Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda)\int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|^2dx_n+$$
$$+\sum_{k=1}^{\varkappa}\Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda)|\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)|^2\leq \tag{3.50}$$
$$\leq C''\sum_{j=1}^{m+\varkappa}\Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda)|\widehat{g}_j(\xi';\lambda)|^2,$$

для довільних $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ і $\varepsilon\in(0;1]$, де число $C''>0$ не залежить від ξ' і ε .

Припустимо, що функції (3.47) і (3.48) задовольняють крайову задачу (3.44), (3.45), де $f(\cdot;\lambda)\equiv 0$. Доведемо нерівність (**??**). Нехай $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\{0\}$ і $\varepsilon\in(0;1]$. Тоді функція $\widehat{u}(\xi',t;\lambda)$ аргументу $t\geqslant 0$ разом з числами $\widehat{\varrho}_1(\xi';\lambda),\ldots,\widehat{\varrho}_\varkappa(\xi';\lambda)$ є розв'язком задачі

$$A^{(0)}(\xi',D_n;\lambda)\widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)=\widehat{f}(\xi',x_n;\lambda),\quad \xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad x_n>0,$$
$$B_j^{(0)}(\xi',D_n)\widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|_{x_n=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^{(0)}_{j,k}(\xi')\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)=\widehat{g}_j(\xi';\lambda),$$
$$\xi'\in\mathbb{R}^{n-1},\quad j=1,\ldots,m+\varkappa,$$

де $\widehat{f}(\xi',x_n;\lambda)\equiv 0$. Нагадаємо, що остання є граничним символом задачі (3.1), (3.2) у точці $x^0\in\partial G$. Цей розв'язок є такою лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків граничного символа, введеного у п. 2.8:

$$\widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)=\sum_{q=1}^{m+\varkappa}\widehat{g}_q(\xi';\lambda)v_q(\xi',x_n;\lambda), \tag{3.51}$$

$$\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)=\sum_{q=1}^{m+\varkappa}\widehat{g}_q(\xi';\lambda)\sigma_{q,k}(\xi';\lambda),\quad k=1,\ldots,\varkappa. \tag{3.52}$$

Підставляючи співвідношення (3.51) і (3.52) в ліву частину нерівності (3.50) та застосовуючи теорему 3.5 неважко отримати оцінку (3.49). Справді, на підставі (3.40), маємо:

$$\sum_{\ell=0}^{r}\Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda)\int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|^2dx_n=$$

$$= \sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \int_0^\infty |D_n^\ell \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_q(\xi';\lambda) v_q(\xi',x_n;\lambda)|^2 dx_n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2\, \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \int_0^\infty |D_n^\ell v_q(\xi',x_n;\lambda)|^2 dx_n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2\, \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \frac{\Phi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda)}{\Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 (r+1) \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda) |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2.$$

Далі, отримуємо таке:

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\varrho}_k(\xi\varrho';\lambda)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) \left| \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \widehat{g}_q(\xi';\lambda) \sigma_{q,k}(\xi';\lambda) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} \sum_{k=1}^{\varkappa} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2\, \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\sigma_{q,k}(\xi';\varepsilon\sigma)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \sum_{k=1}^{\varkappa} \sum_{q=1}^{m+\varkappa} |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2 \times$$

$$\times \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) \frac{\Phi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda)}{\Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+\varkappa-1} C^2 \varkappa \sum_{q=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_q-1/2,s-m_q-1/2}(|\xi'|;\lambda) |\widehat{g}_q(\xi';\lambda)|^2.$$

Перейдемо тепер до доведення оцінки (3.46) в загальному випадку. Припустимо, як і раніше, що функції (3.47) і (3.48) задовольняють крайову задачу (3.44), (3.45). На підставі формул (3.24), (3.29) бачимо, що

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \int_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}(\xi',x_n;\lambda)|^2 dx_n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)|^2 \leq \tag{3.53}$$

$$\leq \widetilde{C}\left(\int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(D_n - i\sqrt{|\lambda|^2+|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\lambda)|^2 dx_n + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda)|\widehat{g}_j(\xi';\lambda)|^2\right),$$

для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ і $\lambda \gg 1$, де число $C'' > 0$ не залежить від ξ' і λ .

Запишемо розв'язок $u(\cdot;\lambda)$ диференціального рівняння (3.44) у вигляді $u(\cdot;\lambda) = v(\cdot;\lambda) + w(\cdot;\lambda)$, де $v(\cdot;\lambda)$ – деякий спеціальний розв'язок класу $H^r(\mathbb{R}^n_+)$ рівняння

$$A^{(0)}(D', D_n, \lambda)v(x', x_n;\lambda) = f(x', x_n;\lambda), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0. \tag{3.54}$$

Цей розв'язок буде представлений пізніше. Тоді функції $w(\cdot;\lambda)$ і $\varrho_1(\cdot;\lambda), \ldots, \varrho_\varkappa(\cdot;\lambda)$ є розв'язком крайової задачі (3.44), (3.45) на півосі $x_n > 0$:

$$A^{(0)}(D', D_n;\lambda)w(x', x_n;\lambda) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n > 0, \tag{3.55}$$

$$B^{(0)}_j(D', D_n)w(x', x_n;\lambda)|_{x_n=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(D')\varrho_k(x';\lambda) = g_j(x';\lambda) - \chi_j(x';\lambda),$$
$$x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, \ldots, m+\varkappa. \tag{3.56}$$

де позначено

$$\chi_j(x';\lambda) := B_j(D', D_n)v(x', x_n;\lambda)|_{x_n=0}.$$

Аналогічно до другого розділу, розв'язок $v(\cdot;\lambda)$ рівняння (3.54) можна вибрати так, щоб

$$\Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda)\int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{v}(\xi', x_n;\lambda)|^2 dx_n \leqslant \tag{3.57}$$

$$\leqslant C\int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(D_n - i\sqrt{|\lambda|^2+|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\lambda)|^2 dx_n,$$

$$\Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\lambda)|\chi_j(\widehat{\xi'};\lambda)|^2$$

$$\leqslant C\int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu}(D_n - i\sqrt{|\lambda|^2+|\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu}\widehat{f}(\xi', x_n;\lambda)|^2 dx_n,$$

для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0;1]$ і $j = 1, \dots, m+\varkappa$, де число $C'' > 0$ не залежить від ξ', ε і j.

Нерівність (3.50) для розв'язку $w(\cdot;\lambda)$ і $\varrho_1(\cdot;\lambda), \dots, \varrho_\varkappa(\cdot;\lambda)$ напіводнорідної крайової задачі (3.55), (3.56) набирає вигляду

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \int\limits_0^\infty |D_t^\ell \widehat{w}(\xi',t;\lambda)|^2 dx_n +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)|^2 \leq \tag{3.58}$$
$$\leq C'' \left(\sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{g}_j(\xi';\lambda) - \widehat{\chi}_j(\xi';\lambda)|^2 \right).$$

Скориставшись нерівностями (3.57) – (3.58) отримаємо оцінку (3.53):

$$\sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(|\xi'|,\lambda) \int\limits_0^\infty |D_t^\ell \widehat{u}(\xi',t;\lambda)|^2 dx_n +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)|^2$$
$$\leqslant 2 \sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell (\widehat{v}(\xi',x_n;\lambda))|^2 dx_n +$$
$$+2 \sum_{\ell=0}^{r} \Phi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\lambda) \int\limits_0^\infty |D_n^\ell (\widehat{w}(\xi',x_n;\lambda))|^2 dx_n +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \Phi^2_{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\varrho}_k(\xi';\lambda)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2C \int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu} (D_n - i\sqrt{|\lambda|^2 + |\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu} \widehat{f}(\xi',x_n;\lambda)|^2 dx_n +$$
$$+4C'' \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{g}_j(\xi';\lambda)|^2 +$$
$$4C'' \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda) |\widehat{\chi}_j(\xi';\lambda)|^2 \leqslant (2C + 4C''C) \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty |(D_n - i|\xi'|)^{s-2\mu} (D_n - i\sqrt{|\lambda|^2 + |\xi'|^2})^{r-2m-s+2\mu} \widehat{f}(\xi',x_n;\lambda)|^2 dx_n +$$

$$+4C'' \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Phi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(|\xi'|,\lambda)|\widehat{g}_j(\xi';\lambda)|^2.$$

□

3.8. Доведення теорем 3.1, 3.2.

У цьому підрозділі будуть доведені теореми 3.1, 3.2. Схема доведення аналогічна підрозділу 2.10. Для доведення теореми 3.1 використаємо стандартну техніку локалізації ("заморожування коефіцієнтів"). Її застосування дозволяє звести доведення необхідної оцінки (3.42) до встановлення локальних її аналогів, у яких носії функцій $u(\cdot;\lambda)$ та $\varrho_k(\cdot;\lambda)$ мають малий діаметр. Сформулюємо і доведемо ці локальні аналоги у вигляді лемм 3.1, 3.2.

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 3.1. *Для кожної точки $x_0 \in G$ існує її окіл $U \subset G$ такий, що для довільної функції $u(\cdot;\lambda) \in H^{r,s}(G,\lambda)$ з $\operatorname{supp} u \subset U$ правильною є оцінка*

$$|[u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)]| \leq$$
$$\leq C(|[A(x;D;\lambda)u(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)]| + (1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda); L_2(G)\|),$$

де стала $C > 0$ незалежить від u і $\lambda \gg 1$.

Доведення. Нехай $x^0 \in G$. Виберемо окіл точки x^0, який лежить всередені G; тоді, за умовою, u дорівнює нулю поблизу ∂G, і тому нерівність (3.42) зводиться до наступної нерівності

$$|[u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)]| \leq \tag{3.59}$$
$$\leq C(|[A(x;D;\lambda)u(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)]| + (1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda); L_2(G)\|)$$

де стала $C > 0$ не залежить від u та $\varepsilon \in (0;1]$. Можна вважати, що норми в (3.59) беруться по $\mathbb{R}^n$, оскільки $\operatorname{supp} u(x) \subset G$. За теоремою 3.6 правильна оцінка

$$|[u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\lambda)]| \leq \tag{3.60}$$
$$\leq C(|[A^{(0)}(x_0;D;\lambda)u(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)|| + (1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n)\|)$$

де стала $C > 0$ не залежить від u та ε, $A^{(0)}(x_0; D; \lambda)$ – головна частина оператора $A(x; D; \lambda)$ із "замороженими"в точці x^0 коефіцієнтами. Запишемо

$$A^{(0)}(x_0; D; \lambda) = A(x; D; \lambda) - (A(x; D; \lambda) - A^{(0)}(x_0; D; \lambda)) -$$
$$-(A^{(0)}(x; D; \lambda) - A^{(0)}(x_0; D; \lambda)),$$

На підставі (3.60) маємо:

$$||u(\cdot; \lambda); H^{r,s}(\mathbb{R}^n, \lambda)|| \leq$$
$$\leq C(||A^{(0)}(x_0; D; \lambda)u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||+$$
$$+(1 + |\lambda|^{r-s})\|u(\cdot; \lambda); L_2(\mathbb{R}^n)\|) \leq$$
$$\leq C(||A(x; D; \lambda)u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||+$$
$$+(1 + |\lambda|^{r-s})\|u(\cdot; \lambda); L_2(\mathbb{R}^n)\|)+$$
$$+C||(A(x; D; \lambda) - A^{(0)}(x; D; \lambda))u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||+$$
$$+C||(A^{(0)}(x; D; \lambda) - A^{(0)}(x_0; D; \lambda))u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n, \lambda)||,$$

Аналогічно до попереднього, скориставшись версією відомої інтерполяційної нерівності у випадку, коли норми соболєвських просторів залежать від великого параметра λ [73], завершимо доведення. □

Розглянемо випадок $x_0 \in \partial G$. Окільки межа ∂G є достатньо гладкою, то існує її скінченне покриття областями U_k таке, що у кожній U_k У випадку $U \cap \partial G \neq \varnothing$ виберемо точку $x_0 \in U \cap \partial G$. Правильною є наступна лема.

Лема 3.2. *Для кожної точки $x_0 \in \partial G$ існує її окіл $U \subset G$ такий, що для довільних функцій $u(\cdot; \lambda) \in H^{r,s}(\partial G, \lambda)$ з $\operatorname{supp} u \subset U$ і $\varrho_k(\cdot; \lambda) \in \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G, \lambda)$ з $\operatorname{supp} \varrho_k \subset U$ правильною є оцінка*

$$||u(\cdot; \lambda); H^{r,s}(G, \lambda)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot; \lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G, \lambda)|| \leq$$
$$\leq C\Big(||A(x; D; \lambda)u(\cdot; \lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(G, \lambda)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||B_j(x; D)u(\cdot; \lambda) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D')\varrho_k(\cdot; \lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G, \lambda)||+$$
$$+(1 + |\lambda|^{r-s})(||u; L_2(G)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot; \lambda); L_2(\partial G)||)\Big).$$

де стала > 0 незалежить від u, ϱ_k і $\lambda \gg 1$.

Доведення. Використовуючи локальні координати і оцінку з теореми 2.9 отримуємо, що вірна апріорна оцінка для модельної задачі в $\mathbb{R}^n_+$

$$||u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+,\lambda)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)|| \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(||A^{(0)}(x_0;D;\lambda)u(\cdot;\lambda); H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+,\lambda)||+$$
$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa} ||B_j^{(0)}(x_0;D)u(\cdot;\lambda) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{(0)}(x_0;D')\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1},\lambda)||+$$
$$+(1+|\lambda|^{r-s})(||u(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^n_+)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); L_2(\mathbb{R}^{n-1})||)\Big).$$

Скористаємося тим, що

$$A^{(0)}(x_0;D;\lambda) = A(x;D;\lambda) - (A(x;D;\lambda) - A^{(0)}(x_0;D;\lambda))-$$
$$-(A^{(0)}(x;D;\lambda) - A^{(0)}(x_0;D;\lambda)),$$
$$B_j^{(0)}(x_0;D;\lambda) = B_j(x;D;\lambda) - (B_j(x;D;\lambda) - B_j^{(0)}(x_0;D;\lambda))-$$
$$-(B_j^{(0)}(x;D;\lambda) - B_j^{(0)}(x_0;D;\lambda)),$$
$$C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\lambda) = C_{j,k}(x;D;\lambda) - (C_{j,k}(x;D;\lambda) - C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\lambda))-$$
$$-(C_{j,k}^{(0)}(x;D;\lambda) - C_{j,k}^{(0)}(x_0;D;\lambda)).$$

Міркуючи аналогічно до п. 2.10, отримаємо необхідну оцінку. □

Перейдемо до доведення оцінки (3.42). З покриття $\overline{G} = G \cup \partial G$ околами U, побудованими при доведенні лем 3.1, 3.2, виберемо за лемою Гейне –Бореля скінчене підпокриття. Візьмемо в $\overline{G}$ розбиття одиниці, узгоджене з цім підпокриттям.

Покладемо для функцій $u(\cdot;\lambda) \in H^{r,s}(\overline{G},\lambda)$ і $\varrho_k(\cdot;\lambda) \in \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\lambda)$, $k = 1,\cdots,\varkappa$:

$$u = \sum_i u_i, \quad \varrho_k = \sum_i \varrho_{k,i}.$$

Тоді справедлива оцінка

$$||u(\cdot;\lambda); H^{r,s}(G,\lambda)|| + \sum_{k=1}^{\varkappa} ||\varrho_k(\cdot;\lambda); \mathcal{H}^{r+\alpha_k-1/2,s+\alpha_k-1/2}(\partial G,\lambda)|| \leq$$

$$\leq C\sum_i\Big(||A(x;D;\lambda)u_i(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)||+$$

$$+\sum_{j=1}^{m+\varkappa}||B_j(x;D)u_i(\cdot;\lambda)+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}(x;D')\varrho_{k,i}(\cdot;\lambda);\mathcal{H}^{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\partial G,\lambda)||+$$

$$+(1+|\lambda|^{r-s})(||u_i;L_2(G)||+\sum_{k=1}^{\varkappa}||\varrho_{k,i}(\cdot;\lambda);L_2(\partial G)||)\Big).$$

Для доведення залишилося скористатися лемами 3.1, 3.2.

Доведення теореми 2.2. Для доведення теореми 2.2. використаємо стандартну техніку локалізації. За допомогою розбиття одиниці досить що з оцінки (3.42) для $u\in H^r(G)$ з малим носієм $\operatorname{supp} u\subset U$ та $\varrho_k(\cdot;\lambda)\in H^{r+\alpha_k-1/2}(\partial G),\quad(k=1,\ldots,\varkappa)$ з малим носієм $\operatorname{supp}\varrho_k(\cdot;\lambda)\subset U\cap\partial G$ випливає еліптичність з малим параметром. Доведення проводиться аналогічно до п. 2.10.

Неохідість умови 3.1-3.6. Перш за все зазначимо, що застосувавши оцінку (3.42) прийдемо до наступної нерівності

$$||u(\cdot;\lambda);H^{r,s}(G,\lambda)||\leq \tag{3.61}$$
$$\leq C(||A(x;D;\lambda)u(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(G,\lambda)||+(1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda);L_2(G)\|)$$

де стала $C>0$ не залежить від u та $\lambda\gg 1$. Можна вважати, що норми в (3.59) беруться по $\mathbb{R}^n$, оскільки $\operatorname{supp} u(x)\subset G$.

Запишемо

$$A(x;D;\lambda)=A^{(0)}(x_0;D;\lambda)-(A^{(0)}(x_0;D;\lambda)-A^{(0)}(x;D;\lambda))-$$
$$-(A^{(0)}(x;D;\lambda)-A(x;D;\lambda)),$$

На підставі (3.61) маємо:

$$||u(\cdot;\lambda);H^{r,s}(\mathbb{R}^n,\lambda)||\leq$$
$$\leq C(||A(x;D;\lambda)u(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||+$$
$$+(1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda);L_2(\mathbb{R}^n)\|)\leq$$
$$\leq C(||A^{(0)}(x_0;D;\lambda)u(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||+$$
$$+(1+|\lambda|^{r-s})\|u(\cdot;\lambda);L_2(\mathbb{R}^n)\|)+$$
$$+C||(A^{(0)}(x_0;D;\lambda)-A^{(0)}(x;D;\lambda))u(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||+$$
$$+C||(A^{(0)}(x;D;\lambda)-A(x;D;\lambda))u(\cdot;\lambda);H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n,\lambda)||,$$

Міркуючи аналогічно підрозділу 2.10 і скориставшись теоремою 3.8 отримаємо необхідність решти умов.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі розглядаються слабко еліптичні з параметром крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Отримано такі результати:

1. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
2. Для задач з цього класу побудовано фундаментальну систему розв'язків і отримано інтегральні оцінки їх похідних.
3. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

Матеріали цього розділу опубліковані в роботах [17, 19, 27, 28, 30].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню характеру розв'язності еліптичних з малим параметром та слабко еліптичних крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі області. Отримано такі результати:

1. Введено клас еліптичних з малим параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
2. Побудовано формальні асимптотичні розв'язки цих задач.
3. Побудовано фундаментальну систему розв'язків досліджуваних задач та отримано інтегральні оцінки їх похідних.
4. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від малого параметра. Доведено, що ці оцінки є не лише достатніми, але й необхідними для еліптичності з малим параметром вказаних задач.
5. Введено клас слабко еліптичних з параметром крайових задач з невідомими додатковими функціями на межі обмеженої евклідової області.
6. Для задач з цього класу побудовано фундаментальну систему розв'язків і отримано інтегральні оцінки їх похідних.
7. Для соболєвських норм розв'язків цих задач встановлено апріорні оцінки, у яких сталі не залежать від великого параметра. Показано, що ці оцінки є необхідними для слабкої еліптичності вказаних крайових задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агмон С. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. — Москва: Изд. иностранной литературы, 1962. — 206 с. (Переклад статті: Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Commun. Pure. Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 4. — P. 623 — 727.)
2. Агранович М. С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М. С. Агранович, М. И. Вишик // Успехи матем. наук. — 1964. — Т. 19, № 3. — С. 53 — 161.
3. Асланян А. Г. Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей з жидкостью / А. Г. Асланян, Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский // Функц. анализ и его прилож. — 1981. — **15**, № 3. — С. 1 — 9.
4. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений / Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 4. — С. 745 — 748.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
6. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач / Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1967. — Т. 19, № 5. — С. 3 — 32.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, — 12 , — 1957. — Вып. 5. — С. 3 — 122.
8. Волевич Л. Р. К теории краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 489 — 492.

9. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Матем. сборник. — 1965. — Т. 68, № 3. — С. 373 — 416.
10. Волевич Л. Р. Метод Вишика–Люстерника в смешанной задаче для параболических операторов, не разрешенных относительно старшей производной по времени / Л. Р. Волевич // Труды московского математического общества.— Т. 68. — 2007. — С. 67—92.
11. Волевич Л. Р. Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром / Л. Р. Волевич // Труды московского математического общества. — Т. 67. — 2006. — С. 104—147.
12. Волевич Л. Р. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения / Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях // Успехи матем. наук. — 1965. — Т. 20, № 1. — С. 3 — 74.
13. Демидов А. С. Эллиптические псевдодифференциальные краевые задачи с малым параметром при старшем операторе /А. С. Демидов // Матем. сборн. — 1973. — Т. 91. № 3. — С. 421 — 444.
14. Демидов А. С. Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений с малым параметром при старшем операторе /А. С. Демидов // Труды моск. матем. о-ва. — 1975.— Т. 32. — С. 119–146.
15. Волевич Л. Р. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. — Москва: Эдиториал УРСС, 1999. — 272 с.
16. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа / Ю. В. Егоров. — Москва: Наука, 1984. — 360 с.
17. Заворотинский А. В. О слабо эллиптических с параметром краевых задачах / А. В. Заворотинский // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т. 9, № 2. — С. 157 — 174.
18. Заворотинський А.В. Еліптичні крайові задачі з малим параметром і додатковими невідомими функціями на межі області.Формальний асимптотичний розв'язок / А. В. Заворотинский // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія:

математика:зб. наук. пр.— Т.1, № 1–2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. — С.40 — 46.

19. Заворотинский А.В. Слабо эллиптические с параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений /А. В. Заворотинский // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер.матем. і інформ./Редкол.: В.В.Маринець (гол. ред.) та інші. — Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла 2012. Вип. 23, №2. — С.63 —75.
20. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе. Оценки фундаментальных решений / А. В. Заворотинский // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 170 — 184.
21. Заворотинский А. В. Об эллиптических с малым параметром краевых задач / А. В. Заворотинский // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2013. — № 11. — С. 23 — 30.
22. Заворотинский А. В. Об эллиптических краевых задачах с малым параметром и дополнительными функциями на границе области / А. В. Заворотинский // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С.1269 — 1275.(Англійський переклад: Ukrainian Mathematical Journal — 2015. — V.66, № 9. — P.1423 — 1430.)
23. Заворотинский А. В. Эллиптические задачи с малым параметром с неизвестными дополнительными условиями на границе / А. В. Заворотинский // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського. – Донецьк, 2006. — С.62–63
24. Zavorotinskiy A.V. Elliptic with a smoll parameter boundary value problems with addition functions defined at the boundary. Formal asymptotic solution / A. V. Zavorotinskiy // International Conference “Modern analysis and applications “ dedicated to the centenary of Mark Krein Book of abstracts – Kyiv, 2007 — C.146
25. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Формальное асимптотическое решение тези / А. В. Заворотинский //

Друга Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського Україна, Донецьк, 11-14 листопада 2008 р. Тези доповідей (англійською мовою) — С.71

26. Заворотинский А. В. Эллиптические с малым параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений / А. В. Заворотинский // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. – М.: Издательство «Университетская книга», 2009 —С.144
27. Заворотинский А.В., Слабо эллиптические с параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области / А. В. Заворотинский // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 трав., 2010 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. – К., НТУУ, 2010. — С.159
28. Заворотинский А.В. Слабо эллиптические с параметром краевые задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области. Априорные оценки/ А. В. Заворотинский / Третя міжнародна конференція молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвячена Ярославові Лопатинському, 3-6 листопада, 2010 р., Львів: Матеріали конф. – Л., ЛНУ, 2010. — С.
29. A.V. Zavorotinskiy, Elliptic boundary value problems with parameter and additional unknown function defined at the boundary of domain / A. V. Zavorotinskiy //International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of reports (17-21 September, L'viv, 2012 р.) – Львів: Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім..Шевченка, 2012. — С.238
30. Заворотинский А.В. Эллиптические с параметром граничные задачи и параболические задачи / А. В. Заворотинский // Диференціальні рівняння та їх застосування: матеріали Міжнародної наукової конференції (Ужгород, 27-29 вересня, 2012 р.). – Ужгород:, 2012. — С.29
31. Ильин А. М., Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин. — Москва: Наука, 1978. — 400 с

32. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. – V. 11, No 5. — P. 257 — 267.

33. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. — V. 11, No 5. — P. 269 — 278.

34. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. III. Сопряженная граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — V. 13, No 2. — P. 105 — 110.

35. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — Москва: Мир, 1971. — 372 с. (Переклад видання: Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. — Paris: Dunod, 1968. — 372 p.)

36. Лопатинский Я. Б. Об одном способе сведения краевых задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. — 1953. — Т. 5, № 2. — С. 123 — 151.

37. Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач. Избранные труды / Я. Б. Лопатинский. — Киев: Наукова думка, 1984. — 316 с.

38. Назаров С. А. Метод Вишика—Люстерника для эллиптических краевых задач в области с коническими точками. I. Задача в конусе / С. А. Назаров// Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 4.— С. 142 — 163.

39. Назаров С. А. Метод Вишика—Люстерника для эллиптических краевых задач в области с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области / С. А. Назаров// Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 5. — С. 132 — 152.

40. Назаров С. А. Обоснование асимптотических разложений собственных чисел несамосопряженных сингулярно возмущенных эллиптиче-

ских краевых задач / С. А. Назаров// Матем. сборн. — 1986.— Т. 129. № 3.— С. 307 — 337.

41. Панич О. И. Введение в общую теорию эллиптических краевых задач / О. И. Панич. — Киев: Выща школа, 1986. — 128 с.

42. Петре Ж. О новом подходе к граничным задачам для эллиптических уравнений / Ж. Петре // Математика: сб-к переводов.— 1963. — Т. 7, № 1. — С. 43 — 65.

43. Ремпель Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце. — Москва: Мир, 1986. — 575 с.

44. Ройтберг И. Я. Эллиптические граничные задачи для общих систем уравнений в полных шкалах банаховых пространств / И. Я. Ройтберг // Доклады Академии Наук. — 1997. — Т. 354, № 1. — С. 25 — 29.

45. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 798 — 801.

46. Ройтберг Я. А. Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1965. — Т. 17, № 5. — С. 122 — 129.

47. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 180, № 3. — С. 542 — 545.

48. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Я. А. Ройтберг // Матем. сборник. — 1970. — Т. 83, № 2. — С. 181 — 213.

49. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем / Л. Н. Слободецкий // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 123, № 4. — С. 616 — 619.

50. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_2 решений линейных эллиптических и параболических систем, I / Л. Н. Слободецкий // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. — 1960. — № 7. — С. 28 — 47.

51. Солонников В. А. Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем / В. А. Солонников // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 4. — С. 783 — 785.
52. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. I / В. А. Солонников // Известия АН СССР, сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 665 — 706.
53. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. II / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1966. — Т. 92. — С. 233 — 297.
54. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хермандер. — Москва: Изд. иностр. лит., 1959. — 132 с.
55. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1965. — 380 с. (Переклад видання: Hörmander L. Linear partial differential operators. — Berlin: Springer, 1963. — vii+287 p.)
56. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 464 с.
57. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.
58. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.
59. Чепурухіна І. С. Еліптичні за Лавруком крайові задачі у просторах Хермандера : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Чепурухіна Ірина Сергіївна – Київ, 2016. – 164 с.
60. Шапиро З. Я. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений / З. Я. Шапиро // Известия АН СССР, сер. матем. — 1953. — Т. 17. — С. 539 — 562.

61. Шехтер М. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных / М. Шехтер // Математика: сб-к переводов. — 1960. — Т. 4, № 5. — С. 93 — 122. (Перевод статьи: Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. — Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 3. — P. 457 — 486.)
62. Шехтер М. Замечания об эллиптических граничных задачах / М. Шехтер // Математика: сб-к переводов. — 1960. — Т. 4, № 6. — С. 3 — 21.
63. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин//. — Москва: Наука, 1973. — 232 с.
64. Эскин Г. И. Асимптотика решений эллиптических псевдодифференциальных уравнений с малым параметром/ Г. И. Эскин// ДАН СССР.— 1973. — Т. 211. № 3. — С. 547–550.
65. Agmon S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Commun. Pure Appl. Math. — 1964. — V. 17, № 1. — P. 35 — 92.
66. Agmon S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems / S. Agmon. — Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., 1965. — 292 p.
67. Agranovich M. S. Elliptic boundary problems / M. S. Agranovich // Encycl. Math. Sci., vol. 79, Partial differential equations. IX. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. — P. 1 — 144.
68. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential operators / L. Boutet de Monvel // Acta Math. — 1971. — V. 126, № 1 — 2. — P. 11 — 51.
69. Browder F. E. On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations / F. E. Browder // Commun. Pure Appl. Math. — 1956. — V. 9, № 3. — P. 351 — 361.
70. Browder F. E. Estimates and existence theorems for elliptic boundary-value problems / F. E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1959. — V. 45, № 3. — P. 365 — 372.
71. Ciarlet P. G. Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis / P. G. Ciarlet. — Paris: Mayson, 1990. — viii+218 p.

72. Denk R. Maximal L_p-regularity of parabolic problems with boundary dynamics of relaxation type / R. Denk, J. Prüss, R. Zacher // J. Funct. Anal. — 2008. — V. 255, № 11. — P. 3149 — 3187.
73. Denk R. Parabolic boundary value problems connected with Newton's polygon and some problems of crystallization / R. Denk, L. R. Volevich // J. Evol. Equ. — 2008. — V. 8, № 3. — P. 523 — 556.
74. Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. Boundary Value Problems for a Class of Elliptic Operator Pencils// Integ. Eq. Operator Th. 2000. V. 8, P. 410-436.
75. Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions// Integ. Eq. Operator Th. 2001. V. 9, P. 25-40.
76. Douglis A. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations / A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1955. — V. 8, № 4. — P. 503 — 538.
77. Frank L. S. Coercive singular perturbations. I. A priori estimates. /L. S. Frank //*Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **119** (1979), 41-113.
78. Frank L. S. Singular Perturbations. I. Spacers and Singular Perturbations on Manifolds without Boundary /L. S. Frank // North Holland. Amsterdam, 1990.
79. Frank L. S. Singular perturbations in elasticity theory /L. S. Frank // Berlin: IOS Press, 1997.
80. Grubb G. Pseudo-differential boundary problems in L_p spaces / G. Grubb // Comm. Partial Differential Equations. — 1990. — V. 15. — P. 289 — 340.
81. Grubb G. Functional calculas of pseudo-differential boundary problems / G. Grubb. — 2-nd ed. — Boston: Birkhäser, 1996. — 522 p.
82. Kozlov V. A. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – x+414 p.
83. Lions J.-L. Non-homogeneous boundary-value problems and applications, Vol. II / J.-L. Lions, E. Magenes. — Berlin: Springer, 1972. — x+242 p.

84. Nazarov, S. A.: The Vishik–Lyusternik method for elliptic boundary value problems in regions with conic points. I. The problem in a cone (Russian). *Sibirsk. Mat.* **22** (1981), No. 4, 142-163.

85. Nazarov S. On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations / S. Nazarov, K. Pileckas // J. Reine Angew. Math. — 1993. — V. 438. — P. 103 — 141.

86. Roitberg I. Ya. Elliptic boundary value problems for general elliptic systems in complete scales of Banach spaces / I. Ya. Roitberg // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 1998. — V. 102. — P. 231 — 241.

87. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

88. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1999. — x+276 p.

89. Schechter M. Modern methods in partial differential equations / M. Schechter. — New York: McGraw-Hill Inc, 1977. — xv+245 p.

90. Triebel H. The structure of functions / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+425 p.

91. Triebel H. Theory of function spaces. III / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2006. — xii+426 p.

92. Volevich L. R. General elliptic boundary value problems with small parameter// Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 12. /Group of authors. – Simferopol:Taurida National V. Vernadsky University, 2002. – 226 pp. – in English and Russian. – P. 171-181.

93. Wloka J. T. Boundary value problems for elliptic systems / J. T. Wloka, B. Rowley, B. Lawruk. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — xiv+641 p.