НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШКАПА Вікторія Вікторівна

УДК 517.5

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ГРІДІ-АЛГОРИТМИ НА КЛАСАХ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗАДЕРЕЙ Петро Васильович,
Київський національний університет технологій та дизайну,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
НАЗАРЕНКО Микола Олексійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться « 20 » вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий « 17 » серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Робота присвячена дослідженню апроксимативних характеристик класів 2π-періодичних функцій. Зокрема, вивчаються найкращі наближення, наближення сумами Фур'є, найкращі m-членні тригонометричні наближення, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, гріді-алгоритми, білінійні наближення та тригонометричні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Актуальність теми. Дослідження, пов'язані зі знаходженням найкращих наближень періодичних функцій тригонометричними поліномами, беруть свій початок з відомих робіт П. Л. Чебишева, К. Вейєрштрасса, А. Лебега, С. Н. Бернштейна, Х. Бора та Д. Джексона, які відносяться до кінця XIX - початку XX сторіччя. У цих роботах увага приділялась переважно питанням наближення індивідуальних функцій.

Напрям теорії апроксимації, пов'язаний з дослідженням наближень на функціональних класах, починає розвиватись на початку XX сторіччя. Дослідженням поведінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та тригонометричними поліномами, які будуються на основі розкладів у ряди Фур'є, на різноманітних функціональних класах займались Ш. Валле Пуссен, А. М. Колмогоров, С. М. Нікольський, Ж. Фавар. Ці дослідження були продовжені і суттєво розвинуті у роботах Н. І. Ахієзера, В. Ф. Бабенка, В. К. Дзядика, О. В. Єфімова, П. В. Задерея, М. Г. Крейна, М. П. Корнійчука, О. К. Кушпеля, В. П. Моторного, Б. Надя, В. С. Романюка, В. І. Рукасова, В. В. Савчука, А. С. Сердюка, О. І. Степанця, С. Б. Стєчкіна, С. О. Теляковського, В. М. Темлякова, М. П. Тімана, О. П. Тімана, Р. М. Тригуба та багатьох інших математиків.

Останнім часом все більшого розповсюдження набуває метод m-членного тригонометричного наближення, тобто наближення класів періодичних функцій за допомогою поліномів виду

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x},$$

де Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа. Апроксимативні властивості цього методу відносно добре відомих класів періодичних функцій $W^r_{\beta,p}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$, як однієї так і багатьох змінних, досліджувались у роботах В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, Б. С. Кашина, А. С. Романюка та інших.

Згодом Е. С. Белінським було розглянуто величину найкращого ортогонального тригонометричного наближення. Дослідження цієї апроксимативної характеристики для різних функціональних класів набуло свого розвитку завдяки роботам Е. С. Белінського, В. М. Темлякова, А. С. Романюка, В. С. Романюка, С. А. Стасюка, С. П. Войтенка, А. Л. Шидліча та інших.

Поряд з вищезгаданими апроксимативними характеристиками у теорії наближення розглядають задачі стосовно порядків тригонометричних поперечників. Відповідні результати у цьому напрямі одержано у працях Я. С. Бугрова, Р. С. Ісмагілова, В. Є. Майорова, І. Маковоза, Е. С. Белінського, Г. Г. Магаріл-Ільяєва, В. М. Темлякова, А. С. Романюка, В. С. Романюка, С. А. Стасюка, А. Ф. Конограя, Н. В. Дерев'янко та інших.

У 1983 р. О. І. Степанцем була запроваджена нова класифікація періодичних функцій однієї змінної. Внаслідок цього були введені класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, які при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{\beta,p}$. Для зазначених класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше розглядалися на класах Вейля-Надя.

Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q при різних співвідношеннях між параметрами p і q та при різноманітних швидкостях прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ досліджувались у роботах О. І. Степанця, О. К. Кушпеля, С. О. Теляковського, Р. М. Тригуба, А. С. Сердюка, І. В. Соколенка, У. З. Грабової, Т. А. Степанюк та інших.

Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q було отримано у роботах О. І. Степанця, А. С. Романюка, Н. М. Консевич, О. С. Федоренка, А. С. Федоренка, А. Л. Шидліча, А. С. Сердюка, Т. А. Степанюк та інших. Тригонометричні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q досліджувались Н. М. Консевич, О. С. Федоренком, А. С. Сердюком та Т. А. Степанюк.

Віддаючи належне істотному внеску вищезгаданих авторів у розвиток даної тематики, варто зазначити, що на сьогоднішній день ще залишається низка важливих питань, які чекають свого розв'язання. Слід зазначити, що при дослідженні зазначених характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q основна увага була зосереджена на тих випадках, коли параметри p і q не приймають граничних значень 1 та ∞. З іншого боку, саме в цих випадках отримання оцінок деяких апроксимативних характеристик цікаве, як з точки зору практичних застосувань, так і з точки зору нових методів, які при цьому необхідно використовувати.

Останнім часом у теорії наближення потужного розвитку набули дослідження, пов'язані з білінійними наближеннями та гріді-алгоритмами. Порядкові оцінки гріді-алгоритмів для деяких функціональних класів встановлювалися у роботах В. М. Темлякова, С. А. Стасюка, С. П. Войтенка, А. Л. Шидліча та інших. Оцінки величин найкращих білінійних наближень для тих або інших функціональних класів досліджувались у працях Р. С. Ісмагілова, М.-Б. А. Бабаєва, М. В. Мірошина і В. В. Хромова, В. М. Темлякова, А. С. Романюка, В. С. Романюка, К. В. Соліч та інших. Проте питання про точні порядки білінійних наближень та гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега залишалися відкритими.

Таким чином, з огляду на вищесказане, актуальними є дослідження найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, гріді-алгоритмів, білінійних наближень та тригонометричних поперечників на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега та порівняння відповідних апроксимативних характеристик.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин" , номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є знаходження у нових, не досліджених раніше ситуаціях, точних за порядком оцінок найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, наближень за допомогою гріді-алгоритмів, найкращих білінійних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

Об'єктом дослідження є класи періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Предметом дослідження є деякі апроксимативні характеристики функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега. Зокрема, вивчаються найкращі наближення, наближення сумами Фур'є, найкращі m-членні тригонометричні наближення, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, гріді-алгоритми, білінійні наближення та тригонометричні поперечники.

Для досягнення поставленої *мети* у роботі було сформульовано такі *задачі дослідження*:

1. Одержати точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень періодичних функцій, які є аналогами ядер Бернуллі.

2. Встановити точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для тих випадків, коли параметри p і q приймають граничні значення 1 та ∞.

3. Дослідити поведінку гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Порівняти встановлені результати з відповідними результатами для найкращих m-членних та найкращих ортогональних тригонометричних наближень.

4. Знайти точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$. Порівняти отримані оцінки з відповідними оцінками колмогоровських поперечників.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах О. І. Степанця, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, А. С. Романюка та інших.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному.

1. Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_{\psi}(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

2. Встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

3. Досліджено поведінку гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Встановлено, що при деяких співвідношеннях між параметрами p та q оцінки цих величин співпадають за порядком з оцінками найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q.

4. Знайдено точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$. При

цьому виявилось, що порядки найкращих білінійних наближень, колмогоровських поперечників та найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега співпадають.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук, професору А. С. Романюку. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару — доктор фіз.–мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко–математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару — доктори фіз.–мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко);

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3 – 6 червня 2015 року;

— науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К. Ф. Фішмана та М. К. Фаге, Чернівці, 1 – 4 липня 2015 року;

— міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька, Дрогобич, 25 – 28 серпня 2015 року;

— міжнародній науковій конференції з нагоди 75-річчя В. П. Моторного "Теорія наближень і її застосування", Дніпропетровськ, 8 – 11 жовтня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в одинадцяти наукових публікаціях [1 – 11]. Шість з них [1 – 6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, дві з яких [5, 6] надруковано у виданні, внесеному до міжнародних наукометричних баз. Решта п'ять опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 119 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 121 сторінку друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, а також висвітлено наукову новизну одержаних результатів.

У першому розділі дисертації зроблено огляд літератури, яка стосується досліджуваних апроксимативних характеристик. Зокрема, у підрозділі 1.1 висвітлюються основні етапи розвитку теорії наближення, а також описано історію виникнення та дослідження найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та колмогоровських поперечників функціональних класів. У підрозділі 1.2 наведено детальний огляд літератури щодо історії дослідження найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, гріді-алгоритмів, білінійних наближень та тригонометричних поперечників.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| , \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Нехай далі $\psi(t) \ne 0,\ t \in \mathbb{N}$, β — довільне фіксоване дійсне число.

Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця, назвемо (ψ,β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Далі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f\in L^{\psi}_{\beta}\ i\ f^{\psi}_{\beta}\in U_p=\{\varphi:\varphi\in L_p,\|\varphi\|_p\le 1\},\ \ 1\le p\le\infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|)=|k|^{-r},\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^r_{p,\beta}$.

Нехай для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta\in\mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi,\pi]$ функції $F_{\psi}(x,\beta)$.

Тепер наведемо означення апроксимативних характеристик, які досліджувалися у роботі.

Нехай T_m — множина тригонометричних поліномів t, які мають вигляд

$$t(x)=\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Для $f\in L_q,\ 1\le q\le\infty$, покладемо

$$E_m(f)_q=\inf_{t\in T_m}\Big\|f(\cdot)-t(\cdot)\Big\|_q. \tag{1}$$

Величину (1) називають найкращим наближенням функції f поліномами T_m у просторі L_q.

Якщо $F\subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_m(F)_q=\sup_{f\in F}\inf_{t\in T_m}\Big\|f(\cdot)-t(\cdot)\Big\|_q.$$

Далі, через $\mathcal{E}_m(F)_q$, будемо позначати величину

$$\mathcal{E}_m(F)_q=\sup_{f\in F}\Big\|f(\cdot)-\sum_{k=-m}^{m}\hat{f}(k)e^{ik\cdot}\Big\|_q,$$

яка називається наближенням сумами Фур'є функціонального класу F у метриці L_q.

Легко бачити, що для величин $E_m(F)_q$ і $\mathcal{E}_m(F)_q$ має місце співвідношення

$$E_m(F)_q \leq \mathcal{E}_m(F)_q.$$

Основну увагу в роботі приділено вивченню наступних величин:

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \left\| f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot) \right\|_q, \tag{2}$$

$$e_m^{\perp}(f)_q = \inf_{\Theta_m} \left\| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot) \right\|_q, \tag{3}$$

де

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i n_k x},$$

Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа,

$$S_{\Theta_m}(f, x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{i n_k x}.$$

Величину (2) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням, а (3) — найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q, \tag{4}$$

$$e_m^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^{\perp}(f)_q. \tag{5}$$

Очевидно, що величини (4) і (5) пов'язані співвідношенням

$$e_m(F)_q \leq e_m^{\perp}(F)_q.$$

Величина $e_m^{\perp}(F)_q$ тісно пов'язана з наступною апроксимативною характеристикою.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ — коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані у порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))| \geq |\hat{f}(k(2))| \geq ...$$

Позначимо для $f \in L_q$

$$G_m(f,x) := \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{ik(l)x}$$

і розглянемо величину

$$\sup_{f\in F} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q.$$

Для функціонального класу $F \subset L_q$ покладемо

$$G_m(F)_q = \sup_{f\in F} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q.$$

Розглянутий метод побудови m-членного тригонометричного наближення називається гріді-алгоритмом (від англ. *greedy algorithm*).

Легко бачити, що згідно з означеннями

$$e_m(F)_q \le e_m^{\perp}(F)_q \le G_m(F)_q$$

та

$$e_m(F)_2 = e_m^{\perp}(F)_2 = G_m(F)_2.$$

Зазначимо також, що величина $e_m(F)_q$ не перевищує величини тригонометричного поперечника $d_m^T(F, L_q)$, який визначається наступним чином:

$$d_m^T(F, L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{f\in F} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m,\cdot)||_q \ .$$

Поряд з апроксимативною характеристикою $e_m(F)_q$ у теорії наближень розглядають величину найкращого білінійного наближення $\tau_m(F)_{q_1,q_2}$.

Нехай L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in [-\pi,\pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

причому норма обчислюється спочатку у просторі L_{q_1} по змінній $x \in [-\pi,\pi]$, а потім від результату по змінній $y \in [-\pi,\pi]$ у просторі L_{q_2}. Для $f(x-y) \in L_{q_1,q_2}$ покладемо

$$\tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2} = \inf_{u_j(x),v_j(y)} \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x)v_j(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1},\ v_j \in L_{q_2}$.

Якщо $F \subset L_{q_1}$, то величина

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F} \tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2},$$

називається найкращим білінійним наближенням.

Одержані результати формулюються у термінах порядкових співвідношень. Для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ ($B \geq C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі константи $C_i,\ i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

У другому розділі дисертаційної роботи досліджуються питання, пов'язані з порядковими оцінками найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q. Зокрема, у підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_\psi(x, \beta)$ у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

Позначимо через B множину функцій $\psi(t),\ t \in \mathbb{N}$, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq C, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$ та інші.

У прийнятих позначеннях справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_m(F_\psi)_q \asymp E_m(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження **2.1.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 1 - \frac{1}{q}$, $1 \leq q \leq \infty$ відповідний результат було одержано В. М. Темляковим.

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m^{\perp}(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження **2.2.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 1 - \frac{1}{q}$ порядок величини $e_m^{\perp}(F_\psi)_q$, $1 < q < \infty$, встановлено А. С. Романюком.

Виявлено, що величини $e_m(F_\psi)_q$, $e_m^{\perp}(F_\psi)_q$, $E_m(F_\psi)_q$ та $\mathcal{E}_m(F_\psi)_q$ у випадку $1 < q \le 2$ рівні за порядком.

З використанням цих результатів у підрозділі 2.3 отримано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. При цьому зазначимо, що на функції ψ довелось накласти додаткові умови, крім належності їх до множини B, що зумовлено використанням відповідних допоміжних тверджень.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t)}\right) \ge 0, \ t \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t)}\right) \le 0, \ t \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t)}\right) = \frac{1}{\psi(t)} - \frac{2}{\psi(t+1)} + \frac{1}{\psi(t+2)}$$

і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауваження **2.3.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 1 - \frac{1}{q}$, даний результат було одержано А. С. Романюком.

Зазначимо, що при виконанні умов теореми 2.3 має місце порядкове співвідношення

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \asymp \mathcal{E}_m(L_{\beta,1}^{\psi})_q \asymp E_m(L_{\beta,1}^{\psi})_q.$$

У підрозділі 2.4 знайдено точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень і тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі $L_q,\ 2 \le q < \infty$. Крім цього, одержано також порядки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ функцій малої гладкості у просторі $L_q,\ 2 \le q < \infty$.

Теорема 2.4. *Нехай* $2 \le q < \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (6) *або* (7) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon},\ \ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження **2.4.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано Е. С. Белінським, а оцінку $d^T_m(W^r_{1,\beta})_q$ було анонсовано у роботі Е. С. Белінського і отримано у вигляді наслідку у роботі А. С. Романюка.

Перед формулюванням наступного результату наведемо необхідне позначення.

Через $B_{q,\varepsilon},\ 2 < q < \infty$, позначимо множину функцій $\psi(t),\ \ t \in \mathbb{N}$, які задовольняють наступні умови:

1) $\psi \in B$;

2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1-\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$ не спадає;

3) послідовність $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}},\ t \in \mathbb{N}$ не зростає.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай* $2 < q < \infty,\ \psi(t) \in B_{q,\varepsilon},\ t \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{R}$ *і виконується одна з умов* (6) *або* (7)*. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m^{\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(1-\frac{1}{q})}.$$

Зауваження **2.5.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ 1-\frac{1}{q} < r < 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано Е. С. Белінським.

У підрозділі 2.5 встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p},\ 1 < p < \infty$ у просторі L_1.

Теорема 2.6. *Нехай* $1 < p < \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$*. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Поклавши в теоремі 2.7 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо

Твердження 2.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(W^r_{p,\beta})_1 \asymp e^{\perp}_m(W^r_{p,\beta})_1 \asymp m^{-r}.$$

Твердження 2.2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

***Зауваження* 2.6.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, порядки величин $E_m(W^r_{p,\beta})_1$ та $\mathcal{E}_m(W^r_{p,\beta})_1$ було встановлено В. М. Темляковим.

У підрозділі 2.6 встановлено точні за порядком оцінки найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці.

Теорема 2.7. *Нехай* $1 < p \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{a+\varepsilon}$, $a = \max\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp \psi(m) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},$$

де $b_+ = \max\{b; 0\}$.

***Зауваження* 2.7.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > \frac{1}{p}$ порядок величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, $1 \leq p \leq \infty$ було встановлено Е. С. Белінським.

Теорема 2.8. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді має місце оцінка*

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}}.$$

***Зауваження* 2.9.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > \frac{1}{p}$ порядок величини $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, $1 < p < \infty$ встановлено А. С. Романюком.

Співставивши результати теорем 2.7 і 2.8, бачимо, що між величинами $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ та $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, у випадку $1 < p \leq 2$, має місце співвідношення

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp m^{\frac{1}{2}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}.$$

Якщо ж $2 < p < \infty$, то справедливе таке співвідношення

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp m^{\frac{1}{p}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}.$$

В останньому третьому розділі дисертаційної роботи встановлено точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів та білінійних наближень класів (ψ,β)-диференційовних періодичних функцій. Зокрема, у підрозділі 3.2 одержано точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Теорема 3.2. *Нехай* $1 < p \leq q \leq 2$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.3. *Нехай* $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.4. *Нехай* $2 \leq p \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.5. *Нехай* $2 \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (6) *або* (7) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

***Зауваження* 3.1.** Поклавши у теоремах 3.1 – 3.5 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо відповідні результати для величин $G_m(W^r_{p,\beta})_q$, які раніше отримано В. М. Темляковим.

Співставивши результати теорем 3.1 – 3.5 з відповідними оцінками величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, бачимо, що при $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$ та $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

У випадках $1 < p \le q \le 2$ та $p = 1,\ 2 \le q < \infty$ справедливе таке співвідношення:

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\ e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Якщо ж $2 \le p \le q < \infty$, то

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\ e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

У підрозділі 3.3 одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2} для певних співвідношень між параметрами p, q_1, q_2.

Теорема 3.6. *Нехай $1 < p \le q_1 \le 2,\ 1 \le q_2 \le \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}.$$

Теорема 3.7. *Нехай $1 < p \le 2 \le q_1 \le \infty,\ 1 \le q_2 \le \infty,\ \psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3.8. *Нехай $2 \le p \le q_1 \le \infty,\ 1 \le q_2 \le \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m).$$

Теорема 3.9. *Нехай $2 \le q_1 < \infty,\ 1 \le q_2 \le \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов (6) або (7) і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 3.2. Для класів $W^r_{p,\beta}$ відповідні до теорем 3.6 — 3.9 твердження одержано В. М. Темляковим.

Висновки

1. Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_\psi(x, \beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

2. Встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^\psi_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

3. Досліджено поведінку гріді-алгоритмів на класах $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q. Встановлено, що при деяких співвідношеннях між параметрами p та q оцінки цих величин співпадають за порядком з оцінками найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q.

4. Знайдено точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^\psi_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$. При цьому виявилось, що одержані оцінки співпадають за порядком з найкращими m-членними тригонометричними наближеннями класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_{q_1}.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Шкапа В. В. Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^\psi_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / В. В. Шкапа // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 305–317.

2. Шкапа В. В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^\psi_{\beta,1}$ / В. В. Шкапа // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 315–329.

3. Шкапа В. В. Найкращі наближення аналогів ядер Бернуллі та класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 413–424.

4. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Теорія наближення функцій та

суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 299–312.

5. Шкапа В. В. Апроксимативні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / В. В. Шкапа // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1139 – 1150.

6. Шкапа В. В. Найкращі тригонометричні і білінійні наближення класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 3. — С. 387 – 400.

7. Шкапа В. В. Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / В. В. Шкапа // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. — С. 217 – 218.

8. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 91.

9. Шкапа В. В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ / В. В. Шкапа // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге. Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. — С. 120 – 121.

10. Шкапа В. В. Approximative characteristics of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functions in the space L_1 / В. В. Шкапа // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька. Тези доповідей. — Дрогобич, 2015. — С. 151.

11. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / В. В. Шкапа // Міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В. П. Моторного. Тези доповідей. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, 2015. — С. 92.

Анотації

Шкапа В. В. Найкращі наближення та гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних функцій.— Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертації проведено дослідження деяких апроксимативних характеристик класів періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега.

Встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_{\psi}(x,\beta)$ у просторі L_q при $1 < q < \infty$. Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, гріді-алгоритмів та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q. Також знайдено точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2} для певних співвідношень між параметрами p, q_1, q_2. У результаті проведеного дослідження виявлено, що одержані оцінки співпадають за порядком з найкращими m-членними тригонометричними наближеннями класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_{q_1}.

Ключові слова: сума Фур'є, найкраще наближення, найкращі m-членні тригонометричні наближення, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, гріді-алгоритми, білінійні наближення, тригонометричні поперечники.

Шкапа В. В. Наилучшие приближения и гриди-алгоритмы на классах (ψ,β)-дифференцируемых функций.— Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации исследуются некоторые аппроксимативные характеристики классов периодических функций $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространствах Лебега.

Установлены точные по порядку оценки наилучших приближений, приближений суммами Фурье, наилучших ортогональных тригонометрических приближений 2π-периодических функций $F_{\psi}(x,\beta)$ в пространстве L_q при $1 < q < \infty$. Получены точные по порядку оценки наилучших приближений, приближений суммами Фурье, наилучших m-членных тригонометрических приближений, наилучших ортогональных тригонометрических приближений, гриди-алгоритмов и тригонометрических поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q. Также найдены точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений классов функций двух переменных, порожденных из функций одной переменной

класса $L^{\psi}_{\beta,p}$ сдвигами аргумента, в пространстве L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$.

Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и, кроме того, существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что последовательность* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не возрастает. Тогда справедливы порядковые оценки*

$$\mathcal{E}_m(F_\psi)_q \asymp E_m(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 2.6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тогда справедливы порядковые оценки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и, кроме того, существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что последовательность* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не возрастает. Тогда справедливо порядковое соотношение*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.7. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q_1 \le \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и, кроме того, существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что последовательность* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не возрастает. Тогда справедлива порядковая оценка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Ключевые слова: суммы Фурье, наилучшие приближения, наилучшие m-членные тригонометрические приближения, наилучшие ортогональные тригонометрические приближения, гриди-алгоритмы, билинейные приближения, тригонометрические поперечники.

Shkapa V. V. Best approximations and greedy algorithms of classes of (ψ,β)-differentiable functions. — Manuscript. Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis investigates some approximate characteristics of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functions in the Lebesgue spaces.

It sets exact order estimates of the best approximations, approximations by Fourier sums and the best orthogonal trigonometric approximations of 2π periodic functions $F_\psi(x,\beta)$ in the space L_q by $1 < q < \infty$. The thesis finds exact order estimates of the best approximations, approximations by Fourier sums, the best m-term trigonometric approximations, the best orthogonal trigonometric approximations, greedy algorithms and trigonometric widths of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q. It obtains exact order estimates of the best bilinear approximations of the classes of functions of two variables generated by functions of a single variable from the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ by the shifts of the argument in the space L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$. The fact that the order estimates of the best bilinear approximations coincide with the order estimates of the Kolmogorov widths that were obtained before was revealed during the research.

Key words: Fourier sum, the best approximations, the best m-term trigonometric approximations, the best orthogonal trigonometric approximations, greedy algorithms, bilinear approximations, trigonometric widths.

Підп. до друку 06. 07. 2016. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. 42.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.