НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ШКАПА ВІКТОРІЯ ВІКТОРІВНА

УДК 517.5

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ГРІДІ-АЛГОРИТМИ НА КЛАСАХ (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико–математичних наук,
професор
РОМАНЮК АНАТОЛІЙ СЕРГІЙОВИЧ

Київ — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$x \in A$ ($x \notin A$) — елемент x належить (не належить) множині A;

$A \subset B$ — множина A міститься у множині B;

$A \cup B$ — об'єднання множин A та B;

$A \cap B$ — перетин множин A та B;

$A \setminus B$ — різниця множин A та B;

$[a, b]$ — сегмент числової прямої;

(a, b) — інтервал числової прямої;

$[a, b)$ — півінтервал числової прямої;

$:=$ — дорівнює за означенням;

$[a]$ — ціла частина числа a;

$(a)_+$ — величина вигляду: $\max\{a; 0\}$;

$sign\ a$ — величина, що дорівнює 1, якщо $a > 0$, дорівнює -1, якщо $a < 0$, і нулю, якщо $a = 0$;

L_q, $1 \leq q < \infty$, — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q функцій f;

L_∞ — простір 2π-періодичних суттєво обмежених функцій f;

$\|f\|_q$ — норма функції f у просторі L_q, $1 \leq q \leq \infty$;

L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ — множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \Big\|_{q_2};$$

$\sup\limits_{x\in A} F(x)$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині A;

$\inf\limits_{x\in A} F(x)$ — точна нижня межа значень функціонала F на множині A;

esssup — суттєва точна верхня межа;

$\{x : S\}$ — сукупність елементів x, які мають властивість S;

$\hat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f;

$g * \varphi$ — згортка функцій g і φ;

$\rho(\mathrm{s})$ — множина виду $\rho(\mathrm{s}) = \{k \in \mathbb{Z} :\ [2^{s-1}] \leq |k| < 2^s,\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;

$F_\psi(x, \beta)$ — аналог ядра Бернуллі;

$V_l(x)$ — ядро Валле-Пуссена;

$\mathbf{V}_l$ — оператор Валле-Пуссена;

$D_l(x)$ — ядро Діріхле;

$R_l(x)$ — поліноми Рудіна-Шапіро;

$A(m) \ll B(m)$ $(A(m) \gg B(m),\ A(m), B(m) > 0)$ — порядкова нерівність;

$A(m) \asymp B(m)$ $(A(m), B(m) > 0)$ — порядкова рівність;

T_m — множина тригонометричних поліномів t, які мають вигляд $t(x) = \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$;

$S_m(f)$ — частинна сума Фур'є функції $f \in L_1$;

$E_m(f)_q$ — найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами $t \in T_m$ у просторі L_q;

$\mathcal{E}_m(f)_q$ — наближення функції f за допомогою її частинної суми Фур'є $S_m(f)$ у просторі L_q;

$e_m(f)_q$ — найкраще m-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q;

$e^{\perp}_m(f)_q$ — найкраще ортогональне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q;

$G_m(f)_q$ — наближення функції f за допомогою апроксимант грідіалгоритму у просторі L_q;

$\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ — найкраще білінійне наближення функції f у просторі L_{q_1,q_2};

$E_m(F)_q$, $\mathcal{E}_m(F)_q$, $e_m(F)_q$, $e_m^\perp(F)_q$, $G_m(F)_q$, $\tau_m(F)_{q_1,q_2}$ — точні верхні межі величин $E_m(f)_q$, $\mathcal{E}_m(f)_q$, $e_m(f)_q$, $e_m^\perp(f)_q$, $G_m(f)_q$, $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ відповідно, по всіх функціях $f \in F$;

$d_m(F, L_q)$ — m-вимірний колмогоровський поперечник класу F у просторі L_q;

$d_m^T(F, L_q)$ — m-вимірний тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q.

ВСТУП

Дана робота присвячена дослідженню апроксимативних характеристик класів 2π-періодичних функцій однієї змінної. Зокрема, вивчаються найкращі наближення, наближення сумами Фур'є, найкращі m-членні тригонометричні наближення, найкращі ортогональні тригонометричні наближення, гріді-алгоритми, білінійні наближення та тригонометричні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Актуальність теми.

Задачі апроксимаційного змісту, що формулюються на класах функцій, у багатьох випадках є задачами в яких ставиться питання знайти або оцінити точну верхню грань похибки наближення заданим методом на фіксованому класі функцій.

Серед існуючих методів наближення тригонометричними поліномами найбільш простим та природним методом наближення функцій з даного класу є метод Фур'є, який полягає в наближенні функцій з цього класу частинною сумою її ряду Фур'є. Щодо питання наближення тих або інших класів функцій сумами Фур'є, а також поліномами, які будуються на їх основі, відомо багато глибоких і остаточних результатів, з якими можна ознайомитись у монографіях [1, 15, 16, 57, 58, 72].

Останнім часом у теорії наближення все більшого розповсюдження набуває метод m-членного тригонометричного наближення, тобто наближення класів періодичних функцій за допомогою поліномів виду

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i n_k x},$$

де Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа. Апроксимативні властивості цього методу відносно добре відомих класів періодичних функцій $W^r_{\beta,p}$, H^r_p (означення класів див., наприклад, у [67, с. 31]), $B^r_{p,\theta}$ (див. [34, с. 159]), як однієї так і багатьох змінних, досліджувались у роботах В. М. Темлякова [66, 67, 115], Е. С. Белінського [5, 6], Б. С. Кашина та В. М. Темлякова [20], А. С. Романюка [40, 41, 44] та інших.

При цьому важливо зазначити, що для згаданих класів функцій у деяких важливих випадках було виявлено переваги m-членних тригонометричних наближень у порівнянні з класичними методами наближення.

У зв'язку з найкращим m-членним тригонометричним наближенням Е. С. Белінським [7] було розглянуто величину найкращого ортогонального тригонометричного наближення. Дослідження цієї апроксимативної характеристики для різних функціональних класів набуло свого розвитку завдяки роботам Е. С. Белінського [98], В. М. Темлякова [66], А. С. Романюка [39, 43, 46], С. А. Стасюка [56], С. П. Войтенка [11], А. Л. Шидліча [84, 85] та інших.

Поряд з m-членними тригонометричними наближеннями у теорії наближення розглядають задачі стосовно порядків тригонометричних поперечників функціональних класів. Відповідні результати у цьому напрямі одержано у працях Я. С. Бугрова [10], Р. С. Ісмагілова [17], В. Є. Майорова [29 — 31], І. Маковоза [111], Е. С. Белінського [4, 5], Г. Г. Магаріл-Ільяєва [28], В. М. Темлякова [67], А. С. Романюка [42, 45, 46], А. С. Романюка та В. С. Романюка [47], С. А. Стасюка [55], Н. В. Дерев'янко [14] та багатьох інших.

У 1983 р. О. І. Степанцем була запроваджена нова класифікація періодичних функцій однієї змінної [58] (див. також [60]). Внаслідок цього були введені класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, які при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{\beta,p}$. Для зазначених класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше розглядалися класах Вейля-Надя.

Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q при різних співвідношеннях між параметрами p і q та при різноманітних швидкостях прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ досліджувались у роботах О. І. Степанця [58, 60], О. І. Степанця та О. К. Кушпеля [59], С. О. Теляковського [65], Р. М. Тригуба [74], А. С. Сердюка [49], А. С. Сердюка та І. В. Соколенка [50], А. С. Сердюка та У. З. Грабової [13], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [51] та інших.

Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q було отримано у роботах О. І. Степанця [60], А. С. Романюка [38], Н. М. Консевич [22 — 24], О. С. Федоренка [75 – 80], А. С. Федоренка та О. С. Федоренка [82, 83], А. Л. Шидліча [84, 85], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [52, 53] та інших. Тригонометричні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q досліджувались Н. М. Консевич [25], О. С. Федоренком [79], А. С. Сердюком та Т. А. Степанюк [52].

Віддаючи належне істотному внеску вищезгаданих авторів у розвиток даної тематики, варто зазначити, що на сьогоднішній день ще залишається низка важливих питань, які чекають свого розв'язання. Слід зазначити, що при дослідженні зазначених характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q основна увага була зосереджена на тих випадках, коли параметри p і q не приймають граничних значень 1 та ∞. З іншого боку, саме в цих випадках отримання оцінок деяких апроксимативних характеристик цікаве, як з точки зору практичних застосувань, так і з точки зору нових методів, які при цьому необхідно використовувати.

Останнім часом у теорії наближення потужного розвитку набули дослідження, пов'язані з білінійними наближеннями та гріді-алгоритмами. Порядкові оцінки гріді-алгоритмів для деяких функціональних класів встановлювалися у роботах В. М. Темлякова [71, 117, 118], С. А. Стасюка [114], С. П. Войтенка [12], А. Л. Шидліча [85, 86] та інших. Оцінки величин найкращих білінійних наближень для тих або інших функціональних класів досліджувались у працях Р. С. Ісмагілова [17], М.-Б. А. Бабаєва [2], М. В. Мірошина і В. В. Хромова [32], В. М. Темлякова [67 — 70, 115], А. С. Романюка [40, 41, 46], А. С. Романюка та В. С. Романюка [48], К. В. Соліч [54] та інших. Проте питання про точні порядки білінійних наближень та гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега залишалися відкритими.

Таким чином, з огляду на вищесказане, актуальними є дослідження найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, гріді-алгоритмів, білінійних наближень та тригонометричних поперечників на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега та порівняння відповідних апроксимативних характеристик.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин" , номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Мета і завдання дослідження.

Метою даної роботи є знаходження у нових, не досліджених раніше ситуаціях, точних за порядком оцінок найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, наближень за допомогою гріді-алгоритмів, найкращих білінійних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

Перш ніж сформулювати задачі, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети, означимо об'єкт та предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є класи періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Наведемо спочатку необхідні позначення і сформулюємо означення класів функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)| \;, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Нехай далі $\psi(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{N}$, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [58, с. 25] (див. також [60, Т.I, с. 132]), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{p,\beta}$ (див., наприклад, [58, с. 25]). При $\beta = r$ класи $W^{r}_{p,\beta}$ є відомими класами Вейля. Якщо, крім того, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то клас $W^{r}_{p,\beta}$ позначається W^{r}_{p}.

За допомогою (ψ, β)-похідних можна класифікувати весь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, в той же час, виділяти більш тонкі властивості кожної окремої функції. Для зазначених класів на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше були відомі для класів Вейля-Надя.

Нехай для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi,\pi]$ функції $F_\psi(x,\beta)$. Тоді кожну функцію $f \in L^\psi_{\beta,p}$ можна зобразити у вигляді згортки:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)F_\psi(t,\beta)dt, \tag{B.1}$$

де $\|\varphi\|_p \le 1,\ 1 \le p \le \infty$ (див., наприклад, [60, ч.II, с. 135]).

Зазначимо, що функції $F_\psi(x,\beta)$ природньо називати аналогами ядер Бернуллі, оскільки при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0$, функція $F_\psi(x,\beta)$ є відомим ядром Бернуллі.

При розгляді наближення функцій із множини $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q число q може бути як рівним p, так і більшим чи меншим за нього. Тому зазначимо умови, при яких із того, що $f \in L^\psi_{\beta,p}$ випливає, що $f \in L_q$. Дамо наступне означення (див., наприклад, [58, с. 207-209]).

При фіксованому $\alpha > 0$ будемо говорити, що функція ψ належить множині P_α, якщо величини

$$\sup_k |\psi(k)|k^\alpha$$

і

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1)\ (k+1)^\alpha - \psi(k)k^\alpha|$$

є скінченними.

У роботі [58, с. 208] О. І. Степанцем була доведена теорема про вкладення класів $L^\psi_{\beta,p}$ у простір L_q, яку ми сформулюємо в менш загальному вигляді.

Теорема А. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *і* $\psi \in P_\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді* $L^\psi_{\beta,p} \subset L_q$.

Легко бачити, що коли ψ такі, що $\psi(k)k^\alpha,\ k \in \mathbb{N},\ \alpha \ge 0$, не зростають, то $\psi \in P_\alpha$.

Нехай $1 < q < \infty$. Якщо послідовність $\psi(k)k^{1-\frac{1}{q}}$ не зростає і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^q(k)k^{q-2}$$

є скінченною, то згідно з лемою 12.6.6 із [16, Т.II, с. 193] для ядер $F_\psi(x,\beta)$ має місце включення $F_\psi(x,\beta) \in L_q$. Тому в силу твердження 1.5.5 роботи [27, с. 43] справедливе вкладення $L^\psi_{\beta,1} \subset L_q$.

У випадку, коли $q \le p$ має місце

Теорема Б [58, с. 208]**.** *Якщо* $\psi \in P_0$ *і* $1 < q \le p < \infty$*, то* $L^\psi_{\beta,p} \subset L_q$*,* $\forall \beta \in \mathbb{R}$*.*

Зауважимо, що у цьому випадку для вкладення достатньо, щоб $\psi \in B$, де B — множина функцій $\psi(t),\ t \in \mathbb{N}$, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r},\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 0$ та ін.

Предметом дослідження даної роботи є деякі апроксимативні характеристики наведених вище класів періодичних функцій $L^\psi_{\beta,p}$.

Нехай T_m — множина тригонометричних поліномів t, які мають вигляд

$$t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$E_m(f)_q = \inf_{t \in T_m} \Big\| f(\cdot) - t(\cdot) \Big\|_q. \tag{В.2}$$

Величину (В.2) називають найкращим наближенням функції f поліномами $t \in T_m$ у просторі L_q.

Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, то покладемо

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t \in T_m} \Big\| f(\cdot) - t(\cdot) \Big\|_q .$$

Далі, через $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, будемо позначати величину

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \Big\| f(\cdot) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ik\cdot} \Big\|_q ,$$

яка називається наближенням сумами Фур'є функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q.

Легко бачити, що для величин $E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ і $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ має місце співвідношення

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q .$$

Основну увагу в роботі приділено вивченню наступних величин

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m, \cdot)} \Big\| f(\cdot) - T(\Theta_m, \cdot) \Big\|_q , \qquad \text{(В.3)}$$

$$e^{\perp}_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \Big\| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f, \cdot) \Big\|_q , \qquad \text{(В.4)}$$

де

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i n_k x},$$

Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа,

$$S_{\Theta_m}(f, x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{i n_k x}.$$

Величину (В.3) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням, а (В.4) — найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$, то покладемо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} e_m(f)_q, \tag{B.5}$$

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} e^{\perp}_m(f)_q. \tag{B.6}$$

Очевидно, що величини (B.5) і (B.6) пов'язані співвідношенням

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Величина $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ тісно пов'язана з наступною апроксимативною характеристикою.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ — коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані в порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))| \ge |\hat{f}(k(2))| \ge ... \tag{B.7}$$

Позначимо для $f \in L_q$

$$G_m(f,x) := \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{ik(l)x}$$

і розглянемо величину

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q.$$

Зрозуміло, що вибір апроксимантів $G_m(f,\cdot)$ не є однозначним, але як буде слідувати з отриманих результатів, порядок цієї величини не залежить від того, яким чином ми здійснили цей вибір. Тому надалі для зручності покладемо

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q.$$

Розглянутий метод побудови m-членного тригонометричного наближення називається гріді-алгоритмом (від англ. *greedy algorithm*).

Легко бачити, що згідно з означеннями

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$$

та

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 = e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 = G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2.$$

Зазначимо також, що величина $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ не перевищує величини тригонометричного поперечника $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ порядку m, яка визначається наступним чином:

$$d^T_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q \ .$$

Поряд з апроксимативною характеристикою $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ у теорії наближень розглядають величину найкращого білінійного наближення $\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2}$.

Нехай L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \left\| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \right\|_{q_2},$$

причому норма обчислюється спочатку у просторі L_{q_1} по змінній $x \in [-\pi, \pi]$, а потім від результату по змінній $y \in [-\pi, \pi]$ у просторі L_{q_2}. Для $f(x-y) \in L_{q_1,q_2}$ покладемо

$$\tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2} = \inf_{u_j(x), v_j(y)} \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}, \ v_j \in L_{q_2}$.

Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_{q_1}$, то величина

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2},$$

називається найкращим білінійним наближенням.

Одержані результати формулюються у термінах порядкових співвідношень. Для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ ($B \geq C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі константи C_i, $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

Для досягнення поставленої *мети* у роботі було сформульовано такі *задачі дослідження*:

1. Одержати точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень періодичних функцій, які є аналогами ядер Бернуллі.

2. Встановити точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для тих випадків, коли параметри p і q приймають граничні значення 1 та ∞.

3. Дослідити поведінку гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q. Порівняти встановлені результати з відповідними результатами для найкращих m-членних та найкращих ортогональних тригонометричних наближень.

4. Знайти точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$. Порівняти отримані оцінки з відповідними оцінками найкращих m-членних тригонометричних наближень та колмогоровських поперечників.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах О. І. Степанця, В. М. Темлякова, Е. С. Белінського, А. С. Романюка та інших.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному.

1. Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_\psi(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

2. Встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

3. Досліджено поведінку гріді-алгоритмів на класах $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q. Встановлено, що існують співвідношення між p та q, при яких одержані порядки гріді-алгоритмів співпадають з порядками найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень цих класів.

4. Знайдено точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^\psi_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$. При цьому виявилось, що порядки найкращих білінійних наближень, колмогоровських поперечників та найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_{q_1} співпадають.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук, професору А. С. Романюку. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару: доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" (механіко–математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару: доктори фіз.–мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко);

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135-ій річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3 – 6 червня 2015 року;

— науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К. Ф. Фішмана та М. К. Фаге, Чернівці, 1 – 4 липня 2015 року;

— міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробагатька, Дрогобич, 25 – 28 серпня 2015 року;

— міжнародній науковій конференції з нагоди 75-річчя Віталія Павловича Моторного "Теорія наближень і її застосування", Дніпропетровськ, 8 – 11 жовтня 2015 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в одинадцяти наукових публікаціях [87 – 97]. Шість з них [87 – 92] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, дві з яких [91, 92] надруковано у виданні, внесеному до міжнародних наукометричних баз. Решта п'ять опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

У першому розділі дисертації зроблено огляд літератури, яка стосується досліджуваних апроксимативних характеристик. Зокрема, у підрозділі 1.1 висвітлюються основні етапи розвитку теорії наближення, а також описано історію виникнення та дослідження найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та колмогоровських поперечників функціональних класів. У підрозділі 1.2 наведено детальний огляд літератури щодо історії дослідження найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень, гріді-алгоритмів, білінійних наближень та тригонометричних поперечників.

У другому розділі дисертаційної роботи досліджуються питання, пов'язані з порядковими оцінками найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q. Зокрема, підрозділ 2.1 носить допоміжний характер. У ньому сформульовано задачі дослідження, наведено необхідні позначення та ряд допоміжних тверджень, які використовуються для отримання результатів дисертаційної роботи. У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_\psi(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$. З використанням цих результатів у підрозділі 2.3 отримано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$. У підрозділі 2.4 знайдено точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень і тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $2 \leq q < \infty$. Крім цього, одержано також порядки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ функцій малої гладкості у просторі L_q, $2 \leq q < \infty$. У підрозділі 2.5 встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$ у просторі L_1. У підрозділі 2.6 одержано точні за порядком оцінки найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці. Виявлено, що існують співвідношення між параметрами p та q для яких величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ та $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ мають однакові порядки, а також і такі, для яких вони відрізняються за порядком.

В останньому третьому розділі дисертаційної роботи встановлено точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів та білінійних наближень класів (ψ,β)-диференційовних періодичних функцій. Зокрема, у підрозділі 3.1 здійснено постановку задач дослідження та наведено ряд допоміжних тверджень, які використовуються для отримання результатів дисертаційної роботи. У підрозділі 3.2 встановлено точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q у випадках $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$, $\quad 1 < p \leq q \leq 2$, $\quad 1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$, $2 \leq p \leq q < \infty$. Виявлено, що існують співвідношення між параметрами

p та q для яких величини найкращих ортогональних тригонометричних наближень та гріді-алгоритмів мають однакові порядки, а також і такі, для яких вони відрізняються за порядком. У підрозділі 3.3 одержано точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, якщо $1 \leq q_2 \leq \infty$, а p і q пов'язані співвідношеннями $1 < p \leq q_1 \leq 2, \quad 1 \leq p \leq 2 \leq q_1 \leq \infty, \quad 2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$. Також встановлено, що порядки найкращих білінійних наближень, колмогоровських поперечників та найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у розглянутих ситуаціях співпадають.

Подяки. Користуючись нагодою, висловлюю щиру і глибоку вдячність моєму науковому керівнику Анатолію Сергійовичу Романюку за постановку задач, постійну увагу, корисні зауваження та поради у роботі.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Основні етапи розвитку теорії наближення

На теперішній час в історії розвитку теорії наближення виділяють три основні етапи. Перший етап, який відноситься до XIX століття, пов'язується з формулюванням наступної задачі.

Нехай X — лінійний нормований простір.

Задача 1. Наближення фіксованого елемента $x \in X$ фіксованою множиною F із X.

Потрібно знайти величину

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|_X, \tag{1.1}$$

яку називають найкращим наближенням елемента x множиною F.

Величину (1.1) було введено П. Л. Чебишевим, який у 1854 р. знайшов найкраще наближення функції $t^{m+1} \in C[-1, 1]$ алгебраїчними поліномами степеня не більше m у просторі $C[-1, 1]$ ($C[a, b]$ — простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $x(t)$ з нормою $\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$).

Зазначимо, що П. Л. Чебишевим, його учнями та послідовниками розглядалось наближення індивідуальних функцій за допомогою алгебраїчних поліномів, тригонометричних поліномів, раціональних функцій в різних метриках.

Другий етап розвитку теорії наближення сформувався після того, як у 1885 р. К. Вейєрштрассом було доведено, що кожну неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію можна з будь-якою точністю наблизити алгебраїчними поліномами, а кожну неперервну періодичну функцію —

тригонометричними поліномами. Виникла проблема характеру зв'язку між властивостями функцій та швидкістю наближення їх поліномами. Фундаментальне дослідження цієї проблеми було проведено в роботах С. Н. Бернштейна [9] і Д. Джексона [107]. Відтоді починається вивчення наближення не тільки індивідуальних функцій, а й класів функцій, що мають певні диференціально-різнецеві властивості.

Отже, другому етапу розвитку теорії наближення відповідає наступна задача.

Задача 2. Наближення фіксованої множини $A \subset X$ фіксованою множиною $F \subset X$.

Ця задача полягає у знаходженні величини

$$E(A, F) = \sup_{x \in A} E(x, F) = \sup_{x \in A} \inf_{u \in F} \|x - u\|_X, \tag{1.2}$$

яка називається відхиленням множини A від множини F.

Розглянемо частинний випадок, коли X — простір $L_q[-\pi, \pi]$, $1 \le q \le \infty$, F — підпростір T_m тригонометричних поліномів степеня не більшого за m.

Якщо A — деякий клас періодичних функцій із L_q, то покладемо, згідно з (1.2)

$$E_m(A)_q = \sup_{f \in A} E_m(f)_q = \sup_{f \in A} \inf_{t_m \in T_m} \|f - t_m\|_q. \tag{1.3}$$

Тематика другого етапу теорії наближення, зокрема тематика наближення класів періодичних функцій тригонометричними поліномами була розпочата у роботах А. Лебега, Ш. Валле-Пуссена, Л. Фейєра, С. Н. Бернштейна, Д. Джексона і продовжена потім у роботах А. М. Колмогорова, Ж. Фавара, Б. Надя, С. М. Нікольського, В. К. Дзядика, М. П. Корнійчука, С. Б. Стєчкіна, С. А. Теляковського, О. І. Степанця, А. С. Романюка, А. С. Сердюка та багатьох інших.

Перші результати по обчисленню точних значень найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами порядку не вище ніж $m-1$ на класах диференційовних функцій W^r_∞, $r \in \mathbb{N}$, були одержані Х. Бором [101] та Ж. Фаваром [106]:

$$E_m(W^r_\infty)_\infty = \frac{K_r}{m^r},$$

де $K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j(r+1)}}{(2j+1)^{r+1}}$ — константи, які відомі в математичній літературі як константи Фавара.

У 1946 році С. М. Нікольський [33], застосовуючи теореми двоїстості, встановив точні значення найкращих наближень класів W^r_1, $r \in \mathbb{N}$ тригонометричними поліномами порядку $m-1$ у просторі L_1, показавши, що

$$E_m(W^r_1)_1 = E_m(W^r_\infty)_\infty = \frac{K_r}{m^r}, \ m = 1, 2, \ldots$$

Найбільш природним методом наближення періодичних функцій є метод Фур'є, який задається оператором S_m, що ставить у відповідність кожній функції f із $L_1[-\pi,\pi]$ її частинну суму Фур'є порядку не більшого за m

$$S_m f(x) = S_m(f,x) = \sum_{k=-m}^{m} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Дослідження швидкості наближення періодичних функцій частинними сумами Фур'є беруть початок з робіт А. Лебега [110]. Істотний крок у цьому напрямі було зроблено у 1935 році А. М. Колмогоровим [108], який показав, що для класів W^r_∞, $r \in \mathbb{N}$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_m(W^r_\infty)_\infty = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln m}{m^r} + O(m^{-r}), \quad m \to \infty. \tag{1.4}$$

В. Т. Пінкевич [35] показав, що рівність (1.4) виконується для класів Вейля $W^r_{r,\infty}$ при довільних $r > 0$. С. О. Теляковський [63] знайшов асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}_m(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ при довільних $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$.

Завдяки дослідженням С. М. Нікольського [33] було встановлено аналогічні рівності і для величин $\mathcal{E}_m(W^r_{r,1})_1$, $r > 0$, а завдяки роботам С. М. Нікольського [33], С. Б. Стєчкіна, С. А. Теляковського [62] та С. А. Теляковського [64] знайдено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_m(W^r_{\beta,1})_1$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

У багатьох важливих випадках знайдено точні значення величин $\mathcal{E}_m(W^r_{\beta,p})_q$. Зокрема, відомі точні значення величин $\mathcal{E}_m(W^r_2)_2$, $r, m \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [27, с. 166-167]), а також величин $\mathcal{E}_m(W^r_2)_\infty$, $r, m \in \mathbb{N}$, що були встановлені у роботі В. Ф. Бабенка та С. О. Пічугова [3].

З питаннями наближення сумами Фур'є та тригонометричними поліномами, що побудовані на базі сум Фур'є, можна ознайомитись у монографіях [16, 72, 15, 57, 58, 60, 46].

Для класів Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин найкращих наближень та наближень сумами Фур'є у просторі L_q відомі при всіх допустимих значеннях параметрів $r,\ p,\ q$ і β (див., наприклад, [115, с. 47-49]). Зокрема, при $r > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ у випадках $1 \leq p < q \leq \infty,\ 1 < p = q < \infty$ або $1 \leq q < p \leq \infty$ справедливі порядкові співвідношення

$$E_m(W^r_{\beta,p})_q \asymp \mathcal{E}_m(W^r_{\beta,p})_q \asymp m^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Це означає, що у цих випадках суми Фур'є забезпечують порядок найкращих наближень класів $W^r_{\beta,p}$ у просторі L_q.

Для величин найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $W^r_{\beta,p}$ у просторі L_q при $p = q = 2$ мають місце рівності (див., наприклад, [60, Ч. II с. 18])

$$E_m(W^r_{\beta,2})_2 \asymp \mathcal{E}_m(W^r_{\beta,2})_2 \asymp m^{-r}.$$

Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q при різноманітних співвідношеннях між параметрами p і q та при різноманітних швидкостях прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ досліджувались у роботах О. І. Степанця [58, 60], О. І. Степанця та О. К. Кушпеля [59], С. О. Теляковського [65], Р. М. Тригуба [74], А. С. Сердюка [49], А. С. Сердюка та І. В. Соколенка [50], А. С. Сердюка та У. З. Грабової [13], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [51] та інших.

Далі природньо виникло питання про оптимальність вибору фіксованої кількості номерів експонент e^{ikx} при побудові поліномів наближення. Це питання пов'язане з більш загальною задачею, яку сформулював у 1936 р. А. Н. Колмогоров [109]. Мова йде про третій період розвитку теорії наближення.

Задача 3. Найкраще наближення фіксованої множини $A \subset X$ заданим класом множин $\{L_m\}$ із X фіксованої розмірності m.

Сформульована задача полягає в дослідженні величини

$$d_m(A, X) = \inf_{L_m \in X} \sup_{x \in A} \inf_{u \in L_m} \|x - u\|_X, \tag{1.5}$$

яка для центрально-симетричних множин A (тобто таких, що з $x \in A$ випливає $-x \in A$) отримала назву m-вимірного поперечника по Колмогорову множини A в просторі X.

Величина $d_m(A, X)$ показує теоретично найкращу точність, з якою можна наблизити множину A лінійними підпросторами L_m розмірності m у метриці простору X. Якщо існує підпростір L_m^*, на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок), то його називають екстремальним підпростором.

Таким чином, задача про відшукання оптимального агрегату для наближення функціональних класів рівносильна відшуканню екстремального підпростору для даних класів.

На теперішній час дослідження колмогоровських поперечників класів періодичних функцій як однієї так і багатьох змінних мають велику історію, з якою можна ознайомитися, наприклад, у монографіях [27, 46, 67, 72], а також в огляді [73].

1.2. Задачі про найкращі наближення та гріді-алгоритми: деякі історичні відомості

В даному підрозділі розглянемо основні аспекти розвитку m-членного тригонометричного наближення для деяких функціональних класів. Наведемо означення відповідної величини.

Для $f \in L_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, позначимо через

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m, \cdot)\|_q \ , \tag{1.6}$$

найкраще m-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, де $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q. \tag{1.7}$$

Величину $e_m(f)_2$ для функції однієї змінної було введено С. Б. Стєчкіним [61] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f)_q$ і $e_m(F)_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації як індивідуальних функцій так і певних класів функцій. Перші оцінки величини $e_m(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були отримані Р.С. Ісмагіловим [17].

Для деяких класів функцій однієї змінної поведінка величин (1.7) досліджувалась у роботах Ю. І. Маковоза [111], Е. С. Белінського [4, 7] та інших. Що стосується класів функцій багатьох змінних, то дана тематика отримала розвиток у роботах В. М. Темлякова [67], Е. С. Белінського [5], Б. С. Кашина та В. М. Темлякова [20], А. С. Романюка [44], С. А. Стасюка [56, 114], С. П. Войтенка [12], А. Ф. Конограя та С. А. Стасюка [21], Н. М. Консевич [22] та інших.

Порядкові оцінки величин $e_m(F)_q$ на класах Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$ досліджувались у роботах Б. С. Кашина та В. М. Темлякова [20], Е. С. Белінського [4, 5, 7, 99, 100], А. С. Романюка [40, 46].

Оскільки класи $L^\psi_{\beta,p}$ узагальнюють класи диференційовних функцій $W^r_{\beta,p}$, то інтерес викликає розповсюдження вже відомих результатів на класи $L^\psi_{\beta,p}$. Дослідженню найкращого m-членного тригонометричного наближення на класах $L^\psi_{\beta,p}$ у метриках просторів L_q при різних співвідношеннях між параметрами p і q присвячено роботи О. І. Степанця [60], А. С. Романюка [38], Н. М. Консевич [22, 23], О. С. Федоренка [75 – 80], А. С. Федоренка та О. С. Федоренка [82, 83], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [52] та інших. Зокрема, з результатів А. Л. Шидліча [84, 85] випливають порядкові оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень для класів $L^\psi_{\beta,p}$ у просторі L_q при $p = 2$ і $1 \leq q < \infty$.

Вивчення величин (1.6) та (1.7) природно приводить до постановки наступного питання: як зміниться їх поведінка, якщо замість коефіцієнтів c_k розглядати коефіцієнти Фур'є $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$? Відповідь на це питання можна отримати дослідивши величину

$$e^\perp_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \left\| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot) \right\|_q ,$$

де $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k)e^{in_kx}$, яка називається найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі L_q. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e^\perp_m(F)_q = \sup_{f\in F} e^\perp_m(f)_q. \tag{1.8}$$

Згідно з означеннями величини (1.7) і (1.8) пов'язані наступним співвідношенням

$$e_m(F)_q \leq e^\perp_m(F)_q,$$

тобто, величина (1.7) є більш грубою апроксимативною характеристикою, ніж (1.8). Зазначимо, що результати проведених досліджень показали, що існують співвідношення між параметрами p та q, при яких величини $e_m(F)_q$ та $e_m^{\perp}(F)_q$ мають однакові порядки.

Дослідження величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень проводилося паралельно з дослідженням величин найкращих m-членних тригонометричних наближень. Величина найкращого ортогонального тригонометричного наближення була введена Е. С. Белінським, при дослідженні класів Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$, і останнім часом дослідження її на тих або інших функціональних класах отримало потужний розвиток в роботах Е. С. Белінського [98], В. М. Темлякова [66], О. І. Степанця [60], А. С. Романюка [39, 43, 46], Н. М. Консевич [24], О. С. Федоренка [77], С. А. Стасюка [56], С. П. Войтенка [11], А. Л. Шидліча [84, 85], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [53] та інших.

З робіт Е. С. Белінського, Б. С. Кашина, В. М. Темлякова та А. С. Романюка випливають порядкові оцінки для величин найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $W^r_{\beta,p}$ в метриках просторів L_q, при різних (але не при всіх можливих) значеннях параметрів r, p, s і β.

В останні роки у теорії наближення зросла зацікавленість до методів апроксимації, які дають не лише гарну швидкість наближення, але й вказують на спосіб (алгоритм) знаходження апроксимантів, на яких досягається вказана швидкість наближення. Одним з підходів до розв'язання даної задачі є застосування гріді-алгоритмів. Нагадаємо означення відповідної величини.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ — коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані в порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))| \geq |\hat{f}(k(2))| \geq ... \tag{1.9}$$

Позначимо для $f \in L_q$

$$G_m(f, x) := \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{ik(l)x}$$

і розглянемо величину

$$\sup_{f \in F} \|f(\cdot) - G_m(f, \cdot)\|_q.$$

Зрозуміло, що вибір апроксимантів $G_m(f, \cdot)$ не є однозначним, але як буде слідувати з отриманих результатів, порядок цієї величини не залежить від того, яким чином ми здійснили цей вибір. Тому надалі для зручності покладемо

$$G_m(F)_q := \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - G_m(f, \cdot)\|_q. \tag{1.10}$$

Легко бачити, що згідно з означеннями

$$e_m(F)_q \ll e_m^{\perp}(F)_q \ll G_m(F)_q \tag{1.11}$$

та

$$e_m(F)_2 = e_m^{\perp}(F)_2 = G_m(F)_2. \tag{1.12}$$

Незважаючи на те, що термін "гріді-алгоритм" почали використовувати в теорії наближень нещодавно [105, 103], в неявному вигляді гріді-алгоритм при застосуванні до конкретних просторів почали використовувати досить давно. Наприклад, Е. Шмідт [113] при наближенні функцій з $L_2([0,1]^2)$ білінійними формами використовував процес, що співпадає з гріді-алгоритмами.

При розгляді гріді-алгоритмів виникають природні запитання про їх збіжність взагалі, а також швидкість збіжності. Так у [116] для $p \neq 2$ та у [102] для $p < 2$ було доведено, що існує функція $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, для якої апроксиманти $G_m(f)$ не збігаються у $L_q(\mathbb{T}^d)$. Згодом у [26] досліджувалися додаткові умови на функцію $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, що забезпечують збіжність гріді-алгоритмів у $L_q(\mathbb{T}^d)$.

На класах Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$ оцінки гріді-алгоритмів встановлювались В. М. Темляковим [117]. Зокрема, з результатів А. Л. Шидліча [84, 85] випливають порядкові оцінки гріді-алгоритмів для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q при $p = 2$ і $1 \leq q < \infty$.

Відзначимо також роботи В. М. Темлякова [71, 118], P. Wojtaszczyk [119], С. П. Войтенка [12], С. А. Стасюка [114], в яких можна ознайомитися з більш детальною бібліографією, що стосується дослідження гріді-алгоритмів у тих або інших банахових просторах.

Вивчення наближення класів періодичних функцій m-членними тригонометричними поліномами природньо приводить також до постановки наступного питання: чи буде підпростір тригонометричних поліномів з номерами гармонік із множини Θ_m екстремальним для класу F у просторі L_q?

В 1974 році Р. С. Ісмагіловим [17] введено нову апроксимативну характеристику, яка отримала назву тригонометричний поперечник. Зауважимо, що подібна величина розглядалася у роботі Я. С. Бугрова [10] ще у 1964 році (хоча Я. С. Бугров не називав її тригонометричним поперечником). Наведемо означення цієї апроксимативної характеристики.

Тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q означається за формулою:

$$d_m^T(F, L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{f \in F} \inf_{P(\Theta_m, \cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q \ , \qquad (1.13)$$

де $P(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — комплексні числа.

Згідно з означеннями колмогоровського і тригонометричного поперечників легко бачити, що вони пов'язані між собою нерівністю

$$d_m(F, X) \leq d_m^T(F, X). \qquad (1.14)$$

Зазначимо також, що величина найкращого m-членного тригонометричного наближення не перевищує величини тригонометричного поперечника, тобто

$$e_m(F)_q \leq d_m^T(F, L_q) \ . \qquad (1.15)$$

Порядкові оцінки тригонометричних поперечників для різноманітних функціональних класів встановлювались у роботах В. Є. Майорова [29 — 31], І. Маковоза [111], Е. С. Белінського [4, 5], Г. Г. Магаріл-Ільяєва [28], В. М. Темлякова [67], А. С. Романюка [42, 45, 46], А. С. Романюка та В. С. Романюка [47], С. А. Стасюка [55], Н. В. Дерев'янко [14], Н. М. Консевич [25], О. С. Федоренка [79], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [52] та багатьох інших математиків.

У роботі [17] Р. С. Ісмагіловим були встановлені оцінки зверху тригонометричних поперечників множин $K_\infty^1 \cap K_1^2$ і $K_\infty^{1/2} \cap K_2^1$ у просторі $C_{[0,2\pi]}$, де через K_α^a позначається множина всіх функцій $f \in C_{[0,2\pi]}$, відхилення яких від простору тригонометричних поліномів степеня не більшого ніж n в метриці простору L_α не перевищує n^{-a} для всіх цілих $n \geq 0$. Звідси отримуються оцінки зверху поперечників класів Соболєва W_1^2 і W_2^1 у просторі $C_{[0,2\pi]}$.

Подальші дослідження тригонометричних поперечників на класах Соболєва були продовжені В. Є. Майоровим [29], яким були встановлені точні за порядком оцінки величин $d_m^T(W_p^r, L_q)$, $1 \le p < 2 \le q \le p/(p-1)$, для $r > 1/2 + 1/p$. Пізніше І. Маковоз [111] розповсюдив ці результати для іншої області зміни параметра r, а саме для $r > 1$. Також ним були отримані точні за порядком оцінки тригонометричних поперечників $d_m^T(W_1^r, L_q)$, $2 \le q < \infty$, для класів функцій малої гладкості, тобто для $1 - 1/q < r < 1$.

У 1985 році Е. С. Белінським [5] отримано точні за порядком оцінки величин $d_m^T(W_{\beta,p}^r, L_q)$ у багатовимірному випадку. Для $p = 1$, $2 \le q < \infty$ він також дослідив випадок $1 - 1/q < r_1 < 1$, і більше того встановив оцінки поперечників для $r_1 = 1$. У цій же роботі Е. С. Белінський одержав оцінку зверху і оцінку знизу для тригонометричного поперечника класу $W_{\beta,1}^r$ у просторі L_∞, які відрізнялися за порядком. Згодом В. Є. Майоров [31] встановив точні за порядком оцінки для цього випадку, але тільки у одновимірному випадку.

Для класів функцій Соболєва заданих на $\mathbb{R}^d$ аналоги тригонометричних поперечників досліджувалися В. Є. Майоровим [30] і Г. Г. Магаріл-Ільяєвим [28]. В цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією в цьому напрямку.

Порядки величин тригонометричних поперечників класів $L_{\beta,p}^\psi$ у просторі L_q при $1 < p \le q \le \frac{p}{p-1}$ у одновимірному випадку були одержані О. С. Федоренком [79], а у багатовимірному — Н. М. Консевич [25].

Поряд з величиною найкращого m-членного тригонометричного наближення $e_m(F)_q$ у теорії наближень розглядають величину найкращого білінійного наближення $\tau_m(F)_{q_1,q_2}$. Нагадаємо означення відповідної апроксимативної характеристики.

Нехай L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in [-\pi,\pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

причому норма обчислюється спочатку у просторі L_{q_1} по змінній $x \in [-\pi,\pi]$, а потім від результату по змінній $y \in [-\pi,\pi]$ у просторі L_{q_2}. Для $f(x-y) \in L_{q_1,q_2}$ покладемо

$$\tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2} = \inf_{u_j(x),v_j(y)} \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x)v_j(y) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}$, $v_j \in L_{q_2}$.

Якщо F — деякий клас функцій $f(x)$, то величина

$$\tau_m(F)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in F} \tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2}, \tag{1.16}$$

називається найкращим білінійним наближенням порядку m.

Дослідження найкращих білінійних наближень було розпочато ще на початку минулого сторіччя. Так, у 1907 р. Е. Шмідт [113] довів теорему про наближення періодичних функцій двох змінних $f(x,y)$ в $L_{2,2}$ білінійними формами $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$, де, зокрема, вказав спосіб побудови найкращих білінійних форм.

Пізніше Р. С. Ісмагіловим [17] був встановлений зв'язок між найкращими білінійними наближеннями функцій виду $f(x-y)$, $f(x) \in F$, і поперечниками за Колмогоровим класів F.

C. A. Micchelli та A. Pinkus [112], досліджуючи білінійні наближення деяких функцій двох змінних, заданих на квадраті $[0,1] \times [0,1]$, застосовували отримані результати для знаходження точних значень поперечників класів диференційовних функцій.

М.-Б. А. Бабаєв [2] досліджував деякі питання білінійних наближень неперіодичних функцій.

Поведінка величини $\tau_m(f)_{2,2}$ для функцій f з класів, аналогічних до класів Соболєва, вивчались у роботі М. В. Мірошина і В. В. Хромова [32].

Систематичне вивчення найкращих білінійних наближень на класах періодичних функцій Нікольського та Соболєва було розпочато у роботі В. М. Темлякова [67]. Згодом дослідження найкращих білінійних наближень цих функціональних класів, а також їх аналогів було продовжено у роботах [68 — 70]. Також відзначимо роботи А. С. Романюка [40, 41, 46], А. С. Романюка та В. С. Романюка [48], К. В. Соліч [54], які присвячені дослідженню білінійних наближень функцій з класів О. В. Бєсова та їх аналогів. В цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією, що стосується відповідного напряму досліджень.

РОЗДІЛ 2

Найкращі m-членні та ортогональні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q

Даний розділ присвячений дослідженню деяких апроксимативних характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій. Зокрема, встановлюються точні за порядком оцінки найкращих наближень та найкращих ортогональних тригонометричних наближень періодичних функцій, які є аналогами ядер Бернуллі. Крім цього, знайдено порядки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень, а також тригонометричних поперечників функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

2.1. Допоміжні твердження

Нагадаємо означення апроксимативних характеристик класів, які будуть досліджуватись у даному розділі.

Нехай T_m — множина тригонометричних поліномів t, які мають вигляд

$$t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}.$$

Для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$E_m(f)_q = \inf_{t \in T_m} \Big\| f(\cdot) - t(\cdot) \Big\|_q . \qquad (2.1)$$

Величину (2.1) називають найкращим наближенням функції f множиною поліномів T_m у просторі L_q.

Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q,\ 1 \le q \le \infty$, то покладемо

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t\in T_m} \Big\| f(\cdot) - t(\cdot) \Big\|_q .$$

Далі через $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, позначимо величину

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \Big\| f(\cdot) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ik\cdot} \Big\|_q ,$$

яка називається наближенням сумами Фур'є функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q.

Для величин $E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ і $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ має місце співвідношення

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q .$$

Крім згаданих апроксимативних характеристик будемо досліджувати також наступні величини

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \Big\| f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot) \Big\|_q , \tag{2.2}$$

$$e^{\perp}_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \Big\| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f,\cdot) \Big\|_q , \tag{2.3}$$

де

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x},$$

Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа,

$$S_{\Theta_m}(f, x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}.$$

Величину (2.2) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням, а (2.3) — найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$, то покладемо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} e_m(f)_q, \tag{2.4}$$

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} e^{\perp}_m(f)_q. \tag{2.5}$$

Очевидно, що величини (2.4) і (2.5) пов'язані співвідношенням

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Зазначимо також, що величина $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ не перевищує величини тригонометричного поперечника $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ порядку m класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка визначається наступним чином

$$d^T_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{\Theta_m} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m, \cdot)||_q \ . \tag{2.6}$$

Сформулюємо необхідні позначення та деякі допоміжні твердження, які будемо використовувати при доведенні отриманих у цьому розділі результатів.

Позначимо через B множину функцій $\psi(t),\ t \in \mathbb{N}$, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq C, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^{\gamma}(t+1)}{t^r},\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 0$ та ін.

Нехай $f \in L_q,\ \ 1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{k \in \mathbb{Z} : \ [2^{s-1}] \le |k| < 2^s\right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

В прийнятих позначеннях має місце теорема.

Теорема В (Літтлвуда-Пелі) (див., наприклад, [16, т.II], гл. XV)**.** *Нехай задано* $1 < q < \infty$*. Тоді існують додатні сталі* $C_3(q),\ C_4(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_3(q) \|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \le C_4(q) \|f\|_q.$$

Теорема Г (Марцинкевича) [16, т.II, с. 346]**.** *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$*, що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \le M,\ n \in \mathbb{Z}$;
2) $\sum\limits_{\mu = \pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu} - 1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \le M,\ \nu \in \mathbb{N}$.

Тоді, якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q,\ 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q$$

і існує стала $C_5(q)$ *така, що*

$$\|F\|_q \le C_5(q) M \|f\|_q.$$

Твердження А (див., наприклад, [27, с. 392])**.** *Якщо* $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, *то*

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx \right|,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ *і* $\overline{g}$ *— функція комплексно спряжена до функції* g.

Твердження Б [60, ч.II, с. 119]**.** *Нехай* $\psi(t)$ *— довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов:*

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(t)} \right) \ge 0, \;\; t \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

або

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(t)} \right) \le 0, \;\; t \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

де

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\psi(t)} \right) = \frac{1}{\psi(t)} - \frac{2}{\psi(t+1)} + \frac{1}{\psi(t+2)}$$

і, крім того,

$$\left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=1}^{m-1} \psi(m)(k\psi(k))^{-1} = O(1), \tag{2.9}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* m. *Тоді для довільного тригонометричного полінома* t_m *порядку* m *виконується нерівність*

$$\|(t_m)^{\psi}_{\beta}\|_1 \le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t_m\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ *— рівномірно обмежена по* m *і* t_m.

Лема А [8]**.** *Нехай* $2 \le q < \infty$. *Тоді для довільного тригонометричного полінома*

$$P(\Theta_m, x) = \sum_{l=1}^{m} \; e^{in_l x}$$

і для довільного $n \le m$ *знайдеться тригонометричний поліном* $\widetilde{P}(\Theta_n, x)$, *який містить не більше як* n *гармонік, і константа* $C_6 > 0$

такі, що

$$\|P(\Theta_m,\cdot)-\widetilde{P}(\Theta_n,\cdot)\|_q \le C_6 m n^{-1/2}\ ,$$

причому $\Theta_n \subset \Theta_m$, *всі коефіцієнти* $\widetilde{P}(\Theta_n,x)$ *однакові і не перевищують за абсолютною величиною* mn^{-1}.

При дослідженні питань апроксимації класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q, зокрема, для встановлення оцінок зверху у деяких випадках ми будемо використовувати відомі оцінки наближення сумами Фур'є.

Теорема Д [13]**.** *Нехай* $1<q\le\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in B\cap\Psi_{q'}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, *де* $\Psi_{q'}$ *— множина монотонно незростаючих функцій* $\psi(t)$, *для яких існує стала* $\alpha>1-\frac{1}{q}$ *така, що функція* $t^{\alpha}\psi(t)$ *майже спадає, і виконуеться одна з умов* (2.7) *або* (2.8). *Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{q'}}.$$

Розглянемо лінійний оператор $\widetilde{\mathbf{P}}_j$, що діє на функцію $f\in L_p$ наступним чином:

$$\widetilde{\mathbf{P}}_j f(x)=f(x)*\Bigg(\sum_{k\in\rho(j)} e^{ikx}-\widetilde{P}(\Theta_{k_j},x)\Bigg),$$

де $*$ — операція згортки, $\widetilde{P}(\Theta_{k_j},x)$ — поліноми з леми А.

Тоді має місце твердження.

Лема Б [47]**.** *Нехай* $1<p<2<q<p/(p-1)$. *Тоді норма оператора* $\widetilde{\mathbf{P}}_j$ *з* L_p *в* L_q *(*$\|\widetilde{\mathbf{P}}_j\|_{p\to q}=\|\widetilde{\mathbf{P}}_j\|_{L_p\to L_q}$*), задовольняє співвідношенню*

$$\|\widetilde{\mathbf{P}}_j\|_{p\to q}=\sup_{\|f\|_p\le 1}\|\widetilde{\mathbf{P}}_j f\|_q \ll 2^j k_j^{-(1/2+1/p')}\ ,$$

де $p'=p/(p-1)$.

Лема В [7]. *Для довільного тригонометричного полінома*

$$T(\Theta_m, x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$$

і для довільного $n \leq m$ *існує тригонометричний поліном* $T(\Theta_n, x)$, *який містить не більше як* n *гармонік і такий, що*

$$\|T(\Theta_m) - T(\Theta_n)\|_q \leq C_7 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \|T(\Theta_m)\|_2, \ 2 < q < \infty,$$

причому має місце вкладення $\Theta_n \subset \Theta_m$.

Теорема Е [59]. *Нехай* $1 < q \leq p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C_8, C_9 > 0$. *Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$C_8 \psi(m) \leq E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq C_9 \psi(m).$$

Теорема Є [36]. *Нехай* $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. *Тоді для довільного* $t \in T_m$ *справедлива оцінка*

$$\|t^{\psi}_{\beta}(\cdot)\|_p \ll \psi^{-1}(n) \|t(\cdot)\|_p.$$

Теорема Ж (див., наприклад, [34, с. 132]). *Нехай* $t \in T_m$. *Тоді при* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *має місце співвідношення*

$$\|t\|_p \ll n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q. \tag{2.10}$$

Співвідношення (2.10) було встановлено С. М. Нікольським і отримало назву "нерівність різних метрик".

Твердження В [100, с. 33]. *Нехай* a_k *послідовність додатних чисел така, що* $\sum\limits_k a_k^2 = 1$. *Тоді існує обмежена функція* f *така, що* $\|f\|_\infty \leq 1$ *і* $|\hat{f}(k)| \geq \frac{a_k}{3}$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

2.2. Апроксимативні характеристики функцій $F_\psi(x,\beta)$ у просторі $L_q,\ 1<q<\infty$

При вивченні наближення функцій із класів $L^\psi_{\beta,p}$ виявилося доцільним розглянути наближення 2π-періодичних функцій $F_\psi(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі, за допомогою яких дається інтегральне представлення функції через її похідну. У даному підрозділі одержано порядкові оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій $F_\psi(x,\beta)$ у просторі L_q при $1<q<\infty$. З використанням цих оцінок у наступному підрозділі одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^\psi_{\beta,1}$ у просторі L_q при $1<q<\infty$, а також класів $L^\psi_{\beta,p},\ \ 1<p<\infty$ у рівномірній метриці у підрозділі 2.6.

Нехай для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta\in\mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi,\pi]$ функції $F_\psi(x,\beta)$. Тоді кожну функцію $f\in L^\psi_{\beta,p}$ можна зобразити у вигляді згортки:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)F_\psi(t,\beta)dt, \tag{2.11}$$

де $\|\varphi\|_p\le 1,\ 1\le p\le\infty$ (див., наприклад, [60, ч.II, с. 135]).

Зазначимо, що функції $F_\psi(x,\beta)$ природньо називати аналогами ядер Бернуллі, оскільки при $\psi(|k|)=|k|^{-r},\ r>0$, функція $F_\psi(x,\beta)$ є відомим ядром Бернуллі.

У прийнятих позначеннях має місце теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1<q<\infty,\ \ \psi\in B,\ \beta\in\mathbb{R}$ *і, крім того, іс-*

нує $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_m(F_\psi)_q \asymp E_m(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_m(F_\psi)_q$. Нехай l і m такі, що $2^l < m \le 2^{l+1}$. Спочатку розглянемо випадок $1 < q \le 2$. Застосувавши теорему B, одержимо

$$E_m(F_\psi)_q \ll \left\| F_\psi - \sum_{s<l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q = \left\| \sum_{s\ge l} \delta_s(F_\psi) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{s\ge l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = I_1.$$

Далі, скориставшись нерівністю $|a+b|^\alpha \le |a|^\alpha + |b|^\alpha$ при $0 \le \alpha \le 1$, можемо записати

$$I_1^q \ll \int\limits_{\pi}^{\pi} \sum_{s\ge l} |\delta_s(F_\psi)|^q dx \ll \sum_{s\ge l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q,$$

тобто

$$I_1 \ll \left(\sum_{s\ge l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.12}$$

Для продовження (2.12) встановимо оцінку величини

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q = \left\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

Спочатку покажемо, що виконується співвідношення

$$\left\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q \ll \psi(2^s) \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \right\|_q, \ 1 < q < \infty.$$

З цією метою для кожного $s \geq l$ розглянемо послідовність $\{\lambda_k\}$, яка задається таким чином

$$\{\lambda_k\} = \left\{\frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k},\ 2^{s-1} \leq |k| < 2^s\right\}.$$

Легко переконатися, що послідовність $\{\lambda_k\}$ задовольняє умови теореми Г. Очевидно, що для цього достатньо перевірити виконання умов 1, 2 цієї теореми для додатних k таких, що $2^{s-1} \leq k < 2^s$.

Оскільки $\psi \in B$ і $2^{s-1} \leq k < 2^s$, то

$$1)\ |\lambda_k| = \left|\frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta}\right| = \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} \leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq M,$$

$$2)\ \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \left|\frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \big(\psi(k) - \psi(k+1)\big) = \frac{1}{\psi(2^s)} \big(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\big) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq M.$$

Подіявши мультиплікатором Λ_s, який задається послідовністю $\{\lambda_k\}$, на поліном $\sum\limits_{k\in\rho(s)} e^{ikx}$, одержимо

$$\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} = \sum_{k\in\rho(s)} \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx}.$$

Таким чином, можемо записати

$$\left\|\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx}\right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\|\sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx}\right\|_q.$$

Проте, за теоремою Г має місце оцінка

$$\Big\|\Lambda_s\sum_{k\in\rho(s)}e^{ikx}\Big\|_q\le C_{10}(q)M\Big\|\sum_{k\in\rho(s)}e^{ikx}\Big\|_q.$$

Отже, в підсумку отримаємо

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q=\Big\|\sum_{k\in\rho(s)}\psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}e^{ikx}\Big\|_q\ll$$

$$\ll\psi(2^s)\Big\|\sum_{k\in\rho(s)}e^{ikx}\Big\|_q.$$

Далі, використавши останню оцінку, а також відоме співвідношення (див., наприклад, [115, с. 25]):

$$\Big\|\sum_{k\in\rho(s)}e^{ikx}\Big\|_q\asymp 2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)},\quad 1<q<\infty, \tag{2.13}$$

одержуємо

$$\|\delta_s(F_\psi)\|_q\ll\psi(2^s)2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)}. \tag{2.14}$$

Об'єднавши співвідношення (2.12) та (2.14), маємо

$$I_1=\Big\|\sum_{s\ge l}\delta_s(F_\psi)\Big\|_q\ll\left(\sum_{s\ge l}\psi^q(2^s)2^{qs\left(1-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Врахувавши, що $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає, можемо записати

$$E_m(F_\psi)_q\ll I_1\ll\psi(2^l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}\left(\sum_{s\ge l}2^{-s\varepsilon q}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\psi(2^l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}\asymp\psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Тепер розглянемо випадок $2<q<\infty$. Застосувавши теорему В і нерівність Мінковського, одержимо

$$E_m(F_\psi)_q\ll\|F_\psi-\sum_{s<l}\delta_s(F_\psi)\|_q=\Big\|\sum_{s\ge l}\delta_s(F_\psi)\Big\|_q\ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{s\geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \left(\left\| \sum_{s\geq l} |\delta_s(F_\psi)|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\geq l} \left\| |\delta_s(F_\psi)|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s\geq l} \|\delta_s(F_\psi)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши (2.14) і повторивши міркування, які проводились для випадку $1 < q \leq 2$, отримаємо шукану оцінку:

$$E_m(F_\psi)_q \ll \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}},\ 2 < q < \infty.$$

Таким чином, оцінки зверху в теоремі 2.1 встановлено.

Переходячи до оцінок знизу зауважимо, що при цьому достатньо її отримати для величини $E_m(F_\psi)_q$. Нехай $t^* \in T_m$ — поліном найкращого наближення функції $F_\psi(x,\beta)$ у просторі $L_q,\ 1 < q < \infty$, $2^{l-1} \leq m \leq 2^l$, $l \in \mathbb{N}$, тобто

$$E_m(F_\psi)_q = \inf_{t\in T_m} \|F_\psi - t\|_q = \|F_\psi - t^*\|_q,$$

і

$$F_2(x,\beta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|^{-2} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k} e^{ikx}.$$

Розглянемо величину

$$J = (F_\psi - t^*,\ F_2 - S_{2^l}(F_2)) = (F_\psi,\ F_2 - S_{2^l}(F_2)) -$$

$$-(t^*,\ F_2 - S_{2^l}(F_2)) = (F_\psi,\ F_2 - S_{2^l}(F_2)).$$

З одного боку, за нерівністю Гельдера маємо

$$J \leq \|F_\psi - t^*\|_q \|F_2 - S_{2^l}(F_2)\|_{q'} =$$

$$= E_{2^l}(F_\psi)_q \|F_2 - S_{2^l}(F_2)\|_{q'},$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

І оскільки (див. [67, с. 25]),

$$\|F_2 - S_{2^l}(F_2)\|_{q'} \ll 2^{-l(2-\frac{1}{q})},$$

то

$$J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-l(2-\frac{1}{q})}. \tag{2.15}$$

З іншого боку, для J можемо записати

$$J \gg \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)|k|^{-2} \gg \sum_{s\geq l} \sum_{k\in\rho^+(s)} \psi(k)k^{-2} =$$

$$= \sum_{s\geq l} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s} \psi(k)k^{-2} \gg$$

$$\gg \sum_{s\geq l} \psi(2^s)2^{-s} \gg \psi(2^l)2^{-l}. \tag{2.16}$$

де $\rho^+(s) = \big\{k: \ 2^{s-1} \leq k < 2^s\big\}$.

З урахуванням співвідношень (2.15) та (2.16) отримаємо

$$\psi(2^l)2^{-l} \ll J \ll E_m(F_\psi)_q 2^{-l(2-\frac{1}{q})},$$

тобто

$$E_m(F_\psi)_q \gg \psi(2^l)2^{l(1-\frac{1}{q})} \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.1.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > 1 - \frac{1}{q}, \ 1 \leq q \leq \infty$ відповідний результат одержав В. М. Темляков [67, с. 38].

У наступному твердженні встановимо порядок величини $e_m^{\perp}(F_\psi)_q$.

Теорема 2.2. *Нехай* $1 < q < \infty, \ \psi \in B, \ \beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}, \ \ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m^{\perp}(F_\psi)_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає із попередньої теореми і співвідношення

$$e^{\perp}_{2m+1}(F_\psi)_q \le \mathcal{E}_m(F_\psi)_q.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

Нехай Θ_m — довільний набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$. Скориставшись рівністю з твердження A, можемо записати

$$\|F_\psi - S_{\Theta_m}(F_\psi)\|_q =$$
$$= \sup_{\|g\|_{q'}\le 1} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(F_\psi(x) - S_{\Theta_m}(F_\psi, x)\right) \overline{g}(x)dx \right|. \qquad (2.17)$$

За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ із умови $2m < 2^l \le 4m$ і покладемо

$$g(x) = C_{11} 2^{-\frac{l}{q}} \sum_{k\in\rho^+(l)} e^{ikx},$$

де $\rho^+(l) = \left\{k \in \mathbb{Z} : \ 2^{l-1} \le k < 2^l\right\}$. Легко бачити, що $\|g\|_{q'} \le 1$, $q' \in (1, \infty)$, при певному виборі сталої $C_{11} > 0$.

Дійсно, використовуючи співвідношення (2.13), будемо мати

$$\|g\|_{q'} = C_{11} 2^{-\frac{l}{q}} \Big\| \sum_{k\in\rho^+(l)} e^{ikx} \Big\|_{q'} \asymp 2^{-\frac{l}{q}} 2^{l\left(1-\frac{1}{q'}\right)} = 1,$$

тобто функція g при деякому виборі сталої C_{11} задовольняє нерівність $\|g\|_{q'} \le 1$.

Тепер підставивши функцію g в (2.17), одержимо

$$\|F_\psi - S_{\Theta_m}(F_\psi)\|_q \ge \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(F_\psi(x) - S_{\Theta_m}(F_\psi, x)\right) \overline{g}(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\psi(x)\overline{g}(x)dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_{\Theta_m}(F_\psi, x)\overline{g}(x)dx \right| =$$

$$= \left| \left(\sum_{k \in \rho^+(l)} C_{11} \psi(k) 2^{-\frac{l}{q}} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right) - \left(\sum_{k \in \Theta_m \cap \rho^+(l)} C_{11} \psi(k) 2^{-\frac{l}{q}} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right) \right| \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{l}{q}} \sum_{k \in \rho^+(l) \setminus \Theta_m} \psi(k) \gg 2^{-\frac{l}{q}} \psi(2^l) 2^l =$$

$$= 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)} \psi(2^l) \asymp \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Порівняємо результати теореми 2.1 та 2.2 з оцінкою найкращого m-членного тригонометричного наближення $e_m(F_\psi)_q,\ 1 < q < \infty$, яку отримано в [81].

З означення величин $e_m(f)_q$, $e^{\perp}_m(f)_q$, $E_m(f)_q$ і $\mathcal{E}_m(f)_q$ легко бачити, що мають місце співвідношення

$$e_{2m+1}(f)_q \leq E_m(f)_q \leq \mathcal{E}_m(f)_q$$

і

$$e_{2m+1}(f)_q \leq e^{\perp}_{2m+1}(f)_q \leq \mathcal{E}_m(f)_q.$$

Співставивши результати теорем 2.1, 2.2 і теорем 1.6.2, 1.6.3 роботи [81], отримуємо, що величини $e_m(F_\psi)_q$, $e^{\perp}_m(F_\psi)_q$, $\mathcal{E}_m(F_\psi)_q$ та $E_m(F_\psi)_q$ у випадку $1 < q \leq 2$ рівні за порядком. Якщо ж $2 < q < \infty$, то має місце співвідношення

$$\mathcal{E}_m(F_\psi)_q \asymp E_m(F_\psi)_q \asymp e^{\perp}_m(F_\psi)_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} e_m(F_\psi)_q.$$

***Зауваження* 2.2.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1 - \frac{1}{q}$ порядок величини $e^{\perp}_m(F_\psi)_q$, $1 < q < \infty$, встановлено А. С. Романюком [46, с. 138].

2.3. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$

У цьому підрозділі із застосуванням теореми 2.2 встановлено точні за порядком оцінки величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ при $1 < q < \infty$. При цьому зазначимо, що у випадку $p = 1$ тут і далі на функції ψ будуть накладені додаткові умови, крім належності їх до множини B, що зумовлено використанням відповідних допоміжних тверджень.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (2.7) *або* (2.8) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Оцінку зверху проведемо у більш загальному випадку. Для цього нам знадобиться допоміжне твердження

Лема 2.1. *Нехай* $1 \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливе співвідношення*

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \leq e^{\perp}_m(F_{\psi})_q.$$

Доведення. Згідно з означенням класу $L^{\psi}_{\beta,1}$ можемо записати

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \inf_{S_{\Theta_m}(f)} \|f - S_{\Theta_m}(f)\|_q =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \inf_{S_{\Theta_m}(\varphi * F_{\psi})} \|\varphi * F_{\psi} - S_{\Theta_m}(\varphi * F_{\psi})\|_q =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \inf_{S_{\Theta_m}(F_{\psi})} \|\varphi * (F_{\psi} - S_{\Theta_m}(F_{\psi}))\|_q.$$

Враховуючи властивість згортки (див., наприклад, [27, c. 43]), матимемо

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \leq \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \inf_{S_{\Theta_m}(F_\psi)} \|\varphi\|_1 \times \|F_\psi - S_{\Theta_m}(F_\psi)\|_q \leq$$

$$\leq \inf_{S_{\Theta_m}(F_\psi)} \|F_\psi - S_{\Theta_m}(F_\psi)\|_q = e_m^{\perp}(F_\psi)_q.$$

Лему доведено.

Отже, оцінку зверху в теоремі 2.3 отримуємо, використавши лему 2.1 і встановлену в теоремі 2.2 оцінку величини $e_m^{\perp}(F_\psi)_q$:

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \leq e_m^{\perp}(F_\psi)_q \asymp \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

За заданим m виберемо l із умови $2m < 2^l \leq 4m$ і розглянемо функцію

$$f_l(x) = C_{12}\psi(2^l)\big(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)\big),\ C_{12} > 0,$$

де $V_m(x)$ — ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kx.$$

Покажемо, що $f_l \in L_{\beta,1}^{\psi}$ при певному виборі сталої $C_{12} > 0$.

Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_l)_\beta^\psi\|_1 \leq C_{13},\ C_{13} > 0$. Скористаємося твердженням Б.

Зауважимо, що умова (2.9) виконується, оскільки існує число $\alpha > 1-\frac{1}{q}$ таке, що послідовність $\varphi(m) = m^\alpha \psi(m)$ не зростає, тоді

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi(m)k^\alpha}{m^\alpha \varphi(k) k} \leq \frac{1}{m^\alpha} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^\alpha}{k} \leq 1.$$

Таким чином, одержимо

$$\|(f_l)_\beta^\psi\|_1 = C_{12}\psi(2^l)\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1 \ll$$

$$\ll \frac{\psi(2^l)}{\psi(2^{l+2})}\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1,$$

причому (див., наприклад, [67, с. 66])

$$\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_q \asymp 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \ 1 \le q \le \infty. \tag{2.18}$$

Отже, $\|(f_l)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$ і $f_l \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{12}.

Далі розглянемо поліном

$$g_1(x) = C_{14} m^{-\frac{1}{q}}\big(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)\big), \ C_{14} > 0.$$

Із (2.18) випливає, що поліном g_1 при певному виборі сталої C_{14} задовольняє нерівність $\|g_1\|_{q'} \le 1$. Скориставшись твердженням А, одержимо

$$\|f_l - S_{\Theta_m}(f_l)\|_q \ge$$
$$\ge \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f_l(x) - S_{\Theta_m}(f_l, x)\big) g_1(x) dx \right| =$$
$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_l(x) g_1(x) dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_{\Theta_m}(f_l, x) g_1(x) dx \right| \gg$$
$$\gg m^{-\frac{1}{q}} \psi(2^l)\left(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m\right) \gg$$
$$\gg m^{-\frac{1}{q}} \psi(2^l)\left(2^{l+1} - m\right) \ge$$
$$\ge m^{-\frac{1}{q}} \psi(2^l) 2^l \asymp \psi(2^l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Враховуючи вибір l, із останньої оцінки маємо

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \gg \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 2.3 доведено.

Порівняємо результат теореми 2.3 з відповідним результатом, отриманим при дослідженні величин $E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ і $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ у роботі [13]. Отримуємо, що

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m) m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що для оцінки зверху у теоремі 2.3, можна було скористатись результатом отриманим у роботі [13] для $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ та співвідношенням

$$e^{\perp}_{2m+1}(L^{\psi}_{\beta,1})_q \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q.$$

***Зауваження* 2.3.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1 - \frac{1}{q}$, відповідний результат раніше одержано А. С. Романюком [46, с. 137-139].

2.4. Порядки найкращих m-членних тригонометричних наближень і тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $2 \le q < \infty$

Для величин, означених рівностями (2.4) і (2.6), має місце

Теорема 2.4. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (2.7) *або* (2.8) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Зазначимо, що з означення величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ та $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ випливає співвідношення

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \le d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q).$$

Тому, для доведення теореми 2.4 достатньо оцінити величину $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ знизу, а величину $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ зверху.

Встановимо спочатку оцінку зверху величини $d^T_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$. За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення $2^l < m \le 2^{l+1}$. Кожному числу $j \in \mathbb{N}$, що задовольняє умову $l \le j < \gamma l$ ($\gamma > 1$, буде обрано пізніше), поставимо у відповідність число

$$k_j = [2^j \psi(2^j)\psi^{-1}(2^l)] + 1,\ j = l, ..., \gamma l,\ \gamma > 1.$$

Далі, нехай $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ — тригонометричний поліном, що наближає "блок" $\delta_j(f)$, $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$, відповідно до леми А, тобто таким чином, щоб для $j \in [l, \gamma l)$ виконувалась порядкова нерівність

$$\|\delta_j(f) - \widetilde{P}(\Theta_{k_j})\|_q \ll 2^j k_j^{-\frac{1}{2}},\ 2 < q < \infty,$$

причому $\Theta_{k_j} \subset \rho(j)$ та коефіцієнти полінома $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ рівні між собою.

Покажемо, що кількість гармонік в сукупності поліномів $\widetilde{P}(\Theta_{k_j})$ при $l \le j < \gamma l$, $j \in \mathbb{N}$, не перевищує за порядком 2^l. Дійсно, оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$ не зростає, то можемо записати

$$\sum_{l \le j < \gamma l} k_j = \sum_{l \le j < \gamma l} \left(\left[2^j \psi(2^j) \psi^{-1}(2^l) \right] + 1 \right) \le$$

$$\le \psi^{-1}(2^l) \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{j(1+\varepsilon)} \psi(2^j) 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \le$$

$$\le \psi^{-1}(2^l) 2^{l(1+\varepsilon)} \psi(2^l) \sum_{l \le j < \gamma l} 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(2^l) 2^{l(1+\varepsilon)} \psi(2^l) 2^{-l\varepsilon} + \gamma l \ll 2^l.$$

Далі для наближення функції $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ будемо використовувати поліном виду:

$$t(x) = \sum_{j<l} \delta_j(f,x) + \sum_{l \le j < \gamma l} (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}, x) * \delta_j(f,x)). \qquad (2.19)$$

Як показано вище, кількість гармонік полінома t не перевищує за порядком 2^l. Оцінимо величину $\|f - t\|_q$, $2 < q < \infty$.

З урахуванням (2.19), маємо

$$\|f - t\|_q = \left\| \sum_{l \le j < \gamma l} \delta_j(f) + \sum_{j \ge \gamma l} \delta_j(f) - \sum_{l \le j < \gamma l} (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f)) \right\|_q \le$$

$$\le \left\| \sum_{l \le j < \gamma l} (\delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f))) \right\|_q + \left\| \sum_{j \ge \gamma l} \delta_j(f) \right\|_q = I_2 + I_3 \qquad (2.20)$$

Проведемо оцінки одержаних в (2.20) величин I_2 та I_3, починаючи з I_3. Згідно теореми Д можемо записати:

$$I_3 = \| \sum_{j \ge \gamma l} \delta_j(f) \|_q = \|f - \sum_{1 \le j < \gamma l} \delta_j(f) \|_q \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l (1 - \frac{1}{q})}. \qquad (2.21)$$

Тепер перейдемо до оцінки I_2. З цією метою для кожного $j \in \mathbb{N}$, $l \le j < \gamma l$ розглянемо лінійний оператор $\widetilde{\mathbf{P}}_j$, що діє за формулою

$$\widetilde{\mathbf{P}}_j \delta_j(f) = \delta_j(f) * \Bigg(\sum_{k \in \rho(j)} e^{ikx} - \widetilde{P}(\Theta_{k_j}, x) \Bigg).$$

Таким чином, прийнявши до уваги, що $\Theta_{k_j} \subset \rho(j)$ і застосувавши до I_2 послідовно теорему В і нерівність Мінковського, будемо мати

$$I_2 \ll \Bigg\| \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} |\delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f))|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg\|_q \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} \Big\| \delta_j(f) - (\widetilde{P}(\Theta_{k_j}) * \delta_j(f)) \Big\|_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} \Bigg\| \delta_j(f) * \Bigg(\sum_{k \in \rho(j)} e^{ikx} - \widetilde{P}(\Theta_{k_j}) \Bigg) \Bigg\|_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} \|\widetilde{\mathbf{P}}_j \delta_j(f)\|_q^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.22)$$

Для того щоб продовжити оцінку (2.22), виберемо деяке число $q_1 \in (1, 2)$, яке нижче буде уточнене. Тоді, скориставшись лемою Б, отримаємо

$$I_2 \ll \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} \|\widetilde{\mathbf{P}}_j\|_{q_1 \to q}^2 \|\delta_j(f)\|_{q_1}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3 - \frac{2}{q_1})} \|\delta_j(f)\|_{q_1}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3 - \frac{2}{q_1})} \|f - S_{2^{j-1}}(f) - f + S_{2^j}(f)\|_{q_1}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{l \le j < \gamma l} 2^{2j} k_j^{-(3 - \frac{2}{q_1})} (\|f - S_{2^{j-1}}(f)\|_{q_1} + \|f - S_{2^j}(f)\|_{q_1})^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.23)$$

де $S_{2^j}(f,x)=\sum\limits_{k=-2^j}^{2^j}\hat{f}(k)e^{ikx}$.

Далі, скориставшись теоремою Д та врахувавши значення k_j, продовжимо оцінку (2.23)

$$I_2 \ll \left(\sum_{l\le j<\gamma l} 2^{2j}\left(\frac{2^j\psi(2^j)}{\psi(2^l)}\right)^{-(3-\frac{2}{q_1})} 2^{2j(1-\frac{1}{q_1})}\psi^2(2^j)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\psi(2^l)^{(3-\frac{2}{q_1})} \sum_{l\le j<\gamma l} (\psi(2^j)2^j)^{(\frac{2}{q_1}-1)} 2^{2j(1-\frac{1}{q_1})}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.24)$$

Оскільки існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon},\ t\in\mathbb{N}$, не зростає, то оцінку (2.24) продовжимо таким чином

$$I_2 \ll \left(\psi(2^l)^{(3-\frac{2}{q_1})}(\psi(2^l)2^{l(1+\varepsilon)})^{(\frac{2}{q_1}-1)} \sum_{l\le j<\gamma l} 2^{-j\varepsilon(\frac{2}{q_1}-1)}2^{2j(1-\frac{1}{q_1})}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\psi(2^l)^{(3-\frac{2}{q_1})}(\psi(2^l)2^{l(1+\varepsilon)})^{(\frac{2}{q_1}-1)}2^{-l\varepsilon(\frac{2}{q_1}-1)}2^{2l(1-\frac{1}{q_1})}\right)^{\frac{1}{2}} = \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}}. \quad (2.25)$$

Співставляючи (2.20), (2.21) і (2.25), маємо

$$\|f-t\|_q \ll \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}} + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\frac{1}{q})}. \qquad (2.26)$$

Оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon},\ t\in\mathbb{N}$, не зростає, то поклавши $\gamma=\frac{q}{2}+2$, можемо записати

$$\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\frac{1}{q})} = \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}2^{-\gamma l\frac{1}{q}} \ll \psi(2^l)2^l2^{-\gamma l\frac{1}{q}} =$$

$$= \psi(2^l)2^l2^{-(\frac{q}{2}+2)l\frac{1}{q}} = \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}}2^{-\frac{2l}{q}} \ll \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}}.$$

Отже, при такому виборі параметра γ, другий доданок правої частини (2.26) не перевищує першого і таким чином, врахувавши вибір l, із (2.26) приходимо до необхідної оцінки зверху.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$. Зауважимо, що при цьому шукану оцінку достатньо отримати для випадку

$q = 2$. Відповідні міркування будуть базуватися на використанні співвідношення двоїстості (див., наприклад, [27, с. 25]): для будь-якої функції $f \in L_2$

$$e_m(f)_2 = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m)} \|f - P(\Theta_m)\|_2 =$$

$$= \inf_{\Theta_m} \sup_{g \in L^{\perp}(\Theta_m), \|g\|_2 \le 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right|, \qquad (2.27)$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, які ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з номерами гармонік із множини Θ_m.

За заданим m виберемо l з умови $4m < 2^l \le 8m$ і розглянемо функцію

$$f_l(x) = C_{12}\psi(2^l)(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)), \ C_{12} > 0.$$

Як було показано раніше (див. доведення теореми 2.3) $f_l \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{12}.

Тепер перейдемо до вибору функції g_2, яка б задовольняла умови $g_2 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ і $\|g_2\|_2 \le 1$. Покладемо

$$v_1(x) = V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x),$$

і розглянемо поліном

$$t_1(x) = v_1(x) - v_1^*(x),$$

де $v_1^*(x)$ — функція, яка містить тільки ті гармоніки $v_1(x)$, які мають номери із Θ_m.

Оцінимо $\|t_1\|_2$. Згідно (2.18) та рівності Парсеваля, можемо записати

$$\|t_1\|_2 \le \|v_1\|_2 + \|v_1^*\|_2 \ll 2^{\frac{l}{2}} + m^{\frac{1}{2}} \ll m^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що поліном $g_2(x) = C_{15}m^{-\frac{1}{2}}t_1(x)$ при певному виборі сталої $C_{15} > 0$ задовольняє вимоги рівності (2.27). Підставивши f_l і g_2 у співвідношення (2.27), одержимо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_2 \geq \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_l(x) g_2(x) dx \right| \gg$$
$$\gg m^{-\frac{1}{2}} \psi(2^l)(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m) \gg$$
$$\gg m^{-\frac{1}{2}} \psi(2^l) 2^l \asymp \psi(2^l) 2^{\frac{l}{2}}. \tag{2.28}$$

Враховуючи вибір l, з (2.28) маємо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_2 \gg \psi(m) m^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Співставляючи одержані в теоремі 2.4 оцінки з результатами, що були отримані при доведенні теореми 2.3, бачимо, що у цих випадках найкращі ортогональні тригонометричні наближення і m-членні тригонометричні наближення мають різні порядки, тобто

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q.$$

***Зауваження* 2.4.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано у роботі [7], а оцінку тригонометричного поперечника $d^T_m(W^r_{1,\beta})_q$ анонсовано у роботі [4] і отримано у вигляді наслідку у роботі [42].

Перед формулюванням і доведенням наступного результату цього підрозділу наведемо необхідне позначення.

Через $B_{q,\varepsilon}, \ 2 < q < \infty$, будемо позначати множину функцій $\psi(t)$, $t \in \mathbb{N}$, які задовольняють наступні умови:

1) $\psi \in B$;

2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t) t^{1-\varepsilon}, \ t \in \mathbb{N}$ не спадає;

3) послідовність $\psi(t) t^{1-\frac{1}{q}}, \ t \in \mathbb{N}$ не зростає.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай* $2 < q < \infty$, $\psi(t) \in B_{q,\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і виконується одна з умов* (2.7) *або* (2.8) *. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m^{\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(1-\frac{1}{q})}.$$

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху. Представимо ряд Фур'є функції $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ у термінах $\delta_s(f,x)$ і за заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умови $2^l < m \le 2^{l+1}$. Розглянемо поліном, що наближає функцію f, у вигляді

$$P(\Theta_{2^l}, x) = \sum_{s=0}^{l-1} \delta_s(f,x) + \sum_{l \le s < \gamma l} P(\Theta_{k_s}, x),$$

де поліноми $P(\Theta_{k_s}, x)$ побудовані таким чином, щоб для $s \in [l; \gamma l)$, $\gamma > 1$ виконувалась порядкова оцінка

$$\|\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})\|_q \ll \left(\frac{2^s}{k_s}\right)^{\frac{1}{2}} \|\delta_s(f)\|_2, \ 2 < q < \infty.$$

Зазначимо, що це можливо зробити згідно з лемою В, і при цьому індекси Θ_{k_s} містяться у множині номерів гармонік, які входять в поліном $\delta_s(f,x)$. Застосувавши теорему В, в силу якої при деякому $\gamma > 1$ (це число буде підібрано нижче) і k_s таких, що $\sum\limits_{l \le s < \gamma l} k_s \ll 2^l$, маємо

$$\|f - P(\Theta_{2^l})\|_q = \left\| \sum_{s \in \mathbb{N}} \delta_s(f) - \sum_{s=0}^{l-1} \delta_s(f) - \sum_{l \le s < \gamma l} P(\Theta_{k_s}) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{l \le s < \gamma l} |\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q + \left\| \sum_{s \ge \gamma l} \delta_s(f) \right\|_q = I_4 + I_5. \qquad (2.29)$$

Проведемо оцінки одержаних величин I_4 та I_5, починаючи з I_5. Згідно з теоремою Д можемо записати

$$I_5 = \|\sum_{s \ge \gamma l} \delta_s(f)\|_q = \|f - \sum_{1 \le s < \gamma l} \delta_s(f)\|_q \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(1-\frac{1}{q})}. \qquad (2.30)$$

Перейдемо до оцінки I_4. Застосувавши послідовно нерівність Мінковського та лему B, будемо мати

$$I_4 = \left\| \left(\sum_{l \le s < \gamma l} |\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \|\delta_s(f) - P(\Theta_{k_s})\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \|\delta_s(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \|f - S_{2^{s-1}}(f) - f + S_{2^s}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \Big(\|f - S_{2^{s-1}}(f)\|_2 + \|f - S_{2^s}(f)\|_2 \Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.31)$$

де $S_{2^s}(f,x) = \sum\limits_{k=-2^s}^{2^s} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Далі, скориставшись теоремою Д при $q = 2$, продовжимо оцінку (2.31)

$$I_4 \ll \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^s}{k_s} \psi^2(2^s) 2^s \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{l \le s < \gamma l} \frac{2^{2s}}{k_s} \psi^2(2^s) \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.32)$$

Тепер покладемо

$$k_s = \left[\frac{2^s \psi(2^s) 2^l}{\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l}} \right] + 1, \ s = l, ..., \gamma l, \ \gamma = \frac{q}{2},$$

і покажемо, що кількість гармонік в сукупності поліномів $P(\Theta_{k_s})$ при $l \le s < \gamma l$, $s \in \mathbb{N}$, не перевищує за порядком 2^l. Дійсно, оскільки за умовою теореми існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t) t^{1-\varepsilon}$ не спадає, то можемо записати

$$\sum_{l \le s < \gamma l} k_s = \sum_{l \le s < \gamma l} \left(\left[\frac{2^s \psi(2^s) 2^l}{\psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l}} \right] + 1 \right) \le$$

$$\leq \frac{2^l}{2^{\gamma l}\psi(2^{\gamma l})} \sum_{l\leq s<\gamma l} 2^s\psi(2^s) + 2\gamma l =$$

$$= \frac{2^l}{2^{\gamma l}\psi(2^{\gamma l})} \sum_{l\leq s<\gamma l} 2^s\psi(2^s)2^{s\varepsilon}2^{-s\varepsilon} + 2\gamma l \leq$$

$$\leq \frac{2^l}{2^{\gamma l}\psi(2^{\gamma l})}\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\varepsilon)} \sum_{l\leq s<\gamma l} 2^{s\varepsilon} + 2\gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\gamma l}\psi(2^{\gamma l})}\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\varepsilon)}2^{\gamma l\varepsilon} + 2\gamma l \ll 2^l.$$

Таким чином, підставивши у (2.32) значення k_s та врахувавши, що послідовність $\psi(t)t^{1-\varepsilon}$ не спадає і $\gamma = \frac{q}{2}$, отримуємо

$$I_4 \ll \left(\sum_{l\leq s<\gamma l} \frac{2^{2s}\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}}{2^s\psi(2^s)2^l}\psi^2(2^s) \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}2^{-l} \sum_{l\leq s<\gamma l} \psi(2^s)2^s \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}2^{-l}\psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\varepsilon)}2^{\gamma l\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l}2^{-\frac{l}{2}} = \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(1-\frac{1}{q})}. \tag{2.33}$$

Співставивши (2.29), (2.30) і (2.33), отримаємо шукану оцінку зверху величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Аналогічно до доведення попередньої теореми, відповідні міркування будуть базуватися на використанні співвідношення двоїстості: для будь-якої функції $f \in L_q$

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m)} \|f - P(\Theta_m)\|_q =$$

$$= \inf_{\Theta_m} \sup_{g\in L^{\perp}(\Theta_m), \|g\|_{q'}\leq 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right|, \tag{2.34}$$

де $L^{\perp}(\Theta_m)$ — множина функцій, які ортогональні підпростору тригонометричних поліномів з номерами гармонік із множини Θ_m.

За заданим m виберемо l з умови $2^l \asymp m^{\frac{q}{2}}$ і розглянемо функцію

$$f_l(x) = C_{12}\psi(2^l)(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)),\ C_{12} > 0,$$

При доведенні теореми 2.3 було встановленно, що $f_l \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{12}.

Тепер перейдемо до вибору функції g_3, яка б задовольняла умови $g_3 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ і $\|g_3\|_{q'} \leq 1$. Покладемо

$$v_1(x) = V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x),$$

і розглянемо поліном

$$t_1(x) = v_1(x) - v_1^*(x),$$

де $v_1^*(x)$ — функція, яка містить тільки ті гармоніки $v_1(x)$, які мають номери із Θ_m.

Оцінимо $\|t_1\|_{q'}$. Згідно (2.18) та рівності Парсеваля, можемо записати

$$\|t_1\|_{q'} \leq \|v_1\|_{q'} + \|v_1^*\|_2 \ll 2^{l(1-\frac{1}{q'})} + m^{\frac{1}{2}} \ll m^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином функція $g_3(x) = C_{16}m^{-\frac{1}{2}}t_1(x)$ при певному виборі сталої $C_{16} > 0$ задовольняє вимогу $\|g_3\|_{q'} \leq 1$. Крім цього легко бачити, що $g_3 \in L^{\perp}(\Theta_m)$ і тому підставивши f_l і g_3 у співвідношення (2.34), одержимо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \geq \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_l(x)g_3(x)dx \right| \gg$$

$$\gg m^{-\frac{1}{2}}\psi(2^l)(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m) \gg m^{-\frac{1}{2}}\psi(2^l)2^l. \qquad (2.35)$$

Врахувавши, що $2^l \asymp m^{\frac{q}{2}}$, завершимо оцінку (2.35):

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \gg \psi(m^{\frac{q}{2}})m^{\frac{q}{2}(1-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

***Зауваження* 2.5.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $1 - \frac{1}{q} < r < 1$, оцінку величини $e_m(W^r_{1,\beta})_q$ одержано у роботі [7].

На завершення підрозділу зробимо відповідні коментарі. Зазначимо, що даний результат є доповненням оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, яка була одержана у роботі [78].

Співставивши теореми 2.4 і 2.5 бачимо, що отримані в них результати відрізняються за порядком. Подібного роду обставина, яка отримала назву "явище малої гладкості", була вперше помічена Б. С. Кашиним [18] під час встановлення оцінок колмогоровських поперечників класів Соболєва W^r_1 функцій однієї змінної у просторі L_q. Іншими словами, у [18] було виявлено, що оцінки колмогоровських поперечників $d_m(W^r_1, L_q)$, $2 < q < \infty$, у випадках $1 - 1/q < r < 1$ і $r > 1$ відрізняються за порядком. Згодом подібні явища були виявлені і при дослідженні деяких інших апроксимативних характеристик класів періодичних функцій, як однієї так і багатьох змінних (див., наприклад, [7, 44]).

2.5. Оцінки найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_1

Для величин, означених рівностями (2.4) і (2.5), має місце

Теорема 2.6. *Нехай $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з теореми E та ланцюжка співвідношень

$$e_{2m+1}(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \le e^{\perp}_{2m+1}(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \le$$
$$\le \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_p \asymp \psi(m),\ 1 < p < \infty.$$

Встановимо оцінки знизу. Очевидно, що для цього достатньо оцінити знизу величину $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1$. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \le m < 2^{l-1}$ і розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_{17}\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}R_l(x),\ C_{17} > 0,$$

де $R_l(x) = \sum\limits_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, — поліноми Рудіна-Шапіро, для яких, (див., наприклад, [19, с. 155]), має місце порядкова оцінка

$$\|R_l\|_\infty \ll 2^{\frac{l}{2}}. \tag{2.36}$$

Легко переконатися, що функція $f_2 \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Дійсно, згідно теореми Є та співвідношення (2.36), можемо записати

$$\|(f_2)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(2^l)\|f_2\|_p \ll 2^{-\frac{l}{2}}\|R_l\|_\infty \ll 2^{-\frac{l}{2}}2^{\frac{l}{2}} = 1.$$

Звідси слідує, що при належному виборі сталої $C_{17} > 0$ функція $f_2 \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Крім цього легко бачити, що функція

$$g_4(x) = C_{18} 2^{-\frac{l}{2}} R_l(x)$$

з відповідною сталою $C_{18} > 0$ задовольняє умові $\|g_4\|_\infty \leq 1$. Таким чином, скориставшись (2.27) по відношенню до функцій f_2 і g_4, отримаємо

$$e_m^\perp(L^\psi_{\beta,p})_1 \geq e_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \gg \frac{\psi(2^l)(2^l - m)}{2^l} \geq$$
$$\geq \frac{\psi(2^l)2^{l-1}}{2^l} \asymp \psi(2^l) \asymp \psi(m).$$

Оцінка знизу і разом з нею теорема доведені.

Зазначимо, що даний результат є доповненням оцінок величин $e_m(L^\psi_{\beta,p})_q$, $e_m^\perp(L^\psi_{\beta,p})_q$, які було одержано раніше у роботах [75 — 78, 80— 83, 22 — 24, 52, 53].

Поклавши в теоремі 2.7 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо таке твердження:

Твердження 2.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$e_m(W^r_{p,\beta})_1 \asymp e_m^\perp(W^r_{p,\beta})_1 \asymp m^{-r}.$$

Скориставшись результатами теорем 2.6, E легко отримати відповідні оцінки для величин $E_m(L^\psi_{\beta,p})_1$ і $\mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1$.

Твердження 2.2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$E_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \asymp \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Доведення. Оцінки зверху випливають з результату отриманого в теоремі E та наступних співвідношень

$$E_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \leq \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_1 \leq \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_p \asymp \psi(m).$$

Оцінки знизу відповідних величин слідують з теореми 2.7 та ланцюжка співвідношень

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \geq E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \geq$$

$$\geq e_{2m+1}(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \geq \psi(2m+1) \asymp \psi(m).$$

Зауваження **2.6.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0$, порядки величин $E_m(W^r_{p,\beta})_1$ та $\mathcal{E}_m(W^r_{p,\beta})_1$ відомі (див., наприклад, [115, Розділ I, §3]).

Зазначимо, що даний результат є доповненням оцінок величин $E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ (див., наприклад, [58 — 60, 13]).

2.6. Найкращі m-членні та ортогональні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці

У цьому підрозділі встановлено точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p \leq \infty$ у рівномірній метриці. А також, із застосуванням теореми 2.3, знайдені точні порядки найкращих ортогональних тригонометричних наближень функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 < p < \infty$ у метриці L_∞.

У наступному твердженні встановимо точну по порядку оцінку величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty$, $1 < p \leq \infty$.

Теорема 2.7. *Нехай $1 < p \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{a+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, $a = \max\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(m) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+},$$

де $b_+ = \max\{b; 0\}$.

Доведення. Отримаємо оцінку зверху. Спочатку розглянемо випадок $1 < p \leq 2$. Виберемо $l \in \mathbb{N}$ з нерівності $2^{l-1} \leq m < 2^l$ і для $j \in \mathbb{N}$ покладемо

$$k_j = \begin{cases} 0, & j \leq l, \\ \left[\dfrac{2^{\frac{j}{p}}\psi(2^j)}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} 2^l\right] + 1, & l < j \leq \gamma l, \\ 0, & j > \gamma l, \end{cases} \tag{2.37}$$

де $[d]$ — ціла частина числа d і $\gamma > 1$ — деяке число, яке буде означене нижче.

Тоді, враховуючи той факт, що $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j \ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} \sum_{l<j\leq\gamma l} 2^{\frac{j}{p}}\psi(2^j) + \gamma l =$$

$$= \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} \sum_{l<j\le\gamma l} 2^{j(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^j)2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^l) \sum_{l<j\le\gamma l} 2^{-j\varepsilon} + \gamma l \ll$$

$$\ll \frac{2^l}{2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)} 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\psi(2^l)2^{-l\varepsilon} + \gamma l \ll 2^l.$$

Таким чином, для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ можемо записати

$$e_m(f)_\infty \le \sum_{l<j\le\gamma l} e_{k_j}(\delta_j(f))_\infty + \sum_{j>\gamma l} \|\delta_j(f)\|_\infty = I_6 + I_7. \tag{2.38}$$

Оцінимо спочатку величину I_6. Для проведення наступних міркувань скористаємось оцінкою з [104] (наслідок 5.1), яка відповідно до наших позначень має вигляд

$$e_{k_j}(\delta_j(f))_\infty \ll \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j}\|\delta_j(f)\|_2, \tag{2.39}$$

(тут і нижче $\log := \log_2$).

Далі, використавши (2.39) і теорему Ж можемо записати

$$I_6 \ll \sum_{l<j\le\gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j}\|\delta_j(f)\|_2 \ll$$

$$\ll \sum_{l<j\le\gamma l} \left(\frac{2^j}{k_j}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{2^j}{k_j} 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|\delta_j(f)\|_p. \tag{2.40}$$

Для того, щоб продовжити оцінку покажемо, що виконується співвідношення

$$\|\delta_j(f)\|_p \ll \psi(2^j)\|\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p. \tag{2.41}$$

З цією метою розглянемо $\delta_j(f^{\psi}_{\beta})$ і оператор Λ, що задається послідовністю

$$\{\lambda_k\} = \left\{\frac{\psi(|k|)}{\psi(2^j)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}\right\},\ 2^{j-1} \le |k| < 2^j,$$

і який діє, як мультиплікатор.

Тому подіявши оператором Λ на $\delta_j(f^{\psi}_{\beta})$, отримаємо

$$\Lambda\delta_j(f^{\psi}_{\beta}) = \Lambda \sum_{k\in\rho(j)} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\rho(j)} \frac{1}{\psi(2^j)}\hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{\psi(2^j)}\delta_j(f). \tag{2.42}$$

Зазначимо, що при доведенні теореми 2.1 було показано, що послідовність $\{\lambda_k\}$ задовольняє умови теореми Г.

Таким чином, згідно з теоремою Г має місце нерівність

$$\|\Lambda\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p \le C_{19}(p)\|\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p. \tag{2.43}$$

З іншого боку, в силу рівності (2.42)

$$\|\Lambda\delta_j(f^{\psi}_{\beta})\|_p = \frac{1}{\psi(2^j)}\|\delta_j(f)\|_p. \tag{2.44}$$

Співставивши (2.43) і (2.44), приходимо до оцінки (2.41).

Далі, оскільки виконується співвідношення (2.41), то з урахуванням (2.37), і того, що $\psi \in B$ і $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, продовжимо оцінку (2.40):

$$I_6 \ll \sum_{l<j\le\gamma l} \left(2^j 2^{-\frac{j}{p}}\psi^{-1}(2^j)2^{-l}2^{\frac{l}{p}}\psi(2^l)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\log 2^j - \log\left(2^{\frac{j}{p}}\psi(2^j)2^{-\frac{l}{p}}\psi^{-1}(2^l)2^l\right)\right)2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\psi(2^j) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}}2^{\frac{l}{2p}}\psi^{\frac{1}{2}}(2^l)\sum_{l<j\le\gamma l}\psi^{\frac{1}{2}}(2^j)2^{\frac{j}{2p}}\left(j-\frac{j}{p}+\frac{l}{p}-l\right) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}}2^{\frac{l}{2p}}\psi^{\frac{1}{2}}(2^l)\sum_{l<j\le\gamma l}\psi^{\frac{1}{2}}(2^j)2^{\frac{j}{2}(\frac{1}{p}+\varepsilon)}2^{-\frac{j\varepsilon}{2}}(j-l) \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}}2^{\frac{l}{2p}}\psi^{\frac{1}{2}}(2^l)\psi^{\frac{1}{2}}(2^l)2^{\frac{l}{2}(\frac{1}{p}+\varepsilon)}\sum_{l<j\le\gamma l}2^{-\frac{j\varepsilon}{2}}(j-l) \ll$$

$$\ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}. \qquad (2.45)$$

Перейдемо до оцінки величини I_7. Використовуючи послідовно нерівність різних метрик (2.10), оцінку (2.41), а також враховуючи, що $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, маємо

$$I_7 = \sum_{j>\gamma l} \|\delta_j(f)\|_\infty \ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \|\delta_j(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \|\delta_j(f^\psi_\beta)\|_p \ll \sum_{j>\gamma l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \ll$$

$$\ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \sum_{j>\gamma l} 2^{-j\varepsilon} \ll \psi(2^{\gamma l}) 2^{\gamma l \frac{1}{p}}. \qquad (2.46)$$

Співставивши (2.38), (2.45) і (2.46), отримуємо

$$e_m(f)_\infty \ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l \frac{1}{p}} =$$

$$= \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(1 + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l \frac{1}{p}} \left(\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(1 + \psi(2^{\gamma l})2^{\gamma l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} 2^{-\gamma l \varepsilon} \left(\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\right). \qquad (2.47)$$

Оскільки $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, то з (2.47) приходимо до оцінки

$$e_m(f)_\infty \ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \Bigg(1+$$

$$+\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} 2^{-\gamma l \varepsilon} \left(\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^{-1}\Bigg) \ll$$

$$\ll \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \left(1 + 2^{l\varepsilon(1-\gamma)} 2^{\frac{l}{2}}\right).$$

Таким чином, поклавши $\gamma = (\frac{1}{2\varepsilon} + 1)$, і врахувавши вибір l, з останньої оцінки отримуємо

$$e_m(f)_\infty \ll \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \qquad (2.48)$$

Нехай тепер $2 < p < \infty$. В такому випадку шукана оцінка випливає із вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subseteq L^{\psi}_{\beta,2}$ і оцінки (2.48) при $p = 2$.

Оцінку зверху доведено.

Для встановлення оцінки знизу у випадку $1 < p < \infty$ достатньо скористатися результатом отриманим у роботі [76]:

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \gg \psi(m) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}, \ 1 < q < \infty, \tag{2.49}$$

та співвідношенням

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \geq e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Розглянемо випадок $p = \infty$. Згідно з рівністю Парсеваля маємо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_\infty \geq e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_2 =$$
$$= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \inf_{\{\Theta_m\}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Theta_m} |\hat{f}(k)|^2 \psi^2(m) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використавши твердження В та взявши супремум по $g \in L_2$, можемо записати

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_\infty \gg \sup_{\|g\|_2 \leq 1} \inf_{\{\Theta_m\}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Theta_m} |\hat{g}(k)|^2 \psi^2(m) \right)^{\frac{1}{2}} = e_m(L^{\psi}_{\beta,2})_2.$$

Скориставшись результатом (2.49), приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,\infty})_\infty$.

Теорему 2.7 доведено.

***Зауваження* 2.7.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > \frac{1}{p}$ порядок величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty, \ 1 \leq p \leq \infty$ було встановлено у роботі [99].

***Зауваження* 2.8.** В теоремі 2.7 вдалося покращити оцінку зверху величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty$, яка отримана в роботі [76]:

$$\psi(m) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+} \ll e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \ll \psi(m) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+} \sqrt{\log m}.$$

Зазначимо також, що порядки величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty$ було отримано у роботах [82, 83] при більш жорстких умовах на функції $\psi(t),\ t\in\mathbb{N}$.

Зауважимо також, що оскільки згідно з означень

$$e_{2m+1}(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q,$$

то цікаво порівняти отримані у теоремі 2.7 порядкові оцінки з відповідними порядковими оцінками найкращих наближень, які були отримані у роботі [13].

Отже, у випадку $1<p\le 2$ має місце порядкове співвідношення

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \asymp\ m^{\frac{1}{2}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty.$$

Якщо $2<p<\infty$, то

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \asymp\ m^{\frac{1}{p}} e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty.$$

У наступному твердженні встановимо точну по порядку оцінку величини $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty,\ 1<p<\infty$.

Теорема 2.8. *Нехай* $1<p<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon>0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon},\ t\in\mathbb{N}$*, не зростає. Тоді має місце оцінка*

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху. Нехай l і m такі, що $2^l<m\le 2^{l+1}$. Використовуючи послідовно нерівність Мінковського, теорему Ж та (2.41), маємо

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_\infty \ll \Big\| f-\sum_{j<l}\delta_j(f)\Big\|_\infty =$$

$$=\Big\|\sum_{j\ge l}\delta_j(f)\Big\|_\infty \le \sum_{j\ge l}\|\delta_j(f)\|_\infty \le$$

$$\leq \sum_{j\geq l} 2^{\frac{j}{p}} \|\delta_j(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j\geq l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j) \|\delta_j(f_\beta^\psi)\|_p \ll \sum_{j\geq l} 2^{\frac{j}{p}} \psi(2^j). \tag{2.50}$$

Прийнявши до уваги, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ не зростає, продовжимо оцінку (2.50)

$$e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \ll \sum_{j\geq l} 2^{j(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \psi(2^j) 2^{-j\varepsilon} \ll$$

$$\ll 2^{l(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \psi(2^l) \sum_{j\geq l} 2^{-j\varepsilon} \ll$$

$$\ll \psi(2^l) 2^{l\frac{1}{p}} \ll \psi(m) m^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінку зверху доведено.

Для доведення оцінки знизу скористаємось теоремою 2.2. Нехай Θ_m — довільний набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$, і для $f \in L_{\beta,p}^\psi$

$$S_{\Theta_m}(f, x) = \sum_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}.$$

Тоді, враховуючи (2.11), можемо записати

$$I_8 = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \left\| f - S_{\Theta_m}(f) \right\|_\infty =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \left\| \varphi * F_\psi - \varphi * \sum_{k\in\Theta_m} e^{ikx} * F_\psi \right\|_\infty . \tag{2.51}$$

Далі, поклавши

$$t_m(x) = \sum_{k\in\Theta_m} e^{ikx} * F_\psi(x),$$

із (2.51) будемо мати

$$I_8 = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\varphi * (F_\psi - t_m)\|_\infty =$$

$$= \|F_\psi - t_m\|_{p'} \geq e_m^\perp(F_\psi)_{p'},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Звідси, скориставшись теоремою 2.2, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty$.

Теорему 2.8 доведено.

Співставивши результати теореми 2.7 і 2.8 отримуємо, що між величинами $e_m(L_{\beta,p}^\psi)_\infty$ та $e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty$ у випадку $1 < p \leq 2$ має місце співвідношення

$$e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp m^{\frac{1}{2}} e_m(L_{\beta,p}^\psi)_\infty.$$

Якщо ж $2 < p < \infty$, то справедливе таке співвідношення

$$e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp m^{\frac{1}{p}} e_m(L_{\beta,p}^\psi)_\infty.$$

***Зауваження* 2.9.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > \frac{1}{p}$ порядок величини $e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty,\ 1 < p < \infty$ встановлено А. С. Романюком (див., наприклад, [46, с. 140]).

Висновки до розділу 2

У даному розділі при встановленні точних за порядком оцінок найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q, для певних співвідношень між параметрами p та q, основна увага була зосереджена на тих випадках, коли параметри p і q приймають граничні значення 1 та ∞. Саме в цих випадках отримання оцінок вищезгаданих апроксимативних характеристик цікаве, як з точки зору практичних застосувань, так і з точки зору нових методів, які при цьому необхідно використовувати.

А саме, у підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_{\psi}(x,\beta)$, у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

У підрозділі 2.3 отримано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

У підрозділі 2.4 знайдено точні за порядком оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближень і тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі $L_q,\ 2 \leq q < \infty$. Крім цього, одержано також порядки найкращих m-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ функцій малої гладкості у просторі $L_q,\ 2 \leq q < \infty$.

У підрозділі 2.5 встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_1.

У підрозділі 2.6 одержано точні за порядком оцінки найкращих m-членних і ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці. У результаті проведених досліджень виявлено, що існують співвідношення між параметрами p та q для яких величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ та $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ мають однакові порядки, а також і такі, для яких вони відрізняються за порядком.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [87–89, 91 – 93, 95, 96].

РОЗДІЛ 3

Гріді-алгоритми та білінійні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторах Лебега

У даному розділі одержано точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для певних співвідношень між параметрами p та q. Крім цього знайдені також порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних вигляду $g(x,y) = f(x-y)$, $x,y \in [-\pi,\pi]$, що породжені із функцій $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, зсувами аргументу на всеможливі $y \in [-\pi,\pi]$ у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$.

3.1. Допоміжні твердження

Нагадаємо означення апроксимативних характеристик класів, які будуть досліджуватись у даному розділі.

Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ — коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані в порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))| \ge |\hat{f}(k(2))| \ge \ldots \tag{3.1}$$

Позначимо для $f \in L_q$

$$G_m(f,x) := \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{ik(l)x}$$

і розглянемо величину

$$\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q.$$

Зрозуміло, що вибір апроксимантів $G_m(f,\cdot)$ не є однозначним, але як буде слідувати з отриманих результатів, порядок цієї величини не залежить від того, яким чином ми здійснили цей вибір. Тому надалі для зручності покладемо

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q. \tag{3.2}$$

Розглянутий метод побудови m-членного тригонометричного наближення називається гріді-алгоритмом.

Легко бачити, що згідно з означеннями (2.4), (2.5) і (3.2), має місце співвідношення

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \tag{3.3}$$

та

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 = e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 = G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2. \tag{3.4}$$

Поряд з апроксимативною характеристикою $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ у теорії наближень розглядають величину найкращого білінійного наближення $\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2}$.

Нехай L_{q_1,q_2}, $1\le q_1,q_2\le\infty$ — множина функцій $f(x,y)$, $x,y\in[-\pi,\pi]$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

причому норма обчислюється спочатку у просторі L_{q_1} по змінній $x\in[-\pi,\pi]$, а потім від результату по змінній $y\in[-\pi,\pi]$ у просторі L_{q_2}. Для $f(x-y)\in L_{q_1,q_2}$ покладемо

$$\tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2} = \inf_{u_j(x),v_j(y)} \Big\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x)v_j(y) \Big\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}, \ v_j \in L_{q_2}$.

Якщо $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_{q_1}$, то величина

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \tau_m(f(x-y))_{q_1,q_2}, \tag{3.5}$$

називається найкращим білінійним наближенням.

При доведенні основних результатів нам знадобляться деякі відомі твердження, які ми будемо формулювати згідно з нашими позначеннями.

Має місце наступне твердження.

Теорема З [80]**.** *Нехай* $1 < q \le p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Теорема І [58, с.215]**.** *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема Ї [116]**.** *Якщо* $f \in L_q$, $\ 1 \le q \le \infty$, *то*

$$\|f - G_m(f)\|_q \le (1 + 3m^{h(q)})e_m(f)_q,$$

де $h(q) = |\frac{1}{2} - \frac{1}{q}|$.

Теорема Й [76]**.** *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Лема Г [67, с.107]**.** *Нехай задане деяке число* $m \in \mathbb{N}$*. Тоді для будь-якої функції*

$$g(x) = \sum_{|k| \leq 2m} \widehat{g}(k) e^{ikx}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \leq 1$ *і* $|\widehat{g}(k)| = 1$ *при* $|k| \leq m$ *виконується співвідношення*

$$\tau_m(g(x-y))_{2,1} \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема К [76]**.** *Нехай* $2 \leq p \leq q < \infty$*,* $\psi \in B$*,* $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t) t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$*,* $t \in \mathbb{N}$*, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

3.2. Гріді-алгоритми на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q, $1 \le q < \infty$

Для величин, означених рівностями (3.2), має місце

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \le q \le 2 \le p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Доведення. Прийнявши до уваги нерівність (3.3), одержимо

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q. \tag{3.6}$$

З іншого боку, з (3.4) випливає

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 = e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2. \tag{3.7}$$

Скориставшись теоремами З і 2.6 для даного випадку будемо мати

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Теорему 3.1 доведено.

Теорема 3.2. *Нехай* $1 < p \le q \le 2$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Оцінка зверху слідує з оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2$:

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

$1 < p < 2$, яка, в свою чергу, є наслідком оцінки наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх сумами Фур'є. Відповідний результат отриманий у теоремі I.

Встановимо оцінку знизу. З цією метою будемо використовувати поліноми Рудіна-Шапіро $\mathcal{R}_l(x)$:

$$\mathcal{R}_l(x) = \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx},\ \varepsilon_j = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

для яких справедлива порядкова оцінка

$$\|\mathcal{R}_l\|_\infty \ll 2^{\frac{l}{2}}. \tag{3.8}$$

Нам також знадобляться відомі ядра Валле-Пуссена $V_m(x)$:

$$V_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{l=m}^{2m-1} D_l(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $D_l(x) = \sum\limits_{|k|\le l} e^{ikx}$ — ядро Діріхле.

Далі покладемо для $\varepsilon = \pm 1$

$$\Lambda_{\pm 1} := \{k : \widehat{\mathcal{R}}_l(k) = \pm 1\},$$

і нехай набір $\varepsilon = \pm 1$ буде таким, що $|\Lambda_\varepsilon| > |\Lambda_{-\varepsilon}|$. Тоді по заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \le m < 2^{l-1}$, візьмемо малий додатний параметр δ і розглянемо функцію

$$f_4(x) = C_{20}\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)} f_3(x), \quad C_{20} > 0,$$

де $f_3(x) = V_m(x) + \varepsilon\delta\mathcal{R}_m(x), \quad 0 < \delta \le m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_{20} > 0$ функція f_4 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_4)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll 1$.

З цією метою скористаємось теоремою Є та відомим співвідношенням (див., наприклад, [115, ст. 66])

$$\|V_{2^l}\|_p \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})},\ 1 \le p \le \infty, \tag{3.9}$$

таким чином можемо записати

$$\|(f_4)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m)\|f_4\|_p \leq$$

$$\leq \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(\|V_m\|_p + \delta\|\mathcal{R}_m\|_p) \leq$$

$$\leq \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(\|V_m\|_p + \delta\|\mathcal{R}_m\|_\infty) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(2^{l(1-\frac{1}{p})} + 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}2^{\frac{l}{2}}) \ll 1.$$

Звідси слідує, що при належному виборі сталої $C_{20} > 0$ функція $f_4 \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далі скористаємося результатом роботи [116, с. 581], де показано, що при $1 \leq q \leq 2$, має місце оцінка

$$\|f_3 - G_m(f_3)\|_q \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, використавши цю оцінку будемо мати

$$\|f_4 - G_m(f_4)\|_q \gg \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}\|f_3 - G_m(f_3)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(m)m^{\frac{1}{p}-1}m^{\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Теорема 3.3. *Нехай* $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Оцінка зверху слідує із теорем Ї та Й. Для $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, згідно з результатів цих теорем, маємо

$$\|f - G_m(f)\|_q \leq (1 + 3m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}})e_m(f)_q \ll$$

$$\ll m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Тому

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \ll \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.10}$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умови $2^{l-1} \le m < 2^l$ і розглянемо функцію

$$f_5(x) = C_{21} \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-1)} V_{2^l}(x), \quad C_{21} > 0.$$

Легко переконатися, що функція $f_5 \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Дійсно, згідно теореми Є та співвідношення (3.9), можемо записати

$$\|(f_5)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m) \|f_5\|_p \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(m) \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-1)} 2^{l(1-\frac{1}{p})} = 1.$$

Звідси слідує, що при належному виборі сталої $C_{21} > 0$ функція $f_5 \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далі, скориставшись нерівністю різних метрик (див. (2.10)), отримаємо співвідношення

$$\|V_{2^l} - G_m(V_{2^l})\|_q \gg m^{-\frac{1}{q}} \|V_{2^l} - G_m(V_{2^l})\|_\infty \gg m^{1-\frac{1}{q}}. \tag{3.11}$$

Тому, враховуючи (3.11), будемо мати

$$\|f_5 - G_m(f_5)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-1)} \|f_5 - G_m(f_5)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(m) m^{\frac{1}{p}-1} m^{1-\frac{1}{q}} = \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином при $1 < p \le 2 \le q < \infty$ виконується оцінка

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 3.3 доведено.

Теорема 3.4. *Нехай* $2 \le p \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Оскільки $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L^{\psi}_{\beta,2}$, то

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,2})_q$$

і тому, прийнявши до уваги співвідношення (3.10) при $p = 2$, отримуємо оцінку зверху

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \ll \psi(m) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Для встановлення оцінки знизу за заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення $2^{l-1} \le m \le 2^l$, візьмемо малий додатний параметр δ і розглянемо функцію

$$f_7(x) = C_{22} \psi(2^l) 2^{-\frac{l}{2}} f_6(x),$$

де $f_6(x) := \mathcal{R}_m(x) + \varepsilon\delta D_m(x), \ \ 0 < \delta \le m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_{22} > 0$ функція f_7 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_7)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll 1$. З цією метою скористаємось теоремою Є та відомим співвідношенням (див., наприклад, [115, с. 25])

$$\|D_{2^l}\|_p \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})}, \ 1 < p < \infty. \qquad (3.12)$$

Таким чином будемо мати

$$\|(f_7)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m) \|f_7\|_p \le$$

$$\le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(\|\mathcal{R}_m\|_p + \delta\|D_m\|_p) \le$$

$$\le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(\|\mathcal{R}_m\|_\infty + \delta\|D_m\|_p) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(2^{\frac{l}{2}} + 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}2^{l(1-\frac{1}{p})}) \ll 1.$$

Звідси слідує, що при певному виборі сталої C_{22} функція f_7 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далі використаємо оцінку встановлену в [116, с. 582]:

$$\|f_6 - G_m(f_6)\|_q \gg m^{1-\frac{1}{q}}, \ \ 2 \le q \le \infty.$$

Прийнявши до уваги це співвідношення будемо мати

$$\|f_7 - G_m(f_7)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}\|f_6 - G_m(f_6)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(m)m^{-\frac{1}{2}}m^{1-\frac{1}{q}} = \psi(m)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином при $2 \le p \le q < \infty$ виконується наступна оцінка

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорему 3.4 доведено.

У наступному твердженні встановимо точну за порядком оцінку величини $G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ при $2 \le q < \infty$.

Теорема 3.5. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (2.7) *або* (2.8) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}. \tag{3.13}$$

Доведення. Оцінка зверху в (3.13) слідує з відповідної оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$, $2 \le q < \infty$, що була встановлена у теоремі 2.4 та теоремі Ї:

$$\|f - G_m(f)\|_q \le (1 + 3m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}})e_m(f) \ll$$
$$\ll m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\psi(m)m^{\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Тому звідси отримуємо

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \ll \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу величини $G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$. За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умови $2^{l-1} \le m < 2^l$ і розглянемо функцію

$$f_8(x) = C_{23}\psi(2^l)V_{2^l}(x), \quad C_{23} > 0.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_{23} > 0$ функція f_8 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_8)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$.

З цією метою скористаємось твердженням Б. Зауважимо, що умова (2.9) виконується, оскільки існує число $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ таке, що послідовність $\varphi(m) = m^{\alpha}\psi(m)$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\varphi(k)k} \le \frac{1}{m^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{\alpha}}{k} \le 1.$$

Таким чином, на підставі твердження Б та (3.9) одержимо, що

$$\|(f_8)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \psi^{-1}(m)\|f_8\|_1 \ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l) \asymp 1.$$

Звідси слідує, що $f_8 \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{23}.

Далі, врахувавши (3.11) та співвідношення між числами m і l, можемо записати

$$\|f_8 - G_m(f_8)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^l)\|f_8 - G_m(f_8)\|_q \gg \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином при $2 \leq q < \infty$ справедлива оцінка

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

На завершення даного підрозділу наведемо деякі коментарі до отриманих результатів, порівнявши їх з оцінками близьких, в певному сенсі, апроксимативних характеристик класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Згідно з означеннями величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ та $G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ має місце очевидне співвідношення

$$e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Таким чином, співставивши результати теорем 3.1 – 3.5 з відповідними результатами, отриманими при дослідженні величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ у роботах [77, 80] та у підрозділах 2.3, 2.5 отримуємо, що при $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$ та $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ має місце порядкове співвідношення

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

У випадках $1 < p \leq q \leq 2$ та $p = 1,\ 2 \leq q < \infty$ виконується наступне співвідношення

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\ e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Якщо ж $2 \leq p \leq q < \infty$, то

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\ e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Зауважимо також, що оскільки згідно з означень

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \leq G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q,$$

то цікаво порівняти порядкові оцінки гріді-алгоритмів з відповідними порядковими оцінками найкращих m-членних тригонометричних наближень, які були отримані у роботах [75 — 77, 80] та у підрозділах 2.4 — 2.6.

Отже, будемо мати, що у випадку $1 \le q \le 2 \le p < \infty$ має місце порядкове співвідношення

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \ e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Якщо $1 < p \le q \le 2$, то

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \ e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

При $1 \le p \le 2 \le q < \infty$ і $2 \le p \le q < \infty$ виконується порядкове співвідношення

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \ e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q.$$

Зауваження **3.1.** Поклавши в теоремах 3.1 – 3.5 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо відповідні результати для величин $G_m(W^r_{p,\beta})_q$, які раніше було отримано (як частковий випадок) В. М. Темляковим у роботі [117].

3.3. Найкращі білінійні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$

У цьому підрозділі встановлено точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних вигляду $g(x, y) = f(x - y)$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, що породжені із функцій однієї змінної $f(x) \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, зсувами аргументу на всеможливі $y \in [-\pi, \pi]$, у просторі L_{q_1,q_2}, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$.

Для величин, означених рівностями (3.5), має місце

Теорема 3.6. *Нехай* $1 < p \leq q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.14}$$

Доведення. Покажемо, що оцінка зверху в (3.14) слідує з оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$:

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1} \ll \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}, \tag{3.15}$$

$1 < p < q_1 \leq 2$, яка, в свою чергу, є наслідком оцінки наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх сумами Фур'є (теорема I).

Дійсно, з одного боку, згідно з оцінкою (3.15) для довільної функції $f(x)$ із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ і певної послідовності $\{n_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathbb{Z}$ маємо

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} \right\|_{q_1} \ll \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.16}$$

З іншого боку, для лівої частини (3.16) можемо записати

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j (x-y)} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} e^{-in_j y} \right\|_{q_1,\infty}. \qquad (3.17)$$

Співставивши (3.16) і (3.17), одержимо

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{m} c_j e^{in_j x} e^{-in_j y} \right\|_{q_1,\infty} \ll \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}, \qquad (3.18)$$

і поклавши в (3.18) $e^{in_j x} = u_j(x)$ і $e^{-in_j y} = v_j(y)$, приходимо до шуканої оцінки зверху.

Встановимо в (3.14) оцінку знизу. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-1} \le m < 2^l$ і розглянемо білінійне наближення функції $V_{2^{l+2}}(x-y)$. Нехай $C(N)$ — множина цілих чисел, що задовольняє умову $|k| \le N$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нехай системи функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^m$ і $\{v_j(y)\}_{j=1}^m$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, такі, що

$$\left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \le 2\tau_m (V_{2^{l+2}}(x-y))_{q_1,1}.$$

Оскільки для оператора Валле-Пуссена $\mathbf{V}_n$, який діє за формулою $\mathbf{V}_n[f] = f * V_n$, має місце рівність

$$\left\| \mathbf{V}_{2^{l+3}} \left[V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} u_j(x) v_j(y) \right] \right\|_{q_1,1} =$$

$$= \left\| V_{2^{l+2}}(x-y) - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{V}_{2^{l+3}}[u_j(x) v_j(y)] \right\|_{q_1,1}$$

і для $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, виконується нерівність (див., наприклад, [115], с. 91)

$$\|\mathbf{V}_n[f]\|_q \le 3\|f\|_q,$$

то можна вважати, що функції $u_j(x)$ і $v_j(y)$ є тригонометричними поліномами з номерами гармонік із множини $C(2^{l+3})$ і при цьому справедлива оцінка

$$\left\|V_{2^{l+2}}(x-y)-\sum_{j=1}^{m}u_j(x)v_j(y)\right\|_{q_1,1}\ll\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{q_1,1}. \qquad (3.19)$$

Таким чином, згідно з (3.19) і (2.10) можемо записати

$$\left\|V_{2^{l+2}}(x-y)-\sum_{j=1}^{m}u_j(x)v_j(y)\right\|_{2,1}\ll$$

$$\ll 2^{l(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\left\|V_{2^{l+2}}(x-y)-\sum_{j=1}^{m}u_j(x)v_j(y)\right\|_{q_1,1}\ll$$

$$\ll 2^{l(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{q_1,1}. \qquad (3.20)$$

Далі, беручи до уваги співвідношення між числами m і l, і використовуючи лему Г, із (3.20), знаходимо

$$\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{q_1,1}\gg$$

$$\gg 2^{-l(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\left\|V_{2^{l+2}}(x-y)-\sum_{j=1}^{m}u_j(x)v_j(y)\right\|_{2,1}\gg$$

$$\gg 2^{-l(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}m^{\frac{1}{2}}\asymp 2^{-l(\frac{1}{q_1}-1)}. \qquad (3.21)$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_9(x)=C_{24}\psi(2^l)2^{-l(1-\frac{1}{p})}V_{2^{l+2}}(x),\ C_{24}>0$$

і покажемо, що при певному виборі сталої $C_{24}>0$ вона належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_9)^{\psi}_{\beta}\|_p\ll 1$. З цією метою скориставшись теоремою Є і співвідношенням (3.9) одержимо

$$\|(f_9)^{\psi}_{\beta}\|_p\asymp\psi(2^l)2^{-l(1-\frac{1}{p})}\|(V_{2^{l+2}})^{\psi}_{\beta}\|_p\ll$$

$$\ll\psi(2^l)2^{-l(1-\frac{1}{p})}\psi^{-1}(2^{l+2})\|V_{2^{l+2}}\|_p\ll 1.$$

Звідси робимо висновок, що $f_9\in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Накінець, скориставшись оцінкою (3.21), можемо записати

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \geq \tau_m(f_9(x-y))_{q_1,1} \asymp$$
$$\asymp \psi(m)2^{-l(1-\frac{1}{p})}\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{q_1,1} \gg$$
$$\gg \psi(m)2^{-l(1-\frac{1}{p})} \cdot 2^{-l(\frac{1}{q_1}-1)} =$$
$$= \psi(m)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1})} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.22}$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Наступне твердження є наслідком результату одержаного в теоремі 3.6, а також відомих оцінок величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$.

Теорема 3.7. *Нехай* $1 < p \leq 2 \leq q_1 \leq \infty,\ 1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$, $1 < p \leq 2 < q_1 \leq \infty$ (теореми Й і теореми 2.7).

Відповідна оцінка знизу в (3.23) випливає з (3.14) при $q_1 = 2$ в силу нерівності $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{q_1},\ q_1 \geq 2$.

Теорема 3.8. *Нехай* $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty,\ 1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\ t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m). \tag{3.24}$$

Доведення. Оцінка зверху в (3.24) випливає з відповідних оцінок величин $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$, $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$, які одержані у теоремі К та теоремі 2.7.

Встановимо оцінку знизу. По заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \leq m < 2^{l-1}$ і розглянемо функцію

$$f_{10}(x) = C_{25}\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}R_l(x),\ C_{25} > 0,$$

де $R_l(x)$ — поліноми Рудіна-Шапіро.

Легко переконатися, що $f_{10} \in L^{\psi}_{\beta,p}$. Дійсно, згідно з теоремою Є та співвідношенням (2.36), можемо записати

$$\|(f_{10})^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp \psi^{-1}(2^l)\|f_{10}\|_p \ll$$
$$\ll 2^{-\frac{l}{2}}\|R_l\|_{\infty} \ll 2^{-\frac{l}{2}}2^{\frac{l}{2}} = 1.$$

Звідси випливає, що при належному виборі сталої $C_{25} > 0$ функція f_{10} належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Тепер, беручи до уваги, що поліноми R_l задовольняють умови леми Г і для них виконується оцінка

$$\tau_m(R_l(x-y))_{2,1} \gg m^{\frac{1}{2}},$$

отримуємо

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \geq \tau_m(f_{10}(x-y))_{2,1} \gg$$
$$\gg \psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}\tau_m(R_l(x-y))_{2,1} \gg \psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}m^{\frac{1}{2}} \asymp \psi(m).$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

На завершення цього підрозділу одержимо результат, який доповнює оцінку встановлену в теоремі 3.7 у випадку $p = 1$.

Теорема 3.9. *Нехай* $2 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (2.7) *або* (2.8) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{q_1,q_2} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}. \tag{3.25}$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 2.4.

Перейдемо до встановлення в (3.25) оцінки знизу і зауважимо, що при цьому достатньо розглянути випадок $q_1 = 2$.

За заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ з умови $2^{l-1} \leq m < 2^l$ і розглянемо функцію

$$f_{11}(x) = C_{26}\psi(2^l)V_{2^{l+2}}(x),\ C_{26} > 0.$$

Скориставшись твердженням Б та співвідношенням (3.9) можемо записати

$$\|(f_{11})^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \psi(2^l)\psi^{-1}(2^l) \ll 1.$$

Звідси робимо висновок, що $f_{11} \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_{26}.

Таким чином, врахувавши (3.21) та співвідношення між числами m і l, одержимо

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{2,q_2} \gg \tau_m(f_{11}(x-y))_{2,1} \asymp$$

$$\asymp \psi(2^l)\tau_m(V_{2^{l+2}}(x-y))_{2,1} \gg \psi(2^l)2^{\frac{l}{2}} \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Тепер наведемо деякі коментарі до отриманих результатів, порівнявши їх з оцінками колмогоровських поперечників.

Нагадаємо, що m-вимірним колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини Φ нормованого простору $\mathcal{X}$ називається величина

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{\mathcal{L}_m} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in\mathcal{L}_m} \|f-u\|_{\mathcal{X}}, \tag{3.26}$$

де $\mathcal{L}_m$ — довільний підпростір $\mathcal{X}$ розмірності m.

Далі нехай F — деякий клас функцій із L_1 і $f(x)$ — фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій виду

$f(x-y)$, які отримуються з $f(x)$ зсувом аргументу $x \in \mathbb{R}$ на довільний $y \in [-\pi, \pi]$, тобто

$$F_f = \{f(x-y),\ y \in [-\pi, \pi],\ f \in F\}.$$

Тоді, з одного боку, згідно означення колмогоровського поперечника, можемо записати

$$d_m(F, L_q) = \inf_{u_i(x)} \sup_{y \in [-\pi,\pi]} \inf_{v_i(y)} \|f(\cdot - y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y)\|_q \leq$$

$$\leq \inf_{\substack{u_i(x), v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \sup_{y \in [-\pi,\pi]} \|f(\cdot - y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y)\|_q =$$

$$= \inf_{\substack{u_i(x), v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \|f(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y)\|_{q,\infty} = \tau_m(f(x-y))_{q,\infty}. \qquad (3.27)$$

З іншого боку, справедлива також нерівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \leq d_m(F_f, L_q). \qquad (3.28)$$

Отже, відповідно до (3.27) і (3.28) має місце рівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} = d_m(F_f, L_q). \qquad (3.29)$$

Тепер, оскільки $F_f \subset F$, то згідно (3.29) можемо записати

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \ll d_m(F, L_q),\ f \in F.$$

Таким чином, співставляючи результати теорем 3.6 – 3.8 з відповідними результатами, отриманими (як частковий випадок) при дослідженні величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ у роботах [36, 37] отримуємо, що

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{q_1}).$$

Порівнюючи результати теорем 3.6 – 3.9 з результатами найкращого m-членного наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ наведеними у теоремах З, Й, К, 2.4, 2.6, 2.7, приходимо до висновку, що при тих самих обмеженнях на параметри p, q і ψ величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}$ та $\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2}$ співпадають за порядком, тобто

$$\tau_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1,q_2} \asymp e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{q_1}.$$

***Зауваження* 3.2.** Для класів $W^r_{p,\beta}$ відповідні до теорем 3.6 — 3.9 твердження (як частковий випадок) було одержано В. М. Темляковим (див., наприклад, [67, с. 101]).

Висновки до розділу 3

У цьому розділі встановлено точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів та білінійних наближень класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій.

А саме у підрозділі 3.2 встановлено точні за порядком оцінки гріді-алгоритмів класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q у випадках $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$, $1 < p \leq q \leq 2$, $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$, $2 \leq p \leq q < \infty$. Виявлено, що існують співвідношення між параметрами p та q для яких величини найкращих ортогональних тригонометричних наближень та гріді-алгоритмів мають однакові порядки, а також і такі, для яких вони відрізняються за порядком.

У підрозділі 3.3 одержано точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2}, якщо $1 \leq q_2 \leq \infty$, а p і q_1 пов'язані співвідношеннями $1 < p \leq q_1 \leq 2$, $1 \leq p \leq 2 \leq q_1 \leq \infty$, $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$. Також встановлено, що порядки найкращих білінійних наближень, колмогоровських поперечників та найкращих m-членних тригонометричних наближеннь класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у розглянутих ситуаціях співпадають.

Основні результати, які наведені у даному розділі, опубліковані у роботах [90, 92, 94, 97].

ВИСНОВКИ

1. Встановлено точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є та найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій $F_{\psi}(x,\beta)$, які є аналогами ядер Бернуллі у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

2. Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень, наближень сумами Фур'є, найкращих m-членних тригонометричних наближень, найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у метриці L_q, коли параметри p та q приймають граничні значення 1 та ∞.

3. Отримано порядкові оцінки гріді-алгоритмів для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q у випадках $1 \le q \le 2 \le p < \infty$, $1 < p \le q \le 2$, $\quad 1 \le p \le 2 \le q < \infty$, $\quad 2 \le p \le q < \infty$. Виявлено, що існують співвідношення між параметрами p та q для яких величини найкращих ортогональних тригонометричних наближень та гріді-алгоритмів мають однакові порядки, а також і такі, для яких вони відрізняються за порядком.

4. Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів функцій двох змінних, які породжені функціями однієї змінної з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ зсувами аргументу, у просторі L_{q_1,q_2} для деяких співвідношень між параметрами p, q_1 та q_2. Також встановлено, що порядки найкращих білінійних наближень, колмогоровських поперечників та найкращих m-членних тригонометричних наближеннь класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у розглянутих ситуаціях співпадають.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. / Н. И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 408 с.

2. Бабаев М.-Б. А. О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами / М.-Б. А. Бабаев // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 1. — С. 122 – 129.

3. Бабенко В. Ф. О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций / В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 5. — С. 683 – 689.

4. Белинский Э.С. Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э. С. Белинский // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун-т, 1984. — С.10 – 24.

5. Белинский Э. С. Приближение периодических функций многих переменных "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э. С. Белинский // Докл. АН СССР — 1985. — Т. 284, №6. — С. 1294 – 1297.

6. Белинский Э. С. Приближение "плавающей" системой експонент на классах периодических гладких функций / Э. С. Белинский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — Т. 180. — С. 46 – 47.

7. Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций. / Э. С. Белинский // Мат. сб. — 1987. — Т. 132, № 1. — С. 20 – 27.

8. Белинский Э. С. О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник / Э. С. Белинский, Э.М. Галеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1991. — №2. — С. 3 – 7.

9. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством полиномов данной степени / С. Н. Бернштейн — М.: Изд-во АН СССР, 1952.— Т. 1. — С. 8 – 105.

10. Бугров Я. С. Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной / Я. С. Бугров // Матем. сборник. — 1964. — Т. 64, №3. — С. 410 – 418.

11. Войтенко С. П. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. П. Войтенко // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 11. — С. 1473 – 1484.

12. Войтенко С. П. Найкращі тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних / Войтенко С. П. — Київ.: Ін-т математики НАН України, 2010. — 28 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т математики; 2010.1).

13. Грабова У. З. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій / У. З. Грабова, А. С. Сердюк// Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 9. — С. 1186 – 1197.

14. Дерев'янко Н. В. Тригонометричні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних / Н. В. Дерев'янко // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, №8. — С. 1041 – 1052.

15. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

16. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2 / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965.— Т.I. — 615 с.; Т.II — 537 с.

17. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами /Р. С. Исмагилов // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, № 3. — С. 161 – 178.

18. Кашин Б. С. О поперечниках классов Соболева малой гладкости / Б. С. Кашин // Вестн. Моск. ун-та Мат. и мех. — 1981. — № 5. — С. 50 – 54.

19. Кашин Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян // М.: Наука — 1984. — 496 с.

20. Кашин Б. С. О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков // Мат. заметки. — 1994. — Т. 56, № 5. — С. 57 – 86.

21. Конограй А. Ф. Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 9. — С. 1206 – 1224.

22. Консевич Н. М. Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q / Н. М. Консевич // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 7. — С. 898 – 907.

23. Консевич Н. М. Наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ тригонометричними поліномами в рівномірній метриці / Н. М. Консевич // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, — 2000. — Т. 31. — С. 260 – 268.

24. Консевич Н. М. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ / Н. М. Консевич // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 1. — С. 23–29.

25. Консевич Н. М. Тригонометричні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ функцій багатьох змінних / Н. М. Консевич // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 9. — С. 1292 – 1296.

26. Конягин С. В. О сходимости жадных аппроксимантов тригонометрических рядов Фурье / С. В. Конягин // Тр. ИММ. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 132–144.

27. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М.: Наука, 1987. —424 с.

28. Магарил-Ильяев Г. Г. Тригонометрические поперечники Соболевских классов функций на $\mathbb{R}^n$ / Г. Г. Магарил-Ильяев // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 147 – 155.

29. Майоров В. Е. Тригонометрические n-поперечники класса W_1^r в пространстве L_q / В. Е. Майоров // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. – М.: ЦЭМИ — 1976. — С. 199 – 208.

30. Майоров В. Е. О поперечниках классов функций заданных на прямой / В. Е. Майоров // Матем. заметки. — 1983. —Т. 34, №3. —

С. 355 – 366.

31. Майоров В. Е. Тригонометрические поперечники соболевских классов W_p^r в пространстве L_q / В. Е. Майоров // Матем. заметки. — 1986. — Т. 40, №2. — С. 161 – 173.

32. Мирошин Н. В. Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных / Н. В. Мирошин, В. В. Хромов // Матем. заметки. — 1982. — Т. 32, №5. — С. 721 – 727.

33. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН. Сер. матем. — 1946. —Т. 10, №3. — С. 207 – 256.

34. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

35. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля / В. Т. Пинкевич// Изв. АН. СССР Сер. матем. — 1940. — Т. 4, № 6. — С. 521 – 528.

36. Романюк А. С. Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Романюк // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92 – 105.

37. Романюк А. С. Оценки наилучших приближений и поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Приближение классов функций одной и многих переменных в метриках C и L_p — Киев, 1988. — С. 29 – 59 – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 88.14).

38. Романюк А. С. Неравенства типа Бора-Фавара и наилучшие M-членные приближения классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q / А. С. Романюк // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения: Сб. науч. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. — С. 98 – 108.

39. Романюк А. С. О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник / А. С. Романюк // Оптимизация методов приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1992.— С. 112-118.

40. Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ I / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, № 11. — С. 1535 – 1547.

41. Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1411 – 1423.

42. Романюк А. С. Тригонометрические поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ функций многих переменных в пространстве L_q / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №8. — С. 1089 – 1097.

43. Романюк А. С. Приближение классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Мат. заметки — 2002. — Т. 71, № 1. — С. 109-121.

44. Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Изв. РАН. Сер. матем. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 61 – 100.

45. Романюк А. С. Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Мат. сборник — 2006. — Т. 197, №1. — С. 71 – 96.

46. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 93. — 352 с.

47. Романюк А. С. Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №10. — С. 1348 – 1366.

48. Романюк А. С. Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского-Бесова / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 5. — С. 685 – 697.

49. Сердюк А. С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 8. — С. 1079 – 1096.

50. Сердюк А. С. Наближення лінійними методами класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій / А. С. Сердюк, І. В. Соколенко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 245 – 254.

51. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 12. — С. 1658 – 1675.

52. Сердюк А. С. Оцінки найкращих m-членних тригонометричних наближенть класів аналітичних функцій / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Доп. НАН України — 2015. — № 2. — С. 32 – 37.

53. Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 7. — С. 916 – 936.

54. Соліч К. В. Оцінки білінійних наближенть класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних / К. В. Соліч // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 8. — С. 1106 – 1120.

55. Стасюк С. А. Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №11. — С. 1557 – 1568.

56. Стасюк С. А. Найкращі $M-$членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, № 5. — С. 647 – 656.

57. Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. / А. И. Степанец. — Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.

58. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

59. Степанец А. И Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p / А. И. Степанец, А. К. Кушпель // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 4. — С. 483 – 492.

60. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. / А. И. Степанец // Праці Ін-ту математики НАН України, 2002. — Т. 40. — Ч.I. — 427 с.; Ч.II. — 468 с.

61. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102, №1. — С. 37 – 40.

62. Стечкин С. Б. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L / С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1967. — Т. 88. — С. 20 – 29.

63. Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I / С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — Т. 62. — С. 61 – 97.

64. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 3. — С. 291 – 300.

65. Теляковский С. А. О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости / С. А. Теляковский // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 510 – 518.

66. Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций / В. Н. Темляков // Изв. АН СССР, Сер. Матем. — 1985. — Т. 49, № 5. — С. 986 – 1030.

67. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной

производной / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1 – 112.

68. Темляков В. Н. Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций зависящих от меньшего числа переменных / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1986. — Т. 173. — С. 243 – 252.

69. Темляков В. Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения / В. Н. Темляков // Мат. сб. — 1987. — Т. 134(176). — С. 93 – 107.

70. Темляков В. Н. Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 250 – 267.

71. Темляков В. Н. О гриди-алгоритмах с ограниченной глубиной поиска / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2005. — Т. 248. — С. 262 – 274.

72. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 304 с.

73. Тихомиров В. М. Теория приближений / В. М. Тихомиров // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления, ВИНИТИ. — 1987. — Т. 14. — С. 103 – 260.

74. Тригуб Р. М. Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L / Р. М. Тригуб // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 306, №2. — С. 292 – 296.

75. Федоренко А. С. Наилучшие m-членные тригонометрические приближениях функций классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Федоренко // Ряди Фур'є: теорія і застосування. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 1998. — С. 356 — 364.

76. Федоренко А. С. О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной / А. С. Федоренко // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 1998. — Вип.3. — С. 250 — 258.

77. Федоренко А. С. Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 12. — С. 1719 – 1721.

78. Федоренко А. С. Наилучшие m-членные тригонометрические приближения классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной / А. С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 6. — С. 850 – 856.

79. Федоренко А. С. Про тригонометричні поперечники функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Федоренко // Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — Т. 31. — С. 128–134.

80. Федоренко А. С. Найкращі m-членні тригонометричні і ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Федоренко // Доп. НАН України — 2000. — № 7. — С. 27 – 31.

81. Федоренко О. С. Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами / О. С. Федоренко // Дис. канд. фіз.-

мат.н. — 2000. — 114 с.

82. Федоренко А. С. Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній метриці / А. С. Федоренко, О. С. Федоренко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України — Київ, 2003. — Т. 46. — С. 276 – 282.

83. Федоренко А. С. Найкращі m-членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ в рівномірній метриці / А. С. Федоренко, О. С. Федоренко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 129 – 132.

84. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 224–243.

85. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки для деяких апроксимативних характеристик / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 1. — С. 304–327.

86. Шидліч А. Л. Порядкові оцінки функціоналів, у термінах яких виражаються найкращі n-членні наближення класів $\mathcal{F}^{\psi}_{q,r}$ / А. Л. Шидліч // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 287–314.

87. Шкапа В. В. Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / В. В. Шкапа // Диференціальні рівняння і суміжні питання:

Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 305–317.

88. Шкапа В. В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ / В. В. Шкапа // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 315–329.

89. Шкапа В. В. Найкращі наближення аналогів ядер Бернуллі та класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 413–424.

90. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 299–312.

91. Шкапа В. В. Апроксимативні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / В. В. Шкапа // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 8. — С. 1139 – 1150.

92. Шкапа В. В. Найкращі тригонометричні і білінійні наближення класів (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 3. — С. 387 – 400.

93. Шкапа В. В. Оцінки найкращих m-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці / В. В. Шкапа // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. —

Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. — С. 217–218.

94. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій / В. В. Шкапа // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. — С. 91.

95. Шкапа В. В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ / В. В. Шкапа // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге. Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. — С. 120–121.

96. Шкапа В. В. Approximative characteristics of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functions in the space L_1 / В. В. Шкапа // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька. Тези доповідей. — Дрогобич, 2015. — С. 151.

97. Шкапа В. В. Гріді-алгоритми на класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / В. В. Шкапа // Міжнародна наукова конференція з нагоди 75-річчя В. П. Моторного. Тези доповідей. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, 2015. — С. 92.

98. Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy / E. S. Belinskii // Anal. Math. — 1989. — Vol. 15, № 2. — P. 67 — 74.

99. Belinskii E. S. Decomposition theorems and approximation by a "floating"system of exponentials / E. S. Belinskii // Transactions Of The American Mathematical Society. — 1998. — Vol. 350, № 1. — P. 43 — 53.

100. Bellinsky E. S. Fourier Analisis and Approximation of Functions / E. S. Bellinsky, R. M. Trigub. — Kluwer Academic Publishers, 2004. — 585 p.

101. Bohr H. Un theorem generale sur l'integration d'un polynome trigonometrique / H. Bohr // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1935. — Vol. 200. — P. 1276 — 1277.

102. Cordoba A. Convergence and divergence of decreasing rearranged Fourier series / A. Cordoba, P. Fernandez // SIAM J. Math. Anal. — 1998. — Vol. 29. — P. 1129 — 1139.

103. Davis G. Adaptive greedy approximations / G. Davis, S. Mallat, M. Avellaneda // Constr. Approx. — 1997. — Vol. 13. — P. 57 — 98.

104. DeVore R. A. Nonlinear approximation by trigonometric sums / R. A. DeVore, V. N. Temlyakov // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — Vol. 2, № 1. — P. 29 — 48.

105. DeVore R. A. Some remarks on greedy algorithms / R. A. DeVore, V. N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 1996. — Vol. 5. — P. 173 — 187.

106. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques / J. Favard // C.R. Acad. Sci. — 1936.— Vol. 203. — P. 1122 — 1124.

107. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funftionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung / D. Jackson. — Diss. Göttingen, 1911.

108. Kolmogoroff A. Zur Grössenordnung des restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen / A. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1935. — V. 36. — P. 521 – 526.

109. Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse / A. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1936. — V. 37. — P. 107 – 111.

110. Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz / H. Lebesgue // Bull. Soc. Math. France. — 1910. — Vol. 38. — P. 184 — 210.

111. Makovoz Y. On trigonometric n-widths and their generalization / Y. Makovoz // J. of approx. theory. — 1984. — Vol. 41. — P. 361 – 366.

112. Micchelli C. A. Some problem in the approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators / C. A. Micchelli, A. Pinkus // J. of approx. theory. — 1978. — Vol. 24. — P. 51 – 77.

113. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integraldeichungen I / E. Schmidt // Math. Ann. — 1907. — Vol. 63. — P. 433 – 476.

114. Stasyuk S. A. Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii-Besov classes for small

smoothness / S. A. Stasyuk // J. Approx. Theory — 2014. — Vol. 177. — P. 1 – 16.

115. Temlyakov V. N. Approximation of periodic functions / V. N. Temlyakov. — New York: Nova Science Publichers. Inc., 1993. — 272 p.

116. Temlyakov V. N. Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 1998. — Vol. 14. — P. 569 – 587.

117. Temlyakov V. N. Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 2000. — Vol. 16. — P. 399 – 425.

118. Temlyakov V. N. Greedy approximation / V. N. Temlyakov. — Cambridge: Cambridge University Press, 2011. — 418 p.

119. Wojtaszczyk P. Greedy algorithm for general biortogonal systems / P. Wojtaszczyk // J. Approx. Theory — 2000. — Vol. 107. — P. 293 – 314.