НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МЕРЕМЕЛЯ Ірина Юріївна

УДК 517.5

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА КЛАСАХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
САВЧУК Віктор Васильович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
Дніпропетровський університет
імені Альфреда Нобеля,
завідувач кафедри економічної кібернетики
та математичних методів в економіці;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
РАДЗІЄВСЬКА Олена Іванівна,
Національний університет харчових технологій,
доцент кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «20» вересня 2016 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ–4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «17» серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Роботу присвячено дослідженню екстремальних задач наближення голоморфних функцій у просторах Гарді узагальненим методом Зигмунда, а також обчисленню точних констант у нерівностях для коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних та екстремальних задач на класах обмежених голоморфних функцій.

Актуальність теми.

Теорія наближення є важливим розділом сучасного математичного аналізу, який інтенсивно розвивається вже понад сто років. З часу основоположних теорем К. Вейєрштраса (1885) і К. Рунге (1885) теорія наближення розгалужується на два напрями – дійсний і комплексний. Попри ідентичність постановок задач у обох напрямках теорії, методи їх розв'язання часто виявляються різними, як і сам вигляд результатів. Так, наприклад, у 1962 році Л. В. Тайков показав, що критерій регулярності методу підсумовування рядів Фур'є, породженого нижньотрикутною числовою матрицею, в дійсному випадку не є критерієм регулярності у комплексному випадку. Це, зокрема, означає, що один і той самий лінійний метод підсумовування рядів Фур'є може мати суттєво різні апроксимативні властивості у дійсному та комплексному випадках. З огляду на це, з'ясування всіляких таких відмінностей між наближенням тим чи іншим лінійним методом у дійсному і комплексному випадках є цікавою та актуальною задачею.

Галузь теорії наближення, що пов'язана з дослідженнями апроксимативних властивостей середніх рядів Фур'є, значною мірою розвинута для класів функцій дійсної змінної. Стосовно ж функцій комплексної змінної подібних досліджень проведено значно менше. Тут слід згадати основоположні результати А. Зигмунда та С. Б. Стєчкіна. Зокрема, А. Зигмунд (1945) показав, що будь-яку неперервну 2π-періодичну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з додатнім спектром Фур'є (тобто зі степеневим рядом Фур'є: $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}$) і таку, що $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \le 1$, можна наблизити її середніми Фейєра $\sigma_n(f)$ з порядковою похибкою n^{-1}, тобто

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k e^{ikx} \right| \le \frac{A}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де A – певна абсолютна константа. З другого боку, для всіх таких самих 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, але з повним спектром

Фур'є справджується непокращувана (в сенсі порядку) нерівність

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)-\sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}_k e^{ikx}\right|\le B\frac{\ln n}{n},\quad n\in\mathbb{N},$$

де B – певна абсолютна константа.

Це, мабуть, історично перший випадок, коли у науковому дослідженні було явно з'ясовано відмінності між наближеннями одним і тим самим методом у дійсному та комплексному випадках.

З тих пір було порівняно мало результатів наукових досліджень, присвячених подібним питанням. Зокрема, С. Б. Стєчкін (1953) показав, що похибки наближення частинними сумами на класах 2π-періодичних функцій зі степеневими рядами Фур'є та на класах дійснозначних 2π-періодичних функцій збігаються за порядком, а їх асимптоти на нескінченності можуть відрізнятися одна від одної щонайбільше на константу $4/\pi$. Подібний ефект має місце і щодо найкращих лінійних методів наближення, як це випливає з результатів Л. В. Тайкова (1963, 1977), Дж. Шейка (1966), К. Ю. Осіпенка (1976), С. Б. Вакарчука (1994, 2002) і В. В. Савчука (2007).

А. Зигмунд (1945) з'ясував, що типові середні рядів Фур'є (рядів Тейлора) 2π-періодичних функцій дають відносно простий, але досить ефективний метод наближення, який враховує гладкість функції. Зокрема, він показав, що для будь-яких $r>0$ і $s\ge -r$ справджується співвідношення

$$\sup_{f\in H_\infty^{r+s}}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^r\right)\widehat{f}_k z^k\right|\le\frac{A_{r,s}}{n^\gamma}\quad\forall\, n\in\mathbb{N},\tag{1}$$

де $\gamma:=\min(r,r+s)$, $A_{r,s}$ – константа, залежна тільки від вказаних параметрів, і H_∞^{r+s} – клас голоморфних у крузі $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функцій f, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|D^{r+s}f(z)\right|\le 1,\ \ D^{r+s}f(z):=i^{r+s}\sum_{k=1}^{\infty}k^{r+s}\widehat{f}_k z^k,\ \ \widehat{f}_k:=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

В 2011 р. В. В. Савчук обчислив точне значення величини у лівій частині (1) при $r=1$ і $s\ge 1$:

$$\sup_{f\in H_\infty^{1+s}}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\widehat{f}_k z^k\right|=\frac{1}{n}\quad\forall\, n\in\mathbb{N}.\tag{2}$$

З огляду на ці результати природно виникає задача дослідження наближень узагальненим методом Зигмунда, який породжується трикутною матрицею $(1-\psi_n/\psi_k)_{k,n}$, де $\psi=\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}, \psi_0=1,$ – задана послідовність комплексних чисел, відмінних від нуля, на предмет описання класу голоморфних функцій $\mathfrak{A}$, для якого виконується рівність

$$\sup_{f\in\mathfrak{A}}\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\psi_n}{\psi_k}\right)\widehat{f}_k z^k\right|=|\psi_n|\quad \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язок цієї задачі повністю вирішує питання про точне значення мінімальної похибки наближення узагальненим методом Зигмунда на класі голоморфних функцій і, до того ж, вказує найширший клас, на якому ця похибка досягається.

Задачі про коефіцієнти голоморфних функцій займають одне з центральних місць сучасної теорії екстремальних задач. Серед найяскравіших досягнень у цій області слід згадати знаменитий результат Л. де Бранжа (1984) у доведенні гіпотези Бібербаха про точну оцінку коефіцієнтів Тейлора однолистих функцій в одиничному крузі. Серед результатів про точні оцінки (у сенсі точних констант) коефіцієнтів Тейлора для різноманітних класів голоморфних функцій переважна більшість стосуються функцій однієї змінної. У багатовимірному ж випадку теорія екстремальних задач для голоморфних функцій перебуває у зародковому стані. Тому дослідження з екстремальних задач, зокрема, точних оцінок коефіцієнтів Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних, мають значний науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою "Теорія наближень в лінійних просторах", номер державної реєстрації 0111U002079.

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є дослідження апроксимативних властивостей узагальнених середніх Зигмунда, розв'язання екстремальних задач наближення голоморфних функцій у просторах Гарді, таких як обчислення точних констант у нерівностях для коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних та оцінок змішаних похідних голоморфних функцій у полікрузі.

Об'єктом дослідження є класи голоморфних функцій, екстремальні задачі наближення голоморфних функцій, лінійні методи наближення голоморфних функцій, оцінки коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій.

Предметом дослідження є точне значення мінімальної похибки наближення узагальненим методом Зигмунда на класі голоморфних функцій, відшукання точних оцінок коефіцієнтів Тейлора на класах голоморфних функцій.

Завдання дослідження:

1. Встановити асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1}\phi_{k+1} z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайти необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, за яких суми $Z_{n,\psi}(f)$ наближають клас $H_p^{\psi\phi}$ з мінімально можливою похибкою $|\psi_n|$.

2. Дослідити мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних у одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислити точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

4. Розв'язати задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку прямокутних частинних сум порядку $(1,1)$ двократного ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримати точну оцінку змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні зі сучасною методикою, розробленою у роботах А. С. Макентайра, В. В. Рогозинського та В. В. Савчука.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1}\phi_{k+1} z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайдено необхідні та достатні

умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

2. Досліджено мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних у одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислені точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

4. Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку прямокутних частинних сум порядку $(1,1)$ двократного ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримано точну оцінку змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані у подальших дослідженнях у екстремальних задачах голоморфних функцій однієї та багатьох змінних.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук В. В. Савчуку. Результати робіт [1,2,4] отримано спільно з науковим керівником. Результати роботи [3] отримано спільно з М. В. Савчук. Внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор А.С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару – доктори фізико–математичних наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко);

— міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Кам'янець-Подільський, 28 травня–3 червня 2012 року;

— IV міжнародній конференції "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA – 2012), Мерсін, Туреччина, 4–9 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції, присвяченій 120–річчю Стефана Банаха, Львів, 17–21 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— міжнародній конференції ”Диференціальні рівняння. Функціональні простори. Теорія наближень”, присвяченій 105–річчю з дня народження С. Л. Соболєва, Новосибірськ, Росія, 18–24 серпня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції ”Complex Analysis and Related Topics”, Львів, 23–28 вересня 2013 року;

— міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування", присвяченій 60-річчю В. І. Рукасова (1953–2009), Слов'янськ, 21–24 травня 2014 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у тринадцяти наукових працях, з яких п'ять є статтями у виданнях, що належать до переліку ДАК МОН'у фахових наукових видань [1 – 5], а вісім опубліковано у матеріалах восьми міжнародних наукових конференцій [6 – 13]. Статтю [4] опубліковано у журналі, який входить до наукометричної бази даних (Scopus).

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань. Повний обсяг роботи складає 117 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У першому розділі дисертаційної роботи проведено огляд літератури за темою дослідження. У підрозділі 1.1 подано основні відомості про лінійні методи підсумовування рядів Тейлора голоморфних функцій, розглянуто задачу Колмогорова–Нікольського та наведено основоположні результати стосовно наближень сумами Зигмунда. Підрозділ 1.2 присвячено огляду літератури з екстремальних задач у просторі Гарді, зокрема, оцінок модулів голоморфних функцій, а також у ньому описано метод Макентайра–Рогозинського оцінок, модулів функцій класу Гарді. У підрозділі 1.3 зроблено огляд результатів стосовно оцінок коефіцієнтів голоморфних функцій у полікрузі.

Другий розділ присвячено розв'язанню екстремальної задачі наближення голоморфних функцій узагальненим методом Зигмунда.

У підрозділі 2.1 знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень від класів голоморфних функцій $H_p^{\psi\phi}$ узагальнених сум Зигмунда.

Нехай $\mathcal{H}$ — множина функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, H_p, $1 \le p \le \infty$, — простір Гарді і UH_p — одинична куля в H_p, тобто

$$UH_p := \left\{ f \in \mathcal{H} : \|f\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<\rho<1} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, & p \ge 1, \\ \\ \sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi_k| > 0$. Узагальненими сумами (середніми) Зигмунда функції $f \in \mathcal{H}$ називаються многочлени вигляду

$$Z_{n,\psi}(f)(z) := \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi_n}{\psi_k}\right) \widehat{f}_k z^k, \; n \in \mathbb{N}, \qquad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Означимо на $\mathcal{H}$ оператор узагальненого диференціювання D^{ψ} правилом

$$D^{\psi}(f)(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_k}{\psi_k} z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тоді $D^{\psi\phi} := D^{\psi}\left(zD^{\phi}\right)$, а під класом $H_p^{\psi\phi}$ будемо розуміти множину функцій $f \in \mathcal{H}$, для яких $\|D^{\psi\phi}(f)\|_{H_p} \le 1$.

У підрозділі 2.1.1 знайдено точні оцінки наближення функцій з класів $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}$, а також розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського (задачу К–Н) для величини

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) := \sup\{\|f - Z_{n,\psi}(f)\|_{H_p} : f \in H^{\psi\phi}\}.$$

Нагадаємо, що задача К–Н полягає у знаходженні пари (μ, ν) функцій натурального аргументу таких , що $\nu(n) = o(\mu(n))$, $n \to \infty$, і

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = \mu(n) + O(\nu(n)), \quad n \to \infty.$$

Теорема 2.1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$,

$$\psi_k = \int_0^1 \rho^{k-1} d\lambda(\rho), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

де λ *– обмежена неспадна функція на* $[0,1]$ *така, що* $\int_0^1 d\lambda = 1$, *і* ϕ *— послідовність комплексних чисел така, що для всіх натуральних* n, *починаючи з деякого* n_0,

$$\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_{k+n}}{\phi_n} z^k \ge 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{4}$$

Тоді для будь-якої функції $f \in H_p^{\psi\phi}$ *справджується співвідношення*

$$f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) = \psi_n z D^{\psi}(f)(z) + \varepsilon_n(z,f) \quad \forall\ n \ge n_0,\ z \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

де

$$\|\varepsilon_n(\rho\ \cdot, f)\|_{H_p} \le \rho^n |\phi_n| \left(\psi_n + \psi_{[\frac{n+1}{2}]}\right)\ \forall\ n \ge n_0,\ \rho \in [0,1],$$

$[\cdot]$ *— ціла частина числа.*

Беручи у формулі (5) супремум по класу $H_p^{\psi\phi}$, одержимо такий

Наслідок 2.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.1, при цьому умова (4) виконується для всіх* $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n = O(\psi_{2n})$, $\phi_1 = 1$ *і* $\phi_n = o(1)$. *Тоді*

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = \psi_n + O\left(|\phi_n|\psi_n\right), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Співвідношення (6) є розв'язком задачі К–Н у вказаних випадках.

У загальному випадку, коли не виконується умова $\psi_n = O(\psi_{2n})$, має місце така

Теорема 2.2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* ψ *— послідовність така, як в теоремі 2.1. Тоді*

$$\psi_n \le \mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi}; H_p\right) \le \psi_{[\frac{n+1}{2}]} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

У наступному твердженні дано опис множини всіх послідовностей ϕ, для яких при заданій послідовності ψ справджується рівність

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}(H^{\psi\phi}_\infty; H_\infty) = |\psi_n|, \tag{8}$$

тобто, коли узагальнені суми Зигмунда $Z_{n\psi}$ наближають клас $H^{\psi\phi}_\infty$ з мінімально можливою похибкою.

Теорема 2.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ і $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовності комплексних чисел таких, що $\psi_1 = \phi_1 = 1$ і $|\psi_k| > 0$, $|\phi_k| > 0$. Рівність (8) справджується тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \phi_{k+1} z^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_{k+1}\phi_{k+1}}{\psi_n} z^k\right) \geq 0^1 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{9}$$

За умови (9) для будь-якого $p \geq 1$

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H^{\psi\phi}_p; H_p\right) = |\psi_n|. \tag{10}$$

Наступне твердження узагальнює та доповнює відомі результати А. Зигмунда (1945), С. Б. Стєчкіна (1953) та В. В. Савчука (2011) про наближення середніми Фейєра та типовими середніми рядів Тейлора.

Наслідок 2.2. *Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $r, s \geq 0$ і $r + s > 0$. Тоді*

$$\mathcal{Z}_{n,r}\left(H^{r+s}_p; H_p\right) = \begin{cases} n^{-r} + O\left(n^{-(r+s)}\right), & 0 \leq s < 1, \\ n^{-r}, & s \geq 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

У підрозділі 2.2 показано, що існують послідовності ψ і ϕ, які задовольняють умови теореми 2.1, але не задовольняють умови теореми 2.3 і навпаки. Цим доведено, що теорема 2.1 не може бути наслідком теореми 2.3 взагалі кажучи. Також наведено просту достатню умову, за якої справджується співвідношення (9).

Підрозділ 2.3 присвячений дослідженню мажорант залишків рядів Тейлора обмежених голоморфних функцій.

Нехай $B = UH_\infty$, тобто це клас функцій f, голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$.

---
[1]при $n = 1$ перша сума покладається рівною нулеві

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо функцію R_n, визначену на відрізку $[0,1]$ правилом

$$R_n(\rho) := \begin{cases} \sup\{|f(\rho) - S_n(f)(\rho)| : f \in B\}, & \rho \in [0,1), \\ \\ \sup\{|f(z) - S_n(f)(z)| : f \in B,\ z \in \mathbb{D}\}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція R_n є мажорантою залишків рядів Тейлора функцій класу B.

В. В. Савчук (2011) показав, що

$$\rho^{-n} R_n(\rho) = \rho + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 \rho^{2k} + \varepsilon_n(\rho), \tag{11}$$

де $\varepsilon_n(\rho)$ — деяка величина така, що $|\varepsilon_n(\rho)| \le 1$, а сума при $n = 1$ покладається рівною нулю.

Легко бачити, що сума у правій частині (11) є зростаючою функцією аргумента ρ на відрізку $[0,1]$. У зв'язку з цим результатом природно виникає питання про поведінку функцій $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ і $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$ на відрізку $[0,1]$.

Теорема 2.4. *Функції $\rho \mapsto R_n(\rho)$ і $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ зростають на $[0,1]$, причому*

$$1 < \rho^{-n} R_n(\rho) \ \forall\ \rho \in (0,1].$$

Наслідок 2.3. *Функція $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$, де $\varepsilon_n(\rho)$ визначається співвідношенням (11), є функцією обмеженої варіації на $[0,1]$, причому*

$$\lim_{\rho \to 0+} \varepsilon_n(\rho) = 1.$$

Третій розділ дисертації присвячено отриманню точних оцінок коефіцієнтів Тейлора та модулів голоморфних функцій у полікрузі.

Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх впорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1 \le j \le m} |z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг. Нехай далі $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{D}^d)$ – множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}^d$, $B = B(\mathbb{D}^d)$ – клас функцій $f \in \mathcal{H}$, для яких $\sup\limits_{\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d} |f(\mathbf{z})| \le\ 1$ і

$$\widehat{f}_{\mathbf{k}} := \frac{1}{\mathbf{k}!} \left(\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_d^{k_d}} \right)_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}$$

– коефіцієнти Тейлора функції f, де $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ – мультиіндекс, $k_j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{1, d}$, $\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_d!$, $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_d$ і $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$.

У підрозділі 3.1 обчислено для даних мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ величини

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|}{1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2} : f \in B \right\}$$

і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X) := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|}{1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|} : f \in X \right\},\ X \subset \mathcal{H},\ L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(B) =: L_{\mathbf{m},\mathbf{n}},$$

які є точними константами у нерівностях для коефіцієнтів Тейлора при мультиіндексах $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ функцій з $\mathcal{H}(\mathbb{D}^d)$:

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2\right) \quad \forall\ f \in B, \tag{12}$$

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X) \left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right) \quad \forall\ f \in X \subset \mathcal{H}. \tag{13}$$

Відомо (це випливає з результатів Ф. Вінера і Е. Ландау), що у випадку $d = 1$ $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$ і $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 2$, якщо $n \geq 2m + 1, m \in \mathbb{Z}_+$. Нами виявлено такий ефект: на відміну від одновимірного випадку, величини констант $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ залежать від того, як співвідносяться між собою компоненти мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

Теорема 3.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ – різні мультиіндекси. Тоді:*

1) якщо у мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j + 1$, то

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

2) якщо $d \geq 2$, а у мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j + 1$ і одна компонента n_i, яка задовольняє умову $n_i \leq (m_i - 1)/2$, то

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

3) якщо мультиіндекс $\mathbf{n}$ *задовольняє умову* $n_j \geq m_j$, $j = 1, \ldots, d$ *і хоча б для однієї компоненти* n_i *виконується умова* $n_i \geq 2m_i + 1$, *то*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 2.$$

У підрозділі 3.2 розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних функцій у бікрузі. Так називатимемо екстремальну задачу про обчислення точного значення величини

$$\sup\left\{\left|\sum_{(k,l)\in\gamma} \mu_{k,l}\widehat{f}_{k,l}\right| : f \in X\right\},$$

де $\{\mu_{k,l}\}$ — двократна комплексна послідовність, γ — деяка скінченна підмножина $\mathbb{Z}_+^2$, а X — деякий підклас $B(\mathbb{D}^2)$, а також задачу про знаходження екстремальної функції, на якій досягається точна верхня межа.

Вперше таку задачу при $d = 1$, $\mu_0 = \mu_1 = 1$, і $\mu_k = 0, k \geq 2$ розв'язав Д. Помпея (1912):

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_0 + \widehat{f}_1\right| : f \in B\right\} = \frac{5}{4}.$$

Е. Ландау (1913) показав, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_0 + \widehat{f}_1 + \cdots + \widehat{f}_n\right| : f \in B\right\} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2.$$

У загальному випадку при $d = 1$ О. Сас (1918) показав, що для будь-якого цілого $n \geq 0$ і довільної пари комплексних послідовностей $\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ та $\{\mu_j\}_{j=0}^n$, пов'язаних системою рівностей

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j \lambda_{n-k-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

справджується співвідношення

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} \mu_k \widehat{f}_k\right| : f \in B\right\} \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|^2,$$

яке за умови, що многочлен $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k$ не має коренів у замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ перетворюється у рівність.

Нами помічено, що у випадку, коли γ є трикутною областю в $\mathbb{Z}_+^2$, тобто $\gamma = \{(k,l) : k,l \geq 0, k+l \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язання екстремальної задачі Помпея–Ландау–Саса у бікрузі зводиться до одновимірного випадку, описаного вище. Для інших випадків γ задача є дуже складною і потребує оригінального методу розв'язування.

У дисертації розв'язано задачу П–Л–С у випадку, коли $\gamma = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ і $\mu_{k,l} = 2\rho_1^{1-l}\rho_2^{1-k}$, $\mu_{1,1} = 1$.

Теорема 3.2. *Нехай* $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ *і* $|\rho_1| + |\rho_2| < 1$. *Тоді*

$$\max\left\{\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0} + \rho_1\widehat{f}_{1,0} + \rho_2\widehat{f}_{0,1}) + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Максимум досягається для функції

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2) := \frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1}.$$

Безпосередньо звідси при $\rho_1 \to \rho_2 \to \frac{1}{2}$ випливає такий

Наслідок 3.1. *Мають місце рівності*

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right| + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\widehat{f}_{0,0} + \widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = \frac{3}{2},$$

де $B^0(\mathbb{D}^2) := \{f \in B : \widehat{f}_{0,0} = 0\}$.

Точні верхні межі досягаються на послідовності функцій $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}_{|\rho_1|+|\rho_2|<1}$.

Окрему групу екстремальних задач становлять задачі, в яких вимагається оцінити модуль похідної голоморфної функції у кожній точці голоморфності через норму самої функції в заданому банаховому просторі.

У підрозділі 3.3 розв'язано таку задачу для голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі $\mathbb{D}^d$, а саме: знайдено точну оцінку змішаної похідної голоморфної функції з H_1.

Покладемо $\mathbf{D}(f) := \partial^d f/(\partial z_1 \cdots \partial z_d)$.

Теорема 3.3. *Нехай функція* $f \in H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-яких* $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$

$$|\mathbf{D}(f)(\mathbf{z})| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1+|z_j|^2}}{(1-|z_j|^2)^2}. \tag{14}$$

Рівність в (14) досягається для функції

$$f(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{(1-\overline{y}_j w_j)^2}{(1-\overline{z}_j w_j)^4}, \tag{15}$$

де $y_j := z_j - e^{i \arg z_j}(1-|z_j|^2)/\sqrt{1+|z_j|^2}$.

Теорема 3.3 є поширенням відомої теореми А. Макентайра та В. Рогозинського на багатовимірний випадок.

Висновки

1. Встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$. Знайдено необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

2. Досліджено мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислено точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду $\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$ для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ и $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

4. Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку частинних сум ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримано точну оцінку для змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Meremelia I. Yu. Approximations of holomorphic functions by generalized Zygmund sums / I. Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. — 2013. — **1**, №1. — P. 70 – 81.

2. Меремеля І. Ю. Точна оцінка змішаної похідної голоморфної функції в полікрузі / І. Ю. Меремеля, М. В. Савчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 161 – 168.

3. Меремеля І. Ю. Мажоранти залишків рядів Тейлора обмежених голоморфних функцій / І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 182 – 188.

4. Меремеля І. Ю. Точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених голоморфних функцій у полікрузі / І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №12. — С. 1690 – 1697.

5. Меремеля І. Ю. Екстремальна задача Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних функцій в бікрузі / І. Ю. Меремеля // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 216 – 225.

6. Meremelia I. Yu. Approximation of holomorphic functions by Zygmund means / I. Yu. Meremelia , V. V. Savchuk // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70–річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 28 травня–3 червня 2012 р., Кам'янець–Подільський, Україна: Тези доповідей. — К.: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 109 – 110.

7. Meremelia I. Yu. Approximation of holomorphic functions by generalized Zygmund means / I. Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // IV International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA – 2012), Mersin–Turkey, September 04–09, 2012: Abstracts. — Mersin: Mersin University and The Scientific and Technical Council of Turkey, 2012. — P. 58.

8. Meremelia I. Yu. Approximation of holomorphic functions by means of Zygmund type / I. Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 17–21 September 2012.: Abstracts of Reports. — Lviv: Ivan Franko National University, 2012. — P. 146 – 147.

9. Меремеля І. Ю. Оцінка змішаної похідної голоморфної функції в полікрузі / І. Ю. Меремеля, М. В. Савчук // Міжнародна наукова конференція "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30

червня, 2013 р.: Тези доповідей. — К.: Інститут математики НАН України, 2013. — С. 251 – 252.

10. Меремеля И. Ю. Оценка смешанной производной голоморфной функции в поликруге /И. Ю. Меремеля, М. В. Савчук // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 105–летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 18–24 августа, 2013: Тезисы докладов. — Новосибирск, 2013. — С. 398.

11. Меремеля І. Ю. Екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій / І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук // Міжнародна наукова конференція "Complex Analysis and Related Topics", Львів, 23–28 вересня, 2013 р. — Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2013. — С. 105 – 107.

12. Меремеля І. Ю. Екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій / І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук // Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування", присвячена 60-річчю В. І. Рукасова (1953–2009), Слов'янськ, 21 – 24 травня, 2014 р.: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014. — С. 47.

13. Меремеля І. Ю. Екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій / І. Ю. Меремеля, В. В. Савчук // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 р.: Тези доповідей. — Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. — С. 128 – 129.

Анотації

Меремеля І. Ю. Лінійні методи наближення та екстремальні задачі на класах голоморфних функцій. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2016.

У дисертації встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$. Знайдені необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

Досліджено мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обме-

жених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

Обчислено точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду $\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$ для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ и $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку частинних сум ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі та екстремальну задачу про обчислення величини $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\sup_{t\in\mathbb{D}}|f(t)| \le 1$.

Одержано точну оцінку для змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Ключові слова: найкраще наближення, узагальнені суми Зигмунда, точна оцінка, обмежена голоморфна функція, простір Гарді, змішана похідна, полікруг.

Меремеля И. Ю. Линейные методы приближения и экстремальные задачи на классах голоморфных функций. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации установлено асимптотическое равенство для верхних граней отклонений обобщенных сумм Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функциональных классах $H_p^{\psi\phi}$. Найдены необходимые и достаточные условия для последовательности $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которые обеспечивают минимально возможную погрешность $|\psi_n|$ приближения класса $H_p^{\psi\phi}$ суммами $Z_{n,\psi}(f)$.

Исследовано мажоранту остатков рядов Тейлора на классе ограниченных голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций.

Вычислены точные константы $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ в неравенствах вида $\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$ для пар коэффициентов Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ и $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на некоторых классах X ограниченных голоморфных функций в поликруге.

Решена задача Помпея–Ландау–Саса об оценке частичных сумм ряда Тейлора ограниченных голоморфных функций в бикруге и экстремальную задачу о вычислении величины $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, на классе ограниченных голоморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций f, для которых $\sup_{t\in\mathbb{D}}|f(t)| \le 1$.

Получено точную оценку для смешанной производной голоморфных функций с пространства Харди H_1 в поликруге.

Ключевые слова: наилучшее приближение, обобщенные суммы Зигмунда, точная оценка, ограниченная голоморфная функция, пространство Харди, смешанная производная, поликруг.

Meremelia I. Yu. Best approximations and extremal problems of classes of holomorphic functions. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis there was determined the asymptotic equality for the upper bounds of deviations of generalized Zygmund sums $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ on the functional classes $H_p^{\psi\phi}$ that are convolution of unit ball of the Hardy space H_p with kernels $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$ in case when $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ are the moment sequence. And also were given necessary and sufficient conditions on the sequence $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ under which the sums $Z_{n,\psi}(f)$ approximate the class $H_p^{\psi\phi}$ with minimal possible error $|\psi_n|$.

The behavior on the interval $[0, 1]$ the majorant R_n of the n–remainders of Taylor's series for bounded holomorphic functions in the unit disk $\mathbb{D}$ is studied.

The exact constants $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ in the inequalities of the form $\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$ for the pairs of Taylor coefficients $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ and $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ on some classes X of bounded holomorphic functions in a polydisk are determined.

The solution of Pompéiu–Landau–Szász's problem for partial sums of Taylor series of bounded holomorphic functions in the bidisk is finded.

For the Hardy space H_1 of holomorphic functions in the polydisk the exact inequalities of mixed derivatives is obtained.

Give some of the results of this work.

Theorem 2.3. *Suppose $n \in \mathbb{N}$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ and $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ are sequences of complex numbers such that $\psi_1 = \phi_1 = 1$ and $|\psi_k| > 0$, $|\phi_k| > 0$. Equality (8) holds true if and only if*

$$\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \phi_{k+1}z^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_{k+1}\phi_{k+1}}{\psi_n} z^k\right) \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \qquad (16)$$

Provided (16) for any $p \geq 1$

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = |\psi_n|.$$

Denote by H_p^{r+s} class $H_p^{\psi\phi}$ when $\psi_k = k^{-r}$ and $\phi_k = k^{-s}$ and let while still $\mathcal{Z}_{n,r} := \mathcal{Z}_{n,\psi}$. Note that in sucha case

$$D^{\psi\phi}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{r+s}\widehat{f}_{k+1}z^k.$$

Corollary 2.2. *Let* $1 \leq p \leq \infty$, $r, s \geq 0$ *and* $r+s > 0$. *Hence*

$$\mathcal{Z}_{n,r}\left(H_p^{r+s}; H_p\right) = \begin{cases} n^{-r} + O\left(n^{-(r+s)}\right), & 0 \leq s < 1, \\ n^{-r}, & s \geq 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Theorem 3.1. *Let* $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}$ *i* $\mathbf{n}$ *are different multiindexes. Then:*

1) if in multiindex $\mathbf{n}$ *exists even one component* n_j *satisfying the condition* $n_j \geq 2m_j + 1$, *then*

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

2) if $d \geq 2$, *and in multiindex* $\mathbf{n}$ *exists even one component* n_j *satisfying the condition* $n_j \geq 2m_j + 1$ *and one component* n_i *satisfying the condition* $n_i \leq (m_i - 1)/2$, *then*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

3) if multiindex $\mathbf{n}$ *satisfies the condition* $n_j \geq m_j$, $j = 1, \ldots, d$ *and even for one component* n_i *executed the condition* $n_i \geq 2m_i + 1$, *then*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 2.$$

Corollary 3.1. *Have a place equalities*

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\widehat{f}_{0,0} + \widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = \frac{3}{2},$$

where $B^0(\mathbb{D}^2) := \{f \in B : \widehat{f}_{0,0} = 0\}$.

Exact upper bounds are achieved for the sequence of functions $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}_{|\rho_1|+|\rho_2|<1}$.

Key words: best approximation, bounded holomorphic function, generalized Zygmund sums, polydisk, mixed derivative estimate.

Підп. до друку 05. 07. 2016. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,1. Ум. друк. арк. 0,95. Тираж 100 пр. Зам. 41.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.