НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МЕРЕМЕЛЯ ІРИНА ЮРІЇВНА

УДК 517.5

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА КЛАСАХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

Д и с е р т а ц і я
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
САВЧУК ВІКТОР ВАСИЛЬОВИЧ
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Київ — 2016

Зміст

Перелік умовних позначень

Базові позначення

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\sup\limits_{x\in A} F(x)$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині A;

$\inf\limits_{x\in A} F(x)$ — точна нижня межа значень функціонала F на множині A;

$\|f\|_X$ — норма функції $f(\cdot)$ в просторі X;

U_p — одинична куля в просторі L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

$\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1\leq j\leq m} |z_j| < 1\}$ – одиничний полікруг;

$\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j = \overline{1,d}\}$ – кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$.

Лінійні нормовані простори

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

$L_p(\mathbb{T}),\ 1 \leq p \leq \infty$, – простір сумовних на $\mathbb{T}$ відносно σ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|, & p = \infty; \end{cases}$$

H_p – простір Гарді голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \displaystyle\sup_{0<\varrho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho z)|^p d\sigma(z)\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \\ \displaystyle\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty; \end{cases}$$

$A(\mathbb{D})$ — простір функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ з нормою $\|f\|_{A(\mathbb{D})} = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$.

Апроксимуючі агрегати

$\widehat{f}_k := \int_{\mathbb{T}} f(t)t^{-k}d\sigma(t)$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in L_1(\mathbb{T})$, або
$\widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ — коефіцієнти Тейлора голоморфної функції;

$S_n(f)(z)$ — сума Тейлора функції f порядку n;

$\sigma_n(f)(z)$ — сума Фейєра голоморфної функції f порядку n, тобто поліноми

$$\sigma_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k z^k;$$

$Z_n^s(f)(z)$ — суми Зигмунда голоморфної функції f порядку n, тобто поліноми

$$Z_n^s(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right) \widehat{f}_k z^k, \ s > 0;$$

$$Z_n^{\psi}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi_n}{\psi_k}\right) \widehat{f}_k z^k$$

— узагальнені суми Зигмунда.

Вступ

Актуальність теми. Роботу присвячено дослідженню екстремальних задач наближення голоморфних функцій у просторах Гарді узагальненим методом Зигмунда, а також обчисленню точних констант у нерівностях для коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних та інших супровідних задач.

Теорія наближення є важливим розділом сучасного математичного аналізу, який інтенсивно розвивається вже понад сто років. З часу основоположних теорем К. Вейєрштраса (1885) і К. Рунге (1885) теорія наближення розгалужується на два напрями – дійсний і комплексний. Попри ідентичність постановок задач у обох напрямках теорії, методи їх розв'язання часто виявляються різними, як і сам вигляд результатів. Так, наприклад, в 1962 році Л. В. Тайков показав, що критерій регулярності методу підсумовування рядів Фур'є, породженого нижньотрикутною числовою матрицею, у дійсному випадку не є критерієм регулярності у комплексному випадку. Це, зокрема, означає, що один і той самий лінійний метод підсумовування рядів Фур'є може мати суттєво різні апроксимативні властивості в дійсному та комплексному випадках. З огляду на це, з'ясування всіляких таких відмінностей між наближенням тим чи іншим лінійним методом в дійсному і комплексному випадках є цікавою та актуальною задачею.

Галузь теорії наближення, що пов'язана з дослідженнями апроксимативних властивостей середніх рядів Фур'є, значною мірою розвинута для класів функцій дійсної змінної. Стосовно ж функцій комплексної змінної подібних досліджень проведено значно менше. Тут слід згадати основоположні результати А. Зигмунда та С. Б. Стєчкіна. Зокрема, А. Зигмунд (1945) показав, що будь-яку неперервну 2π-періодичну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з додатнім спектром Фур'є (тобто зі степеневим рядом Фур'є: $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}$) і таку, що $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \le 1$, можна наблизити її середніми Фейєра $\sigma_n(f)$ з порядковою похибкою n^{-1}, тобто

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k e^{ikx} \right| \le \frac{A}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де A – певна абсолютна константа. З другого боку, для всіх таких самих 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, але з повним спектром Фур'є справджується непокращувана (в сенсі порядку) нерівність

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}_k e^{ikx} \right| \le B\frac{\ln n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де B – певна абсолютна константа.

Це, мабуть, історично перший випадок, коли у науковому дослідженні було явно з'ясовано відмінності між наближеннями одним і тим самим методом в дійсному та комплексному випадках.

З тих пір було порівняно мало результатів наукових досліджень, присвячених подібним питанням. Зокрема, С. Б. Стєчкін (1953) показав, що похибки наближення частинними сумами на класах 2π-періодичних функцій зі степеневими рядами Фур'є та на класах дійснозначних 2π-періодичних функцій збігаються за порядком, а їх асимптоти на нескінченності можуть відрізнятися одна від одної щонайбільше на константу $4/\pi$. Подібний ефект має місце і щодо найкращих лінійних методів наближення, як це випливає з результатів Л. В. Тайкова (1963, 1977), Дж. Шейка (1966), К. Ю. Осіпенка (1976), С. Б. Вакарчука (1994,2002) і В. В. Савчука (2007).

А. Зигмунд (1945) з'ясував, що типові середні рядів Фур'є (рядів Тейлора) 2π-періодичних функцій дають відносно простий, але досить ефективний метод наближення, який враховує гладкість функції. Зокрема, він показав, що для будь-яких $r > 0$ і $s \geq -r$ справджується співвідношення

$$\sup_{f \in H_\infty^{r+s}} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r \right) \widehat{f}_k z^k \right| \leq \frac{A_{r,s}}{n^\gamma} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $\gamma := \min(r, r+s)$, $A_{r,s}$ – константа, залежна тільки від вказаних параметрів, і H_∞^{r+s} – клас голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| D^{r+s} f(z) \right| \leq 1,\ D^{r+s} f(z) := i^{r+s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{r+s} \widehat{f}_k z^k,\ \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

В 2011 р. В. В. Савчук обчислив точне значення величини у лівій частині (1) при $r = 1$ і $s \geq 1$:

$$\sup_{f \in H_\infty^{1+s}} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \widehat{f}_k z^k \right| = \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

З огляду на ці результати природно виникає задача дослідження наближень узагальненим методом Зигмунда, який породжується трикутною матрицею $(1 - \psi_n/\psi_k)_{k,n}$, де $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}, \psi_0 = 1,$ – задана послідовність комплексних чисел, відмінних від нуля, на предмет описання класу голоморфних функцій $\mathfrak{A}$, для якого виконується рівність

$$\sup_{f \in \mathfrak{A}} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi_n}{\psi_k} \right) \widehat{f}_k z^k \right| = |\psi_n| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок цієї задачі повністю вирішує питання про точне значення мінімальної похибки наближення узагальненим методом Зигмунда на класі голоморфних функцій і, до того ж, вказує найширший клас, на якому ця похибка досягається.

Задачі про коефіцієнти голоморфних функцій займають одне з центральних місць сучасної теорії екстремальних задач. Серед найяскравіших досягнень у цій області слід згадати знаменитий результат Л. де Бранжа (1984) у доведенні гіпотези Бібербаха про точну оцінку коефіцієнтів Тейлора однолистих функцій в одиничному крузі. Серед результатів про точні оцінки (в сенсі точних констант) коефіцієнтів Тейлора для різноманітних класів голоморфних функцій переважна більшість стосуються функцій однієї змінної. У багатовимірному ж випадку теорія екстремальних задач для голоморфних функцій перебуває у зародковому стані. Тому дослідження з екстремальних задач, зокрема, точних оцінок коефіцієнтів Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних, мають значний науковий інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою " Теорія наближень в лінійних просторах", номер державної реєстрації 0111U002079.

Мета і завдання дослідження. Основною метою дисертаційного дослідження є дослідження апроксимативних властивостей узагальнених середніх Зигмунда, розв'язання екстремальних задач наближення голоморфних функцій у просторах Гарді, таких, як обчислення точних констант у нерівностях для коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій багатьох змінних та оцінок змішаних похідних голоморфних функцій у полікрузі.

Об'єктом дослідження є класи голоморфних функцій, екстремальні задачі наближення голоморфних функцій, лінійні методи наближення голоморфних функцій, оцінки коефіцієнтів ряду Тейлора голоморфних функцій.

Предметом дослідження є точне значення мінімальної похибки наближення узагальненим методом Зигмунда на класі голоморфних функцій, відшукання точних оцінок коефіцієнтів Тейлора на класах голоморфних функцій.

Завдання дослідження:

1. Встановити асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайти необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, за яких суми $Z_{n,\psi}(f)$ наближають клас $H_p^{\psi\phi}$ з мінімально можливою похибкою $|\psi_n|$.

2. Дослідити мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислити точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ в нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

4. Розв'язати задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку прямокутних частинних сум порядку $(1,1)$ двократного ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримати точну оцінку змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні зі сучасною методикою, розробленою у роботах А. С. Макентайра, В. В. Рогозинського та В. В. Савчука.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайдено необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

2. Досліджено мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислено точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій в полікрузі.

4. Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку прямокутних частинних сум порядку $(1,1)$ двократного ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримано точну оцінку змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 в полікрузі.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані при подальшому вивченні питань наближення функцій однієї та багатьох змінних.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямків досліджень, а також постановка задач, належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук В. В. Савчуку. Результати робіт [60,62,63] отримано спільно з науковим керівником. Результати роботи [61] отримано спільно з М. В. Савчук. Внесок співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару – доктори фізико–математичних наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко);

— міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, Кам'янець-Подільський, 28 травня–3 червня 2012 року;

— IV міжнародній конференції "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA – 2012), Мерсін, Туреччина, 4–9 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції, присвяченій 120–річчю Стефана Банаха, Львів, 17–21 вересня 2012 року;

— міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics", Львів, 23–28 вересня 2013 року;

— міжнародній конференції "Диференціальні рівняння. Функціональні простори. Теорія наближень " , присвяченій 105–річчю з дня народження С. Л. Соболєва, Новосибірськ, Росія, 18–24 серпня 2013 року;

— міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування", присвяченій 60-річчю В. І. Рукасова (1953–2009), Слов'янськ, 21–24 травня 2014 року;

— IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, 30 червня–5 липня 2014 року.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у тринадцяти наукових працях, з яких п'ять є статтями у виданнях, що належать до переліку ДАК МОН України фахових наукових видань [60 – 64], а вісім опубліковано у матеріалах восьми міжнародних наукових конференцій [65 – 72].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань. Повний обсяг роботи складає 117 сторінок друкованого тексту.

Висловлюю щиру і глибоку вдячність моєму науковому керівнику, доктору фіз.-мат. наук Савчуку Вітору Васильовичу за постановку задач, постійну увагу, підтримку, корисні зауваження та поради у роботі.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Лінійні методи підсумовування рядів Тейлора голоморфних функцій

1.1.1 Регулярні методи підсумовування рядів Тейлора

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ і $\mathscr{H}$ – множина усіх функцій голоморфних в крузі $\mathbb{D}$.

Простір Гарді H_p, $p > 0$, – це множина усіх функцій $f \in \mathscr{H}$, для яких

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<\varrho<1} M_p(\varrho, f) < \infty,$$

де

$$M_p(\varrho, f) := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w) \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$
$$M_\infty(\varrho, f) := \max_{|z|=\varrho} |f(z)|,$$

і σ – нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Нехай далі $A(\mathbb{D})$ — банахів простір функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ з нормою $\|f\|_{A(\mathbb{D})} = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$.

Відомо, якщо функція f належить H_p, $1 \le p \le \infty$, то на колі $\mathbb{T}$ існують її кутові граничні значення, за якими залишаємо позначення f, які належать просторові $L_p = L_p(\mathbb{T})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma \right)^{1/p}.$$

Зважаючи на це, домовимося надалі завжди під $\|f\|_{H_p}$ розуміти норму функції $f \in H_p$, а під $\|f\|_{L_p}$ – норму її граничних значень в L_p.

Нескінчена трикутна матриця дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_{k,n})$, $k = \overline{0, n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ називається *регулярною в періодичному випадку*, якщо для будь-якої неперервної на $\mathbb{R}$ 2π-періодичної функції f з рядом Фур'є

$$S[f](x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad \widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx,$$

послідовність тригонометричних поліномів

$$U_{n,\Lambda}(f)(x) = \sum_{|k|\le n-1} \lambda_{k,n}\widehat{f}_k e^{ikx}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

рівномірно збігається до f при $n \to \infty$.

Аналогічно, нескінчена трикутна матриця дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_{k,n})$ називається *регулярною в аналітичному випадку*, якщо для будь-якої функції $f \in A(\mathbb{D})$ послідовність многочленів

$$U_{n,\Lambda}(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n}\widehat{f}_k z^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

рівномірно збігається до f в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$.

Л. В. Тайков показав [107], що умови регулярності в аналітичному випадку є слабшими ніж умови регулярності в періодичному випадку.

Л. В. Тайков (1962) [107]:

$$\forall\ f \in A(\mathbb{D}) \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,n}\widehat{f}_k z^k \rightrightarrows f(z), n \to \infty,\ z \in \mathbb{T} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{k,n} \to 1,\ n \to \infty, \quad \exists\, \{T_n\}_{n=1}^{\infty},\ T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{k,n}\cos kx + \beta_{k,n}\sin kx) :$$

$$\alpha_{k,n}, \beta_{k,n} \in \mathbb{R},\ \alpha_{k,n} + \beta_{k,n} = \lambda_{k,n}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_0^{2\pi} |T_n(x)|dx < \infty.$$

Нагадаємо, що матриця Λ є регулярною в періодичному випадку тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}_+$$

і

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_{0,n}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k,n} \cos kx \right| dx < \infty.$$

Наприклад [107], матриця

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{n-k}{n}, & k = 2\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}_+, \\ \\ \dfrac{n-k}{n} + (-1)^\nu \dfrac{n-k}{n\sqrt{\ln n}}, & k = 2\nu - 1, \end{cases}$$

є регулярною в аналітичному випадку і не є регулярною в періодичному.

Результат Л. В. Тайкова свідчить про те, що один і той самий лінійний метод підсумовування рядів Фур'є може мати суттєво різні апроксимативні властивості в залежності від того, у якому випадку, періодичному чи аналітичному, він застосовується.

1.1.2 Наближення частинними сумами, сумами Фейєра та сумами Валле Пуссена

Нехай

$$H_p^r := \left\{ f \in \mathscr{H} : \|D^{(r)}(f)\|_{H_p} \le 1 \right\}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Наближення частинними сумами, сумами Фейєра та сумами Валле Пуссена в значній мірі досліджені в дійсному 2π–періодичному випадку. У випадку голоморфних функцій основоположні результати були отримані Е. Ландау, Г. Алексіча, А. Зигмунда та С.Б. Стєчкіна.

Г. Алексіч (1941) [2]: *Нехай* $r = 1, p = \infty, m = 0$. *Тоді*

$$\sup_{f\in H_\infty^1} \|f - \sigma_n(f)\|_{H_\infty} \le \frac{A_n}{n}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

де A_n — *обмежена послідовність додатних чисел,причому* $A_n > 4$.

С.Б. Стечкін (1953) [104]: *Нехай* $r \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\sup_{f \in H_\infty^r} \|f - S_n(f)\|_{H_\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O(1) n^{-r}, \quad n \to \infty; \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{n} \le \sup_{f \in H_\infty^1} \|f - \sigma_n(f)\|_{H_\infty} \le \frac{A_n}{n}, \quad A_n = \frac{3n-1}{n+1} < 3, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

і рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$

$$f(z) - \sigma_n(f)(z) = \frac{1}{n} z f'(z) + O(n^{-r}) \quad \forall \ f \in H_\infty^r, \ z \in \mathbb{D}, \quad n \in \mathbb{N}, \ r \ge 2. \tag{1.3}$$

Співвідношення (1.1) виявилось цілком аналогічним відомій асимптотичній рівності А.М. Колмогорова для класів W^r 2π-періодичних функцій дійсної змінної. Співвідношення ж (1.2) суттєво відрізняється від відповідного співвідношення в періодичному випадку, яке має вигляд (див., наприклад, [103], гл. 12)

$$\sup_{f \in W^1} \|f - \sigma_n(f)\|_C = \frac{2}{\pi} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Співвідношення (1.2) раніше було отримане А. Зигмундом [38] зі значеннями $A_n = \pi + 2/\pi$.

Співвідношення (1.3) справджується і в значно загальнішому випадку, якщо його розглядати в контексті наступного твердження, де вжито таке поняття.

Ортонормована система функцій $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ *з* $L_2[a,b]$ *називається системою* $(C,1)$*-сумовності, якщо для будь-якої числової послідовності* $\{c_k\}_{k=0}^\infty$, *для якої* $\sum_{k=0}^\infty |c_k|^2 < < \infty$, *ортогональний ряд* $\sum_{k=0}^\infty c_k \varphi_k$, *який за теоремою Ріса-Фішера визначає на* $[a,b]$ *деяку функцію* $f \in L_2[a,b]$, *підсумовується майже скрізь методом Фейєра.*

Е.О. Стороженко (1969) [105]: *Якщо* $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2(k+1)^2 < \infty$ *і ортонормована система* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *є системою* $(C,1)$*-сумовності, то майже скрізь на* $[a,b]$

$$f(x) - \sigma_n(f)(x) = \frac{\psi(x)}{n} + o_x\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-k/n)c_k\varphi_k(x)$, c_k *– коефіцієнти Фур'є функції* f *за системою* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, *а функція* $\psi \in L_2[a,b]$ *і визначається рядом* $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k\varphi_k$ *за теоремою Ріса-Фішера.*

В [106] дано огляд результатів, які стосуються наближень голоморфних функцій (C,α)-середніми, станом на 1978 рік.

Нехай

$$E_n(f)_{H_p} := \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}$$

— найкраще наближення алгебраїчними многочленами степеня $\leq n-1$.

Л.В. Тайков (1967) [109]: *Нехай* $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді:*

1) якщо $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *то*

$$\forall\ f \in H_p \quad \|f - S_n(f)\|_{H_p} \leq \frac{(n-r)!}{n!}\left\|f^{(r)} - S_{n-r}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{H_q}, \quad n \geq r;$$

2) якщо $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$, *то*

$$\forall\ f \in H_p \quad \|f - S_n(f)\|_{H_q} \leq \frac{(n-r)!}{n!}E_{n-r}\left(f^{(r)}\right)_{H_q}, \quad n \geq r,$$

і

$$\sup_{f \in H_p^r} \|f - S_n(f)\|_{H_q} = \frac{(n-r)!}{n!}, \quad n \geq r.$$

Рівності в останніх співвідношеннях досягаються для функції $f(z) = z^n$, *а точна верхня межа для функції* $f(z) = (n-r)!/n!z^n$.

До кола задач, в яких вивчається наближення класів голоморфних функцій частинними сумами їх розвинень в ряди Тейлора, слід віднести результат роботи [74], де досліджувалися наближення класу H^r_∞ частинними сумами розвинень в ряди Тейлора в околі точки $\alpha \in (0,1)$.

Г.М. Мордасова (1959)[74]:

$$\sup_{f\in H^r_\infty}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k\right| \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(1-\alpha)^r}{n^r}\ln n, & z=1, \alpha\in(0;1), \\ \\ \dfrac{(1-\alpha)^r}{n^r}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha}}\dfrac{1-\alpha}{|1-z|}\left(\dfrac{|z-\alpha|}{1-\alpha}\right)^n, & z\in\mathbb{T}\setminus\{1\}, \alpha\in(0;1). \end{cases}$$

Цей результат ґрунтується на наступному співвідношенні:

О.І. Маркушевич, С.Я. Хавінсон (1951) [113]: *При* $n\to\infty$ *справджується асимптотична рівність*

$$\|S_n(\alpha;z)\| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln n, & z=1, \alpha\in(0;1), \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\alpha}}\dfrac{1-\alpha}{|1-z|}\left(\dfrac{|z-\alpha|}{1-\alpha}\right)^n, & z\in\mathbb{T}\setminus\{1\}, \alpha\in(0;1). \end{cases} \tag{1.4}$$

Середні Валле Пуссена, як добре відомо, являють собою узагальнення як середніх Фейєра, так і частинних сум Тейлора. Історично так склалося, що результати з наближень сумами Фейєра і частинними сумами Тейлора передували результатам з наближень сумами Валле Пуссена, що, власне, відображається в даному огляді.

Нагадаємо, що сумою (середніми) Валле Пуссена функції $f\in\mathscr{H}$ називається алгебраїчний многочлен вигляду

$$V_{n,p}(f)(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_{k+1}(f)(z),$$

де $p, n \in \mathbb{N}, p \leq n$.

С.Б. Стечкін, Л.В. Тайков (1962) [107]: *Нехай* $q = 1, \infty$. *Тоді*

$$\sup_{f \in UH_q} \|V_{n,p}(f)\|_{H_q} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{n}{p} + O(1), \ p \leq n, \ n \to \infty. \tag{1.5}$$

А.А. Пекарський (2006) [80]:

$$\sup_{f \in UH_\infty} \|V_{2n,n}(f)\|_{H_\infty} = \frac{5}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Л. В. Тайков (1962) [107]: *Для будь-якої функції* $f \in H^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, *рівномірно відносно* $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$f(z) - V_{n,p}(f)(z) = -\frac{z^r}{n^r} V_{n-r,p}(f^{(r)})(z) + O(n^{-r}), \quad n - p \geq r.$$

Для будь-якого $r \in \mathbb{N}$ *при* $n \to \infty$ *і* $p/n \to 0$

$$\sup_{f \in H^r_\infty} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi n^r} \ln \frac{n}{p} + O(n^{-r}).$$

Нехай $\{\psi_k\}$ – послідовність комплексних чисел і

$$H^\psi_\infty := \left\{ f \in \mathscr{H} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \widehat{g}_k, \ g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_k z^k \in UH_\infty \right\}.$$

В.В. Савчук (1998) [96]: *Для будь-якої функції* $f \in H^\psi_\infty$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$, *рівномірно відносно* $z \in \overline{\mathbb{D}}$

$$f(z) - V_{n,1}(f)(z) = -\psi(n) V_{n,1}(f^\psi)(z) + O(1)\psi(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

О.М. Швецова (2000) [119]: *Якщо клас H^{ψ}_{∞} породжується функцією ψ такою, що $\psi(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, ψ є локально абсолютно неперервною на $[n_0, \infty)$ для деякого $n_0 \geq 2$ і*

$$\widetilde{V}^{\infty}_n(\psi) := \int_n^{\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{u\geq t} |\psi'(u)| dt < \infty \quad \forall\ n \geq n_0,$$

то для будь-якого натурального $n \geq n_0$

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}} \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{1}{\pi}\sum_{k=p}^{n} \frac{|\psi(k+n-1)|}{k} + O(1)\widetilde{V}^{\infty}_n(\psi).$$

В.В. Савчук, М.В. Савчук, С.О. Чайченко (2010) [97]: *Нехай K_{∞} — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій f, які зображаються інтегралами типу Коші*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(w)}{1-\overline{w}z}\frac{dw}{w}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.6}$$

зі щільностями φ, для яких $\|\varphi\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} \leq 1$.

Тоді для будь-яких $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, і $z \in \mathbb{D}$ виконується рівність

$$\sup_{f\in K_{\infty}} |f(z) - V_{n,p}(f)(z)| = \frac{2}{\pi p}|z|^{n-p+1}\frac{1-|z|^{2p}}{1-|z|^2}\mathbf{K}(|z|^p), \tag{1.7}$$

де

$$\mathbf{K}(\rho) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-\rho e^{it}|}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду.

Зокрема, якщо $p = 1$, то звідси випливає рівність

$$\mathcal{E}_n(K; C(\mathbb{T}_{\varrho})) = \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\rho)\rho^n \quad \forall\ z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}.$$

1.1.3 Наближення сумами Зигмунда

Нехай $f(x)$ - 2π-періодична сумовна функція, що задається її рядом Фур'є

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x), \tag{1.8}$$

де a_k, b_k - коефіцієнти Фур'є.

Многочлени вигляду

$$Z_n^s(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right) A_k(f,x) \tag{1.9}$$

називають типовими середніми ряду Фур'є порядку s. Їх апроксимаційні властивості вперше піддалися вивченню А. Зигмундом у роботі [39]. Згодом ці поліноми отримали назву сум Зигмунда.

Поліноми вигляду

$$Z_n^{\psi}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(1 - \frac{\psi_n}{\psi_k}\big) A_k(f,x) \tag{1.10}$$

називаються узагальненими сумами Зигмунда. Ці суми представлені у роботах [26] та [27]. При $s = 1$ ці суми збігаються із добре відомими сумами Фейєра [111].

Вперше суми $Z_{n,\psi}$ були запроваджені в [3,4]. Вони збігаються з класичними сумами Зигмунда [39] у випадку, коли $\psi_k = k^{-r}$, $r > 0$, і сумами Фейєра при $\psi_k = k^{-1}$.

А. Зигмунд (1945) з'ясував, що типові середні рядів Фур'є (рядів Тейлора) 2π-періодичних функцій дають відносно простий, але досить ефективний метод наближення, який враховує гладкість функції. Зокрема, він показав, що для будь-яких $r > 0$ і $s \geq -r$ справджується співвідношення

$$\sup_{f \in H_\infty^{r+s}} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r\right) \widehat{f}_k z^k \right| \leq \frac{A_{r,s}}{n^\gamma} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

де $\gamma := \min(r, r+s)$, $A_{r,s}$ – константа, залежна тільки від вказаних параметрів, і H_∞^{r+s} – клас голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| D^{r+s} f(z) \right| \leq 1, \;\; D^{r+s} f(z) := i^{r+s} \sum_{k=1}^{\infty} k^{r+s} \widehat{f}_k z^k, \;\; \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Для сум Зигмунда точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}\big(L^{\psi}_{\beta,p}; Z^{s}_{n-1}\big)_{L_q}$, $1 < p,\ q < \infty$, в залежності від швидкості прямування до нуля послідовності ψ_k при $k \to \infty$, встановлено І. Б. Ковальською [46],[47].

В роботах [101,20,115] доведено, що коли трикутна матриця чисел Λ така, що існує додатня монотонно спадна до 0 при $n \to \infty$ функція φ_n і числа $\psi_k \notin 0$ такі, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda_k^{(n)}}{\varphi_n} = \frac{1}{\psi_k}, k = 1, 2, \ldots,$$

то для лінійного методу $U_n(\Lambda)$, утвореного за допомогою такої матриці, з виконання умови

$$\|f(z) - U_n(f,\Lambda)\| = o(\varphi(n))$$

слідує, що $f = const$ при $X = C$ та $f = const$ майже всюди, коли $X = L_p$.

1.1.4 Найкращі лінійні методи наближення на класах H^{ψ}_p

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – одиничний круг в комплексній площині $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – одиничне коло, σ – нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$, $L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty$, – простір сумовних на $\mathbb{T}$ відносно σ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Означення 1.1.1 . *Нехай* $\psi = \{\widehat{\psi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ *– послідовність комплексних чисел, члени якої не всі дорівнюють нулеві і*

$$\mathscr{Z}(\psi) := \left\{k \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{\psi}_k = 0\right\},\ \mathscr{Z}(\psi) \ne \mathbb{Z}_+.$$

Якщо для даної функції $f \in \mathscr{H}$ знайдеться функція $g \in \mathscr{H}$ така, що $\widehat{g}_k = 0, k \in \mathscr{Z}(\psi)$, і

$$f(z) = \sum_{k \in \mathscr{Z}(\psi)} \widehat{f}_k z^k + \sum_{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathscr{Z}(\psi)} \widehat{\psi}_k \widehat{g}_k z^k \quad \forall\ z \in \mathbb{D}, \tag{1.11}$$

то кажуть, що функція f має ψ-похідну g, для якої використовують позначення $g = f^\psi$. При цьому, якщо $\mathscr{Z}(\psi) = \varnothing$, то перша сума в (1.11) покладається рівною нулеві.

Якщо X – деякий нормований лінійний простір, то UX означатиме одиничну кулю в ньому.

Визначимо клас X^ψ таким чином

$$X^\psi := \left\{ f \in \mathscr{H} : f^\psi \in UX \right\}.$$

Зауважимо, що клас X^ψ буде компактним, якщо множина $\mathscr{Z}(\psi)$ складатиметься зі скінченної кількості елементів.

Стосовно послідовності $\psi := \{\widehat{\psi}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, що фігурує в означенні 1.1.1, припускатимемо, що $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\widehat{\psi}_k|} \le 1$, а функцію $\psi(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathscr{Z}(\psi)} \widehat{\psi}_k z^k \in \mathscr{H}$ будемо називати *твірним ядром* класу X^ψ.

Зрозуміло, якщо ψ є твірним ядром і $f \in X^\psi$, то

$$f^\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathscr{Z}(\psi)} \frac{1}{\widehat{\psi}_k} \widehat{f}_k z^k \in UX, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Класи H_p^ψ, тобто, коли $X = H_p$, для довільної послідовності ψ, вперше розглядалися, мабуть, в [120; 10; 35; 36].

Теорія екстремальних задач і співвідношень двоїстості для голоморфних функцій була розвинута в роботах С. Я. Хавінсона [114], У. Рогозинського, А. Макентайра і Г. Шапіро [59], [85], [86]. Але основоположні результати були отримані ще на початку минулого століття і стосувалися таких екстремальних задач.

Детальні відомості про класичні екстремальні задачі для голоморфних функцій та методи їх розв'язання можна знайти в [51].

Слід зазначити, що раніше,ніж в роботах [114], [59] і [85], співвідношення двоїстості в загальному вигляді були відкриті С. М. Нікольським [75] і застосовані ним до обчислення точних значень величин найкращих многочленних наближень в середньому класів 2π-періодичних функцій дійсної змінної.

Першою роботою, в якій було знайдено точне значення величини найкращого многочленого наближення класу (нетривіального) голоморфних в крузі $\mathbb{D}$ функцій вважається робота К. І. Бабенка [8].

Нехай

$$H_p^r := \left\{ f \in \mathscr{H} : f^{(r)} \in UH_p \right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

К. І. Бабенко (1958) [8]: *Нехай* $0 \le \varrho \le 1$, $r \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді*

$$E_n(H_\infty^r, C(\mathbb{T}_\varrho)) := \sup_{f \in H_\infty^r} \inf_{p \in \mathscr{P}_{n-1}} \|f - p\|_{C(\mathbb{T}_\varrho)} = \frac{(n-r)!}{n!} \varrho^n, \quad n \ge r. \quad (1.12)$$

Цей результат є цілком аналогічним знаменитим результатам Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера та М. Г. Крейна (див., наприклад, [103, гл. 7]) про точне значення величин найкращих наближень класів неперервних 2π-періодичних функцій дійсної змінної тригонометричними поліномами.

Л. В. Тайков [108] показав, що величина $E_n(H_\infty^r, C(\mathbb{T}_\varrho))$ дорівнює величині найкращого лінійного наближення і побудував найкращий лінійний метод наближення.

Розглянемо послідовність лінійних операторів $\{U_n\}_0^\infty$, заданих на $\mathscr{H}$, що діють за правилом

$$U_n(f)(z) = U_{n,\Lambda}(f)(z) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_{k,n} \widehat{f}_k z^k, & n \geq 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

де $\lambda_{k,n}$ – елементи нескінченної нижньотрикутної матриці $\Lambda := \{\lambda_{k,n}\}$, $n = \overline{1, \infty}$, $k = \overline{0, n}$ ($\lambda_{k,0} = 0$) над полем комплексних чисел.

Теорема (В. В. Савчук, 2011 р., [89]). *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, *функція* $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k z^k$ *– твірне ядро класу* H_p^{ψ} *і*

$$m_n := m_n(\psi) := \inf_{w \in \mathbb{D}} \left(\mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{\psi}_{k+n}}{\widehat{\psi}_n} w^k \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.14}$$

Якщо $\inf_{n \in \mathbb{Z}_+} m_n > -\infty$, *то для будь-якої послідовності чисел* $\{m_n'\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ *таких, що* $m_n' \leq m_n$ *і кожного* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\max_{f \in H_p^{\psi}} \left\| f - U_{n,\Lambda}(f) \right\|_{H_p} = 2(1 - m_n') \left| \widehat{\psi}_n \right|, \tag{1.15}$$

де Λ *– матриця з елементами*

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\overline{\widehat{\psi}_{2n-k}}}{\widehat{\psi}_k} e^{2i \arg \widehat{\psi}_n}, & k = \overline{0, n-1}, \\ \\ 2m_n' - 1, & k = n. \end{cases} \tag{1.16}$$

Для кожного n *максимум досягається для функції* $f_n(z) = \omega \widehat{\psi}_n z^n$, $|\omega| = 1$.

Означення 1.1.2 . *Величини*

$$\mathcal{L}_n\left(\mathfrak{A}; X\right) := \inf_{\Lambda} \sup_{f \in \mathfrak{A}} \left\| f - U_{n,\Lambda}(f) \right\|_X, \tag{1.17}$$

де точна нижня межа береться по множині всіх нижньотрикутних числових матриць і

$$E_n\left(\mathfrak{A}; X\right) := \sup_{f\in\mathfrak{A}} \ E_n(f)_X, \tag{1.18}$$

де $E_n(f)_X := \inf_{P\in\mathscr{P}_{n-1}} \|f-P\|_X$, *називаються відповідно найкращим лінійним многочленним та найкращим многочленним наближенням даного класу* $\mathfrak{A}$ *в банаховому просторі* X.

Якщо вказано матрицю Λ, *для якої досягається точна нижня межа в (1.17), то кажуть, що побудовано найкращий лінійний многочленний метод наближення класу* $\mathfrak{A}$.

З цього загального твердження випливає такий

Наслідок (В. В. Савчук, 2011 р., [89]). *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* ψ *– твірне ядро класу* H_p^ψ, $m_n(\psi) \ge 1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$E_n\left(H_p^\psi; H_p\right) = \mathcal{L}_n\left(H_p^\psi; H_p\right) = \left|\widehat{\psi}_n\right|.$$

В. В. Савчук показав, що умова $m_n(\psi) \ge 1/2$ є необхідною для виконання рівностей. А отже, даний лінійний метод є найкращим лінійним многочленним методом наближення класу H_p^ψ і дає мінімальну можливу похибку наближення $\left|\widehat{\psi}_n\right|$.

Значного прогресу в задачі про побудову найкращих лінійних методів наближення та обчисленні точних значень величин найкращих наближень досягнуто С. Б. Вакарчуком [22–24].

Нехай Φ – неперервна зростаюча функція, $\Phi(0) = 0$. Для будь-якого значення параметра μ і натурального r означимо клас

$$W = W(r, \Phi, \mu) =$$

$$= \left\{ f \in H_p : \frac{1}{2}\int_0^v \omega(f_a^{(r)}, 2t)\left(1 + \left(\mu^2 - 1\right)\sin\frac{\pi t}{2v}\right)dt \le \Phi(v),\ 0 < v \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

С.Б. Вакарчук (2002) [23]: *Якщо при даному* $\mu \geq 1$ *мажоранта* Φ *задовольняє умову*

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right)} \geq xn \int_0^1 (\sin(xnt))_* \left(1 + (\mu^2 - 1)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) dt \,\forall\, x \in (0, \pi/2],\ n \in \mathbb{N},$$

де

$$(\sin x)_* := \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2, \end{cases}$$

то для кожного натурального n

$$d^n(W, H_p) = \delta_n(W, H_p) = \mathcal{L}_n(W, H_p) = \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right)\frac{1}{n^{r-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При цьому лінійний метод $U_{n,\Lambda}$*, що породжується матрицею* Λ *з елементами*

$$\lambda_{k,n} = 1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\left(\gamma_k\left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) - 1\right),$$

де

$$\gamma_k := n\mu \int_0^{\pi/(2n\mu)} \cos(kt)\cos(n\mu t)dt,$$

є найкращим лінійним методом наближення.

1.2 Екстремальні задачі в просторах Гарді

1.2.1 Оцінки модуля обмежених голоморфних функцій

Нехай B – клас функцій f, голоморфних в крузі $\mathbb{D}$, для яких $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$, і нехай

$$f(r\mathbb{D}) = \{\omega = f(rz) : z \in \mathbb{D}\}.$$

– образ круга $r\mathbb{D}$ при відображенні функцією f.

Величина

$$\mathrm{Rad} f(r\mathbb{D}) := \sup_{|z|<r} |f(z) - f(0)| \tag{1.19}$$

називається радіусом образу $f(r\mathbb{D})$.

Геометрично, $\mathrm{Rad} f(r\mathbb{D})$ є радіусом найменшого круга з центром в $f(0)$, який містить в собі $f(r\mathbb{D})$.

Теорема (Лема Шварца). *Нехай функція f голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D}$. Тоді функція $\phi_{\mathrm{Rad}}(r) := r^{-1}\mathrm{Rad} f(r\mathbb{D})$ є строго зростаюча при $0 < r < 1$, за виключенням випадку, коли f є лінійною. Більше того,* $\lim_{r\to 0} \phi_{\mathrm{Rad}}(r) = |f'(0)|$.

Вперше таке формулювання класичної теореми Шварца з'явилось у статті Каратеодорі [43]. Ідею доведення також приписують Е. Шмідту (див. [84] та [56]).

У 1907 році Ландау та Теплиць для (1.19) використали поняття діаметра множини образів

$$\mathrm{Diam} f(r\mathbb{D}) := \sup_{z,\omega \in r\mathbb{D}} |f(z) - f(\omega)|$$

і довели таке твердження [54]

Теорема Ландау–Теплиця. *Нехай функція f голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D}$ і $\mathrm{Diam} f(\mathbb{D}) = 2$. Тоді*

$$\mathrm{Diam} f(r\mathbb{D}) \le 2r \quad \forall\ 0 \le r < 1 \tag{1.20}$$

і

$$|f'(0)| \le 1. \tag{1.21}$$

Рівність в (1.20) або в (1.21) досягається тільки для функцій $f(z) = a + cz$ для деяких сталих $a \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{T}$.

Значну кількість геометричних варіантів поширення леми Шварца доведено в роботах [11–13, 19, 45,37]. Р.Б. Буркель [19] показав, що для функції f, голоморфної в одиничному крузі $\mathbb{D}$, при виконується співвідношення

$$|f(z) - f(0)| \leq \mathrm{Diam} f(\mathbb{D})\psi(|z|) \quad \forall\ z \in \mathbb{D},$$

де $\mathrm{Diam} f(\mathbb{D})$ є діаметром функції $f(\mathbb{D})$ і

$$\psi(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in [0,1].$$

Д. Бетсакос [12] довів, що для голоморфної функції f, яка не є сталою і є обмеженою в $\mathbb{D}$, виконується

$$|f(z) - f(0)| \leq 4d(f(\mathbb{D}))e^{-\mu(f(z))}, \quad \forall\ z \in \mathbb{D} \setminus \{0\},$$

де $d(f(\mathbb{D}))$ є логарифмічна ємність $f(\mathbb{D})$, μ означається як

$$\mu(x) = \frac{\pi\mathbb{K}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{2\mathbb{K}(x)}, \qquad x \in [0,1],$$

де $\mathbb{K}(x)$ – повний еліптичний інтеграл.

Класична теорема Ліндельофа [57] узагальнює лему Шварца і стверджує, що якщо функція f є голоморфною в одиничному крузі і $f(0) = 0$, то для довільного $\omega \in f(\mathbb{D})$

$$|\omega| \leq \prod_j |z_j(\omega)|, \tag{1.22}$$

де скінчена або злічена множина $\{z_1(\omega), z_2(\omega), \dots\}$ містить усі прообрази ω таким чином, що кожен повторюється стільки разів, як його кратність як кореня функції $f(z)-\omega$. У 1954 році Лехто [55] показав, що рівність в (1.22) зберігається для деяких $\omega \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ тоді і лише тоді, коли функція f є внутрішньою.

Стосовно похідних вищих порядків, результати належать Калле Поукка [82], першому учневі Ліндельофа.

Теорема (К. Поукка,1907 р., [82]) *Нехай функція f голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D}$. Тоді для всіх додатніх цілих чисел n має місце*

$$\left|\widehat{f_n}\right| \leq \frac{1}{2}\mathrm{Diam} f(\mathbb{D}). \tag{1.23}$$

Рівність в (1.23) досягається при даному n лише для функцій $f(z) = f(0) + cz^n$, де c – стала, за модулем рівна $\mathrm{Diam} f(\mathbb{D})/2$.

1.2.2 Метод Рогозинського–Макінтайра

Нехай $p \geq 1$, H_p – клас функцій, голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$, де

$$M_p(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta\right)^{1/p}, \quad 0 \leq r < 1.$$

При $p = \infty$

$$M_\infty(f,r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Добре відомо [40], що для довільної функції $f(z)$ з класу H_p має місце

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})$$

при майже всіх θ, і, якщо $p < \infty$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta \to 0$$

при $r \to 1 - 0$.

Розглянемо функціонал, визначений на H_p

$$I = I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)k(\zeta)d\zeta,$$

де $f(z)$ – функція з класу H_p і $k(z)$ – ядро, що належить класу H_q, спряженому з H_p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Екстремальна задача полягає в наступному.

Знайти норму функціонала на класі H_p.

Для цього в роботі [58] використано метод, суть якого полягає у наступному:

Нехай $0 < r < 1$ і функція $f(z) \in H_1$. З формули Коші

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - r} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - r}$$

випливає нерівність

$$(1-r)|f(r)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Якщо замінити ядро Коші $\frac{1}{\zeta - r}$ будь–якою функцією, мероморфною в $\overline{\mathbb{D}}$, єдиним полюсом в $\zeta = r$, то отримається інше представлення $f(r)$.

Так зокрема, для ядра $(1 - r\zeta)/(\zeta - r)$ отримаємо таку нерівність

$$(1-r^2)|f(r)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta,$$

в якій рівність досягається для функції $f(z) = \frac{1}{(1-rz)^2}$.

Якщо застосувати нерівність до $f(ze^{i\alpha})$, матимемо

$$(1-r^2)|f(re^{i\alpha})| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_\alpha^{2\pi+\alpha} |f(e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Функція

$$\left(\frac{1 - r\zeta}{\zeta - r} \right)^2 = \frac{(1-r^2)^2 - 2r(1-r^2)(\zeta - r) + r^2(\zeta - r)^2}{(\zeta - r)^2}$$

має модуль, рівний 1 при $|z| = 1$. Звідси підсумовуванням залишку підінтегральної функції знаходимо

$$(1-r^2)^2 f'(r) - 2r(1-r^2) f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta) \left(\frac{1 - r\zeta}{\zeta - r} \right)^2 d\zeta$$

і отримуємо нерівність

$$|(1-r^2)^2 f'(r) - 2r(1-r^2)f(r)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Якщо застосувати нерівность до $f(z)h(z)$ і вибрати $h(z)$ такою, що $|h(e^{i\theta})| = 1, (1-r^2)h'(r) - 2rh(r) = 0$, то отримаємо

$$|(1-r^2)^2 f'(r)h(r) + (1-r^2)f(r)(1-r^2)h'(r) - 2rh(r)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Умова $|h(e^{i\theta})| = 1$ задовольниться при

$$h(z) = \frac{z-y}{1-zy} \quad (-1 < y < 1).$$

Для цієї функції

$$\frac{h'(r)}{h(r)} = \frac{1}{r-y} + \frac{y}{1-ry} = \frac{1-y^2}{(r-y)(1-ry)}.$$

Слід обирати y, яке задовільнить квадратне рівняння $(1-r^2)(1-y^2) = 2r(r-y)(1-ry)$.

Коренями цього рівняння є $y = r \pm (1-r^2)/\sqrt{1+r^2}$. Корінь $y = r - (1-r^2)/\sqrt{1+r^2}$ завжди лежить в межах $-1 < y < 1$ при $0 < r < 1$. Врахувавши величину y, знайдемо $h(r) = 1/[r + \sqrt{1+r^2}]$, і отримаємо наступну нерівність

$$\frac{(1-r^2)^2}{r+\sqrt{1+r^2}}|f'(r)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Ця нерівність є найкращою. Рівність досягається для функції

$$f(z) = \frac{(1-yz)^2}{(1-rz)^4}, \quad y = r - (1-r^2)/\sqrt{1+r^2}.$$

Отже, при $|z| < 1$

$$\frac{(1-|z|^2)^2}{|z|+\sqrt{1+|z|^2}}|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

1.2.3 Лема Шварца–Піка в полікрузі

Нехай функція f голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і зображається рядом Тейлора $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$.

Першим значним результатом є теорема Г. Піка, яка була названа в його честь Каратеодорі [44]:

Теорема Піка : *Для довільної голоморфної функції* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}} \right| \le \left| \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} \right| \quad \forall\ z, w \in \mathbb{D}.$$

Ця теорема випливає безпосередньо з леми Шварца. Прямим наслідком теореми Г. Піка є наступна нерівність

Нерівність Шварца–Піка (1890, 1916) :

$$|f'(z_0)| \le \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2} \quad \forall\ z_0 \in \mathbb{D}.$$

Нетривіальна рівність зберігається тоді і лише тоді, коли f є конформним автоморфізмом круга $\mathbb{D}$, $f(z) = e^{i\alpha}(z - a)/(1 - z\overline{a})$, $a \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Слід відмітити, що О. Сас приписав цю нерівність Ліндельофу [99, ст.308].

Нерівність Ландау–Каратеодорі (1906, 1907): *Для довільної голоморфної функції* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

$$\left| \widehat{f}_1 \right| \le 1 - \left| \widehat{f}_0 \right|^2.$$

Лема Шварца та її узагальнення стали широко відомими у період системного вивчення результатів, тісно пов'язаних з теоремою Рімана про конформні відображення. Оригінальна версія леми подана в [118].

У 1920 році О. Сас узагальнив останню нерівність на випадок похідних вищих порядків.

Теорема (О. Сас, 1920 р., [99]): *Для довільних* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}, m \in \mathbb{N}$ *справедлива нерівність*

$$|f^{(2m+1)}(z)| \leq \frac{(2m+1)!}{1-|z^2|^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 |z|^{2k}.$$

Рівність досягається лише для функцій $f(\varsigma) = e^{i\gamma}\varsigma^m \left(\frac{\varsigma - z}{1-\overline{z}\varsigma}\right)^{m+1}, \gamma \in \mathbb{R}$.

Лема Шварца в інваріантній формі приводить до псевдопараболічної метрики, яка є зручною при вивченні обмежених голоморфних функцій.

Для голоморфних функцій у полікрузі маємо наступне добре відоме узагальнення ([88], ст.179).

Твердження 1.2.1 . *Для довільної голоморфної функції* $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$

$$\sum_{k=0}^{n} (1-|z_k|^2) \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| \leq 1 - \left| \widehat{f}(z) \right|^2$$

для довільних $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{D}^n$.

Означення 1.2.1 . *Голоморфна функція* $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ *називається екстремальною, якщо* f *задовольняє умову*

$$\sum_{k=0}^{n} (1-|z_k|^2) \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| = 1 - \left| \widehat{f}(z) \right|^2 \tag{1.24}$$

в кожній точці з $\mathbb{D}^n$.

1.3 Оцінки коефіцієнтів гармонічних і голоморфних функцій в крузі

1.3.1 Метод Ф. Вінера

Розглянемо наступну задачу [15].

Задача 1.3.1 . *Нехай* $r \in (0,1)$. *Чи завжди можна знайти степеневий ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *такий, що:*

1) Функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *є голоморфною при* $|z| < 1$ *і неперервною при* $|z| \leq 1$*;*

2) $|f(z)| < 1$ *при* $|z| \leq 1$*;*

3) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k > 1$.

Очевидно, що дане питання може бути вирішене, коли z достатньо близьке до 1: фактично, умови (1) та (2) задачі (1.3.1) цілком сумісні з $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \to \infty$ при $r \to 1$. В загальному випадку дана проблема може мати і негативну відповідь.

Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема Бора [15]: *Якщо виконуються умови (1) та (2) задачі (1.3.1), то* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| < 1$ *при* $|z| \leq \frac{1}{6}$*; тобто* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| 6^{-k} < 1$.

Не втрачаючи загальності, покладаємо a_0 дійсним та додатнім. Тоді $a_0 = f(0) < 1$.

Числа r, для яких імплікація $|f(z)| \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}_k| r^k \leq 1$ справджується, мають додатну верхню межу K. Незалежно один від одного, цю точну верхню межу знайшли Ф. Вінер, І. Шур та М. Рісс. А саме, вони показали, що $K = \frac{1}{3}$.

Ф. Вінер довів, що перш ніж гіпотези (1) та (2) задачі (1.3.1) задовольняться, якщо ми припустимо, що $0 \leq a_0 < 1$, то нерівність

$$|a_k| < 2^{k+1}(1 - a_0),$$

встановлена вище Г. Бором, може бути замінена нерівністю

$$|a_k| < 1 - a_0^2. \tag{1.25}$$

У випадку $k = 1$ ця нерівність є відомою. А саме, вона випливає з того факту, що функція

$$\frac{f(x)-a_0}{x(1-a_0f(x))}$$

є голоморфною при $|x|<1$, неперервною при $|x|\leq 1$, чисельно меншою 1 при $|x|=1$, а при $x=0$ набуває значення $\frac{a_1}{1-a_0^2}$. Нехай k довільне ціле більше за 1 число, і ρ є коренем k-го степеня з 1. Тоді

$$F(x)=f(x)+f(\rho x)+\ldots+f(\rho^{k-1}x)=\sum_{m=0}^{\infty}ka_{mk}x^{mk}$$

є голоморфною при $|x|<1$ і неперервною та чисельно меншою за 1 при $|x|\leq 1$. Звідси слідує, що функція $\phi(x)=a_0+a_kx+a_2kx^2+\ldots$ задовольняє умови, накладені на $f(x)$. Тому умова (1) задачі (1.3.1) доведена.

Тим більш, при $k\geq 1$,

$$|a_k|<(1-a_0)(1+a_0)<2(1-a_0),$$

і тому

$$\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}|a_k|<a_0+2(1-a_0)\sum_{k=1}^{\infty}3^{-n}=a_0+1-a_0=1.$$

Звідси, $K\geq\frac{1}{3}$.

1.3.2 Точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора голоморфних функцій

Нехай $\|f\|_\rho:=\|f(\rho\cdot)\|$ при $\rho\in[0,1]$.

Розглянемо наступну екстремальну задачу:

Задача 1.3.2 . *При даному* $\rho\in[0,1]$ *і натуральному* n *знайти*

$$\mathcal{E}(n,\rho):=\sup\left\{\|f-S_n(f)\|_\rho : f\in B\right\},$$

де $S_n(f)(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}_kz^k$, $\widehat{f}_k=f^{(k)}(0)/k!$.

На даний час задача роз'язана у двох випадках: $n = 1, \rho \in [0,1]$ і $n = 2, \rho \in [0,1]$.

Л. Браун, А. Шилдс , К. Зеллер [17], Г. Вааделанд [21], В.А. Турковський [110], Р. Буркель, Д. Маршал, Д. Мінда, П. Поггі-Корадіні , Т. Ренсфорд [19]:

$$\mathcal{E}(n,\rho) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{\rho + \sqrt{1-\rho^2}}, & \text{при } n = 1, \\ \\ \dfrac{2\rho^2}{\rho + \sqrt{1-\rho^2}} + \dfrac{\rho^6}{4(\rho + \sqrt{1-\rho^2})^4}, & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

Виявляється, що оцінити величину $\mathcal{E}(n,\rho)$ в загальному випадку досить важко. Але, як зауважив В. В. Савчук, задачу можна дещо спростити, якщо в похибці наближення врахувати максимальний коефіцієнт ряду Тейлора кожної індивідуальної функції.

Більш конкретніше ідея В. В. Савчука полягає у такому.

Нехай $f \in B$ і $m_f(k) := \max\left\{\left|\widehat{f}_j\right| : j = 0, 1, \ldots, k\right\}$ є максимальний коефіцієнт ряду Тейлора порядку k для функції f.

Добре відомо, що для довільної функції f з B $m_f(k) \le 1$. Ця нерівність перетвориться у рівність тільки для функцій вигляду $f(z) \equiv \omega z^j$, $|\omega| = 1$, для деяких $j, 0 \le j \le k$.

Задача 1.3.3 *(В. В. Савчук, [92]). При даних $\rho \in [0,1)$ і натуральному n знайти*

$$\mathcal{E}_1(n,\rho) := \sup\left\{\frac{\|f - S_n(f)\|_\rho}{1 - m_f\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)} : f \in B\right\},$$

$$\mathcal{E}_2(n,\rho) := \sup\left\{\frac{\|f - S_n(f)\|_\rho}{1 - m_f^2\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)} : f \in B\right\},$$

де $[\cdot]$ — ціла частина числа.

Недавно було декілька досліджень стосовно проблем, подібних до задачі 1.3.3. Тут згадаємо роботи Г. Кресіна і В. Мазья [50] та Л. Айзенберга і А. Відраса [1], в яких було доведено, що при довільних $p > 0$ та натуральних n

$$\sup\left\{\frac{\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|\widehat{f}_k z^k\right|^p\right)^{1/p}}{1-\left|\widehat{f}_0\right|} : f \in B\right\} = \frac{2|z|^n}{(1-|z|^p)^{1/p}} \ \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

З цієї рівності, при $p = n = 1$ і $|z| = 1/3$, отримуємо класичну теорему Бора.

Теорема Бора: *Для довільних $f \in B$*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\widehat{f}_k\right|\rho^k \leq 1 \quad \forall\ \rho \in [0, \frac{1}{3}].$$

Задачу 1.3.3 розв'язав В. В. Савчук [92].

Теорема 1.3.1 .

$$\mathcal{E}_1(n,\rho) = \frac{2\rho^n}{1-\rho}, \quad \mathcal{E}_2(n,\rho) = \frac{\rho^n}{1-\rho} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \rho \in [0,1).$$

Окрім цього в [92] показано, що задача 1.3.3 має безпосереднє відношення до наступної екстремальної задачі:

Задача 1.3.4 . *При даних невід'ємних цілих m і натуральних n знайти*

$$L_{m,n} := \sup\left\{\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1-\left|\widehat{f}_m\right|} : f \in B\right\}$$

i

$$W_{m,n} := \sup\left\{\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1-\left|\widehat{f}_m\right|^2} : f \in B\right\}.$$

А саме, В. В. Савчук (2015) показав, що мають місце наступні співвідношення:

$$\mathcal{E}_1(n,\rho) = \frac{2\rho^n}{1-\rho}\ \forall n \in \mathbb{N}, \rho \in [0,1) \Longleftrightarrow L_{m,n} = 2\ \forall n \geq 2m+1,$$

$$\mathcal{E}_2(n,\rho) = \frac{\rho^n}{1-\rho}\ \forall n \in \mathbb{N}, \rho \in [0,1) W_{m,n} = 1\ \forall n \geq 2m+1.$$

Відмітимо, що сталі $L_{m,n} = 2$ та $W_{m,n} = 1$ є точними сталими в нерівностях

$$\left|\widehat{f}_n\right| \leq 1 - \left|\widehat{f}_m\right|^2 \leq 2\left(1 - \left|\widehat{f}_m\right|\right).$$

Ці нерівності отримані для $m = 0, n = 1$ Ландау у 1906, для $m = 0, n \in \mathbb{N}$ Вінером у 1914 і для довільних цілих m та $n \geq 2m+1$ О.Сасом у 1918.

У 1950 році Голузін показав, що рівність

$$W_{n,m} = \max\left\{\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1-\left|\widehat{f}_m\right|^2} : f \in B\right\} = 1, \quad n \geq 2m+1,$$

досягається лише для функцій

$$f_c(z) = \frac{cz^m + \eta z^n}{1 + \overline{c}\eta z^{n-m}}, \quad |c| \leq 1,$$

де $|\eta| = 1$ при $|c| < 1$, and $\eta = 0$ при $|c| = 1$.

Неважко показати, що величина $L_{m,n}$ досягається для послідовності функцій $\{f_c\}_{0<c<1}$.

Таким чином з'ясовано, що екстремальні задачі про точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора і точні значення верхніх меж відхилень частинних сум рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних функцій мають безпосередній зв'язок.

Розділ 2

Екстремальні задачі наближення голоморфних функцій лінійними методами

2.1 Наближення голоморфних функцій узагальненими сумами Зигмунда

Нехай $\mathscr{H}$ — множина функцій, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, H_p, $1 \le p \le \infty$, — простір Гарді і UH_p — одинична куля в H_p, тобто

$$UH_p := \left\{ f \in \mathscr{H} : \|f\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{H_p} := \begin{cases} \sup\limits_{0<\rho<1} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, & p \ge 1, \\ \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нехай $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел таких, що $|\psi_k| > 0$. Узагальненими сумами (середніми) Зигмунда функції

$$f \in \mathscr{H}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \qquad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

(ряду Тейлора функції f) називаються многочлени вигляду

$$Z_{n,\psi}(f)(z) := \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\psi_n}{\psi_k}\right) \widehat{f}_k z^k, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тут і далі покладаємо $\sum_{k=M}^{N} = 0$, якщо $N < M$.

Вперше суми $Z_{n,\psi}$ були запроваджені в [3,4]. Вони збігаються з класичними сумами Зигмунда [39]

$$Z_n^{\psi}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ \psi > 0$$

у випадку, коли $\psi_k = k^{-r}$, $r > 0$, і сумами Фейєра [111] при $\psi_k = k^{-1}$.

Означимо на $\mathscr{H}$ оператор D^{ψ} правилом

$$D^{\psi}(f)(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_k}{\psi_k} z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Якщо $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — інша послідовність комплексних чисел таких, що $|\phi_k| > 0$, то

$$D^{\psi\phi}(f)(z) := D^{\psi}\left(zD^{\phi}(f)\right)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_k}{\psi_k \phi_k} z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Скрізь далі вважаємо, що послідовності ψ і ϕ задовольняють вказані вище умови і є такими, що суми степеневих рядів $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+1} z^k$ і $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k+1} z^k$ є функціями з $\mathscr{H}$.

Під класом $H_p^{\psi\phi}$ будемо розуміти множину функцій $f \in \mathscr{H}$, для яких $\|D^{\psi\phi}(f)\|_{H_p} \leq \ 1$.

Зокрема, якщо $\phi_k = 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то

$$H_p^{\psi\mathbf{1}} = H_p^{\psi} := \left\{ f \in \mathscr{H} : \|D^{\psi}(f)\|_{H_p} \leq 1 \right\}.$$

В даному підрозділі вивчаються наближення функцій з класів $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}$. Наша мета – розв'язати задачу Колмогорова–Нікольського (задачу К–Н) для величини

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) := \sup\{\|f - Z_{n,\psi}(f)\|_{H_p} : f \in H^{\psi\phi}\}.$$

Нагадаємо, що задача Колмогорова–Нікольського полягає у відшуканні пари (μ, ν) функцій натурального аргументу таких , що $\nu(n) = o(\mu(n))$, $n \to \infty$, і

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = \mu(n) + O(\nu(n)), \quad n \to \infty.$$

Зрозуміло, що задача К–Н відносно компоненти ν, взагалі кажучи, розв'язується не однозначно. Тому відшукання розв'язку $(\mu, 0)$, тобто точне обчислення величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right)$, є найбільш бажаним.

Для класів 2π-періодичних дійснозначних функцій узагальнені суми Зигмунда в контексті задачі К–Н досліджувалися у багатьох роботах (див. огляд в [102], а також роботи [100,76]). Стосовно ж голоморфних функцій таких досліджень проведено значно менше. Першим випадком розв'язання задачі К–Н для голоморфних функцій слід вважати теорему 1 в [104], з якої в наших позначеннях при $\psi_k = k^{-1}$, $\phi_k = k^{-s}, s \in \mathbb{N}$, випливає асимптотична рівність

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_\infty^{\psi\phi}; H_\infty) = n^{-1} + O(n^{-s}), \quad n \to \infty.$$

В. В. Савчук в [93] показав, що величина O у цьому співвідношенні дорівнює нулю, тобто, насправді має має місце рівність

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = n^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty.$$

В підрозділі 2.1.1 даного розділу узагальнено ці два співвідношення (наслідок 2.1.2) на випадок, коли $\psi_k = k^{-r}$, $\phi_k = k^{-s}$, $r, s \ge 0$ і $r + s > 0$, а саме, показано, що

$$\mathcal{Z}_{n,r}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = \begin{cases} n^{-r} + O\left(n^{-(r+s)}\right), & 0 \le s < 1, \\ n^{-r}, & s \ge 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Перше співвідношення в (2.1) випливає з теореми 2.1.1 і наслідку 2.1.1 даного підрозділу, в яких йдеться відповідно про поточкове наближення індивідуальної функції $H_p^{\psi\phi}$ всередині круга $\mathbb{D}$ і про розв'язок задачі К–Н для величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right)$ у деяких важливих випадках. Друге співвідношення випливає з теореми 2.1.1, в якій йдеться про точне значення величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right)$.

Важливо звернути увагу ще на таку обставину. Для будь-яких комплексних послідовностей ψ і ϕ таких, що $\psi_1 = \phi_1 = 1$ і $|\psi_k| > 0$, $|\phi_k| > 0$, $k = 2, 3, \ldots$, виконується нерівність

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) \geq \|f^* - Z_{n,\psi}(f^*)\|_{H_p} = |\psi_n|, \tag{2.2}$$

де $f^*(z) = z$. До того ж, як це випливає з основного результату в [4], співвідношення $\|f - Z_{n,\psi}(f)\|_{H_p} = o(|\psi_n|), n \to \infty$, не може виконуватися для жодної функції $f \in H_p$, окрім сталої. Таким чином порядок $O(|\psi_n|)$ є максимальним порядком малості величини $\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi}; H_p\right)$. У зв'язку з цим, природно виникає питання: за яких умов на послідовність ψ цей порядок малості досягається. Ми покажемо (теорема 2.1.2), що для цього достатньо вимагати, щоб послідовність ψ була моментною послідовністю в сенсі проблеми моментів Гаусдорфа і задовольняла умову $\psi_k = O(\psi_{2k})$, $k \in \mathbb{N}$.

В теоремі 2.1.3 дано опис множини всіх послідовностей ϕ, для яких при заданій послідовності ψ справджується рівність

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_\infty^{\psi\phi}; H_\infty) = |\psi_n|, \tag{2.3}$$

тобто, коли коли узагальнені суми Зигмунда $Z_{n\psi}$ наближають клас $H_\infty^{\psi\phi}$ з мінімально можливою похибкою.

В підрозділі 2.2 доведено два твердження про властивості послідовностей ψ і ϕ, які фігурують у формулюванні теорем 2.1.1–2.1.3.

2.1.1 Основні результати

Має місце таке твердження.

Теорема 2.1.1 . *Нехай* $1 \le p \le \infty$,

$$\psi_k = \int_0^1 \rho^{k-1} d\lambda(\rho), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

де λ *– обмежена неспадна функція на* $[0, 1]$ *така, що* $\int_0^1 d\lambda = 1$, *і* ϕ *— послідовність комплексних чисел така, що для всіх натуральних* n, *починаючи з деякого* n_0,

$$K_{n,\phi}(z) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_{k+n}}{\phi_n} z^k \ge 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.5}$$

Тоді для будь-якої функції $f \in H_p^{\psi\phi}$ *справджується співвідношення*

$$f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) = \psi_n z D^{\psi}(f)(z) + \varepsilon_n(z, f) \quad \forall\ n \ge n_0,\ z \in \mathbb{D}, \tag{2.6}$$

де

$$\|\varepsilon_n(\rho\ \cdot, f)\|_{H_p} \le \rho^n |\phi_n| \left(\psi_n + \psi_{[\frac{n+1}{2}]}\right)\ \forall\ n \ge n_0,\ \rho \in [0, 1],$$

$[\cdot]$ *— ціла частина числа.*

Безпосередньо з теореми 2.1.1 випливає

Наслідок 2.1.1 . *Нехай виконуються умови теореми 2.1.1, при цьому умова (2.5) виконується для всіх* $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n = O(\psi_{2n})$, $\phi_1 = 1$ *і* $\phi_n = o(1)$. *Тоді*

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = \psi_n + O\left(|\phi_n| \psi_n\right), \quad n \to \infty. \tag{2.7}$$

Співвідношення (2.7) розв'язують задачу К–Н у вказаних випадках.

Порядкові оцінки величини $Z_{n,\psi}\left(H_p^{\psi}; H_p\right)$ даються в наступному твердженні.

Теорема 2.1.2 . *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* ψ *— послідовність така, як в теоремі 2.1.1. Тоді*

$$\psi_n \le \mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi}; H_p\right) \le \psi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Розглянемо задачу про опис множини всіх послідовностей ϕ, для яких

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}(H_\infty^{\psi\phi}; H_\infty) = |\psi_n|. \tag{2.9}$$

Зазначимо, що рівність (2.9) є екстремальною в тому розумінні, що для будь-яких комплексних послідовностей ψ і ϕ таких, що $\psi_1 = \phi_1 = 1$ і $|\psi_k| > 0$, $|\phi_k| > 0$,

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) \ge \|f^* - Z_{n,\psi}(f^*)\|_{H_p} = |\psi_n|, \tag{2.10}$$

де $f^*(z) = z$. Більше того, як це випливає з основного результату в [4], співвідношення $\|f - Z_{n,\psi}(f)\| = o(|\psi_n|), n \to \infty$, не може виконуватися для жодної функції $f \in H_\infty$, окрім сталої.

Має місце

Теорема 2.1.3 . *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *і* $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— послідовності комплексних чисел таких, що* $\psi_1 = \phi_1 = 1$ *і* $|\psi_k| > 0$, $|\phi_k| > 0$. *Рівність (2.9) справджуються тоді і тільки тоді, коли*

$$M_{n,\psi,\phi}(z) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \phi_{k+1} z^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_{k+1}\phi_{k+1}}{\psi_n} z^k\right) \ge 0^1 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{2.11}$$

За умови (2.11), для будь-якого $p \ge 1$

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) = |\psi_n|. \tag{2.12}$$

[1]при $n = 1$ перша сума покладається рівною нулеві

Позначимо через H_p^{r+s} клас $H_p^{\psi\phi}$ при $\psi_k = k^{-r}$ і $\phi_k = k^{-s}$ і нехай при цьому $\mathcal{Z}_{n,r} := \mathcal{Z}_{n,\psi}$. Зауважимо, що в такому випадку

$$D^{\psi\phi}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{r+s}\widehat{f}(k+1)z^k.$$

Наступне твердження дає розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для сум Зигмунда на класах H_p^{r+s}.

Наслідок 2.1.2 . *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, $r, s \geq 0$ *і* $r+s>0$. *Тоді*

$$\mathcal{Z}_{n,r}\left(H_p^{r+s}; H_p\right) = \begin{cases} n^{-r} + O\left(n^{-(r+s)}\right), & 0 \leq s < 1, \\ n^{-r}, & s \geq 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо також, що цей наслідок дає розв'язок задачі про насичення лінійного методу Зигмунда.

Нагадаємо означення насичення в просторі лінійного методу.

Означення 2.1.1 . *[20, 115] Нехай X — один з просторів C або L_p, $p \in [1,\infty)$, і $U_n(\Lambda)$ — лінійний метод сумування рядів Фур'є, що породжує поліноми $U_n(f;x;\Lambda)$ виду $\|f\|_{L_p} = \|f\|_{H_p} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\phi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Якщо існує додатня, монотонно спадна до нуля функція $\phi_\Lambda(n), n \in N$, така, що із співвідношення $\|f(x)-U_n(f;x;\Lambda)\|_X = o(\phi_\Lambda(n)), n\to\infty$ випливає, що $f(x) \equiv const$ при $X = C$ і $f(x) = const$ майже всюди при $X = L_p$, і знайдеться хоча б одна функція $f(\cdot)$, відмінна від сталої, для якої виконується $\|f(x)-U_n(f;x;\Lambda)\|_X = O\big(\phi_\Lambda(n)\big), n\to\infty$, то кажуть, що метод $U_n(\Lambda)$ є насиченим в просторі X.*

2.1.2 Доведення результатів

Доведення теорем 2.1.1 і 2.1.2 спираються на таке твердження.

Лема 2.1.1 . *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і* ψ *— послідовність комплексних чисел, для яких має місце (2.4), де* λ *— комплекснозначна функція обмеженої варіації на* $[0,1]$ *така, що* $\int_0^1 d\lambda = 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in H_p^{\psi\phi}$ *в кожній точці* $z \in \mathbb{D}$ *і майже в кожній точці* $z \in \mathbb{T}$

$$f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) =$$

$$= \phi_n z^n \int_0^1 \int_0^{2\pi} D^{\psi\phi}(f)(\rho e^{it})\rho^{n-1} e^{-i(n-1)t} K_{n,\phi}(\rho e^{it} z) \frac{dt}{\pi}\, d\lambda(\rho^2) + \tag{2.13}$$

$$+\psi_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - |z|^{2(n-k)} \frac{\overline{\phi}_{2n-k}}{\phi_k} e^{2i \arg \phi_n}\right) \frac{\widehat{f}_k}{\psi_k} z^k \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Розглянемо внутрішній інтеграл в (2.13). Позначивши для зручності $g(z) := D^{\psi\phi}(f)(\rho z)$, $c_k = \rho^k \phi_{k+n}/\phi_n$ і скориставшись відомою тотожністю (див. [31, с. 494]), для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ і $\rho \in [0,1)$ одержимо рівність

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D^{\psi\phi}(f)(\rho e^{it}) e^{-i(n-1)t} K_{n,\phi}(\rho e^{it} z) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-i(n-1)t} \left(1 + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k e^{-ikt}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \widehat{g}_k \overline{c}_{n-k-1} \overline{z}^{n-k-1} + \sum_{k=n-1}^{\infty} \widehat{g}_k c_{k-n+1} z^{k-n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\widehat{f}_{k+1}\rho^k}{\psi_{k+1}\phi_{k+1}} \frac{\overline{\phi}_{2n-k-1}\rho^{n-k-1}}{\overline{\phi}_n} \overline{z}^{n-k-1} +$$

$$+ \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{k+1}\rho^k}{\psi_{k+1}\phi_{k+1}} \frac{\phi_{k+1}}{\phi_n} \rho^{k-n+1} z^{k-n+1} =$$

$$= \frac{1}{(\rho z)^{n-1}\phi_n}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\widehat{f}_{k+1}}{\psi_{k+1}}\frac{\overline{\phi}_{2n-k-1}}{\phi_{k+1}}\rho^{2(n-1)}|z|^{2(n-k-1)}z^k + \sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{\widehat{f}_{k+1}}{\psi_{k+1}}\rho^{2k}z^k\right).$$

Зінтегрувавши останню рівність по мірі $d\lambda(\rho^2)$, а потім змінивши порядок інтегрування і підсумовування, одержимо

$$\frac{\phi_n z^n}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} D^{\psi\phi}(f)(\rho e^{it})\rho^{n-1}e^{-i(n-1)t}K_{n,\phi}(\rho e^{it}z)dt\; d\lambda(\rho^2) =$$

$$= z\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\psi_n}{\psi_{k+1}}\widehat{f}_{k+1}\frac{\overline{\phi}_{2n-k-1}}{\phi_{k+1}}|z|^{2(n-k-1)}z^k + \sum_{k=n-1}^{\infty}\widehat{f}_{k+1}z^k\right) =$$

$$= f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi_n}{\psi_k}\widehat{f}_k z^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi_n}{\psi_k}\widehat{f}_k\frac{\overline{\phi}_{2n-k}}{\phi_k}|z|^{2(n-k)}z^k,$$

що й доводить рівність (2.13).

Доведення теореми 2.1.1. Позначимо для зручності $g(z) = zD^{\psi}(f)(z)$ і

$$U_{n,\phi}(g)(z) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - |z|^{2(n-k)}\frac{\overline{\phi}_{2n-k}}{\phi_k}e^{2i\arg\phi_n}\right)\widehat{g}_k z^k,$$

а через $I_{n,\psi,\phi}(f)(z)$ позначимо інтеграл в (2.13). Тоді формулу (2.13) можна переписати у вигляді

$$f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) =$$

$$= \psi_n g(z) + \phi_n z^n I_{n,\psi,\phi}(f)(z) + \psi_n\left(U_{n,\phi}(g)(z) - g(z)\right). \tag{2.14}$$

Оцінимо другий і третій доданки в правій частині (2.14).

Враховуючи, що згідно з умовами (2.5), (2.4),

$$\int_0^{2\pi} K_{n,\phi}(\rho e^{it}z)dt = \pi$$

і

$$\int_0^1 \rho^{n-1}d\lambda(\rho^2) = \int_0^1 \rho^{\frac{n-1}{2}}d\lambda(\rho) \le$$

$$\leq \int_0^1 \rho^{[\frac{n-1}{2}]} d\lambda(\rho) = \int_0^1 \rho^{[\frac{n+1}{2}]-1} d\lambda(\rho) = \psi_{[\frac{n+1}{2}]},$$

за нерівністю Гельдера одержимо оцінку

$$|I_{n,\psi,\phi}(f)(z)|^p \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| D^\psi(f)(\rho e^{it}) \right|^p \rho^{n-1} K_{n,\phi}(\rho e^{it} z) \frac{dt}{\pi}\, d\lambda(\rho^2) \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^{n-1} K_{n,\phi}(\rho e^{it} z) \frac{dt}{\pi}\, d\lambda(\rho^2) \right)^{p/q} \leq$$

$$\leq \psi^{p/q}_{[\frac{n+1}{2}]} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| D^\psi(f)(\rho e^{it}) \right|^p \rho^{n-1} K_{n,\phi}(\rho e^{it} z) \frac{dt}{\pi}\, d\lambda(\rho^2), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\|I_{n,\psi,\phi}(f)(\rho\cdot)\|_{L_p} \leq \|I_{n,\psi,\phi}(f)(\rho\cdot)\|_{H_p} \leq \psi^{1/p}_{[\frac{n+1}{2}]} \psi^{1/q}_{[\frac{n+1}{2}]} = \psi_{[\frac{n+1}{2}]}. \qquad (2.15)$$

Оскільки $g \in H_p^\phi$ і ϕ задовольняє умову (2.5), то, як це показано в [94],

$$\|U_{n,\phi}(g)(\rho\cdot) - g(\rho\cdot)\|_{H_p} \leq \rho^n |\phi_n| \|g(\rho\cdot)\|_{H_p} \leq \rho^n |\phi_n|. \qquad (2.16)$$

Разом співвідношення (2.15), (2.16) і рівність (2.14) доводять теорему 2.1.1.

Доведення наслідку 2.1.1. За допомогою формули Коші не складно переконатися в справедливості рівності

$$D^\psi(f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D^{\psi\phi}(f)(e^{i\theta}) K_{1,\phi}(z e^{i\theta}) d\theta \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

в якій під $D^{\psi\phi}(f)(e^{i\theta})$ розуміємо недотичні граничні значення функції $D^{\psi\phi}$ на колі $\mathbb{T} := \{z : |z| = 1\}$, які, в силу того, що $D^{\psi\phi} \in H_p$, існують майже в кожній точці на $\mathbb{T}$ і належать простору $L_p(\mathbb{T})$, причому $\|D^{\psi\phi}(f)\|_{H_p} = \|D^{\psi\phi}(f)\|_{L_p(\mathbb{T})}$.

Звідси за нерівністю Мінковського випливає співвідношення

$$\|D^\psi(f)\|_{H_p} \leq \|D^{\psi\phi}(f)\|_{H_p} \leq 1 \quad \forall\, f \in H_p^{\psi\phi}.$$

Отже, зі співвідношення (2.6) і останньої нерівності випливає оцінка зверху

$$\mathcal{Z}_{n,\psi}\left(H_p^{\psi\phi}; H_p\right) \leq \psi_n + O(|\phi_n|\psi_n),$$

яка разом з оцінкою знизу (2.10) і доводить наслідок 2.1.1.

Доведення теореми 2.1.2. Покладемо в (2.13) $\phi_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді умова (2.5) є виконаною (див. твердження 2.2.1), внаслідок чого має місце оцінка (2.15).

Отже, згідно з (2.15),

$$\|f_\rho - Z_{n,\psi}(f_\rho)\|_{L_p} \leq \rho^n \|I_{n,\psi,\phi}(f_\rho)\|_{L_p} + \psi_n \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \rho^{2(n-k)}\right)\frac{|\widehat{f}_k|}{\psi_k}\rho^k \leq$$

$$\leq \psi_{[\frac{n+1}{2}]} + \psi_n \|D^\psi(f)\|_{H_p} \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \rho^{2(n-k)}\right)\rho^k.$$

Перейшовши в цих співвідношеннях до границі при $\rho \to 1-$ з урахуванням того, що для будь-якої функції $f \in H_p$ $\|f\|_{H_p} = \lim_{\rho\to 1-}\|f_\rho\|_{L_p}$ (див., наприклад, [29, с. 64]), одержимо

$$\|f - Z_{n,\psi}(f)\|_{H_p} \leq \psi_{[\frac{n+1}{2}]},$$

що разом з (2.10) доводить теорему 2.1.2.

Доведення теореми 2.1.3. Нехай $D^{\psi\phi}(f)(e^{it})$, як і раніше, означає недотичні граничні значення в точці e^{it} функції $D^{\psi\phi}(f)$.

Застосувавши формулу Коші, нескладно показати, що для будь-якої функції $f \in H_p^{\psi\phi}$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z) =$$

$$= \frac{z\psi_n}{\pi}\int_0^{2\pi} D^{\psi\phi}(f)(e^{i(\theta+t)})M_{n,\psi,\phi}(\rho e^{it})dt \quad \forall\ z \in \mathbb{D}, z = \rho e^{i\theta}. \qquad (2.17)$$

На основі цієї формули, з урахуванням співвідношення (2.10), легко переконатися в достатності умови (2.11). До того ж, за умови (2.11), застосувавши до оцінки інтеграла в правій частині нерівність Мінковського, отримаємо рівність (2.12).

Для доведення необхідності умов (2.11) проведемо такі міркування.

З формули (2.17), враховуючи інваріантність класу $H_\infty^{\psi\phi}$ відносно зсуву за аргументом ($f \in H^{\psi\phi} \Rightarrow f(e^{i\theta}\cdot) \in H_\infty^{\psi\phi} \ \forall\ \theta \in [0, 2\pi]$), а також принцип максимуму модуля, для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ одержимо нерівність

$$|\psi_n||z|\mathcal{M}_n(|z|) = \sup\left\{|f(z) - Z_{n,\psi}(f)(z)| : f \in H_\infty^{\psi\phi}\right\} \le |\psi_n|,$$

де

$$\mathcal{M}_n(\rho) := \sup\left\{\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{it}) M_{n,\psi,\phi}(\rho e^{it})dt\right| : F \in UH_\infty\right\}.$$

Таким чином $\mathcal{M}_n(\rho) \le 1/\rho \ \forall\ \rho \in [0, 1)$.

З іншого боку, згідно зі співвідношеннями двоїстості для голоморфних функцій (див., наприклад, [29, с. 188]), справджується рівність

$$\mathcal{M}_n(\rho) = \min\{\|2M_{n,\psi,\phi}(\rho\cdot) - g_n(\rho,\cdot)\|_1 : g_n(\rho,\cdot) \in H_1^0\}, \quad \rho \in [0, 1), \tag{2.18}$$

де мінімум досягається для єдиної функції $w \mapsto g_n^*(\rho, w)$, $w \in \mathbb{D}$, з простору $H_1^0 := \{f \in H_1 : f(0) = 0\}$.

Тому

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2M_{n,\psi,\phi}(\rho e^{it})dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(2M_{n,\psi,\phi}(\rho e^{it}) - g_n^*(\rho, e^{it})\right) dt \le \mathcal{M}_n(\rho).$$

Отже,

$$1 \le \mathcal{M}_n(\rho) \le \frac{1}{\rho} \quad \forall\ \rho \in (0, 1). \tag{2.19}$$

Покажемо тепер, що функція $\rho \mapsto \mathcal{M}_n(\rho)$ не спадає на $[0, 1)$.

Нехай $0 \le \rho_1 < \rho_2 < 1$. Тоді за формулою Пуассона, застосованою до функції $z \mapsto 2M_{n,\psi,\phi}(\rho_2 z) - g_n^*(\rho_2, z)$, отримаємо

$$2M_{n,\psi,\phi}(\rho_1 e^{it}) - g_n^*\left(\rho_2, \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{it}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(2M_{n,\psi,\phi}(\rho_2 e^{i\theta}) - g_n^*(\rho_2, e^{i\theta})\right) \frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{|\rho_2-\rho_1 e^{i(t-\theta)}|^2}dt.$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{M}_n(\rho_1) \le \left\| 2M_{n,\psi,\phi}(\rho_1\cdot) - g_n^*\left(\rho_2, \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\right)\right\|_1 \le \mathcal{M}_n(\rho_2).$$

Отже, $\mathcal{M}_n(\rho) \nearrow$. Об'єднуючи цей факт з рівністю $\lim_{\rho\to 1-}\mathcal{M}_n(\rho) = 1$, яка випливає з (2.19), бачимо, що $\mathcal{M}_n(\rho) = 1$ для будь-якого $\rho \in [0,1)$. Внаслідок цього величина в правій частині рівності (2.18) також дорівнює 1, що, згідно з теоремою 2 роботи [94], можливе тоді і тільки, коли виконується (2.11).

Доведення наслідку 2.1.2. Досить показати, що послідовності $\psi = \{k^{-r}\}_{k=1}^{\infty}$ і $\phi = \{k^{-s}\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють умови наслідку 2.1.1 і теореми 2.1.3 при відповідних обмеженнях на параметр s.

Справді, оскільки

$$\psi_k = k^{-r} = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^1 \rho^{k-1}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{r-1} d\rho,$$

і до того ж $\psi_k = 2^r\psi_{2k}$, то ψ задовольняє умови наслідку 2.1.1.

Для послідовності ϕ маємо

$$K_{n,\phi}(z) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^s}{(k+n)^s}z^k =$$

$$= n^s\left(\frac{a_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)\cos kx\right), \tag{2.20}$$

де $a_k(z) = |z|^k(k+n)^{-s}$, $x = \arg z$.

Оскільки для кожного $z \in \mathbb{D}$ послідовність $\{a_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ є опуклою, і очевидно, $a_k(z) \downarrow 0$, то, згідно з відомим твердженням (див, наприклад, [41, с. 294]), сума ряду в правій частині (2.20) є невід'ємною.

Отже, $K_{n,\phi}$ задовольняє умову (2.5) при всіх $s \geq 0$. Тому справджується (2.7) при всіх $r \geq 0$ і $s \geq 0$.

Якщо ж $s \geq 1$, то

$$P_{n,\phi}(z) = \frac{b_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k(z) \cos kx}{k+1},$$

де $b_k(z) = |z|^k (k+1)^{1-s}$ і $x = \arg z$.

Оскільки для кожного $z \in \overline{\mathbb{D}}$ коефіцієнти $b_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, невід'ємні і незростаючі, то за теоремою Рогозинського–Сегьо (див., наприклад, [73, с. 330]) $P_{n,\phi}$ задовольняє умову (2.24) для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{D}$. Отже, за твердженням 2.2.2 виконується умова (2.11). Тому справджується рівність (2.12).

2.2 Доповнення до теорем 2.1.1 і 2.1.2

Нехай $\mathcal{R}_{n_0}$ — множина числових послідовностей $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, які задовольняють умову (2.5) для всіх натуральних $n \geq n_0$ при даному $n_0 \in \mathbb{N}$. Множину $\mathcal{R}_{n_0}$ будемо ототожнювати з множиною всіх голоморфних функцій, коефіцієнти Тейлора яких утворюють числову послідовність з $\mathcal{R}_{n_0}$.

В [89] встановлено низку властивостей голоморфних функцій з $\mathcal{R}_{n_0}$ стосовно до екстремальних задач теорії наближення голоморфних функцій.

Покажемо, що співвідношення (2.6) і (2.7), взагалі кажучи, не можуть бути наслідком теореми 2.1.3.

Твердження 2.2.1 . *Послідовність* $\phi = \mathbf{1} := \{1\}_{k=1}^{\infty}$ *задовольняє умову (2.5) при всіх* $n \in \mathbb{N}$, *але не задовольняє умову (2.11) одночасно для всіх* $n \in \mathbb{N}$, *якою б не була послідовність* ψ, *за виключенням випадку, коли* $\psi = \mathbf{1} = \{1\}_{k=1}^{\infty}$.

Доведення. Справді, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$K_{n,\mathbf{1}}(z) = M_{n,\mathbf{1},\mathbf{1}}(z) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z^k =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \geq 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.21}$$

Припустимо тепер, що виконується умова (2.11) для всіх натуральних n. Візьмемо довільну функцію $g \in UH_\infty$ і, зафіксувавши довільне $n \in \mathbb{N}$, побудуємо послідовність функцій $\{g_N\}_{N=0}^{\infty}$ за правилом

$$g_0 = g, \quad g_N(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_{N-1}(e^{it}) M_{n,\psi,\mathbf{1}}(ze^{-it})dt,\ N = 1, 2, \ldots.$$

Зрозуміло, що внаслідок (2.11) $g_N \in UH_\infty$, $N = 0, 1, 2, \ldots$.

З іншого боку, безпосереднім обчисленням легко переконатися в тому, що
$$g_N(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{g}_k z^k+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\psi_{k+1}}{\psi_n}\right)^N\widehat{g}_k z^k\quad\forall\ z\in\mathbb{D}.\tag{2.22}$$
Зокрема, поклавши $g(z)=z^m$, $m\geq n$, звідси отримаємо нерівність
$$\left|\frac{\psi_{m+1}}{\psi_n}\right|^N=\|g_N\|_\infty\leq 1\quad\forall\ N\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ m\geq n.$$
В силу довільності n, з цього співвідношення випливає, що
$$1\geq\left|\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\right|\geq\left|\frac{\psi_{n+2}}{\psi_n}\right|\geq\ldots\quad\forall\ n\in\mathbb{N},$$
причому для даного n знак рівності числу 1 може досягатися тільки у скінченній кількості перших підряд співвідношень, або ж у всіх одразу. Нам потрібно розглянути тільки перший з цих двох випадків. Тому далі, не втрачаючи загальності, вважаємо, що
$$1\geq|\psi_2|=\ldots=|\psi_n|>|\psi_{n+1}|>\ldots.\tag{2.23}$$

На основі розвинення (2.22) і нерівностей (2.23) отримуємо співвідношення
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{g}_k z^k\right|\leq|g_N(z)|+\left|\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\psi_{k+1}}{\psi_n}\right)^N\widehat{g}_k z^k\right|\leq$$
$$\leq 1+\left|\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\right|^N\frac{|z|^n}{1-|z|}\quad\forall\ z\in\mathbb{D}.$$
Звідси при $N\to\infty$ випливає, що
$$G_n:=\sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{g}_k\right|:g\in UH_\infty\right\}\leq 1.$$
Але, як це показав Е. Ландау (див., наприклад, [73, с. 442]),
$$G_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2>1,\quad n\geq 2.$$

Отримана суперечність доводить хибність припущення $M_{n,\mathbf{1},\psi}(z) \geq 0$ $\forall\ z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$.

Твердження доведено.

Твердження 2.2.2 . *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність додатних спадних до нуля чисел і $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовності комплексних чисел таких, що $|\phi_k| > 0$. Для виконання умови (2.11) достатньо, щоб*

$$P_{n,\phi}(z) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{k+1} z^k \geq 0 \quad \forall\ z \in \partial\mathbb{D}\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Доведення. Застосувавши до другої суми в (2.11) перетворення Абеля для рядів, що є законно в силу виконання умови $\psi_n \left| \sum_{j=0}^{n} \phi_{j+1} z^j \right| \to 0, n \to \infty\ \forall\ z \in \mathbb{D}$, отримаємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_{k+1}\phi_{k+1}}{\psi_n} z^k =$$

$$= -\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_{k+1} z^k + \frac{1}{\psi_n} \sum_{k=n}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_{k+2}) \sum_{j=0}^{k} \phi_{j+1} z^j.$$

Підставивши цей вираз в означення функції $M_{n,\psi,\phi}$ і врахувавши, що за принципом максимума модуля гармонічної функції $P_{n,\phi}(z) \geq 0\ \forall\ z \in \mathbb{D}$, отримаємо

$$M_{n,\psi,\phi}(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\psi_n} \mathrm{Re} \left(\sum_{k=n-1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_{k+2}) \sum_{j=0}^{k} \phi_{j+1} z^j \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\psi_n} \sum_{k=n-1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_{k+2}) \left(P_{n,\phi}(z) + \frac{1}{2} \right) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\psi_n} \sum_{k=n-1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_{k+2}) = 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

Твердження доведено.

Зауважимо, що у випадку, коли всі ϕ_k є дійсними числами, умова (2.24) є рівносильною такій

$$P_{n,\phi}(e^{it}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{k+1} \cos kt \geq 0 \quad \forall\, t \in [0,\pi]\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Детальний огляд про невід'ємні тригонометричні поліноми можна знайти в [73, Р. 4]. Найзагальніші на даний час достатні умови на дійсну послідовність ϕ, за яких $P_{n,\phi}(e^{it}) \geq 0$ дано в [16].

2.3 Мажоранти залишків рядів Тейлора обмежених голоморфних функцій

2.3.1 Наближення частинними сумами

Нехай B — клас функцій f, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{D} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$ і нехай

$$S_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k, \widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!,$$

— частинна сума порядку $n, n \in \mathbb{N}$, ряду Тейлора функції f.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо функцію R_n, визначену на відрізку $[0, 1]$ за правилом

$$R_n(\rho) := \begin{cases} \sup\{|f(\rho) - S_n(f)(\rho)| : f \in B\}, & \rho \in [0,1), \\ \\ \sup\{|f(z) - S_n(f)(z)| : f \in B,\ z \in \mathbb{D}\}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Функція R_n є мажорантою залишків рядів Тейлора функцій класу B, тобто для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$|f(z) - S_n(f)(z)| \le R_n(|z|) \quad \forall\ f \in B.$$

Справді, для будь-якої функції $f \in B$

$$|f(z) - S_n(f)(z)| \le \sup\{|f(t) - S_n(f)(t)| : f \in B,\ |t| = |z|\}.$$

Але оскільки клас B є інваріантним відносно повороту змінної, тобто з того, що $f \in B$, випливає, що $f(e^{i\theta}\cdot) \in B$ для будь-якого $\theta \in [0, 2\pi]$, права частина останньої нерівності збігається з $R_n(|z|)$.

В [90] показано, що

$$\rho^{-n} R_n(\rho) = \rho + \rho \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 \rho^{2k} + \varepsilon_n(\rho), \tag{2.25}$$

де $\varepsilon_n(\rho)$ — деяка величина така, що $|\varepsilon_n(\rho)| \leq 1$, а сума при $n = 1$ покладається рівною нулю.

У зв'язку з цим результатом, цікавим видається питання про те, як поводяться на відрізку $[0, 1]$ функції $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ і $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$.

Теорема 2.3.1 . *Функції $\rho \mapsto R_n(\rho)$ і $\rho \mapsto \rho^{-n} R_n(\rho)$ зростають на $[0, 1]$, причому*

$$1 < \rho^{-n} R_n(\rho) \ \forall \ \rho \in (0, 1].$$

Наслідок 2.3.1 . *Функція $\rho \mapsto \varepsilon_n(\rho)$, де $\varepsilon_n(\rho)$ визначається співвідношенням (2.25), є функцією обмеженої варіації на $[0, 1]$, причому*

$$\lim_{\rho \to 0+} \varepsilon_n(\rho) = 1.$$

Доведення. Очевидно, що $R_n(0) = 0$ і в силу принципа максимуму голоморфних функцій для будь-яких $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 < 1$ і $f \in B$

$$\max\{|f(e^{i\theta}\rho_1) - S_n(f)(e^{i\theta}\rho_1)| : \theta \in [0, 2\pi]\} \leq$$

$$\leq \max\{|f(e^{i\theta}\rho_2) - S_n(f)(e^{i\theta}\rho_2)| : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

що й доводить зростання функції R_n.

Нехай $f \in B$. Зафіксуємо довільне $\rho \in (0, 1)$ і розглянемо функцію

$$F(z) = f(\rho z) - S_n(f)(\rho z).$$

Оскільки $\widehat{f}_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і $\sup_{z \in \mathbb{D}} |F(z)| \leq R_n(\rho)$, то за лемою Шварца (див., наприклад, [7, с. 30])

$$|f(\rho\lambda) - S_n(f)(\rho\lambda)| = |F(\lambda)| \leq \lambda^n R_n(\rho) \quad \forall \ \lambda \in [0, 1].$$

З другого боку,

$$\sup\{|f(\rho\lambda) - S_n(f)(\rho\lambda)| : f \in B\} = R_n(\rho\lambda).$$

Отже, необхідно має виконуватися нерівність $R_n(\rho\lambda) \le \lambda^n R_n(\rho)$, або, що рівносильно,

$$\rho_1^{-n} R_n(\rho_1) \le \rho_2^{-n} R_n(\rho_2), \quad 0 < \rho_1 \le \rho_2 \le 1.$$

Переконаємося, в тому що $1 < R_n(\rho)\rho^{-n}\ \forall\ \rho \in (0,1]$.

В [77] показано, що лінійний метод наближення U_n, який будується за правилом

$$U_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \rho^{2(n-k)}\right) \widehat{f}_k z^k,$$

є єдиним найкращим лінійним методом наближення на колі $\mathbb{T}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ в рівномірній метриці, тобто для будь-яких комплексних чисел $\lambda_k \ne 1 - \rho^{2(n-k)}, k = \overline{0, n-1}$,

$$\mathcal{E}_n(\rho) := \max\{|f(z) - U_n(f)(z)| : f \in B,\ z \in \mathbb{T}_\rho\} <$$
$$< \max\left\{\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \widehat{f}_k z^k\right| : f \in B,\ z \in \mathbb{T}_\rho\right\},$$

і до того ж $\mathcal{E}_n(\rho) = \rho^n$.

Тому

$$\rho^n < \sup\{|f(z) - S_n(f)(z)| : f \in B,\ z \in \mathbb{T}_\rho\} = R_n(\rho).$$

Теорему доведено.

2.3.2 Одна екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій

На даний час відомо тільки про два випадки, коли функцію R_n вдалося подати у явному вигляді:

$$R_n(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2\rho}{1+\sqrt{1-\rho^2}}, & n = 1, \\ \\ \dfrac{2\rho^2}{1+\sqrt{1-\rho^2}} + \dfrac{\rho^6}{4(1+\sqrt{1-\rho^2})^4}, & n = 2. \end{cases} \tag{2.26}$$

Рівність (2.26) при $n = 1$ доведена в [21] і передоведена в [19] (без відповідного посилання на [21]), а при $n = 2$ — в [110].

Оскільки видання, в якому опублікована стаття [21], є важкодоступним, побачити оригінальне доведення першої рівності в (2.26) не вдалося. У зв'язку з цим видається доцільним навести інше доведення, яке до того ж є відмінним і від [19].

Суть даного методу доведення зводиться до розв'язання такої екстремальної задачі, не позбавленої й самостійного інтересу: *для даних* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *обчислити величину*

$$\Delta(z_1, z_2) := \max\{|f(z_1) - f(z_2)| : f \in B\}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

і знайти функцію f, для якої досягається максимум (таку функцію будемо називати екстремальною).

Розв'язком цієї задачі є

Теорема 2.3.2 . *Нехай $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}. \tag{2.27}$$

При фіксованих $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ єдиною з точністю до унімодулярного множника екстремальною функцією в (2.27) є

$$f(t) = \frac{\dfrac{t - z_2}{1 - t\overline{z}_2} - \alpha}{1 - \dfrac{t - z_2}{1 - t\overline{z}_2}\overline{\alpha}},$$

або

$$f(t) = \frac{\dfrac{t - z_1}{1 - t\overline{z}_1} - \beta}{1 - \dfrac{t - z_1}{1 - t\overline{z}_1}\overline{\beta}},$$

де

$$\alpha = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2} \frac{|1 - z_1\overline{z}_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}}, \ \beta = -\alpha\frac{1 - z_1\overline{z}_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}.$$

Зауважимо, що з рівності (2.27) випливає добре відоме співвідношення [7, с. 30]: для будь-якої функції $f \in B$

$$|f'(z)| = \left|\lim_{z_2 \to z} \frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2}\right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \forall\ z \in \mathbb{D},$$

в якому рівність при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ досягається для функції $f(t) = \omega(t - z)/(1 - t\overline{z})$, $|\omega| = 1$.

Зазначимо також, що рівність (2.27) можна знайти в [19]. Однак наведене нижче доведення теореми 2.3.2 є конструктивнішим ніж в [19], в тому розумінні, що воно дає повний опис множини всіх екстремальних функцій. Дане доведення рівності (2.27) спирається на лему Шварца–Піка, на відміну від [19], де ключовим моментом було використання теореми Ландау–Тепліца.

Доведення. Зафіксуємо довільне $z_2 \in \mathbb{D}$, візьмемо довільну функцію $f \in B$ і розглянемо підклас $B(f)$, який породжується функцією f і складається з функцій $g \in B$ вигляду

$$g(t) = \frac{\dfrac{f(t) - f(z_2)}{1 - f(t)\overline{f(z_2)}} - \lambda}{1 - \dfrac{f(t) - f(z_2)}{1 - f(t)\overline{f(z_2)}}\overline{\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Для довільного фіксованого $z_1 \in \mathbb{D}$ покладемо

$$w := \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}}.$$

Тоді для будь-якої функції $g \in B(f)$

$$|g(z_1) - g(z_2)| = \left| \frac{w - \lambda}{1 - w\overline{\lambda}} + \lambda \right| \leq$$

$$\leq |w| \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\lambda||w|} =: \mathcal{R}(|\lambda|) \leq \max\{\mathcal{R}(\rho) : \rho \in [0, 1]\}. \tag{2.28}$$

Дослідивши функцію $\mathcal{R}$ на екстремум на відрізку $[0, 1]$, знаходимо, що її максимум досягається в точці $\rho^* := (1 - \sqrt{1 - |w|^2})/|w|$, причому

$$\max\{\mathcal{R}(\rho) : \rho \in [0, 1]\} = \mathcal{R}(\rho^*) = \frac{2|w|}{1 + \sqrt{1 - |w|^2}}. \tag{2.29}$$

Оскільки за нерівністю Шварца–Піка (див., наприклад, [7, с. 30])

$$|w| = \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2} \right|, \tag{2.30}$$

то з рівності (2.29) після елементарних перетворень одержуємо оцінку

$$\mathcal{R}(\rho^*) \leq \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}}. \tag{2.31}$$

Легко бачити, що

$$f(t) = \frac{\dfrac{f(t) - f(Z)}{1 - f(t)\overline{f(Z)}} + f(Z)}{1 + \dfrac{f(t) - f(Z)}{1 - f(t)\overline{f(Z)}}\overline{f(Z)}}, \quad Z := z_1 \vee z_2. \tag{2.32}$$

Тому функція $f \in B(f)$ і для неї справджується співвідношення (2.28), яке разом з (2.29) і (2.31) доводить нерівність

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{2|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}} \quad \forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

При фіксованих $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ рівність у цьому співвідношенні можлива тоді і тільки тоді, коли для функції f одночасно досягаються всі рівності в (2.28) і (2.30).

Оскільки нетривіальна рівність в (2.30) досягається тільки для функцій (див., наприклад, [7, с.30])

$$f(t) = e^{i\phi}\frac{t-a}{1-t\overline{a}}, \quad a \in \mathbb{D},\ \phi \in \mathbb{R}, \tag{2.33}$$

то для виконання рівності в (2.28) необхідно і достатньо, щоб така функція задовольняла умову

$$-f(z_2) = e^{i(\arg w + \phi)}\rho^* =$$
$$= e^{i\phi}\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\frac{2|1 - z_1\overline{z}_2|}{|1 - z_1\overline{z}_2| + \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}} =: e^{i\phi}\alpha, \tag{2.34}$$

або ж умову

$$-\ f(z_1) = -e^{i\phi}\alpha\frac{1 - z_1\overline{z}_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} =: e^{i\phi}\beta. \tag{2.35}$$

Оскільки $|\alpha| = |\beta| < 1$, а екстремальна функція f є автоморфізмом круга $\mathbb{D}$, то множина автоморфізмів, для яких виконується (2.34) або (2.35), є непорожньою.

Виділивши клас таких екстремальних функцій і підставивши (2.33) в (2.32), після елементарних перетворень одержимо загальний вигляд екстремальної функції.

Теорему доведено.

2.3.3 Екстремальна задача для функцій класу Гарді

Нехай $\mathcal{B}$ – клас функцій f, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$ і нехай $\mathcal{B}_1$ – клас Гарді голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\|f\|_1 := \sup_{\rho\in[0,1)} \int_{\mathbb{T}} |f(\rho t)| d\sigma(t) \le 1,$$

де σ – нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$.

В [21] показано, що

$$\max\{|f(z) - f(0)| : f \in \mathcal{B}\} = \frac{2|z|}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}, \tag{2.36}$$

а максимум в (2.36) при фіксованому z досягається для функції

$$f(t) = \lambda \frac{t - a}{1 - \overline{a}t}, \quad |\lambda| = 1,\ a = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - |z|^2}}.$$

В даному підрозділі розв'язана аналогічна екстремальна задача щодо величин $|f(z) - f(0)|$, $z \in \mathbb{D}$, на класі $\mathcal{B}_1$.

Теорема 2.3.3 . *Нехай $z \in \mathbb{D}$. Тоді*

$$\max\{|f(z) - f(0)| : f \in \mathcal{B}_1\} = \frac{|z|(|z| + \sqrt{4 - 3|z|^2})}{2(1 - |z|^2)}. \tag{2.37}$$

Максимум в (2.37) досягається для функції

$$f_*(t) = \frac{\alpha}{2\alpha - z} \left(\frac{1 - \overline{\alpha}t}{1 - \overline{z}t}\right)^2,$$

де $\alpha = e^{i \arg z}(|z| - \sqrt{4 - 3|z|^2})/2$.

Доведення. Рівність (2.37) є тривіальною для $z = 0$. Тому в подальших міркуваннях цей випадок виключаємо.

Нехай f – довільна функція, голоморфна в $\mathbb{D}$, для якої $\|f\|_1 < \infty$. Добре відомо, що для такої функції існують недотичні граничні значення майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ і для них справджується формула Коші, за якою

$$f(z) - f(0) = \int_{\mathbb{T}} f(t) \frac{\bar{t}z}{1 - \bar{t}z} d\sigma(t) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Нехай B — довільна функція, обмежена і голоморфна в $\mathbb{D}$. Зафіксувавши довільне $z \in \mathbb{D}$ і застосувавши останню формулу до функції $t \mapsto f(t)B(t)(1 - t\overline{z})$, отримаємо рівність

$$f(z)B(z)(1 - |z|^2) - f(0)B(0) = z \int_{\mathbb{T}} f(t)B(t) \frac{1 - t\overline{z}}{1 - \bar{t}z} \bar{t} d\sigma(t). \tag{2.38}$$

Підібравши функцію B так, щоб

$$B(z)(1 - |z|^2) = B(0) \neq 0, \tag{2.39}$$

з рівності (2.38) отримаємо формулу

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{B(0)} \int_{\mathbb{T}} f(t)B(t) \frac{1 - t\overline{z}}{1 - \bar{t}z} \bar{t} d\sigma(t). \tag{2.40}$$

Переконаємося, що умову (2.39) завжди можна задовольнити. Для цього візьмемо у ролі B функцію вигляду

$$B(t) = \frac{t - \alpha}{1 - \overline{\alpha} t}, \tag{2.41}$$

де $\alpha = e^{i \arg z} \rho$, $-1 < \rho < 1$. Тоді умова (2.39) набуває вигляду

$$\frac{|z| - \rho}{1 - |z|\rho}(1 - |z|^2) = -\rho,$$

що є рівносильним такому рівнянню відносно параметра ρ:

$$\rho^2 - |z|\rho - (1 - |z|^2) = 0. \tag{2.42}$$

Розв'язками цього рівняння є числа $(|z| \mp \sqrt{4 - 3|z|^2})/2$, серед яких тільки розв'язок $\rho = (|z| - \sqrt{4 - 3|z|^2})/2$ задовольняє умову $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$, яким би не було $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Отже, умову (2.39) виконано для функції B вигляду (2.41) із вказаним параметром α.

Для такої функції B рівність (2.40) після елементарних перетворень набуває вигляду

$$f(z) - f(0) =$$
$$= \frac{|z|(|z| + \sqrt{4-3|z|^2})}{2(1-|z|^2)} \int_{\mathbb{T}} f(t) \frac{t-\alpha}{1-\overline{\alpha}t} \frac{1-t\overline{z}}{1-\overline{t}z} \overline{t} d\sigma(t). \tag{2.43}$$

Якщо тепер f – довільна функція з класу $\mathcal{B}_1$, то з рівності (2.43) випливає оцінка

$$|f(z) - f(0)| \le \frac{|z|(|z| + \sqrt{4-3|z|^2})}{2(1-|z|^2)}, \tag{2.44}$$

оскільки

$$\left| \frac{t-\alpha}{1-\overline{\alpha}t} \frac{1-t\overline{z}}{1-\overline{t}z} \overline{t} \right| = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{T}.$$

Переконаємося, що функція f_* є екстремальною, тобто для неї співвідношення (2.44) є рівністю.

Перш за все зауважимо, що

$$\|f_*\|_1 \le \|f_*\|_\infty \le \frac{\rho}{|z| - 2\rho} \left(\frac{1+\rho}{1-|z|} \right)^2 < \infty.$$

Тому ми вправі скористатися формулою (2.43), за якою

$$\|f_*\|_1 = \frac{\alpha}{2\alpha - z} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1-\overline{\alpha}t}{1-\overline{z}t} \right|^2 d\sigma(t) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\alpha - z} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1-\overline{\alpha}t}{1-\overline{z}t} \right)^2 \frac{t-\alpha}{1-\overline{\alpha}t} \frac{1-t\overline{z}}{1-\overline{t}z} \overline{t} d\sigma(t) =$$

$$= -\frac{\alpha}{z}(f_*(z) - f_*(0)) =$$

$$= -\frac{\alpha}{z} \frac{\alpha}{2\alpha - z} \left(\left(\frac{1-\overline{\alpha}z}{1-|z|^2} \right)^2 - 1 \right) =$$

$$= \frac{-\rho^2}{2\rho - |z|} \frac{(|z| - \rho)(2 - \rho|z| - |z|^2)}{(1 - |z|^2)^2} =$$

$$= \frac{\rho^2 - |z|\rho}{1 - |z|^2} \cdot \frac{2\rho - \rho^2|z| - \rho|z|^2}{(2\rho - |z|)(1 - |z|^2)} =$$

$$= \frac{\rho^2 - |z|\rho}{1 - |z|^2} \cdot \frac{2\rho(1 - |z|^2) - |z|(\rho^2 - |z|\rho)}{(2\rho - |z|)(1 - |z|^2)} = 1,$$

оскільки згідно з (2.42) $\rho^2 - |z|\rho = 1 - |z|^2$.

Ці рівності доводять включення $f_* \in \mathcal{B}_1$ і екстремальність функції f_*.

Теорему доведено.

2.4 Висновки до розділу 2

1. Встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайдено необхідні та достатні умови на послідовність $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

2. Досліджено поведінку на відрізку $[0,1]$ мажоранти R_n залишків рядів Тейлора порядку $n, n \in \mathbb{N}$, обмежених голоморфних функцій в одиничному крузі $\mathbb{D}$ і розв'язано экстремальну задачу про обчислення величини $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, на даному класі функцій.

3. Розв'язана екстремальна задача про обчислення величини $\max|f(z_1)-f(z_2)|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\sup_{t\in\mathbb{D}}|f(t)| \le 1$.

4. Розв'язана екстремальна задача про обчислення величини $\max|f(z)-f(0)|$, $z \in \mathbb{D}$, на класі Гарді голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\|f\|_1 \le 1$.

Розділ 3

Оцінки голоморфних функцій в полікрузі

3.1 Точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених голоморфних функцій в полікрузі

Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх впорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1\le j\le m} |z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг і $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j = \overline{1,d}\}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$. Нормовану міру Лебега на $\mathbb{T}^d$, тобто добуток нормованих мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^d$, будемо позначати через $\sigma = \sigma_d$.

Нехай далі $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\mathbb{D}^d)$ – множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}^d$, $B = B(\mathbb{D}^d)$ – клас функцій $f \in \mathscr{H}$, для яких $\sup\limits_{\mathbf{z}\in\mathbb{D}^d} |f(\mathbf{z})| \le 1$ і

$$\widehat{f}_{\mathbf{k}} := \frac{1}{\mathbf{k}!}\left(\frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_d^{k_d}}\right)_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}$$

– коефіцієнти Тейлора функції f, де $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ – мультиіндекс, $k_j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{1,d}$, $\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_d!$, $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_d$ і $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$.

Даний розділ дисертації присвячено обчисленню для даних мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ величин

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|}{1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2} : f \in B \right\}$$

і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X) := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|}{1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|} : f \in X \right\},\ X \subset \mathscr{H},\ L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(B) =: L_{\mathbf{m},\mathbf{n}},$$

які є точними константами в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора при мультиіндексах $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ функцій з $\mathscr{H}(\mathbb{D}^d)$:

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2\right) \quad \forall\ f \in B, \tag{3.1}$$

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X) \left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right) \quad \forall\ f \in X \subset \mathscr{H}. \tag{3.2}$$

Цілком зрозуміло, що $1 \le W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \le L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \le 2W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ для будь-яких мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

Добре відомо, що в одновимірному випадку, коли $\mathbf{m} = 0$ і $\mathbf{n} = n$, справджується рівність $W_{0,n} = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, тобто співвідношення (3.1) має місце з точною константою 1, а (3.2) при $X = B$ – з константою 2.

Як зазначив О. Сас [99] (див. виноску на стор. 308), найраніша згадка про нерівність (3.1) датована 1906 роком і пов'язана з іменем Е. Ландау, який довів, що (3.1) має місце для значень $m = 0$ і $n = 1$. У випадку ж $m = 0$ і довільного значення натурального n доведення нерівності (3.1) належить Ф. Вінеру і вперше опубліковане з його дозволу в роботі Г. Бора [15].

Згодом Г. М. Голузін [33] (див. виноску на стор. 72) зазначив, що нерівність (3.1) з константою $W_{m,n} = 1$ справджується при довільних m

і n, пов'язаних співвідношенням $n \geq 2m+1$, $m \geq 0$, і цей факт легко отримати виходячи з частинного випадку, коли $m=0$ і $n=1$.

Питання про екстремальні функції, на яких реалізується величина $W_{m,n}$, розв'язав Г. М. Голузін в [32], показавши, що екстремальними є тільки функції вигляду

$$f(z) = \frac{cz^m + \eta z^n}{1 + \bar{c}\eta z^{n-m}}, \quad |c| \leq 1, \tag{3.3}$$

де $|\eta| = 1$, якщо $|c| < 1$, і $\eta = 0$, якщо $|c| = 1$.

Зафіксуємо мультиіндекс $\mathbf{m}$, число $a \in [0,1]$ і позначимо

$$B^a_{\mathbf{m}} = B^a_{\mathbf{m}}(\mathbb{D}^d) := \left\{ f \in B(\mathbb{D}^d) : \left| \widehat{f}_{\mathbf{m}} \right| \leq a \right\}.$$

Зрозуміло, що $B^1_{\mathbf{m}} = B$ для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{m}$.

В одновимірному випадку, виходячи з результатів про константи $W_{m,n}$ і явного вигляду екстремальних функцій, які реалізують цю величину, легко показати, що при $n \geq 2m+1, m \geq 0$, справджується рівність

$$L_{m,n}(B^a_m) = 1 + a \quad \forall\, a \in [0,1].$$

Справді, для будь-якої функції $f \in B^a_m$

$$\frac{\left| \widehat{f}_n \right|}{1 - \left| \widehat{f}_m \right|} \leq 1 + \left| \widehat{f}_m \right| \leq 1 + a, \tag{3.4}$$

а для функцій вигляду (3.3) при $|c| = a < 1$ всі ці співвідношення перетворюються в рівності. Якщо ж $a = 1$, то для функцій вигляду (3.3) перше співвідношення в (3.4) перетворюється в рівність, звідки при $|c| \to 1$ випливає, що $L_{m,n} \geq 2$.

Слід зазначити, що всі вищенаведені результати про константи $W_{m,n}$ і $L_{m,n}$ можна легко отримати з одного загального твердження О. Саса [98].

Розглянемо багатовимірний випадок.

Виходячи з добре відомого факту про те, що для будь-якої функції $f \in B$ і будь-яких $\omega \in \mathbb{D}^1$ і $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ має місце розклад

$$f(\omega \mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \widehat{f}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right) \omega^n,$$

причому $|f(\omega \mathbf{z})| \leq 1$, легко показати (з огляду на одновимірний випадок), що

$$\sum_{|\mathbf{k}|=1} \left| \widehat{f}_{\mathbf{k}} \right| \leq 1 - \left| \widehat{f}(\mathbf{0}) \right|^2. \tag{3.5}$$

З нерівності (3.5) і одновимірних результатів для мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $|\mathbf{n}| = 1$ випливає рівність

$$W_{\mathbf{0},\mathbf{n}} = 1. \tag{3.6}$$

Питання про нетривіальні екстремальні функції, тобто функції з усіма частинними похідними, відмінними від тотожного нуля в $\mathbb{D}^d$, на яких реалізується величина $W_{\mathbf{0},\mathbf{n}}$ в (3.6) дослідив Г. Кнесе [49]. Зокрема, він показав, що при $d = 2$ такими є функції вигляду

$$f(z_1, z_2) = \mu \frac{a z_1 + b z_2 - z_1 z_2}{1 - \bar{b} z_1 - \bar{a} z_2}, \quad |\mu| = |a| + |b| = 1, \ (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2.$$

І. І. Баврін [9] показав, що рівність (3.6) справджується для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $0 \leq n_j \leq 1$, $j = 0, \ldots, d$ і $|\mathbf{n}| \geq 1$.

Г. Боас і Д. Хавінсон (див. доведення теореми 2 в [14]) доповнили співвідношення (3.5) показавши, що для будь-якого натурального n

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \left| \widehat{f}_{\mathbf{k}} \right|^2 \right)^{1/2} \leq 1 - \left| \widehat{f}(\mathbf{0}) \right|^2, \tag{3.7}$$

цим самим ними доведено рівність (3.6) для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$, відмінного від $\mathbf{0}$.

Елементарне доведення нерівності (3.7), а відтак і рівності (3.6), яке базується на понятті оператора стиску в гільбертовому просторі, дали В. І. Паулсен, Г. Попеску і Д. Сінгх [79].

Нехай $RB = RB(\mathbb{D}^d) := \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}^d) : \operatorname{Re} f \leq 1, f(\mathbf{0}) > 0\}$.

Використовуючи ідеї доведення співвідношення (3.7) з [14] та однієї нерівності з [79] (див. доведення теореми 3.1.1), можна показати, що для будь-якої функції $f \in RB$ і будь-якого натурального n

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=n} \left|\widehat{f}_{\mathbf{k}}\right|^2\right)^{1/2} \leq 2\left(1 - \widehat{f}(\mathbf{0})\right).$$

Звідси для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| > 0$, випливають рівності

$$L_{0,\mathbf{n}} = L_{0,\mathbf{n}}(RB) = 2.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $\mathbb{N}(n) := \mathbb{N} \setminus \{j > n : j = 0 \bmod n\}$ і

$$B_{\mathbb{N}(n)} := \left\{f \in B(\mathbb{D}^d) : f(\mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{0}) + \sum_{j \in \mathbb{N}(n)} \sum_{|\mathbf{k}|=j} \widehat{f}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d\right\},$$

де $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d}$.

Зрозуміло, що клас $B_{\mathbb{N}(n)}$ включає в себе клас "трикутних" алгебраїчних многочленів $P_n^{\Delta} := \{f \in B(\mathbb{D}^d) : f(\mathbf{z}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} \widehat{f}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\}$, а перетин $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_{\mathbb{N}(n)}$ утворює клас

$$B_{\Pi} := \left\{f \in B(\mathbb{D}^d) : f(\mathbf{z}) = \widehat{f}(\mathbf{0}) + \sum_{p \in \Pi} \sum_{|\mathbf{k}|=p} \widehat{f}_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d\right\},$$

де Π – множина простих чисел.

Л. А. Айзенберг і А. Відрас [1] показали, що для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$ такого, що $|\mathbf{n}| = n$

$$L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(P_n^{\Delta}) = L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(B_{\mathbb{N}(n)}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.8}$$

і для будь-якого мультиіндексу $\mathbf{n}$, такого, що $|\mathbf{n}| \in \Pi$,

$$L_{\mathbf{0},\mathbf{n}}(B_{\Pi}) = 1.$$

В одновимірному випадку рівність $L_{0,n}(P_n^{\Delta}) = 1$ вперше була доведена Р. С. Віссером [25], і ним же показано, що екстремальними многочленами, на яких реалізується величина $L_{0,n}(P_n^{\Delta})$, є тільки многочлени вигляду $f(z) = a + bz^n$, $|a| + |b| = 1$.

3.1.1 Основні результати

З огляду на вищенаведені результати здається, що константи $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ і $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ у випадку довільної пари мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ залишаться такими ж, як і в одновимірному випадку. Покажемо, що це не так для констант $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ при $d \geq 2$, а саме, що величини цих констант залежать від того, як співвідносяться між собою компоненти мультиіндексів $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

Теорема 3.1.1 . *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ – різні мультиіндекси. Тоді:*

1) якщо в мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j + 1$, то

$$W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

2) якщо $d \geq 2$, а в мультиіндексі $\mathbf{n}$ є хоча б одна компонента n_j, яка задовольняє умову $n_j \geq 2m_j + 1$, і одна компонента n_i, яка задовольняє умову $n_i \leq (m_i - 1)/2$, то

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1;$$

3) якщо мультиіндекс $\mathbf{n}$ задовольняє умову $n_j \geq m_j$, $j = 1, \ldots, d$ і хоча б для однієї компоненти n_i виконується умова $n_i \geq 2m_i + 1$, то

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 2.$$

Зауваження 3.1.1 . *З рівності* $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$ *в силу того, що* $\sup_{\mathbf{m}} \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| \leq 1$, *для будь-якої функції* $f \in B(\mathbb{D}^d)$ *і* $\rho \in [0,2]$ *випливає оцінка*

$$\rho \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq 1 + \rho \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2 \leq$$

$$\leq \max\{1 + \rho x - x^2 : x \in [0,1]\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}. \tag{3.9}$$

Цікавим видається питання про те, коли ці співвідношення перетворюються в рівності.

Дане питання розв'язано в [98] для одновимірного випадку: при $d = 1$, $0 \leq \rho < 2$ і $n \geq 2m + 1$, $m \geq 0$, рівності в (3.9) мають місце тільки для функцій

$$\mu \frac{\rho z^m + 2\eta z^n}{\rho \eta z^{n-m} + 2} = \mu \frac{\rho}{2} z^m + \mu \eta \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) z^n + \ldots, \ |\mu| = |\eta| = 1.$$

У випадку $\rho = 1$, цей факт раніше був встановлений Д. Помпея [81] (див. також [53, с. 26]).

В багатовимірному випадку мають місце такі твердження, які випливають з теореми 3.1.1.

Наслідок 3.1.1 . *За умов пункту 2) теореми 3.1.1 справджується рівність*

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| : f \in B(\mathbb{D}^d)\right\} = 1. \tag{3.10}$$

Максимум в (3.10) досягається, зокрема, для функції $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$.

Наслідок 3.1.2 . *За умов пункту 3) теореми 3.1.1 для будь-якого* $\rho \in [0,2)$ *справджується рівність*

$$\max\left\{\rho\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| : f \in B(\mathbb{D}^d)\right\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}. \tag{3.11}$$

Максимум в (3.11) досягається, зокрема, для функції

$$f(\mathbf{z}) = \mu\frac{\rho\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + 2\eta\mathbf{z}^{\mathbf{n}}}{\rho\eta\mathbf{z}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} + 2} = \mu\frac{\rho}{2}\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + \mu\eta\left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)\mathbf{z}^{\mathbf{n}} + \ldots,\ |\mu| = |\eta| = 1, \tag{3.12}$$

де $\mathbf{n} - \mathbf{m} := (n_1 - m_1, \ldots, n_d - m_d)$.

Зауваження 3.1.2 . *Нехай, наприклад, у наслідку 3.1.1* $\mathbf{m} = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-1})$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ *і* f *– яка-небудь інша екстремальна функція в (3.10). Тоді згідно з (3.5) для будь-якого мультиіндексу* $\mathbf{k}$, $|\mathbf{k}| = 1$, *відмінного від* $\mathbf{m}$ *і* $\mathbf{n}$, *справджуються рівності* $\widehat{f}(\mathbf{0}) = \widehat{f}_{\mathbf{k}} = 0$, *тобто*

$$f(\mathbf{z}) = \widehat{f}_{\mathbf{m}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + \widehat{f}_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{|\mathbf{k}|=\nu}\widehat{f}_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}},\ \mathbf{z} \in \mathbb{D}^d.$$

Наслідок 3.1.3 . *За умов пункту 3) теореми 3.1.1 справджується рівність*

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(B^a_{\mathbf{m}}) = 1 + a \quad \forall\ a \in [0, 1].$$

Позначимо через $\mathbb{Z}^d_+$ множину всіх впорядкованих наборів з d невід'ємних цілих чисел і для функції $f \in B$ покладемо $\widehat{f}_{\mathbf{k}} = 0$, якщо $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_+$.

Для даних мультиіндексів $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_+$ розглянемо клас функцій

$$B_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbb{D}^d) := \left\{f \in B(\mathbb{D}^d) : \widehat{f}_{k\mathbf{n}-(k-1)\mathbf{m}} = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\},$$

де $k\mathbf{n} := (kn_1, \ldots, kn_d)$.

Зрозуміло, що у випадку, коли мультиіндекси $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ задовольняють умови пункту 2) теореми 3.1.1, класи B і $B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ збігаються і при цьому для будь-якої функції $f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, згідно з наслідком 3.1.1, справджується нерівність $\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq 1$.

Наступне твердження показує, що така нерівність на класі $B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ має місце і в решті випадків.

Теорема 3.1.2 . *Нехай* $d \in \mathbb{N}$ *і* $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ – *різні мультиіндекси. Якщо в мультиіндексі* $\mathbf{n}$ *є хоча б одна компонента* n_j, *яка задовольняє умову* $n_j \geq 2m_j + 1$, *то*

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| : f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\right\} = 1$$

і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}) = 1.$$

Екстремальними функціями, на яких реалізовуються дані величини є, зокрема, функції $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$.

У випадку, коли $d = 1$ і $\mathbf{m} = 0$, теорема 3.1.2 збігається з результатом Л. А. Айзенберга і А. Відраса [1] (див. рівності (3.8)), оскільки у цьому випадку $B_{0,n} = B_{\mathbb{N}(n)}$. При $d \geq 2$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ і $n = |\mathbf{n}|$ має місце строге включення $B_{\mathbb{N}(n)} \subset B_{\mathbf{0},\mathbf{n}}$, відтак теорема 3.1.2 містить рівності (3.8).

3.1.2 Доведення теорем

Доведення теорем 3.1.1 і 3.1.2 ґрунтуються на такому твердженні, не позбавленому й самостійного інтересу.

Лема 3.1.1 . *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $f \in B(\mathbb{D}^d)$ *і* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^d$. *Якщо* $\mathbf{n}$ – *мультиіндекс, в якому хоча б одна компонента* n_j *задовольняє умову* $n_j \geq 2m_j+1$, *то функція* $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, *визначення в крузі* $\mathbb{D}^1$ *за правилом*

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \widehat{f}_{\mathbf{m}} + \widehat{f}_{\mathbf{n}}z + \sum_{k=2}^{\infty} \widehat{f}_{k\mathbf{n}-(k-1)\mathbf{m}} z^k, \tag{3.13}$$

належить класові $B(\mathbb{D}^1)$.

Зазначимо, що конструкції типу функції $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ часто називають діагональними функціями. Як сказано в [116, с. 214], вперше таке перетворення використав, мабуть, А. Пуанкаре [83, с. 245] у двовимірному випадку (відповідає нашому випадку при $\mathbf{m} = \mathbf{0}$).

Основна значущість діагональних перетворень голоморфних функцій багатьох змінних, як це відображено в численних роботах (див. бібліографію в [116]), полягає в тому, що такі перетворення зберігають основні (найсуттєвіші) властивості функцій, якими вони породжуються. В нашому випадку такою властивістю є зображення функцій класу $B(\mathbb{D}^d)$ у вигляді кратного інтеграла Пуассона (див. формулу (3.17)).

Доведення леми. Добре відомо (див., наприклад, [42, с. 476]), що кожна функція $f \in B(\mathbb{D}^d)$ має граничні значення (які будемо позначати так само через f) вздовж недотичних шляхів майже у всіх точках тору $\mathbb{T}^d$, а для коефіцієнтів $\widehat{f}_{\mathbf{k}}$ справджується формула Коші

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{k}} d\sigma(\mathbf{w}) = \widehat{f}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d, \tag{3.14}$$

де $\overline{\mathbf{w}} := (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_d)$.

Оскільки $\left|\widehat{f}_{\mathbf{k}}\right| \leq 1 \ \forall \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, то сума ряду в правій частині (3.13) є голоморфною функцією змінної z в крузі $\mathbb{D}^1$. Далі згідно з (3.14) для будь-якого $z \in \mathbb{D}^1$

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}(1 + \overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} z + \overline{\mathbf{w}}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})} z^2 + \cdots) d\sigma(\mathbf{w}), \tag{3.15}$$

а в силу того, що $(k+1)\mathbf{m} - k\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_+ \ \forall \ k \in \mathbb{N}$ і $\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}} \mathbf{w}^{k(\mathbf{n}-\mathbf{m})} = \overline{\mathbf{w}}^{(k+1)\mathbf{m}-k\mathbf{n}}$, маємо:

$$0 = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{w}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \overline{z} + \mathbf{w}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})} \overline{z}^2 + \cdots) d\sigma(\mathbf{w}). \tag{3.16}$$

Додавши рівності (3.15) і (3.16), одержимо

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)=\int_{\mathbb{T}^d}f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}\left(1+2\operatorname{Re}\left(\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z+\overline{\mathbf{w}}^{2(\mathbf{n}-\mathbf{m})}z^2+\cdots\right)\right)d\sigma(\mathbf{w})=$$

$$=\int_{\mathbb{T}^d}f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}\left(1+2\operatorname{Re}\frac{\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z}{1-\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z}\right)d\sigma(\mathbf{w})=$$

$$=\int_{\mathbb{T}^d}f(\mathbf{w})\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{m}}\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z|^2}d\sigma(\mathbf{w}). \tag{3.17}$$

Звідси випливає оцінка

$$|f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)|\le\int_{\mathbb{T}^d}|f(\mathbf{w})|\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z|^2}d\sigma(\mathbf{w})\le$$

$$\le\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}z|^2}d\sigma(\mathbf{w})=1,$$

що й потрібно було довести.

Доведення теореми 3.1.1. За умов кожного з пунктів 1) – 3) виконуються умови леми. Тому застосувавши до довільної функції $f\in B(\mathbb{D}^d)$ діагональне перетворення $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, одержимо функцію класу $B(\mathbb{D}^1)$ з нульовим і першим коефіцієнтами Тейлора, рівними $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ відповідно.

Отже, для цих коефіцієнтів, як коефіцієнтів Тейлора функції класу $B(\mathbb{D}^1)$, справджується нерівність $\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|\le 1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|^2$.

Звідси, в силу довільності f, випливають нерівності $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\le 1$ і $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\le 2$.

З другого боку, на прикладі функції $f(\mathbf{z})=\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ бачимо, що $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}\ge 1$. Таким чином $W_{\mathbf{m},\mathbf{n}}=1$.

Для доведення пункту 2) досить зауважити, що в розкладі (3.13) виконуються рівності $\widehat{f}_{k\mathbf{n}-(k-1)\mathbf{m}}=0$ для всіх натуральних $k\ge 2$. Отже, діагональна функція $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ має вигляд

$$f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)=\widehat{f}_{\mathbf{m}}+\widehat{f}_{\mathbf{n}}z. \tag{3.18}$$

Тому згідно з лемою має місце нерівність $1 \geq \sup_{z \in \mathbb{D}^1} |f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)| = \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|$. Отже, $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = 1$, оскільки завжди має місце нерівність $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \geq W_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \geq 1$.

Для доведення пункту 3) досить отримати оцінку знизу $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \geq 2$. З цією метою розглянемо функцію f, означену за правилом (3.12).

Оскільки $n_j \geq m_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$, то $f \in B$ при $\rho \in [0, 2)$ і

$$L_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \geq \frac{\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|}{1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|} = 1 + \frac{\rho}{2} \to 2, \ \rho \to 2-,$$

що й потрібно було довести.

Доведення теореми 3.1.2. Оскільки для будь-якої функції $f \in B_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ її діагональна функція $f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ має вигляд (3.18), то за лемою справджуються співвідношення $1 \geq \sup_{z \in \mathbb{D}^1} |f_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(z)| = \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right| + \left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right|$, які для функції $f(\mathbf{z}) = a\mathbf{z}^{\mathbf{m}} + b\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$, $|a| + |b| = 1$, перетворюються в рівності.

3.2 Екстремальна задача Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних функцій в бікрузі

Нехай B — клас функцій f, голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ і нехай

$$\widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

— коефіцієнти Тейлора функції f.

Д. Помпей [81] показав, що

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_0\right| + \left|\widehat{f}_1\right| : f \in B\right\} = \frac{5}{4},$$

а максимум досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(z) = \frac{2z+1}{z+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \ldots.$$

Е. Ландау [52] узагальнив цей результат, показавши, що для будь-якого цілого $n \geq 0$

$$\max\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{f}_k\right| : f \in B\right\} = G_n := 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2, \tag{3.19}$$

де другий доданок в правій частині при $n = 0$ покладається рівним нулю.

Максимум в (3.19) досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, функції

$$f(z) = \frac{z^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^{n-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k}.$$

Згодом О. Сас [98] узагальнив результат Е. Ландау, показавши, що для будь-якого цілого $n \geq 0$ і довільної пари комплексних послідовностей

$\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ та $\{\mu_j\}_{j=0}^n$, пов'язаних системою рівностей

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j \lambda_{n-k-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.20}$$

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \widehat{f}_k \right| : f \in B \right\} \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|^2, \tag{3.21}$$

яке за умови, що многочлен $P_n(z) := \sum_{k=0}^n \lambda_k z^k$ не має коренів в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ перетворюється в рівність, а супремум при цьому досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(z) = \frac{z^n P_n\left(\dfrac{1}{z}\right)}{P_n(z)}.$$

Результат О. Саса без перебільшення можна вважати найзначущим в питаннях оцінок лінійних середніх рядів Тейлора, коефіцієнтів Тейлора, похідних вищих порядків функцій класу B, тощо.

Підтвердимо ці слова доведенням такого

Твердження 3.2.1 . *Для будь-яких цілих m і n таких, що $m \geq 0$, $n \geq 2m+1$, справджуються рівності*

$$W_{m,n} := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|^2} : f \in B \right\} = 1,$$

$$L_{m,n} := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|} : f \in B \right\} = 2.$$

Зауважимо, що числа $W_{0,n}$ і $L_{0,n}$ — це точні константи в нерівностях

$$\left|\widehat{f}_n\right| \leq 1 - \left|\widehat{f}_0\right|^2 \text{ і } \left|\widehat{f}_n\right| \leq 2\left(1 - \left|\widehat{f}_0\right|\right),$$

перша з яких відома, як нерівність Вінера, а друга – як нерівність Ландау [15, 53, p. 34].

Зазначимо також, що твердження 3.2.1 є відомим. Детальні історичні коментарі до нього можна знайти в [95].

Доведення. Підлаштуємо спочатку співвідношення (3.21) до наших потреб. З цією метою візьмемо в (3.20) $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = \mu_{m+1} = \ldots \mu_{n-1} = 0$, $\mu_m = \rho$, $\rho \geq 0$, і $\mu_n = 1$. Нескладно переконатися, що послідовність $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-m-1} = \lambda_{n-m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, $\lambda_{n-m} = \rho/2$ є розв'язком системи (3.20) тоді і тільки тоді, коли $n \geq 2m+1$. Оскільки многочлен $z \mapsto 1 + \rho z^{n-m}/2$ при $0 \leq \rho < 2$ не має коренів в $\overline{\mathbb{D}}$, то співвідношення (3.21) у цьому випадку набуде вигляду

$$\max\left\{\rho\left|\widehat{f}_m\right| + \left|\widehat{f}_n\right| : f \in B\right\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}, \quad 0 \leq \rho < 2, \tag{3.22}$$

де максимум досягається для функції

$$f(z) = z^m \frac{2z^{n-m} + \rho}{\rho z^{n-m} + 2} = \frac{\rho}{2} z^m + \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) z^n + \ldots.$$

Для оцінок зверху величин $W_{m,n}$ і $L_{m,n}$ візьмемо довільну функцію $f \in B$, відмінну від алгебраїчного многочлена будь-якого степеня $\leq m$. Тоді згідно з (3.22) справджується співвідношення

$$\left|\widehat{f}_n\right| \leq 1 + \frac{\rho^2}{4} - \rho\left|\widehat{f}_m\right| \quad \forall\, n \geq 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Спрямувавши тепер $\rho \to 2\left|\widehat{f}_m\right|$ (це законно, оскільки $\left|\widehat{f}_m\right| \leq 1$), отримаємо оцінку

$$\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|^2} \leq 1 \quad \forall\, n \geq 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+,$$

а якщо спрямуємо $\rho \to 2$, то й оцінку

$$\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|} \leq 2 \quad \forall\, n \geq 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+.$$

У випадку, коли $f(z) = \sum_{k=0}^{l} a_k z^k$, $l < m$, останні співвідношення слід розуміти як $0/0 = 1$.

Таким чином, в силу довільності f доведено оцінки зверху: $W_{m,n} \le 1$ і $L_{m,n} \le 2$.

Для оцінок знизу розглянемо сім'ю функцій $\{f_a\}_{0<a<1}$, де

$$f_a(z) = z^m \frac{z+a}{az+1} = az^m + (1-a^2) \sum_{k=m+1}^{\infty} (-a)^{k-m-1} z^k.$$

Зрозуміло, що $f_a \in B$ і $\widehat{(f_a)}_m = a$, $\widehat{(f_a)}_n = (1-a^2)(-a)^{n-m-1}$.

Отже,

$$W_{m,n} \ge \frac{\left|\widehat{(f_a)}_n\right|}{1 - \left|\widehat{(f_a)}_m\right|^2} = a^{n-m-1}$$

і

$$L_n \ge \frac{\left|\widehat{(f_a)}_n\right|}{1 - \left|\widehat{(f_a)}_m\right|} = (1+a)a^{n-m-1}.$$

Спрямувавши тепер $a \to 1$, отримаємо потрібні оцінки знизу.

Даний розділ дисертації присвячено отриманню аналогів наведених результатів у двовимірному випадку.

Нехай $\mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ — одиничний бікруг, $\mathbb{T}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ — кістяк бікруга $\mathbb{D}^2$, $B(\mathbb{D}^2)$ — клас функцій f, голоморфних в бікрузі $\mathbb{D}^2$, для яких $\sup_{(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2} |f(z_1, z_2)| \le 1$ і нехай

$$\widehat{f}_{k,l} := \frac{1}{k!\ l!} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial z_1^k \partial z_2^l}(0,0)$$

— коефіцієнти Тейлора функції f.

Екстремальною задачею Помпея–Ландау–Саса для бікруга називатимемо екстремальну задачу про обчислення точного значення величини

$$\sup\left\{\left|\sum_{(k,l)\in\gamma}\mu_{k,l}\widehat{f}_{k,l}\right| : f\in X\right\},$$

де $\{\mu_{k,l}\}$ — двократна комплексна послідовність, γ — деяка скінченна підмножина $\mathbb{Z}_+^2$, а X — деякий підклас $B(\mathbb{D}^2)$, а також задачу про знаходження екстремальних елементів, на яких досягається ця точна верхня межа.

У випадку, коли γ є трикутною областю в $\mathbb{Z}_+^2$, тобто $\gamma=\{(k,l):k,l\geq 0, k+l\leq n\}$, $n\in\mathbb{N}$, розв'язання екстремальної задачі Помпея–Ландау–Саса в бікрузі зводиться до одновимірного випадку [95].

Наступне твердження надає одну з таких нових можливостей.

Твердження 3.2.2 . *Нехай $f\in B(\mathbb{D}^2)$. Тоді для будь-яких натуральних p,q функція*

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\widehat{f}_{\nu p,\nu q}z^{\nu}, z\in\mathbb{D},$$

належить класові B.

Це твердження для обмежених голоморфних функцій в полікрузі $\mathbb{D}^m, m\geq 2$, доведено в [63]. Тут наведено елементарне доведення для зручності.

Доведення. Зафіксуємо $r\in(0,1)$ і $z\in\mathbb{D}$. Оскільки за формулою Коші для коефіцієнтів (див., наприклад, [112, с. 47])

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\left(\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q\right)^{\nu}\frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{w_2}=$$

$$=\begin{cases} r^{(p+q)\nu}\widehat{f}_{\nu p,\nu q}, \nu=0,1,2,\ldots, \\ \\ 0, \qquad\qquad \nu=-1,-2,\ldots \end{cases},$$

то для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ справджується низка рівностей

$$g(r^{p+q}z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_{\nu p,\nu q} r^{(p+q)\nu} z^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{w}_1^p \overline{w}_2^q z)^{\nu} \frac{dw_1}{w_1} \frac{dw_2}{w_2} = \tag{3.23}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{w}_1^p \overline{w}_2^q z)^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (w_1^p w_2^q z)^{-\nu} \right) \frac{dw_1}{w_1} \frac{dw_2}{w_2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2) \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}_1^p \overline{w}_2^q z|^2} \frac{dw_1}{w_1} \frac{dw_2}{w_2}.$$

З (3.23) в силу довільності r випливає голоморфність функції g, а з останньої рівності оцінка

$$|g(z)| \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(rw_1, rw_2)| \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}_1^p \overline{w}_2^q z|^2} |dw_1 dw_2| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{w}_1^p \overline{w}_2^q z|^2} |dw_1 dw_2| = 1.$$

Таким чином $g \in B$.

Наприклад, з рівності (3.19) і твердження 3.2.2 одразу випливає такий

Наслідок 3.2.1 . *Для будь-якого цілого $n \geq 0$ і натуральних p, q*

$$\max \left\{ \left| \sum_{\nu=0}^{n} \widehat{f}_{\nu p,\nu q} \right| : f \in B(\mathbb{D}^2) \right\} = G_n,$$

а максимум досягається для функції

$$f(z_1, z_2) = \frac{(z_1^p z_2^q)^n + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} (z_1^p z_2^q)^{n-\nu}}{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} (z_1^p z_2^q)^{\nu}}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Помпея–Ландау–Саса у випадку, коли $\gamma = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ і $\mu_{k,l} = 2\rho_1^{1-l}\rho_2^{1-k}$, $\mu_{1,1} = 1$.

Основним результатом є така

Теорема 3.2.1 . *Нехай* $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ *і* $|\rho_1| + |\rho_2| < 1$. *Тоді*

$$\max\left\{\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0} + \rho_1\widehat{f}_{1,0} + \rho_2\widehat{f}_{0,1}) + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Максимум досягається для функції

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2) := \frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1} =$$

$$= \overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + (1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2) z_1 z_2 + \ldots .$$

Безпосередньо з теореми випливає

Наслідок 3.2.2 . *Мають місце рівності*

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right| + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\widehat{f}_{0,0} + \widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = \frac{3}{2},$$

де $B^0(\mathbb{D}^2) := \{f \in B : \widehat{f}_{0,0} = 0\}$.

Точні верхні межі досягаються на послідовності функцій $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}_{|\rho_1|+|\rho_2|<1}$.

Справді, поклавши для даної функції $f \in B^0(\mathbb{D}^2)$ $\rho_1 = \lambda e^{i(\arg\widehat{f}_{1,1} - \arg\widehat{f}_{1,0})}$ і $\rho_2 = \lambda e^{i(\arg\widehat{f}_{1,1} - \arg\widehat{f}_{0,1})}$, $0 < \lambda < 1/2$, з теореми отримаємо співвідношення

$$2\lambda\left(\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right|\right) + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| \leq \frac{3}{2},$$

з якого при $\lambda \to 1/2$ випливає потрібна оцінка зверху. Непокращуваність такої оцінки перевіряється безпосередньо на прикладі послідовності функцій $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}$.

Твердження наслідку 3.2.2 цікаво порівняти з рівністю, яка безпосередньо випливає з рівності Д. Помпея (3.19) в одновимірному випадку:

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_{0,0}+\widehat{f}_{1,0}+\widehat{f}_{0,1}+\widehat{f}_{1,1}\right| : f\in B(\mathbb{D}^2)\right\}=\frac{25}{16},$$

де максимум досягається для функції

$$f(z_1,z_2)=\frac{2z_1+1}{z_1+2}\cdot\frac{2z_2+1}{z_2+2}=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}z_1+\frac{3}{8}z_2+\frac{9}{16}z_1z_2+\ldots.$$

Доведення теореми. Візьмемо довільну функцію $f\in B(\mathbb{D}^2)$ з мірою $\sigma(w)$ і число $r\in(0,1)$. Тоді за формулою Коші

$$2\left(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0}+r\rho_1\widehat{f}_{1,0}+r\rho_2\widehat{f}_{0,1}\right)+r^2\widehat{f}_{1,1}=$$
$$=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\left(2(\rho_1\rho_2+\rho_1\overline{w}_1+\rho_2\overline{w}_2)+\overline{w}_1\overline{w}_2\right)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2)=$$
$$=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(w_1,w_2)\overline{w}_1\overline{w}_2K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2),\qquad(3.24)$$

де

$$K(\rho_2w_1,\rho_1w_2):=2(\rho_1\rho_2w_1w_2+\rho_1w_2+\rho_2w_1)+1.$$

Оскільки

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\overline{w}_1\overline{w}_2(\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2)=0,$$

то вираз $K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)$ в інтегралі (3.24) можна замінити на $K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)+\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2$, не змінивши при цьому значення самого інтегралу.

Легко бачити, що

$$K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)+\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2=(\rho_1w_2+\rho_2w_1+1)^2.$$

Тому

$$2\left(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0}+r\rho_1\widehat{f}_{1,0}+r\rho_2\widehat{f}_{0,1}\right)+r^2\widehat{f}_{1,1}=$$

$$=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\overline{w}_1\overline{w}_2(\rho_1w_2+\rho_2w_1+1)^2d\sigma(w_1)d\sigma(w_2).$$

Звідси за рівністю Парсеваля отримуємо нерівність

$$\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0}+r\rho_1\widehat{f}_{1,0}+r\rho_2\widehat{f}_{0,1})+r^2\widehat{f}_{1,1}\right|\leq$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}|\rho_1w_2+\rho_2w_1+1|^2d\sigma(w_1)d\sigma(w_2)=$$

$$=2(|\rho_1|^2+|\rho_2|^2+1). \tag{3.25}$$

Оскільки права частина нерівності (3.25) не залежить від r, то вона має місце і при $r=1$.

Співвідношення (3.25) є непокращуваними. Розглянемо функцію

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)=\frac{\overline{\rho}_1z_1+\overline{\rho}_2z_2+z_1z_2}{\rho_1z_2+\rho_2z_1+1},\quad |\rho_1|+|\rho_2|<1.$$

Оскільки $|\rho_1z_2+\rho_2z_1|\leq|\rho_1|+|\rho_2|<1$, то $|\rho_1z_2+\rho_2z_1+1|\geq 1-|\rho_1z_2+\rho_2z_1|>0$ для всіх $(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2$. Отже, функція f_{ρ_1,ρ_2} не має полюсів в $\mathbb{D}^2$, а тому є голоморфною в $\mathbb{D}^2$.

З другого боку, для всіх $(z_1,z_2)\in\mathbb{T}^2$

$$|f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|=\left|\frac{\overline{\rho}_1z_1+\overline{\rho}_2z_2+z_1z_2}{\rho_1z_2+\rho_2z_1+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{\overline{\rho}_1\overline{z}_2+\overline{\rho}_2\overline{z}_1+1}{\rho_1z_2+\rho_2z_1+1}\right|=1.$$

Тому за принципом максимуму $f_{\rho_1,\rho_2}\in B(\mathbb{D}^2)$.

Обчислимо коефіцієнти Тейлора функції f_{ρ_1,ρ_2}:

$$\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{0,0}=f_{\rho_1,\rho_2}(0,0)=0,$$

$$\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{1,0}=\frac{\partial}{\partial z_1}f_{\rho_1,\rho_2}(0,0)=\overline{\rho}_1,$$

$$\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{0,1} = \frac{\partial}{\partial z_2} f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = \overline{\rho}_2,$$

$$\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{1,1} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = 1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2.$$

Отже,

$$2\left(\rho_1\rho_2\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{0,0} + \rho_1\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{1,0} + \rho_2\widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{0,1}\right) + \widehat{(f_{\rho_1,\rho_2})}_{1,1} =$$

$$= 2(|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2) + 1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2 = |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Теорему доведено.

3.3 Точна оцінка змішаної похідної голоморфної функції простору Гарді в полікрузі

Оцінки похідних голоморфних функцій утворюють окрему групу екстремальних задач сучасної геометричної теорії функцій однієї змінної. В монографіях [50, 7] наведено багато фактів і велику бібліографію з цього питання.

Останнім часом спостерігається значний інтерес до аналогічних досліджень у випадку голоморфних функцій багатьох змінних, які переважно стосуються оцінок типу Шварца–Піка [49, 117]. Нагадаємо, що в одновимірному випадку так називається співвідношення

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le n! \frac{1-|f(z)|^2}{(1-|z|^2)^n}(1+|z|)^{n-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N},$$

яке справджується (див. [6, 34]) для будь-якої голоморфної в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функції f такої, що $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$.

У даному розділі доведено точну оцінку змішаної похідної голоморфної функції з простору Гарді H_1 в полікрузі.

Вихідним пунктом досліджень став результат А. Макентайра і В. Рогозинського [58] (див. також [59, с. 306], [30, с. 518]), які довели, що *для будь-якої голоморфної функції f з простору Гарді H_1 (див. означення нижче) в одиничному крузі $\mathbb{D}$ справджується точна нерівність*

$$|f'(z)| \le \|f\|_1 \frac{|z| + \sqrt{1+|z|^2}}{(1-|z|^2)^2} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{3.26}$$

Рівність в (3.26) при фіксованому $z \in \mathbb{D}$ досягається для функції

$$f(w) = \frac{(1-\overline{y}w)^2}{(1-\overline{z}w)^4},$$

де $y := z - e^{i\arg z}(1-|z|^2)/\sqrt{1+|z|^2}$.

Окрім самої оцінки (3.26) робота [58] є цікавою ще й з методичної точки зору. Запропонований в ній метод доведення (3.26) вирізняється особливою простотою і елегантністю (досить порівняти його з методами доведення співвідношення (3.26), наведеними в [59] і [30], які ґрунтуються відповідно на загальних співвідношеннях двоїстості і теорії ганкелевих операторів).

Видається важливим розвинення цього методу на багатовимірний випадок.

Перед постановкою задачі і формулюванням основного результату дослідження наведемо необхідні означення.

Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх впорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1\le j\le m} |z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг і $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j = \overline{1, d}\}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$. Нормовану міру Лебега на $\mathbb{T}^d$, тобто добуток нормованих мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^d$, будемо позначати через σ.

Простір Гарді $H_1 := H_1(\mathbb{D}^d)$ складається з усіх голоморфних функцій $f : \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$, для яких

$$\|f\|_1 := \sup_{0<\varrho<1} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\varrho| d\sigma < \infty,$$

де $f_\varrho(\mathbf{w}) := f(\varrho\mathbf{w})$, $\varrho\mathbf{w} := (\varrho w_1, \ldots, \varrho w_d)$.

Добре відомо (див., наприклад, [87]), що для будь-якої функції $f \in H_1$ на торі $\mathbb{T}^d$ існують радіальні граничні значення f^*, які утворюють функцію з $L_1(\mathbb{T}^d)$, причому $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^d} |f^*| d\sigma$. З огляду на це далі будемо користуватися єдиним символом f для позначення самої функції f та її радіальних граничних значень f^*.

Нехай $\mathcal{M} := \{1, 2, \ldots, d\}$, $2^{\mathcal{M}}$ — множина усіх підмножин множини $\mathcal{M}$, $\mathfrak{m}$ — елемент (впорядкована підмножина) $2^{\mathcal{M}}$, $|\mathfrak{m}|$ — потужність множини $\mathfrak{m}$ і $\overline{\mathfrak{m}}$ — доповнення множини $\mathfrak{m}$ до множини $\mathcal{M}$.

Позначимо через

$$D_j(f) := \frac{\partial}{\partial z_j} f$$

частину похідну по змінній z_j і відповідно D_j — оператор взяття частинної похідної, а через

$$D_{\mathfrak{m}}(f) := \prod_{j \in \mathfrak{m}} D_j(f)$$

змішану похідну по групі змінних $\mathfrak{m}$ і $D_{\mathfrak{m}}$ — оператор взяття змішаної похідної по групі змінних $z_j, j \in \mathfrak{m}$, де під добутком розуміється операторний добуток.

Покладемо $\mathbf{D}(f) := D_{\mathcal{M}}(f) := \partial^d f/(\partial z_1 \cdots \partial z_d)$.

Теорема 3.3.1 . *Нехай функція $f \in H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-яких $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$*

$$|\mathbf{D}(f)(\mathbf{z})| \leq \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1 + |z_j|^2}}{(1 - |z_j|^2)^2}. \tag{3.27}$$

Рівність в (3.27) досягається для функції

$$f(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{(1 - \overline{y}_j w_j)^2}{(1 - \overline{z}_j w_j)^4}, \tag{3.28}$$

де $y_j := z_j - e^{i \arg z_j}(1 - |z_j|^2)/\sqrt{1 + |z_j|^2}$.

Наслідок 3.3.1 . *Нехай $B_1(\mathbb{D}^d) = \{f \in H_1(\mathbb{D}^d) : \|f\|_1 \leq 1\}$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якого $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$*

$$\sup\left\{\mathbf{D}(f)(\mathbf{z}) : f \in B_1(\mathbb{D}^d)\right\} =$$

$$= \max\left\{\mathbf{D}(f)(\mathbf{z}) : f \in B_1(\mathbb{D}^d)\right\} = \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1 + |z_j|^2}}{(1 - |z_j|^2)^2}.$$

В доведенні теореми 3.3.1 ми будемо користуватися наступною формулою для змішаної похідної добутку двох функцій.

Твердження 3.3.1 . *Нехай f і g — функції, голоморфні в $\mathbb{D}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathbf{D}(fg) = \sum_{\mathfrak{m} \in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}(f) D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g). \tag{3.29}$$

Доведення. Нехай $\mathscr{H}$ — множина функцій, голоморфних в $\mathbb{D}^d$, I — тотожний оператор, $D_j I$ і $I D_j$ — оператори, задані на прямому добутку $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, які діють відповідно за правилами $D_j I(fg) = D_j(f)g$ і $ID_j(fg) = fD_j(g)$.

Тоді значення оператора $\mathcal{D}_j$, визначеного на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ правилом $\mathcal{D}_j(fg) = D_j(fg)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{D}_j = D_j I + I D_j.$$

Отже,

$$\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j = \prod_{j=1}^{d} \left(D_j I + I D_j \right). \tag{3.30}$$

Скориставшись тепер формальним правилом множення суми і рівностями

$$D_j I(D_k I) = (D_j(D_k))I,$$

$$ID_j(ID_k) = I(D_j(D_k)),$$

$$D_j I(ID_k) = D_j D_k,$$

$$ID_j(D_k I) = D_k D_j,$$

де під символом $D_j D_k$ розуміємо оператор, визначений на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, який діє за правилом $D_j D_k(fg) = D_j(f) D_k(g)$, з рівності (3.30) отримаємо вираз для образу оператора $\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j$:

$$\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j(fg) = \sum_{\mathfrak{m} \in 2^{\mathcal{M}}} \prod_{j \in \mathfrak{m}} D_j(f) \prod_{k \in \overline{\mathfrak{m}}} D_k(g) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}}(f) D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g).$$

На завершення доведення залишається врахувати, що $\prod_{j=1}^{d} \mathcal{D}_j(fg) = \mathbf{D}(fg)$.

Доведення теореми. Нехай $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Позначимо

$$(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^m := \prod_{j=1}^{d} (1-\overline{t}_j z_j)^m.$$

Добре відомо [87], [112 с. 43], що для будь-якої функції $f \in H_1$ справджується формула Коші

$$f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{f(\mathbf{t})}{1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z}} d\sigma(\mathbf{t}) \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

Оскільки при фіксованому $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^d$

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z}}\right) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\overline{t}_j}{(1-\overline{t}_j z_j)^2} =: \frac{1}{(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\overline{\mathbf{t}},$$

то

$$\mathbf{D}f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{f(\mathbf{t})}{(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\overline{\mathbf{t}} d\sigma(\mathbf{t}) \quad \forall\ z \in \mathbb{D}. \tag{3.31}$$

Нехай h — довільна функція вигляду $h(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{d} h_j(z_j)$, де $h_j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — функції однієї змінної з простору Гарді $H_1(\mathbb{D})$ в крузі $\mathbb{D}$.

Зафіксуємо $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ і застосуємо формулу (3.31) до функції $F(\mathbf{w}) := f(\mathbf{w})h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\overline{\mathbf{z}})^2$, яка, очевидно, належить простору H_1.

Маємо

$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{t})h(\mathbf{t}) \frac{(1-\mathbf{t}\overline{\mathbf{z}})^2}{(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2}\overline{\mathbf{t}} d\sigma(\mathbf{t}). \tag{3.32}$$

Зобразивши функцію F у вигляді $F = fg$, де $g(\mathbf{w}) = h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\overline{\mathbf{z}})^2$, обчислимо величину в лівій частині цієї рівності за формулою (3.29):

$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{w}) = \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}} f(\mathbf{w}) D_{\overline{\mathfrak{m}}}(g)(\mathbf{w}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}} f(\mathbf{w}) \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \frac{\partial}{\partial w_k}(h(\mathbf{w})(1-\mathbf{w}\overline{\mathbf{z}})^2) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} D_{\mathfrak{m}} f(\mathbf{w}) \prod_{j\in\mathfrak{m}} (h_j(w_j)(1-w_j\overline{z}_j)) \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \frac{\partial}{\partial w_k}(h_k(w_k)(1-w_k\overline{z}_k)^2) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}\in 2^{\mathcal{M}}} \Bigg(D_{\mathfrak{m}} f(\mathbf{w}) \prod_{j\in\mathfrak{m}} (h_j(w_j)(1-w_j\overline{z}_j)) \times$$

$$\times \prod_{k\in\overline{\mathfrak{m}}} \left(h_k'(w_k)(1-w_k\overline{z}_k)^2 - 2\overline{z}_k h_k(w_k)(1-w_k\overline{z}_k)\right) \Bigg). \qquad (3.33)$$

Виберемо тепер функції h_k такими, щоб

$$|h_k(w)| = 1 \quad \forall\, w \in \mathbb{T} \qquad (3.34)$$

і

$$h_k'(z_k)(1-|z_k|^2)^2 - 2\overline{z}_k h_k(z_k)(1-|z_k|^2) = 0, \quad k = \overline{1,d}. \qquad (3.35)$$

Тоді за умови (3.35) з рівності (3.33) отримаємо формулу

$$\mathbf{D}(F)(\mathbf{z}) = \mathbf{D} f(\mathbf{z}) \prod_{j\in\mathcal{M}} h_j(z_j)(1-|z_j|^2)^2. \qquad (3.36)$$

Підставивши отриманий вираз $\mathbf{D}(F)$ в (3.32) і оцінивши інтеграл в правій частині (3.32) з урахуванням умови (3.34), отримаємо співвідношення

$$|\mathbf{D} f(\mathbf{z})| \prod_{j\in\mathcal{M}} |h_j(z_j)|\,(1-|z_j|^2)^2 \le$$

$$\le \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{t})||h(\mathbf{t})| \prod_{j=1}^{d} \frac{|1-t_j\overline{z}_j|^2}{|1-\overline{t}_j z_j|^2} d\sigma(\mathbf{t}) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{t})| d\sigma(\mathbf{t}) = \|f\|_1.$$

Звідси випливає нерівність

$$|\mathbf{D} f(\mathbf{z})| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{|h_j(z_j)|\,(1-|z_j|^2)^2}. \qquad (3.37)$$

Покажемо тепер, що умови (3.34) і (3.35) завжди можна задовольнити.

Справді, нехай
$$h_k(w) = \frac{w - y_k}{1 - \overline{y}_k w}, \tag{3.38}$$
де $y_k = \varrho_k e^{i \arg z_k}$, $-1 < \varrho_k < 1$.

Зрозуміло, що h_k задовольняє умову (3.34). Далі
$$\frac{h_k'(w)}{h_k(w)} = \frac{\partial}{\partial w} \ln h_k(w) =$$
$$= \frac{1}{w - y_k} + \frac{\overline{y}_k}{1 - \overline{y}_k w} = \frac{1 - |y_k|^2}{(w - y_k)(1 - \overline{y}_k w)}.$$
Отже,
$$\frac{h_k'(z_k)}{h_k(z_k)} = \frac{1 - |\varrho_k|^2}{e^{i \arg z_k}(|z_k| - \varrho_k)(1 - \varrho_k |z_k|)}.$$
Але згідно з (3.35) має виконуватися рівність
$$\frac{h_k'(z_k)}{h_k(z_k)} = \frac{2\overline{z}_k}{1 - |z_k|^2}.$$

Прирівнявши праві частини цих двох рівностей, після елементарних перетворень отримаємо квадратне рівняння відносно ϱ_k
$$(1 + |z_k|^2)\varrho_k^2 - 2|z_k|(1 + |z_k|^2)\varrho_k + 3|z_k| - 1 = 0.$$
Його коренями є числа $|z_k| \pm (1 - |z_k|^2)/\sqrt{1 + |z_k|^2}$.

Зрозуміло, що корінь $\varrho_k = |z_k| - (1 - |z_k|^2)/\sqrt{1 + |z_k|^2}$ завжди буде належати проміжку $(-1, 1)$, якщо $|z_k| < 1$. Тому, поклавши в (3.38) $y_k = z_k - e^{i \arg z_k}(1 - |z_k|^2)/\sqrt{1 + |z_k|^2}$, отримаємо функції, які задовольняють умови (3.34) і (3.35). Нарешті, підставивши в (3.37) значення
$$h_j(z_j) = \frac{z_j - y_j}{1 - \overline{y}_j z_i} = \frac{(1 - |z_j|^2)/\sqrt{1 + |z_j|^2}}{1 - |z_j|(|z_j| - (1 - |z_j|^2)/\sqrt{1 + |z_j|^2})} =$$
$$= \frac{1}{|z_j| + \sqrt{1 + |z_j|^2}}, \tag{3.39}$$

отримаємо нерівність (3.27).

Покажемо тепер, що функція f, визначена правилом (3.28), є екстремальною, тобто для неї співвідношення (3.27) при даному фіксованому $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$ є рівністю.

Перш за все зауважимо, що функція f є голоморфною в $\mathbb{D}^d$ і

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^d} \left| \frac{1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}}{(1-\overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^2} \right|^2 d\sigma(\mathbf{t}) \le \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1+|y_j|}{(1-|z_j|)^2} \right)^2 < \infty.$$

Отже, $f \in H_1$.

Згідно з формулою (3.32), з урахуванням (3.33), умови (3.35) і рівностей (3.36), (3.39), одержимо

$$\mathbf{D}f(\mathbf{z}) \prod_{j=1}^{d} \frac{(1-|z_j|^2)^2}{|z_j| + \sqrt{1+|z_j|^2}} =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} \frac{(1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t})^2}{(1-\overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^4} \frac{\mathbf{t}-\mathbf{y}}{1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}} \frac{(1-\mathbf{t}\overline{\mathbf{z}})^2}{(1-\overline{\mathbf{t}}\mathbf{z})^2} \overline{\mathbf{t}} d\sigma(\mathbf{t}) =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} \left| \frac{1-\overline{\mathbf{y}}\mathbf{t}}{(1-\overline{\mathbf{z}}\mathbf{t})^2} \right|^2 d\sigma(\mathbf{t}) = \|f\|_1.$$

Теорему доведено.

3.4 Висновки до розділу 3

1. Знайдено точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1-\left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ и $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

2. Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку частинних сум ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

3. Доведено точні нерівності для змішаних похідних голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

ВИСНОВКИ

1. Встановлено асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда $Z_{n,\psi}(f)(z) = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\psi_n/\psi_k)\widehat{f}_k z^k$ на функціональних класах $H_p^{\psi\phi}$, що є згортками одиничної кулі простору Гарді H_p з ядрами $\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{k+1}\phi_{k+1}z^k$, у випадку, коли послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ є моментною. Знайдені необхідні та достатні умови для послідовності $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, що забезпечують мінімально можливу похибку $|\psi_n|$ наближення класу $H_p^{\psi\phi}$ сумами $Z_{n,\psi}(f)$.

2. Досліджено мажоранту залишків рядів Тейлора на класі обмежених голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функцій.

3. Обчислені точні константи $L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)$ у нерівностях вигляду

$$\left|\widehat{f}_{\mathbf{n}}\right| \leq L_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(X)\left(1 - \left|\widehat{f}_{\mathbf{m}}\right|\right)$$

для пар коефіцієнтів Тейлора $\widehat{f}_{\mathbf{m}}$ і $\widehat{f}_{\mathbf{n}}$ на деяких класах X обмежених голоморфних функцій у полікрузі.

4. Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку прямокутних частинних сум порядку $(1,1)$ двократного ряду Тейлора обмежених голоморфних функцій у бікрузі.

5. Отримано точну оцінку змішаної похідної голоморфних функцій з простору Гарді H_1 у полікрузі.

Розділ 4

Список використаних джерел

1. *Айзенберг Л. А., Видрас А.* О радиусе Бора для двух классов голоморфных функций // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 4. – С. 734 – 746.

2. *Alexits G. A.* Fourier-sor Cesàro-këzepeivel való approximáció nagyságredjéröl // Mat. és Fiz. Lapok. – 1941. – V.48. – P. 410 – 422.

3. *Aljančić S.* Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz // C. R. Acad. Sci. Paris — 1958. — **246**. — P. 2567 — 2569.

4. *Aljančić S.* Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz // Acad. Serbe Sci. Publ. de l'Inst. Math. — 1959. — **13**. — P. 113 — 122.

5. *Anderson J. M., Dritschel M. A., Rovnyak J.* Schwarz–Pick Inequalities for the Schur-Agler Class on the Polydisk and Unit Ball // Comp. Meth. Funct. T. — 2008. — **8**, № 2. — P. 339—361.

6. *Anderson J. M., Rovnyak J.* On generalized Schwarz–Pick estimates // Mathematika. — 2006. — **53**. — P. 161—-168.

7. *Avkhadiev F. G., Wirths K.–J.* Schwarz–Pick Type Inequalities. — Basel: Birkhauser Verlag, 2008. — 156 p.

8. *Бабенко К.И.* Наилучшие приближения классов аналитических функций / К.И. Бабенко // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.

9. *Баврин И. И.* Точные оценки производных для функций Каратеодори и Шура // Math. Montisnigri – 1993. – **1**. – P. 11 – 16.

10. *Белый В. И., Двейрин М. З.* О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // Метрические вопросы теории функций и отображений. – К.: Наук. думка, 1971. – **5**. – С. 37 – 54.

11. *Betsakos D.* Multi-point variations of Schwarz lemma with diameter and width conditions. // Proc. Amer. Math. Soc. – 2011. – **139**. – P. 4041 – 4052.

12. *Betsakos D.* Holomorphic functions with image of given logarithmic or elliptic capacity. // J. Austr. Math. Soc. – 2013. – **94**, № 02. – P. 145 – 157.

13. *Bermant A.* On certain generalizations of E. Lindel'of's principle and their applicatios. // Mat. Sb. 20– 1947. – **62**, № 1. – P. 55 – 112.

14. *Boas H. P., Khavinson D.* Bohr's power series theorem in several variables // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – **125**, № 10. – P. 2975 – 2979.

15. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. — 1914. — (2) 13. — P. 1 – 5.

16. *Brown G., Dai F., Wang K.* On positive cosine sums // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 2007. — **142**. — P. 219 — 232.

17. *Brown L., Shields A., Zeller K.* On absolutely convergent eksponential sums // Transactions of the American Math. Society. — 1960. — **96**, No. 1. — P. 162 — 183.

18. *Brutman L.A.* Sharp estimate of the Landau constant // J. Approx. Theory – 1982. – **34** – P. 217 – 220.

19. *R. B. Burckel, D. E. Marshall, D. Minda, P. Poggi–Corradini, Th. J. Ransford* Area, capacity and diameter versions of Schwarz's lemma // Conform. Geom. Dyn. — 2008. — **12**. — P. 133 — 152.

20. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birhäuser, 1971. – 553 p.

21. *Waadeland H.* Zur Theorie der beschrankten Funktionen // Kgl., norske e vid. selskabs forhandl. — 1962. — **35**, № 15. — P. 80 — 85.

22. *Вакарчук С.Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций / С.Б. Вакарчук // Матем. заметки – 1995. – 57, № 1. – C 30 – 39.

23. *Вакарчук С.Б.* Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения / С.Б. Вакарчук // Матем. заметки – 2002. – 72, № 5. – C 665 – 669.

24. *Вакарчук С.Б.* Некоторые экстремальные задачи теории приближений в комплексной области / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9 – С. 1155 – 1171.

25. *Visser C.* A simple proof of certain inequalities concerning polynomials // Koninkl. Ned. Akad. Wetmschap. Proc. – 1945. – **47**. – P. 276 – 281.

26. *Гаврилюк В.Т.* Про характеристику класу насичення $C_0^{\psi}L_{\infty}$. / В.Т. Гаврилюк // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. –С. 421–427.

27. *Гаврилюк В.Т.* О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье. / В.Т. Гаврилюк // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 569–576.

28. *John B. Garnett.* Bounded Analytic Functions. Springer, 2007.

29. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984, — 469 с.

30. *Garsia S. R., Ross W. T.* A Non-Linear Extremal Problem on the Hardy Space // Comp. Meth. Funct. T. — 2009. — **9**, № 2. — P. 485—524.

31. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 623 С.

32. *Голузин Г. М.* Некоторые оценки для ограниченных функций // Матем. сб. – 1950. – **26**, № 1. – С. 7 – 18.

33. *Голузин Г. М.* Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1946. – **18**. – С. 3 – 88.

34. *Dai S., Pan Y.* Note on Schwarz–Pick estimates for bounded and positive real part analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — **136**, № 2. — P. 635—640.

35. *Двейрин М.З.* Поперечники и ε – энтропия классов функций, аналитических в единичном круге / М.З. Двейрин // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1975. – Вып. 3. – С. 32 – 46.

36. *Двейрин М. З.* Приближение функций, аналитических в единичном круге / М.З. Двейрин // Математический сборник – К.: Наукова думка. – 1976. – С. 47 – 50.

37. *Дубинин В. Н.* Геометрические версии леммы Шварца и симметризация. // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2010. — Том 383.– С. 63 – 76.

38. *Zygmund A.* On the degree of approximation of functions by Fejer means / A. Zygmund // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – V.51. – P. 274 – 278.

39. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series / A. Zygmund // Duke Math.J. — 1945. — **12**, № 4. — P. 695 — 704.

40. *Zygmund A.* Trigonometrical series. — Warsaw, 1935. — P. 162 – 164.

41. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.

42. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 538 с.

43. *C. Carathéodory* Theory of functions of a complex variable. // C. R. Acad. Sci. Paris, — 1907. — **№ 144**. — P. 1203—1206.

44. *C. Carathéodory* Theory of functions of a complex variable. // Chelsea Publ. Comp. , New York, 1960.

45. *Cleanthous G.* Monotonicity theorems for analytic functions centered at infinity. // Proc. Am. Math. Soc. , – 2014. – V.142, № 10. – P. 3545 – 3551.

46. *Ковальская И.Б.* Оценки верхних граней уклонений в метрике L_p / И.Б. Ковальская // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, №5. — С. 668–670.

47. *Ковальская И.Б.* Приближение периодических функций аналогами сум Зигмунда в в метрике C / И.Б. Ковальская // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метриках C и L_p. — Киев, 1988. — С. 3–28. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 88.14).

48. *Колмогоров А.* Zur grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. // Annals of Math., — 1935. — **№ 36**. — P. 521—526.

49. *Knese G.* A Schwarz Lemma on the Polydisk // Proc. Amer. Math. Soc., — 2007. — **135**, № 9. — P. 2759—2768.

50. *Kresin G., Maz'ya V.* Sharp Real-Part Theorems: A Unified Approach. — Berlin: Springer—Verlag, 2007. — 144 p.

51. *Крейн М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 С.

52. *Landau, E.* Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. I. und II. // Arch. Math. und Phys. — 1913. — (3) 21. — P. 42 – 50, 250 – 255.

53. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie — Berlin — New-York : Springer-Verlag, 1986. — 201 p.

54. *Landau E., Toeplitz O.* Über die gröβte Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise. // Arch. der Math. und Physik. — 1907. — (3) 11. — P. 302 – 307.

55. *Lehto O.* On the distribution of values of meromorphic functions of bounded characteristic. Acta Math. — 1954. — **91.** — P. 87—112.

56. *Lichtenstein L.* Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Conforme Abbildung, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd.II, 3rd Part, 1st Half, Heft 3,P. 181 – 377.B. G. Teubner (1919), Leipzig.

57. *Littlewood J. E.* Lectures on the Theory of Functions. Oxford University Press, Oxford, 1944. — 243 p.

58. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Some elementary inequalities in function theory // Edinburgh Math. Notes — 1945. — **35.** — P. 1—3.

59. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Extremum problems in the theory of analytic functions // Acta Math. — 1950. — **82.** — P. 275 — 325.

60. *Meremelia I.* Approximations of holomorphic functions by generalized Zygmund sums / Meremelia I., Savchuk V. // Caspian Gournal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. — 2013. — Vol. 1, №1. — P. 70–81.

61. *Меремеля І. Ю.* Точна оцінка змішаної похідної голоморфної функції в полікрузі / І. Ю. Меремеля, М. В. Савчук // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, №1. — С. 161 – 168.

62. *Меремеля І. Ю., Савчук В. В.* Мажоранти залишків рядів Тейлора обмежених голоморфних функцій // Теорія наближення функцій та

суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т.11, № 3. — С. 182 — 188.

63. *Меремеля І. Ю., Савчук В. В.* Точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених голоморфних функцій у полікрузі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1690–1697.

64. *Меремеля І. Ю.* Екстремальна задача Помпея–Ландау–Саса для обмежених голоморфних функцій в бікрузі // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т.12, № 4. — С. 216 — 225.

65. *Meremelia I.Yu.* Approximation of holomorphic functions by Zygmund means / I.Yu. Meremelia , V.V. Savchuk // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування присвячена 70–річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), 28 травня–3 червня 2012 р., Кам'янець–Подільський, Україна: Тези доповідей. — К.: Інститут математики НАН України, 2012. — С. 109 –110.

66. *Meremelia I.Yu.* Approximation of holomorphic functions by generalized Zygmund means / I.Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // International conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA – 2012) Mersin, Turkey, September 4–9, 2012: Abstracts. — P. 75.

67. *Meremelia I.* Approximation of holomorphic functions by means of Zygmund type / I.Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, September 17–21, 2012, Ukraine: Abstracts of Reports. — L'viv: Ivan Franko National University of Lviv, 2012. — C. 146 –147.

68. *Меремеля І.Ю.* Оцінка змішаної похідної голоморфної функції в полікрузі / І.Ю. Меремеля, М.В. Савчук // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75–річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — С. 251 –252.

69. *Меремеля И. Ю.* Оценка смешанной производной голоморфной функции в поликруге /И. Ю. Меремеля,М. В. Савчук // Международная конференция "Дифференциальные уровнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященная 105–летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 18–24 августа, 2013: Тезисы докладов. — Новосибирск, 2013. — С. 398.

70. *Meremelia I.* Approximation of holomorphic functions by means of Zygmund type / I.Yu. Meremelia, V. V. Savchuk // International Conference "Complex Analysis and Related Topics Lviv, September 23–28, 2013, Ukraine: Abstracts. — L'viv: Ivan Franko National University of Lviv, 2013. — С. 105 –107.

71. *Меремеля І.Ю.* Екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій / І.Ю. Меремеля, В.В. Савчук // Міжнародна математична конференція, присвячена 60–річчю В.І. Рукасова (1953–2009) "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" Слов'янськ, 21–24 травня 2014 р.: Матеріали конференції. — Слов'янськ: ДДПУ, 2014. — С. 47.

72. *Меремеля І.Ю.* Екстремальна задача для обмежених голоморфних функцій / І.Ю. Меремеля, В.В. Савчук // IV міжнародна ганська

конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня–5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — С. 128–129.

73. *Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M.* Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific Pub. Co. Inc., 1994. — 821 p.

74. *Мордасова Г.М.* Оценка остатка ряда Тейлора для аналитических функций с ограниченной r-й производной / Г.И. Мордасова // Успехи матем. наук. – 1959. – **14**, № 4. – С. 187 – 194.

75. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.

76. *Овсій Є.Ю.* Наближення класів $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ узагальненими сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т.7, № 1 — С. 162 — 186.

77. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки — 1976. — **19**, № 1. — С. 29 — 40.

78. *Островская О.В.* Приближение классов периодических функций обобщенными суммами Зигмунда в метрике C / О.В. Островская // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1999.— **51**, № 11. — С. 1704–1712.

79. *Paulsen V. I., Popescu G., Singh D.* On Bohr's inequality // Proc. London Math. Soc. – 2002. – **85**, № 3. – P. 493 – 515.

80. *Пекарский А.А.* Сравнение наилучших равномерных приближений аналитических функций в круге и на его границе / А.А. Пекарский // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2006. – **255**. – С. 227 – 232.

81. *Pompéiu D.* Sur une relation d'inégalité dans la théorie des fonctions holomorphes // Arch. der Math. und Phys. — 1912. — (3) 19. — P. 224 – 228.

82. *Poukka K. A.* Über die gröβte Schwankung einer analytischen Funktion auf einer Kreisperipherie // Arch. der Math. und Phys. — 1907. — (3) 12. — P. 251 – 254.

83. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избр. труды: в 3-х т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.

84. *Remmert R.* Theory of Complex Functions, Graduate Texts in Math., vol. 122, Springer–Verlag, 1991.

85. *Rogosinski W.* Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben / W. Rogosinski, G. Szegö // Math. Z. – 1928. – **28**. – P. 73 – 94.

86. *Rogosinski W., Shapiro H. S.* On certain extremum problems for analytic functions // Acta Math. – 1953. – **90**, № 1. – P. 287 – 318.

87. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. — 160 с.

88. *Rudin W.* Function Theory in Polydiscs. Benjamin, New York, 1969.

89. *Savchuk V.* Approximation of some classes of holomorphic functions and properties of generating kernels // Azerbaijan Math. J. — 2011. — V.1, № 2. — P. 115 — 131.

90. *Савчук В.В.* Властивості твірних ядер класів голоморфних функцій і екстремальні задачі теорії наближення // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — Т.7, № 1 — С. 235 — 263.

91. *Савчук В.В.* Екстремальні задачі теорії наближення голоморфних функцій. // Дисертація д–ра фіз.–мат. наук: 01.01.01, Нац. акад. наук України, Ін-т математики. — Київ, 2012. — 410 с.

92. *Savchuk V.* Exact constants in inequalities for Taylor coefficients of bounded holomorphic functions in the polydisk // International Conference "Approximation Theory and its Applications Dnipropetrovsk, October 8–11, 2015, Ukraine: Abstracts.— p. 63.

93. *Савчук В.В.* Наближення голоморфних функцій сумами Фейєра // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2011. — Т.8, № 1 — С. 162 — 180.

94. *Савчук В.В.* Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 8. — С. 1047 — 1067.

95. *Савчук В. В., Савчук М. В.* Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2002. — 54, № 12. — С. 1669 – 1679.

96. *Савчук В.В.* Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій / В.В. Савчук // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 1001 – 1003.

97. *Савчук В.В.* Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена / В.В. Савчук, М.В. Савчук, С.О. Чайченко // Мат. студії. – 2010. – **34**, № 2. – С. 207 – 219.

98. *Szász O.* Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe // Math. Z. — 1918. — № 1. — P. 163 – 183.

99. *Szász O.* Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitung einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt // Math. Z. – 1920. – № 8. – S. 303 – 309.

100. *Сердюк А.С., Овсій Е.Ю.* Приближение классов $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ обобщенными суммами Зигмунда // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 524 — 537.

101. *Sunouchi G.* Characterization of certain classes of functions. // Tohoku Math. J. — 1962. — **14**, № 1. — С. 127 — 134.

102. *Степанець А.И.* Аппроксимационные свойства метода Зигмунда // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 4. — С. 493 — 518.

103. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2-х ч. / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – ч. II. – 467 с.

104. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — **17**, № 5. — С. 462 — 472.

105. *Стороженко Э.А.* К вопросу о порядке приближения суммами Фейера / Э.А. Стороженко // Изв. Акад. Наук СССР. Серия математическая. – 1969. – **33**, № 1. – С. 39 – 51.

106. *Стороженко Э.А.* Приближение функций класса H^p, $0 < p \leq 1$ / Э.А. Стороженко // Матем. сб. – 1978. – Т.105, № 4. – С. 601 – 621.

107. *Тайков Л.В.* О методах суммирования рядов Тейлора / Л.В. Тайков // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 1. – С. 252 – 254.

108. *Тайков Л.В.* О наилучших линейных методах приближения классов B^r и H^r / Л.В. Тайков // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183 – 189.

109. *Тайков Л.В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций / Л.В. Тайков // Матем. заметки – 1967. – **1**, № 2. – С. 155 – 162.

110. *Турковский В. А.* О некоторых экстремальных свойствах регулярных ограниченных в круге $|z| < 1$ функций // Изв. высших учеб. зав. — 1966. — **52**, № 3. — С. 166 — 170.

111. *Fejér L.* Sur les functions bornées et intégrables // C. R. Acad. Sci. Paris — 1900. — **131**. — P. 984 — 987.

112. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962. — 420 с.

113. *Хавинсон С. Я.* Оценка сумм Тейлора ограниченных аналитических функций в круге / С.Я. Хавинсон // Докл. АН СССР – 1951. – **80**, № 3. – С. 333 – 336.

114. *Хавинсон С. Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области / С.Я. Хавинсон // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 2. – С. 25 – 98.

115. *Харшиладзе Ф. И.* Классы насыщения для некоторых процессов суммирования // Докл. АН СССР. – 1957. – **122**, № 3. – С. 352 – 355.

116. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 241 с.

117. *Chen Zh., Liu Y.* Schwarz–Pick estimates for holomorphic mappings from the polydisk to the unit ball // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — **376**. — P. 123—128.

118. *Shwarz H. A.* Gesammelte Abhandlungen. // Vol. II, Springer, Berlin, – 1890.

119. *Швецова А.М.* Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций аналитических в единичном круге / А.М. Швецова // Вiсник Харкiвського нацiонального ун-ту. Сер. ”Математика, прикладна математика i механiка”. – 2000. – № 475. – С. 208 – 217.

120. *Scheick J.T.* Polynomial approximation of functions analytic in a disk / J.T. Scheick // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**. – P. 1238 – 1243.